

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
DEPARTAMENTO DO CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
ENGENHARIA MECÂNICA**

**GUILHERME DIAS VICENTINI**

**ANÁLISE DO REGIME DE ESCOAMENTO HIPERSÔNICO ATRAVÉS  
DE BOCAIS DO TIPO CONVERGENTE-DIVERGENTE**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

**GUARAPUAVA**

**2016**

**GUILHERME DIAS VICENTINI**

**ANÁLISE DO REGIME DE ESCOAMENTO HIPERSÔNICO ATRAVÉS  
DE BOCAIS DO TIPO CONVERGENTE-DIVERGENTE**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel, em Engenharia Mecânica, da Coordenação do Curso de Engenharia Mecânica, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Carlos Amaro de Faria Jr.

Co-Orientador: Prof. Dr. Christian Naaktgeboren

**GUARAPUAVA**

**2016**



Ministério da Educação  
**Universidade Tecnológica Federal do Paraná**  
Campus Guarapuava  
Diretoria de Graduação e Educação Profissional  
Coordenação de Engenharia Mecânica  
Engenharia Mecânica



---

## **TERMO DE APROVAÇÃO**

**ANÁLISE DO REGIME DE ESCOAMENTO HIPERSÔNICO ATRAVÉS DE BOCAIS  
DO TIPO CONVERGENTE-DIVERGENTE**

por

**GUILHERME DIAS VICENTINI**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado em 02 de dezembro de 2016 como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica. O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

---

Dr. Antônio Carlos de Amaro Faria Jr.  
Prof. Orientador

---

Dr. Christian Naaktgeboren  
Prof. Co-Orientador

---

Dr. Sérgio Dalmás  
Membro titular

---

Dr. Luan J. Franchini Ferreira  
Coordenador do curso de Engenharia Mecânica

- O Termo de Aprovação assinado encontra-se na Coordenação do Curso -

Dedico esse trabalho à minha filha Bianca Passos Vicentini. Essa criança abençoada que apareceu na minha vida em um momento crucial, para não desistir dos meus sonhos e do caminho na qual desejava trilhar para o meu futuro profissional e pessoal.

## **AGRADECIMENTOS**

Gostaria de, através destes parágrafos, poder agradecer aos envolvidos que tanto colaboraram para que fosse possível chegar ao final dessa longa jornada. Sendo assim, primeiramente agradeço à Deus por sempre me abençoar, ajudar nos momentos mais difíceis e dar esperança quando necessário. Em segundo lugar, aos meus pais, por darem o melhor para que eu tivesse uma educação de excelência, uma base forte consolidada, experiências de vida, alegrias e ensinamentos que serão levados para a vida toda. Desde pequeno recebi um apoio incondicional, que foi essencial para ser possível a realização do meu sonho.

Também gostaria de agradecer a minha namorada Andressa Passos, por todo amor e apoio emocional, estando sempre ao meu lado me ajudando. Agradeço também aos meus colegas e, especialmente, meus melhores amigos Lucas Staciaki, Rafael Serbay, Felipe Nascimento, Andrey Fiorin e Leonardo Augusto, por estarem comigo durante todos esses anos de graduação, me trazendo alegria, companhia para qualquer hora e por colaborarem muito para o meu desenvolvimento profissional e social.

Além do mais, gostaria de agradecer especialmente ao meu orientador Antônio Carlos, no qual respeito e admiro muito. Desde o início, ele me incentivou na área da pesquisa, me orientou em vários projetos, teve paciência o suficiente com as minhas dúvidas, além de passar parte de todo o vasto conhecimento que possui. Por fim, agradeço também a toda ajuda que me foi dada, em especial ao meu co-orientador Christian e ao professor Dalmás, por passarem seus conhecimentos, pensamentos e atitudes. São grandes profissionais que possuo imenso respeito e me espelho com alegria.

Muito obrigado a todos, pois só consegui chegar aqui graças a vocês e espero conseguir retribuir em dobro toda essa ajuda que foi proporcionada!

## RESUMO

VICENTINI, Guilherme Dias. **Análise do Regime de Escoamento Hipersônico Através de Bocais do Tipo Convergente-Divergente**. 2016. 64 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Guarapuava, 2016.

O interesse na simulação de escoamentos de regime em alta velocidade tem se tornado mais presente, nessas últimas décadas, como consequência do crescente estudo na área da aerodinâmica e do início da Era Espacial. No caso de veículos de subida ou de reentrada atmosférica, tais corpos estão submetidos à um escoamento hipersônico, cujo Número de Mach,  $M$ , maior ou igual a 5. Em tal escoamento, dois fenômenos importantes ocorrem, sendo eles a interação viscosa e a relação de altas temperaturas entre o corpo e a onda de choque. Isso fará com que, a partir de certo ponto, o gás comece a sofrer reações químicas, visto que este estará sob efeito das altas temperaturas. Consequentemente, proporciona-se que o expoente de expansão isentrópico,  $\gamma$ , não seja mais constante, devido a ocorrência de dissociação dos gases. A utilização de códigos de CFD (Computational Fluid Dynamic) é um exemplo de elemento essencial para a modelagem desse tipo de escoamento. Tal abordagem é baseada em soluções (numéricas) aproximadas de equações governantes sobre uma malha discreta, que quanto mais refinada, tende a ser mais precisa sua solução numérica. O presente trabalho visa investigar numericamente esse escoamento hipersônico, através de um desenvolvimento teórico, para se obter a geometria da tubeira do tipo convergente-divergente, utilizando uma simulação em MATLAB.

**Palavras-chave:** Escoamento Hipersônico. Tuberias. CFD. Simulação.

## ABSTRACT

VICENTINI, Guilherme Dias. **Analysis of a Hypersonic Flow Regime Through Convergent-Divergent Nozzles**. 2016. 64 pages. Completion of Coursework – Mechanical Engineering, Federal Technology University of Paraná. Guarapuava, 2016.

The interest in simulation of regime flows at high speed, has become more present in recent decades, consequent to the increasing study in aerodynamics and the beginning of the Space Age. In the case of ascent or atmospheric reentry vehicles, such bodies are subjected to a hypersonic flow, whose Number of Mach,  $M$ , is greater or equal to 5. In such flow, two important phenomena occur, being the viscous interaction and the relation of high temperatures, between the body and the shock wave. This will cause, from a certain point, the gas to begin to undergo chemical reactions, as this will be under the effect of high temperatures. Consequently, it is provided that the isentropic expansion exponent,  $\gamma$ , is no longer constant due to the occurrence of gas dissociation. The use of CFD (Computational Fluid Dynamic) codes is an example of an essential element for the modeling of this type of flow. Such an approach is based on approximate (numerical) solutions of governing equations over a discrete mesh, which the more refined its numerical solution tends to be. The present work aims at numerically investigating this hypersonic flow, through a theoretical development, to obtain the convergent-divergent type nozzle geometry, using a MATLAB simulation.

**Keywords:** Hypersonic Flow. Nozzle. CFD. Simulation.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Modelo esquemático do veículo hipersônico 14 – X .....	3
Figura 2 – escoamento sobre um volume de controle finito.....	4
Figura 3 – Comportamento de uma onda e semelhança com choque normal .....	10
Figura 4 – Exemplos de comportamentos de onda de choque normal .....	12
Figura 5 – Volume de controle para análise de choque normal .....	13
Figura 6 – Cone de Mach (a) e choque oblíquo (b) gerados por um avião, onde $\alpha = \mu$ .....	17
Figura 7 – escoamento supersônico através de um canto inclinado.....	18
Figura 8 – Perturbações geradas por uma fonte sonora .....	19
Figura 9 – Relações de ângulo de onda de choque oblíqua e ângulo de Mach, através da propagação de perturbações .....	20
Figura 10 – Geometria de choque oblíquo em um escoamento supersônico .....	21
Figura 11 – Propriedades de choque oblíquo: $\gamma = 1,4$ . Diagrama $\theta - \beta - M$ .....	25
Figura 12 – escoamento unidimensional em comparação ao escoamento quase unidimensional .....	28
Figura 13 – Volume de controle finito para um escoamento quase unidimensional..	29
Figura 14 – Volume de controle incremental.....	31
Figura 15 – escoamento compressível em dutos convergentes e divergentes.....	34
Figura 16 – Geometria para derivar a relação de número de área-Mach.....	35
Figura 17 – Camada de choque fina e viscosa em um escoamento hipersônico.....	37
Figura 18 – Alta temperatura em camada de choque .....	38
Figura 19 – Seções de um túnel de choque hipersônico.....	43
Figura 20 – Túnel de choque hipersônico T3 do Laboratório de Aerodinâmica e Hipersônica .....	43
Figura 21 – Análise de pontos de malha para linhas características (a) e diferenças finitas (b).....	45
Figura 22 – Exemplo de design de bocal utilizando o método das linhas características .....	46
Figura 23 – Gráfico resultante da malha modelada em $x$ e $y$ .....	48



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades de escoamento isentrópico. Apêndice A do livro.....	36
Tabela 2 – Propriedades de onda de choque normal. Apêndice B do livro .....	39

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$  – Velocidade do som;

$c_p$  e  $c_v$  – Calor específico à pressão e volume constante;

$e$  – Energia interna;

$h$  – Entalpia;

$M$  – Número de Mach;

$M_n$  e  $M_t$  – Componente normal tangencial do número de Mach;

$p$  – Pressão;

$p_0$  – Pressão de estagnação;

$R$  – Constante internacional do gás;

$T$  – Temperatura;

$T_0$  – Temperatura de estagnação;

$u$  – Velocidade na direção  $x$ , ou normal;

$\mathbf{V}$  – Velocidade vetorial;

$v$  – Velocidade na direção  $y$ ;

$w$  – Velocidade na direção  $z$ , ou tangencial;

$\beta$  – Ângulo de onda;

$\theta$  – Ângulo de deflexão;

$\rho$  – Densidade;

$\rho_0$  – Densidade de estagnação;

$T_0$  – Temperatura de estagnação;

$\mu$  – Ângulo de Mach;

$V$  – Volume;

$\gamma$  – Expoente de expansão isentrópica

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1 OBJETIVO GERAL .....	2
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	2
1.3 JUSTIFICATIVA.....	2
<b>2 REFERÊNCIAL TEÓRICO</b> .....	<b>4</b>
2.1 EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DE ESCOAMENTO .....	4
2.1.1 Equação da Continuidade (Conservação da Massa).....	4
2.1.2 Equação do Momentum .....	5
2.1.3 Equação da Energia .....	6
2.2 REVISÕES DE ALGUMAS EQUAÇÕES TERMODINÂMICAS .....	8
2.3 RELAÇÃO ENTRE A VELOCIDADE DO SOM E O NÚMERO DE MACH .....	9
2.4 ONDA DE CHOQUE NORMAL.....	12
2.5 ONDA DE CHOQUE OBLÍQUA .....	16
2.5.1 Equações Fundamentais de Choque Oblíquo .....	20
2.6 ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL ATRAVÉS DE UM BOCAL .....	27
2.6.1 Equações Fundamentais para escoamento Quase Unidimensional .....	27
2.6.2 Bocais .....	34
2.7 ESCOAMENTO HIPERSÔNICO .....	36
2.7.1 Aspectos Qualitativos de escoamento Hipersônico.....	37
2.7.2 Relações de Onda de Choque Hipersônica .....	40
<b>3 METODOLOGIA</b> .....	<b>42</b>
3.1 HIPÓTESES INICIAIS.....	42
3.2 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL.....	42
3.2.1 Montagem do Código Computacional.....	44
<b>4 ANÁLISE DOS RESULTADOS</b> .....	<b>47</b>
<b>5 CONCLUSÃO E PROPOSTA DE TRABALHOS FUTUROS</b> .....	<b>49</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>50</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A aerodinâmica é um ramo de estudo que, nas últimas décadas, tem sofrido um aumento significativo em pesquisas. Isso ocorre devido aos problemas de engenharia, nos quais envolvem as forças que o ar exerce sobre corpos, em repouso ou em movimento. Esse ramo toma como base os estudos de mecânica dos fluidos, na qual é capaz de analisar tal comportamento físico dos fluidos e suas propriedades. (FOX, 2006)

Historicamente, as observações em aerodinâmica derivam de três importantes vertentes. A primeira pode ser percebida através da Guerra Anglo-Espanhola, onde havia um confronto naval, no qual a Espanha possuía navios mais largos e pesados, enquanto a Inglaterra possuía navios menores e mais leves. Ao entrar em conflito, os navios espanhóis não tiveram chances contra os ingleses, que eram mais rápidos e manobráveis. Isso resultou que o poder naval passaria a depender consideravelmente em agilidade e manobrabilidade. Conseqüentemente, para proporcionar tais resultados, estudos em mecânica dos fluidos se tornaram cada vez mais importantes (ANDERSON, 2001).

Na segunda vertente, tem-se as primeiras observações de Leonardo da Vinci acerca do voo dos pássaros, seguido, anos mais tarde, pelas colaborações dos irmãos Wright e por Alberto Santos Dummont (ANDERSON, 2001). Sendo assim, através do pontapé inicial gerado, a possibilidade humana de voo se tornar realidade era mais presente. Portanto, a indústria aeronáutica e profissionais especializados na área, desenvolvem equipamentos com o intuito de romper a barreira da velocidade do som, assim, atingindo grandes velocidades.

Por fim, a terceira vertente surge com as relações de foguetes e voos espaciais. Os voos supersônicos se tornaram ferramentas importantes durante a Segunda Guerra Mundial e, conseqüentemente, aumentou-se o estudo sobre o formato do corpo (geralmente pontiagudo) de forma a reduzir o arrasto (FOX, 2006).

Seguindo esse intuito, é possível ver o quanto a aerodinâmica tem se tornado presente e, cada vez mais, gerando desafios na área. Com toda essa ocorrência, um dos pontos atuais na pesquisa, tem sido o dimensionamento de motores scramjet e de tubeiras (também chamados de bocais).

Essas tuberias convertem energia termodinâmica do fluido em energia cinética e, dependendo da aplicação desejada, tem como propósito acelerar esse fluido. Portanto, devido a importância da aerodinâmica discorrida, esse trabalho tem o objetivo de apresentar as características de um escoamento hipersônico, a importância de um bocal, os efeitos de convergência e divergência e executar simulação com apoio computacional.

### 1.1 OBJETIVO GERAL

Aprendizagem do desenvolvimento teórico e computacional em aerodinâmica, aplicada ao escoamento hipersônico.

### 1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Introduzir conceitos e equações governantes de ondas de choque normais e oblíquas.

Analisar o comportamento do escoamento hipersônico dentro de um bocal.

Realizar uma simulação computacional desse escoamento para adquirir a geometria do bocal convergente-divergente.

### 1.3 JUSTIFICATIVA

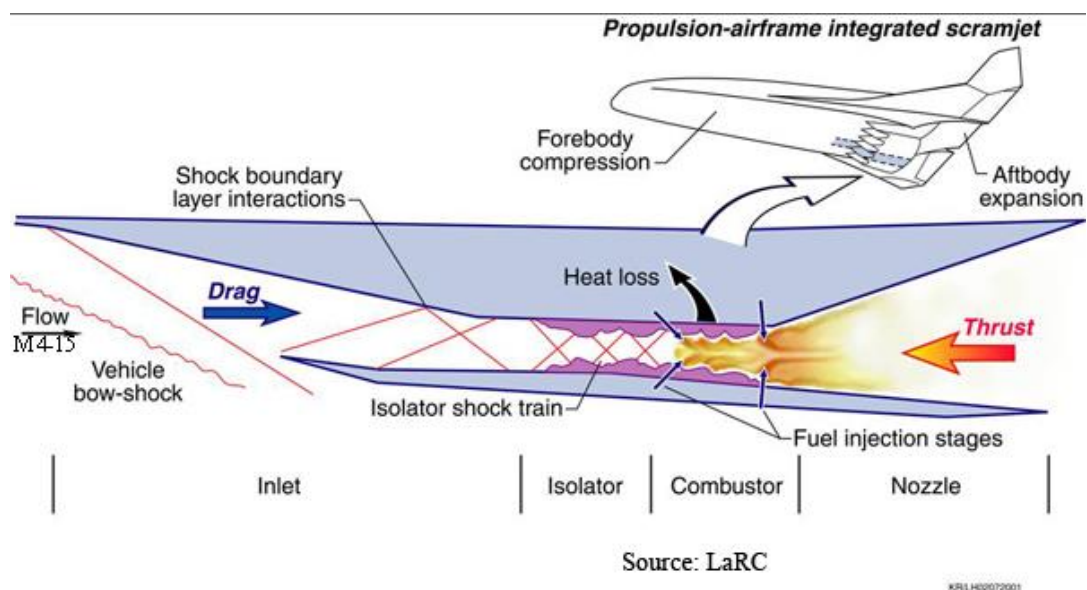
Como a aerodinâmica tem se tornado cada vez mais presente como ramo da engenharia, junto com o crescente teste em voos espaciais, o estudo do escoamento hipersônico se faz necessário. Um dos projetos mais recentes no Brasil neste ramo, é o veículo hipersônico 14 – X, como mostra a Figura 1, desenvolvido pelo Instituto de Estudos Avançados (IEAv).

Esse veículo espacial possui tecnologia *waverider*, para proporcionar sustentação ao veículo espacial e tecnologia *scramjet*, proporcionando sistema de

propulsão hipersônica aspirada baseada na combustão hipersônica. Para acelerar o 14 – X em condições pré-estabelecidas, deve-se definir a posição (altitude, longitude e latitude), pressão dinâmica, velocidade (Número de Mach) e ângulo de ataque, a partir do centro de lançamento.

Além disso, ao entrar em um escoamento de característica hipersônica, o veículo aeroespacial obterá sustentação, utilizando a onda de choque gerada durante o escoamento na atmosfera terrestre. Essa onda, originada no bordo de ataque, vai gerar uma região de alta pressão, resultando em alta sustentação e o mínimo de arrasto.

Já o motor scramjet, utiliza de um estado-reator (motor aeronáutico aspirado) que não possui partes móveis e que utiliza ondas de choque para promover a compressão e a desaceleração do ar atmosférico (COSTA, 2013). Ou seja, desde o lançamento do veículo, até o funcionamento do motor scramjet, há necessidade de estudos teóricos e simulações para conseguir efetuar o voo, sendo uma opção mais econômica do que montar o veículo para depois efetuar os devidos testes.



**Figura 1 – Modelo esquemático do veículo hipersônico 14 – X**  
**Fonte: LaRC (2010)**

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DE ESCOAMENTO

As equações governantes a seguir são de suma importância para os tópicos posteriores. Isso ocorre porque, dadas as condições iniciais do problema para a entrada do escoamento, é possível determinar as razões de densidade, pressão e temperatura, as relacionando com os respectivos números de Mach. Essas equações são conhecidas como: equação da conservação da massa, do momentum e da energia.

#### 2.1.1 Equação da Continuidade (Conservação de Massa):

Pela Figura 2, considere que um ponto da superfície de controle, tem-se um componente de fluxo de velocidade  $\mathbf{V}$ , um elemento vetorial de área de superfície  $d\mathbf{S}$ , além de um elemento de volume  $dV$ . Através do conceito de fluxo de massa, aplicado em um volume de controle escolhido, temos o princípio físico na qual a massa não pode ser criada e nem destruída. (ANDERSON, 2001)

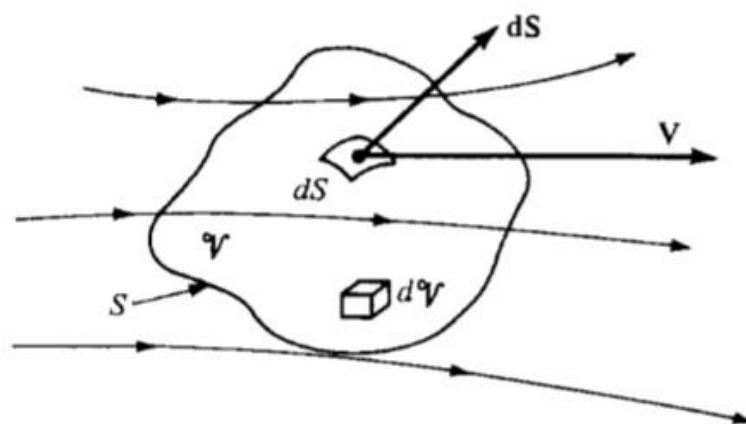


Figura 2 – Escoamento sobre um volume de controle finito  
Fonte: Fundamento da Aerodinâmica (2001)

Com isso, temos a seguinte equação da continuidade na forma integral:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV + \iint_S \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (2.1)$$

Em uma análise mais cautelosa, o primeiro termo da equação diz respeito a taxa de variação da massa dentro do volume de controle  $dV$ . Enquanto o segundo termo, trata do fluxo de massa líquida para fora do volume de controle através da superfície  $S$ . Pela equação (2.1) estar na forma integral, tem-se a vantagem de relacionar o fenômeno aerodinâmico sobre uma região finita do espaço, sem estar interessado sobre os detalhes de um dado ponto distinto do escoamento (STEWART, 2013). Porém, existem muitos casos em que se tem interesse nos detalhes. Para isso, como o volume de controle é fixo no espaço, os limites de integração também são fixos. Conseqüentemente, a derivada de tempo pode ser colocada dentro da integral de volume (FOX, 2006).

Por fim, aplicando o teorema do divergente na equação (2.1) e considerando que todos os pontos dentro do volume de controle serão zero, para que a integral do volume de controle arbitrário também seja zero, a equação será reduzida para:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2.2)$$

Para um escoamento estacionário, conseqüentemente a equação (2.2) se reduz à:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2.3)$$

### 2.1.2 Equação do Momentum (Quantidade de Movimento):

A equação do momento é equivalente às duas relações a seguir:

1. Segunda lei de Newton:  $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$ ;
2. Força = taxa temporal de variação do momento.

Para se deduzir esta equação, deve-se obter as expressões de ambos lados (direito e esquerdo) da relação. Utilizando ainda a mesma Figura 2, do lado esquerdo



da equação, a força exercida no fluido aparece de duas formas: forças de corpo e forças de superfície. Já para o lado direito, temos a relação de fluxo líquido de momento fora do volume de controle através da superfície  $S$  e a taxa de tempo de mudança de momento devido a variações das propriedades de escoamento dentro de  $V$  (STEWART, 2013). Sendo assim, a equação do momento na forma integral é:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{V} dV + \iint_S (\rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}) \mathbf{V} = - \iint_S p d\mathbf{S} + \iiint_V \rho \mathbf{f} dV + \mathbf{F}_{viscoso} \quad (2.4)$$

A equação é aplicada para o escoamento não estacionário, tridimensional, compressível ou incompressível, viscoso ou invíscido. Especialmente, para um fluxo estacionário ( $d/dt = 0$ ), invíscido ( $\mathbf{F}_{viscoso} = 0$ ) e sem forças de corpo ( $\mathbf{f} = 0$ ), a equação ficará:

$$\iint_S (\rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}) \mathbf{V} = - \iint_S p d\mathbf{S} \quad (2.5)$$

Por fim, a forma diferencial da equação (2.5) em cada direção será:

$$\nabla \cdot (\rho u \mathbf{V}) = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.6a)$$

$$\nabla \cdot (\rho v \mathbf{V}) = - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.6b)$$

$$\nabla \cdot (\rho w \mathbf{V}) = - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.6c)$$

Onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  são as velocidades nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

### 2.1.3 Equação da Energia:

Para o estudo de escoamentos incompressíveis, as equações da continuidade e do momentum já seriam o suficiente, visto que  $\rho$  é considerado constante. Entretanto, para escoamentos compressíveis,  $\rho$  é uma variável adicional ao problema,

tendo como consequência a necessidade dessa terceira equação, denominada equação da energia. Tal equação é necessária para variações de temperatura, sendo assim, a ferramenta que colaborará para encontrá-la, será através da primeira lei da termodinâmica:

$$\delta q + \delta w = de \quad (2.7)$$

Onde  $e$ , é considerada a energia interna do sistema, na qual será retomada pela seção 2.2

Aplicando a primeira lei para um fluido escoando através de um volume de controle fixo, esquematizado pela Figura 2, teremos a taxa de calor adicionada dentro do volume de controle da vizinhança, a taxa de trabalho feito sobre o fluido dentro desse volume e a taxa de mudança de energia do fluido a medida que flui através desse volume (FOX, 2006). Consequentemente, o resultado na forma integral da equação é:

$$\begin{aligned} \iiint_V \dot{q} \rho dV + \dot{Q}_{viscoso} - \iint_S p \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} + \iiint_V \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{V}) dV + \dot{W}_{viscoso} \\ = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) dV + \iint_S \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Se o fluxo é estacionário ( $d/dt = 0$ ), invíscido ( $\dot{Q}_{viscoso} = 0$  e  $\dot{W}_{viscoso} = 0$ ), adiabático ( $\dot{q} = 0$ ) e sem forças de corpo ( $\mathbf{f} = 0$ ), a equação será reduzida para:

$$\iint_S \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_S p \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.9)$$

Já na sua forma diferencial, a equação (2.9) será:

$$\nabla \cdot \left[ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \mathbf{V} \right] = -\nabla \cdot (p\mathbf{V}) \quad (2.10)$$

## 2.2 REVISÃO DE ALGUMAS EQUAÇÕES TERMODINÂMICAS

Em questão de familiarização com os conceitos posteriores, uma revisão de alguns conceitos de termodinâmica se faz necessário, visto que algumas substituições serão necessárias já que o tipo de escoamento tratado será o compressível.

Sendo assim, serão enumeradas as equações que necessitam de devida atenção (ÇENGEL, 2013):

### 1. Gás Ideal:

$$p = \rho RT \quad (2.11)$$

ou

$$pv = RT \quad (2.12)$$

Onde R é a constante do gás.

### 2. Energia Interna e Entalpia:

Considerando que  $e_{tot} = e_{interna} + e_{cinética} + e_{potencial}$ , lembre-se que a energia interna é chamada apenas de e. Sendo assim, temos que:

$$h = e + pv \quad (2.13)$$

$$e = c_v T \quad (2.14)$$

$$h = c_p T \quad (2.15)$$

$$c_p - c_v = R \quad (2.16)$$

Dividindo a equação (2.16) por  $c_p$  e que  $c_p/c_v = \gamma$ , onde para o ar  $\gamma = 1,4$ , teremos:

$$1 - \frac{1}{\gamma} = \frac{R}{c_p} \quad (2.17)$$

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \quad (2.18)$$

Analogamente,

$$c_v = \frac{R}{\gamma - 1} \quad (2.19)$$

**3. Primeira Lei da Termodinâmica:** relembrando a equação (2.7), temos:

$$\delta q + \delta w = de \quad (2.7)$$

#### 4. Segunda Lei da Termodinâmica:

$$ds = \frac{\delta q_{rev}}{T} \quad (2.20)$$

#### 5. Entropia:

$$\delta q T ds = de + p dv \quad (2.21)$$

$$\delta q T ds = dh - v dp \quad (2.22)$$

Onde as equações (2.21) e (2.22) são chamadas de equações de Gibbs. Através dessas equações de Gibbs, é possível desenvolver as seguintes equações abaixo, para um gás caloricamente ideal, considerando um processo termodinâmico com estados iniciais e finais denotados por 1 e 2, respectivamente:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (2.23)$$

Analogamente,

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1} \quad (2.24)$$

#### 6. Relações Isentrópicas:

$$\frac{v_2}{v_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{-1/(\gamma-1)} \quad (2.25)$$

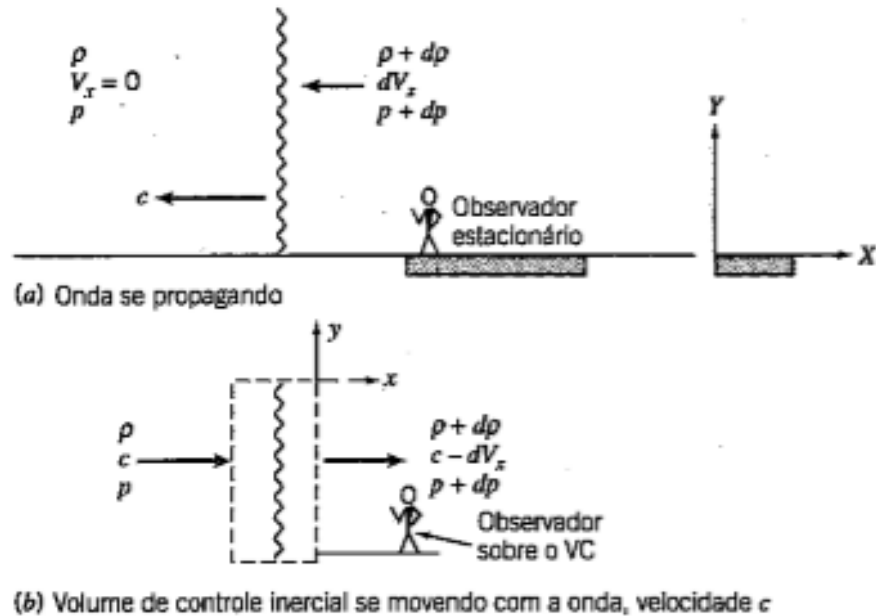
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{1/(\gamma-1)} \quad (2.26)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^\gamma = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (2.27)$$

### 2.3 RELAÇÃO ENTRE A VELOCIDADE DO SOM E O NÚMERO DE MACH

Som é a propagação de uma onda mecânica através de um meio sólido, líquido ou gasoso. A propagação sonora ocorre baseada em movimento molecular, com velocidade dependente das características elásticas e inerciais do meio. A onda está sujeita a reflexões em obstáculos, interferências construtivas e destrutivas, atenuação e Efeito Doppler (NUSSENZVEIG, 2002). Para o tipo de escoamento que está sendo estudada no momento, o fluido destacado é o ar, com razão de calores específicos  $\gamma = 1,4$  (valor tabelado), sendo que sua velocidade depende

fundamentalmente da temperatura do fluido. Para conseguir visualizar melhor essa relação com a temperatura, observe a figura 3, onde  $c$  é a velocidade do som, na qual denotamos por  $a$  nesse trabalho:



**Figura 3 – Comportamento de uma onda e semelhança com o choque normal.**  
**Fonte: Introdução a Mecânica dos Fluidos (2006)**

Analisando mais atentamente, é possível notar que o fluxo é unidimensional (apenas no sentido  $x$ ) e adiabático, por não ter fonte de transferência de calor dentro e fora da onda. Além disso, os gradientes são muito pequenos e a influência do fenômeno dissipativo é negligenciado, o que conseqüentemente nos diz que a onda é reversível (BERTIN, 1998). Sendo assim, ao aplicar a equação da conservação da massa e do momento para a Figura 2.b, o resultado obtido para a velocidade do som  $a$  é:

$$a = \sqrt{\gamma RT} \quad (2.28a)$$

Ou

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad (2.28b)$$

As equações (2.28a) e (2.28b) são importantes por estarem associadas à definição de um número adimensional conhecido como Número de Mach:

$$M = \frac{V}{a} \quad (2.29)$$

Onde  $V$  é a velocidade do escoamento e  $a$  é velocidade do som. O número de Mach se torna uma ferramenta de grande importância, porque é através de seus valores que definimos se o escoamento que está ocorrendo é subsônico, supersônico, sônico etc.

Sendo assim, para cada valor de Número de Mach referente ao regime tomado em questão associado ao escoamento não-perturbado  $M_\infty$ , tem-se a seguinte divisão (FOX, 2006):

- **Subsônico ( $0 < M < 0,8$ ):** são caracterizações por linhas de corrente suave, onde a velocidade do escoamento em todo o perfil é menor que a velocidade do som ( $V < a$ ). Por essa velocidade ser menor, os distúrbios que ocorrerem no escoamento se propagam para todos os lados e podem ser sentidas em todo o campo de escoamento;
- **Transônico ( $0,8 < M < 1,2$ ):** é uma região mista, ou de transição, onde ocorre um escoamento parte subsônica e parte supersônica. É a partir desse estágio que se inicia a ocorrência de algumas ondas de choque;
- **Supersônico ( $1,2 < M < 5,0$ ):** são frequentemente caracterizados pela presença de ondas de choque, no qual as propriedades do escoamento e as linhas de corrente mudam descontinuamente. Nesse regime, o escoamento permanece supersônico atrás da onda de choque e suas perturbações sofrem leituras mais lentas devido a velocidade do objeto ser maior que a velocidade do som ( $V > a$ );
- **Hipersônico ( $M > 5,0$ ):** nesse regime, as ondas de choque são oblíquas, assim como no supersônico, porém mais próximas à superfície do corpo. Ocorre também o surgimento de dissociações das moléculas que constituem o fluido, além de uma transferência de calor intensa e presença de íons na região da onda de choque. Sendo assim, o escoamento não pode ser considerado com expoente de expansão isentrópica constante, assim como é feito no supersônico. Será demonstrado posteriormente, considerações importantes durante a

modelagem matemática, onde será mais perceptível tais diferenças entre o hipersônico e o supersônico.

## 2.4 ONDA DE CHOQUE NORMAL

A onda de choque é uma onda de compressão de larga amplitude, assim como a produzida por uma explosão, causada por movimento supersônico de um corpo em um meio. O propósito da introdução desse conceito é o de desenvolver a teoria de onda de choque, além calcular as mudanças nas propriedades do escoamento através de uma onda. A espessura de um choque é cerca de  $0,2 \mu\text{m}$  ( $10^{-5}$  polegadas). (FOX, 2006)

Ondas de choque normais ocorrem frequentemente na natureza, sendo ondas que são normais à montante do escoamento analisado. Embora a onda de choque seja curvada, a região de choque mais próxima ao nariz é essencialmente considerada normal ao escoamento (ANDERSON, 2001). Um outro exemplo, como mostra a Figura 3.b, é de um escoamento supersônico que se estabiliza dentro de um bocal onde a pressão atrás é alta o suficiente para causar uma onda de choque normal que fica dentro do bocal.

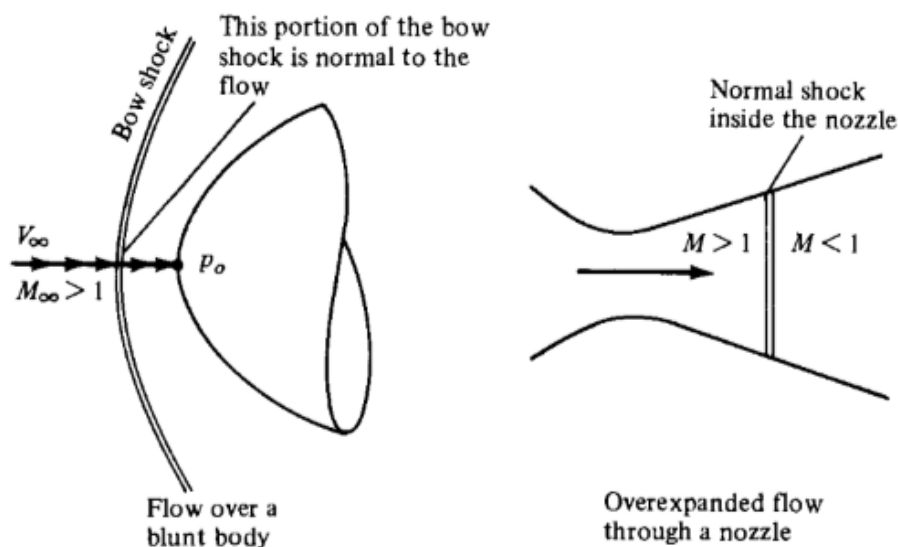


Figura 4 – Exemplos de comportamentos de onda de choque normal  
Fonte: Fundamentos da Aerodinâmica (2001)

Sendo assim, em um escoamento supersônico onde existe uma onda de choque normal que precisa ser vencida, é necessário ter as condições iniciais de entrada e, através das equações governantes, identificar os parâmetros de saída. Então, considerando um volume de controle do caso da Figura 5, onde o escoamento é unidimensional, estacionário, adiabático, invíscido e sem ação de forças de corpo, além das condições à frente da onda ser dada, enquanto atrás da onda é desconhecida. Sendo assim, teremos como dados de entrada  $p_1$ ,  $\rho_1$ ,  $T_1$ ,  $M_1$  que são a pressão, densidade, temperatura e Número de Mach, respectivamente.

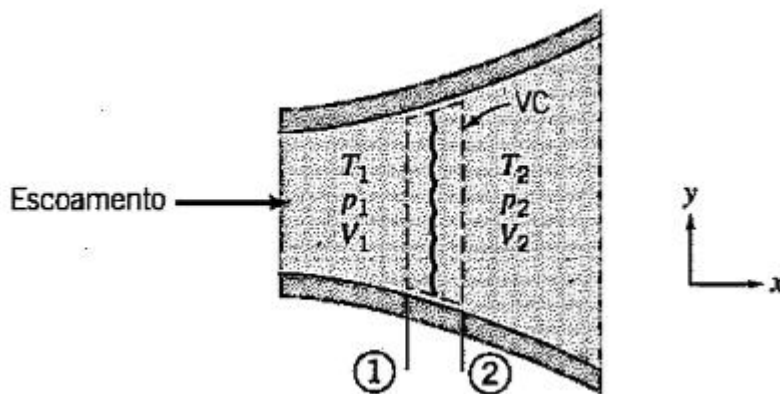


Figura 5 – Volume de controle para análise de choque normal  
Fonte: Introdução a Mecânica dos Fluidos (2006)

Aplicando a equação da continuidade (2.1) para a Figura 4, teremos:

$$\oiint_S \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (2.30)$$

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (2.31)$$

Desenvolvendo o momentum na forma da equação (2.5), teremos:

$$\oiint_S (\rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}) \mathbf{V} = - \oiint_S p d\mathbf{S} \quad (2.5)$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (2.32)$$

E a equação da energia (2.9) dada por:

$$\oiint_S \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = - \oiint_S p \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.9)$$



$$p_1 u_1 + \rho_1 \left( e_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) u_1 = p_2 u_2 + \rho_2 \left( e_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) u_2 \quad (2.33)$$

Dividindo pela equação (2.31) e lembrando a equação (2.13), resultará em:

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (2.34)$$

Porém, como temos três equações algébricas para cinco variáveis, deve-se lembrar das equações do estado (equação (2.11)) e da entalpia (equação (2.15)), na qual dará relação das duas variáveis faltantes para solução do problema. Sendo assim, o caminho para conseguir solucionar o problema dos valores desconhecidos atrás da onda, será encontrar a relação dessas incógnitas com o Número de Mach de entrada  $M_1$ . Para chegar em tal relação, vamos utilizar a equação (2.34) e fazer as devidas substituições em conjunto das equações (2.15), (2.18) e (2.28a) como segue abaixo:

$$\begin{aligned} h_1 + \frac{u_1^2}{2} &= h_2 + \frac{u_2^2}{2} \\ \frac{\gamma RT_1}{\gamma - 1} + \frac{u_1^2}{2} &= \frac{\gamma RT_2}{\gamma - 1} + \frac{u_2^2}{2} \\ \frac{a_1^2}{\gamma - 1} + \frac{u_1^2}{2} &= \frac{a_2^2}{\gamma - 1} + \frac{u_2^2}{2} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Considerando a região 2 como um fluxo sônico, teremos que  $u_2 = a_2 = a^*$  e substituindo na equação anterior (2.35):

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} &= \frac{a^{*2}}{\gamma - 1} + \frac{a^{*2}}{2} \\ \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} &= \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a^{*2} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Dividindo a equação (2.36) por  $u^2$ , encontraremos o número de Mach característico definido como  $M^*$  o qual é função de Mach:

$$\frac{(a/u)^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \left(\frac{a^*}{u}\right)^2$$

$$M^{*2} = \frac{(\gamma + 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2} \quad (2.37)$$

Tendo a relação da equação (2.37), agora é possível retornar para a equação (2.35) e rearranjar para encontrar  $a_1$  e  $a_2$  aplicado para as regiões 1 e 2 do escoamento esquematizado pela Figura 4:

$$a_1^2 = \frac{\gamma + 1}{2} a^{*2} - \frac{\gamma - 1}{2} u_1^2 \quad (2.38a)$$

$$a_2^2 = \frac{\gamma + 1}{2} a^{*2} - \frac{\gamma - 1}{2} u_1^2 \quad (2.38b)$$

Armazenando as equações (2.38a) e (2.38b), antes de prosseguir, deve-se dividir a equação do momento, pela equação da conservação da massa. É através da razão dessas duas equações que será possível retirar a Relação de Prandtl (SABERSKY, 1999). Conseqüentemente, após encontrar a relação, será possível encontrar a fórmula do Número de Mach para a região 2. Sendo assim, dividindo a equação (2.5) por (2.31):

$$\frac{p_1}{\rho_1 u_1} + u_1 = \frac{p_2}{\rho_2 u_2} + u_2$$

$$\frac{p_1}{\rho_1 u_1} - \frac{p_2}{\rho_2 u_2} = u_2 - u_1$$

$$\frac{a_1^2}{\gamma u_1} - \frac{a_1^2}{\gamma u_1} = u_2 - u_1 \quad (2.39)$$

Substituindo (2.38a) e (2.38b) dentro de (2.39), e dividindo por  $u_2 - u_1$ , obtém-se:

$$\frac{\gamma + 1}{2\gamma u_1 u_2} a^{*2} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} = 1$$

$$a^{*2} = u_1 u_2 \quad (2.40a)$$

ou

$$1 = M_1^* M_2^* \quad (2.40b)$$

A equação (2.40) encontrada, é conhecida como Relação de Prandtl e é usual para relação intermediária de onda de choque normal (SABERSKY, 1999). Por fim, substituindo a equação (2.37) em (2.40b), enquanto isola  $M_2^*$ :

$$M_2^2 = \frac{1 + [(\gamma - 1)/2]M_1^2}{\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)/2} \quad (2.41)$$

Por essa fórmula, em análise mais detalhada, é possível notar que o Mach da região 2 depende apenas do Mach da região 1 de entrada. No caso dos outros valores desconhecidos da região 2, basta encontrar pelas razões das propriedades termodinâmicas (ANDERSON, 2001):

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = M_1^* = M_2^{*2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \quad (2.42)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_1^2 - 1) \quad (2.43)$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right) \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) = \frac{h_1}{h_2} = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_1^2 - 1)\right] \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)M_1^2} \quad (2.44)$$

Por fim, é claramente notável que todos os dados desconhecidos da região 2 dependem de Mach  $M_1$  do escoamento montante, sendo assim, todas são funções apenas de  $M_1$ , por ser o parâmetro determinante para as mudanças através da onda de choque normal em um gás perfeito (SABERSKY, 1999).

## 2.5 ONDA DE CHOQUE OBLÍQUA

Como foi visto pela seção anterior, a onda de choque normal possui extrema importância, pois, através de seu estudo, providencia uma relação direta para a introdução de fenômeno de onda. Porém, a onda de choque normal é nada mais do que um caso particular de onda de choque oblíqua, onde forma um ângulo de onda de  $90^\circ$ . Uma aeronave ao percorrer um escoamento com  $M > 1$ , conforme

esquemática pela Figura 6, forma uma onda de choque oblíqua próxima ao nariz do corpo, causando uma variação brusca na direção das linhas de corrente. Porém, quanto mais distante da aeronave, o choque oblíquo se torna progressivamente mais fraco e as linhas de corrente sofrem uma deflexão baixa, até que se torne um cone de Mach (FOX, 2006). Esse cone é uma onda de pressão muito fraca, na qual mal perturba as linhas de corrente, sendo o caso limite da onda de choque oblíqua.

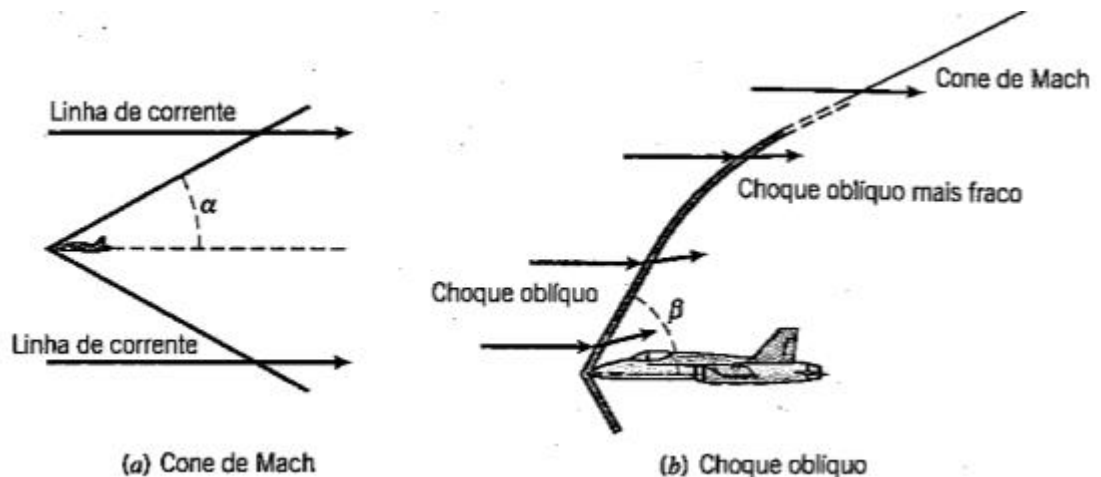
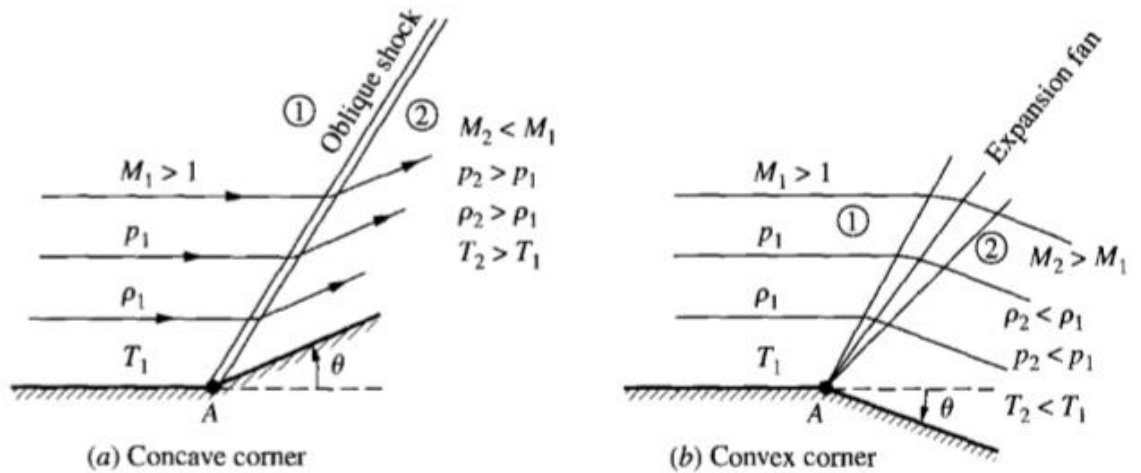


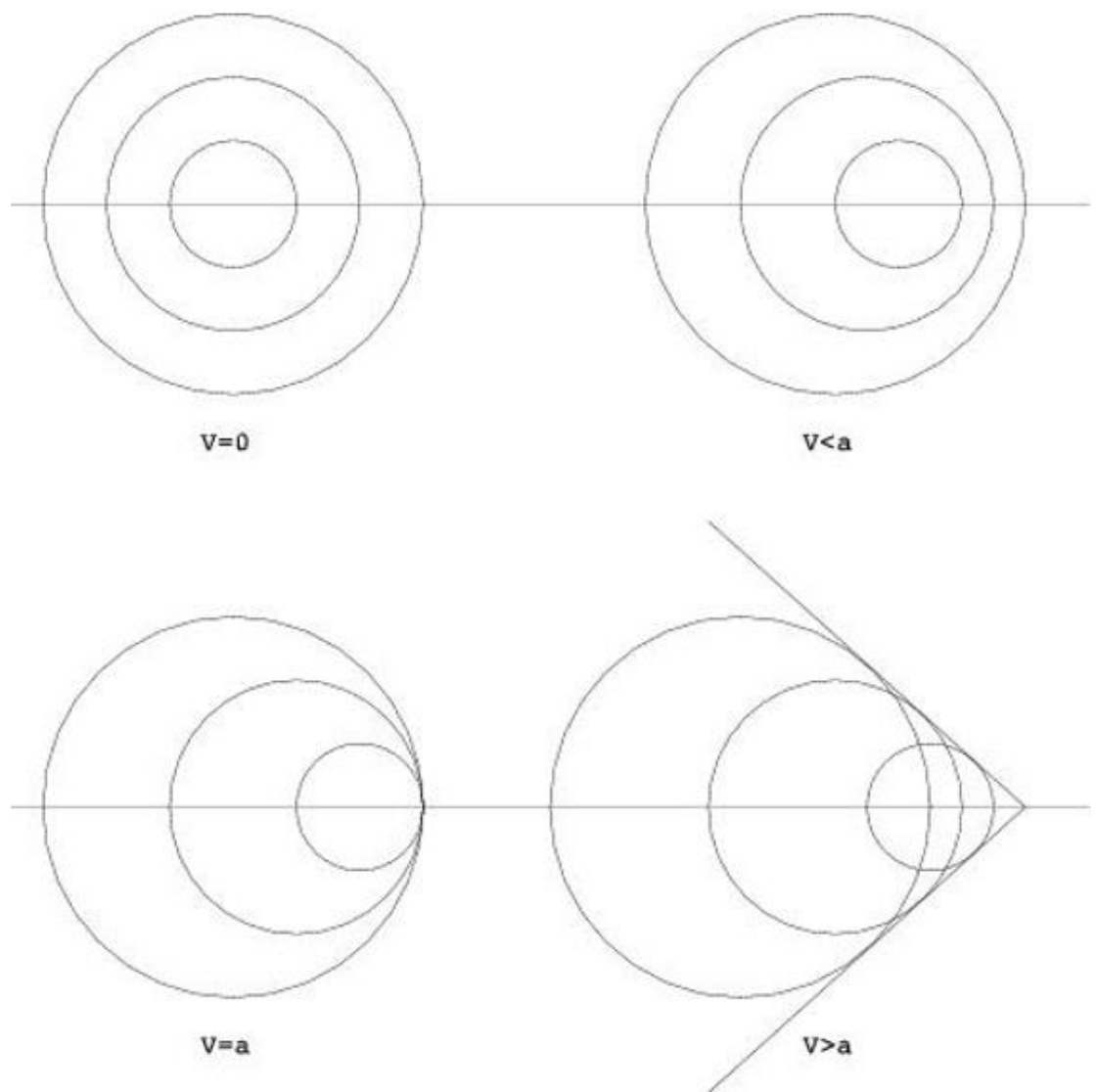
Figura 6 – Cone de Mach (a) e choque oblíquo (b) gerados por um avião, onde  $\alpha = \mu$ .  
 Fonte: Introdução a Mecânica dos Fluidos (2006)

Outro caso que pode ser considerado para melhor visualização, é como o que está representado pela Figura 7 onde se considera uma parede com canto de ponto A. Essa parede é deslocada para cima ou para baixo, semelhante a um aclave (canto côncavo) ou declive (canto convexo), através de um ângulo de deflexão  $\theta$ . O escoamento na parede deve ser tangente à parede, de maneira que as linhas de corrente também são defletidas referente ao ângulo  $\theta$ . Para o caso de canto côncavo, o número de Mach decrescerá continuamente, enquanto a pressão, densidade e temperatura aumentarão. Porém, o canto convexo trabalha de forma oposta, conseqüentemente, o número de Mach crescerá, enquanto a pressão, densidade e temperatura diminuirão, provando que a expansão de onda é uma antítese direta a onda de choque (ANDERSON, 2001).



**Figura 7 – escoamento supersônico através de um canto inclinado**  
**Fonte: Fundamentos da Aerodinâmica (2001)**

As ondas de choque obliquas são mais comuns na natureza ou em aplicações de engenharia, isso se torna mais visível em análise de perturbações, visto que as características do escoamento dependem da velocidade uma fonte de perturbação se move através do fluido (WHITE, 2011). Para exemplificar, considere uma fonte sonora de perturbação se movendo através de um gás estagnado, como mostra a Figura 8 onde as perturbações viajam em um fluido com a velocidade do som nesse meio (FOX, 2006).



**Figura 8 – Perturbações geradas por uma fonte sonora**  
**Fonte: Castro (2009) em Aerodinâmica em Regime Transônico e Supersônico**

Como a perturbação gerada se propaga em todas as direções, se a velocidade da fonte for nula ( $V = 0$ ), as perturbações geradas encontram-se em superfícies esféricas cujo centro é a posição ocupada pela fonte. Caso a fonte se mover horizontalmente, com velocidade inferior a velocidade do som no meio ( $V < a$ ), as perturbações geradas percorrerão um caminho de  $at$  (figura 9), enquanto a fonte percorrerá um espaço de  $Vt$  (figura 9) e as perturbações serão percebidas antes da passagem da fonte.

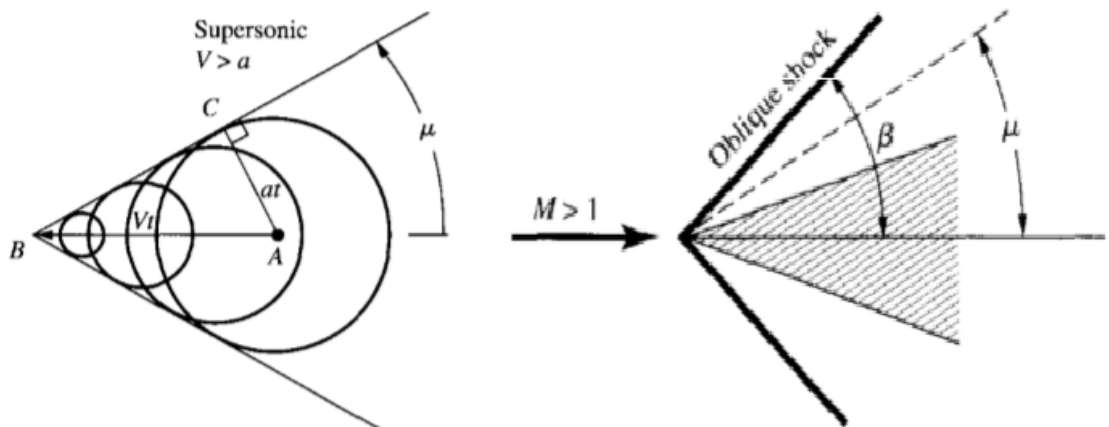
Porém, caso a fonte se mover com velocidade igual à velocidade do som no meio ( $V = a$ ), as perturbações serão notadas de maneira acumulada na posição ocupada pela fonte a cada instante de tempo, por percorrerem o mesmo espaço ( $Vt =$

at). Por fim, se a fonte se mover com uma velocidade superior à velocidade do som no meio ( $V > a$ ), significará que as perturbações estarão sempre atrás da fonte que as gerou, sendo a partir dela formam as linhas de perturbações conhecidas como onda de Mach, possuindo um ângulo de Mach definida como (WHITE, 2011):

$$\sin \mu = \frac{at}{Vt} = \frac{1}{M}$$

$$\mu = \sin^{-1} \frac{1}{M} \quad (2.45)$$

Com isso, é notável que em escoamento supersônico se forma uma onda oblíqua. Segundo a Figura 9, se os distúrbios forem mais intensos do que uma simples onda de som, conseqüentemente, a onda frontal se torna mais intensa que a onda de Mach, fazendo com que o choque oblíquo criado tenha um ângulo  $\beta$  na corrente livre, onde  $\beta > \mu$  (ANDERSON, 2001).



**Figura 9 – Relação de ângulo de onda de choque oblíqua e ângulo de Mach, através da propagação de perturbações**

Fonte: Fundamentos da Aerodinâmica (2001)

### 2.5.1 Equações Fundamentais Para Relação de Choque Oblíquo:

Assim como numa onda de choque normal, para identificar as características do fluido e que comportamento teria, era necessário encontrar as equações que regiam a relação das propriedades termodinâmicas e de número de Mach após a onda de choque, sendo assim, para a onda de choque oblíqua, será feito o processo semelhantemente (SABERSKY, 1999). Pela Figura 10, considere uma onda de

choque oblíqua onde o ângulo de onda – que é o ângulo entre a onda de choque e a direção de escoamento montante – é definida por  $\beta$ .

O escoamento montante (região 1) é horizontal, com velocidade  $V_1$  e número de Mach  $M_1$  e podem ser decompostas em componentes normais e tangenciais:  $u_1$ ,  $w_1$ ,  $M_{n,1}$  e  $M_{t,1}$ , respectivamente. Enquanto isso, o fluxo jusante (região 2) é inclinada para cima (canto côncavo) com um ângulo de deflexão  $\theta$ , velocidade  $V_2$  e número de Mach  $M_2$ , onde também possui componentes normais e tangenciais:  $u_2$ ,  $w_2$ ,  $M_{n,2}$  e  $M_{t,2}$ , respectivamente (ANDERSON, 2001).

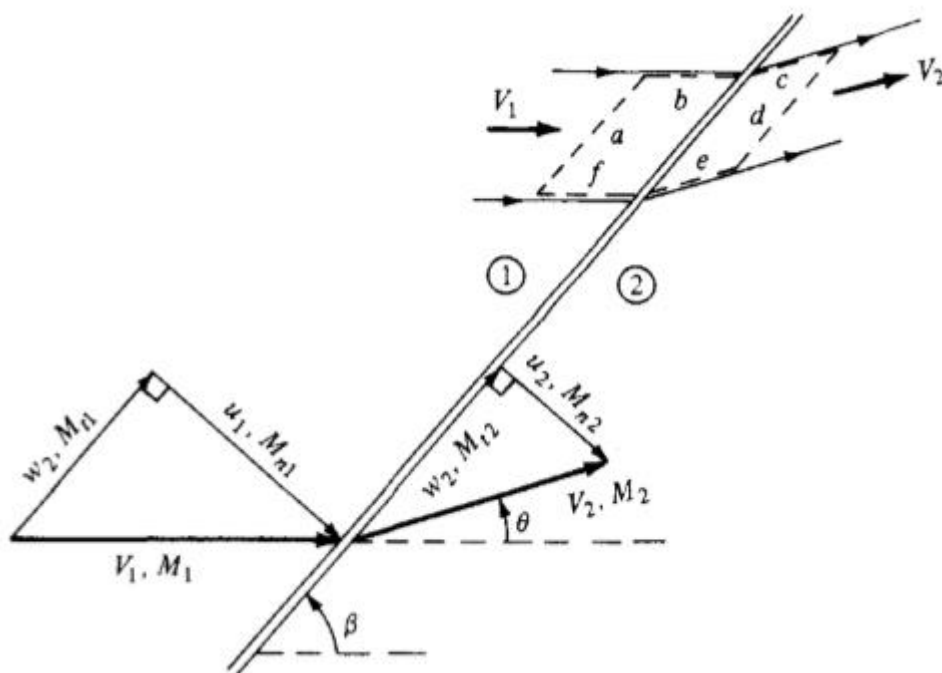


Figura 10 – Geometria de choque oblíquo em um escoamento supersônico  
Fonte: Fundamentos da Aerodinâmica (2001)

Considere também o volume de controle demonstrado pela Figura 10 definida por  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  e  $f$ , onde  $a$  e  $d$  são paralelas à onda de choque, enquanto os segmentos  $b$ ,  $c$ ,  $e$  e  $f$ , são paralelas à velocidade e seguem as linhas de corrente superior e inferior, sendo que as áreas de  $a$  e  $d$  são iguais ( $A_1 = A_2$ ) (ANDERSON, 2001). Relembrando que está sendo lidado com escoamento estacionário, invíscido, adiabático e sem forças de corpo. Sendo assim, devido as hipóteses desenvolvidas na seção 2.1, é possível encontrar::

- **Equação da conservação da massa:** Para a equação da continuidade, as componentes de velocidade são normais à onda de



choque, logo, a equação será semelhante a que foi encontrada para choque normal:

$$\oiint_S \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (2.30)$$

$$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2$$

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (2.46)$$

- **Equação do momento:** Como a equação é vetorial e existem componentes tangenciais e normais, vamos dividir a equação para cada caso separado:

$$\oiint_S (\rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S})_w = - \oiint_S (pdS)_{tangencial} \quad (2.47)$$

$$(\rho_1 u_1 A_1) w_1 = (\rho_2 u_2 A_2) w_2$$

$$w_1 = w_2 \quad (2.48)$$

Com isso, é possível notar que a componente tangencial de velocidade é constante através do choque oblíquo. Porém, para o componente normal, a fórmula será semelhante com a equação do momento para choque normal:

$$\oiint_S (\rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S})_u = - \oiint_S (pdS)_{normal}$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (2.49)$$

- **Equação da energia:** Nesse caso da equação da energia,

$$\oiint_S \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = - \oiint_S p \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.9)$$

$$-\rho_1 \left( e_1 + \frac{V_1^2}{2} \right) u_1 A_1 + \rho_2 \left( e_2 + \frac{V_2^2}{2} \right) u_2 A_2 = -(-p_1 u_1 A_1 + p_2 u_2 A_2)$$

$$\rho_1 u_1 \left( h_1 + \frac{V_1^2}{2} \right) = \rho_2 u_2 \left( h_2 + \frac{V_2^2}{2} \right)$$

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \quad (2.50)$$

Desenvolvendo a equação (2.49), pela Figura 10 é possível notar a relação do Teorema de Pitágoras, onde  $V^2 = u^2 + w^2$ . Porém, como foi visto pela equação do momento,  $w_1 = w_2$ , a equação (2.49) resultará em:

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (2.51)$$

Analisando os resultados obtidos pelas equações (2.46), (2.48), (2.49) e (2.51) – sendo a solução para equação da continuidade, momento tangencial, normal e energia, respectivamente – é possível perceber que elas envolvem apenas os componentes normais de velocidade  $u_1$  e  $u_2$ . Sendo assim, para as mudanças que ocorrem através do choque oblíquo, o método algébrico é o mesmo para choque normal, em termos da componente normal de escoamento montante  $M_{n,1}$ . Note que:

$$M_{n,1} = M_1 \sin \beta \quad (2.52)$$

Então, assim como as equações (2.41), (2.42), (2.43) e (2.44) da seção 2.3, teremos as equações em termos da componente normal:

$$M_{n,2}^2 = \frac{1 + [(\gamma - 1)/2]M_{n,1}^2}{\gamma M_{n,1}^2 - (\gamma - 1)/2} \quad (2.53)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_{n,1}^2}{2 + (\gamma - 1)M_{n,1}^2} \quad (2.54)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_{n,1}^2 - 1) \quad (2.55)$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right) \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_{n,1}^2 - 1)\right] \frac{2 + (\gamma - 1)M_{n,1}^2}{(\gamma + 1)M_{n,1}^2} \quad (2.56)$$

Note que  $M_{n,2}$  é normal ao número de Mach atrás da onda de choque, ou seja, pela relação geométrica da Figura 10, tem-se:

$$M_2 = \frac{M_{n,2}}{\sin(\beta - \theta)} \quad (2.57)$$

Apesar da equação (2.57) demonstrar que existe mais um parâmetro para ser visto, além de número de Mach  $M_1$  e ângulo de onda  $\beta$ . Porém, o ângulo de deflexão não é um parâmetro independente, sendo assim, ele também pode ser escrito em termos de  $M_1$  e  $\beta$ , da mesma forma que é apresentada abaixo para as regiões 1 ( $\tan \beta$ ) e 2 ( $\tan(\beta - \theta)$ ):

$$\tan \beta = \frac{u_1}{w_1} \quad (2.58a)$$

$$\tan(\beta - \theta) = \frac{u_2}{w_2} \quad (2.58b)$$

Dividindo a equação (2.58b) por (2.58a), lembrando que  $w_1 = w_2$ , tem-se:

$$\frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan \beta} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta}$$

$$\tan \theta = 2 \cot \beta \left[ \frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \right] \quad (2.59)$$

Por fim, a equação (2.59) acima, é chamada de relação  $\theta - \beta - M$  e especifica, como foi dito anteriormente, que  $\theta$  é uma função única de  $M_1$  e  $\beta$ . Por ser uma relação vital para análise de choque oblíquo, os resultados são plotados, como mostra o gráfico de ângulo de onda versus ângulo de deflexão da Figura 11, quando  $\gamma = 1,4$

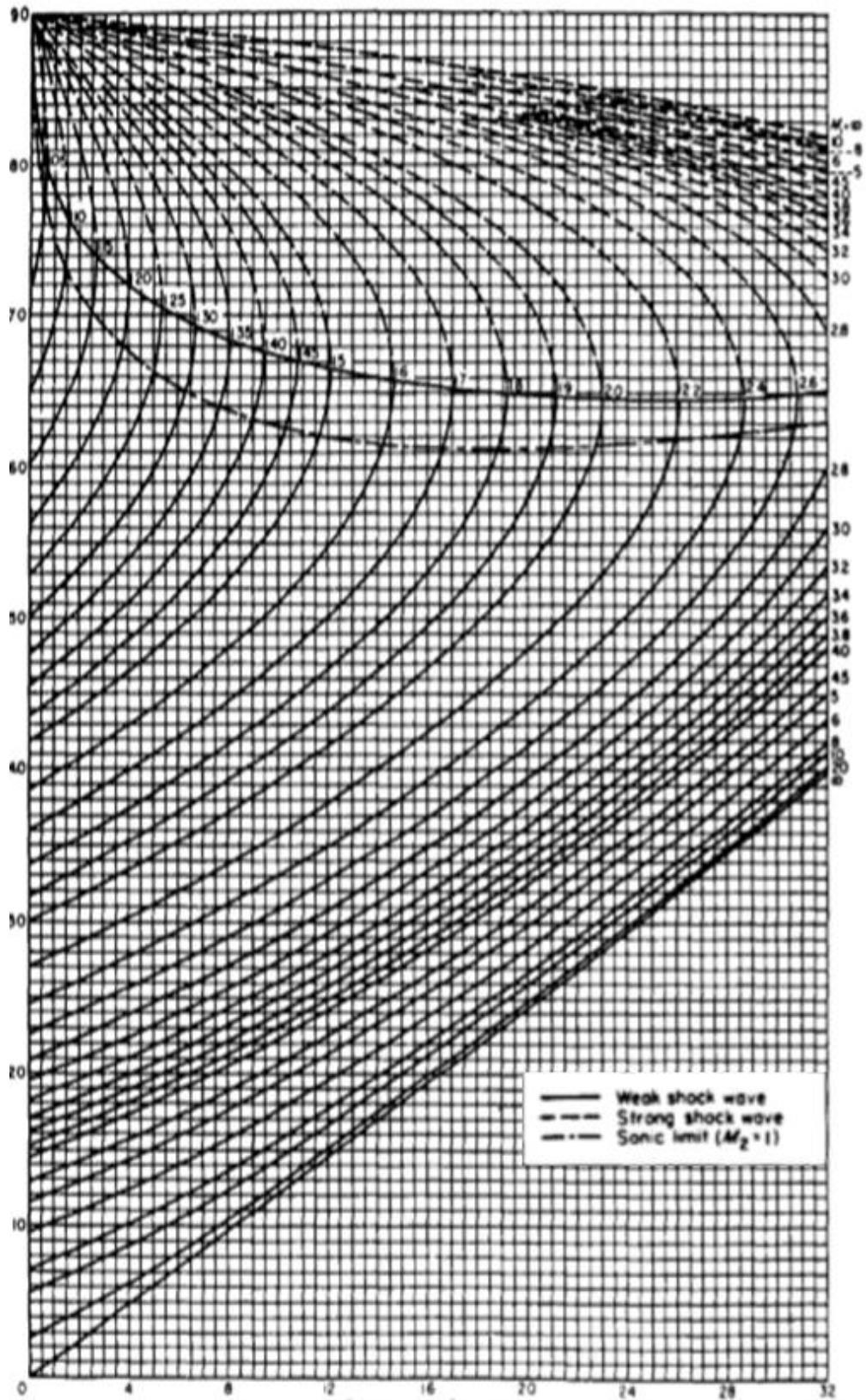


Figura 11 – Propriedades de choque obluo:  $\gamma = 1,4$ . Diagrama  $\theta - \beta - M$ . Gráfico de ângulo de onda (eixo  $y$ ) por ângulo de deflexão (eixo  $x$ ).

Fonte: NACA Report 1135, Ames Research Staff, "Equations, Tables and Charts For Compressible Flow," 1953

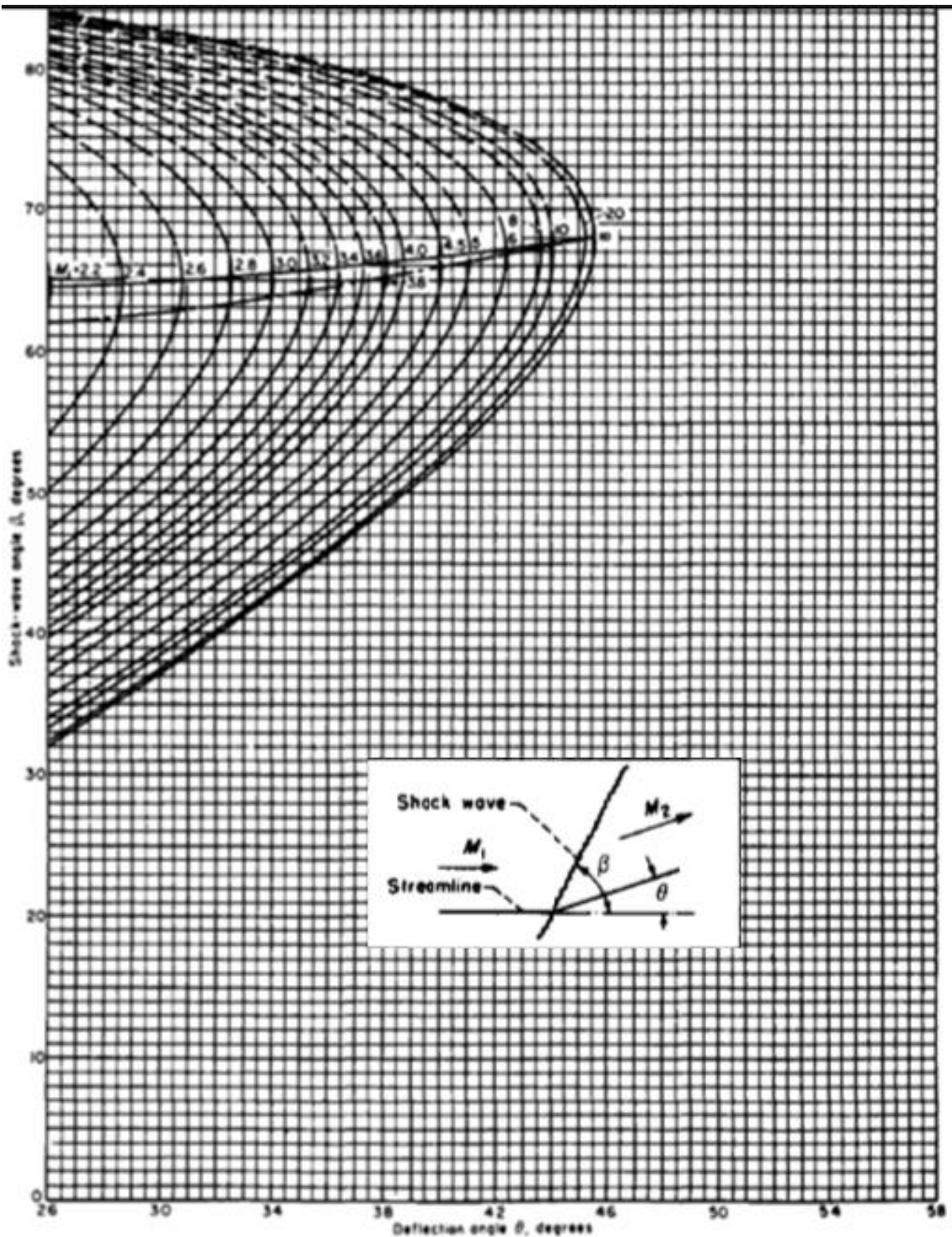


Figura 11 (continuação) – Propriedades de choque oblíquo:  $\gamma = 1,4$ . Diagrama  $\theta - \beta - M$ .  
 Gráfico de ângulo de onda (eixo y) por ângulo de deflexão (eixo x)  
 Fonte: NACA Report 1135, Ames Research Staff, "Equations, Tables and Charts For Compressible Flow," 1953

## 2.6 ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL ATRAVÉS DE UM BOCAL

Pelas seções 2.4 e 2.5, foi visto a importância das relações das ondas de choque normais e oblíquas. Essas ondas estão presentes em qualquer veículo aerodinâmico em voo supersônico, o que causa devida preocupação aos engenheiros aeronáuticos com a observação das características e geração de sustentação e arrasto em velocidades supersônicas (FOX, 2006). Outras características importantes são os detalhes do campo de fluxo, incluindo os modelos de ondas de choque e de expansão. Contudo, para fazer tais tipos de observações, existem dois tipos mais comuns de escolhas, sendo elas: conduzir testes de voo usando o veículo produzido ou simular em um túnel de vento, em uma escala menor do modelo do veículo. Entre essas duas opções de escolhas, preferencialmente é utilizada a segunda opção, porque para efetuar tal tipo de teste em um modelo de escala real, o custo de manutenção e possíveis falhas seria muito oneroso, se tornando inviável e perigoso. (ANDERSON, 2001)

Portanto, para efetuar eventuais testes e simulações, se faz necessário o estudo nesses fundamentos aerodinâmicos de escoamento compressível através de dutos. Ou seja, primeiro será necessário definir as equações governantes que derivam o problema, tendo em sequência o tratamento de casos em um bocal, que é um dos pontos importantes desse trabalho (WHITE, 2011).

### 2.6.1 Equações Fundamentais Para Escoamento Quase Unidimensional:

Em contraste ao fluxo unidimensional tratado na seção sobre onda de choque normal, para esse caso, assumimos que a área do tubo de escoamento muda em função de  $x$ , ou seja,  $A = A(x)$ , assim como é apresentado na Figura 12.b abaixo:

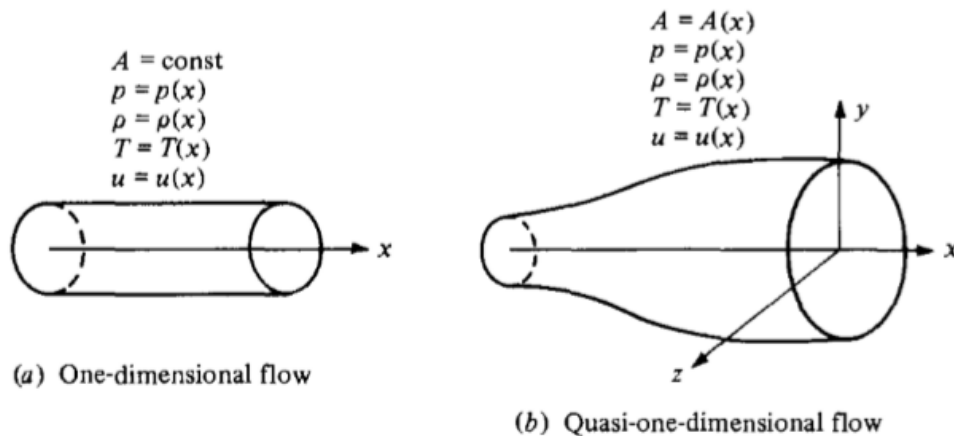


Figura 12 – escoamento unidimensional em comparação ao escoamento quase unidimensional.

Fonte: Fundamentos da Aerodinâmica (2001)

Apesar do fluxo ser tridimensional, como mostra a Figura 12.b, se a variação de área for moderada, ou seja, se os componentes  $y$  e  $z$  são pequenos em relação ao componente  $x$ , pode-se assumir que o campo de fluxo varia apenas em  $x$  (as outras componentes se tornam praticamente desprezadas). Sendo assim, tal fluxo onde  $A = A(x)$ , mas  $p = p(x)$ ,  $\rho = \rho(x)$ ,  $u = u(x)$  etc, é definido como escoamento quase unidimensional. Todavia, a suposição de escoamento quase unidimensional é uma aproximação do atual fluxo em um duto de área variável e a forma integral das equações de conservação da continuidade, momento e energia, que já é conhecida até aqui, pode também ser aplicada para um caso quase unidimensional, visto ser fisicamente consistente (ANDERSON, 2001).

Portanto, considere um volume de controle dado pela Figura 13 em que na região 1, o fluxo sobre uma área  $A_1$  é assumida uniformemente, com propriedades  $p_1$ ,  $\rho_1$ ,  $u_1$  etc.

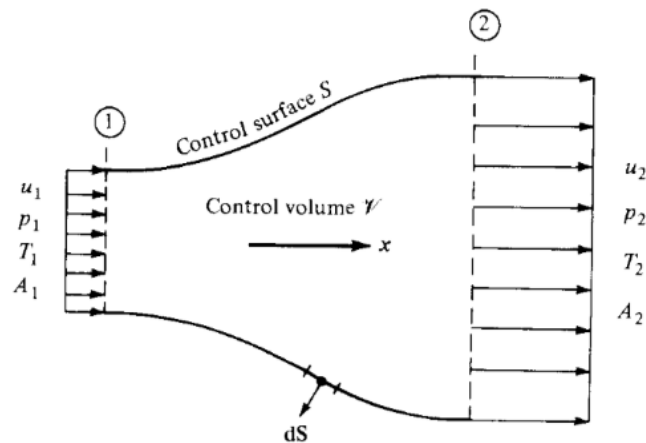


Figura 13 – Volume de controle finito para um escoamento quase unidimensional  
Fonte: Fundamentos da Aerodinâmica (2001)

Similarmente, na região 2, o fluxo sobre uma área  $A_2$  também é assumida uniformemente, com propriedades  $\rho_2$ ,  $p_2$ ,  $u_2$  etc. Para a aplicação da equação da continuidade, em um duto de área variável, tem-se a seguinte relação:

$$\oiint_S \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (2.30)$$

$$\iint_{A_1} \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{A_2} \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\text{parede}} \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2 \quad (2.60)$$

Agora, considerando a equação do momento, para um escoamento estável, invíscido, adiabático e sem forças de corpo:

$$\oiint_S (\rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}) \mathbf{V} = - \oiint_S p d\mathbf{S} \quad (2.5)$$

$$\oiint_S (\rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}) u = - \oiint_S (p dS)_x$$

Como a equação (2.5) é escalar, o sinal de  $x$  tem que ser analisado com devido cuidado ao calcular as integrais de superfície. Sendo assim, a solução será:



$$\begin{aligned}
-\rho_1 u_1^2 A_1 + \rho_2 u_2^2 A_2 &= -(-p_1 A_1 + p_2 A_2) + \int_{A_1}^{A_2} p \, dA \\
p_1 A_1 + \rho_1 u_1^2 A_1 + \int_{A_1}^{A_2} p \, dA &= p_2 A_2 + \rho_2 u_2^2 A_2
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Agora, considerando a equação da energia, para um escoamento estável, invíscido, adiabático e sem forças de corpo:

$$\begin{aligned}
\oiint_S \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} &= - \oiint_S p \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \tag{2.9} \\
-\rho_1 \left( e_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) u_1 A_1 + \rho_2 \left( e_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) u_2 A_2 &= -(-p_1 u_1 A_1 + p_2 u_2 A_2) \\
p_1 u_1 A_1 + \rho_1 u_1 A_1 \left( e_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) &= p_2 u_2 A_2 + \rho_2 u_2 A_2 \left( e_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) \tag{2.62}
\end{aligned}$$

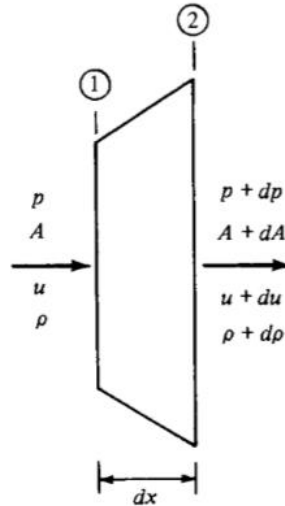
Dividindo a equação (2.62) pela equação (2.31), além de relembrar as equações (2.11) e (2.13), a equação será reduzida da seguinte forma:

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \tag{2.63}$$

Analisando as equações para escoamento quase unidimensional encontradas, no caso, as equações (2.60), (2.61) e (2.63), é possível notar que elas formam uma expressão algébrica (exceto o único termo integral da equação do momento). Como na região 1, os dados de escoamento de entrada são dados e assumindo um gás perfeito no sistema – relembrando as equações (2.11) e (2.15) da seção 2.3 –, é possível encontrar os dados da região 2 de escoamento de saída, a princípio, resolvendo diretamente as equações encontradas (ANDERSON, 2001). Porém, para facilitar os cálculos, um método torna mais simples a resolução, na qual se passa as equações governantes encontradas, para a forma diferencial. Sendo assim, a equação do momento em sua forma diferencial será:

$$\begin{aligned}
\rho u A &= \text{const.} \\
d(\rho u A) &= 0
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Para obter a equação do momento em sua forma diferencial, considere o volume de controle infinitesimal esquematizado pela Figura 14:



**Figura 14 – Volume de controle incremental**  
**Fonte: Fundamentos da Aerodinâmica (2001)**

Sendo assim, a equação do momento, onde as integrais podem ser substituídas pelos seus integrandos para volume diferencial, será:

$$pA + \rho u^2 A + p dA = (p + dp)(A + dA) + (\rho + d\rho)(u + du)^2(A + dA) \quad (2.65)$$

Os termos  $dp dA$ ,  $d\rho(du)^2$  da equação (2.65) são muito pequenos, então, podem ser desprezados, resultando em:

$$Adp + Au^2 d\rho + \rho u^2 dA + 2\rho u A du = 0 \quad (2.66)$$

Expandindo a equação da continuidade (2.64) e multiplicando por  $u$ :

$$\rho u^2 dA + \rho u A du + Au^2 d\rho = 0 \quad (2.67)$$

Por fim, subtraindo a equação (2.67) por (2.66), é possível obter:

$$dp = -\rho u du \quad (2.68)$$

No qual a equação (2.68) também é conhecida como equação de Euler (FOX, 2006). Além disso, para a equação da energia, basta utilizar a equação (2.63) e aplicar o diferencial:

$$h + \frac{u^2}{2} = \text{const.}$$

$$dh + u du = 0 \quad (2.69)$$

Tendo em mãos as equações governantes na forma diferencial, para um escoamento quase unidimensional, é necessário ainda desenvolver mais alguns estudos sobre algumas características físicas que esse fluxo possui. Tal característica física pode ser obtida, ao rearranjar a equação da continuidade (2.64) para:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (2.70)$$

Sendo assim, com o intuito de obter uma relação entre a mudança de velocidade  $du$  com a mudança de área  $dA$  e, conseqüentemente, para eliminar  $d\rho/\rho$ , na equação anterior, considere a equação do momento (2.68):

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -u du \quad (2.71)$$

Tendo em mente também que esse escoamento é invíscido e adiabático, porém, para um dado tempo, não está sendo assumido ondas de choque no fluxo, fará com que, conseqüentemente, o escoamento seja isentrópico. Isso implica em que  $dp/d\rho = (dp/d\rho)_s$ , lembrando que  $a = \sqrt{(dp/d\rho)_s}$ , logo, a equação (2.71), resultará:

$$a^2 \frac{d\rho}{\rho} = -u du$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{u du}{a^2} = -\frac{u^2 du}{a^2 u} = -M^2 \frac{du}{u} \quad (2.72)$$

Voltando para a equação (2.70) e substituindo o termo encontrado pela equação (2.72), teremos:

$$-M^2 \frac{du}{u} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0$$

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{du}{u} \quad (2.73)$$

Por fim, a equação (2.73) desejada, é denominada de relação área-velocidade, na qual, dependendo do seu número de Mach, o aumento ou decréscimo de velocidade em relação ao aumento ou decréscimo de área. Ou seja, segundo o autor John D. Anderson (2001), teremos os seguintes casos:

- **Para  $0 \leq M < 1$  (escoamento subsônico):** A quantidade entre parênteses da equação (2.73) será negativa, fazendo com que, conseqüentemente, o aumento de velocidade ( $du$  positivo) esteja relacionado com o decréscimo de área ( $dA$  negativo) e vice-versa. Claramente, para um escoamento subsônico compressível, para aumentar a velocidade, devemos ter um duto convergente e, para diminuir a velocidade, devemos ter um duto divergente. Sendo assim, os resultados são apresentados assim como demonstra a Figura 15;
- **Para  $M > 1$  (escoamento supersônico):** A quantidade nos parênteses será positiva, fazendo com que, conseqüentemente, ao ocorrer aumento de velocidade ( $du$  positivo), estará associado com o aumento de área ( $dA$  positivo) e vice-versa. Para gerar aumento de velocidade, será necessário um duto divergente, enquanto para diminuir a velocidade, será necessário um duto convergente. Sendo assim, são relações opostas ao escoamento subsônico e também esta demonstrado pela Figura 15;
- **Para  $M = 1$  (escoamento sônico):** A equação mostrará que  $dA = 0$  mesmo que haja um  $du$  finito, correspondente ao local máximo ou mínimo em uma área de distribuição.

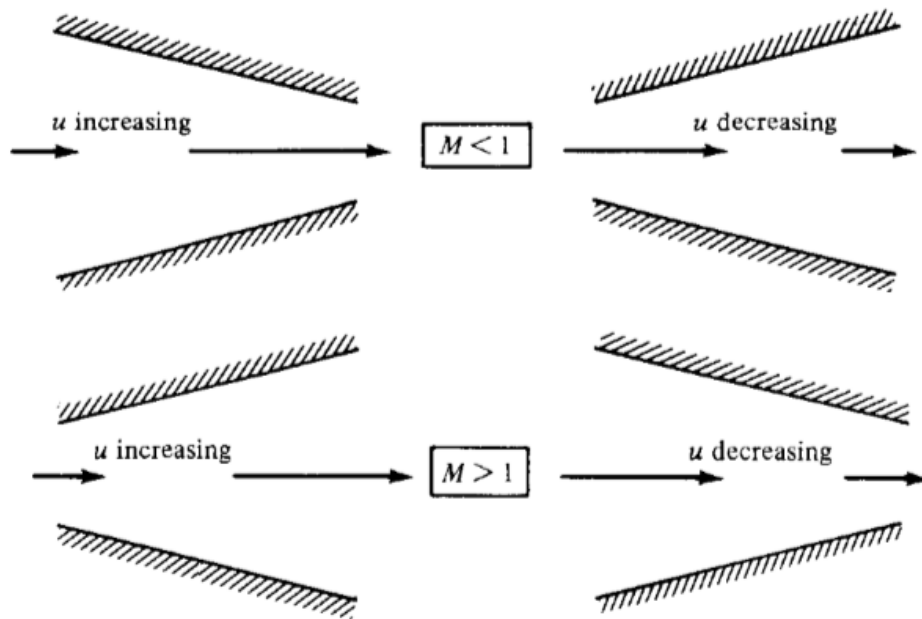


Figura 15 – Escoamento compressível em dutos convergentes e divergentes.  
Fonte: Fundamentos da Aerodinâmica (2001)

### 2.6.2 Bocais:

Os resultados encontrados da relação de área-velocidade, demonstra que se quisermos utilizar um gás em repouso e expandir isentropicamente para uma velocidade supersônica, primeiro devemos acelerar o gás subsonicamente por um duto convergente. Todavia, quando a condição sônica for alcançada, devemos expandir o gás para uma velocidade supersônica pelo duto divergente. Conseqüentemente, quem é designado para efetuar tal função é o bocal, na qual sua saída é de um duto convergente – divergente (WHITE, 2011).

Além disso, para estudar o escoamento compressível através de um bocal, devemos encontrar qual equação apresenta a relação de número de Mach com a razão de áreas do duto e da garganta. Sendo assim, considere o duto mostrado pela Figura 16, assumindo que escoamento sônico ocorre na garganta, onde a área é  $A^*$ , o número de Mach é denotado por  $M^*$  e a velocidade na garganta de  $u^*$ . Como o escoamento é sônico na garganta, o número de Mach característico e a velocidade serão  $M^* = 1$  e  $u^* = a^*$ , respectivamente. Sobre qualquer outra seção do duto, a área, o número de Mach e a velocidade são denotadas por  $A$ ,  $M$  e  $u$ .

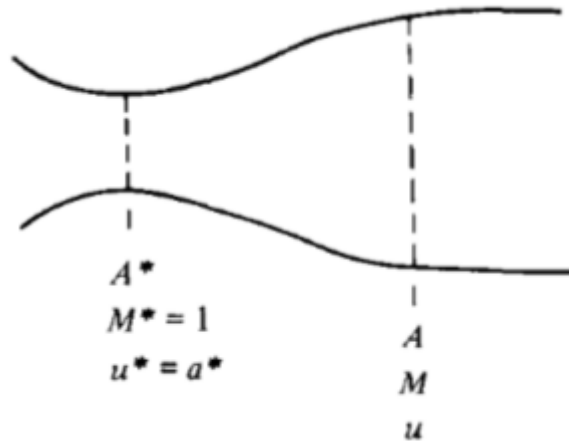


Figura 16 – Geometria para derivar a relação de número de área-Mach.  
Fonte: Fundamentos da Aerodinâmica (2001)

Relembrando a equação da continuidade desenvolvida para quase unidimensional, onde está sendo analisado entre  $A$  e  $A^*$ , onde  $u^* = a^*$ , será obtido:

$$\rho^* u^* A^* = \rho u A \quad (2.74)$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^* a^*}{\rho u} = \frac{\rho^* \rho_0 a^*}{\rho_0 \rho u} \quad (2.75)$$

Onde  $\rho_0$  é a densidade de estagnação e é constante ao longo do fluxo isentrópico. Sendo assim, a razão de densidade característica por densidade de estagnação, a razão da densidade de estagnação pela densidade e, por fim, relembrando a equação (2.37), teremos as três equações seguintes:

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{1/(\gamma-1)} \quad (2.76)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{1/(\gamma-1)} \quad (2.77)$$

$$\frac{u}{a^*} = M^{*2} = \frac{[(\gamma + 1)/2] M^2}{1 + [(\gamma - 1)/2] M^2} \quad (2.78)$$

Sendo assim, utilizando as equações (2.76), (2.77) e (2.78) e substituindo na equação (2.75) elevada ao quadrado, teremos:

$$\left( \frac{A}{A^*} \right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \quad (2.79)$$

Essa equação é importante por ser definida como a relação de área–número de Mach e dita que Mach de qualquer local do duto, está em função da razão das áreas de duto e garganta. Além disso, em qual valor  $M$  tem em determinado caso, depende das pressões de entrada e saída do duto e, o resultado da razão das áreas em função de  $M$ , são valores tabelados assim como mostra a Tabela 1 (ANDERSON, 2001).

**Tabela 1 – Propriedades de escoamento isentrópico. Apêndice A do livro**

<b>M</b>	$\frac{p_0}{p}$	$\frac{\rho_0}{\rho}$	$\frac{T_0}{T}$	$\frac{A}{A^*}$
0,9400 + 00	0,1767 + 01	0,1502 + 01	0,1177 + 01	0,1003 + 01
0,9600 + 00	0,1808 + 01	0,1526 + 01	0,1184 + 01	0,1001 + 01
0,9800 + 00	0,1850 + 01	0,1552 + 01	0,1192 + 01	0,1000 + 01
0,1000 + 01	0,1893 + 01	0,1577 + 01	0,1200 + 01	0,1000 + 01
0,1020 + 01	0,1938 + 01	0,1604 + 01	0,1208 + 01	0,1000 + 01
0,1040 + 01	0,1985 + 01	0,1632 + 01	0,1216 + 01	0,1001 + 01
0,1060 + 01	0,2033 + 01	0,1660 + 01	0,1225 + 01	0,1003 + 01

**Fonte: Fundamentos da Aerodinâmica (2001)**

Ao analisar a Tabela 1, nota-se que para escoamento subsônico, os valores de  $M$  aumentam e as razões de áreas decrescem, ou seja, o duto é convergente. Similarmente, se o escoamento for sônico  $M = 1$ ,  $A / A^*$  e se o escoamento for supersônico, ambos os valores de  $M$  e da razão de áreas aumentam, ou seja, o duto é divergente (ANDERSON, 2001).

## 2.7 ESCOAMENTO HIPERSÔNICO

Desde os primórdios da história da aviação, sempre tem se direcionado para a filosofia “mais rápido e mais alto”. Com esse intuito, o progresso no ramo ocorreu de forma exponencial até o ponto de para missões de voo espacial tripulado. A maior altitude e velocidade registradas em voo tripulado, foi até a lua e 36 vezes a velocidade do som, registrado pela cápsula Apollo lunar. Porém, a maioria dos voos da Apollo ocorreram no espaço, fora da atmosfera terrestre, além disso, um dos aspectos mais críticos era a reentrada dentro da atmosfera, após completar a missão lunar. Devido

à alta velocidade de voo, faz com que ocorra um fenômeno aerodinâmico, denominada aerodinâmica hipersônica. Outra aplicação hipersônica que também ocorre, é sobre motor de um ramjet hipersônico, ou scramjet, ou um transporte hipersônico, a tecnologia básica sobre a qual está sendo estudada pela NASA (ANDERSON, 2001).

### 2.7.1 Aspectos Qualitativos de Escoamento Hipersônico:

Considere a metade do ângulo de cunha sendo  $15^\circ$  voando com um  $M_\infty = 36$ . Pelo gráfico da Figura 11, anteriormente, é possível ver que o ângulo de choque oblíquo será  $18^\circ$ , ou seja, essa onda é muito próxima a superfície do corpo. A camada de choque formada entre a onda de choque e o corpo é bem fina, sendo uma das características de escoamento hipersônico (ANDERSON, 2001). Uma consequência prática dessa fina camada de choque, é que a maior interação frequentemente ocorre entre o escoamento invíscido atrás do choque e a camada limite de viscosidade na superfície. Ou seja, veículos hipersônicos geralmente voam em altitudes onde a densidade e, conseqüentemente, o número de Reynolds, é baixo, portanto as camadas limite são espessas (ANDERSON, 2001).

Quanto maior o número de Mach, mais além contribui para a camada limite ser mais espessa, de forma que, pela Figura 17, nos apresenta uma camada de choque inteiramente viscosa e a forma da onda de choque e pressão de superfície são afetadas pelos efeitos viscosos.

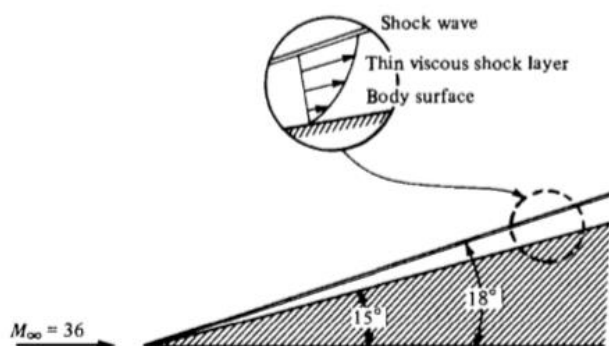


Figura 17 – Camada de choque fina e viscosa de um escoamento hipersônico.  
Fonte: Fundamentos da Aerodinâmica (2001)



Esse fenômeno é conhecido como fenômeno de interação viscosa e é uma das maiores áreas de pesquisa moderna de aerodinâmica hipersônica. Outra área frequentemente dominante em aspectos de escoamento hipersônico é a análise de altas temperaturas na onda de choque, junto com o aquecimento aerodinâmico do veículo (ANDERSON, 2001). Por exemplo, considere um corpo com a ponta arredondada reentrando na atmosfera com Mach 36, como demonstra a Figura 18.

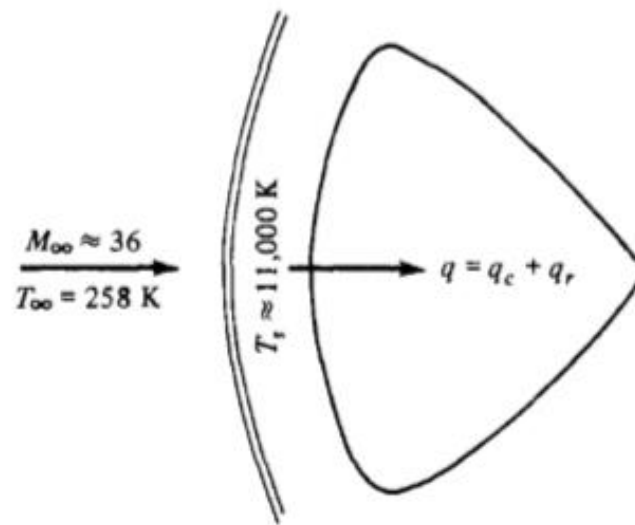


Figura 18 – Alta temperatura em uma camada de choque.  
Fonte: Fundamentos da Aerodinâmica (2001)

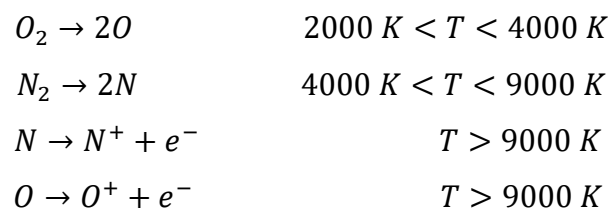
Pela Tabela 2 representada abaixo, é possível encontrar que a razão de temperatura estática em relação a Mach  $M_\infty = 36$ , denotada por  $T_s / T_\infty$ , é 252,9. Sendo assim, para uma altitude padrão de 59 km e  $T_\infty = 258 K$ , tem-se que  $T_s = 65248 K$ , que é uma temperatura muito alta, sendo seis vezes mais quente que a superfície do sol. Porém, isso na realidade é um valor equivocados, porque os dados da Tabela 2 só é conveniente para gases perfeitos com  $\gamma = 1,4$ . Porém, como o corpo sofre ação de temperaturas bem altas, o gás começará a sofrer reações químicas e  $\gamma$  não será mais igual a 1,4 já que não será constante (ANDERSON, 2001).

**Tabela 2 – Propriedades de onda de choque normal. Apêndice B do livro**

<b>M</b>	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{\rho_2}{\rho_1}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{p_{02}}{p_{01}}$	$\frac{p_{02}}{p_1}$	<b>M<sub>2</sub></b>
0,3400+ 02	0,1348+ 04	0,5974+ 01	0,2257+ 03	0,7804– 05	0,1489+ 04	0,3788+ 00
0,3600+ 02	0,1512+ 04	0,5977+ 01	0,2529+ 03	0,5874– 05	0,1669+ 04	0,3786+ 00
0,3800+ 02	0,1684+ 04	0,5979+ 01	0,2817+ 03	0,4488 - 05	0,1860+ 04	0,3786+ 00

Fonte: Fundamentos da Aerodinâmica (2001)

Sendo assim, o valor de  $T_s$  encontrado anteriormente, se fosse levado em conta às reações químicas, teria um valor aproximado de  $T_s \approx 11000$  K, implicando também em alta temperatura, porém, menor que a anterior. Examinando com maior detalhe os efeitos de altas temperaturas, se considerar o ar com  $p = 1$  atm e  $T = 288$  K (nível do mar), a composição química é de 20% O<sub>2</sub> e de 80% N<sub>2</sub> pelo volume. Entretanto, se a temperatura aumentar para 2000 K, as moléculas de oxigênio começarão a se dissociar, através de reações endotérmicas. Se a temperatura passar para 4000 K, boa parte das moléculas de oxigênio terão se dissociados enquanto as moléculas de nitrogênio também começarão a se dissociar (mas não completamente) (ANDERSON, 2001). Ao passar pela temperatura de 9000 K, boa parte das moléculas de nitrogênio já terão se dissociados e assim uma ionização começará a ocorrer, assim como está esquematizado abaixo:



Conseqüentemente, a camada de choque na região do nariz do corpo é parcialmente plasma ionizado, consistindo de átomos de N e O, de íons N<sup>+</sup> e O<sup>+</sup> e elétrons e<sup>-</sup>. Por fim, as equações que haviam sido desenvolvidas anteriormente não podem ser aplicadas da mesma forma para o escoamento hipersônico, visto que elas dependem da constante  $\gamma = 1,4$  (ANDERSON, 2001).

### 2.7.2 Relações de Onda de Choque Hipersônica:

Assim como foi discutido em onda de choque normal e oblíqua, é necessário definir as razões de pressão, densidade e temperatura. Quando se leva em consideração as relações para todos os números de Mach, maior do que a unidade supersônica ou hipersônica, algumas aproximações e simplificações devem ser tomadas. Sendo assim, algumas limitações ocorrerão para números de Mach exorbitantes e essas limitações, são chamadas de relações de choque hipersônico (ANDERSON, 2001).

Portanto, relembando pela seção de choque oblíquo, as exatas equações (2.54), (2.55) e (2.56), terão termos desconsiderados devido ao grande valor que o número de Mach poderá assumir. Por fim, lembrando que  $M_{n,1} = M_1 \sin \beta$ , as equações serão divididas da seguinte forma, com suas respectivas limitações:

- **Equações exatas:**

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta}{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta} \quad (2.82)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_1^2 \sin^2 \beta - 1) \quad (2.83)$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right) \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_1^2 \sin^2 \beta - 1)\right] \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta} \quad (2.84)$$

$$\tan \theta = 2 \cot \beta \left[ \frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2(\gamma + \cos 2\beta) + 2} \right] \quad (2.85)$$

- **Equações quando  $M_1 \rightarrow \infty$ :**

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)} \quad (2.86)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 \sin^2 \beta \quad (2.87)$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right) \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) = \frac{2\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} M_1^2 \sin^2 \beta \quad (2.88)$$

Para a relação  $\theta - \beta - M$ , no limite hipersônico, tem-se que  $\theta$  e  $\beta$  são pequenos, portanto, pode ser usado a usual aproximação para ângulos pequenos:

$$\begin{aligned}\sin \beta &= \beta \\ \cos 2\beta &= 1 \\ \tan \theta &= \sin \theta = \theta\end{aligned}$$

Sendo assim, resultará em:

$$\theta = \frac{2}{\beta} \left[ \frac{M_1^2 \beta^2 - 1}{M_1^2 (\gamma + 1) + 2} \right] \quad (2.89)$$

Aplicando o número de Mach alto, resultará:

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{2}{\beta} \left[ \frac{M_1^2 \beta^2}{M_1^2 (\gamma + 1)} \right] \\ \frac{\beta}{\theta} &= \frac{\gamma + 1}{2}\end{aligned} \quad (2.90)$$

Considerando  $\gamma = 1,4$ , o resultado final será:

$$\beta = 1,2\theta \quad (2.91)$$

Afinal, em uma relação de onda de choque hipersônica, nota-se que para uma dada razão de pressão, se o número de Mach tender ao infinito, essa razão se tornará infinitamente grande (ANDERSON, 2001). Por outro lado, o coeficiente de pressão atrás do choque, é um valor constante para altos valores de número de Mach. Ou seja, o escoamento hipersônico não depende do Número de Mach, contanto que seja suficientemente alto, implicando em uma independência ao mesmo (ANDERSON, 2001).

### 3 METODOLOGIA

#### 3.1 HIPÓTESES INICIAIS

Antes de se efetuar a modelagem, algumas hipóteses básicas devem ser consideradas, sendo elas: estar em regime permanente, ausência de força de campo, de trabalho do eixo, de forças viscosas e de dissociação molecular, o sistema ser adiabático e equilíbrio térmico entre as espécies químicas.

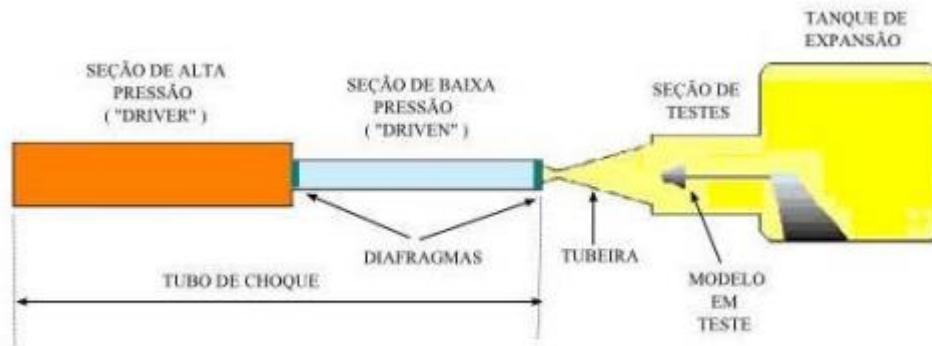
Por ser um escoamento hipersônico, reações químicas irão ocorrer, enquanto as concentrações de espécies químicas variam ao longo desse escoamento. Se ocorrer um escoamento em não-equilíbrio, deve-se apresentar uma variação na entropia ao longo desse escoamento.

#### 3.2 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

Como exemplo de análise do escoamento do ar, em regime de alta velocidade, em uma tubeira convergente-divergente, o código NOZ3T (Three Temperature Nozzle Flow Code) é uma ferramenta capaz de efetuar tais simulações nessas características. Além disso, o NOZ3T foi desenvolvido pelo Dr. Chul Park da NASA Ames Research Center, na qual utiliza das temperaturas de rotação-translação, vibração e eletrônica. Para isso, a tubeira é acoplada a um tubo de choque na extremidade do reservatório de baixa pressão. A presença desta tubeira permite que o gás (do reservatório de baixa pressão) pressurizado e aquecido pela onda de choque incidente (no tubo de choque) seja acelerado e expelido pela seção de testes, e assim, seja denominado túnel de choque hipersônico (SILVA, 2009).

Os túneis de choque, também conhecidos como túneis de vento hipersônico, são equipamentos onde geralmente são acopladas tais tubeiras. O túnel de choque possui um tubo de choque, que é um tubo fechado nas extremidades e separado por um diafragma. Nessas seções do tubo, coloca-se um gás a alta pressão (seção do “driver”) e na outra o sistema que se deseja estudar, onde a pressão é bem mais baixa (região do “driven”) (DOS SANTOS, 2008). Sendo assim, um protótipo, ao ser ensaiado dentro do tubo de choque, passará pelo bocal convergente-divergente para

que seja possível aumentar a sua velocidade e assim adquirir os dados dos testes ao romper os diafragmas. Um exemplo disso, é a figura abaixo onde demonstra o que compõe tal túnel de choque hipersônico:



**Figura 19 – Seções de um túnel de choque hipersônico.**  
**Fonte: A. M. dos Santos (2008)**

O Laboratório de Aerodinâmica e Hipersônica Prof. Henry T. Nagamatsu possui, atualmente, três túneis de choque hipersônico, Figura 20, com capacidade de reproduzir, com boa proximidade, o ambiente encontrado em voos hipersônicos, considerando velocidade, composição química, temperatura e entalpia do escoamento, com tempo de escoamento hipersônico permanente (tempo de teste), variando de 0,1 a 10 ms (milésimos de segundo) (SILVA, 2009).



**Figura 20 – Túnel de choque hipersônico T3 do Laboratório de Aerodinâmica e Hipersônica.**

**Fonte: Débora da Silva (2009)**

### 3.2.1 Montagem do Código Computacional:

Como a garganta da tubeira é o ponto onde ocorre a mudança de convergência para divergência e vice-versa, para a confecção do código computacional, alguns parâmetros deverão ser definidos de antemão. Visto que o código trabalha com equações de conservação unidimensionais, a concepção de montagem é similar ao código NOZ3T. Sua modelagem através do método de volumes finitos, deverá utilizar de células para definir o fator de estiramento  $x$  e  $y$ . Sendo assim, os parâmetros iniciais que devem ser definidos são: tamanho da célula em  $x$  e  $y$ , partindo do centro ou da parede da garganta; comprimento total em  $x$  (antes e depois da garganta); o número de células; as razões de área; largura da garganta em  $y$ ; raios de entrada e saída do bocal; pontos de tangência antes e depois da garganta.

Tais células, ou pontos, serão importantes para definir a malha na qual o escoamento está ocorrendo no bocal. Por exemplo, em um escoamento hipersônico que possua  $N$  pontos de grade, em cada uma dessas grades deverá ser calculada a conservação da massa, momentum e energia com suas respectivas derivadas parciais substituídas pelas expressões de diferenças finitas. Uma análise quase unidimensional não poderá ser aplicada para esse caso, visto que a importância desse equacionamento seria apenas para facilidade de entendimento da base teórica. Ou seja, um escoamento unidimensional é simples, porém possui desvantagens como: falta de detalhes para um escoamento real tridimensional e não dá informação sobre o contorno da parede adequado de tais bocais. Portanto, a solução mais adequada é pela utilização de método dos volumes finitos ou pelo método de características.

Para que o computador suporte utilizar um certo nível de refinamento para desenvolvimento do programa, as condições de contorno serão propriedades que devem ser levadas em conta, assim como as instabilidades numéricas.

As células fantasmas, nesse caso, permitem armazenar os valores para as condições de contorno de cada bloco, de forma a evitar que os operadores diferenciais sejam redefinidos nas suas formas (DE LIMA, 2012). Dessa forma, o mesmo estêncil usado no interior das células de uma malha pode também ser usado nas células localizadas nas bordas das malhas. Por isso, devido aos parâmetros iniciais, o número de células fantasmas consideradas, dependem do tamanho do estêncil necessário para a discretização do operador diferencial, sendo necessária uma camada de

células fantasmas ao redor de cada malha. Sendo assim, para o programa, é necessário definir carreiras de células fantasmas na entrada e saída do bocal, acima da linha de centro e abaixo da linha de parede do bocal.

Tanto o método das linhas características quanto o método dos volumes finitos, representam um campo de fluxo contínuo por uma série de pontos de grades distintas no espaço. Como foi dito anteriormente, em cada ponto da grade deverá ser calculado as propriedades do escoamento utilizando as equações governantes. Sendo assim, as figuras 21 e 22 demonstram um exemplo de análise de pontos para ambos os métodos:

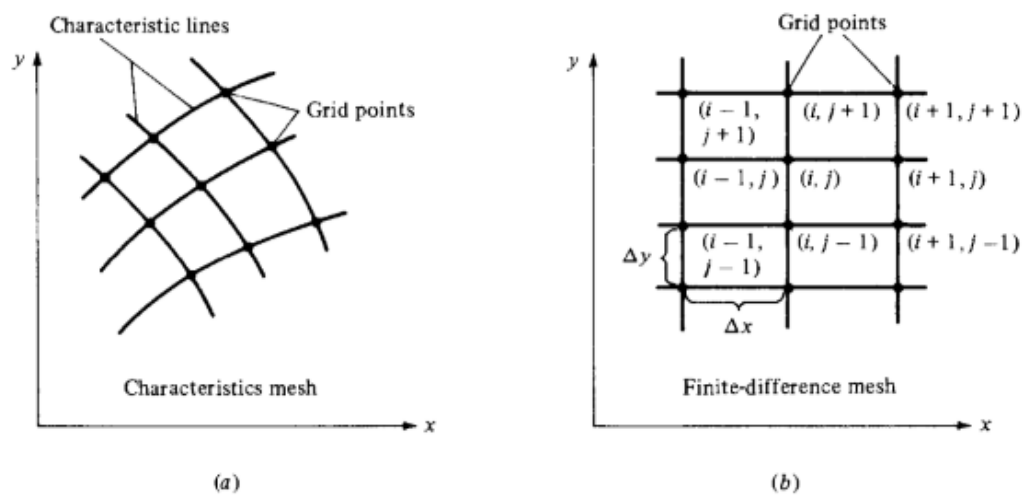


Figura 21 – Análise de pontos de malha para linhas características (a) e diferenças finitas (b).  
Fonte: Fundamentos da Aerodinâmica (2001)



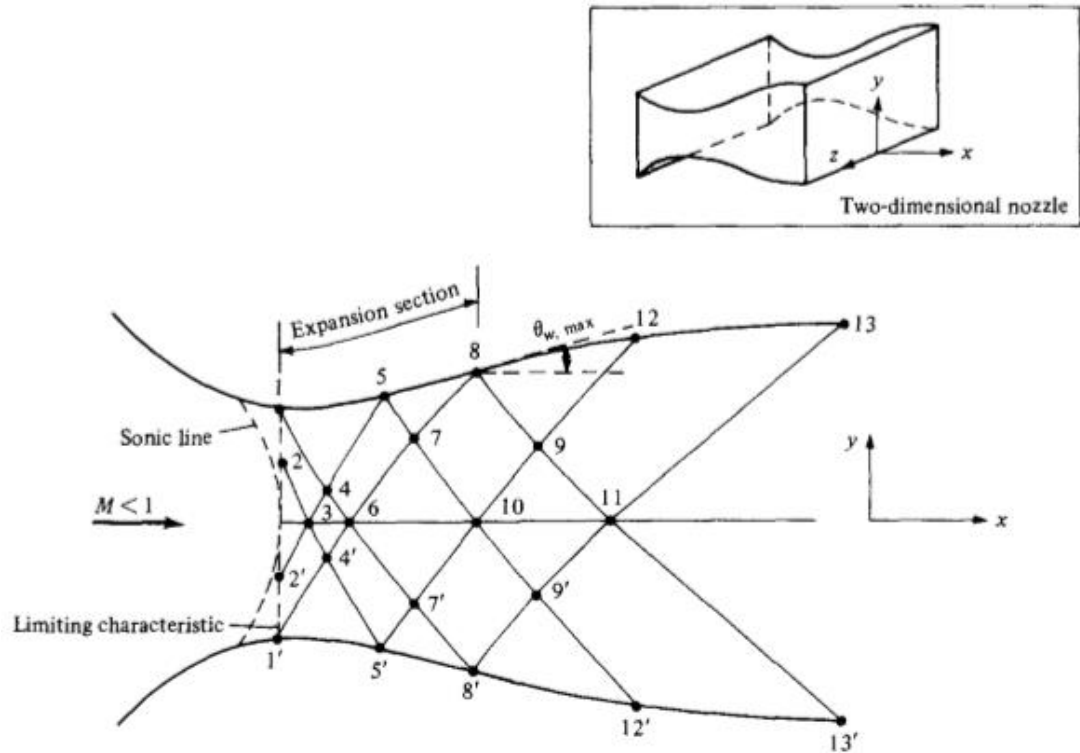


Figura 22 – Exemplo de design de bocal utilizando o método das linhas características.  
 Fonte: Fundamentos da Aerodinâmica (2001)

Visto que o código modelado no trabalho será desenvolvido utilizando o método de diferenças finitas, primeiro, será necessário o uso de representações de diferenças finitas para derivadas parciais usando séries de Taylor, como, por exemplo:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \quad (\text{diferença posterior}) \quad (2.92a)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (\text{diferença anterior}) \quad (2.92b)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (\text{diferença central}) \quad (2.92c)$$

Sendo que a diferença anterior e posterior, se referem a entrada e saída do bocal, respectivamente.

## 4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Assim que foi realizada a montagem do código, os resultados computacionais obtidos delimitaram linhas de escoamento na qual, através delas, é possível analisar a geometria que a tubeira tomará. Além disso, os valores dos parâmetros iniciais escolhidos para a simulação dessa tubeira convergente-divergente é de: comprimento total de 0,08 u e de largura de garganta de 0,01 u, razão em  $y$  de 0,98, com 21 número de pontos em  $y$  e com 38 número de pontos em  $x$ . Para tal modelagem, foi escolhida uma malha espessa, ou seja, detém de 10 células em  $y$  e 20 células em  $x$ .

Portanto, a malha desenvolvida e calculada para cada ponto resultará na geometria do bocal, propriamente dita. Porém, o que denotará as paredes limitantes da tubeira, será a utilização das células fantasmas para colaborar na modelagem desse formato. Como queremos utilizar a tubeira para acelerar o escoamento até um número de Mach desejado, deve-se reescrever e analisar a equação da relação de área – velocidade. Basta lembrar pela seção 2.6.1 do trabalho, que a relação de área é de suma importância, assim como mostrou a equação 2.73 que será reescrita abaixo:

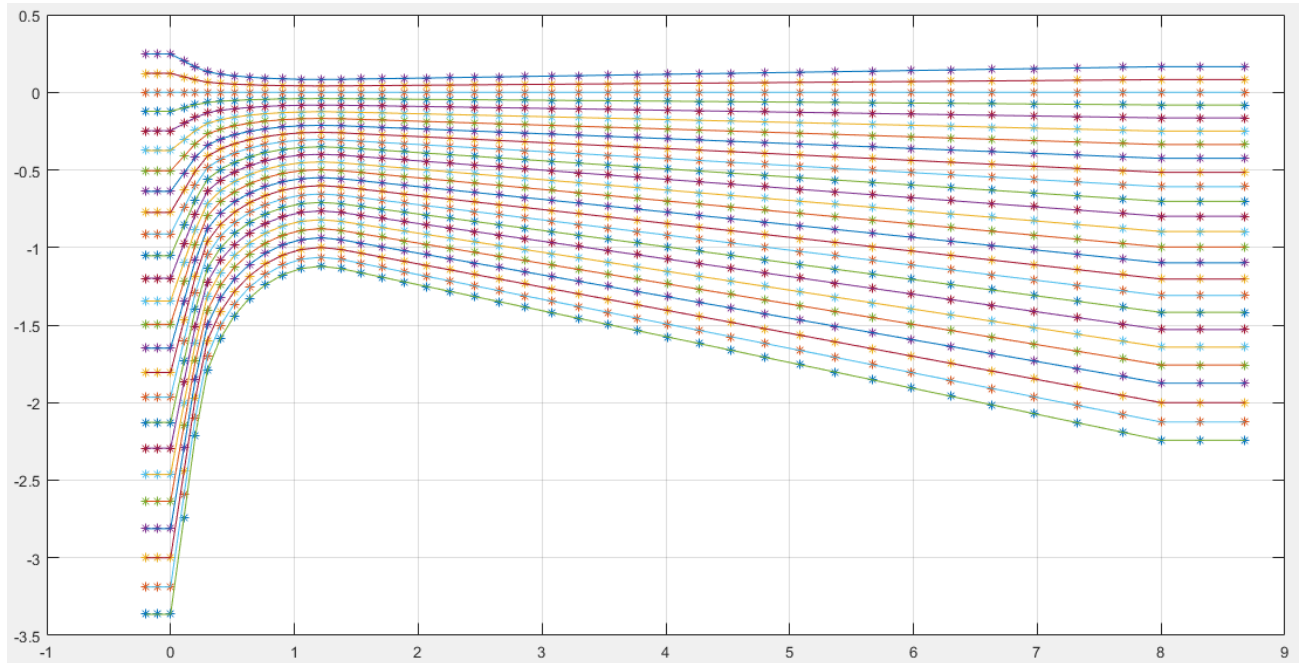
$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{du}{u} \quad (2.73)$$

Ao desenvolvermos a equação 2.73 para o bocal, tem-se a relação número de Mach-velocidade denominada por:

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \quad (2.79)$$

Por consequência, pelos dados iniciais tomados acima e pela a equação 2.79, definiu-se que é possível analisar o Mach de qualquer local do duto, em função da razão das áreas de duto e da garganta, além do formato que a tubeira deve possuir para realizar esse escoamento desejado.

Por fim, a modelagem matemática através do método das diferenças finitas e demais operações, foram realizadas pelo MATLAB, na qual o gráfico resultante, é definido abaixo pela Figura 23:



**Figura 23 – Gráfico resultante da malha modelada em x e y.**  
**Fonte: Autoria própria.**

## 5 CONCLUSÃO E PROPOSTA DE TRABALHOS FUTUROS

O presente trabalho teve como motivação o problema de engenharia, que envolve a complexidade de se realizar simulações de voo a partir do instante que entra em escoamento hipersônico. Assim como foi visto, o escoamento hipersônico é de difícil simulação, mesmo através da utilização de código CFD, devido as instabilidades decorrentes, como as fortes interações de temperaturas entre o veículo e a onda de choque, ou as forças viscosas presentes. Tal aumento de temperatura na superfície do corpo afeta a atmosfera na qual o corpo está inserido, porque a partir de certo momento, reações químicas ocorrerão devido a dissociação de gases. Sendo assim, um veículo espacial como o 14 – X, encontrará problemas caso não seja possível prever o que ocorrerá na superfície de seu material, devido ao aumento de temperatura. Para poder prever tais problemas, seria necessário realizar testes, porém, esses testes são caros. Conseqüentemente, a simulação computacional foi a solução mais econômica para tal problema.

A temática do trabalho consistiu em definir a base teórica necessária para realizar a simulação computacional de um escoamento hipersônico através de uma tubeira. A teoria envolvida desde a análise em ondas de choque, até relações entre o número de Mach e a razão de área, para conseguir definir o aumento de velocidade empregada no problema. Com isso, foi possível também determinar a geometria do bocal, conforme os parâmetros iniciais pré-definidos. Ao gerar o gráfico da seção anterior e analisar os resultados obtidos, é possível concluir que os objetivos do trabalho foram atingidos.

Códigos bases importantes, como o código NOZ3T utilizado para realizar análises de escoamentos hipersônicos, foram de grande importância para o desenvolvimento do código computacional para cálculo de fator de estiramento. Portanto, o código gerado vem a se tornar uma boa ferramenta para ser utilizada futuramente, caso queira realizar testes no escoamento hipersônico. Além disso, uma proposta de trabalho futuro é a análise de um protótipo veicular, nesse regime de escoamento. Como foi citado anteriormente, ao entrar em regime hipersônico, o veículo sofre uma maior interação de temperatura e isso ocorre devido a onda de choque ficar cada vez mais próxima a sua superfície. Sendo assim, uma simulação

computacional, seguida de experimento laboratorial, seria uma proposta ideal para analisar tal comportamento e trazer possíveis soluções devido a essa grande interação.

Para o experimento laboratorial, o túnel de choque hipersônico é a ferramenta ideal para poder realizar os testes e analisar os resultados. Um exemplo disso é o túnel de choque do Laboratório de Aerodinâmica e Hipersônica do Instituto de Estudos Avançados (IEAv).

## REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6023**: informação e documentação: referências: elaboração. Rio de Janeiro, 2002.

ANDERSON, John D. **Fundamentals of aerodynamics**. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 2001.

FOX, Robert W.; MCDONALD, Alan T.; PRITCHARD, Philip J. **Introdução à mecânica dos fluidos**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

SABERSKY, Rolf H.; ACOSTA, Allan J.; HAUPTMANN, Edward G.; GATES, E. M. **Fluid flow: A first course in fluid mechanics** 4. ed. New York: PEARSON, 1999.

WHITE, Frank M. **Fluid mechanics**. 7 ed. ed. New York: McGraw-Hill, 2011.

ÇENGEL, Yunus A.; CIMBALA, John M. **Fluid mechanics: Fundamentals and applications**. 3 ed. New York: McGraw-Hill, 2014.

ÇENGEL, Yunus A.; BOLES, Michael A. **Termodinâmica**. 7 ed. New York: McGraw-Hill, 2013.

MORAN, Michael J.; SHAPIRO Howard N. **Princípios da termodinâmica para engenharia**. 6 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

NUSSENVZEIG, Moysés H. **Curso de física básica: Fluidos, oscilações e ondas de calor**. 3 ed. São Paulo: Blucher, 1981.

COSTA, Felipe Jean. **Projeto do veículo hipersônico aeroespacial 14 – X para voo atmosférico a 30 km de altitude com velocidade correspondente a número de Mach 10**. 2014. 13 f. Palestra – Instituto de Estudos Avançados. São José dos Campos, 2014.

CASTRO, Breno Moura. **Aerodinâmica em regime transônico e supersônico**. 2009. 25 f. Palestra – Instituto de Estudos Avançados. São José dos Campos, 2009.

SANTOS, Luiz Carlos de Castro. **Métodos numéricos para escoamentos em alta velocidade**. 1 ed. Rio de Janeiro. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1999.

MAICKE, Brian A. MAJDALANI, Joseph. **Evaluation of CFD codes for hypersonic flow modeling**. 2010. 12 f. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2010.

SILVA, Débora de Oliveira. **Análise de escoamento hipersônico em tuberias do tipo convergente-divergente em não equilíbrio químico**. 110 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Combustão e Propulsão, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. São José dos Campos, 2009.

LIU, S. K. **Numerical simulation of hypersonic aerodynamics and computational needs for design of an aerospace plane**. 1992. 156 f. United States of Air force. Santa Mônica, CA, 1992.

DE LIMA, Rafael Sene. **Desenvolvimento e implementação de malhas adaptativas bloco-estruturadas para computação paralela em mecânica dos fluidos**. 2012. 115 f. Dissertação (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia. Uberlândia, 2012

DOS SANTOS, A. M. **A pesquisa e desenvolvimento em hipersônica no IEAv**. 2008. 6 f. Instituto de Estudos Avançados, Divisão de Aerodinâmica e Hipersônica. São José dos Campos, 2008.