UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

EDER MIOTTO

A ANÁLISE COMBINATÓRIA E SEU ENSINO

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2014

EDER MIOTTO

A ANÁLISE COMBINATÓRIA E SEU ENSINO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre em Matemática".

Orientador: Mari Sano, Dra.

CURITIBA

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

M669a Miotto, Eder
2014 A análise combinatória e seu ensino / Eder Miotto.-- 2014.
85 f.: il.; 30 cm

Texto em português, com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2014.
Bibliografia: f. 82.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Análise combinatória. 3. Identidades combinatoriais. 4. Fibonacci, Números de 5. Lucas, Números de. 6. Aprendizagem. 7. Prática de ensino. 8. Professores de matemática - Formação. 9. Matemática - Dissertações. I. Sano, Mari, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD 22 -- 510

Biblioteca Central da UTFPR, Câmpus Curitiba

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Câmpus Curitiba

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Título da Dissertação No. 018

"A análise combinatória e seu ensino"

por

Eder Miotto

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 14h do dia 29 de setembro de 2014. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Profa. Mari Sano, Dra. (Presidente - UTFPR/Curitiba)	Prof. Robson da Silva, Dr. (UNIFESP/São José dos Campos)
Profa. Neusa Nogas Tocha, Dra. (UTFPR/Curitiba)	

Visto da coordenação:

Prof. Ronie Peterson Dario, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR"

À minha família (esposa, pais, irmãos, cunhadas e sobrinha) por estarem sempre ao meu lado, apoiando e incentivando.

AGRADECIMENTOS

- À minha bondosa orientadora. Sempre solícita e paciente, mesmo quando outras atividades não me permitiam desenvolver este na velocidade planejada.
- Ao meu amigo Guilherme Egg, pelas ajudas no Latex.
- A todos os amigos e colegas do Colégio Marista Santa Maria, pela compreensão durante esse trabalho.
- Aos meus alunos, causa e consequência desse trabalho.
- À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.
- À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.
- A Deus, por me dar muito mais do que pedi.

RESUMO

MIOTTO, EDER. A ANÁLISE COMBINATÓRIA E SEU ENSINO. 85 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2014.

O presente trabalho tem dois objetivos: o primeiro está relacionado ao ensino da análise combinatória nas séries do ensino fundamental 2 e ensino médio. O segundo objetivo é buscar aprofundar meus conhecimentos relacionados aos conceitos combinatoriais.

Com relação ao primeiro objetivo, o ensino da análise combinatória, na minha tragetória como docente, tem sido uma das tarefas mais árduas que o professor de matemática da educação básica enfrenta. Diante disso, surgem algumas perguntas. Por que um assunto totalmente aplicável ao cotidiano tem gerado tanta dificuldade de compreensão? Um dos objetivos desse trabalho é buscar respostas para essa pergunta e propor sugestões que possam melhorar o entendimento desse conceito.

Como segundo objetivo proposto, busquei compreender conceitos que até então, por mim, não dominados, aprofundando meu conhecimento combinatorial. Para tanto, esse trabalho possui uma parte dedicada ao estudo de conceitos combinatorias mais complexos, não abordados junto aos alunos de ensino médio mas que permitem compreender situações combinatoriais mais complexas.

Palavras-chave: Análise Combinatória no Ensino Médio, Identidades Combinatórias, Números de Fibonacci e Lucas.

ABSTRACT

MIOTTO, EDER. COMBINING EDUCATION AND ITS ANALYSIS. 85 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2014.

The present work has two major goals. The first one is related to the teaching of combinatorics in elementary school and high school. The second one is to seek further knowledge related to combinatorial concepts. Regarding the first goal, the teaching of combinatorics, in my trajectory as a teacher, has been one of the most arduous tasks that the math teacher of basic education faces. Therefore, some questions arise. Why a subject fully applicable to everyday, has generated so much trouble understanding? One of the goals of this work is to seek answers to this question and propose suggestions that can improve the understanding of this concept.

As a second proposed goal, I sought to understand concepts that hitherto were not dominated, deepening my combinatorial knowledge. Therefore, this work has section devoted to the study of more complex combinatory concepts, not addressed to the students of high school but they allow us to understand more complex combinatorial situations.

Keywords: Combinatorics in High School, Combinatorial Identities, Fibonacci Numbers and Lucas.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os problemas ligados à Análise Combinatória, de acordo com minha experiência profissional, tem gerado grandes dificuldades junto aos alunos de ensino médio. Normalmente, os livros didáticos apresentam esses conceitos apenas na 2ª série desse ciclo. Com isso, não há possibilidade de ir muito além do Princípio Fundamental da Contagem, Arranjo, Permutações e Combinação. A simples apropriação desses por parte dos alunos já demanda um tempo considerável. Tempo não mais disponível nesse momento, visto que a grande quantidade de assuntos requisitados impossibilita que o professor de matemática se atenha por um longo período sobre um mesmo conceito. Com isso, o conceito é apresentado de forma superficial. Não há tempo para se retomar, demonstrar ou aprimorar os assuntos apresentados. Além do tempo disponível, há outra hipótese que pode ser levantada: a formação do professor de matemática permite que ele domine tais assuntos? Não se deve imaginar com isso que a formação seja de responsabilidade exclusiva da universidade, mas sim algo continuado, diário. No entanto, normalmente, o professor de matemática da educação básica tem dificuldade de participar de especializações, mestrado e doutorado visto que há uma grande demanda de trabalho. Porém, essas dificuldades não são objeto principal desse estudo e focaremos apenas na aprendizagem dos conceitos combinatoriais

De acordo com o PCN de 1997, o ensino dos conceitos combinatoriais já tinha uma grande importância na formação do estudante. Com a chegada do PCN+, em 2002, a ênfase aumentou, ficando ainda mais clara a necessidade de associar a combinatória às situações cotidianas e ao raciocínio lógico matemático, como se pode verificar no trecho a seguir:

A Contagem, ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação. As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas *diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande. Esses conteúdos devem ter maior espaço e empenho de trabalho no ensino médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril. Espera-se que assim o aluno possa se orientar frente a informações de natureza estatística ou probabilística.* (PCN+, Pg 126-127)

Mesmo após tais diretrizes, dados do PISA (Programme for International Student Assessment), 2013, tem mostrado que nos últimos anos o Brasil tem melhorado lentamente sua nota em matemática. Ainda estamos na 58ª posição nessa disciplina, numa comparação entre 67 paises. Essa comparação reforça a ideia de que se deve investir na qualificação dos profissionais ligados à educação.

Em relação à formação do professor de matemática, a proposta do PROFMAT é extremamente importante pois vem sanar uma lacuna existente. No entanto, a quantidade de educadores atingidos por essa proposta é limitada, cabendo às universidades, seja nos cursos superiores ou em cursos de especialização, auxiliar na formação do professor de matemática da educação básica. Nos PCN´s, há uma citação específica relativa à formação do professor.

Finalmente, apontam-se direções e meios para a formação continuada dos professores do ensino médio, no sentido de garantir-lhes permanente instrumentação e aperfeiçoamento para o trabalho que deles se espera. (PCN+, Pg 13)

Ao professor, cabe a busca de formação continuada, participação em grupos de estudos, congressos, sempre melhorando e se atualizando, pois de acordo com George Polya, o professor deve saber mais do que ensina. Logo, não pode permanecer preso a concepções ultrapassadas.

A partir dessas orientações, nesse trabalho serão apresentadas algumas alternativas que podem facilitar a compreensão dos conceitos combinatoriais e sugestões de relações que podem ser abordadas junto aos alunos da educação básica.

De acordo com o que já foi exposto, a seguir será apresentada uma breve introdução relativa a cada Capítulo dessa dissertação.

No primeiro Capítulo estão as motivações e objetivos desse trabalho.

No segundo Capítulo são apresentadas algumas definições e a partir delas são construídas relações que auxiliarão o bom entendimento desse trabalho.

No terceiro Capítulo são apresentadas algumas sugestões de aplicações dos conceitos combinatoriais, em diferentes níveis de aprendizagem.

No quarto Capítulo estão algumas identidades combinatoriais acompanhadas de uma situação-problema e uma generalização. Nesse capítulo buscou-se mostrar algumas identidades combinatoriais normalmente não apresentadas nos livros didáticos e que podem ser estudadas e aprofundadas junto aos alunos da educação básica.

O quinto Capítulo é dedicado aos números de Fibonacci e aos números de Lucas. Nesse encontra-se um breve histórico, apresenta-se uma interpretação combinatorial e demonstra-se algumas identidades a eles relacionadas.

O sexto Capítulo é dedicado ao meu aprofundamento dos conhecimentos combinatoriais. Nele tem-se um breve histórico de Pierre de Fermat e uma demonstração combinatorial do Pequeno Teorema de Fermat.

No sétimo Capítulo buscou-se verificar se era possível aprofundar os conceitos combinatoriais junto aos alunos do ensino médio. Para tanto, aplicou-se um questionário onde a resolução se dava por identidades não trabalhadas, bem como a análise dos respectivos resultados.

No oitavo e último Capítulo estão as considerações finais, conclusões da pesquisa e sugestões.

1.1 MOTIVAÇÃO

Um dos principais motivos do estudo dos conceitos combinatórios está relacionado à aplicação nos diferentes níveis de ensino. Não é necessário utilizar conceitos matemáticos avançados para resolver situações-problema que envolvem a combinatória. No entanto, de acordo com minha experiência, alunos e professores têm apresentado grande dificuldade em compreender e aplicar os conceitos combinatoriais em problematizações.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 OBJETIVO GERAL

Aprofundar o meu conhecimento sobre Análise Combinatoria, aprimorando estratégias que melhorem o seu ensino. Para tanto, serão estudadas algumas relações combinatoriais seguidas de uma situação problema e uma generalização. Com o que está sendo apresentado, os alunos de ensino médio poderão compreender melhor os conceitos combinatoriais e diferenciá-los em vários contextos.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Aprofundar o conhecimento sobre os conceitos combinatoriais.

2. Conjecturar algumas relações combinatórias a partir de situações-problema aplicadas em sala de aula.

3. Comprovar, ou não, a possibilidade de apresentar, aos alunos, algumas relações combinatoriais agora não apresentadas.

4. Fornecer ao professor e ao aluno, material de apoio para alguns conceitos, normalmente, não apresentados em livros didáticos.

5. Desafiar o professor de matemática a se atualizar, buscando estratégias que lhe permitam ir além do que aprendeu enquanto estudante.

6. Salientar a diversidade de problemas que podem ser resolvidos usando os conceitos combinatoriais.

7. Tornar o ensino dos conceitos combinatoriais algo mais lógico e menos condicionado à aplicação de fórmulas.

Buscando atingir alguns dos objetivos propostos acima, elaborou-se um questionário que buscasse comprovar ou refutar a tese de que os alunos de ensino médio tem capacidade de compreender conceitos combinatoriais mais avançados. A pesquisa completa está no Capítulo 7, bem como os resultados que dela podemos extrair.

2 CONCEITOS INICIAIS

Antes de iniciarmos o trabalho, serão apresentadas algumas definições, nomenclaturas e relações que utilizaremos. Conhecer essas informações irá permitir uma melhor compreensão do trabalho, bem como reforça a ideia da construção do conhecimento através do raciocínio lógico, cuja orientação vem do próprio MEC.

Contagem: princípio multiplicativo; problemas de contagem.

Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos. Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem. Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem. (PCN+, Pg 127)

Enfatiza-se que todas as relações abaixo apresentadas podem ser deduzidas pelo princípio multiplicativo, no entanto, a aplicação das relações agiliza o cálculo do número de possibilidades.

2.1 PRINCÍPIO ADITIVO

A contagem de elementos faz parte da educação básica de cada criança. Desse modo, pode-se enunciar o princípio aditivo da seguinte forma:

"Sejam os conjuntos A, com m elementos, e o conjunto B, com n elementos. Sendo $A \cap B = \varnothing$, então o número de elementos de $A \cup B$ é dado por m+n".

No entanto, essa linguagem, no ensino fundamental, acaba por desmotivar o aluno a compreender a matemática. Por isso, sugere-se que o assunto seja abordado através de um exemplo.

Exemplo: Um restaurante oferece aos clientes as seguintes possibilidades de prato principal: 3 tipos diferentes de massa, 4 opções de carne branca e duas opções de carne vermelha. O cliente deseja escolher uma única opção de prato principal, desse modo, quantas são as opções disponíveis?

SOLUÇÃO:

Pelo princípio aditivo são *3+4+2* possibilidades de fazer a escolha, logo haverá *9* formas de escolher o prato principal da refeição.

2.2 PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Também conhecido como princípio multiplicativo, pode ser enunciado da seguinte forma:

"Se um evento pode ser dividido em n etapas e cada etapa possui x_i hipóteses, então o total de formas de se realizar o evento é dado por $x_1.x_2.x_3.....x_n$".

Exemplo: Um restaurante oferece aos clientes as seguintes possibilidades de compor sua refeição: 3 opções de entradas, 4 opções de prato principal e 6 opções de sobremesa. O cliente deve escolher uma única opção de entrada, prato principal e sobremesa. De quantas maneiras o cliente poderá fazer sua escolha?

SOLUÇÃO

Pelo princípio multiplicativo são *3.4.6* possibilidades de fazer a escolha, logo haverá *72* formas de compor a refeição.

2.3 FATORIAL

Define-se fatorial de um número natural n como sendo:

0!=1,

(n+1)!=(n+1).n!, com n $>$ 0

Lê-se *n!* como sendo o fatorial de *n*.

Exemplo:

2!=2.1!=2.1=2

3!=3.2!=3.2.1=6

2.4 PERMUTAÇÃO SIMPLES

Define-se Permutação Simples de *n* elementos distintos a qualquer agrupamento ordenado desses objetos.

Caso o conjunto possua *n* elementos distintos, então haverá: $n.(n-1).(n-2)....2.1$ agrupamentos. De acordo com o conceito de fatorial, pode-se representar o número acima como sendo *n!*.

A notação para o número de permutações simples de *n* elementos distintos é dada por $P_n = n!$.

É importante notar que a Permutação Simples é um caso particular do Princípio Fundamental da Contagem e toda situação que pode ser resolvida usando a permutação também poderá ser resolvida pelo princípio multiplicativo.

Exemplo: Dados 5 alunos, de quantas formas podemos organizá-los em fila?

SOLUÇÃO:

Pelo princípio multiplicativo podemos iniciar a fila com qualquer um dos 5 alunos, serão 4 escolhas para o 2º integrante da fila, 3 escolhas para o 3º e assim por diante. Logo são *5.4.3.2.1 = 120* possibilidades de organizar a fila.
No entanto, pode-se resolver essa situação usando o conceito Permutação Simples. Como os alunos são distintos e deseja-se organizá-los em filas de 5 elementos, existem $P_5 = 5!$ formas de ordená-los, o que resulta em 120 opções.

2.5 ARRANJO SIMPLES

É um caso particular de Permutação Simples e consequentemente também pode ser resolvido usando o princípio multiplicativo. Uma análise de alguns livros didáticos disponíveis no mercado indicou que alguns deles não mais apresentam o conceito de Arranjo. Provavelmente por se tratar de um caso particular do princípio multiplicativo.

Podemos enunciá-lo da seguinte forma:

"É toda sequência de p elementos distintos escolhidos de um conjunto com n elementos distintos, dado que $p \leqslant n$".

Podemos construir a relação que fornece o número de Arranjos Simples de n elementos tomados p a p partindo da seguinte situação:

Exemplo: Estando disponíveis n elementos distintos, quantas sequências contendo p elementos distintos podemos construir, adotando $p \leqslant n$?

Solução:

O primeiro elemento da sequência pode ser escolhido de n maneiras, o segundo de *n-1* maneiras, o terceiro de *n-2*, e assim por diante até que seja escolhido o últimos dos p integrantes da sequência. Essa escolha poderá ser feita de *n-p+1* formas. Usando o princípio multiplicativo são $n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)....(n-p+1)$ sequências. Manipulando algebricamente temos:

$$\frac{n.(n-1).(n-2)....(n-p+1)}{1} = \frac{n.(n-1).(n-2)...(n-p+1)p.(p-1).....(1)}{p.(p-1)....(1)} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

A notação do número de Arranjos Simples de n elementos tomados p a p pode ser dada por $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Exemplo: Uma competição é disputada por 8 atletas. De quantas maneiras podemos compor o podium, supondo não haver empates?

SOLUÇÃO:

Pelo princípio multiplicativo seriam 8 opções para o campeão, 7 para o vice e 6 para o terceiro colocado. Logo haveria $8.7.6 = 336$ formas de compor o podium.

No entanto, pode-se resolver essa situação usando o conceito Arranjo Simples. Como os alunos são 8 atletas e deseja-se escolher a sequência dos 3 melhores colocados, tem-se que $n=8$ e $p=3$. Utilizando a relação:

$$A_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8.7.6.5!}{5!} = 336.$$

Perceba que as duas formas de resolver a situação resultaram na mesma solução, no entanto a primeira é mais lógica e constrói a solução passo a passo.

2.6 PERMUTAÇÃO COM ELEMENTOS REPETIDOS

Segue o mesmo princípio da Permutação Simples, no entanto, nesse caso, ocorrem elementos repetidos. Verifique as seguintes situações:

Exemplo 1: Quantos anagramas possui a palavra bola?

SOLUÇÃO:

Como são 4 letras e pode-se iniciar a palavra com qualquer uma delas, logo teremos: 4 opções para a primeira letra, 3 opções para a segunda letra, 2 opções para a terceira letra e 1 opção para a quarta letra. Assim são $4.3.2.1 = 24$ anagramas.

Exemplo 2: Quantos anagramas possui a palavra bala?

SOLUÇÃO:

Iniciamos como se as letras fossem diferentes. Desse modo são 4 letras e pode-se iniciar a palavra com qualquer uma delas, logo teremos: 4 opções para a primeira letra, 3 opções para a segunda letra, 2 opções para a terceira letra e 1 opção para a quarta letra. Assim são $4.3.2.1 =$

24 anagramas. No entanto, existem anagramas repetidos visto que há duas letras repetidas. Permutando-se as duas letras existem *2.1=2* formas de organizá-las. Assim tem-se $\frac{4.3.2.1}{2.1} = 12$ anagramas.

No caso da Permutação com Repetição, calcula-se o total de permutações simples e divide-se pelas permutações dos símbolos repetidos, assim o número de permutações de n elementos onde há alguns elementos que se repetem a vezes, b vezes, c vezes e assim por diante, pode ser calculada rapidamente pela relação:

$P_n^{a,b,c,...} = \frac{n!}{a!.b!.c!...}$

Exemplo 3: Um casal planeja ter quatro filhos. Quantas são as formas de se obter dois meninos e duas meninas?

SOLUÇÃO:

Podemos considerar essa situação como se fossem dois homens (HH) e duas mulheres (MM). Resumindo temos (HHMM) em qualquer ordem. Considerando como sendo uma palavra de 4 letras onde há duas letras (M) e duas letras (H).

Calculando temos:

$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!.2!} = \frac{4.3.2!}{2!.2!} = 6.$

Assim são 6 formas de possíveis de se obter $2H$ e $2M$ quando se pretende ter 4 filhos.

2.7 COMBINAÇÃO SIMPLES

"É todo agrupamento de n elementos, tomados p a p, diferenciados pela natureza, sendo dado que $p \leqslant n$".

Compondo a relação a partir do Arranjo de n elementos, tomados p a p, precisamos dividir esse resultado por *p!*, visto que no Arranjo a ordem dos elementos interfere no resultado e na Combinação não. Assim temos que a Combinação de n tomados p a p é dada por:

$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$

Pode-se também apresentar a Combinação de n tomados p a p de outras duas formas: C_p^n ou ainda $\binom{n}{p}$.

A seguir são apresentados exemplos de situações onde se pode aplicar o conceito de Combinação.

Exemplo 1: Uma competição é disputada por 8 atletas. Os três melhores colocados passarão às disputas nacionais. De quantas maneiras podemos escolher os três competidores?

SOLUÇÃO:

Pelo princípio multiplicativo seriam 8 opções para o campeão, 7 para o vice e 6 para o terceiro colocado. Logo haveria $8.7.6 = 336$ formas de escolha. No entanto, a ordem dos integrantes não interfere na escolha. Assim, cada hipótese foi contada $3.2.1$ vezes. Precisa-se então dividir por *3!*. Resultando então em 56 maneiras de escolher os três competidores.

Exemplo 2: A mega sena consiste num jogo. A cartela tem 60 números dentre os quais devemos acertar 6. A aposta mínima consiste na escolha de seis números. Quantas são as apostas mínimas possíveis?

SOLUÇÃO:

Como não há diferença na ordem da escolha, temos um caso clássico de Combinação simples.

$C_{60,6} = \frac{60!}{6!(60-6)!} = \frac{60!}{6!54!} = 50.063.860.$

Desse modo, há 50.063.860 apostas mínimas possíveis para a mega sena.

2.8 CARDINALIDADE

Definição:

Dois conjuntos S e F possuem a mesma cardinalidade se existe uma função bijetora que relaciona os elementos de tais conjuntos, ou seja, uma função que seja simultaneamente injetora e sobrejetora, entre eles.

Notação:

$|S| \equiv |F|$. Lê-se que os conjuntos S e F possuem a mesma cardinalidade.

3 APLICAÇÕES COMBINATORIAIS NOS DIFERENTES NÍVEIS

Antes de inicar o estudo dos conceitos combinatoriais, decidiu-se apresentar algumas situações-problema que podem ser abordadas usando este assunto.

Normalmente, o professor de matemática trabalha linearmente, isto é, no momento em que está trabalhado com funções, aborda apenas esses conceitos. Ao trabalhar com Probabilidade não relaciona esse com a Combinatória. Ao trabalhar com Frações, não exemplifica usando o conceito de chance, por exemplo. São nesses momentos que a oportunidade de relacionar os diferentes assuntos da matemática, ao dia-a-dia do aluno, são perdidos.

A seguir são apresentadas sugestões que poderão ajudar a inserir e retomar os conceitos combinatoriais nos diferentes estágios da aprendizagem.

3.1 ENSINO FUNDAMENTAL

- Ao trabalhar com o preenchimento de tabelas já se pode utilizar o Princípio Fundamental da Contagem (multiplicativo).

  Exemplo:

  Todo dia, pela manhã, Carlinhos vai tomar café na padaria. A tabela abaixo fornece as opções de alimentação. Quantas são essas opções se Carlinho sempre escolhe um tipo de pão e um único recheio?

	PÃO FRANCÊS	PÃO DE FORMA	PÃO DE HAMBÚRGUER
PRESUNTO			
QUEIJO			
MANTEIGA			
SALAME			
TOMATE			

Figura 1: Preenchimento de tabelas usando o princípio multiplicativo.

Fonte: http://www.gentequeeduca.org.br/planos-de-aula/analise-combinatoria-simples-para-fazer-sanduiches. Acessado em 24/08/2014.

- Ao trabalhar com frações, pode-se exemplificar usando o conceito de chance (chance poderia ser sinônimo de probabilidade, no entanto, esse conceito é apresentado ao aluno nas séries finais do ensino fundamental. Por isso, aborda-se, nesse momento o conceito de espaço amostral e chance a fim de desenvolver no aluno a base necessária para o aprendizado de probabilidades) ou possibilidade, visto que nas primeiras séries do ensino fundamental 2 não é comum usarmos o termo probabilidade.

Exemplo:

1) Quantas são as possibilidades de um casal que pretende ter 1 filho?

2) Qual a chance de ser menino?

3) Quantas são as possibilidades de um casal que pretende ter 2 filhos?

4) Qual a chance de serem duas meninas?

5) Considere o lançamento de dois dados.

Figura 2: Lançamento de dois dados.

Fonte:http://www.amma.com.pt/?p=6945. Acessado em 24/08/2014.

a) Quando observamos as duas faces voltadas para cima, quantas são as possibilidades de soma ?

b) Em quantas delas, as faces fornecem números iguais?

- Ao iniciar o estudo das possibilidades, em probabilidades, construir a árvore e enfatizar o Princípio da Contagem, pois através dele pode-se construir grande parte das relações combinatoriais.

Exemplo:

Uma lanchonete oferece aos seus clientes as seguintes opções de lanches.

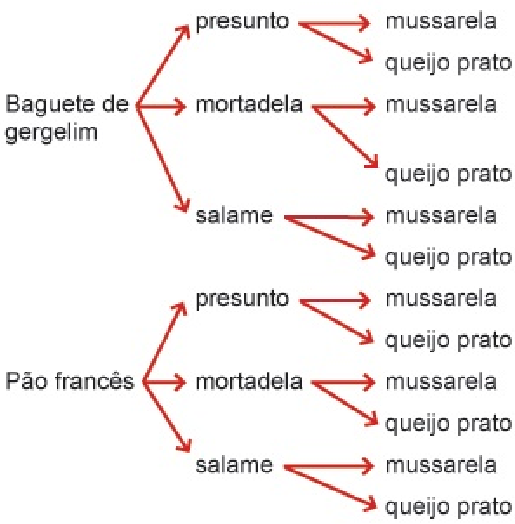


Figura 3: Árvore de possibilidades.

Fonte: http://revistaescola.abril.com.br/matematica/pratica-pedagogica/diagnostico-incial-o-que-eles-ja-sabem-528156.shtml?page=3. Acessado em 24/08/2014.

Quantos lanches podemos formar com as opções apresentadas acima?

3.2 ENSINO MÉDIO

- Ao iniciar o estudo de conceitos combinatoriais, pode-se abordar o princípio das Gavetas de Dirichlet (Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13/02/1805 - 05/05/1859) matemático alemão), que pode ser simplificadamente enunciado da seguinte forma: " tendo-se $n+1$ livros e n gavetas, colocando-se tais livros nessas gavetas, então existirá uma gaveta onde haverá pelo menos 2 livros".

Figura 4: Princípio das gavetas de Dirichlet.

Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/texto-002-principio-das-casas-dos-pombos/. Acessado em 24/08/2014.

Exemplo:

O professor pode orientar seus alunos para que perguntem à suas mães em que dia da semana eles nasceram. Na aula seguinte poderá perguntar à classe:

a) Qual o número mínimo de alunos que devo selecionar para ter certeza que pelo menos dois de vocês nasceram no mesmo dia da semana?

b) Qual o número mínimo de alunos que devo selecionar para ter certeza que pelo menos dois de vocês nasceram no mesmo dia do mês?

c) Qual o número mínimo de alunos que devo selecionar para ter certeza que pelo menos dois de vocês nasceram no mesmo dia do ano?

d) Qual o número mínimo de alunos que devo selecionar para ter certeza de que pelo menos três de vocês nasceram no mesmo dia da semana?

- Ao aprofundar os conceitos combinatoriais, apresentar o triângulo de Pascal e relacioná-lo ao desenvolvimento de um binômio. Relembrar os alunos da dificuldade enfrentada por eles, durante o 8º ano do ensino fundamental, no estudo dos trinômios quadrados perfeitos. Desenvolver um binômio para exemplificar.

Exemplos:

1) Desenvolva os seguintes binômios, apresenatando o resultado em potências decrescentes de x:

a) $(x+a)^2$=

b) $(x+a)^3$=

c) $(x+a)^4$=

2) Qual a relação existente entre os coeficientes dos polinômios obtidos acima e o triângulo de Pascal?

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1

1				
1	1			
1	2	1		
1	3	3	1	
1	4	6	4	1

Figura 5: Duas formas de apresentar o Triângulo de Pascal.

- Relacionar a matemática à história através de seus personagens e filmes como **Quebrando a Banca** e **O Código Da Vinci**.

Exemplo:

No filme “Quebrando a Banca”o professor apresenta o famoso problema das portas ou paradoxo de Monty Hall.

O problema de Monty Hall, também conhecido por paradoxo de Monty Hall é um problema matemático que surgiu em um concurso de televisão dos Estados Unidos chamado Let´s Make a Deal (Vamos Fazer um Acordo), exibido na década de 1970, o qual transcrevemos a seguir:

O jogo consiste no seguinte: Monty Hall (o apresentador) apresentava 3 portas aos concorrentes, sabendo que atrás de uma delas está um carro (prêmio bom) e que as outras têm prêmios de pouco valor.
Na 1ª etapa o concorrente escolhe uma porta (que ainda não é aberta);
Em seguida Monty abre uma das outras duas portas que o concorrente não escolheu, sabendo que o carro não se encontra aí.

Agora com duas portas apenas para escolher, pois uma delas já se viu, na 2ª etapa, que não tinha o prêmio e sabendo que o carro está atrás de uma delas, o concorrente tem que se decidir se permanece com a porta que escolheu no início do jogo e abre-a ou se muda para a outra porta que ainda está fechada para então a abrir.

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Problema_de_Monty_Hall. Acessado em 12/10/2014.

De acordo com o filme, por que é vantajoso mudar de porta assim que o apresentador abre uma delas?

- Desafiar o aluno com problemas que exigam mais que uma simples aplicação de fórmulas.

Exemplo:

1) De quantas formas podemos dividir sete maçãs idênticas entre três amigos?

2) E se for necessário que cada um deles fique com, pelo menos, uma maçã?

Em ambos os casos, a solução é obtida através de uma permutação com elementos repetidos.

No caso da 1ª questão, a solução é $P_{10}^{7,3} = \frac{10!}{7!.3!} = 120$.

No caso da 2ª questão, a solução é $P_{6}^{3,3} = \frac{6!}{3!.3!} = 20$.

Figura 6: Divisão de objetos iguais.

Fonte: http:http://slideplayer.com.br/slide/364950/. Acessado em 24/08/2014.

- Usar os exemplos de jogos, cuja teoria, normalmente está embasada nos conceitos combinatoriais.

Exemplo:

O professor providencia volantes de apostas de jogos administrados pela Caixa Econômica Federal. Tais volantes podem ser encontrados em lotéricas.

Repassando a cada aluno um dado volante, agora vamos verificar as informações contidas no verso do mesmo e procurar entendê-las.

O professor pode levantar os seguintes questionamentos:

– Quantas são as possibilidades de apostas na loteria esportiva?

– Como podemos obter esse valor sem contarmos todas elas?

– Quantas são as possibilidades de apostas na mega sena?

– Por que a aposta de 6 dezenas, na mega sena, custa $2,50$ reais e a aposta com 7 dezenas custa $17,50$ reais?

Figura 7: Exemplos de jogos ligados à combinatória.

Fonte: http://www.alemdascurvas.com/2010_09_01_archive.html.

http://www.mais-oportunidades.com/category/ganhar-dinheiro-na-loteria/. Acessado em 24/08/2014.

- Aproximar a linguagem matemática da linguagem popular, pois é comum ouvirmos a seguinte frase: “Faltando duas rodadas para o encerramento do campeonato, é necessário haver uma *Combinação* de resultados para que o time A seja campeão”. Por que *Combinação*? O que isso indica?

Enfim, não se deve perder a oportunidade de relacionar conceitos matemáticos ao dia-a-dia do aluno. Enfatizar que conceitos matemáticos são usados no cotidiano do aluno e às vezes passam despercebidos.

No próximo Capítulo, tem-se algumas identidades combinatoriais que podem ser trabalhadas junto aos alunos de ensino médio.

4 IDENTIDADES COMBINATORIAIS

Cada identidade será apresentada seguida de uma situação-problema. A situação proposta será resolvida de duas formas distintas. Como as duas formas resultam na mesma solução, concluiremos que são equivalentes. No entanto, buscando a contextualização, o ponto de partida será sempre um exemplo ou situação-problema, a fim de ambientar o aluno e permitir que perceba a empregabilidade da identidade. Ao final, será apresentada uma generalização da identidade utilizada na resolução da situação-problema. A compreensão das demonstrações sugere, como foi apresentado no resumo, que os alunos podem e devem ser desafiados e encorajados a buscar soluções de problemas mais complexos. Assim, cabe ao professor orientá-los nessa trajetória, sempre buscando a melhoria do ensino.

A primeira identidade se refere ao conceito de complementaridade envolvendo Combinação.

Apesar de ser simples e facilitar muito o trabalho, muitos livros didáticos não a apresentam.

4.1 IDENTIDADE 1

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Situação-problema:

Uma equipe de futebol de salão é composta por 5 integrantes. O treinador irá premiar, com um passeio, os dois que mais se destacarem durante o campeonato escolar. De quantas formas poderão ser feitas as escolhas?

Solução 1:

Pode-se escolher os dois que farão o passeio, nesse caso haveria $C_{5,2}$.

Efetuando-se os cálculos resultam 10 hipóteses.

Solução 2:

Ao invés de escolher os dois que farão o passeio, o treinador poderia escolher os três que não farão o passeio. Assim, escolheria os não premiados e por consequência, os outros fariam o passeio.

Assim, resultam $C_{5,3}$. Da mesma forma, efetuando-se os cálculos, tem-se 10 hipóteses.

Conclusão:

Como as duas formas de resolver a situação geraram um mesmo resultado, a relação $C_{5,2} = C_{5,3}$ é válida.

Generalização:

Podería-se apresentar essa identidade em forma de exercício:

Uma empresa com n funcionários precisa montar a escala de trabalho em dois turnos: diurno e noturno. Quantas são as formas de escolher k funcionários para o turno diurno?

Solução 1:

A primeira solução é direta, pois trata-se de uma aplicação simples do conceito de Combinação, ou seja, $C_{n,k}$.

Solução 2:

Outra forma de resolver esse problema é escolher inicialmente os funcionários do turno da noite. Para essa escolha devería-se selecionar $n-k$ funcionários. A quantidade de formas de se escolher esse grupo é $C_{n,n-k}$. Os funcionários que não fizerem parte desse grupo estarão no turno diurno.

Conclusão:

Como as duas formas de responder são válidas, tem-se que $C_{n,k} = C_{n,n-k}$, o que confirma o princípio da complementaridade no conceito de Combinação.

A próxima identidade é conhecida como relação de Stifel (matemático alemão, 1487-1567) ou também como regra Pascal (matemático francês, 1623-1662).

Nessa identidade, espera-se que o aluno entenda que a composição das partes de um conjunto gera o todo.

4.2 IDENTIDADE 2

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Situação-problema:

Quantas comissões com 4 membros podem ser formadas com 10 pessoas?

Solução 1:

A primeira solução é direta, ou seja, $C_{10,4}$. Disso resultam 210 comissões distintas.

Solução 2:

Outra forma de resolver essa situação é imaginar que um dos integrantes do grupo, por hipótese João, seja previamente escolhido.

Em quantas dessas comissões João está presente?

A solução é $C_{9,3} = 84$.

Em quantas João não está presente? $C_{9,4} = 126$.

Somando-se as comissões onde ele está presente com as que ele não está presente resulta o total de comissões, pois, $126 + 84 = 210$.

Conclusão:

Como as duas resoluções fornecem um mesmo valor, pode-se concluir que $C_{10,4} = C_{9,4} + C_{9,3}$.

Na sequência, será apresentada uma generalização da relação de Stifel, valendo para quaisquer valores naturais n e p, desde que $n \geq p$.

Generalização:

Dado um conjunto A, com n elementos, quantos subconjuntos de A, com k elementos podemos construir?

Solução 1:

A primeira solução é direta e decorre do conceito de Combinação. Assim, são $C_{n,k}$ formas de se escolher.

Solução 2:

Outra forma de resolver essa situação é considerando **a** um dos elementos do conjunto A.

Em quantos subconjuntos de A, **a** está presente?

A solução é $C_{n-1,k-1}$.

Em quantos subconjuntos de A, **a** não está presente?

A solução é $C_{n-1,k}$.

Assim, o total de subconjuntos com k elementos a partir de um conjunto com n elementos pode ser dado por $C_{n-1,k} + C_{n-1,k-1}$.

Conclusão:

Desse modo conclui-se que a relação de Stifel é válida, ou seja,

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

.

A próxima identidade está relacionada à quantidade de subconjuntos que um dado conjunto pode ter. Normalmente, os professores de 1ª série do ensino médio, ao apresentarem os conceitos de conjuntos questionam os educandos sobre a quantidade de subconjuntos. A relação apresentada é na realidade uma identidade combinatorial, como veremos a seguir.

4.3 IDENTIDADE 3

$\sum_{b=0}^{n} \binom{n}{b} = 2^n$

Situação-problema:

Uma turma com 10 alunos pode encaminhar representantes para a elaboração de um documento referente às normas escolares. De quantas formas a turma poderá escolher, ou não, seus representantes?

Solução 1:

Inicialmente, pode-se perguntar a cada um dos 10 alunos se gostaria de fazer parte do referido grupo. Cada aluno pode responder de duas formas distintas: sim, desejo participar, ou não, não desejo participar. Pelo princípio multiplicativo haveria $2.2.2.2.2.2.2.2.2.2$ respostas possíveis de escolher seus representantes, incluindo a hipótese em que não há representantes.

Solução 2:

A segunda forma de solucionar essa questão passa pelo conceito de Combinação. Imaginando que a classe não enviasse representantes, tem-se $C_{10,0}$ hipóteses. Caso enviasse 1 representante haveria $C_{10,1}$ hipóteses. Caso enviasse 2 representantes seriam $C_{10,2}$ hipóteses e assim sucessivamente até que os 10 alunos escolhessem ser representantes. Nesse caso seria $C_{10,10}$ hipóteses. Desse modo, o total de formas de se escolher os representantes poderia ser dado pela soma

$C_{10,0} + C_{10,1} + C_{10,2} + C_{10,3} + ... + C_{10,10}$ hipóteses

ou

$\sum_{b=0}^{10} \binom{10}{b}$.

Calculando-se essa soma obtemos 1024. Isto é, são 1024 formas de escolher os representantes. Vale ressaltar que dentro desse valor está incluída a hipótese em que não haveria representantes da sala.

Conclusão:

Desse modo, as duas soluções fornecem as mesma resposta, isto é,

$2^{10} = C_{10,0} + C_{10,1} + C_{10,2} + C_{10,3} + ... + C_{10,10} = \sum_{b=0}^{10} \binom{10}{b}$.

Generalização:

A situação acima pode ser generalizada da seguinte forma: quantos subconjuntos possui um conjunto com n elementos?

Solução 1:

Como o conjunto possui n elementos, cada elemento pertencente ao conjunto pode ou não estar no subconjunto que se deseja encontrar. Assim, cada elemento teria duas opções: estar ou não estar no subconjunto.

Pelo princípio multiplicativo seriam $2.2.2.......2.2.2 = 2^n$ formas de montar o subconjunto em questão.

Solução 2:

Utilizando o conceito de Combinação a solução seria:

$C_{n,0}$ subconjunto sem elementos (conjunto vazio).

$C_{n,1}$ subconjuntos com 1 elemento.

$C_{n,2}$ subconjuntos com 2 elementos.

.

.

.

$C_{n,n}$ subconjunto com n elementos. Nesse caso seria só o próprio conjunto.

Assim, a quantidade de subconjuntos é dada:

$C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + ... + C_{n,n} = \sum_{b=0}^{n} \binom{n}{b}$.

Conclusão:

De acordo com as relações apresentadas, para todo n natural vale a relação:

$\sum_{b=0}^{n} \binom{n}{b} = 2^n$.

4.4 IDENTIDADE 4

$$k \,.\, \binom{n}{k} = n.\, \binom{n-1}{k-1}$$

Situação-problema:

Uma sala possui 10 alunos. Desses, precisa-se escolher 4 para representar a classe em um congresso que será realizado na cidade vizinha. No entanto, um dos 4 escolhidos deverá viajar antecipadamente para preparar as acomodações. De quantas formas pode-se escolher os representantes, incluindo aquele que irá viajar antecipadamente?

Solução 1:

Inicialmente, calcula-se quantos grupos de 4 elementos podem ser formados. A solução é $C_{10,4}$ ou seja, 210 hipóteses. Escolhidos os 4 integrantes, precisa-se selecionar um deles para viajar antes. Assim, são 4 possibilidades. Pelo princípio multiplicativo, são $210 \,.\, 4 = 840$ possibilidades de escolher o grupo dos representantes, incluindo aquele que irá viajar antecipadamente.

Solução 2:

Pode-se solucionar a situação acima de outra forma. Escolhendo inicialmente aquele que irá viajar antecipadamente, haveria 10 possibilidades. Após essa etapa, restariam 9 integrantes e desses precisa-se escolher os outros 3 membros que somados ao já escolhido formariam o grupo com 4 integrantes. Nessa segunda etapa haveria $C_{9,3}$ que resulta em 84 possibilidades. Novamente, pelo princípio multiplicativo, serão $10.84 = 840$ possibilidades de escolher o grupo que representará a classe.

Conclusão:

De acordo com as soluções acima, pode-se concluir que as duas formas de solucionar a situação-problema são válidas, apesar de passarem por caminhos diferentes.

Generalização:

Essa identidade pode ser generalizada da seguinte forma:

$$k.\, \binom{n}{k} = n.\, \binom{n-1}{k-1}.$$

Para facilitar a compreensão, toma-se a seguinte situação inicial.

Supondo que deseja-se criar um comitê com k alunos de uma classe de n alunos, onde um dos membros da comissão é designado como presidente. Quantos comitês podem ser formados?

Solução 1:

Como são n estudantes, pode-se formar $C_{n,k}$ grupos. Selecionando-se um desses grupos, aleatoriamente, deve-se escolher um dos k integrantes do grupo para ser presidente. Essa escolha pode ser feita de k formas. Usando o Pricípio Fundamental da Contagem resulta

$k \, . \, C_{n,k}$.

Fazendo os cálculos temos

$\frac{n!.k}{k!\,.\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,.\,(n-k)!}$.

Solução 2:

Outra forma de solucionar o problema acima é escolhendo, inicialmente, o presidente. Isso poderá ser feito de n maneiras distintas. Depois de escolhido o presidente, restarão $n-1$ alunos. Desses, seleciona-se os $k-1$ outros representantes. Essa escolha poderá ser feita de $C_{n-1,k-1}$ formas. Usando, novamente, o Princípio Fundamental da Contagem, resulta

$n.C_{n-1,k-1}$.

Fazendo os cálculos

$\frac{n.\,(n-1)!}{(k-1)!.\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!.(n-k)!}$.

Conclusão:

De acordo com as situações apresentadas nesse item, conclui-se que a relação

$k.\,\binom{n}{k} = n.\,\binom{n-1}{k-1}$

é válida qualquer que seja $n \geq k \geqslant 1$.

4.5 IDENTIDADE 5

$\binom{n}{k}.\,\binom{k}{p} = \binom{n}{p}.\,\binom{n-p}{k-p}$

Situação-problema:

Considere um grupo de escoteiros composto por 15 integrantes. Desses, serão selecionados 5 para fazer um treinamento focado em técnicas de sobrevivência na mata. Ao chegarem ao local determinado, os cinco integrantes deverão selecionar 2 que ficarão responsáveis pela construção de um abrigo para que o grupo possa repousar em segurança. De quantas maneiras se pode selecionar os cinco integrantes e desses, posteriormente, os dois integrantes responsáveis pela construção do abrigo?

Solução 1:

Inicialmente pode-se escolher os cinco integrantes que farão parte do treinamento. Isto é, $C_{15,5}$ possíveis escolhas. Escolhido o grupo com 5 membros, deve-se proceder na escolha dos 2 que farão o abrigo. Aqui resultam $C_{5,2}$ possíveis escolhas.

Aplicado-se o princípio multiplicativo

$C_{15,5} \cdot C_{5,2} = \frac{15!}{10!.5!} \cdot \frac{5!}{3!.2!} = \frac{15!}{10!.3!.2!}.$

Solução 2:

Pode-se selecionar, inicialmente, os dois integrantes que ficarão responsáveis pela construção do abrigo. Isso é, $C_{15,2}$. Dentre os demais, precisa-se escolher 3 outros membros que irão compor a equipe. Assim tem-se $C_{13,3}$.

Pelo princípio multiplicativo

$C_{15,2} \cdot C_{13,3} = \frac{15!}{13!.2!} \cdot \frac{13!}{3!.10!} = \frac{15!}{10!.3!.2!}.$

Conclusão:

Efetuando-se as operações indicadas acima, percebe-se que as duas soluções resultam em uma mesma resposta. Como os valores são relativamente grandes, optou-se por mantê-los na forma fatorada, o que não interfere na análise dos seus resultados.

Generalização:

Supondo que $n \geq k \geq p$ será generalizada a relação:

$\binom{n}{k} \cdot \binom{k}{p} = \binom{n}{p} \cdot \binom{n-p}{k-p}$

Seja um concurso público em que participam na primeira fase n candidatos. Desses, sabe-se que k candidatos passarão à segunda fase, onde haverá outra avaliação e dessa serão selecionados p candidatos, que estarão aprovados no concurso. Quantas formas há de selecionar os grupos que passarão por cada fase até que se chegue aos aprovados?

Solução 1:

Selecionando, inicialmente, um conjunto com k candidatos dentre os n possíveis. Assim resultam $C_{n,k}$ possibilidades. Dentre os k selecionados, escolhe-se um conjunto com p elementos. Disso resultam outras $C_{k,p}$ possibilidades. Pelo princípio multiplicativo, $C_{n,k}\ .\ C_{k,p}$ possibilidades de se obter os aprovados no concurso.

Afetuando-se os cálculos:

$C_{n,k}\ .\ C_{k,p} = \frac{n!}{k!.(n-k)!} \cdot \frac{k!}{p!.(k-p)!} = \frac{n!}{(n-k)!\ .\ p!\ .\ (k-p)!}.$

Solução 2:

Outra forma de solucionar a situação é selecionando inicialmente o grupo que será aprovado no concurso. Disso resultam $C_{n,p}$ hipóteses. No entanto, deve-se selecionar os integrantes que passaram para a segunda fase do processo, mas não foram aprovados.

Excluídos os p aprovados, restam $n-p$ integrantes dentre os quais seleciona-se $k-p$. Calculando resulta $C_{n-p,k-p}$. Usando o Princípio Fundamental da Contagem:

$C_{n,p}\ .\ C_{n-p,k-p} = \frac{n!}{p!.(n-p)!} \cdot \frac{(n-p)!}{(n-k)!.(k-p)!} = \frac{n!}{(n-k)!\ .\ p!\ .\ (k-p)!}.$

Conclusão:

De acordo com a generalização acima, pode-se afirmar que a identidade

$\binom{n}{k} \cdot \binom{k}{p} = \binom{n}{p} \cdot \binom{n-p}{k-p}$

é válida sendo $n \geqslant k \geqslant p$.

Tomando-se $p = 1$ nessa identidade, obtem-se a identidade 4.

5 NÚMEROS DE FIBONACCI E LUCAS

5.1 HISTÓRICO

Leonard de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, nasceu em Pisa, Itália, em 1180 e faleceu em 1250. O pai de Leonard era chamado Bonacci, por isso o filho era conhecido como Fibonacci. Bonacci era mercador e frequentemente viajava até o norte da África. Muitas vezes, Leonard acompanhava o pai e certamente essas viagens contribuíram muito para a formação do jovem Leonard. Aliás, foi aí que Leonard teve o primeiro contato com o sistema de numeração hindu-árabe, visto que na Itália ainda utilizava-se o sistema romano de numeração.

Em 1202 publicou o livro “Liber Abaci”, no qual explica como utilizar o novo sistema de numeração, suas operações, abordagens de temas ligados à geometria e à àlgebra bem como problemas de aplicação.

O nome Fibonacci se tornou conhecido graças ao matemático francês, Edouard Lucas, que ao editar um trabalho, associou o nome Fibonacci à sequência que representava a solução de um dos problemas propostos por Leonard em seu livro “Liber Abaci”.

Edouard Lucas (1842-1891) nasceu e viveu grande parte da sua vida na França. Dedicou-se ao estudo dos números primos, encontrando o maior dos números primos, antes da era computacional. Desenvolveu o Cálculo de Umbral, ou Cálculo do Limite, muito utilizado atualmente na saúde, onde permite que se possa determinar quando uma certa doença está no limite de se tornar uma epidemia. Além do estudo de uma matemática formal, acadêmica, dedicou-se também à parte lúdica criando jogos que hoje ainda são muito utilizados tais como Torre de Hanoi e o quebra-cabeças de Baguenaudier, mais conhecido como anéis chineses.

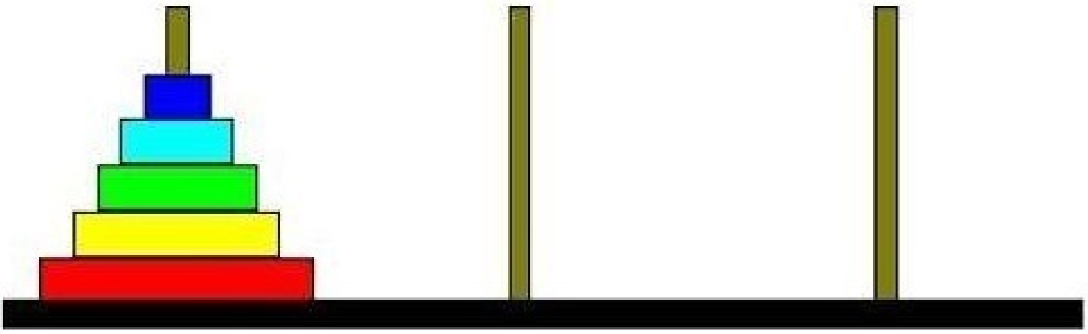


Figura 8: Torre de Hanoi.

Fonte: http://revista.elarcondeclio.com.ar/generalizando-en-matematica/.

Acessado em 26/07/2014.

Figura 9: Quebra cabeça de Baquenaudier ou anéis chineses.

Fonte: http://pt.aliexpress.com/w/wholesale-brain-teaser-test-toy.html.

Acessado em 26/07/2014.

Além das descobertas e invenções acima, Edouard Lucas estudou a sequência que batizou com o nome de sequência de Fibonacci. Essa sequência já era conhecida, no entanto, foi Edouard quem inicialmente a denominou sequência de Fibonacci. Ao editar o livro, Edouard se deparou com o problema dos coelhos e a partir desse momento a sequência de Fibonacci entra para a história. Além da sequência de Fibonacci, Edouard estudou outras sequências, uma delas que leva o nome de sequência de Lucas, que será estudada posteriormente.

A seguir, está o referido problema e bem como uma solução.

5.2 O PROBLEMA DOS COELHOS

Em um pátio fechado coloca-se um casal de coelhos recém nascido (inicialmente não fértil). Supondo que em cada mês, a partir do segundo mês de vida, cada casal dá origem a um novo casal de coelhos, ao fim de um ano, supondo não haver mortes, quantos casais estarão no pátio?

A solução é aparentemente simples, mas é necessário prestar atenção na fertilidade do casal e de seus descendentes.

A seguir, a descrição das quantidades de casais, mês a mês, para os cinco primeiros meses:

Ao final do 1º mês haverá apenas 1 casal: 1 casal que ainda não pode gerar descendentes (não fértil).

Ao final do 2º mês, ainda, 1 casal: 1 casal inicial (fértil) e nenhum casal descendente.

Ao final do 3º mês serão 2 casais: 1 casal fértil (casal inicial) e 1 casal descendente (não fértil).

Ao final do 4º mês haverá 3 casais: 2 casais férteis (casal inicial + 1 casal descendentes) e 1 casal descendentes (não fértil).

Ao final do 5º mês serão 5 casais: 3 casais férteis (casal inicial + 2 casais descendentes) e 2 casais descendentes (não férteis).

Resumindo o processo tería-se a seguinte quantidade de casais de coelhos ao final de cada mês:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Assim, ao final do 1º ano, haveria 144 casais de coelhos no pátio.

A tabela abaixo permite uma melhor visualização da composição dessa sequência, mês a mês.

mês	casais férteis	casais não férteis	total de casais
1º	0	1	1
2º	1	0	1
3º	1	1	2
4º	2	1	3
5º	3	2	5
6º	5	3	8
7º	8	5	13
8º	13	8	21
9º	21	13	34
10º	34	21	55
11º	55	34	89
12º	89	55	144

A sequência dos números de Fibonacci é gerada a partir de uma relação de recorrência.

Uma relação de recorrência consiste em definir condições iniciais e gerar uma relação que expresse cada termo em função dos termos anteriores.

Construir relações de recorrência facilita muito o trabalho na resolução de alguns problemas combinatoriais.

A construção da tabela anterior facilita ainda mais a formulação da recorrência de Fibonacci.

Para um mês aleatório, por exemplo o 5º, como não há mortes, basta somar a quantidade de casais existentes no 4º mês com a quantidade de nascimentos nesse mês. Essa quantidade é fácil de se calcular pois equivale ao número de casais com pelo menos dois meses, o que corresponde ao número de casais do 3º mês. Sendo F_n o número de casais do n-ésimo mês, o argumento acima gera a equação: $F_5 = F_4 + F_3$. No entanto, precisa-se mostrar que essa relação é válida para qualquer mês. Porém, substituindo-se o 5º mês por n -ésimo, o 4º mês por $(n-1)$-ésimo e o 3º mês por $(n-2)$-ésimo, a relação continua verdadeira.

Basta então definir as condições iniciais.

Associando-se os números de Fibonacci com a quantidade de casais de coelhos, como fez Edouard Lucas, temos que ao final do 1º mês havia apenas um casal de coelhos, ao final do 2º mês havia ainda apenas um casal de coelhos. Assim, $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$. Definindo a sequência de Fibonacci temos:

$F_1 = 1, \quad F_2 = 1.$

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

para $n \geq 3$.

Definidos os termos iniciais e a recorrência, pode-se encontrar termos anteriores aos que definem as condições iniciais.

Estendendo a sequência: $F_2 = F_1 + F_0$.

Desse modo obtêm-se $F_0 = 0$. Nesse caso definiríamos a sequência como:

$F_0 = 0, \; F_1 = 1.$

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

para $n \geq 2$.

Podemos encontrar a fórmula fechada para o n-ésimo termo de uma sequência qualquer. No caso da sequência de Fibonacci, essa fórmula pode ser obtida a partir da fórmula de Binet.

Proposição:

Seja F_n o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci, então:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

para todo natural $n \geqslant 1$.

Demonstração.

Procedemos por indução em n.

Para *n=1*

$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}.[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1] = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1.$

Suponhamos que para todo inteiro $0 < k \leqslant n$ a expressão

$$F_k \ = \ \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k$$

é válida.

Mostraremos que

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}.$$

Como F_n é um número de Fibonacci temos que

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Pela hipótese indutiva

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

$$F_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}$$

Manipulando algebricamente obtém-se:

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}.(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \frac{1}{\sqrt{5}}.(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}.(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}.(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}.$$

Nota-se que $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ e $(\frac{1-\sqrt{5}}{2})$ são raízes da equação $x^2 = x+1$.

Então $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1}$.

Do mesmo modo, $(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1} = (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}$.

Assim,

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}.[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}].$$

$\square$

5.3 DEFINIÇÃO DOS NÚMEROS DE FIBONACCI E DE LUCAS

Pode-se definir, recursivamente, a sequência de Fibonacci da seguinte forma: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, com $n \geq 3$.

Assim, tem-se que os números de Fibonacci são: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Do mesmo modo que a sequência de Fibonacci, a sequência de Lucas também pode ser definida recursivamente. Essa obedece a seguinte lei de formação: $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ com $n \geq 2$.

No entanto, a sequência de Lucas parte de $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$.

Assim, os números de Lucas são: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ...

5.4 INTERPRETAÇÃO COMBINATORIAL DOS NÚMEROS DE FIBONACCI

Nessa secção, será abordada a sequência de Fibonacci sob um olhar combinatorial, seguindo a teoria de (Benjamim; Quinn; 2003). Assim, buscar-se-á interpretá-la usando os conceitos da combinatória.

Toma-se a seguinte situação-problema:

Quantas sequências envolvendo 1 e 2 existem de modo que a soma seja n, sendo n natural?

Veja as possíveis soluções para $n \leqslant 5$:

Sendo n = 0, então há 0 sequências.

Para n = 1 existe 1 sequência: 1.

Para n = 2 são 2 sequências:1+1, 2.

Para n = 3 haverá 3 sequências: 1+1+1, 1+2, 2+1.

Para n = 4 serão 5 sequências: 1+1+1+1, 1+1+2, 1+2+1, 2+1+1, 2+2.

Para n = 5 haverá 8 sequências: 1+1+1+1+1, 1+1+1+2, 1+1+2+1, 1+2+1+1, 2+1+1+1, 1+2+2, 2+1+2, 2+2+1.

Pode-se melhor visualizar as relações entre a soma dos termos, a quantidade de soluções e os números de Fibonacci, na tabela a seguir:

n=0	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7
	1	11	111	1111	11111	111111	1111111
		2	12	112	1112	11112	111112
			21	121	1121	11121	111121
				211	1211	11211	111211
				22	2111	12111	112111
					122	21111	121111
					212	1122	211111
					221	1212	11122
						1221	11212
						2211	11221
						2112	12112
						2121	12121
						222	12211
							21112
							21121
							21211
							22111
							1222
							2122
							2212
							2221
$f_0 = 0$	$f_1 = 1$	$f_2 = 2$	$f_3 = 3$	$f_4 = 5$	$f_5 = 8$	$f_6 = 13$	$f_7 = 21$

Percebe-se que há, aparentemente, uma relação entre a soma que resulta n e a quantidade de soluções para se obter tal soma. Considerando f_n como sendo a quantidade de soluções envolvendo 1 e 2, excluíndo-se $f_0 = 0$, intuitivamente pode-se supor que vale a relação $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para $n > 1$ sendo $f_1 = 1$ e $f_2 = 2$ que seriam, respectivamente, a quantidade de soluções para soma 1 e 2.

Resta, no entanto, provar essa relação.

Demonstração.

Supondo $f_{n-2} = k$, isso é, existem k maneiras de se obter $n-2$ como soma dos algarismos 1 e 2. Do mesmo modo, tomando $f_{n-1} = p$, isso é, existem p maneiras de se obter a soma $n-1$ usando os algarismos 1 e 2.

Como $n-2$, $n-1$ e n são três números consecutivos, existem duas formas de se obter a soma n, usando os algarismos 1 e 2:

1ª Forma:

Considere todas as p maneiras de se obter a soma $n-1$. Acrescentando 1 a todas elas resultam como soma o valor n. Assim, tem-se nessa 1ª forma, p modos de obter soma n.

2º Forma:

Pode-se acrescentar 2 a todas as k maneiras de se chegar a soma $n-2$. Desse modo a soma passaria a ser n. Assim tería-se, nessa 2ª forma, k modos de obter soma n.

Conclusão

Desse modo, a soma n, usando os algarismos 1 e 2, pode ser obtida de $p+k$ maneiras, ou seja, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

□

Porém, pode-se apresentar a interpretação combinatorial de uma forma geométrica.

Refazendo a pergunta tem-se:

De quantas maneiras diferentes pode-se preencher uma faixa, formada por 1xn células, com quadrados e dominós?

Seja f_n o número de maneiras de preencher uma faixa, de comprimento n, com quadrados e dominós. Desse modo:

$f_1 = 1$ pois com uma célula, obrigatoriamente, o preenchimento será feito com um quadrado.

Pode-se verificar essa situação na figura a seguir:

$f_2 = 2$ pois pode-se preencher com dois quadrados ou com um dominó.

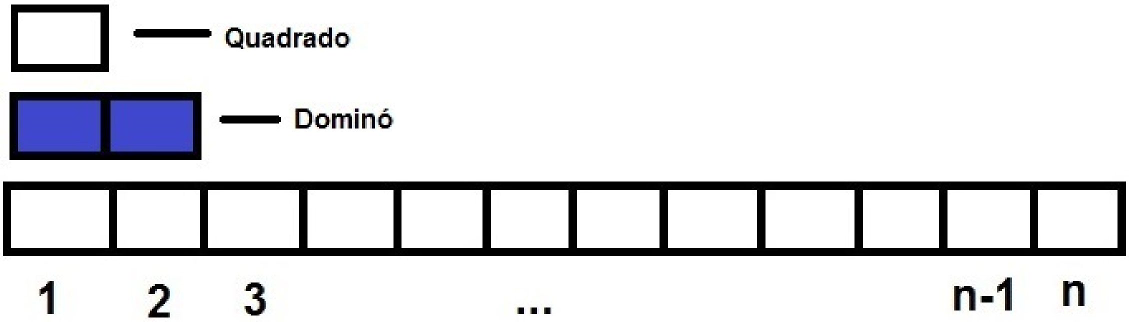


Figura 10: Quadrado, dominó e faixa com n células.

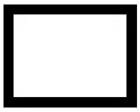


Figura 11: Faixa com 1 célula preenchidas por quadrado.

Pode-se verificar essa situação na figura a seguir:

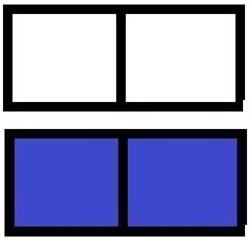


Figura 12: Faixa com 2 células preenchidas por quadrados e dominó.

$f_3 = 3$ pois pode-se preencher com três quadrados, quadrado/dominó ou dominó/quadrado.

Pode-se verificar essa situação na figura a seguir:

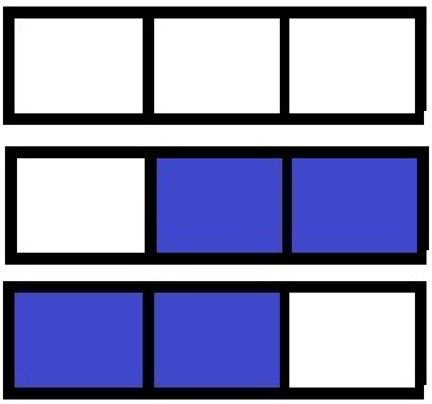


Figura 13: Faixa com 3 células preenchidas por quadrados e dominó.

$f_4 = 5$ pois pode-se preencher com quatro quadrados, quadrado/quadrado/dominó, quadrado/dominó/quadrado, dominó/quadrado/quadrado ou dominó/dominó.

Pode-se verificar essa situação na figura a seguir:

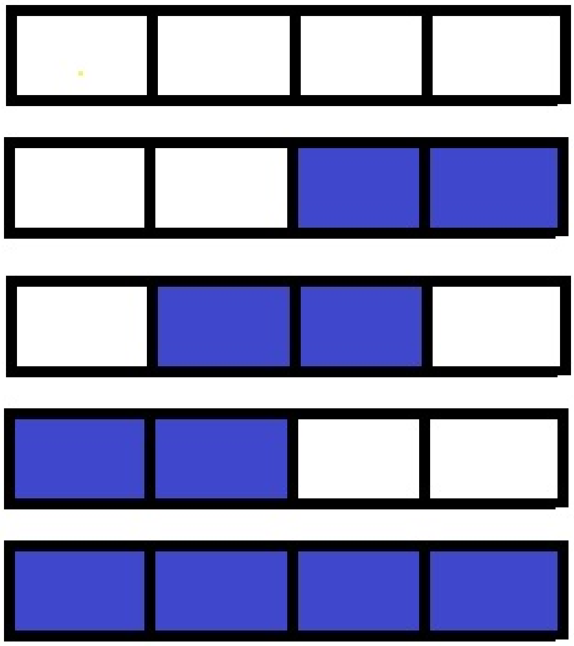


Figura 14: Faixa com 4 células preenchidas por quadrados e dominós.

Verifica-se que há uma semelhança entre f_n e a sequência de F_n, que representa os números de Fibonacci.

Considerando o fato de colocar-se nada como uma forma de preencher uma faixa com 0 células, então $f_0 = 1$.

A seguir, mostra-se que f_n segue a mesma lei de recorrência dos números de Fibonacci.

Demonstração.

Essa tarefa será dividida em dois casos: no primeiro, toma-se a primeira peça da faixa como sendo um quadrado; no segundo, considera-se a primeira peça da faixa sejam preenchida por um dominó.

1º CASO

Considerando que a primeira peça seja um quadrado, então haverá mais $n-1$ células na faixa e por consequência, f_{n-1} formas de preenchê-la.

2º CASO

Considerando que a primeira peça seja um dominó, então haverá mais $n-2$ células na faixa e por consequência, f_{n-2} formas de preenchê-la.

CONCLUSÃO

Como o primeiro e o segundo casos são disjuntos, isso é, não existe a possibilidade de uma faixa começar com quadrado e também dominó, conclui-se que se uma faixa possui 1xn células então existem $f_{n-1} + f_{n-2}$ formas de preenchê-la com quadrados e dominós.

Mas se a faixa possui 1xn células, há f_n formas de preenchê-la com quadrados e dominós, logo $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ o que segue a mesma lei de recorrência dos números de Fibonacci.

Como, $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_3 = 3$ e $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, isto é, há uma igualdade: $f_1 = F_2 = 1$ e $f_2 = F_3 = 2$. Além disso, a lei para se obter seus termos também é a mesma: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Adotando, por conveniência, que $f_0 = 1$ então as duas sequências f_n e F_n são ainda mais semelhantes.

Verifique que há uma diferença entre o posicionamento dos termos de ordem n e $n+1$.

f_n: 1, 1, 2, 3, 5, ... com $n \geqslant 0$.

F_n: 1, 1, 2, 3, 5, ... com $n \geqslant 1$.

Logo $f_n = F_{n+1}$ para todo $n \geqslant 0$.

Assim, conclui-se uma interpretação combinatorial dos números de Fibonacci.

Supondo F_1, F_2, F_3, F_4, como sendo os números de Fibonacci, a relação com f_1, f_2, f_3 e f_4 é direta. Assim, $F_{n+1} = f_n$ sendo $n \geqslant 0$.

$\square$

5.5 INTERPRETAÇÃO COMBINATORIAL DOS NÚMEROS DE LUCAS

Assim como ocorreu para os números de Fibonacci, a seguir, será apresentada uma interpretação combinatorial dos números de Lucas. Para isso, considere a seguinte situação:

De quantas maneiras pode-se preencher um bracelete circular formado por $1xn$ células com "quadrados curvilíneos" representados por células de $1x1$ e "dominós curvilíneos" representados por células de $1x2$?

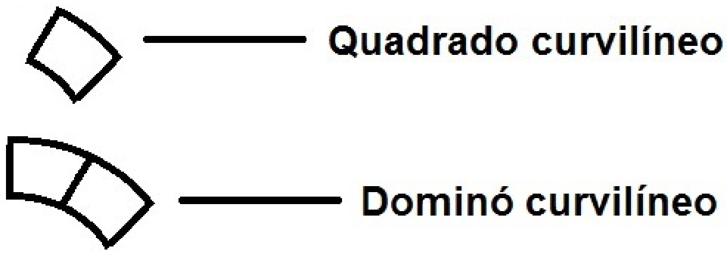


Figura 15: Quadrado curvilínio e dominó curvilíneo.

Antes porém, será definida a situação em que um bracelete está em fase e fora de fase. Considerando que o bracelete possui n células, toma-se que o bracelete está em fase se um dominó cobrir apenas as células k e $k+1$, com $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Caso haja um dominó cobrindo as células n e 1, o bracelete está fora de fase.

A seguir serão apresentadas situações de braceletes em fase e um fora de fase.

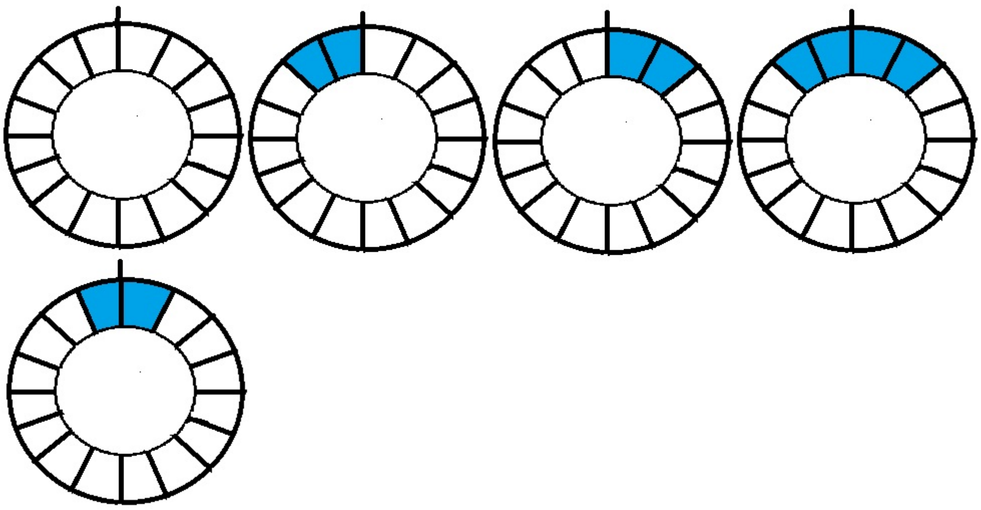


Figura 16: Na 1ª linha todos os braceletes estão em fase. Na segunda linha está fora de fase.

Agora, pode-se apresentar uma interpretação combinatorial dos números de Lucas.

Seja l_n o número de maneiras de preencher um bracelete, de comprimento n, com "quadrados e dominós curvilíneos".

Para um bracelete com 1 célula, haverá uma única forma de preenchê-lo. Logo $l_1 = 1$. Verifique a figura a seguir.

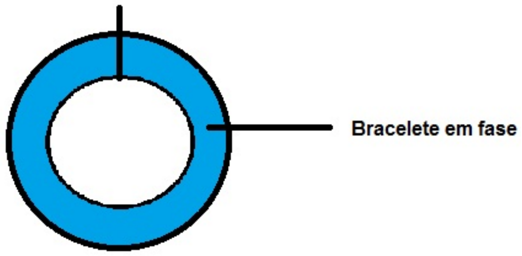


Figura 17: Bracelete com 1 célula preenchido por quadrado curvilíneo.

Para um bracelete com 2 células, haverá três formas de preenchê-lo, sendo duas em fase e uma fora de fase. Logo $l_2 = 3$

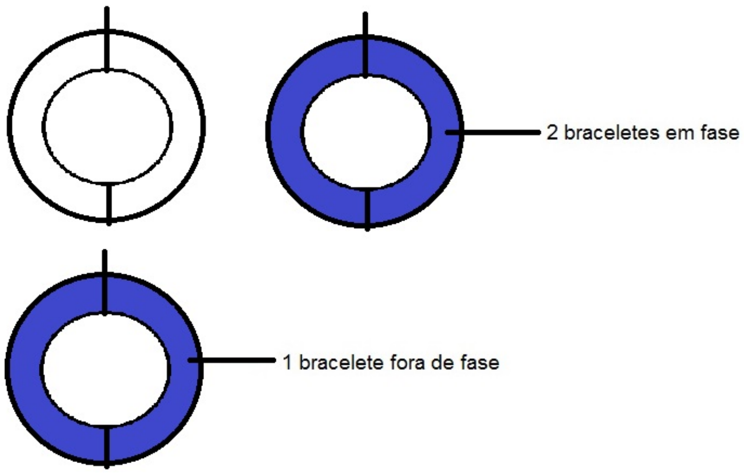


Figura 18: Bracelete com 2 células preenchido por quadrados curvilíneos e dominó curvilíneo.

Para um bracelete com 3 células, haverá quatro formas de preenchê-lo, sendo três em fase e uma fora de fase. Logo $l_3 = 4$

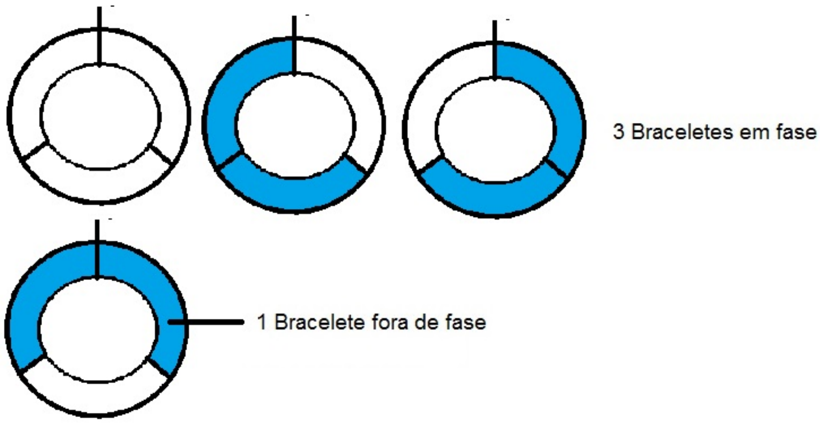


Figura 19: Bracelete com 3 células. Os três primeiros estão em fase e o último está fora de fase.

Para um bracelete com 4 células, haverá sete formas de preenchê-lo, sendo cinco em fase e duas fora de fase. Logo $l_4 = 7$.

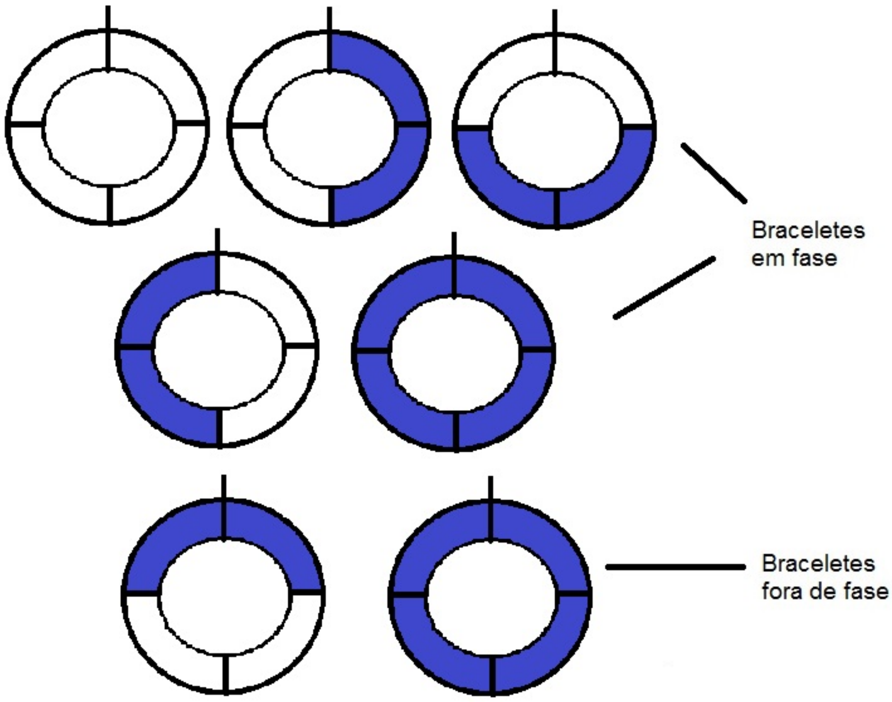


Figura 20: Bracelete com 4 células. Os cinco primeiros estão em fase e os dois últimos estão fora de fase.

Considerando os números l_1, l_2, l_3, l_4 e os números de Lucas L_1, L_2, L_3, L_4 tem-se uma equivalência respectiva. Isso é, $l_1 = L_1$, $l_2 = L_2$, $l_3 = L_3$, $l_4 = L_4$. Aparentemente $l_n = L_n$, isso é, a quantidade de formas de preencher um bracelete de comprimento n, com "quadrados e dominós curvilíneos" é igual ao número de Lucas L_n.

A seguir será mostrado que a lei de recorrência para l_n é a mesma de L_n.

Proposição:

Para $n > 1$, $l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$.

Demonstração.

Considerando a primeira peça do bracelete como sendo aquela que cobre a célula 1, independente de ser um quadrado ou um dominó cobrindo as células 1 e 2 ou cobrindo as células n e 1. A última peça é aquela imediatamente ao lado da primeira peça no sentido anti-horário. Então para preencher um bracelete formado por n células deve-se considerar dois casos:

1º CASO

A última peça é um "quadrado curvilíneo". Tirando-se essa última peça e ligando os extremos, obtêm-se um bracelete com $n-1$ células que pode ser preenchido com "quadrados e dominós curvilíneos" de l_{n-1} formas.

2º CASO

A última peça é um "dominó curvilíneo". Tirando-se essa última peça e ligando os extremos, obtem-se um bracelete com $n-2$ células que pode ser preenchido com "quadrados e dominós curvilíneos" de l_{n-2} formas.

CONCLUSÃO

Como não há sobreposição nos dois casos, conclui-se que $l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$.

□

A seguir serão apresentadas algumas identidades relativas aos números de Fibonacci e Lucas.

5.6 IDENTIDADES DE FIBONACCI E LUCAS

Identidade 1- Para $n \geqslant 0,\ f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n = f_{n+2} - 1.$

O processo para demonstração dessa identidade pode ser facilmente compreendido pelos alunos do ensino médio, visto que um encaminhamento semelhante é utilizado para obter a soma dos termos de uma progressão aritmética.

Inicialmente, deve-se considerar que $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, consequentemente tem-se:

$f_2 = f_1 + f_0$ o que implica em $f_0 = f_2 - f_1$

$f_3 = f_2 + f_1$ o que implica em $f_1 = f_3 - f_2$

$f_4 = f_3 + f_2$ o que implica em $f_2 = f_4 - f_3$

$f_5 = f_4 + f_3$ o que implica em $f_3 = f_5 - f_4$

$f_6 = f_5 + f_4$ o que implica em $f_4 = f_6 - f_5$

$f_7 = f_6 + f_5$ o que implica em $f_5 = f_7 - f_6$

.

.

.

$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ o que implica em $f_n = f_{n+2} - f_{n+1}$

Somando-se temos:

$f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n = f_{n+2} - f_1$

ou seja,

$f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n = f_{n+2} - 1.$

Essa explicação não obedece o rigor matemático, por isso, uma forma de se obter a generalização é associá-la a uma situação-problema, como será feito a seguir.

Generalização:

Considere a seguinte situação-problema:

Seja uma faixa formada por $n+2$ células. De quantas formas pode-se preenchê-la usando pelo menos 1 dominó?

1ª Forma

A solução é direta pois há uma única faixa preenchida apenas com quadrados, logo existem $f_{n+2} - 1$ soluções.

2ª Forma

Considerando que haja pelo menos um dominó na faixa e que a localização do último dominó seja nas células $k+1$ e $k+2$ com $0 \leq k \leq n$.

Assim, existem f_k faixas, onde o último dominó preenche as células $k+1$ e $k+2$.

Pode-se verificar essa situação na figura a seguir:

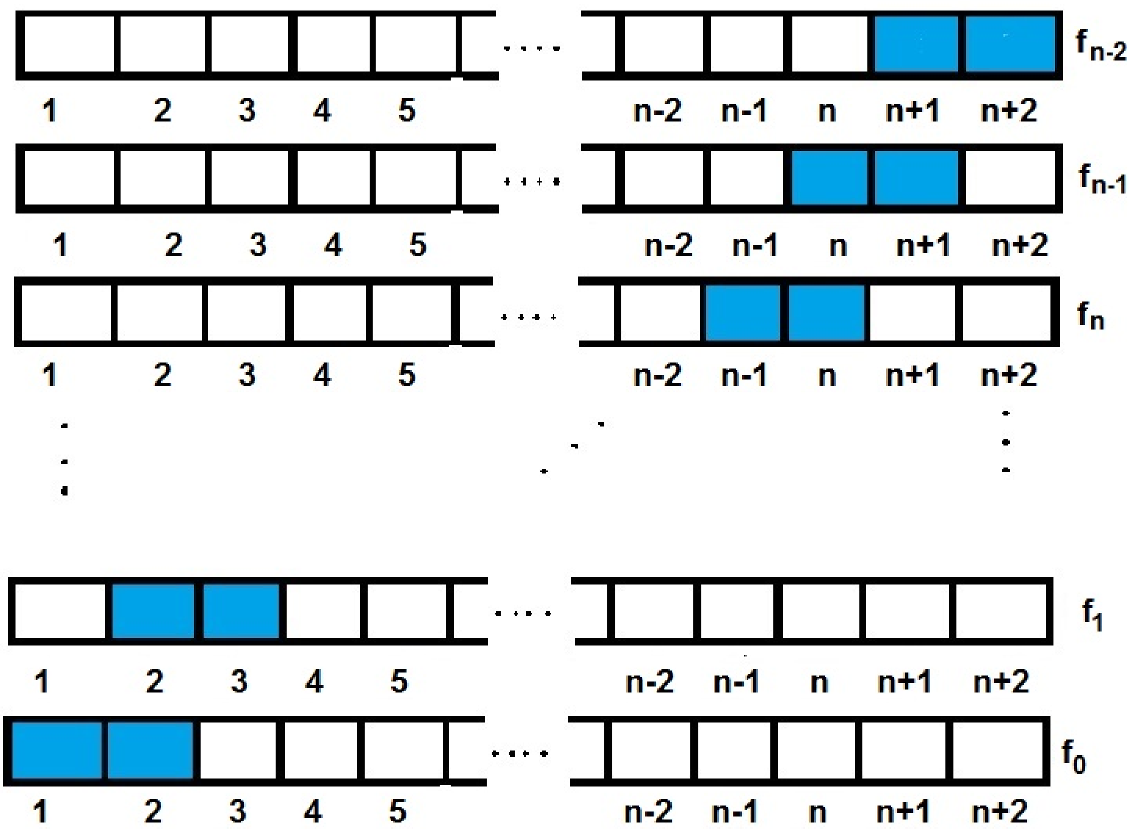


Figura 21: Localização do último dominó em uma faixa com n+2 células.

Tomando $k = n$ então a última peça de dominó ocuparia a $(n+1)$-ésima e a $(n+2)$-ésima células da faixa. Restariam n células na faixa e por consequência haveria f_n maneiras de preenchê-la usando quadrados e dominós.

Tomando $k = n-1$ então a última peça de dominó ocuparia a (n)-ésima e a $(n+1)$-ésima células da faixa. Restariam $n-1$ células na faixa e por consequência haveria f_{n-1} maneiras de preenchê-la usando quadrados e dominós.

Tomando $k = n-2$ então a última peça de dominó ocuparia a $(n-1)$-ésima e a n-ésima células da faixa. Restariam $n-2$ células na faixa e por consequência haveria f_{n-2} maneiras de preenchê-la usando quadrados e dominós.

O processo segue até que se tome $k = 0$. Então a última peça de dominó ocuparia a 1ª e a 2ª células da faixa. Restariam 0 células na faixa e por consequência haveria f_0 maneiras de preenchê-la usando quadrados e dominós.

Dessa maneira existem $f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + ... + f_n$ modos de preencher a faixa com $n+2$ células.

Conclusão:

De acordo com o exposto acima, conclui-se que a relação $f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n = f_{n+2} - 1$ é válida para todo $n \geqslant 0$.

Identidade 2- Para $n \geqslant 0$, $C_{n,0} + C_{n-1,1} + C_{n-2,2} + ... = f_n$.

Os números de Fibonacci podem ser obtidos pela soma dos elementos da diagonal do triângulo de Pascal. Verifique na figura a seguir.

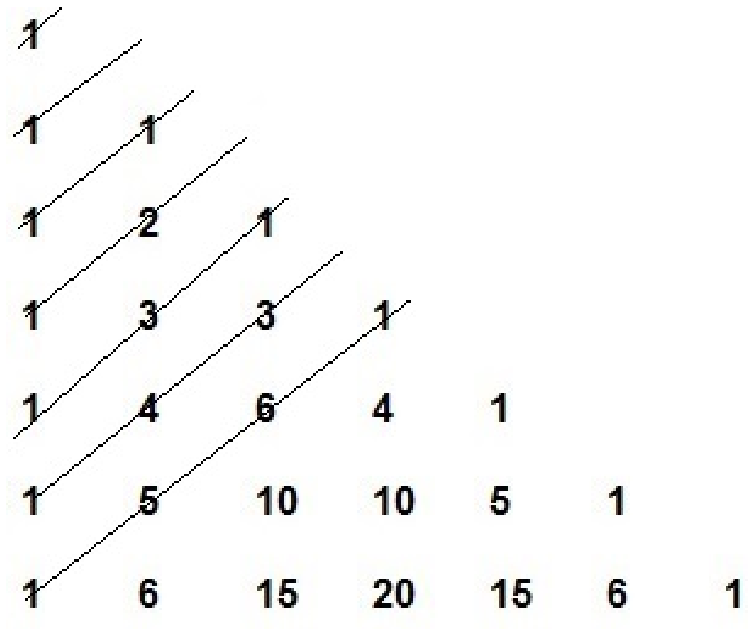


Figura 22: Triângulo de Pascal e a sequência de Fibonacci

Intuitivamente, é fácil perceber que a relação é válida. A seguir será apresentada uma generalização e seguindo o modelo até aqui utilizado, será respondida a seguinte pergunta:

Generalização:

Considerando uma faixa formada por $1xn$ células, de quantas formas pode-se preenchê-la usando quadrados e dominós?

1ª Forma

A solução é direta, pois trata-se da sequência dos números de Fibonacci, logo a solução é f_n.

2ª Forma

Caso a faixa seja preenchida apenas por quadrados, então tem-se $C_{n,0}$ formas.

No caso de haver dominós na faixa, eles serão considerados como sendo uma peça única e escolhe-se sua posição na faixa.

Caso tenha-se uma única peça dominó, então a solução é $C_{n-1,1}$ formas de preencher a faixa.

Caso tenha-se duas peças dominó, então a solução é $C_{n-2,2}$ formas de preencher a faixa.

Realizando esse processo, a quantidade máxima de dominós que se pode utilizar é $\frac{n}{2}$ se n for par e será $\frac{n-1}{2}$ caso n seja ímpar.

Conclusão:

De acordo com o exposto acima, pode-se concluir que a relação,

$C_{n,0} + C_{n-1,1} + C_{n-2,2} + ... = f_n$ é válida para todo $n \geqslant 0$.

A fim de exemplificar essa situação, suponha uma faixa com 5 células.

Quantas são as formas de preenchê-la com quadrados e dominós?

Da relação acima são $f_5 = 8$ formas de fazê-lo.

Calculando pelo processo combinatório tería-se $C_{5,0} = 1$ formas usando-se apenas quadrados.

Haverá $C_{4,1} = 4$ formas de preenchê-la usando-se um dominó e $C_{3,2} = 3$ formas utilizando dois dominós.

Como o máximo de dominós é de 2, então o total de formas será $C_{5,0} + C_{4,1} + C_{3,2} = 1+4+3 = 8$.

Pode-se verificar essa situação na figura a seguir:

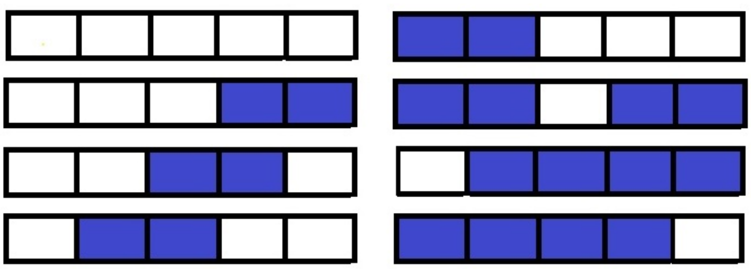


Figura 23: Faixa com 5 células preenchida por quadrados e dominós.

A seguir serão apresentadas duas identidades relativas aos números de Lucas.

Identidade 3-Para $n \geqslant 1$, $l_n = f_n + f_{n-2}$

Para generalizar essa identidade, será solucionada a seguinte situação-problema:

Generalização:

Quantas são as formas possíveis de se preencher um bracelete circular com $1xn$ células, utilizando "quadrados e dominós curvilíneos"?

1ª Forma

Pelo próprio conceito apresentado no Capítulo referente aos números de Lucas, existem l_n formas de preencher um bracelete circular com n células, utilizando "quadrados e dominós curvilíneos".

2ª Forma

Numerando as células à partir de uma célula qualquer, tem-se a seguinte configuração: 1ªcélula, 2ª célula, ..., n-ésima célula. Além disso, deve-se verificar se o bracelete está em fase ou fora de fase.

Bracelete em Fase: Caso a 1ª e a n-ésima células não sejam preenchidas por um único dominó, como indica a figura a seguir, então o bracelete estará em fase.

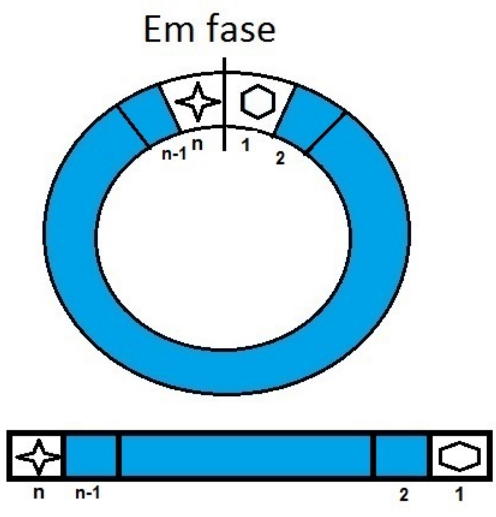


Figura 24: Bracelete em fase.

Abrindo o bracelete entre as células 1 e n surge uma faixa com n células.

Caso o bracetete esteja em fase, então haverá n células a preencher. Isto é, f_n formas de preencher a faixa.

Bracelete Fora de Fase: Caso o bracelete esteja fora de fase, como indica a figura a seguir, desconsiderando o dominó e esticando a faixa tem-se $n-2$ células a preencher. Seguindo o mesmo raciocínio, haverá f_{n-2} formas de preencher a faixa pois "perde-se" a possibilidade de preencher a 1ª e a última células, ocupadas por um dominó.

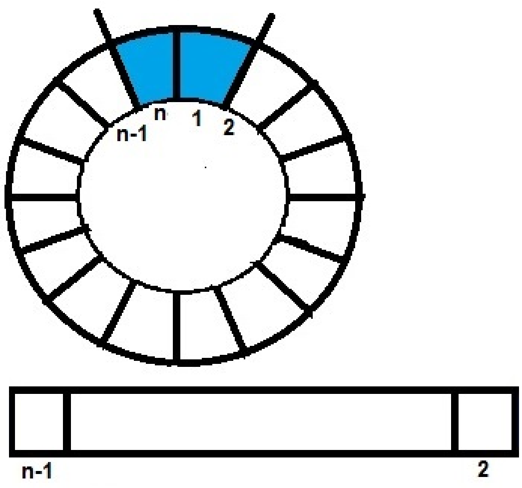


Figura 25: Bracelete fora de fase.

Assim, analisando os dois casos: em fase e fora de fase, haverá $f_n + f_{n-2}$ formas de preencher um bracelete com $1xn$ células.

Conclusão:

Como as duas formas de preencher o bracelete são válidas, conclui-se que a relação $l_n = f_n + f_{n-2}$ é válida sempre que $n \geqslant 1$.

Identidade 4- Para $n \geqslant 1$, $f_{2n-1} = l_n \cdot f_{n-1}$

Generalização:

A identidade será eneralizada através de uma correspondência entre os seguintes conjuntos:

Conjunto A

Seja A o conjunto cuja característica é possuir todas as faixas de tamanho $(2n-1)$ que podem ser preenchidas por quadrados e dominós.

Pelos conceitos apresentados até aqui, esse conjunto possui f_{2n-1} elementos.

Conjunto B

Seja B o conjunto definido pelos pares (K,T), em que K representa um bracelete de comprimento n, preenchido por "quadrados e dominós curvilíneos" e T é uma faixa de comprimento $(n-1)$ preenchida por quadrados e dominós.

Considerando a faixa com $(2n-1)$ células e numerando-as da seguinte forma: 1ªcélula, 2ª célula, ..., (2n-1)ª célula. Assim, deve-se "quebrar" essa faixa em duas partes. Uma delas, chamada de K, com n células e outra, chamada de T, com $(n-1)$ células.

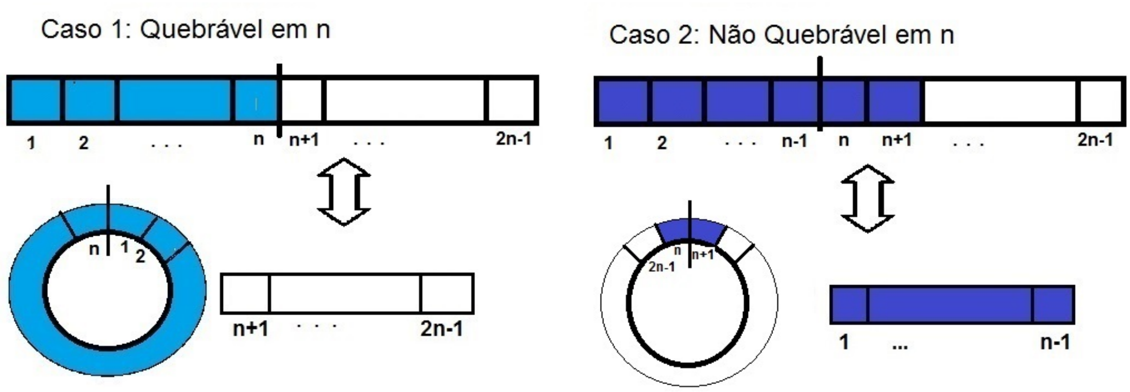


Figura 26: Faixa com (2n-1) células quebrada em duas partes: um bracelete com n células, quebrável em n, e uma faixa com (n-1) células ou em um bracelete com n células, não quebrável em n, e uma faixa com (n-1) células.

No entanto, deve-se verificar se é possível quebrar a faixa de comprimento $2n-1$ em duas partes, uma de comprimento n e outra de comprimento $n-1$.

Separando em dois casos, tem-se que a célula n e a célula $n+1$ podem ser preenchidas por um único dominó (não quebrável em n), ou essas duas células não são preenchidas por um único dominó (quebrável em n).

CASO 1: Quebrável em n

De acordo com a figura anterior, obtem-se um bracetele com n células, da célula 1 à n, o qual está em fase e uma faixa com $n-1$ células, da célula $n+1$ à célula $2n-1$.

CASO 2: Não quebrável em n

Nesse caso, deve-se considerar que a faixa com $2n-1$ células pode ser quebrada entre as células (n-1) e n. Assim tem-se uma faixa com $(n-1)$ células, que vai da célula 1 à $n-1$, e um bracelete com n células, dá célula n à célula $2n-1$, o qual está fora de fase.

A correspondência no outro sentido é análoga e não será apresentada nesse trabalho.

Conclusão:

Portanto, $f_{2n-1} = l_n \cdot f_{n-1}$.

O próximo capítulo está relacionado ao aprofundamento dos conceitos combinatoriais. Nele será feito um breve histórico de Pierre de Fermat além de demonstrações do Pequeno Teorema de Fermat.

6 PIERRE DE FERMAT

6.1 HISTÓRICO

Pierre Fermat (1601-1661) nasceu na França. Por vir de família abastada, estudou em boas escolas, tornou-se advogado oficial do governo em 1631 e posteriormente juiz. Por esse motivo teve que mudar seu nome para Pierre de Fermat.

Por ter outra profissão, via a matemática como um passatempo, por isso o apelido de príncipe dos amadores. Nas horas vagas, dedicava-se ao estudo da matemática, porém sem muito rigor. Nessa área, dedicou-se à geometria analítica, máximos e mínimos, cálculo de probabilidades, teoria dos números entre outros. No entanto, normalmente é lembrado pelo seu último teorema, o qual será transcrito a seguir:

"Não existe conjunto de inteiros positivos x, y, z e n, com $n \geqslant 3$ que satisfaça a equação $x^n + y^n = z^n$."

Curiosamente Fermat anotou ao final da página que continha essa afirmação:

"Encontrei uma demonstração verdadeiramente maravilhosa disto, mas esta margem é estreita demais para contê-la."

Tal teorema permaneceu sem demonstração por cerca de 350 anos e sua prova só foi concluida em 1995, pelo matemático inglês Andrew Wiles. Permanece então o mistério. Fermat sabia a demonstração desse teorema ou estava apenas brincando?

A seguir é apresentado outro teorema proposto por Fermat que permite grande aplicabilidade na matemática.

6.2 O PEQUENO TEOREMA DE FERMAT

Ao longo dos tempos foram apresentadas várias demonstrações do Pequeno Teorema de Fermat. Optou-se por apresentar duas delas: a primeira, usando indução e a segunda de forma combinatorial.

Antes porém, deve-se relembrar, de maneira suscinta, algumas definições e resultados que serão usados na demonstração do Pequeno Teorema de Fermat.

Definição: *Sejam a, b e m números inteiros, com* $m > 0$. *Diz-se que a e b são congruentes módulo m se m divide a diferença* $a - b$.

Notação: $a \equiv b \pmod{m}$.

Por exemplo: $7 \equiv 15 \pmod{8}$, pois $8|(-8)$, $a \equiv a \pmod{m}$ para todo a e m inteiros com $m > 0$ já que $a - a = 0$ e $m|0$.

Teorema (Teorema Binomial): *Sejam a e b inteiros e n um inteiro positivo. Então* $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$.

A demonstração que será apresentada segue (SANTOS et al., 2002).

Antes da demonstração faremos um exemplo a fim de facilitar a compreensão dos estudantes.

Chamamos de binômio a qualquer expressão da forma $a+b$, isto é, a soma de dois símbolos/monômios distintos. Para que se possa expandir o binômio, iremos considerar o seguinte produto inicial:

$$(a+b)(c+d)(e+f)=ace+acf+ade+adf+bce+bcf+bde+bdf,$$

que possui oito termos, onde cada termos consiste de três letras, cada uma selecionada de um dos binômios. Pelo princípio multiplicativo, o total de termos é $2^3 = 8$. Para o produto $(a+b)(c+d)(e+f)(g+h)$, haverá $2^4 = 16$ termos, cada um sendo constituido de quatro letras e cada uma delas proveniente de um dos quatro binômios apresentados. No caso de produto de n binômios teremos 2^n termos. Considere agora o produto

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

Como temos 64 maneiras de selecionarmos as 6 letras, uma delas em cada binômio, e como todos são binômios iguais $(a+b)$ teremos termos repetidos. Por esemplo, tomando-se a letra a nos quatro primeiros termos e a letra b nos dois últimos, teremos a^4b^2 que aparecerá toda vez que a letra a aparecer em exatamente 4 dos 6 binômios e a letra b nos 2 restantes. A escolha de em quais binômios irá aparecer o a pode ser feita de $C_{6,4}$ maneiras diferentes, logo o termo a^4b^2 irá aparecer este número de vezes. Podemos dizer que o coeficiente do monômio a^4b^2 é $C_{6,4}$. Como todo termo é resultado do produto de 6 letras, o termo geral é da forma a^ib^j onde $i+j=6$, ou seja, cada termo é da forma a^ib^{6-i}. Como um termo destes aparece $C_{6,i}$ vezes, a expansão acima é dada por

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_{6,i}\ a^i\ b^{6-i}$$
$$=C_{6,0}\ a^0\ b^6 + C_{6,1}\ a^1\ b^5 + C_{6,2}\ a^2\ b^4 + C_{6,3}\ a^3\ b^3 + C_{6,4}\ a^4\ b^2 + C_{6,5}\ a^5\ b^1 + C_{6,6}\ a^6\ b^0$$
$$=b^6 + 6ab^5 + 15a^2b^4 + 20a^3b^3 + 15a^4b^2 + 6a^5b + a^6.$$

Demonstração.

No caso geral $(a+b)^n$, cada termo será da forma a^ib^{n-i}. Note que a^ib^{n-i} irá aparecer para cada escolha da letra a em i dos n fatores. Como tal escolha pode ser feita de $C_{n,i}$ formas diferentes, temos que

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_{n,i}\ a^i\ b^{n-i}.$$

$\square$

Vale ressaltar que nessa expansão há $n+1$ termos distintos visto que i pode variar de 0 a n. Caso o binômio seja expresso na forma $(b+a)^n$ a situação é análoga, visto que

$$(a+b)^n = (b+a)^n$$

pois trocando-se a por b teríamos

$$(b+a)^n = \sum_{i=0}^{n} C_{n,i}\ b^i\ a^{n-i}.$$

o que não altera o resultado visto que

$$C_{n,i} = C_{n,n-i}.$$

Outra forma de demonstrar o Teorema Binomial pode ser encontada em Miles.

Para a demonstração do Pequeno Teorema de Fermat, por indução, precisa-se do seguinte lema:

Lema: *Seja p um número primo. Os números* $\binom{p}{i}$ *, onde* $0 < i < p$ *são todos divisíveis por* p.

Demonstração.

(HEFEZ, 2010)

□

Teorema (Pequeno Teorema de Fermat): *Se p é um número primo, então p divide* $a^p - a$*, para qualquer natural a.*

6.2.1 DEMONSTRAÇÃO POR INDUÇÃO

Demonstração.

Procedendo por indução sobre a.

A propriedade vale para $a = 0$ já que $0^p - 0 = 0$ e $p|0$ (p divide zero).

Suponha que para algum número natural a se tenha $p|(a^p - a)$.

Deve-se mostrar que $p|((a+1)^p - (a+1))$.

Pelo teorema binomial tem-se:

$(a+1)^p = a^0 + C_{p,1}a^1 + C_{p,2}a^2 + ... + C_{p,k}a^k + ... + C_{p,p-1}a^{p-1} + a^p.$

Pelo lema anterior, então $C_{p,k}$ é divisível por p.

Manipulando algebricamente:

$(a+1)^p = 1 + a^p + p.R$

$(a+1)^p - (a+1) = a^p - a + p.R.$

Por hipótese indutiva $p|(a^p - a)$, logo $(a+1)^p - (a+1)$ é divisível por p.

□

6.2.2 DEMONSTRAÇÃO COMBINATORIAL

A demonstração combinatorial, que será apresentada, para o Pequeno Teorema de Fermat, segue (Turnage, 2008). Para tanto, inicia-se pelo seguinte lema:

Lema 6.1. *Seja S um conjunto finito e p um número primo, e suponha que $f : S \to S$ tenha a propriedade que $f^p(x) = x$ para todo x em S, onde f^p indica composição de f p vezes. Então $|S| \equiv |F|$ (mod p), onde F é o conjunto dos pontos fixos de f.*

Demonstração.

Deve-se mostrar que S é composto pela união disjunta de conjuntos que tem a seguinte forma $\{x, f(x), ..., f^{p-1}(x)\}$.

Supondo que tem-se dois subconjuntos distintos de S tal que:

$\{x, f(x), ..., f^{p-1}(x)\} \cap \{y, f(y), ..., f^{p-1}(y)\} \neq \emptyset$

Então existem i, j $\in \mathbb{N}$ tais que $f^i(x) = f^j(y)$, onde $0 \leqslant j < i \leqslant (p-1)$.

Logo

$f^{i+1}(x) = f^{j+1}(y)$

$f^{i+2}(x) = f^{j+2}(y)$

.

.

.

$f^p(x) = f^{j+k}(y)$, então $p > j+k$ e $p = i+k$.

Assim

$x = f^{j+k}(y)$

$f(x) = f^{j+k+1}(y)$

$f^2(x) = f^{j+k+2}(y)$

.

.

.

Então $\{x, f(x), ..., f^{p-1}(x)\} = \{y, f(y), ..., f^{p-1}(y)\}$.

Portanto,

$\{x, f(x), ..., f^{p-1}(x)\} \cap \{y, f(y), ..., f^{p-1}(y)\} = \emptyset$

ou

$\{x, f(x), ..., f^{p-1}(x)\} = \{y, f(y), ..., f^{p-1}(y)\}$.

Passada essa etapa, precisa-se mostrar que o comprimento do ciclo de x ou tem tamanho 1 ou tem tamanho p.

Seja x $\in S$, então a permutação gerada por x é: $\{x, f(x), ..., f^{p-1}(x)\}$.

Se x é um ponto fixo de f, então $f(x) = x$ o que implica que o comprimento do ciclo de x é 1.

Pela hipótese, $f^p(x) = x$ para todo $x \in S$, o que implica que o comprimento do ciclo de x é no máximo p. Supondo que o comprimento do ciclo de x é k, $1 < k \leqslant (p-1)$, então o conjunto $\{x, f(x), ..., f^{k-1}(x)\}$, é a permutação gerada por x. Assim tem-se a faixa a seguir:

x	f(x)	$f^2(x)$	...	$f^{k-1}(x)$	x	f(x)	...	$f^{k-1}(x)$	...	$f^{p-1}(x)$

Então são p caixas, divididas em m conjuntos, cada um com k elementos. Daí, $p = m.k$, o que é absurdo pois p é primo. Portanto, todo ciclo de x tem tamanho 1 ou p. Por fim, pode-se mostrar que $|S| \equiv |F| \pmod{p}$.

Do exposto acima, pode-se supor que cada ciclo de x tem comprimento 1 ou p. Em S, x pode ou não ser ponto fixo. O conjunto S é composto por um conjunto de pontos fixos F e por um conjunto de pontos não fixos N. Dado que o comprimento do ciclo de um ponto não fixo é p, então a quantidade de pontos não fixos é múltiplo de p. Logo, $|S| \equiv |F| + |N| \equiv |F| + pn \equiv |F|$ $\pmod{p}$. □

Agora pode-se prosseguir com a prova do Pequeno Teorema de Fermat.

Demonstração.

Seja S o conjunto de todos os braceletes coloridos de comprimento p, onde há **a** opções de cores para contas de comprimento 1.

Seja $f : S \to S$ tal que $f(x) = x_1$ em que x_1 é a rotação, em uma unidade, de x no sentido horário. Assim, temos, $|S| = a^p$.

Por outro lado, há braceletes coloridos de comprimento p com uma única cor. Uma vez que cada rotação do referido bracelete produz o mesmo bracelete, ou seja, $F(x) = x$, então esses serão os pontos fixos. Assim, temos, $|F| = a$.

Então, pelo lema apresentado anteriormente $a^p \equiv a \ (mod \text{ p })$.

□

Na sequência será apresentado um exemplo que permite uma melhor visualização desse conceito:

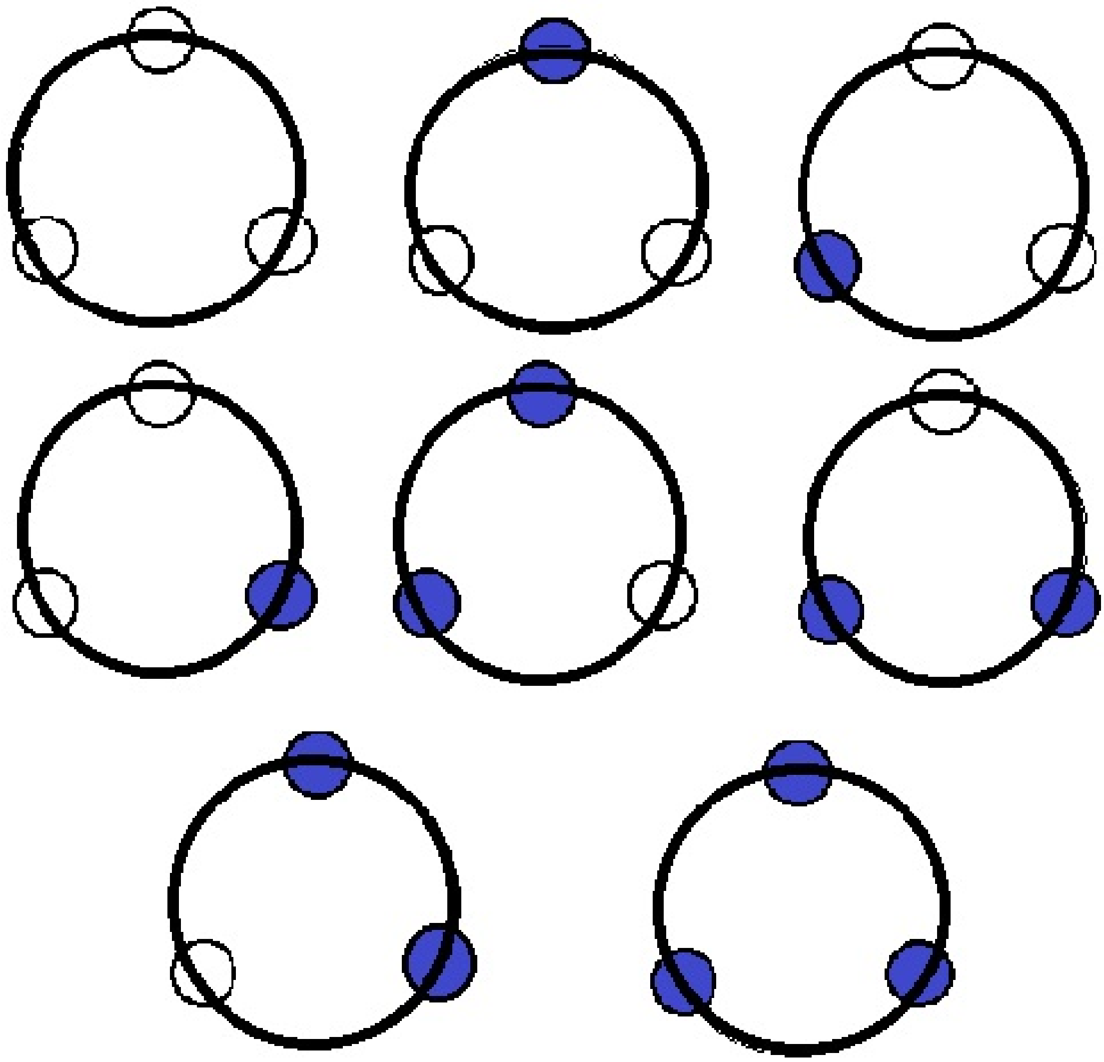


Figura 27: Formas de colorir um bracelete de três contas com duas cores.

7 PESQUISA

Com base nas generalizações das identidades e nas situações-problema apresentadas, passou-se para a fase de elaboração de questões que permitissem a verificação de algumas hipóteses: seria possível aprofundar os conhecimentos combinatoriais? Os alunos conseguiriam generalizar algumas identidades?

A partir disso, construiram-se dois questionários que buscavam responder a algumas dúvidas que nós, professores de matemática, temos em relação à profundidade do conhecimento adquirido pelo aluno.

No primeiro questionário os alunos foram instigados a resolver algumas situações problema que preparariam o terreno para a aplicação do segundo questionário.

Para que se possa ambientar o leitor, antes da aplicação dos questionários, os alunos haviam trabalhado com os seguintes conceitos combinatoriais: Princípio Aditivo e Multiplicativo, Arranjo, Combinação Simples, Permutação Simples e com Repetição. O intervalo de aplicação dos questionários foi de aproximadamente 15 dias.

7.1 QUESTIONÁRIO 1

Nessa primeira etapa, foram apresentados problemas isomorfos, como exposto no artigo (Janackova; Janek, 2006). (Siegler (1977) definiu problemas isomorfos (ou isomorfismos) como problemas que são formalmente idênticos (possuem a mesma solução) mas diferem na sua forma. Assim, espera-se que o aluno, ao resolver um problema apresente sua estratégia e a partir dela podería-se entender melhor quais caminhos ele tomou. Desse modo, pode-se buscar novos caminhos ou atividades que possibilitem uma melhor compreensão dos conceitos combinatoriais.

Na sequência tem-se as questões da 1ª atividade aplicada aos alunos e uma análise das soluções por eles apresentadas.

A pesquisa foi aplicada aos alunos do 2º ano do ensino médio de uma escola de Curitiba, estado do Paraná, não sendo obrigatória nem condicionada a nota, porém todos os 145 alunos participaram.

7.1.1 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO 1

Na primeira questão buscou-se entender quais seriam as estratégias tomadas pelos alunos na resolução de uma situação-problema que permitia a aplicação do conceito de Combinação ou o conceito de Permutação com Repetição.

a) Quantas são as soluções inteiras não negativas da equação: $x+y+z+w=10$*?*

b) De quantos modos podemos repartir 10 maças idênticas entre 4 amigos?

c) O quadro dos professores de matemática do colégio MatematicaLegal conta com 10 profissionais e estavam discutindo possíveis locais para a confraternização de final de ano. Foram sugeridos 4 locais e cada professor deveria votar em apenas um deles. Quantos resultados existem para essa votação?

d) Você consegue relacionar os ítens a, b e c?

Dentre todos os alunos, cerca de 55% acertaram os três primeiros ítens dessa questão. Desses, todos utilizaram o artifício dos "palitinhos", que recai em uma Permutação com Repetição.

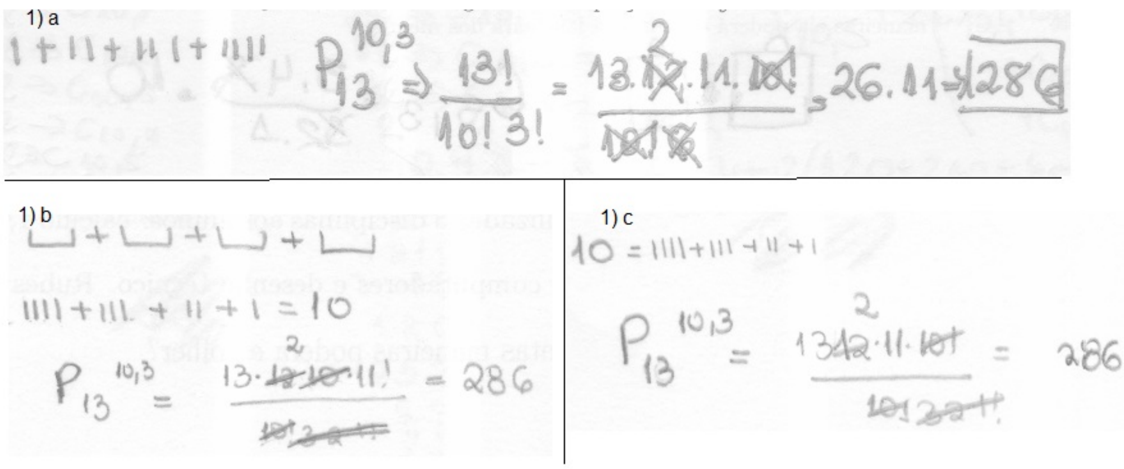


Figura 28: Soluções da questão 1 referente ao 1º questionário.

No entanto, esse exercício poderia ser resolvido utilizando o conceito de Combinação, mas aparentemente os alunos compreendem melhor Permutação com Repetição do que Combinação.

Dentre os que não acertaram a questão, o erro mais comum foi a utilização do conceito de Combinação de 10 elementos tomados 4 a 4.

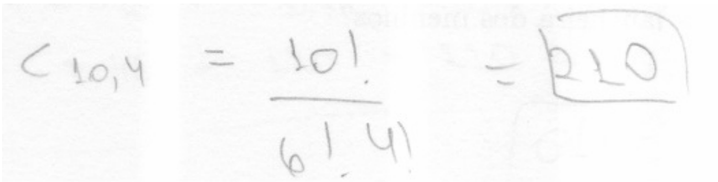


Figura 29: Erro mais comum cometido na questão 1 referente ao 1º questionário.

Em relação ao item (d), a maioria comentou que se tratavam da mesma solução.

Na segunda questão buscou-se verificar a compreensão do conceito de complementaridade no que se refere a Combinação.

a) Márcio e Anderson são irmãos. Sua mãe prepara todos os dias uma lancheira com frutas. Dispondo de 5 frutas distintas e sabendo que Márcio come três frutas por dia, de quantas maneiras ela poderá organizar a lancheira dos meninos?

b) Para o próximo semestre serão disponibilizadas 5 disciplinas aos alunos: cálculo 1, geometria analítica, álgebra linear, programação de computadores e desenho técnico. Rubes decidiu cursar apenas três dessas disciplinas. De quantas maneiras podera escolher?

c) Sobre uma circunferência marcam-se cinco pontos distintos. Quantos triângulos, com vértices nesses pontos, pode-se construir?

d) Voce consegue relacionar os ítens a, b e c?

Nessa questão, cerca de 75% dos alunos acertaram os ítens (a), (b) e (c). Na solução, todos calcularam $C_{5,3}$ obtendo 10 como resposta. No item (c), cerca de metade utilizou apenas o conceito de Combinação e a outra metade associou a esse alguma representação geométrica que permitiu a compreensão de que os elementos eram distinguíveis pela natureza e não pela ordem.

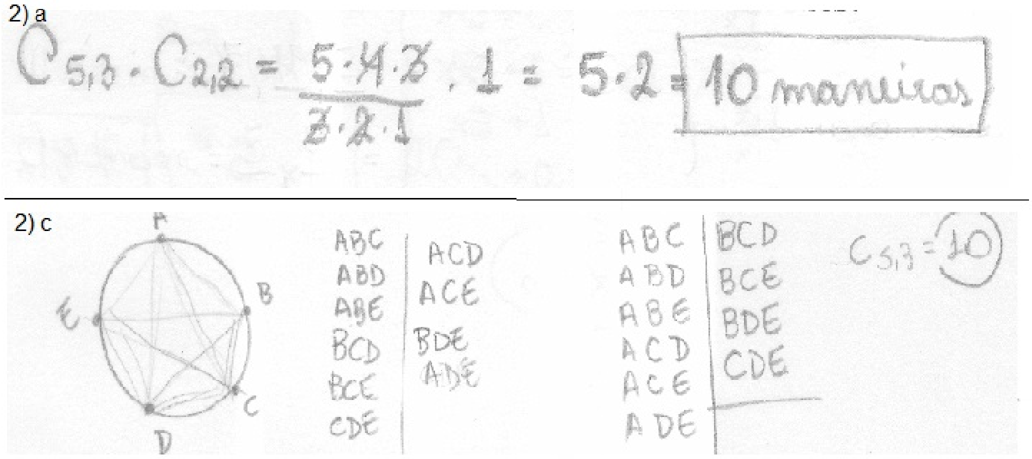


Figura 30: Soluções da questão 2 referente ao 1º questionário.

Dentre os que erraram, muitos utilizaram o princípio multiplicativo na resolução de pelo menos um dos ítens, o que indica a não compreensão do conceito de Combinação. Outros erraram a aplicação da relação de Combinação ou mesmo conceitos de matemática básica.

Alguns alunos questionaram que no item (a) não ficava claro que os meninos precisam comer as cinco frutas, então, foram orientados para que considerassem dessa forma, ou seja, que um deles comeria três e o outro comeria duas frutas.

O item (d) não permitiu verficar se eles compreenderam o conceito de complementaridade na Combinação, visto que nenhuma solução continha essa relação. No entanto, na questão seguinte (ver figura 32) eles utilizaram o conceito de complementaridade, o que sugere que o tenham compreendido.

O intuito da 3ª questão era perceber se o aluno conseguia entender o todo como soma das partes e assim, definiria uma estratégia mais fácil de resolver a situação-problema.

a) Uma sala possui 10 interuptores independentes. De quantas formas pode-se iluminar a sala com pelo menos um interuptor ligado, não estando todos ligados?

b) Quantos subconjuntos, não vazios e diferentes do conjunto principal, possui um conjunto com 10 elementos?

c) O grêmio estudantil de uma escola é composto por 10 alunos. Para representá-lo em um congresso, deverá ser formada uma comissão com no mínimo 1 e no máximo 9 integrantes. Quantas são as formas de compor essa comissão?

d) Voce consegue relacionar os ítens a, b e c?

Nessa questão, cerca de 49% alunos acertaram os três primeiros ítens. Destes, aproximadamente 25% utilizaram o conceito de Combinação com simetria, e em torno de 70% calcularam todos os ítens por Combinação. Os demais utilizaram o princípio multiplicativo excluindo duas possibilidades ao final. Novamente, em relação ao item (d), a maioria comentou que se tratavam da mesma solução.

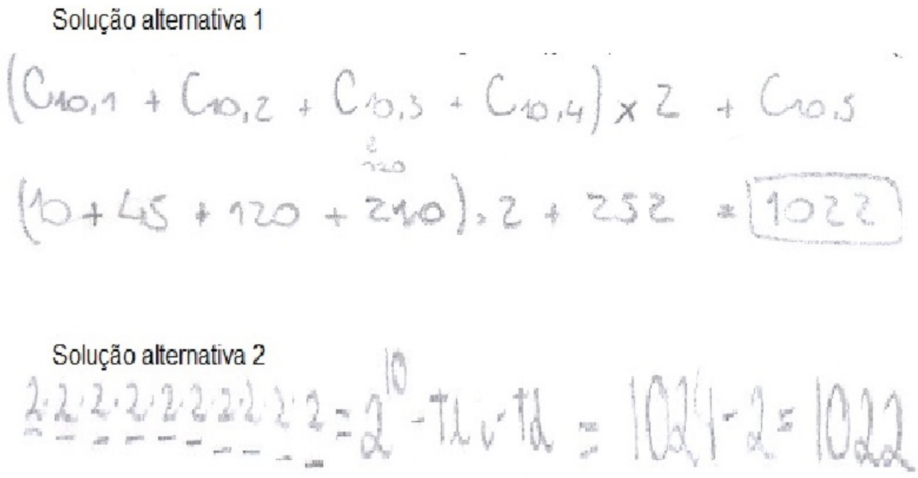


Figura 31: Soluções alternativas da questão 3 referente ao 1º questionário.

Entre os que erraram, os maiores equívocos foram cometidos nas multiplicações. Alguns acertaram os ítens (a) e (c) mas não conseguiram abstrair no item (b).

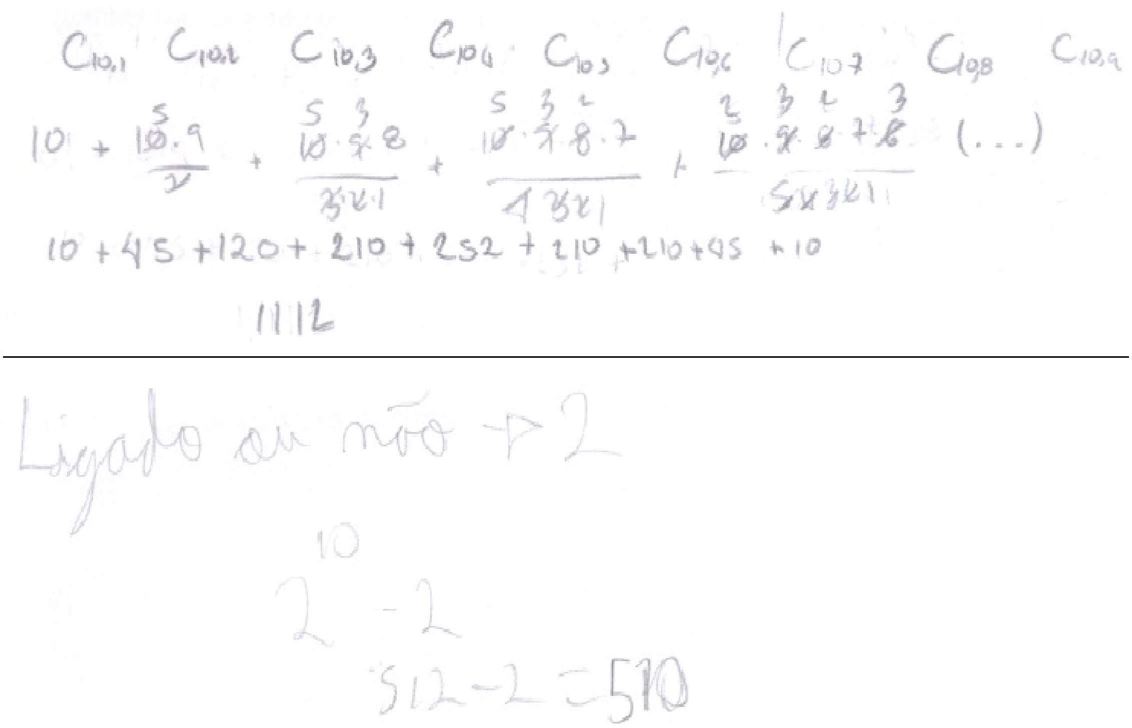


Figura 32: Erros cometidos na questão 3 referente ao 1º questionário.

A tabela abaixo permite uma melhor visualização das porcentagens e acertos obtidos em cada item de cada questão:

Questão	% para o item (a)	% para o item (b)	% para o item (c)	% para o item (d)
1º	55%	55%	55%	40%
2º	75%	75%	75%	-
3º	49%	49%	49%	30%

7.2 QUESTIONÁRIO 2

Após a resolução das atividades propostas no questionário 1, bem como, buscando atender um dos objetivos desse trabalho, elaborou-se um segundo questionário envolvendo identidades combinatoriais. O objetivo principal dessa pesquisa era verificar se os alunos conseguiriam solucionar situações-problema que envolviam tais identidades. Assim, podería-se confirmar ou negar a ideia de que eles conseguiriam abstrair os conceitos e consequentemente compreender tal identidade.

7.2.1 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO 2

Nessa fase, apenas 110 alunos estavam presentes e responderam a pelo menos uma das perguntas da pesquisa. A seguir seguem as perguntas bem como algumas das soluções apresentadas pelos alunos.

Questao 1: Um grupo de 10 brasileiros e 8 japoneses foi convocado para uma reunião. Nela, deseja-se formar uma comissão com 4 membros.

a) Quantas comissões podem ser constituidas com as informações acima?

b) Quantas comissões possuem apenas brasileiros? Quantas possuem apenas um japonês? Quantas possuem exatamente dois japoneses? Quantas possuem exatamente três japoneses? Quantas possuem apenas japoneses? Qual a soma das quantidades de comissões obtidas nesse ítem?

c) Qual a relação existente entre os ítens a e b?

O item (a) foi resolvido corretamente aproximadamente 91% dos alunos que responderam ao questionário. A seguir uma das soluções apresentadas.

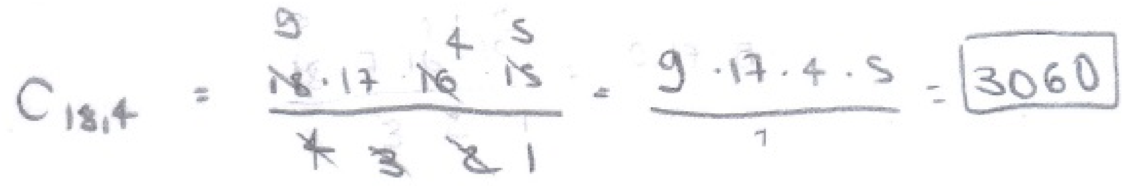


Figura 33: Resolução correta do item (a) referente à 1ª questão do 2ºquestionário.

Analisando as soluções obtidas pelos alunos no item (a), apenas 9% não obtiveram a resposta adequada. Desses, a maioria errou conceitos básicos de multiplicação e divisão. A seguir são apresentados alguns dos erros cometidos.

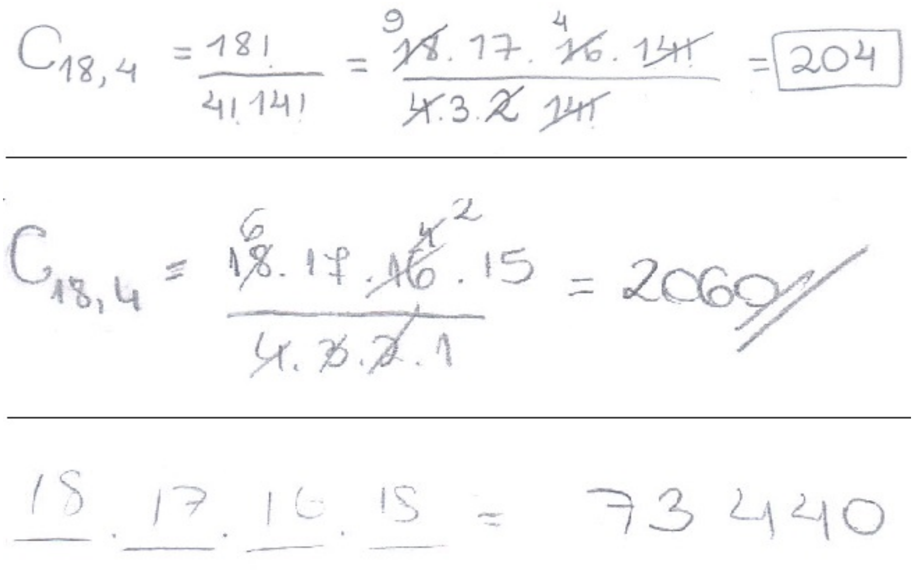


Figura 34: Erros cometidos no item (a) referente à 1ª questão do 2ºquestionário.

Esse resultado, aparentemente, indica que os alunos compreenderam o conceito de Combinação.

Já em relação ao item (b), a quantidade de acertos não foi igualmente adequada. Mesmo assim, carca de 63% deles acertaram esse item. Todos resolveram cada uma das hipóteses e somando obtiveram a resposta correta. Nesse momento, aparentemente, nenhum deles percebeu que a soma das partes compõe o todo e consequentemente a resposta do item (b) seria a mesma do item (a). Isso sugere que o aluno sabe efetuar as operações mas tem dificuldade de analisar resultados.

A seguir estão duas soluções referentes aos ítens (b) e (c), obtidas pelos alunos.

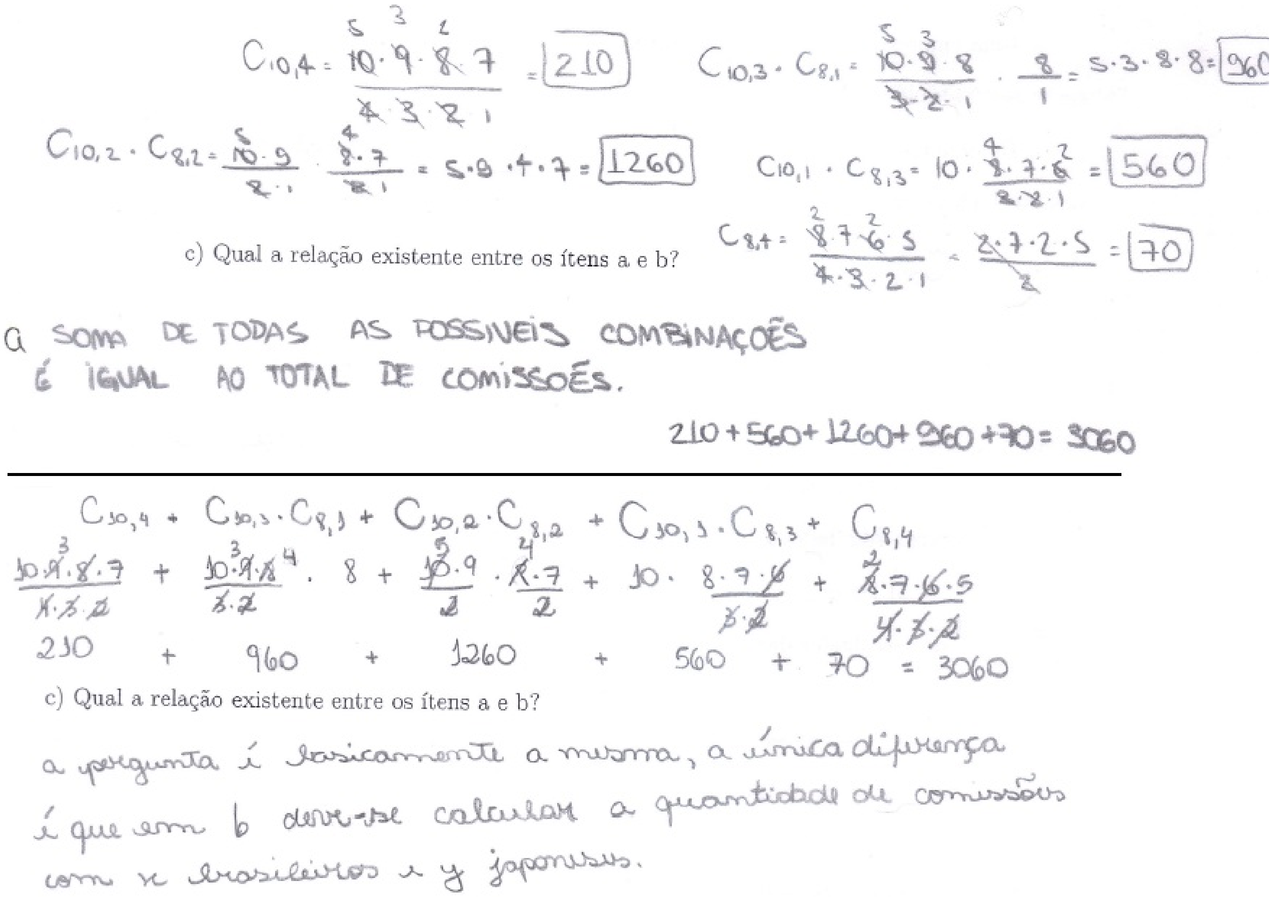


Figura 35: Resolução dos ítens (b) e (c) referentes à 1ª questão do 2ºquestionário.

Em relação ao item (c), a maioria concluiu que as respostas dos ítens (a) e (b) eram as mesmas.

A próxima questão envolve soma de Combinação.

Questão 2: Considere um conjunto A com *n* elementos.

a) Calcule a quantidade de subconjuntos de A, não vazios.

Nesse item, em torno de 45% dos alunos obtiveram a solução correta. No entanto, é bem possível que a solução foi obtida não por conceitos combinatoriais e sim por relembrarem das aulas de conjuntos numéricos (assunto visto no 1º ano). A seguir são apresentadas três dessas soluções.

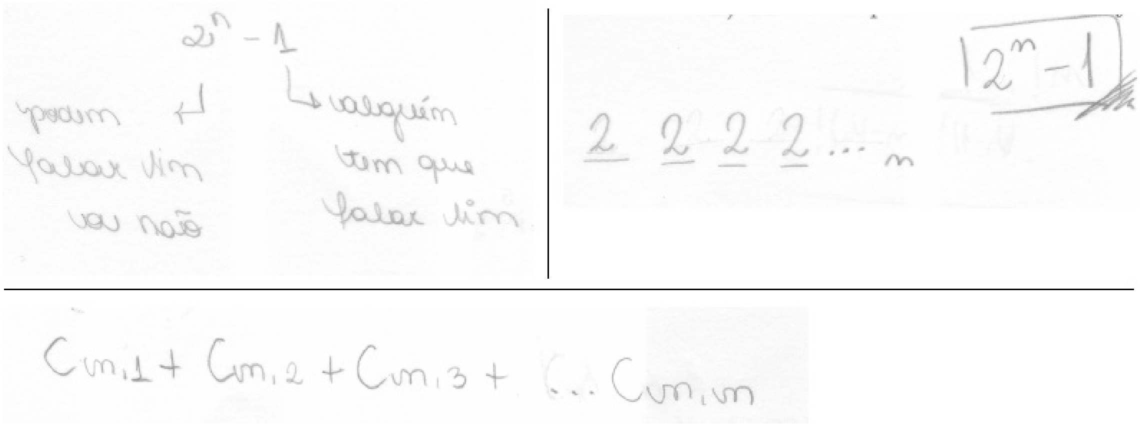


Figura 36: Resolução do item (a) referentes à 2ª questão do 2º questionário.

b) Quantos subconjuntos de A possuem 1 elemento, quantos possuem 2 elementos, quantos possuem 3 elementos e assim por diante com n elementos? Qual a soma das quantidades de subconjuntos obtidos nesse ítem?

c) Qual a relação existente entre os ítens a e b?

Nesses ítens, apenas cerca de 18% alunos obtiveram a solução correta. O que surpreendeu a foi a quantidade de alunos que não responderam aos ítens (b) e (c). Cerca de 50% dos alunos deixaram em branco os dois ítens.

A seguir está uma das soluções corretas.

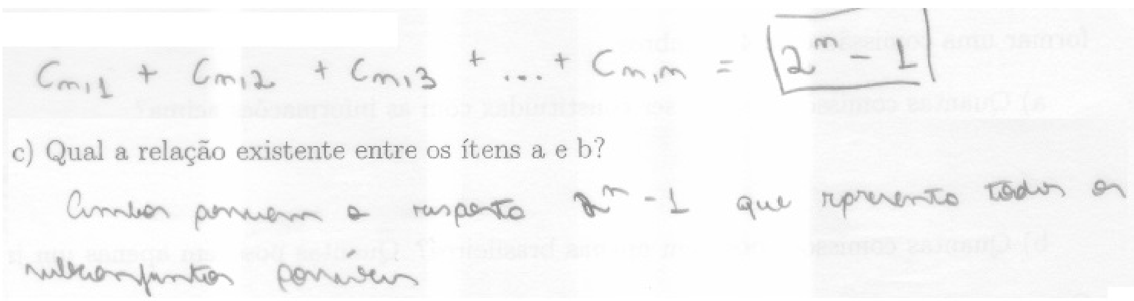


Figura 37: Resolução dos ítens (b) e (c) referentes à 2ª questão do 2ºquestionário.

Questão 3: Uma empresa de mineração possui n acionistas. Para representá-la em um congresso, serão escolhidos k integrandes dentre os acionistas.

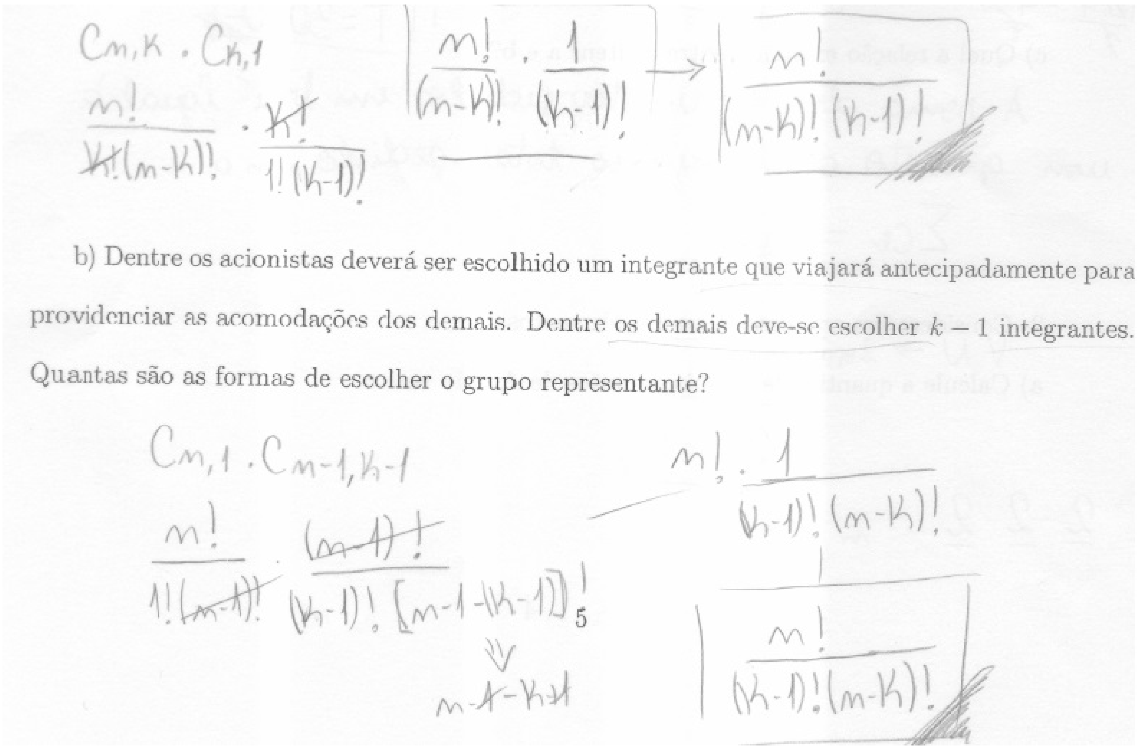
a) De quantas maneiras eles podem formar uma comissão com k membros sendo que um dos escolhidos deve viajar antecipadamente para providencias acomodações aos demais?

Nesse item, cerca de 30% dos alunos obtiveram a solução correta. Desses, alguns desenvolveram as expressões e outros mantiveram na forma combinatorial.

b) Dentre os acionistas deverá ser escolhido um integrante que viajará antecipadamente para providenciar as acomodações dos demais. Dentre os demais deve-se escolher $k-1$ integrantes. Quantas são as formas de escolher o grupo representante?

Nesse item, cerca de 16% obtiveram êxito na resolução. Muitos até conseguiram montar as duas expressões envolvendo Combinação, mas não efetuaram a multiplicação entre as partes.

Analisando as soluções desses dois ítens, apenas 14 alunos ou cerca de 13% dos alunos acertaram ambos. A seguir está apresentada uma dessas soluções, referente aos ítens (a) e (b).


$C_{m,k} \cdot C_{k,1}$ $\quad \frac{m!}{\cancel{k!}(m-k)!} \cdot \frac{\cancel{k!}}{1!(k-1)!}$ $\quad \frac{m!}{(m-k)!} \cdot \frac{1}{(k-1)!} \rightarrow \boxed{\frac{m!}{(m-k)!(k-1)!}}$

b) Dentre os acionistas deverá ser escolhido um integrante que viajará antecipadamente para providenciar as acomodações dos demais. Dentre os demais deve-se escolher $k-1$ integrantes. Quantas são as formas de escolher o grupo representante?

$C_{m,1} \cdot C_{m-1,k-1}$ $\quad \frac{m!}{1!\cancel{(m-1)!}} \cdot \frac{\cancel{(m-1)!}}{(k-1)![m-1-(k-1)]!}$ $\quad m-1-k+1$ $\quad m! \cdot \frac{1}{(k-1)!(m-k)!}$ $\quad \boxed{\frac{m!}{(k-1)!(m-k)!}}$

5

Figura 38: Resolução apresentada por um aluno, referente aos ítens (a) e (b) da 3ª questão do 2º questionário.

c) Qual a relação existente entre os ítens a e b?

Como a igualdade entre as expressões obtidas nos dois ítens anteriores não é imediata, poucos alunos as desenvolveram e obtiveram a equivalência, apenas 2, o que corresponde a 1,8%.

A próxima questão teve um resultado surpreendente, pois se trata da relação de Stifel (Michael Stifel (1487 - 1567), padre e matemático alemão, um dos precursores dos logaritmos. Escreveu “Arithmetica Integra”, o mais importante tratado de Álgebra da Alemanha no Século XVI. Nele aparece pela primeira vez o triângulo dos coeficientes do binômio, até os de ordem 17, inclusive a fórmula recorrente entre eles hoje conhecida como relação de Stifel). Normalmente não apresentada pelos professores, foi descoberta por muitos dos alunos.

Questão 4: Considere uma empresa com *n* funcionários, dentre eles Antônio. Deseja-se formar uma comissão com *k* membros.

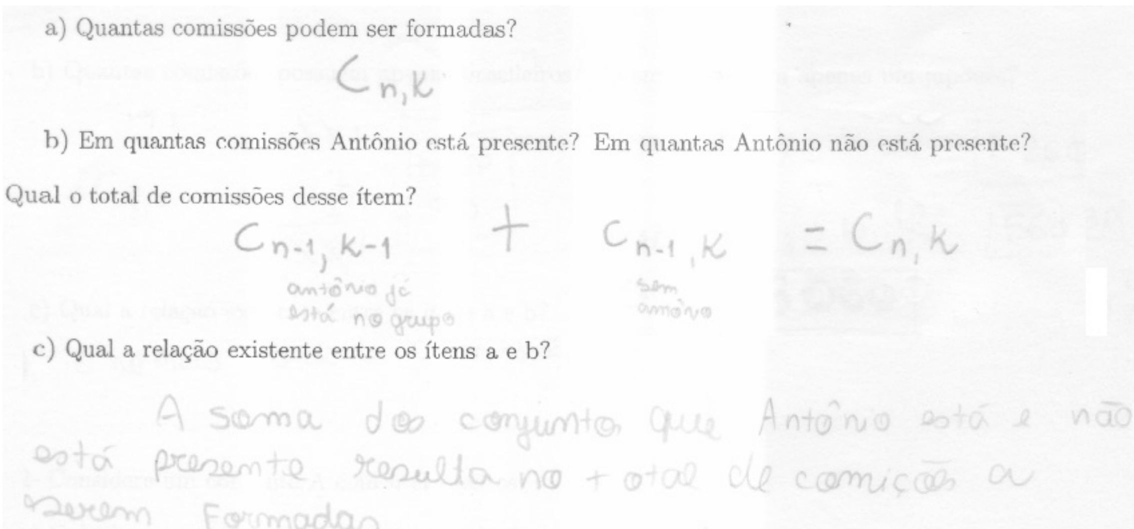
a) Quantas comissões podem ser formadas?

b) Em quantas comissões Antônio está presente? Em quantas Antônio não está presente? Qual o total de comissões desse ítem?

A grande maioria dos alunos, (84) o que corresponde a cerca de 76% acertou o ítem (a), visto que sua resolução era uma aplicação direta do conceito de Combinação. No entanto, a dificuldade dessa questão está no ítem (b) e na percepção de que são complementares e somam o item (a). Curiosamente nenhum aluno que tenha errado o item (a) acertou o ítem (b). Assim dos 84 alunos que acertaram o primeiro ítem, apenas 30 acertaram também o segundo o que corresponde a 27%.

c) Qual a relação existente entre os ítens a e b?

Novamente, como a equivalência entre as relações não é imediata, poucos alunos perceberam a sua validade dessa identidade, conhecida como relação de Stifel. No entanto, a quantidade de alunos que perceberam esssa relação foi maior que a identidade apresentada na questão 3. Aqui, 10 alunos, (cerca de 9%) do total, perceberam a identidade. A seguir estão duas resoluções corretas.



a) Quantas comissões podem ser formadas?

$C_{n,k}$

b) Em quantas comissões Antônio está presente? Em quantas Antônio não está presente? Qual o total de comissões desse ítem?

$C_{n-1,k-1} + C_{n-1,k} = C_{n,k}$

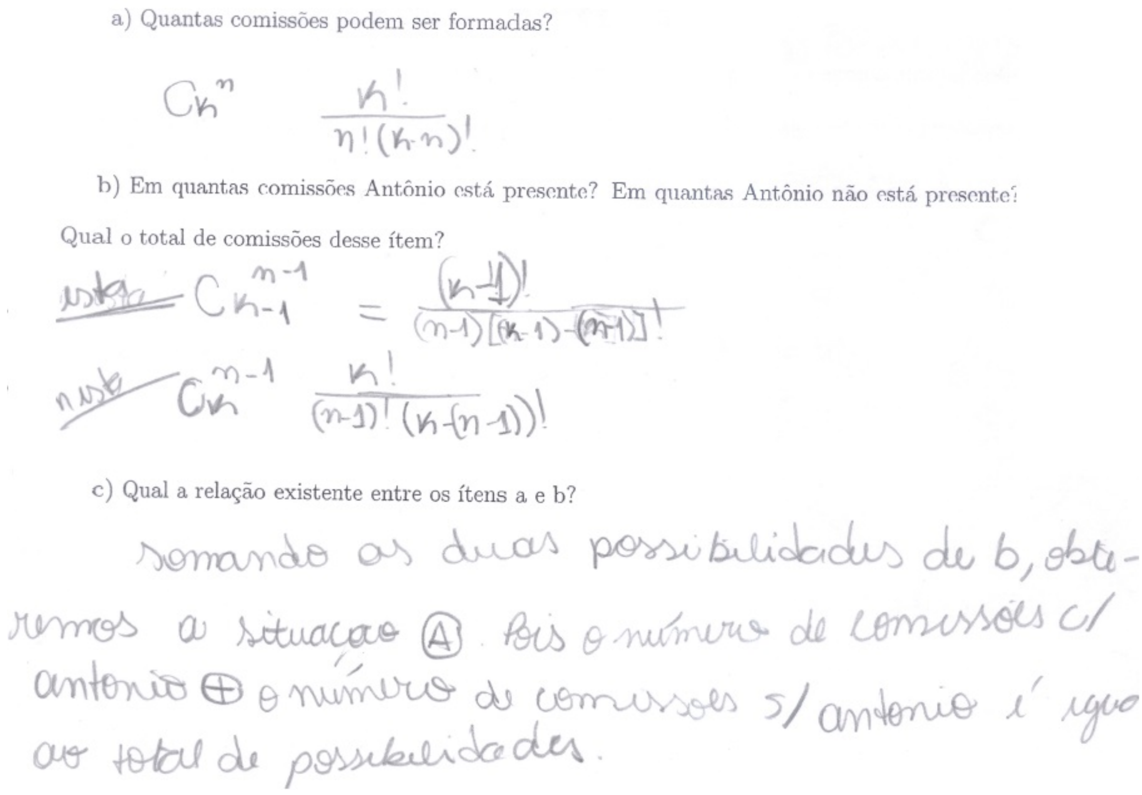
antônio já está no grupo

sem antônio

c) Qual a relação existente entre os ítens a e b?

A soma dos conjuntos que Antônio está e não está presente resulta no total de comições a serem Formadas

Figura 39: 1ª Demonstração da relação de Stifel.


a) Quantas comissões podem ser formadas?

C_k^n $\frac{k!}{n!(k-n)!}$

b) Em quantas comissões Antônio está presente? Em quantas Antônio não está presente?

Qual o total de comissões desse ítem?

está $C_{k-1}^{n-1} = \frac{(k-1)!}{(n-1)[(k-1)-(n-1)]!}$

não está C_k^{n-1} $\frac{k!}{(n-1)!(k-(n-1))!}$

c) Qual a relação existente entre os ítens a e b?

somando as duas possibilidades de b, obteremos a situação (A). Pois o número de comissões c/ antonio ⊕ o número de comissões s/ antonio é igual ao total de possibilidades.

Figura 40: 2ª Demonstração da relação de Stifel.

A tabela abaixo permite uma melhor visualização das porcentagens e acertos obtidos em cada item de cada questão:

Questão	% para o item (a)	% para o item (b)	% para o item (c)
1º	90%	63%	60%
2º	45%	18%	10%
3º	30%	16%	18%
4º	76%	27%	9%

8 CONCLUSÃO

De acordo com as propostas iniciais desse trabalho, havia alguns objetivos que nos propusemos a cumprir. Um deles se referia ao aprofundamento dos conhecimentos combinatoriais. Com relação a isso, certamente o estudo das identidades e o tema abordado no Capítulo referente à Fermat contribuíram muito para que se obtivesse êxito nessa tarefa. Sem dúvida, minhas as aulas terão mais qualidade depois dessa etapa.

Fiz uma rápida pesquisa em livros didáticos e, aparentemente, os conceitos combinatoriais têm sido apresentados de forma superficial. Assim, esse trabalho propõe que relações combinatoriais, normalmente não apresentadas nos livros didáticos, sejam não só trabalhadas mas também sejam generalizadas. Um indício de que isso seja possível está nas atividades propostas no Capítulo 4, visto que são de fácil compreensão e nos resultados do questionário do Capítulo 7.

Ainda de acordo com essa pesquisa realizada, normalmente, os conceitos combinatoriais são apresentados apenas no 2º ano do ensino médio. Uma opção a esse modelo seria a introdução desses conceitos desde as primeiras séries do ensino fundamental. Com isso haveria mais tempo para retomar conceitos, provavelmente poderíamos atingir um maior nível de compreesão e profundidade nas séries finais do ensino médio. Aliás, esse é um dos pontos indicados pela pesquisa. Os alunos possuem a capacidade de compreender conceitos mais avançados da Análise Combinatória, basta que haja capacidade e um bom domínio dos conceitos por parte do professor, prova disso é o Capítulo 7. Partindo de situações-problema, como foi apresentado na pesquisa, acredita-se que seja uma maneira possível de orientar os alunos para que consigam compreender e generalizar algumas identidades combinatoriais.

REFERÊNCIAS

BENJAMIN, ARTHUR T.; QUINN, JENNIFER J. **Proofs That Really Count: The Art of Combinatorial Proof**, 2003.

HEFEZ, ABRAMO: **Elementos da Aritmética**, SBM, 2010.

JANACKOVA, MARTINA; JANEK, JAROSLAV. **Classification of strategies employed by high school students in isomorphic combinatorial problems** TMME, vol.3, nº2, p.128, 2006.

< Disponível em: http://www.math.umt.edu/tmme/vol3no2/TMMEvol3no2_Slovakia_pp128_145.pdf. Acessado em 04/09/2014 >

LAROCHE, CAROLINE. **Selected proofs of Fermat´s little theorem and Wilson´s theorem**, 2008.

< Disponível em: https://sakai.wfu.edu/access/content/group/26f503c9-bec7-4bb7-bdab-82ed8fda9d39/publications/Student/Caroline>

MILES, CEZAR POLCINO; COELHO, SÔNIA PITTA. **Números: Uma Introdução à Matemática**, Editora USP, 2006.

SANTOS, P.J. et al., **Introdução à Análise Combinatória**. 3ª Edição Revista. Editora Unicamp, 2002

ANEXO A – QUESTIONÁRIOS APLICADOS AOS ALUNOS

QUESTIONÁRIO 1

1- Resolva as seguintes situações-problema.

a) Quantas são as soluções inteiras não negativas da equação: $x+y+z+w=10$?

b) De quantos modos podemos repartir 10 maças idênticas entre 4 amigos?

c) O quadro dos professores de matemática do colégio *Matemática Legal* conta com 10 profissionais e estavam discutindo possíveis locais para a confraternização de final de ano. Foram sugeridos 4 locais e cada professor deveria votar em apenas um deles. Quantos resultados existem para essa votação?

d) Você consegue relacionar os ítens a, b e c?

2-Resolva as seguintes situações-problema.

a)Márcio e Anderson são irmãos. Sua mãe prepara todos os dias uma lancheira com frutas. Dispondo de 5 frutas distintas e sabendo que Márcio come três frutas por dia, de quantas maneiras ela poderá organizar a lancheira dos meninos?

b) Para o próximo semestre serão disponibilizadas 5 disciplinas aos alunos: cálculo 1, geometria analítica, álgebra linear, programação de computadores e desenho técnico. Rubes decidiu cursar apenas três dessas disciplinas. De quantas maneiras podera escolher?

c) Sobre uma circunferência marcam-se cinco pontos distintos. Quantos triângulos, com vértices nesses pontos, pode-se construir?

d) Voce consegue relacionar os ítens a, b e c?

3- Resolva as seguintes situações-problema.

a) Uma sala possui 10 interuptores independentes. De quantas formas pode-se iluminar a sala com pelo menos um interuptor ligado, não estando todos ligados?

b) Quantos subconjuntos, não vazios e diferentes do conjunto principal, possui um conjunto com 10 elementos?

c) O grêmio estudantil de uma escola é composto por 10 alunos. Para representá-lo em um congresso, deverá ser formada uma comissão com no mínimo 1 e no máximo 9 integrantes. Quantas são as formas de compor essa comissão?

d) Voce consegue relacionar os ítens a, b e c?

QUESTIONÁRIO 2

1- Um grupo de 10 brasileiros e 8 japoneses foi convocado para uma reunião. Nela, deseja-se formar uma comissão com 4 membros.

a) Quantas comissões podem ser constituidas com as informações acima?

b) Quantas comissões possuem apenas brasileiros? Quantas possuem apenas um japonês? Quantas possuem exatamente dois japoneses? Quantas possuem exatamente três japoneses? Quantas possuem apenas japoneses? Qual a soma das quantidades de comissões obtidas nesse ítem?

c) Qual a relação existente entre os ítens a e b?

2- Considere um conjunto A com n elementos.

a) Calcule a quantidade de subconjuntos de A, não vazios.

b) Quantos subconjuntos de A possuem 1 elemento, quantos possuem 2 elementos, quantos possuem 3 elementos e assim por diante com n elementos? Qual a soma das quantidades de subconjuntos obtidos nesse ítem?

c) Qual a relação existente entre os ítens a e b?

3- Uma empresa de mineração possui n acionistas. Para representá-la em um congresso, serão escolhidos k integrandes dentre os acionistas.

a) De quantas maneiras eles podem formar uma comissão com k membros sendo que um dos escolhidos deve viajar antecipadamente para providencias acomodações aos demais?

b) Dentre os acionistas deverá ser escolhido um integrante que viajará antecipadamente para providenciar as acomodações dos demais. Dentre os demais deve-se escolher $k-1$ integrantes. Quantas são as formas de escolher o grupo representante?

c) Qual a relação existente entre os ítens a e b?

4- Consimbere uma empresa com n funcionários, dentre eles Antônio. Deseja-se formar uma comissão com k membros.

a) Quantas comissões podem ser formadas?

b) Em quantas comissões Antônio está presente? Em quantas Antônio não está presente? Qual o total de comissões desse ítem?

c) Qual a relação existente entre os ítens a e b?