



UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MECÂNICA

CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

LETÍCIA MENDES DE LIMA

MATHEUS TONELI RODRIGUES

**ANÁLISE EM PÓS-FLAMBAGEM DE ESTRUTURAS COM-
PÓSITAS LAMINADAS**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CURITIBA

2016

LETÍCIA MENDES DE LIMA
MATHEUS TONELI RODRIGUES

ANÁLISE EM PÓS-FLAMBAGEM DE ESTRUTURAS COM- PÓSITAS LAMINADAS

Monografia do Projeto de Pesquisa apresentada à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2 do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial para aprovação na disciplina.

Orientador: Prof. Marco Antônio Luersen, Dr.
Eng.

CURITIBA

2016

TERMO DE APROVAÇÃO

Por meio deste termo, aprovamos a monografia do Projeto de Pesquisa "ANÁLISE EM PÓS-FLAMBAGEM DE ESTRUTURAS COMPÓSITAS LAMINADAS", realizado pelo aluno(s) Letícia Mendes de Lima e Matheus Toneli Rodrigues, como requisito para aprovação na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Prof. Marco Antônio Luersen, Dr. Eng.
Damec, UTFPR
Orientador

Prof. Ana Paula Carvalho da Silva Ferreira, Dr. Eng.
Damec, UTFPR
Avaliador

Prof. Ivan Moura Belo, Dr. Eng.
Damec, UTFPR
Avaliador

Curitiba, 16 de junho de 2016.

RESUMO

LIMA, Letícia Mendes, RODRIGUES, Matheus Toneli. Análise em Pós-Flambagem de Estruturas Compósitas Laminadas. 2016. 57 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Curso Superior de Engenharia Mecânica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

A substituição de materiais metálicos por materiais compósitos cresceu nas últimas décadas, principalmente em setores como o de aviação e o espacial, em função do ganho de desempenho com a redução do peso. A utilização de compósitos permite a construção de estruturas mais delgadas com altos valores de rigidez e resistência. Dentre os tipos de materiais compósitos existentes, o laminado reforçado por fibras tem sido muito empregado. Uma das problemáticas associadas à utilização de compósitos é dada pela dificuldade na caracterização do seu comportamento mecânico. Assim, torna-se difícil prever a resposta mecânica da estrutura a um dado tipo de carregamento por consequência da forte instabilidade presente em estruturas delgadas associada à anisotropia do material. Essa situação pode ser ainda mais complexa quando fenômenos não-lineares estão presentes, como no caso da pós-flambagem. Por esse motivo, a análise da pós-flambagem é muito importante e deve ser considerada no projeto de componentes laminados. Nesse contexto, o presente trabalho buscou contribuir para o melhor entendimento do comportamento de estruturas compósitas laminadas em regime de pós-flambagem. Para isso, analisou-se especificamente a influência da orientação das fibras no laminado sobre a carga máxima suportada em três geometrias: placa retangular imperfeita, painel curvo com furo quadrado central e casca cilíndrica com furo circular central. As análises foram executadas em modelos desenvolvidos no *software* ABAQUS e divididas em duas etapas: análise de flambagem linear (autoproblema) e análise estática não-linear (grandes deslocamentos). No presente estudo considerou-se apenas as orientações: 0° , $\pm 45^\circ$ e 90° , bem como combinações entre elas. Os empilhamentos analisados foram arbitrados, de forma a construir laminados simétricos e balanceados com, no máximo, dois tipos de orientações diferentes. Os resultados demonstram, como esperado, um aumento na capacidade carga no regime de pós-flambagem em relação à flambagem. Além disso, constatou-se que laminados compostos por uma combinação de diferentes orientações de lâminas apresentam melhor resistência a flambagem e pós-flambagem em relação a laminados unidirecionais. Apesar das diferentes geometrias e condições de contorno estudadas, foi possível observar que dentre as orientações estudadas, $\pm 45^\circ$ confere ao laminado melhor desempenho mecânico no regime não-linear.

Palavras-chave: Pós-flambagem, Materiais compósitos laminados, Elementos finitos.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Representação esquemática de um laminado reforçado com fibras.....	12
Figura 2 - Acoplamentos dos termos da matriz constitutiva.	15
Figura 3 - Curva representativa de carregamento compressivo em função do deslocamento transversal em uma estrutura.	17
Figura 4 - Modo de flambagem de uma placa fina submetida à carga compressiva.	17
Figura 5 - Sequência das etapas de modelagem da pós-flambagem utilizando o ABAQUS.	25
Figura 6 - Nomenclatura do elemento S4R.	27
Figura 7 - Geometria da placa retangular e condições de contorno: (a) caso compressivo, (b) caso cisalhante	28
Figura 8 - Malha de elementos finitos para simular a placa retangular.	29
Figura 9 - Validação da implementação do modelo analítico sem imperfeição para o caso de carregamento compressivo.	30
Figura 10 - Validação do modelo por elementos finitos para placa com imperfeição.	30
Figura 11 - Influência da imperfeição em placas submetidas a carregamento compressivo.	31
Figura 12 - Validação do modelo por elementos finitos para o caso do cisalhamento	32
Figura 13 - Pós-flambagem em placa sem imperfeição submetida a cisalhamento. .	33
Figura 14 - Influência de diferentes graus de imperfeição em placas submetidas à cisalhamento.	33
Figura 15 - Influência da orientação das lâminas no caso compressivo.	34
Figura 16 - Influência da orientação das lâminas no parâmetro ηD	35
Figura 17 - Influência da orientação das lâminas no caso de carregamento cisalhante.	36

Figura 18 - Geometria, carregamento e condições de contorno do painel com furo quadrado.	37
Figura 19 - Malha inicial (a) e malha refinada (b) do painel curvo com furo central. .	39
Figura 20 - Validação do modelo do painel curvo.	40
Figura 21 - Força crítica de flambagem e respectivos modos do painel curvo com furo	41
Figura 22 - Força vs. encurtamento (análise não-linear) para o caso do painel curvo com furo e diferentes sequências de empilhamento.	42
Figura 23 - Geometria da casca cilíndrica com furo central.	44
Figura 24 - Condições de contorno para a casca cilíndrica com furo central.	45
Figura 26 - Malha utilizada na análise da casca cilíndrica: imperfeita após refino. (a) vista isométrica, (b) vista frontal.	46
Figura 25 - Validação do modelo numérico para a casca cilíndrica imperfeita (força vs. encurtamento para o empilhamento [$\pm 0^\circ/\pm 19^\circ/\pm 37^\circ/45^\circ/\pm 51^\circ$]).	47
Figura 27 - Força crítica de flambagem linear e respectivo modo de flambagem para os diferentes empilhamentos utilizados no caso da casca cilíndrica com furo central.	49
Figura 28 - Força vs. encurtamento (análise não-linear) para o caso da casca cilíndrica com furo central e diferentes sequências de empilhamento.	50
Figura 29 - Geometria e definição das coordenadas de cada lâmina ao longo de um empilhamento.	56
Figura 30 - Sistemas de coordenadas x-y e 1-2.	57

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Propriedades elásticas das lâminas da placa retangular.	28
Tabela 2 - Empilhamentos analisados para a placa imperfeita.	29
Tabela 3 - Dimensões do painel com furo.	37
Tabela 4 - Propriedades elásticas do AS4/3501-6	38
Tabela 5 - Empilhamentos analisados para o painel curvo	38
Tabela 6 - Ganho percentual da máxima força de pós-flambagem em relação à força crítica de flambagem para os diferentes empilhamentos utilizados no painel com furo central.	43
Tabela 7 - Dimensões da casca cilíndrica com furo na região central.	44
Tabela 8 - Propriedades elásticas para a lâmina da casca cilíndrica com furo central.	45
Tabela 9 - Empilhamentos utilizados na análise de pós-flambagem da casca cilíndrica com furo central.	48
Tabela 10 - Ganho percentual da máxima força de pós-flambagem em relação à força crítica de flambagem para os diferentes empilhamentos utilizados no caso da casca cilíndrica com furo central.	50

LISTA DE SÍMBOLOS

x, y	- Coordenadas do plano x-y
σ_x	- Tensão normal na direção x
σ_y	- Tensão normal na direção y
τ_{xy}	- Tensão cisalhante no plano x-y
σ_z	- Tensão normal na direção z
τ_{yz}	- Tensão cisalhante no plano y-z
τ_{xz}	- Tensão cisalhante no plano x-z
ε_z	- Deformação normal na direção z
γ_{xz}	- Deformação cisalhante no plano x-z
γ_{yz}	- Deformação cisalhante no plano y-z
N_x	- Força resultante na direção x
N_y	- Força resultante na direção y
N_{xy}	- Força cisalhante resultante em relação ao plano x-y
M_x	- Momento fletor resultante proveniente da distribuição das tensões na direção x
M_y	- Momento fletor resultante proveniente da distribuição das tensões na direção y
M_{xy}	- Momento torsor resultante em relação ao plano x-y
ε_x^0	- Deformação normal na superfície média na direção x
ε_y^0	- Deformação normal na superfície média na direção y
γ_{xy}^0	- Deformação cisalhante na superfície média no plano x-y
A	- Matriz constitutiva de extensão
B	- Matriz constitutiva de acoplamento flexão-extensão
D	- Matriz constitutiva de flexão
κ_x	- Curvatura da deformação da superfície média na direção x
κ_y	- Curvatura da deformação da superfície média na direção y
κ_{xy}	- Curvatura da deformação da superfície média em x-y
M	- Vetor dos momentos fletores resultantes (Seção 2.2)
N	- Vetor das forças resultantes (Seção 2.2)
	- Número de lâminas presentes no laminado (Apêndice A)
κ	- Vetor das curvaturas de deformação na superfície média
ε^0	- Vetor das deformações normais na superfície média
θ	- Ângulo de orientação da fibra na lâmina
n	- n-ésima lâmina do laminado
P_{cr}	- Força crítica de flambagem
\bar{u}_3	- Deslocamento transversal adimensionalizado
m	- Número de meia-ondas
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$	- Coordenadas adimensionais nas direções x,y
\bar{f}	- Amplitude do deslocamento transversal
$\bar{N}_{11,init}^0$	- Carga de flambagem inicial
α_D, η_D	- Parâmetros adimensionais dados em função da matriz de rigidez do material
λ_1	- Comprimento das meias ondas
λ_2	- Assimetria do padrão de flambagem
b	- Largura da placa
f	- Deslocamento transversal

N_{12}^0	- Carga crítica de flambagem (Seção 2.4)
K^{MN}	- Matriz de rigidez (Seção 3.1)
$\{u\}$	- Vetor deslocamento
λ	- Autovalor
$[K_0]$	- Matriz de rigidez do estado inicial
$[K_\sigma]$	- Matriz de rigidez geométrica
f_0	- Amplitude da imperfeição
u_3	- Deslocamento transversal
α	- Ângulo de curvatura para o painel curvo
H	- Comprimento do painel curvo (Seção 4.2.1)
	- Altura da casca cilíndrica (Seção 4.3.1)
R	- Raio do painel curvo (Seção 4.2.1)
	- Raio da casca cilíndrica (Seção 4.3.1)
t	- Espessura da lâmina
a	- Comprimento do lado do furo quadrado
l_e	- Comprimento do elemento finito
D	- Diâmetro do furo
U_i	- Deslocamento normal
UR_i	- Deslocamento angular
P	- Carga aplicada
E_1	- Módulo de elasticidade na direção 1
E_2	- Módulo de elasticidade na direção 2
G_{12}, G_{13}, G_{23}	- Módulos de cisalhamento
ν_{12}	- Maior coeficiente de Poisson no plano 1-2
ν_{21}	- Menor coeficiente de Poisson no plano 1-2
Δ	- Deslocamento compressivo
\bar{Q}_{ij}	- Termos da matriz constitutiva reduzida
Q_{ij}	- Componentes da matriz constitutiva
z_{k-1}, z_k	- Coordenadas da lâmina (ao longo de sua espessura)
1,2	- Eixos do plano 1-2

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	Tema	9
1.2	Caracterização do Problema	9
1.3	Objetivos	10
1.4	Justificativa	10
1.5	Conteúdo do trabalho	10
2	REVISÃO DA LITERATURA	12
2.1	Material Compósito Laminado	12
2.2	Macromecânica de Laminados	13
2.3	Flambagem e Pós-Flambagem	16
2.4	Soluções Analíticas para Pós-Flambagem em Placas Imperfeitas	18
2.5	Influência da Fibra no Comportamento Mecânico de Estruturas Compósitas	21
3	DESCRIÇÃO DAS ANÁLISES	23
3.1	Análise Estrutural Utilizando ABAQUS	23
3.2	Elemento Finito Utilizado	26
4	RESULTADOS	28
4.1	Análise de Placas Retangulares Imperfeitas	28
4.1.1	Modelagem da Placa Imperfeita Utilizando o Método de Elementos Finitos	28
4.1.2	Placa Imperfeita Submetida a Carregamento Compressivo Uniaxial	29
4.1.3	Placa Imperfeita Submetida a Carregamento Cisalhante	31
4.1.4	Influência da Orientação das Lâminas na Pós-Flambagem de Placas Imperfeitas	34
4.2	Análise de Painel Curvo com Furo Quadrado Central	36
4.2.1	Modelagem do Painel Curvo Utilizando o Método de Elementos Finitos	36
4.2.2	Influência da Orientação das Lâminas sobre a Pós-Flambagem de Painéis Curvos com Furo Central	40
4.1	Casca Cilíndrica Imperfeita	43
4.1.1	Modelagem da Casca Cilíndrica Imperfeita utilizando o Método de Elementos Finitos	44
4.1.2	- Influência da Orientação das Lâminas sobre a Pós-Flambagem de Cascas Cilíndricas Imperfeitas	47
5	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	52
	REFERÊNCIAS	54
	APÊNDICE A – DESCRIÇÃO DOS TERMOS DA MATRIZ DE RIGIDEZ	56

1 INTRODUÇÃO

1.1 Tema

O tema deste trabalho envolve a mecânica dos materiais compósitos, mais especificamente o estudo do comportamento de estruturas compósitas laminadas no regime de pós-flambagem.

1.2 Caracterização do Problema

A aplicação de compósitos laminados na indústria se expandiu nos últimos anos, particularmente, nos setores automobilístico e aeronáutico. A utilização de materiais compósitos possibilitou à indústria trabalhar com estruturas e componentes cada vez mais delgados. Isso permitiu a fabricação de produtos mais leves e, conseqüentemente, menos poluentes.

Juntamente com o aumento na utilização de materiais compósitos, os estudos sobre o comportamento destes materiais também cresceram. No entanto, muito ainda precisa ser estudado, a fim de compreender melhor a resposta destes materiais a fenômenos mecânicos mais complexos.

As leis constitutivas, que descrevem a relação entre tensão e deformação de um material, mostram, por exemplo, que em compósitos laminados tensões normais podem gerar deformações cisalhantes. Esse comportamento é devido à anisotropia do material, provocada pelas diferentes orientações das lâminas no laminado.

Além do seu caráter anisotrópico, estruturas compósitas são geralmente finas, o que pode provocar forte instabilidade estrutural quando submetidas a tensões compressivas. Nesse contexto, a análise de flambagem e pós-flambagem torna-se requisito essencial de projeto a ser considerado, a fim de garantir segurança e confiabilidade estrutural.

1.3 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é avaliar o fenômeno da pós-flambagem em estruturas compósitas laminadas, buscando compreender a relação entre a orientação das lâminas e a carga máxima suportada pela estrutura.

1.4 Justificativa

O comportamento de materiais compósitos ainda não é claramente entendido para alguns tipos de solicitações mecânicas e para geometrias complexas. Nesse contexto, há poucos trabalhos existentes na literatura que investigam a relação das orientações das lâminas e o fenômeno de pós-flambagem em compósitos laminados.

Este projeto faz parte da área de mecânica estrutural e o trabalho agrega conhecimentos em métodos numéricos e ciência dos materiais. O conhecimento de várias áreas se faz necessário para o completo entendimento do mecanismo de pós-flambagem em materiais compósitos laminados. Além disso, a oportunidade de trabalhar com um *software* comercial de elementos finitos representa uma das motivações em desenvolver o projeto. Ao longo das disciplinas curriculares do curso não foi possível trabalhar com uma ferramenta desse tipo.

1.5 Conteúdo do trabalho

O trabalho é composto por cinco capítulos no qual o presente trata da introdução ao tema do projeto. Para uma melhor compreensão da estrutura do trabalho uma breve descrição dos capítulos subsequentes é apresentada.

O segundo capítulo consiste em uma breve revisão bibliográfica a respeito de materiais compósitos laminados. Inicialmente, é explicado o que é um material compósito laminado e sua macromecânica é apresentada de acordo com a Teoria Clássica dos Laminados. Após, é discorrido sobre os fenômenos de flambagem e pós-flambagem e soluções analíticas para pós-flambagem de placas imperfeitas são apresentadas. No final desse capítulo, a influência da orientação das lâminas na resposta mecânica de um material compósito laminado é discutida.

O terceiro capítulo trata da descrição das análises realizadas no *software* de elementos finitos ABAQUS. Os conceitos envolvidos na resolução do problema linear de flambagem são mostrados. Também é explicado como foi analisado o problema de pós-flambagem, descrevendo a inclusão de imperfeições geométricas nos modelos numéricos. Nesse capítulo, é discorrido sobre as características dos diferentes tipos de elementos finitos existentes que podem ser usados em soluções numéricas de problemas de engenharia e é discutida a importância da escolha do tipo de elemento apropriado para uma dada aplicação. Por fim, o tipo de elemento escolhido para o desenvolvimento deste trabalho é apresentado.

No quarto capítulo são apresentados os resultados para a influência da orientação das lâminas na carga máxima suportada pela estrutura. Esse capítulo pode ser dividido em duas partes. A primeira parte trata da solução de casos simples de pós-flambagem. Nessa parte, uma placa imperfeita sob carregamento compressivo uniaxial e uma placa imperfeita sob carregamento cisalhante são analisadas. As soluções numéricas obtidas são comparadas com as soluções analíticas mostradas no capítulo dois. Além disso, é realizada uma análise da influência do grau de imperfeição na resposta do material em pós-flambagem. A segunda parte do capítulo corresponde à solução de dois casos complexos. Primeiramente, a geometria estudada é um painel curvo com furo central. Em seguida, uma casca cilíndrica imperfeita com furo central é analisada. Para ambos os casos, a carga crítica de flambagem com carga máxima suportada pela estrutura antes da falha são comparadas.

No quinto capítulo são mostradas as conclusões acerca dos resultados obtidos e sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 Material Compósito Laminado

Material compósito (ou composto) é definido por JONES (1999) como um material formado pela composição de dois ou mais materiais, em diferentes fases e em escala macroscópica, visando à obtenção de um novo material com características melhores àquelas que seus constituintes apresentariam separadamente.

No caso do material compósito laminado, a combinação dos materiais é feita pelo arranjo de fibras reforçadoras em uma matriz. Esta pode ser polimérica, metálica ou mineral, já as fibras podem ser de vidro, carbono ou aramida (Mendonça, 2005).

Segundo JONES (1999), os materiais compósitos são classificados de acordo com o tipo de reforço: fibroso, particulado ou laminado. Neste trabalho será abordado somente este último, o qual se constitui de várias lâminas, geralmente com a mesma espessura, empilhadas segundo uma dada orientação.

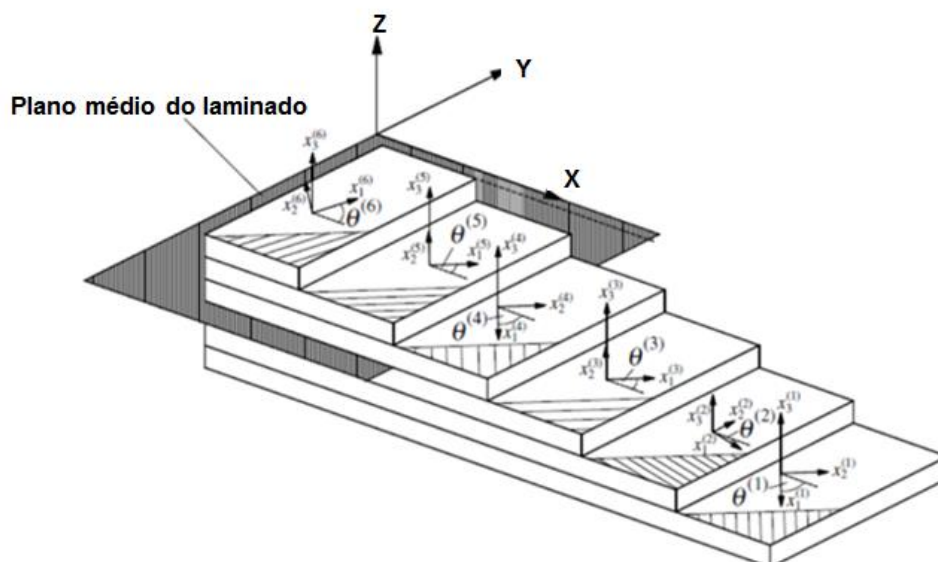


Figura 1 - Representação esquemática de um laminado reforçado com fibras.
Fonte: Adaptado de Mittelstedt e Schröder (2010).

A Figura 1 mostra uma representação esquemática de um laminado. Nota-se que, para cada lâmina, sua orientação é definida por um sistema de eixos ortogonais local. Esse sistema coordenado precisa ser estabelecido em virtude do caráter anisotrópico do material composto e é denominado de sistema principal do material. Com base nele, definem-se as propriedades mecânicas do material, em função das direções dos eixos. A primeira direção principal é disposta longitudinalmente às fibras, a segunda é tomada transversalmente a elas e a terceira direção é perpendicular ao plano formado pelas outras duas direções (Strong, 2008).

As propriedades finais do laminado dependem tanto de seus constituintes quanto da orientação e sequência de empilhamento das lâminas. Em um laminado unidirecional, a resistência e rigidez do material tendem a ser maiores na direção da fibra, que na direção perpendicular a ela. Isso acontece, pois, a 90° , as propriedades mecânicas da lâmina se assemelham às da matriz. Já a 0° , as propriedades da lâmina são, predominantemente, às da fibra (Jones, 1999).

Uma das grandes vantagens dos materiais compósitos, além da redução do peso e aumento da resistência mecânica, é a possibilidade de gerar diversas combinações de materiais e orientações das fibras de forma a se obter um conjunto de características otimizadas para uma dada aplicação (Strong, 2008).

2.2 Macromecânica de Laminados

O desenvolvimento da análise das tensões e deformações para materiais compósitos exige a adoção de algumas hipóteses. Baseando-se na Teoria Clássica de Laminados, JONES (1999) apresenta algumas simplificações para o estudo de um laminado:

- i. Cada lâmina é ortotrópica, possui espessura constante e comportamento linear elástico.
- ii. O laminado é considerado fino, ou seja, sua espessura é pequena comparada ao seu comprimento e sua largura.

- iii. Adota-se o estado plano de tensões. Desse modo, somente as tensões que atuam no plano x - y (plano da lâmina) são consideradas na análise. Portanto, as tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} são consideradas não nulas, enquanto que σ_z , τ_{yz} e τ_{xz} são nulas.
- iv. Uma linha normal à superfície média do laminado indeformado permanece reta e perpendicular à superfície média após a deformação. Desse modo, a deformação normal (ε_z) é nula, bem como as deformações cisalhantes transversais (γ_{xz} e γ_{yz}).
- v. O efeito das forças de campo é desprezado.

Baseado nas hipóteses anteriores, as forças resultantes (N_x , N_y , N_{xy}) e os momentos resultantes (M_x , M_y , M_{xy}) são dados pela lei constitutiva:

$$\begin{cases} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{cases} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{cases} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{cases}$$

onde ε_x^0 , ε_y^0 e γ_{xy}^0 representam as deformações no plano médio, enquanto que κ_x , κ_y , κ_{xy} correspondem às curvaturas de deformação da superfície média. A equação (1), em forma compacta, pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (2)$$

As submatrizes A , B e D formam a matriz constitutiva (também chamada de matriz de rigidez ou matriz ABD) de um laminado. Essas matrizes estão descritas no Apêndice A. A matriz constitutiva (matriz ABD) depende das propriedades elásticas das lâminas e de suas espessuras, da sequência de empilhamento (ordem e orientação das lâminas) e do número de lâminas. Cada termo dessa matriz representa o modo em que o material irá se deformar. Representações dos diferentes acoplamentos dos termos da matriz constitutiva estão ilustradas na Figura 2. Para laminados

simétricos, nota-se que a matriz B é nula. Portanto, nesse caso, não há acoplamento flexão-membrana no laminado.

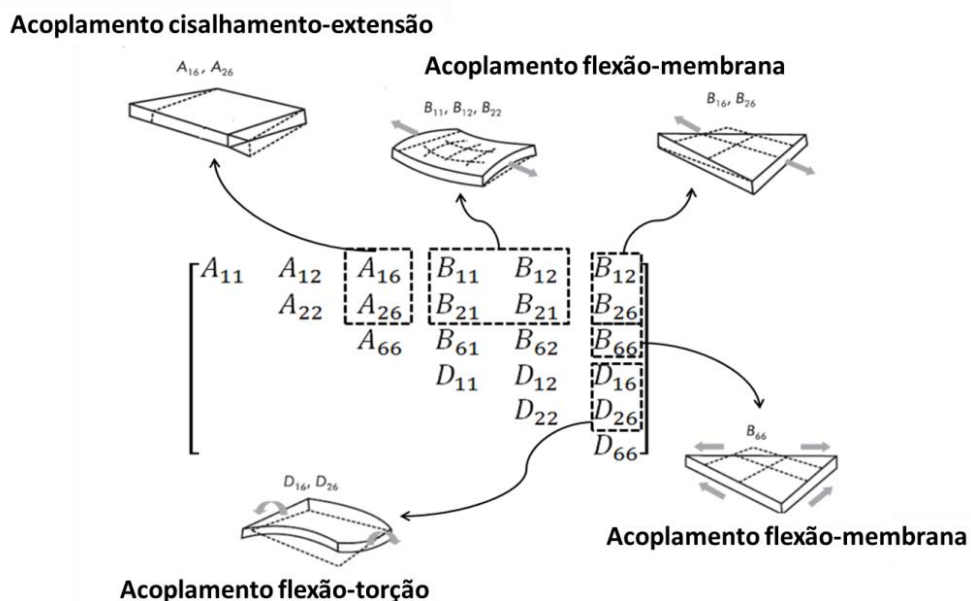


Figura 2 - Acoplamentos dos termos da matriz constitutiva.

Fonte: Adaptado de Strong (2008).

O empilhamento das lâminas possui grande influência no desempenho mecânico de uma estrutura fabricada com material compósito laminado. Nesse sentido se faz necessário adotar uma nomenclatura para definir a sequência de empilhamento do laminado. De acordo com um sistema de referência, a orientação das lâminas de um material laminado é representada por:

$$[\theta_1/\theta_2/ \dots \theta_n] \quad (3)$$

onde θ corresponde ao ângulo de orientação da lâmina e o subscrito representa a posição de cada lâmina até a n -ésima lâmina no empilhamento. A sequência de empilhamento se inicia de cima para baixo. Para facilitar a notação em casos com lâminas adjacentes com a mesma orientação, utiliza-se um subscrito com a quantidade de lâminas. Por exemplo, ao invés de representar um laminado por $[90^0/90^0/45^0/45^0/$

45°], escreve-se $[90^\circ_2/45^\circ_3]$. Para o caso em que as lâminas estão dispostas simetricamente em relação ao plano médio, utiliza-se o subscrito “s”. Desse modo, $[90^\circ/0^\circ/45^\circ]_s$ indica uma sequência de seis lâminas empilhadas na seguinte sequência: $[90^\circ/0^\circ/45^\circ/45^\circ/0^\circ/90^\circ]$.

Ainda há o caso de laminados balanceados. Um laminado está balanceado se para cada lâmina com orientação $+\theta$, há outra lâmina com as mesmas características mecânicas, mas com orientação $-\theta$, não obrigatoriamente em posição adjacente (Jones, 1999).

2.3 Flambagem e Pós-Flambagem

Por serem delgadas, as estruturas formadas por compósitos laminados podem flambar ao serem submetidas a cargas compressivas. O comportamento típico da carga (P) em função do deslocamento transversal máximo (w) em uma estrutura de material compósito laminado sujeito a um carregamento compressivo é mostrado na Figura 3. Segundo a teoria clássica da flambagem, uma estrutura sem imperfeições suportaria um aumento de carga sem apresentar deslocamento transversal (curva I). Ao atingir uma força crítica (P_{cr}), essa estrutura perfeita poderia não se deformar transversalmente mesmo para valores crescentes de carga (curva II) ou ela poderia flambar e desse modo o valor da carga se manteria constante para um aumento no deslocamento (curva III).

Na Figura 3, a curva IV representa o fenômeno de pós-flambagem, onde inicialmente uma estrutura sem imperfeições apresentaria um comportamento similar à curva I até atingir uma força crítica. Após esse ponto, a estrutura estaria no regime de pós-flambagem e seria verificado um comportamento não-linear com grandes amplitudes de deslocamento até que o material falhe (Leissa, 1983). O comportamento de uma estrutura real está melhor representado pela curva V, onde o deslocamento transversal é progressivo desde o início da aplicação da carga, mesmo antes de atingir a carga crítica (P_{cr}). Ao ultrapassar o valor da carga crítica, o regime de pós-flambagem dessa estrutura também seria caracterizado por grandes deslocamentos até a falha.

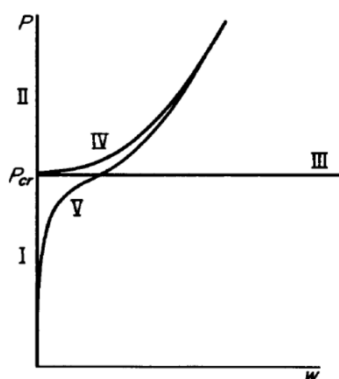


Figura 3 - Curva representativa de carregamento compressivo em função do deslocamento transversal em uma estrutura.

Fonte: Leissa (1983).

Segundo JONES (1999), a deformação transversal de uma estrutura delgada possui modos de flambagem senoidais na direção do carregamento, conforme mostrado na Figura 4.

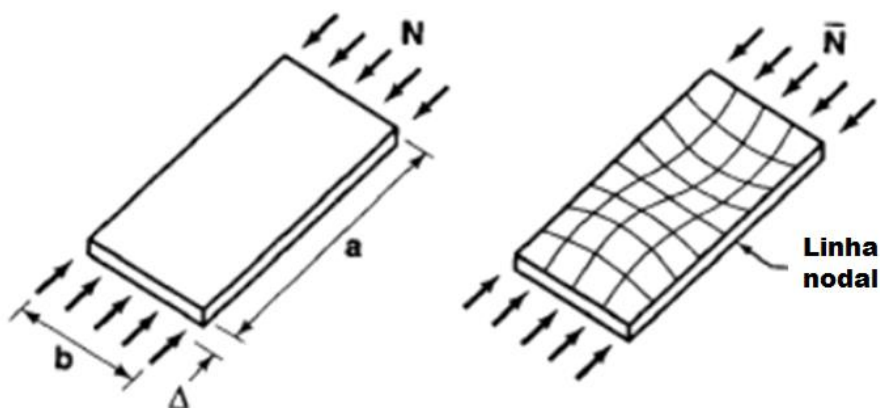


Figura 4 - Modo de flambagem de uma placa fina submetida à carga compressiva.

Fonte: Adaptado de Jones (1999).

Para a execução deste projeto, não foi realizada uma pesquisa exhaustiva de trabalhos publicados sobre pós-flambagem. Somente alguns artigos, considerados representativos, foram revisados. Contudo, pode-se afirmar que o fenômeno da pós-flambagem não é ainda totalmente compreendido. A partir da lei constitutiva (equação

2), algumas aproximações foram desenvolvidas para os materiais compósitos laminados. MITTELSTEDT e SCHRÖDER (2010) obtiveram soluções aproximadas para placas, alterando condições de contorno. Primeiramente, foi considerada uma placa retangular submetida a cargas compressivas em todos os seus lados. Depois, foi considerada uma placa com dois lados engastados. Esse trabalho abrangeu placas com um empilhamento simétrico e balanceado de lâminas.

WEAVER e DIACONU (2006) realizaram um estudo similar com placas. Em seu trabalho, empilhamentos não simétricos foram investigados. A solução apresentada concordou qualitativamente bem com os resultados obtidos via método dos elementos finitos (MEF).

Em relação ao uso do MEF no estudo de pós-flambagem, MAKSIMOVIĆ (2007) mostrou que os valores obtidos através dessa técnica para uma placa são muito similares aos resultados experimentais.

Quanto ao estudo de geometrias mais complexas, KERE e LYLY (2008) realizaram um trabalho numérico-experimental com cilindros fabricados a partir de fibras de carbono. Nesse trabalho foi avaliada a influência do uso de imperfeições geométricas no modelo numérico sobre a carga crítica de flambagem.

DEBSKI (2013) também desenvolveu um trabalho numérico-experimental em relação à carga crítica de flambagem. Vigas “U” com abas, fabricadas com epoxy e reforçadas com fibras de carbono, foram analisadas.

2.4 Soluções Analíticas para Pós-Flambagem em Placas Imperfeitas

Um ponto de partida para o estudo da pós-flambagem são os modelos analíticos. Para casos mais simples, métodos analíticos são eficazes devido ao menor custo computacional necessário para a obtenção da solução. No entanto, à medida que as geometrias se tornam mais complexas e os efeitos das não-linearidades mais acentuados, as soluções analíticas perdem sua vantagem em relação aos modelos de elementos finitos, devido à menor precisão nos resultados.

Nesta seção, as soluções analíticas propostas por MITTELSTEDT e SCHRÖDER (2010) e MITTELSTEDT, ERDMANN e SCHRÖDER (2011) para placas compósitas imperfeitas sob carregamentos axiais e cisalhantes são apresentados.

A solução aproximada para a pós-flambagem em placas retangulares proposta por MITTELSTEDT e SCHRÖDER (2010) é baseada na utilização de funções trigonométricas interpoladoras na descrição dos deslocamentos transversais, considerando que as deflexões da flambagem e da pós-flambagem possuem a mesma forma. A solução analítica é desenvolvida com base nas equações constitutivas do laminado e nas condições de equilíbrio, assumindo somente a solução para uma placa retangular simplesmente suportada nas quatro arestas (SSSS). O deslocamento transversal adimensionalizado é dado por

$$\bar{u}_3 = \bar{f} \sin m\pi\varepsilon_1 \sin \pi\varepsilon_2 \quad (4)$$

onde m é o número de meias-ondas, ε_1 e ε_2 são as coordenadas adimensionais nas direções x e y , respectivamente, e \bar{f} a amplitude do deslocamento transversal.

A carga de flambagem inicial, na forma adimensional, é dada por

$$\bar{N}_{11,init}^0 = \frac{m^2}{\alpha_D^2} + \frac{\alpha_D^2}{m^2} + 2\eta_D \quad (5)$$

onde α_D e η_D são parâmetros adimensionais dados em função da matriz de rigidez do laminado e do comprimento e largura da placa.

Na configuração estável, a seguinte condição deve ser garantida:

$$\frac{\partial \bar{N}_{11,init}^0}{\partial m} = 0 . \quad (6)$$

A solução da equação (6) possui apenas uma raiz relevante, igual a:

$$m = \alpha . \quad (7)$$

Portanto, a solução da equação (5) é função apenas de η_D , dado por:

$$\eta_D = \frac{D_{12} + 2D_{66}}{\sqrt{D_{11} D_{22}}} \quad (8)$$

onde os termos D_{ij} são os termos relacionados à rigidez de flexão do laminado.

A solução aproximada para a pós-flambagem em placas submetidas a cisalhamento proposta por MITTELSTEDT, ERDMANN e SCHRÖDER (2011) também é baseada na utilização de funções trigonométricas interpoladoras, na qual as deflexões da flambagem e da pós-flambagem possuem a mesma forma. Novamente, somente a solução para uma placa simplesmente suportada (SSSS) é analisada. Utilizando as equações constitutivas do laminado e as condições de equilíbrio, o deslocamento transversal é dado por

$$u_3 = f \sin \left[\frac{\pi}{\lambda_1} (x_1 - \lambda_2 x_2) \right] \sin \left(\frac{\pi x_2}{b} \right) \quad (9)$$

onde os coeficientes λ_1 e λ_2 representam, respectivamente, o comprimento das meias ondas e a assimetria do padrão de flambagem, x_1 é a coordenada na direção do comprimento e x_2 a coordenada na direção da largura b da placa, f é a amplitude do deslocamento transversal.

Os valores dos comprimentos λ dependem, exclusivamente, dos termos D_{ij} da matriz de rigidez do laminado e da largura da placa (b).

A carga crítica de flambagem é descrita da seguinte forma

$$N_{12}^0 = \frac{-\pi (D_{11}b^2 + D_{22}(\lambda_1^4 + 6\lambda_1^2 \lambda_2^2 b^2 + \lambda_2^4 b^2) + 2(D_{12} + 2D_{66})(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 b^2)b^2)}{2\lambda_1^2 \lambda_2 b^4} \quad (10)$$

Observando a equação (10), nota-se a dificuldade de se determinar a influência de qualquer variável. Assim, a previsão desse comportamento necessita ser estudada mais detalhadamente, o que pode ser feito por meio do MEF.

2.5 Influência da Fibra no Comportamento Mecânico de Estruturas Compósitas

As fibras atribuem ao laminado suas principais características mecânicas, como resistência e rigidez. De acordo com os requisitos de projeto e aplicação de uma estrutura compósita laminada, as fibras podem ser longas ou curtas, contínuas ou descontínuas, uni ou bidirecionais.

Fibras são fabricadas em pequenos diâmetros dificultando o desenvolvimento excessivo de trincas e defeitos de fabricação. Isso justifica os valores mais altos de resistência mecânica, se comparados àqueles do mesmo material fabricado em bloco. Todavia, a utilização das fibras, na grande maioria das estruturas mecânicas, prescinde da presença de uma matriz, na qual aquelas possam ser imersas e protegidas. Além desta função, a matriz consegue transmitir os esforços transversais e cisalhantes às fibras, aumentando sua aplicabilidade (Mendonça, 2005).

As fibras, em sua grande maioria, são feitas em carbono-grafite, vidro ou kevlar (aramida). Fibras de vidro possuem custo menor, mas baixa relação entre o módulo de elasticidade e densidade. Já as fibras de carbono possuem grande rigidez, porém maior custo em relação às de vidro. Finalmente, as fibras de kevlar, apesar dos altos valores de resistência à tração e de rigidez, detêm baixa resistência à compressão (Mendonça, 2005).

O estudo da influência das fibras sobre as propriedades e sobre o comportamento mecânico de estruturas compósitas iniciou-se entre os anos 60 e 70, com a expansão da aplicação desses materiais nas indústrias de aviação e espacial. Dentre os primeiros estudos nesse campo, o trabalho desenvolvido por KHOT e VENKAYYA (1970) analisou o efeito da orientação das fibras e das imperfeições sobre o comportamento de pós-flambagem em cilindros, mostrando que um aumento significativo da força crítica de flambagem pode ser obtido variando a orientação das fibras. Posteriormente, KNIBBS e MORRIS (1974) estudou a alteração das propriedades físicas e

mecânicas de materiais compósitos, segundo a orientação de suas fibras. Nesse estudo, ficou evidente que as propriedades longitudinais da lâmina são controladas pela fibra e as transversais pela matriz, mostrando inclusive que o desalinhamento das fibras afeta o módulo de elasticidade do material. LAWS e MCLAUGHLIN (1979) buscaram desenvolver um método para a relação entre o comprimento e a razão de aspecto de uma fibra com o seu módulo de rigidez.

Nas últimas décadas, estudos mais elaborados com materiais compósitos laminados começaram a ser desenvolvidos. HAJALI e WANG (1990) buscaram identificar os efeitos das não-linearidades geométricas e do material da fibra sobre o comportamento de pós-flambagem. BANAKAR, SHIVANANDA e NIRANJAN (2012) mostraram que a orientação e a espessura das fibras, em materiais compósitos laminados, modificam sua resistência à tração. De acordo com sua teoria, as anisotropias do material causam uma variedade de mecanismos de falha, porém a sua complexidade sobre as condições de carregamento multiaxial não é ainda bem entendida. BANAKAR, SHIVANANDA e NIRANJAN (2012) também demonstraram que o aumento da espessura tende a diminuir a resistência à tração e que o alongamento tende a ser superior no caso de fibras orientadas a 30° . Nos laminados orientados a 90° , foi observado que a carga requerida até a fratura tende a ser maior.

Dentre os estudos mais recentes utilizando o método dos elementos finitos, SUMANA et al. (2015) apresentaram um modelo numérico capaz de descrever a flambagem em cilindros compósitos submetidos à pressão hidrostática. Os resultados revelaram que na orientação 90° e 0° as estruturas apresentaram alta resistência e baixa deformação. Já os cilindros com orientações $\pm 45^\circ$ apresentaram a menor carga de flambagem.

3 DESCRIÇÃO DAS ANÁLISES

Neste trabalho foi utilizado o software comercial ABAQUS, que emprega o método dos elementos finitos para análise de diversos problemas de engenharia. Para sua correta utilização, foi necessário um breve estudo sobre os métodos de resolução adotados em problemas de instabilidade estrutural (flambagem e pós-flambagem), que estão resumidos neste capítulo.

3.1 Análise Estrutural Utilizando ABAQUS

Diversos tipos de análises estruturais podem ser realizadas, a fim de se estudar o comportamento mecânico de uma estrutura. Dentre elas, destaca-se a análise de flambagem, que pode ainda ser dividida em análise linear e não-linear, de acordo com o comportamento das equações que descrevem o fenômeno.

A análise de flambagem linear é caracterizada por pequenos deslocamentos e pequenas deformações, além disso o comportamento do material precisa estar dentro do regime linear. Ela é utilizada para determinar a carga crítica de flambagem de uma estrutura, a partir da qual o sistema se torna instável. Segundo Bathe (1996), neste tipo de análise busca-se determinar os valores de carga que tornam a matriz de rigidez da estrutura singular, caindo-se em um problema de autovalores e autovetores e gerando soluções não triviais para o sistema de equações que descreve o problema. As cargas críticas são estimadas pelo produto entre autovalor obtido e força de perturbação aplicada. O problema de autovalores e autovetores correspondente à flambagem linear é descrito pela seguinte equação:

$$([K_0] + \lambda[K_\sigma])\{u\} = \{0\} \quad (11)$$

onde $[K_0]$ representa a matriz de rigidez do estado inicial; $[K_\sigma]$ é a matriz de rigidez geométrica, que é função do estado de tensões no qual se encontra a estrutura e é avaliado através de uma análise estática; λ é o autovalor, e representa a relação entre

a carga de flambagem e a carga de perturbação aplicada e, por fim, $\{u\}$ são os autovetores, que descrevem o modo de flambagem da estrutura. Observe que o vetor $\{u\}$ não representa valores reais de deslocamento, apenas designa a forma do modo de flambagem (Bathe, 1996).

As análises não-lineares são utilizadas principalmente para prever o comportamento integral de uma estrutura de engenharia, uma vez que elas tendem a ter uma resposta não-linear antes da falha. Essas análises podem ser de três tipos: não-linearidade geométrica, não-linearidade do material, e problemas de contato. Neste trabalho, foram consideradas apenas as não-linearidades geométricas, onde as estruturas estão submetidas a grandes deslocamentos.

O fluxograma das análises utilizando ABAQUS está apresentado na Figura 5.

A primeira etapa da análise é a modelagem, onde a geometria e a malha da estrutura são construídas e as propriedades, o empilhamento e o carregamento são definidos.

Em seguida, procede-se com a análise linear por autovalores e autovetores, através da qual a carga crítica e os modos de flambagem são obtidos. No ABAQUS essa análise pode ser realizada utilizando o comando **BUCKLE*, que utiliza o método de Lanczos.

Imperfeições geométricas favorecem a instabilidade de uma estrutura. Elas são classificadas como uma das não-linearidades presentes no fenômeno da pós-flambagem e caracterizam-se, basicamente, como desvios de forma gerados durante os processos de fabricação. Imperfeições podem ter diversas formas e seu efeito sobre o comportamento mecânico de um laminado precisa ser investigado individualmente para cada caso. A modelagem de uma imperfeição no ABAQUS é feita a partir da análise linear de flambagem. Nesse caso, aproxima-se a forma da imperfeição pelo modo de flambagem da estrutura. A amplitude dela é estimada com base na espessura total do laminado. O comando do ABAQUS para inserção da imperfeição é o **IMPERFECTION*.

Na quarta fase, a análise não-linear é executada, sendo somente do tipo geométrica (grandes deslocamentos), ou seja, não se considera a não-linearidade do material. Para resolver as equações de equilíbrio não-lineares o software ABAQUS utiliza

o método de Newton. Aqui a análise é incremental e iterativa, que pode levar a um tempo de processamento bem maior, quando comparado as análises linear. No ABAQUS o comando utilizado é o *STATIC, GENERAL.

O pós-processamento encerra o ciclo das análises. Aqui são levantadas as curvas de pós-flambagem da força em função do deslocamento transversal ou do encurtamento.

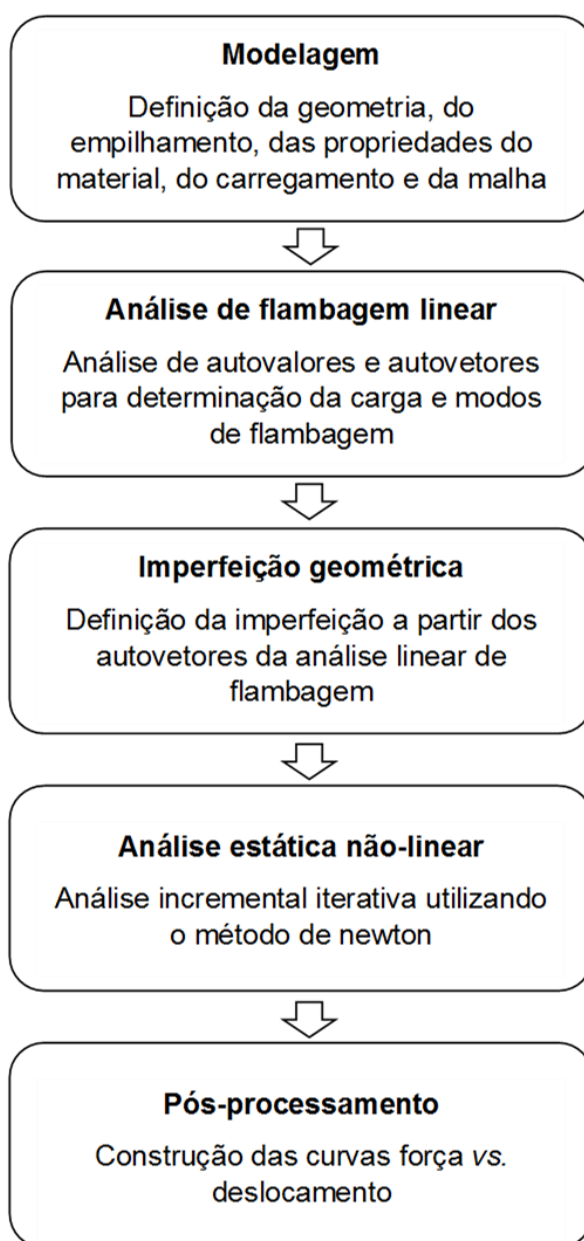


Figura 5 - Sequência das etapas de modelagem da pós-flambagem utilizando o ABAQUS.

3.2 Elemento Finito Utilizado

O *software* ABAQUS dispõe de uma grande biblioteca de elementos, tais como elementos de viga, barra, planos, sólidos, de casca, entre outros. Cada elemento é enquadrado dentro de uma família, onde são definidos o número de nós, graus de liberdade, tipo de formulação e integração das matrizes e vetores; que sintetizam as características principais de cada um deles e facilitam a escolha do elemento para uma dada aplicação.

Diversas considerações devem ser feitas ao se escolher o tipo de elemento finito para discretizar o problema. No caso de estruturas delgadas, quando uma dimensão (a espessura) é bem menor que as outras duas, de forma que as tensões na direção dessa dimensão possam ser desprezadas, elementos do tipo casca (*shell*) podem ser aplicados. Simplificadamente, esse tipo de elemento aproxima um modelo 3D para uma superfície.

O *software* ABAQUS disponibiliza dois tipos de elementos do tipo casca: convencionais e *continuum*, subdivididos em três categorias: elemento delgados, elementos espessos e elementos para aplicações gerais. A primeira categoria se adequa a problemas descritos pela teoria clássica de Kirchhoff para placas finas. No caso de estruturas mais espessas a formulação matemática do elemento se baseia na teoria de Mindlin, na qual as tensões transversais não são desconsideradas. A última categoria é aplicável a qualquer problema que envolva estruturas delgadas (Hibbitt et al., 2004). Para ela, no entanto, não foi encontrado na literatura consultada detalhes sobre a formulação matemática considerada. Na modelagem das geometrias estudadas neste trabalho utilizou-se o elemento de casca S4R, que se enquadra dentro da categoria de elementos de casca para aplicações gerais. Trata-se de um dos elementos mais indicado para resolver problemas de estruturas delgadas submetidas a grandes deslocamentos (Hibbitt et al., 2004).

A Figura 6 apresenta um exemplo da nomenclatura utilizada pelo ABAQUS. O nome do elemento está relacionado a sua família e forma. Por exemplo, S4R. A primeira letra S representa a família (no caso, *shell*, isto é, casca), o número 4 indica o número de nós por elemento e R descreve o tipo de integração numérica, no caso, reduzida. Este elemento possui seis graus de liberdade, três para deslocamento e três para rotação. Além de reduzida, a integração também pode ser cheia (ou completa).

Neste trabalho foi utilizado apenas elementos com integração reduzida, pois resulta em menor tempo de processamento sem perda de acurácia. Três pontos são considerados para a integração das matrizes deste elemento.

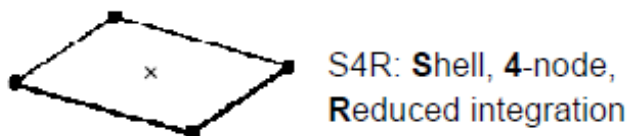


Figura 6 - Nomenclatura do elemento S4R.

Fonte: Hibbitt et al., 2004.

4 RESULTADOS

4.1 Análise de Placas Retangulares Imperfeitas

4.1.1 Modelagem da Placa Imperfeita Utilizando o Método de Elementos Finitos

Baseado no modelo apresentado por MITTELSTEDT e SCHRÖDER (2010), a geometria da placa e as condições de contorno são apresentadas na Figura 7.

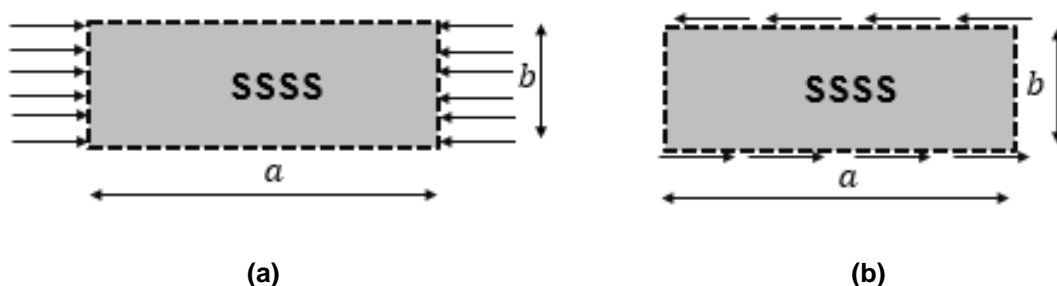


Figura 7 - Geometria da placa retangular e condições de contorno: (a) caso compressivo, (b) caso cisalhante

Neste caso, a placa retangular possui 640 mm de comprimento, a , por 200 mm de largura, b . As propriedades elásticas das lâminas estão apresentadas na Tabela 1. Todas as lâminas possuem espessura constante, $t = 0,184 \text{ mm}$.

Tabela 1- Propriedades elásticas das lâminas da placa retangular.

Propriedade	Valor
E_1	157 GPa
E_2	8,5 GPa
G_{12}	4,2 GPa
ν_{12}	0,35

A Figura 8 apresenta a malha utilizada para discretizar a placa retangular. Ela é composta por 1280 elementos do tipo *shell* (S4R) com seis graus de liberdade por nó.

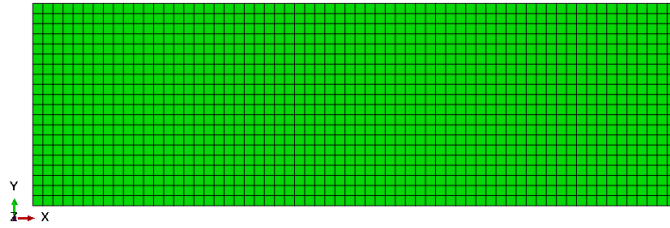


Figura 8 - Malha de elementos finitos para simular a placa retangular.

No intuito de investigar o efeito da orientação das lâminas sobre a carga crítica de flambagem e carga de pós-flambagem, quatro empilhamentos foram utilizados para estudar o caso compressivo e seis para o caso cisalhante. Essas sequências de empilhamento estão reunidas na Tabela 2.

Tabela 2 – Empilhamentos analisados para a placa imperfeita.

Compressão	Cisalhamento
$[(0^\circ/90^\circ)_2]_s$	$[0^\circ/90^\circ_2/0^\circ/90^\circ]_s$
$[0^\circ_4]_s$	$[0^\circ_6]_s$
$[\pm 45^\circ_4]_s$	$[\pm 45^\circ_6]_s$
$[90^\circ_4]_s$	$[90^\circ_6]_s$
	$[(90^\circ/0^\circ)_3]_s$
	$[(0^\circ/90^\circ)_3]_s$

4.1.2 Placa Imperfeita Submetida a Carregamento Compressivo Uniaxial

A análise do efeito da imperfeição na pós-flambagem de placas sob compressão foi realizada a partir do modelo numérico. Para a validação deste, utilizou-se a solução analítica proposta no artigo de MITTELSTEDT e SCHRÖDER (2010) discutida da seção 2.4 deste trabalho. Neste ponto, a implementação em *Matlab* da solução analítica foi necessária devido à falta de resultados disponíveis para placas com imperfeição. A comparação dos resultados da implementação com os resultados de MITTELSTEDT e SCHRÖDER (2010) para o caso sem imperfeição é apresentada na Figura 9, cujo resultado não considera imperfeição.

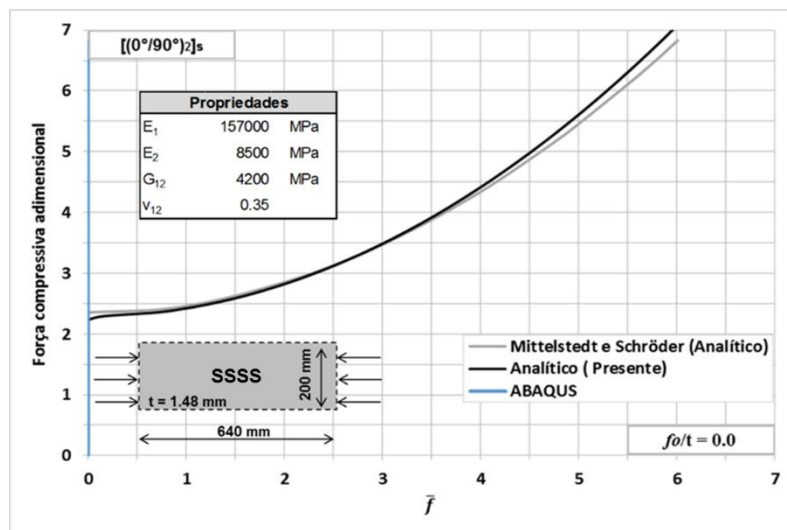


Figura 9 - Validação da implementação do modelo analítico sem imperfeição para o caso de carregamento compressivo.

Com base nesta implementação validada, avaliou-se a precisão do modelo de elementos finitos para uma placa com imperfeição. As correspondentes curvas de força *versus* deslocamento transversal, analíticas e numéricas, estão apresentadas na Figura 10.

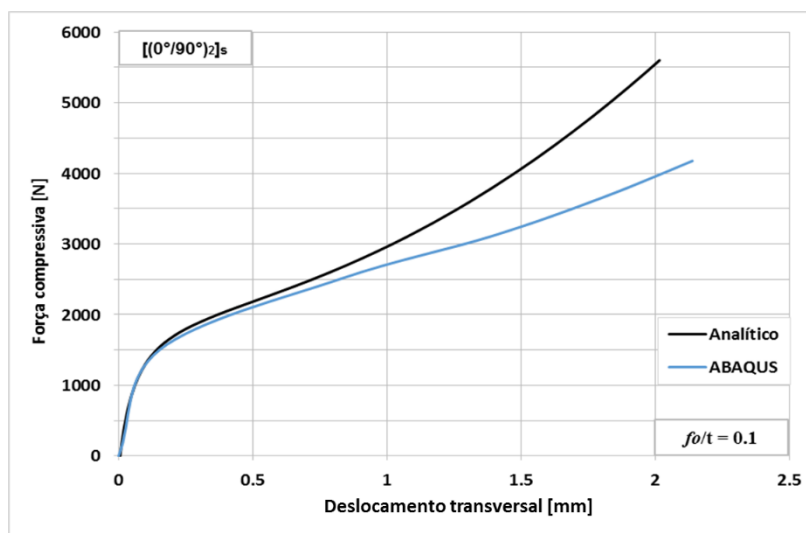


Figura 10 - Validação do modelo por elementos finitos para placa com imperfeição.

Assume-se que a amplitude da imperfeição, f_0 , é conhecida a priori e possui forma igual ao primeiro modo de flambagem da estrutura. Além disso, considera-se a

amplitude da imperfeição como uma porcentagem da espessura total da placa. Na análise cujos resultados estão apresentados na Figura 10 utilizou-se uma amplitude da imperfeição igual a 10% da espessura. A discrepância entre os resultados logo após a bifurcação é atribuída à incapacidade da função de forma em representar completamente o comportamento de pós-flambagem em altos níveis de carregamento.

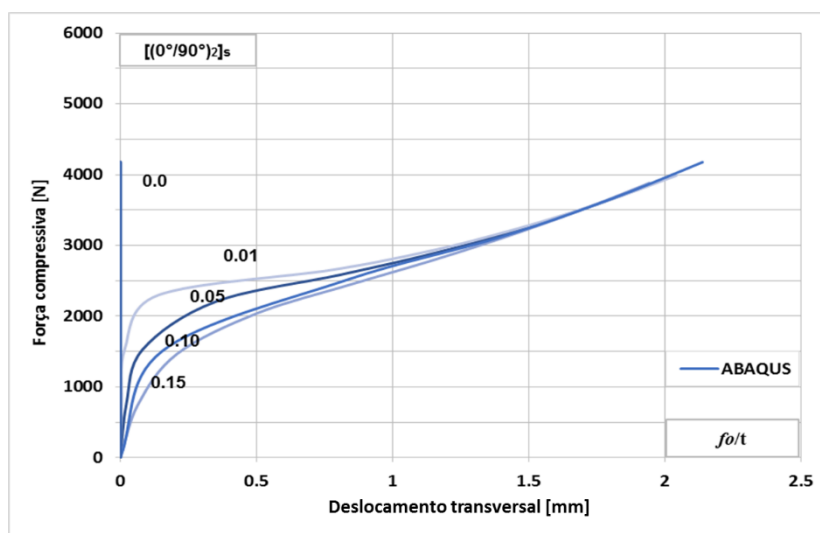


Figura 11 - Influência da imperfeição em placas submetidas a carregamento compressivo.

A Figura 11 apresenta o efeito de diferentes magnitudes de imperfeição. Nota-se que a simulação com o ABAQUS prescinde da aplicação da imperfeição, caso contrário, a placa sofreria apenas compressão. Além disso, os resultados demonstram que quanto maior o grau de imperfeição, mais suave será a curva e menor será a carga requerida para o mesmo deslocamento transversal. Já, quando a imperfeição é mínima, ou seja, igual a 1% da espessura, a carga crítica de flambagem é máxima. Um interessante fenômeno ocorre para grandes deslocamentos na configuração após 1,5 mm, onde as curvas se encontram e o efeito da imperfeição torna-se irrelevante.

4.1.3 Placa Imperfeita Submetida a Carregamento Cisalhante

No segundo caso, analisou-se o efeito da imperfeição em uma placa submetida a cisalhamento no plano da placa. O desenvolvimento da solução aproximada é apre-

sentado em MITTELSTEDT, ERDMANN e SCHRÖDER (2011). Nesse estudo, os modelos analítico e numérico por elementos finitos são apresentados. Devido à disponibilidade de ambos os resultados, a implementação das equações do modelo analítico em *Matlab* para a validação do modelo numérico aplicado aqui não foi necessária.

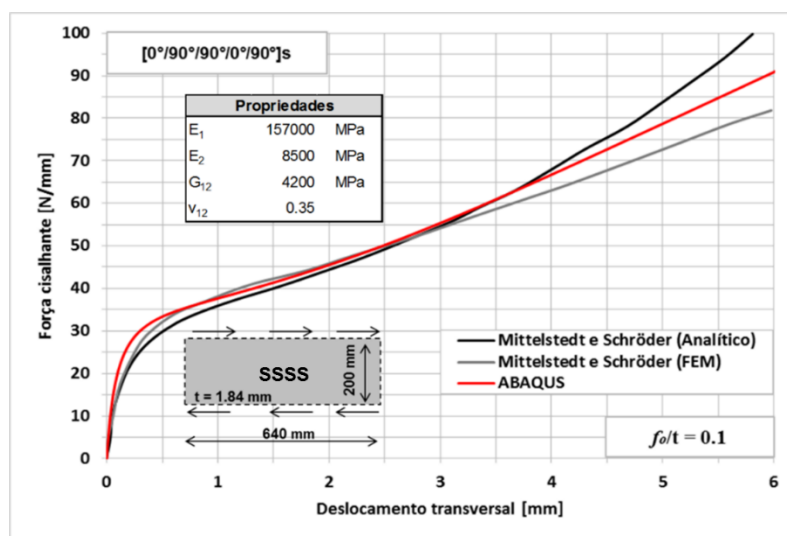


Figura 12 - Validação do modelo por elementos finitos para o caso do cisalhamento

A comparação dos resultados do modelo de elementos finitos foi realizada diretamente com os gráficos apresentados no artigo, conforme mostrado na Figura 12. É possível notar a conformidade nos resultados e novamente a ligeira discrepância entre o numérico e o analítico na região de grandes deslocamentos.

A Figura 13 apresenta o resultado da análise de pós-flambagem de uma placa sem imperfeição submetida a carregamento cisalhante. Cabe ressaltar, que os resultados caracterizados por MITTELSTEDT, ERDMANN e SCHRÖDER (2011) como sem imperfeição não são possíveis no ABAQUS. Para que a flambagem ocorra nessa configuração, deve-se inserir uma imperfeição muito pequena. Esse resultado é percebido devido à um comportamento mais suave da curva na região de transição do regime linear para o não-linear. Já na solução analítica tal efeito não é verificado.

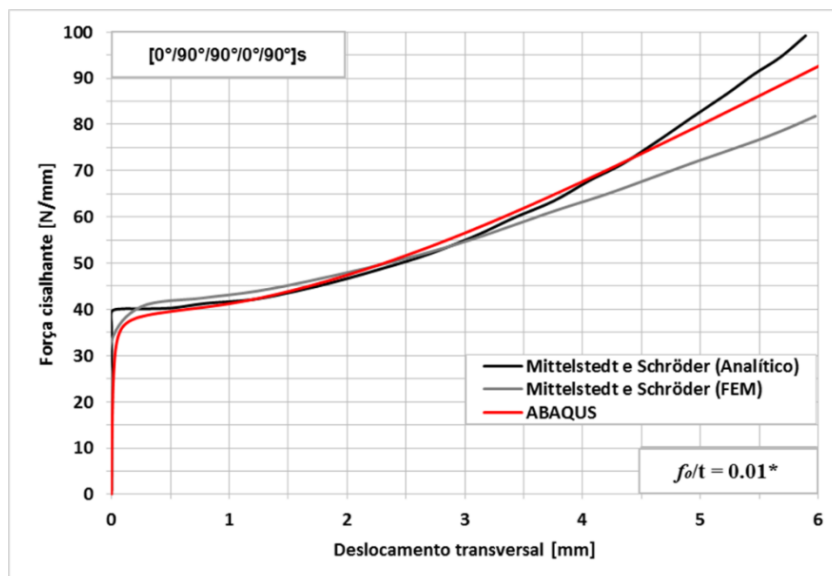


Figura 13 - Pós-flambagem em placa sem imperfeição submetida a cisalhamento.

Analogamente ao caso da compressão, a variação do grau da imperfeição altera a curva de pós-flambagem, conforme pode ser visto na Figura 14. Verifica-se, novamente, que quanto maior a imperfeição menor a força requerida para um mesmo deslocamento.

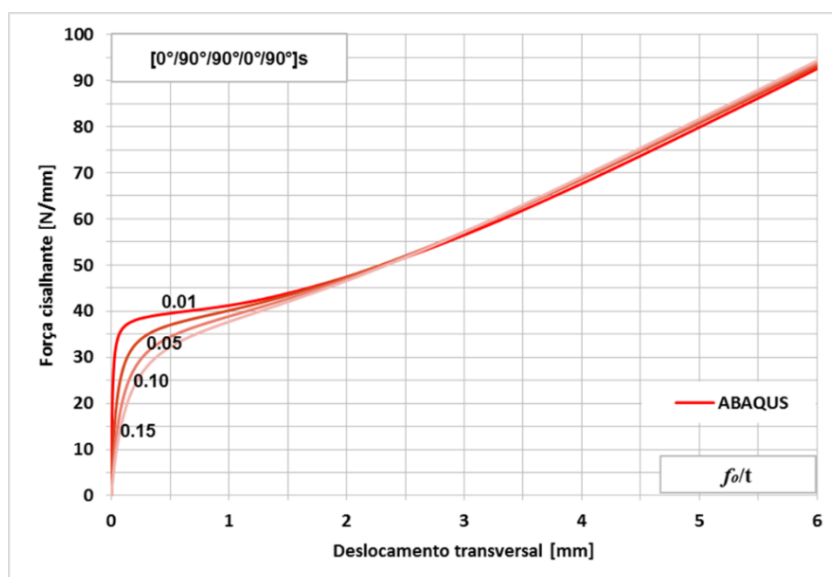


Figura 14 - Influência de diferentes graus de imperfeição em placas submetidas à cisalhamento.

4.1.4 Influência da Orientação das Lâminas na Pós-Flambagem de Placas Imperfeitas

Para o caso da placa sob carga compressiva uniaxial, a Figura 15 apresenta os resultados de força versus deslocamento transversal para três empilhamentos: $[(0^\circ)_4]_s$, $[(90^\circ)_4]_s$ e $[(45^\circ/-45^\circ)_4]_s$. Nas três situações considerou-se uma imperfeição igual a 10% da espessura simulando os defeitos encontrados em placas reais e um deslocamento transversal máximo de 2,5 mm. A análise é limitada aos ângulos 0° , $\pm 45^\circ$ e 90° , pois são os mais utilizados na prática. Também são apresentados os modos de flambagem correspondentes aos empilhamentos.

Nota-se que as curvas de pós-flambagem para as sequências $[(0^\circ)_4]_s$, $[(90^\circ)_4]_s$ foram muito semelhantes e que a capacidade de carga nessas configurações é muito baixa. Por outro lado, o laminado orientado a $\pm 45^\circ$ teve o maior desempenho entre os três. É possível perceber também que na transição entre os regimes linear e não-linear o laminado a $\pm 45^\circ$ suporta uma carga quase três vezes maior que as outras duas configurações. Finalmente, pode-se também observar que o modo de flambagem se altera com o empilhamento, e isto provavelmente deve influenciar a relação carga-deslocamento da estrutura.

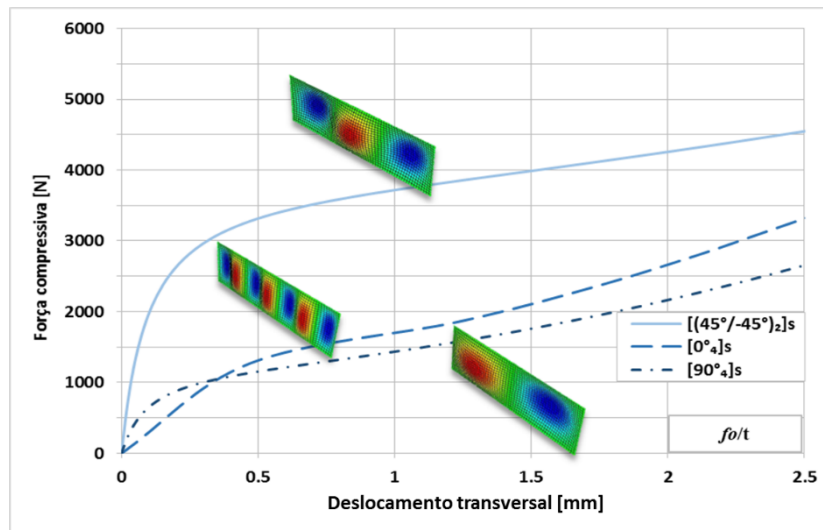


Figura 15 - Influência da orientação das lâminas no caso compressivo.

Observando a equação (5), é possível notar que a solução aproximada para a carga de flambagem é dada em função dos coeficientes D_{ij} da matriz de rigidez de flexão do laminado combinados no parâmetro adimensional η_D . Com base neste, a

Figura 16 apresenta a variação de η_D em função da orientação das lâminas do laminado. Nesta análise, os laminados são simétricos balanceados e possuem oito lâminas igualmente orientadas, $[(\theta/-\theta)_4]_s$.

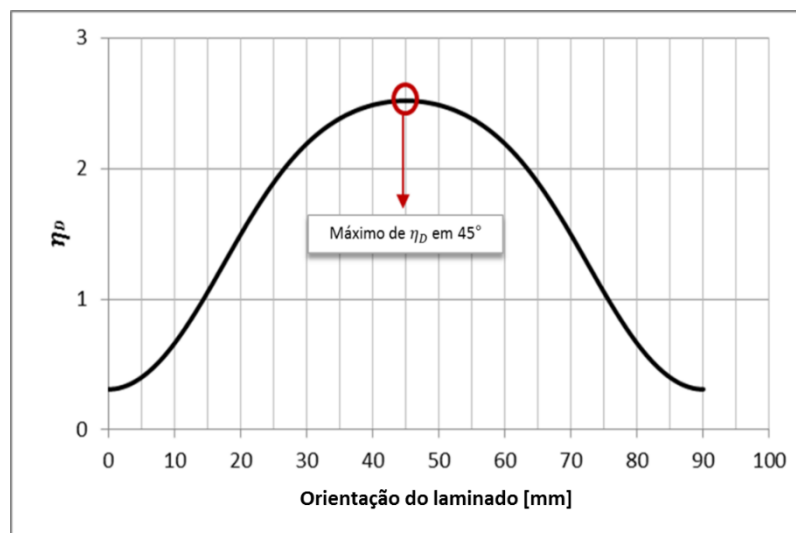


Figura 16 - Influência da orientação das lâminas no parâmetro η_D .

Devido à complexidade do fenômeno, não é possível afirmar, com segurança, que a orientação $[(45^\circ/-45^\circ)_4]_s$ produzirá, em qualquer caso, a maior carga de flambagem. No entanto, para placas com a configuração apresentada anteriormente, sua carga de flambagem máxima será quando as lâminas forem orientadas à $\pm 45^\circ$. Nesses casos, seria interessante ainda investigar o efeito da razão de aspecto (relação entre comprimento e largura) da placa.

A avaliação dos resultados para o carregamento cisalhante não é intuitiva ou simples como a análise de carregamento compressivo uniaxial. A formulação analítica do problema descreve a carga de flambagem em função de diversas variáveis como mostrado na equação (10). A Figura 17 apresenta os resultados das simulações para os empilhamentos mostrados na Tabela 2.

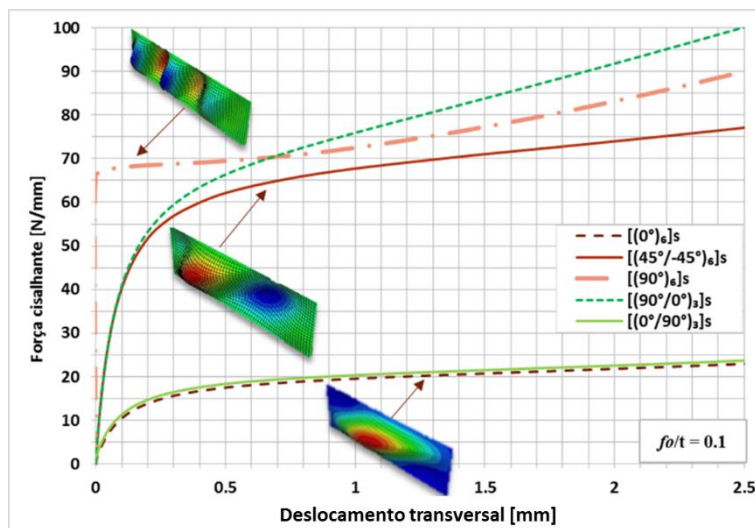


Figura 17 - Influência da orientação das lâminas no caso de carregamento cisalhante.

Note que as diferenças entre as curvas dos empilhamentos unidirecionais são grandes para todo valor de deslocamento do gráfico. A configuração $[0^\circ]_6$ teve o pior resultado considerando a carga máxima para um mesmo deslocamento transversal. A flambagem da configuração $[90^\circ]_6$ manteve-se relativamente linear até a carga de 70 N/mm. Já o empilhamento $[(45^\circ/-45^\circ)]_3$, melhor caso da compressão uniaxial, aproxima-se do empilhamento anterior, para altos níveis de carregamento.

Os outros empilhamentos analisados ($[(0^\circ/90^\circ)]_3$ e $[(90^\circ/0^\circ)]_3$) foram escolhidos como uma combinação dos melhores resultados anteriores. Observa-se assim a grande influência que as lâminas externas. Quando as lâminas de 90° estão posicionadas mais externamente, os resultados se assemelham àqueles com as lâminas orientadas todas à 90° . Já no outro caso, o desempenho do material diminui bastante, se aproximando do empilhamento com todas as lâminas a 0° . Para grandes deslocamentos transversais, considerando um mesmo deslocamento, a configuração somente a 90° já não é aquela que apresenta a maior carga.

4.2 Análise de Painel Curvo com Furo Quadrado Central

4.2.1 Modelagem do Painel Curvo Utilizando o Método de Elementos Finitos

A geometria do painel curvo, as condições de contorno e o sistema coordenado são apresentados na Figura 18, onde U_x , U_y e U_z representam os deslocamentos nas

direções x , y e z , respectivamente, e UR_x , UR_y e UR_z as rotações. A direção axial é representada pelo eixo z , sendo que a orientação 0° das lâminas é paralela a este eixo, ou seja, na mesma direção de aplicação da carga. Note que o furo está centralizado e seus cantos não foram arredondados.

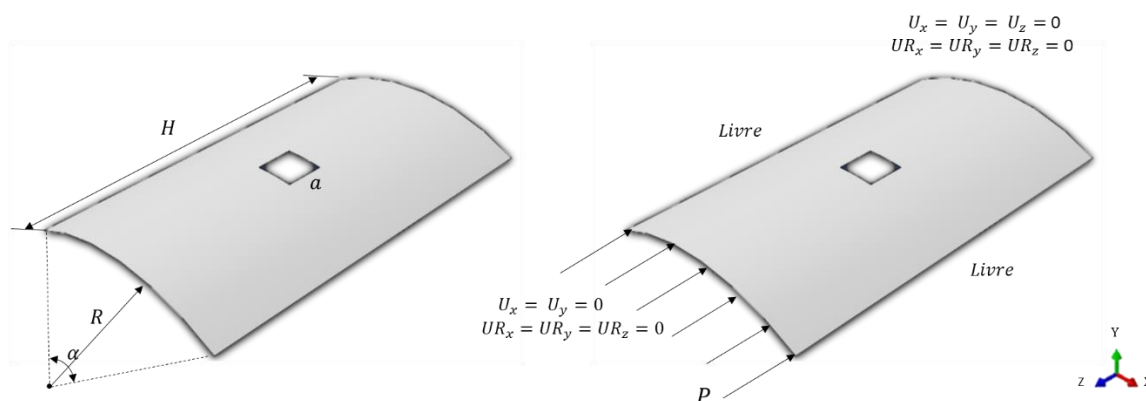


Figura 18 – Geometria, carregamento e condições de contorno do painel com furo quadrado.

Para investigar o fenômeno flambagem e pós-flambagem, o painel foi submetido a força axial compressiva, conforme esquematizado na Figura 18. Neste caso, apenas uma das arestas foi carregada com a carga P . A aresta oposta à aresta carregada foi engastada e às transversais não foram aplicadas restrições. A Tabela 3 apresenta as dimensões do painel, conforme o modelo proposto por SABIK e KREJA (2011). Nessa tabela, H representa o comprimento, R o raio e α o ângulo de abertura do painel. A dimensão a define o lado do furo.

Tabela 3 - Dimensões do painel com furo.

Dimensões	
a	50,8 mm
H	304,4 mm
R	508 mm
α	1 Rad

Todas as lâminas possuem a mesma espessura, $t = 0,127 \text{ mm}$ e são do material AS4/3501-6, cujas propriedades elásticas estão apresentadas na Tabela 4. Nessa ta-

bela, E_1 , E_2 , G_{12} , ν_{12} representam, respectivamente, o módulo de elasticidade no sentido longitudinal da lâmina, o módulo de elasticidade no sentido transversal, o módulo de cisalhamento e o coeficiente de Poisson.

Tabela 4 - Propriedades elásticas do AS4/3501-6

Propriedade	Valor
E_1	135,8 GPa
E_2	10,9 GPa
G_{12}, G_{13}	6,4 GPa
G_{23}	3,2 GPa
ν_{12}	0,276

O laminado investigado por SABIK e KREJA (2011) é composto por 16 lâminas com uma sequência de laminação quase isotrópica $[0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ]_{2s}$. Esta configuração foi utilizada neste trabalho para realizar os estudos de convergência de malha e a validação do modelo de elementos finitos. Já na investigação dos efeitos da orientação das lâminas a espessura total do laminado foi mantida, porém a sequência de empilhamento foi alterada. Os laminados estudados estão mostrados na Tabela 5. Para facilitar a identificação dos empilhamentos estudados, a cada um deles foi associado um código, que resume a sequência de laminação, conforme apresentado na coluna da esquerda desta mesma tabela.

Tabela 5 - Empilhamentos analisados para o painel curvo

Código	Empilhamento
P_{0_8}	$[0^\circ]_{16}$
$P_{\pm 45_4}$	$[\pm 45^\circ_4]_s$
P_{90_8}	$[90^\circ]_{16}$
$P_{0_2/90_4/0_2}$	$[0^\circ_2 / 90^\circ_4 / 0^\circ_2]_s$
$P_{90_2/0_4/90_2}$	$[90^\circ_2 / 0^\circ_4 / 90^\circ_2]_s$
$P_{0_2/\pm 45_2/0_2}$	$[0^\circ_2 / \pm 45^\circ_2 / 0^\circ_2]_s$
$P_{\pm 45/0_4/\pm 45}$	$[\pm 45^\circ / 0^\circ_4 / \pm 45^\circ]_s$
$P_{90_2/45_2/90_2}$	$[90^\circ_2 / \pm 45^\circ_2 / 90^\circ_2]_s$
$P_{\pm 45/90_4/\pm 45}$	$[\pm 45^\circ / 90^\circ_4 / \pm 45^\circ]_s$

A escolha do tipo de elemento tem grande influência sobre os resultados obtidos pelo MEF. Além disso, o número de elementos utilizado (discretização) também pode afetar os resultados, principalmente quando geometrias mais complexas, irregulares ou com furos são estudadas. Para assegurar a estabilidade da resposta do modelo utilizado, foram realizadas uma série de simulações alterando o tamanho do elemento em torno do furo central, visto que é uma região com descontinuidades geométricas e de possíveis grandes gradientes de tensões e deformações.

A Figura 19 mostra a malha inicial utilizada (a) e a malha refinada (b). A fim de verificar a convergência do modelo, análises lineares foram conduzidas, com as quais avaliou-se a variação da carga crítica de flambagem em função do tamanho do elemento em torno do furo, l_e . Inicialmente foi considerado o comprimento do elemento igual a 10 mm em todas as regiões da placa (Figura 19 (a)). Em seguida, o comprimento l_e foi reduzido gradualmente até 1 mm. Notou-se que o valor da carga crítica converge para l_e menor que 2,3 mm. Desta forma, baseando-se no estudo de convergência de malha, o l_e escolhido foi de 2 mm, gerando um número total de 2589 elementos do tipo *shell* (S4R).

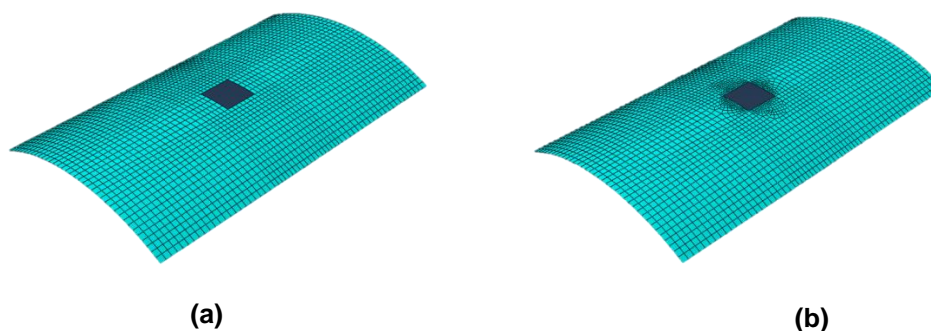


Figura 19 - Malha inicial (a) e malha refinada (b) do painel curvo com furo central.

A validação do modelo foi realizada por comparação com os resultados apresentados por SABIK e KREJA (2011), conforme apresentado na Figura 20. Observado a figura, até 0,5 mm de deslocamento axial as curvas apresentam boa concordância, e atingem o mesmo valor máximo de carga crítica, 28200 N. Acima de 0,6 mm, já dentro da região de pós-flambagem, elas começam a se distanciar, mas seguem a mesma

tendência de comportamento. As diferenças se tornam maiores conforme o encurtamento aumenta. Os resultados apresentados por SABIK e KREJA (2011) foram obtidos com um programa diferente de elementos finitos, NX-Nastran, fato que pôde contribuir para as discrepâncias observadas.

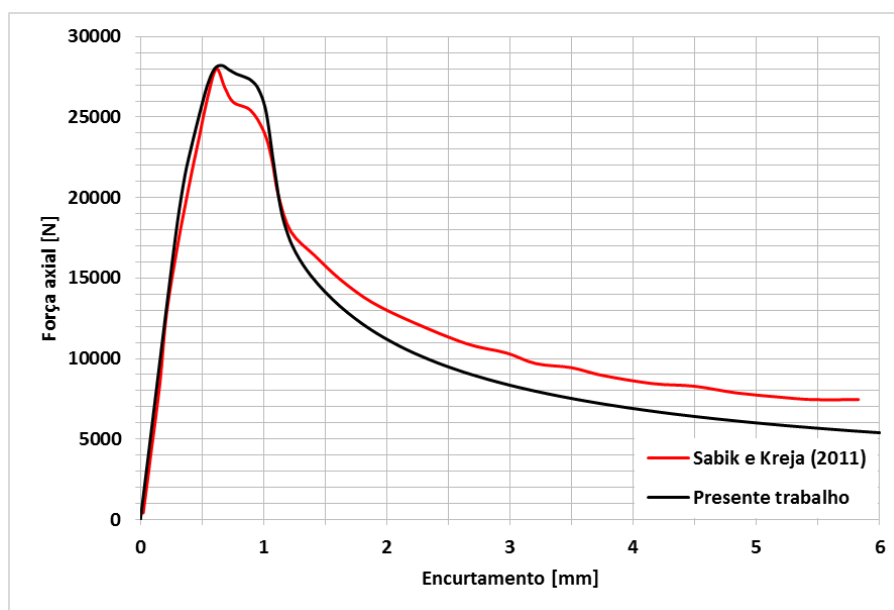


Figura 20 - Validação do modelo do painel curvo.

4.2.2 Influência da Orientação das Lâminas sobre a Pós-Flambagem de Painéis Curvos com Furo Central

A análise da influência da orientação das lâminas foi avaliada com base em nove laminados distintos, enumerados na Tabela 5. Em todos os casos, os parâmetros posição e orientação das lâminas foram alterados no intuito de identificar e estimar seu efeito sobre a força de crítica de flambagem e pós-flambagem. Os primeiros três empilhamentos dessa tabela foram estudados com o objetivo de observar isoladamente o efeito de uma única orientação no laminado. Já com os demais empilhamentos, buscou-se identificar primeiramente como uma combinação de orientações poderia alterar os valores de carga e, em seguida, como a posição de uma dada orientação afeta seu desempenho mecânico. Uma vez que, a distância da lâmina ao plano médio influencia a resistência final do laminado à flambagem (ver Apêndice A).

A Figura 21 apresenta os primeiros modos de flambagem para todos os empilhamentos analisados juntamente com suas respectivas forças críticas.

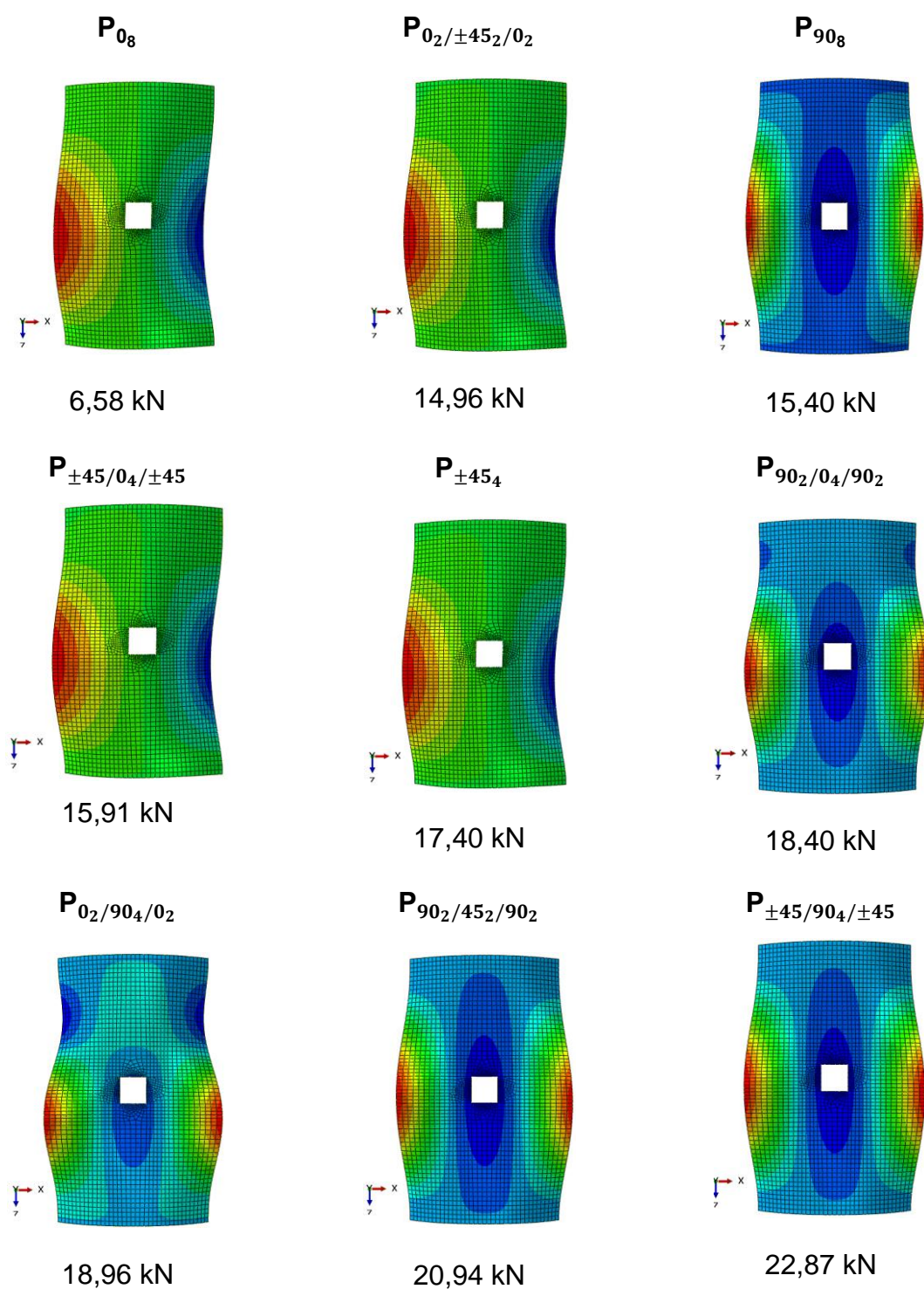


Figura 21 - Força crítica de flambagem e respectivos modos do painel curvo com furo (análise de flambagem linear).

O pior resultado foi observado para o laminado P_{0_8} , no qual todas as lâminas apresentam a direção 0° . Nesse caso o valor da carga crítica atingiu apenas 6,58 kN.

Já o maior valor foi de 22,87 kN, para o laminado $P_{\pm 45/90_4/\pm 45}$. Ou seja, um aumento percentual de quase 248%. Levando em consideração apenas laminados unidirecionais, como esperado, o laminado $P_{\pm 45_4}$ apresentou o melhor desempenho, com carga crítica de 17,40 kN.

Quando diferentes orientações de lâminas são utilizadas em um mesmo laminado, os resultados demonstram que a combinação entre 45° e 90° proporciona os melhores resultados, além de muito semelhantes, 20,94 e 22,87 kN. Nesse caso, a influência da ordem da lâmina no laminado e a quantidade de cada uma delas não resultou em um ganho muito significativo na capacidade de carga da estrutura. O aumento ficou abaixo de 10%.

Na Figura 21 é possível notar ainda que os laminados que possuem somente as orientações 0° e $\pm 45^\circ$ ou a combinação entre as duas possuem o primeiro modo de flambagem análogos. Por outro lado, quando a orientação 90° está presente em maior ou igual número, a configuração do primeiro modo altera-se.

A Figura 22 apresenta curvas carga *versus* encurtamento, obtidas nas análises não-lineares.

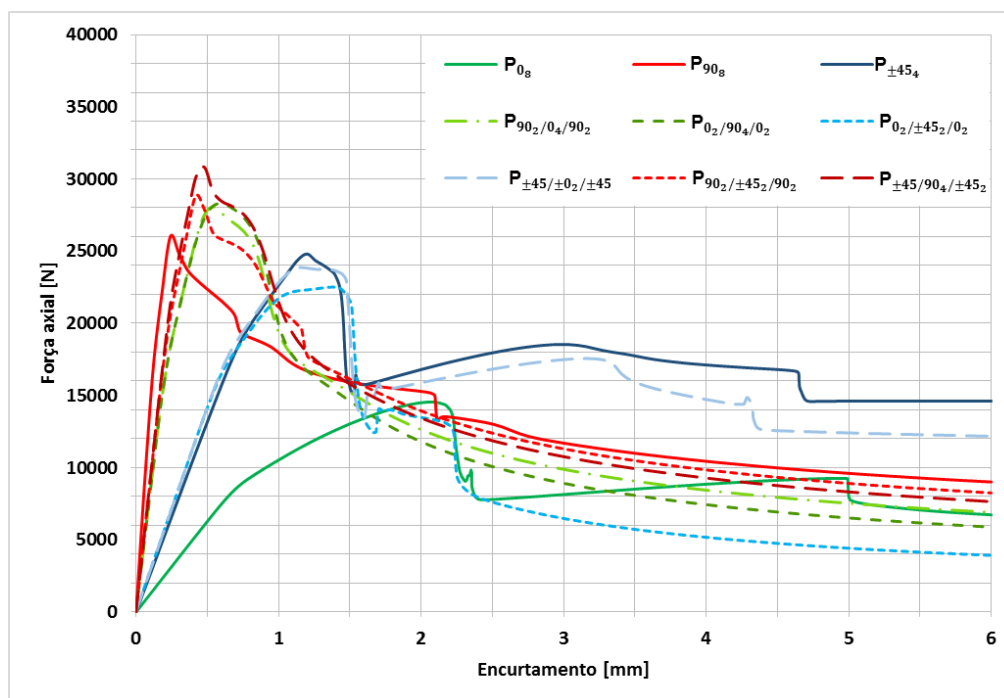


Figura 22 - Força vs. encurtamento (análise não-linear) para o caso do painel curvo com furo e diferentes sequências de empilhamento.

A análise não-linear do painel apresentou seu máximo valor para o mesmo empilhamento do caso linear, $P_{\pm 45/90_4/\pm 45}$, aproximadamente 31 kN. O aumento na capacidade de carga entre as duas análises foi de quase 35%.

Observe que os laminados que possuem uma combinação entre orientações 90° e 45° ou apenas 90° apresentam rigidez maior que os demais. Dentre eles, P_{90_8} apresenta a maior rigidez.

O aumento percentual na capacidade de carga entre as duas análises linear e não-linear, são apresentadas na Tabela 6. Note que todos os empilhamentos avaliados obtiveram um grande aumento na capacidade de carga no regime não-linear. Analisando aumento percentual da carga, o menor resultado calculado foi de 35% e o maior 120,36%. Nota-se, com isso, a grande importância da análise não-linear na determinação da carga máxima suportada pela estrutura.

Tabela 6 – Ganho percentual da máxima força de pós-flambagem em relação à força crítica de flambagem para os diferentes empilhamentos utilizados no painel com furo central.

Empilhamento	Força crítica de flambagem [kN]	Força máxima de pós-flambagem [kN]	Ganho percentual [%]
$[0^\circ]_{16}$	6,58	14,5	120,36
$[\pm 45^\circ_8]_s$	17,40	24	37,93
$[90^\circ]_{16}$	15,40	26	55,84
$[0^\circ_2 / 90^\circ_4 / 0^\circ_2]_s$	18,96	28,3	49,26
$[90^\circ_2 / 0^\circ_4 / 90^\circ_2]_s$	18,40	28,1	52,71
$[0^\circ_2 / \pm 45^\circ_2 / 0^\circ_2]_s$	14,96	22,5	50,4
$[\pm 45^\circ / 0^\circ_4 / \pm 45^\circ]_s$	15,91	23,86	49,96
$[90^\circ_2 / \pm 45^\circ_2 / 90^\circ_2]_s$	20,94	28,87	37,87
$[\pm 45^\circ / 90^\circ_4 / \pm 45^\circ]_s$	22,87	30,85	34,89

4.1 Casca Cilíndrica Imperfeita

No estudo de casos complexos de pós-flambagem também foi analisada uma casca cilíndrica imperfeita com furo central sujeita a um deslocamento compressivo. Inicialmente é apresentado o modelo numérico utilizado, e em seguida são mostrados os resultados obtidos ao variar a orientação das lâminas.

4.1.1 Modelagem da Casca Cilíndrica Imperfeita utilizando o Método de Elementos Finitos

O estudo da pós-flambagem para uma casca cilíndrica com imperfeição foi realizado a partir do artigo de ARBELO et al. (2015). Nesse trabalho, a força de reação ao aplicar um deslocamento axial compressivo em uma casca cilíndrica foi analisada.

A geometria da casca cilíndrica estudada é mostrada na Figura 23. Observa-se a presença de um furo localizado na região central. Os valores da altura (H), do raio da casca cilíndrica (R) e do diâmetro do furo (D) são dados na Tabela 7.

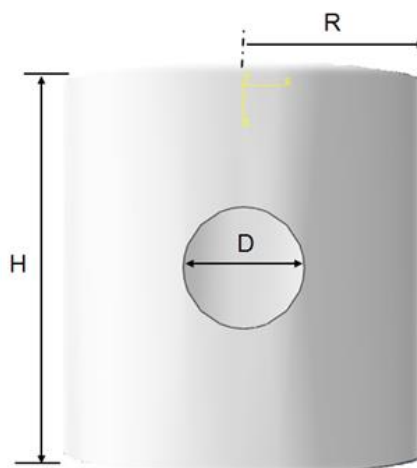


Figura 23 – Geometria da casca cilíndrica com furo central.

Tabela 7 – Dimensões da casca cilíndrica com furo na região central.

Dimensões [mm]	
H	510
R	250
D	150

A casca cilíndrica possui uma de suas arestas engastadas e na aresta oposta é aplicado um deslocamento axial compressivo Δ . Essas condições de contorno estão apresentadas na Figura 24, onde também pode-se notar que z é a direção axial.

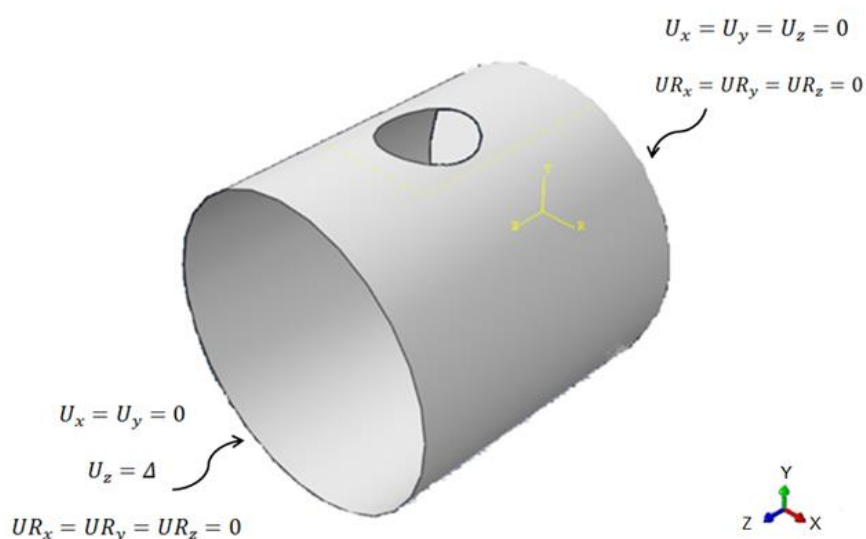


Figura 24 - Condições de contorno para a casca cilíndrica com furo central.

A casca cilíndrica é composta por lâminas de fibra de vidro cujas propriedades elásticas estão dadas na Tabela 8. Todas as lâminas possuem espessura (t) igual a 0,125 mm. Nessa tabela, E_1 , E_2 , G_{12} , ν_{12} representam, respectivamente, o módulo de elasticidade no sentido longitudinal da lâmina, o módulo de elasticidade no sentido transversal, o módulo de cisalhamento e o coeficiente de Poisson.

Tabela 8 – Propriedades elásticas para a lâmina da casca cilíndrica com furo central.

Propriedade	Valor
E_1	123,55 GPa
E_2	8,708 GPa
G_{12}	5,69 GPa
ν_{12}	0,32

O laminado investigado por ARBELO et al. (2015) é composto por 10 lâminas com a sequência $[\pm 0^\circ/\pm 19^\circ/\pm 37^\circ/45^\circ/\pm 51^\circ]$. Essa configuração de laminação foi utilizada neste trabalho para realizar os estudos de convergência de malha e a validação do modelo de elementos finitos. Além disso, foi assumido no presente trabalho uma imperfeição igual a 10% da espessura do laminado. No trabalho de ARBELO et al. (2015) a imperfeição é inserida como uma força de perturbação, diferentemente do que foi aplicado neste trabalho.

O estudo de convergência da malha foi realizado para verificar a influência do tamanho do elemento na resposta da estrutura. Nessa etapa, foi analisada a variação da força de flambagem em função do número total de elementos da malha. O tamanho do elemento utilizado ao em torno do furo foi menor, pois maiores tensões se concentram nessa região. A malha obtida ao final do estudo de convergência é apresentada na Figura 26. Essa malha possui 9987 elementos do tipo *shell* (S4R).

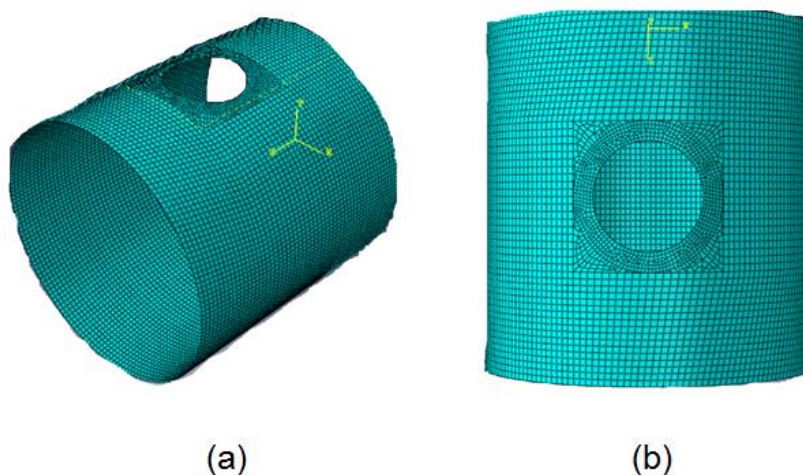


Figura 25 - Malha utilizada na análise da casca cilíndrica imperfeita após refino: (a) vista isométrica, (b) vista frontal.

Com a finalidade de validar o modelo numérico desenvolvido, após o estudo de convergência de malha, foram comparados os valores para força de reação em função do encurtamento com os correspondentes resultados de ARBELO et al. (2015). Essa comparação está apresentada na Figura 25. Nota-se uma conformidade entre o comportamento das curvas, em ambas há uma queda brusca na força axial após atingir o pico. A diferença entre os valores de força para os valores máximos entre as curvas foi menor que 6%. Observa-se também uma pequena diferença entre as curvas após o pico. Essas diferenças podem estar associadas principalmente a imperfeição, uma vez que a forma como ela foi considerada aqui é diferente daquela utilizada por ARBELO et al. (2015).

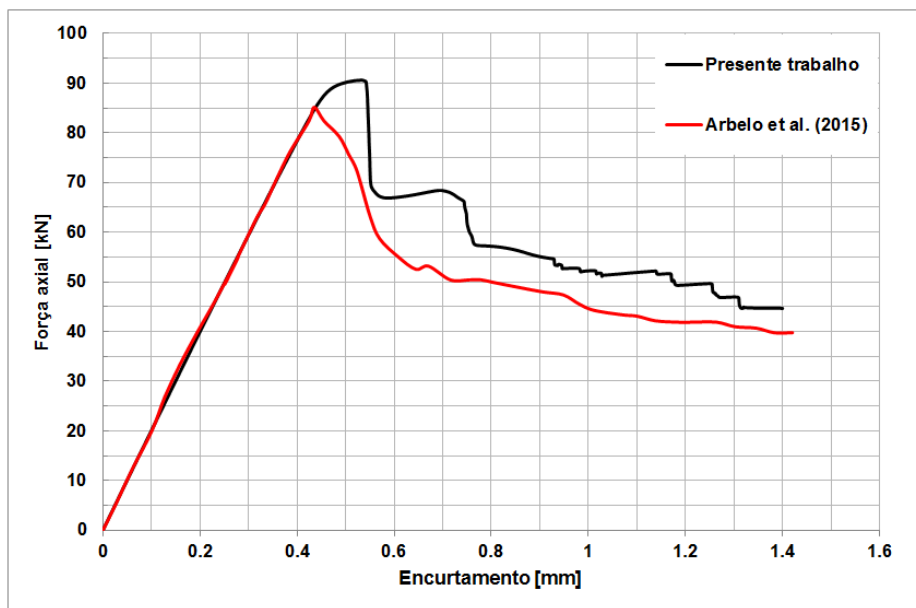


Figura 26 - Validação do modelo numérico para a casca cilíndrica imperfeita (força vs. encurtamento para o empilhamento [$\pm 0^\circ/\pm 19^\circ/\pm 37^\circ/45^\circ/\pm 51^\circ$]).

4.1.2 - Influência da Orientação das Lâminas sobre a Pós-Flambagem de Cascas Cilíndricas Imperfeitas

Na investigação dos efeitos da orientação das lâminas, a espessura total do laminado foi mantida, alterando-se somente o sequenciamento. Os laminados analisados estão enumerados na Tabela 9. Lâminas com orientações de 0° , 45° , e 90° foram combinadas, gerando nove diferentes tipos de empilhamentos. A fim de facilitar a identificação dos laminados utilizados, a cada um deles foi associado um código que resume a sequência de laminação, conforme apresentado na Tabela 7.

Inicialmente, uma análise de flambagem linear para as diferentes configurações foi realizada. A Figura 27 apresenta as forças críticas e o primeiro modo de flambagem obtidos para cada empilhamento. Observando o modo de flambagem, constata-se que os resultados se encontram dentro do esperado, pois a casca cilíndrica flamba na região em torno do furo, onde se concentram as máximas tensões.

Para empilhamentos com uma única orientação de lâmina, o laminado $[\pm 45^\circ]_5$ é aquele que possui maior resistência à flambagem, enquanto que o laminado $[90^\circ]_{10}$, cujas lâminas estão dispostas a 90° em relação ao sentido da aplicação da força, tem

a menor resistência à flambagem. Dessa maneira, ao variar a orientação das lâminas de 90° para 45° há um ganho de 180% em termos de força crítica de flambagem. O laminado $[0^\circ]_{10}$ apresenta valor de carga de flambagem intermediário entre $[\pm 45^\circ]_5$ e $[90^\circ]_{10}$.

Tabela 9 – Empilhamentos utilizados na análise de pós-flambagem da casca cilíndrica com furo central.

Código	Empilhamento
$P_{0_{10}}$	$[0^\circ]_{10}$
$P_{\pm 45_5}$	$[\pm 45^\circ]_5$
$P_{90_{10}}$	$[90^\circ]_{10}$
$P_{0_2/90_6/0_2}$	$[0^\circ_2 / 90^\circ_6 / 0^\circ_2]$
$P_{90_2/0_6/90_2}$	$[90^\circ_2 / 0^\circ_6 / 90^\circ_2]$
$P_{0_2/\pm 45_3/0_2}$	$[0^\circ_2 / \pm 45^\circ_3 / 0^\circ_2]$
$P_{\pm 45/0_6/\pm 45}$	$[\pm 45^\circ / 0^\circ_6 / \pm 45^\circ]$
$P_{90_2/45_3/90_2}$	$[90^\circ_2 / \pm 45^\circ_3 / 90^\circ_2]$
$P_{\pm 45/90_6/\pm 45}$	$[\pm 45^\circ / 90^\circ_6 / \pm 45^\circ]$

Ao combinar diferentes orientações de lâminas, a configuração $[\pm 45^\circ / 0^\circ_6 / \pm 45^\circ]$ passa a ser aquela que apresenta resultados melhores. Nota-se uma influência maior das lâminas externas na resposta do material. Comparando, por exemplo, os empilhamentos que possuem lâminas a 0° e a 90° ($[90^\circ_2 / 0^\circ_6 / 90^\circ_2]$ e $[0^\circ_2 / 90^\circ_6 / 0^\circ_2]$), observa-se que há um ganho de 37% na força crítica ao posicionar as lâminas a 0° mais externamente ao invés de colocá-las na região interna do laminado. Por último, em relação à configuração $[\pm 45^\circ]_5$, não há um ganho significativo ao utilizar diferentes orientações de lâminas em um mesmo laminado.

Ao término da análise de flambagem linear, foi realizada uma investigação da pós-flambagem para os mesmos empilhamentos. Os resultados desse estudo estão apresentados na Figura 28. Nessa figura, o valor da força axial de reação é mostrado em função do deslocamento compressivo aplicado.

Analisando os resultados para deslocamentos menores que 1 mm, nota-se que a melhor configuração corresponde a $[\pm 45^\circ / 0^\circ_6 / \pm 45^\circ]$, pois é aquela que atinge o maior pico de força, 140 kN. Verifica-se que os empilhamentos $[\pm 45^\circ]_5$, $[90^\circ_2 /$

$\pm 45^\circ_3/90^\circ_2$] e $[\pm 45^\circ / 90^\circ_6 / \pm 45^\circ]$ possuem melhor resposta uma vez que não mostram decaimento da força mesmo para deslocamentos acima de 1 mm.

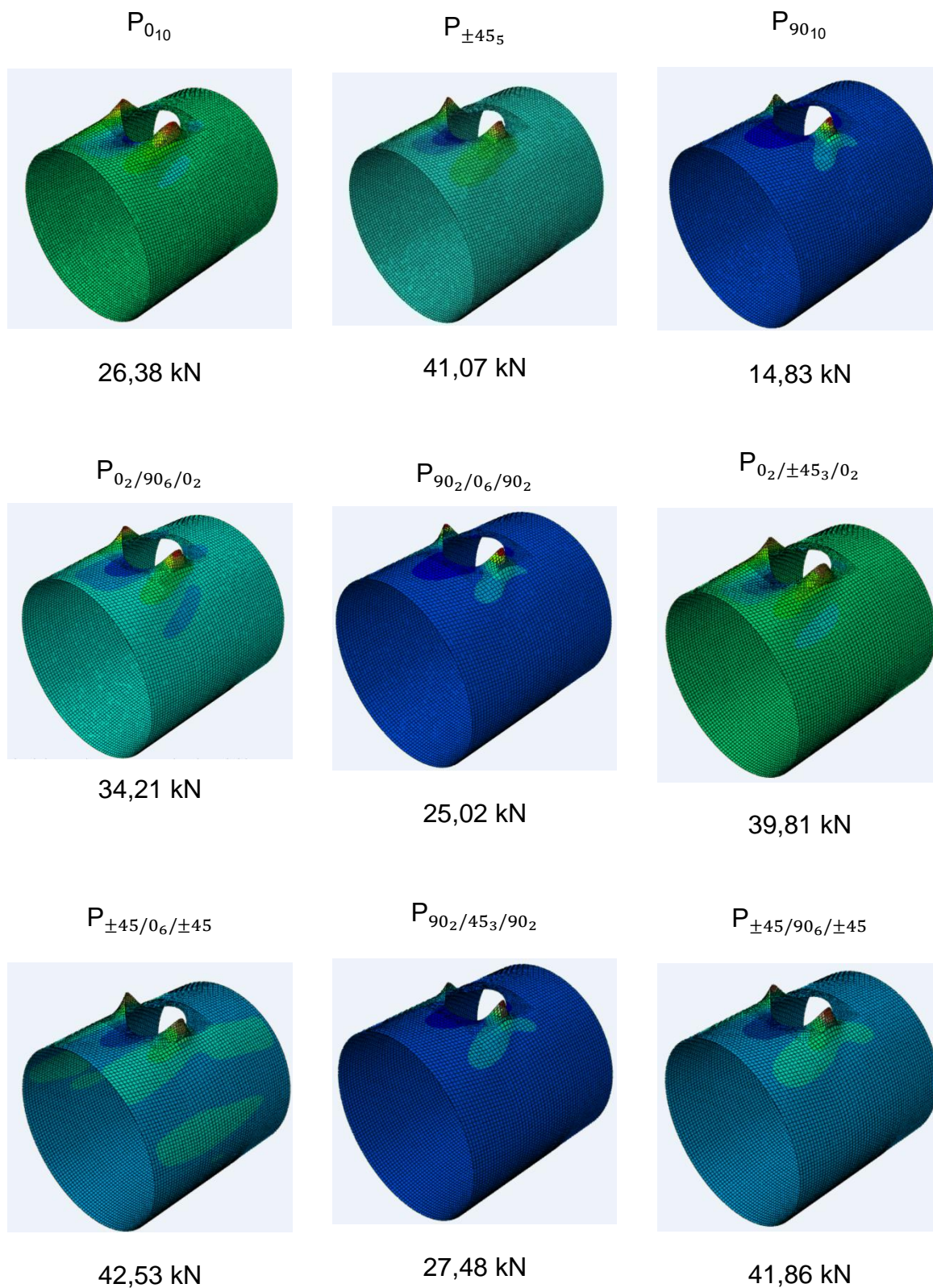


Figura 27 – Força crítica de flambagem linear e respectivo modo de flambagem para os diferentes empilhamentos utilizados no caso da casca cilíndrica com furo central.

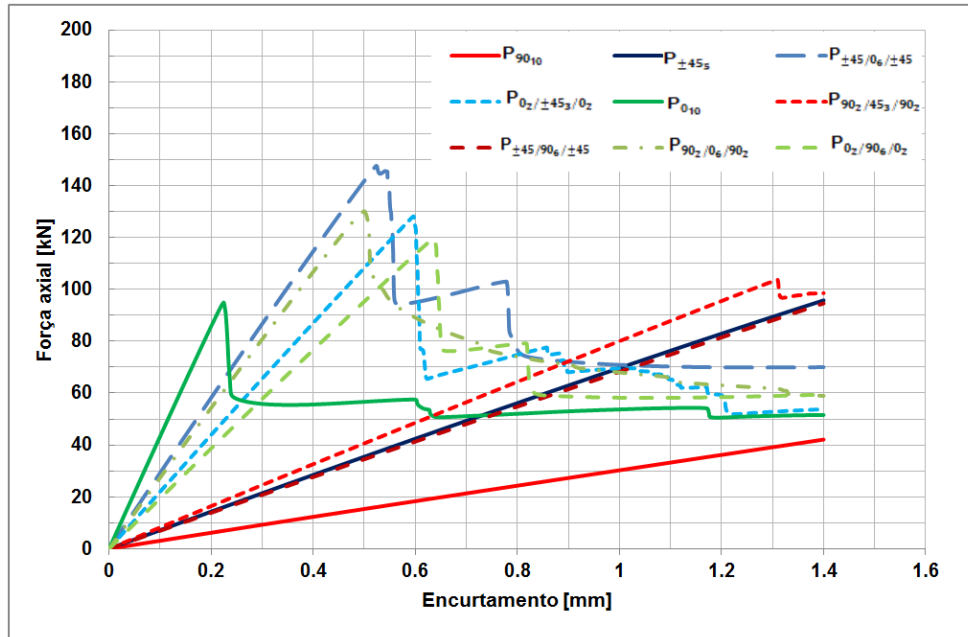


Figura 28 – Força vs. encurtamento (análise não-linear) para o caso da casca cilíndrica com furo central e diferentes sequências de empilhamento.

Por fim, foi analisado quanto de carga que o material consegue suportar no regime de pós-flambagem após atingir a força crítica de flambagem. O ganho percentual da máxima força obtida durante a pós-flambagem em relação à força crítica é mostrado na Tabela 10.

Tabela 10 – Ganho percentual da máxima força de pós-flambagem em relação à força crítica de flambagem para os diferentes empilhamentos utilizados no caso da casca cilíndrica com furo central.

Empilhamento	Força crítica de flambagem [kN]	Força máxima de pós-flambagem [kN]	Ganho percentual [%]
$[0^\circ]_{10}$	21,68	94,92	259,80
$[\pm 45^\circ]_5$	41,07	-	-
$[90^\circ]_{10}$	14,83	-	-
$[0^\circ_2 / 90^\circ_6 / 0^\circ_2]$	34,21	119,76	250,09
$[90^\circ_2 / 0^\circ_6 / 90^\circ_2]$	25,02	130,10	420,06
$[0^\circ_2 / \pm 45^\circ_3 / 0^\circ_2]$	39,81	128,17	221,99
$[\pm 45^\circ / 0^\circ_6 / \pm 45^\circ]$	42,53	147,68	247,22
$[90^\circ_2 / \pm 45^\circ_3 / 90^\circ_2]$	27,48	103,68	277,28
$[\pm 45^\circ / 90^\circ_6 / \pm 45^\circ]$	41,86	-	-

Para os laminados $[\pm 45^\circ]_5$, $[90^\circ]_{10}$ e $[\pm 45^\circ / 90^\circ_6 / \pm 45^\circ]$ não foi apresentado o ganho percentual, pois não se observou decaimento da força mesmo para o deslocamentos maiores que 1mm (Figura 28). Constata-se que há um ganho percentual elevado para todas as configurações. Esse aumento percentual foi superior a 200%, sendo que o laminado $[90^\circ_2 / 0^\circ_6 / 90^\circ_2]$ foi o que obteve o maior ganho (420,06%). Comparando com outras configurações, o laminado $[90^\circ_2 / 0^\circ_6 / 90^\circ_2]$ possui uma força crítica menor, porém apresenta uma carga máxima maior no regime de pós-flambagem.

5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O desenvolvimento de materiais compósitos permitiu trabalhar com estruturas cada vez mais delgadas, sendo nas indústrias automobilística e aeroespacial a maior aplicabilidade desses materiais. Por serem finas, essas estruturas estão sujeitas à flambagem e pós-flambagem. Nesse contexto, o estudo desses fenômenos se faz necessário a fim de proporcionar uma maior confiabilidade do projeto estrutural.

Neste trabalho foi investigado o fenômeno da pós-flambagem para casos simples (placas) e para casos complexos (painel curvo e casca cilíndrica). Para o caso de uma placa sob carregamento compressivo, foi utilizada a solução analítica apresentada por MITTELSTEDT e SCHRÖDER (2010). Notou-se uma variação após a bifurcação entre as curvas do modelo numérico e do analítico. Tal diferença pode ser atribuída à incapacidade da função de forma em representar completamente o comportamento de pós-flambagem em altos níveis de carregamento.

Quanto ao caso de uma placa sob carregamento cisalhante, para fins de comparação, foram utilizados os resultados numéricos e analíticos apresentados por MITTELSTEDT, ERDMANN e SCHRÖDER (2011). Os resultados obtidos no presente trabalho com o modelo de elementos finitos do ABAQUS foram muito semelhantes aos de MITTELSTEDT, ERDMANN e SCHRÖDER (2011) para os casos de uma placa com e sem imperfeição.

Também se estudou o efeito do grau de imperfeição em uma placa para os dois tipos de carregamento (compressão uniaxial e cisalhamento). Observou-se que para imperfeições maiores a curva carga-deslocamento é mais suave, e uma menor carga é necessária para provocar um mesmo deslocamento transversal.

Quanto à influência da orientação das lâminas sobre o comportamento em pós-flambagem de placas sob carga compressiva, o laminado com lâminas a 45° apresentou o menor deslocamento transversal para uma mesma carga aplicada. Isso pode ser explicado pela influência dos coeficientes D_{ij} da matriz de rigidez do laminado sobre o parâmetro adimensional η_D . Já para o caso de uma placa sujeita a cargas cisa-

lhantes, notou-se uma grande influência das lâminas externas no desempenho do laminado. Nessa análise, o empilhamento $[(90^\circ)_3 / (0^\circ)_3]_s$ forneceu um valor maior de carga para um mesmo deslocamento.

Para o caso do painel curvo com furo central, ao realizar análises de flambagem lineares, foi observado que a influência da ordem das lâminas no laminado e a quantidade de cada uma delas não resultaram em um ganho muito significativo na capacidade de carga. Além disso, notou-se que o laminado com a configuração $[90^\circ]_{16}$ foi aquele que apresentou a maior carga crítica de flambagem entre os empilhamentos com somente uma orientação de lâmina.

Na análise de flambagem linear da casca cilíndrica com furo central, uma influência maior das lâminas externas na resposta da estrutura pode ser observada. Entretanto, não foi possível afirmar que há um ganho significativo ao combinar diferentes orientações de lâminas. Entre os empilhamentos com somente uma orientação de lâminas, o laminado $[\pm 45^\circ]_5$ foi aquele que apresentou melhor resposta.

Tanto para o painel curvo quanto para a casca cilíndrica, foi verificado que há um ganho percentual elevado ao se trabalhar com a carga máxima em pós-flambagem ao invés da força crítica de flambagem.

Para trabalhos futuros, sugere-se analisar a influência da imperfeição e do tamanho do furo para os casos do painel curvo e da casca cilíndrica. A inclusão de critérios de falha e a implementação de um algoritmo de otimização para encontrar a melhor sequência de empilhamento também consistem em temas interessantes a serem desenvolvidos.

REFERÊNCIAS

ARBELO M. A, CASTRO S. G. P., HERMANN A., KHAKIMOVA R., ZIMMERMANN R., DEGENHARDT R. Investigation of Buckling Behavior of Composite Shell Structures with Cutouts. **Applied Composite Materials**, v. 22, p. 623-636, 2015.

BANAKAR P., SHIVANANDA H., NIRANJAN H., Influence of fiber orientation and thickness on tensile properties of laminated polymer composites. **International Journal of Pure and Applied Sciences and Technology**, v. 9, p. 61–68, 2012.

BATHE K.J., **Finite element procedures- Revision of: Finite element procedures in engineering analysis**, Prentice-Hall, 1996.

DEBSKI, H. Experimental investigation of post-buckling behavior of composite column with top-hat cross-section. **Maintenance and Reliability**, v. 15, p. 106–110, 2013.

HAJALI R., Wang SS., Nonlinear behavior of fiber composite materials and its effect on the postbuckling response of laminated plates. **Technical Report UIUCNCCMR-90-10**. Urbana, Illinois: National Center for Composite Materials Research, University of Illinois, 1990.

HIBBITT, KARLSSON, SORENSEN, Inc. **ABAQUS/Standard User's Manual, V. 6.5**, Pawtucket, Rhode Island, 2004.

LAWS N., MCLAUGHLIN R., The effect of fibre on overall module of composite materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 27, p. 1-13, 1979.

LEISSA, A.W. Buckling of Composite Plates. **Composite Structures**, v. 1, p. 51-66, 1983.

JONES, R. M. **Mechanics of Composite Materials**. 2nd ed. Philadelphia: Taylor & Frank, Inc., 1999.

KERE, P., LYLTY, M. On post-buckling analysis and experimental correlation of cylindrical composite shells with Reissner–Mindlin–Von Kármán type facet model. **Computers and Structures**, v. 86, p. 1006–1013, 2008.

KHOT N. S., VENKAYYA, V. B., Effect of fiber orientation on initial postbuckling behavior and imperfection sensitivity of composite cylindrical shells. **Report AFFDL-TR, Air Force Flight Dynamics Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base**, p. 10-125, 1970, Ohio.

KNIBBS, R. H., MORRIS J. B., The effects of fiber orientation on the physical properties of composite. **Composites**, v. 5, p. 209-218, 1974.

MAKSIMOVIĆ, S. Postbuckling and Failure Analysis of Axially Compressed Composite Panels Using FEM. **Scientific Technical Review**, v. 57, p. 43-48, 2007.

MENDONÇA, P. T., **Materiais compostos e estruturas-sanduiche: projeto e análise**. Manole, 1st ed., Barueri, 2005.

MITTELSTEDT, C., ERDMANN, H., SCHRÖDER, K. Postbuckling of imperfect rectangular composite plates under inplane shear closed-form approximate solutions. **Archive of Applied Mechanics**, v. 81, p. 1409-1426, 2011.

MITTELSTEDT, C., SCHRÖDER, K. Postbuckling of compressively loaded imperfect composite plates: closed-form approximate solutions. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 10, p. 761-778, 2010.

STRONG, A. B. **Fundamentals of Composites Manufacturing - Materials, Methods, and Applications**. Society of Manufacturing Engineers (SME), 2nd. ed., 2008.

SABIK, A., KREJA, I., "Stability analysis of multilayered composite shells with cut-outs," **Archives of Civil and Mechanical Engineering**, v. 11, p. 195–207, 2011.

SUMANA B., SAGAR H. V., SHARMA K., KRISHNA M., Numerical analysis of the effect of fiber orientation on hydrostatic buckling behavior of fiber metal composite cylinder. **Journal of Reinforced Plastics and Composites**, v. 34, p. 1422-1432, 2015.

WEAVER P. M., DIACONU C. G. Postbuckling of long unsymmetrically laminated composite plates under axial compression. **International Journal of Solids and Structures**, v.43, p. 6978–6997, 2006.

APÊNDICE A – DESCRIÇÃO DOS TERMOS DA MATRIZ DE RIGIDEZ

A partir das considerações da Teoria Clássica dos Laminados, JONES (1999) apresenta as matrizes A, B, D da equação (2) na seguinte forma:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (12)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (13)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (14)$$

onde A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} são, respectivamente, a matriz constitutiva de extensão, a matriz de acoplamento flexão-extensão e matriz constitutiva de flexão. Nessas expressões, N se trata do número total de lâminas do empilhamento, enquanto que z_k e z_{k-1} representam as coordenadas inferior e superior de cada lâmina, conforme mostrado na Figura 29.

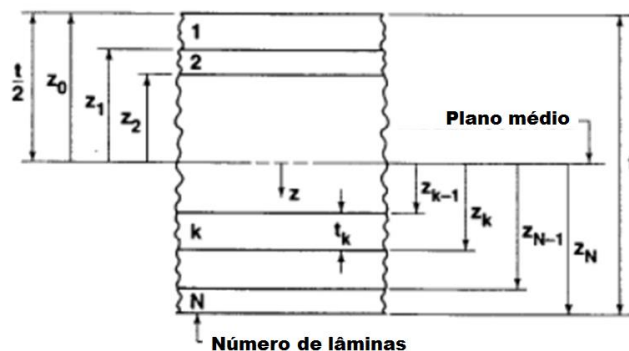


Figura 29 – Geometria e definição das coordenadas de cada lâmina ao longo de um empilhamento.

Fonte: Adaptado de JONES (1999).

Além disso, \bar{Q}_{ij} se trata da matriz constitutiva reduzida cujos elementos são dados por:

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cos^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\
 \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cos^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\
 \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + (Q_{66} \sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
 \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
 \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\
 \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta
 \end{aligned} \tag{15}$$

sendo que θ é o ângulo que relaciona o sistema de coordenadas x-y (global) com o sistema 1-2 (local da lâmina), como mostrado na Figura 30, e Q_{ij} são os componentes da matriz constitutiva no sistema 1-2, podendo ser escritos em função das constantes elásticas de engenharia:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad Q_{12} = \frac{E_2 \nu_{12}}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad Q_{66} = G_{12} \tag{16}$$

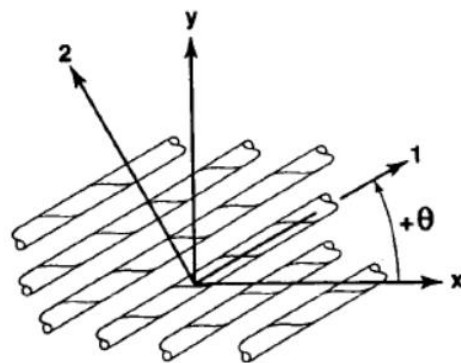


Figura 30 – Sistemas de coordenadas x-y e 1-2.

Fonte: JONES (1999).

O sistema 1-2 corresponde ao sistema denominado principal do material sendo 1 na direção da longitudinal da fibra e 2 na direção transversal a ela.