UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CÂMPUS CORNÉLIO PROCÓPIO
DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ELMER LÉVANO HUAMACCTO

ESTABILIZAÇÃO DE UM SISTEMA COM HISTERESE E SUJEITO A FALHAS ALEATÓRIAS

DISSERTAÇÃO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2014

ELMER LÉVANO HUAMACCTO

ESTABILIZAÇÃO DE UM SISTEMA COM HISTERESE E SUJEITO A FALHAS ALEATÓRIAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de ”Mestre em Engenharia Elétrica”.

Orientador: Prof. Dr. Alessandro do Nascimento Vargas

CORNÉLIO PROCÓPIO
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

L979 Lévano Huamaccto, Elmer
Estabilização de um sistema com histerese e sujeito a falhas aleatórias / Elmer Lévano Huamaccto. – 2014.
34 f. : il. ; 30 cm

Orientador: Alessandro do Nascimento Vargas.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica. Cornélio Procópio, 2014.
Referências: p. 33-34.

1. Sistemas estocásticos. 2. Histerese - Modelos matemáticos. 3. Controle automático. 4. Tolerância a falhas (Engenharia). 5. Engenharia elétrica – Dissertações. I. Vargas, Alessandro do Nascimento, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

CDD (22. ed.) 621.3

Biblioteca da UTFPR, Câmpus Cornélio Procópio

Minstério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Mestrado em Engenharia Elétrica

TERMO DE APROVAÇÃO

Estabilização de um sistema com histerese e sujeito a falhas aleatórias

por

Elmer Lévano Huamaccto

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de "Mestre em Engenharia Elétrica" e aprovado em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
Cornélio Procópio, 24/05/2014.

Paulo Rogerio Scalassara, Prof. Dr.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Alessandro do Nascimento Vargas, Prof. Dr.
Orientador

João Yoshiyuki Ishihara, Prof. Dr.
Universidade de Brasília

Emerson Ravazzi Pires da Silva, Prof. Dr.
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso do Programa"

RESUMO

LÉVANO HUAMACCTO, Elmer. **Estabilização de um sistema com histerese e sujeito a falhas aleatórias**. 2014. 38 f. Dissertação – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2014.

Este trabalho apresenta condições suficientes para garantir a estabilidade em probabilidade para um sistema com histereses, modelado pelas equações de Bouc-Wen, mediante um controlador proporcional integral sujeito a falhas aleatórias. Quando ocorre uma falha de forma aleatória na linha transmissão, o sistema desliga o controlador e fica assim por um tempo. Após esse tempo, o sistema liga novamente o controle e permanece ativo até a próxima falha que ocorre de forma aleatória. As falhas ocorrem de acordo com o processo de distribuição de Poisson. Uma aplicação real considerando o controle de velocidade de um motor DC é apresentado.

Palavras-chave: Histerese 1. modelo de Bouc-Wen 2. sistemas estocásticos 3. controle sujeito a falhas 4.

ABSTRACT

LÉVANO HUAMACCTO, Elmer. **Stabilization of a system with hysteresis and subject to random failures.** 2014. 38 f. Dissertação – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2014.

This note presents conditions to assure the stability in probability for a hysteresis Bouc-Wen model controlled by a proportional-integral controller subject to random failures in the transmission line. When a failure happens, the controller turns off and remains off for a while. After that, the controller turns on and keeps working until the occurrence of the next failure. The failures occur according to a Poisson distributed process. A numerical example illustrates the result. A real application considering the speed control of a DC motor is presented.

Keywords: Hysteresis 1. Bouc-Wen model 2. stochastic system 3. control failure-prone 4.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

PI	Proporcional Integral
DF	Detector de falhas
$\lambda(\cdot)$	Parte real de um número complexo
$\|\|\cdot\|\|$	Norma de Frobenius
$\|\cdot\|$	Valor absoluto
$1_{\{\cdot\}}$	Função indicadora
exp(·)	Exponencial
$\delta_k(\cdot)$	Delta de Dirac
Pr	Probabilidade
λ	Taxa de ocorrência de Poisson
k_P	Constante proporcional
k_I	Constante integral
s_k	Momento de ligar o controlador
t_k	Momento de desligar o controlador
i.i.d	Independente e identicamente distribuída
E	Esperança matemática

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A histerese ocorre em diversos fenômenos em física, química, biologia, engenharia entre outros (TAKACS, 2000), (SPENCER, 1996). Na física, por exemplo, deparamos com ela na plasticidade, fricção, ferromagnetismo, ferroeletricidade, supercondutividade, adsorção e dessorção, e nos materiais com memória e muitos outros exemplos são conhecidos (BERTTONI; MAYERGOYZ, 2005).

Vamos a considerar um cenário simples, ou seja, um sistema deterministico, cujo estado é caracterizado por duas variáveis escalares x e $\Phi(x)$, no qual assumimos que dependem continuamente do tempo, que denotamos por t. Na Figura 1, esboçamos a evolução do par $(x(t),\Phi(x))$, gerada por o sinal de entrada $x(t)$ periódica e $\Phi(x)$ o sinal de saída do sistema. Se $x(t)$ aumenta de x_1 para x_2, o par $(x(t),\Phi(x))$ se move ao longo de uma curva monótona ABC; inversamente, se $x(t)$ diminui de x_2 para x_1, então, o par $(x(t),\Phi(x))$ se move ao longo de uma curva monótona diferente CDA.

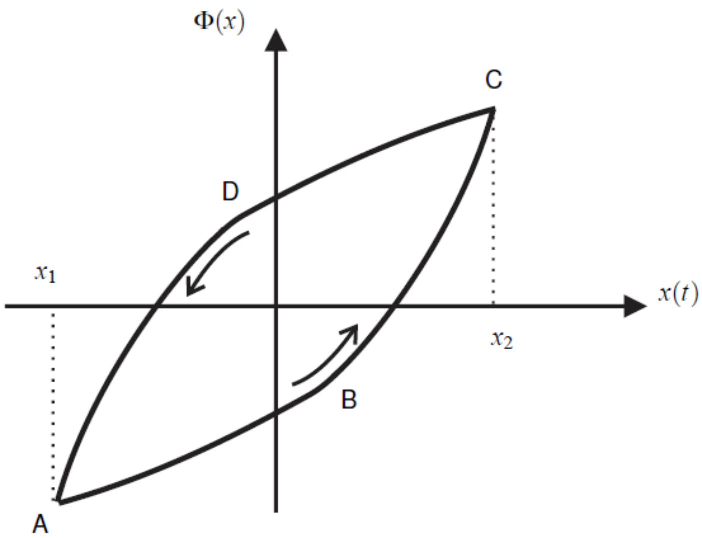

Figura 1 – Ciclo de histerese contínuo.
Fonte: Autoria própria.

Note que a curva mantem-se seguindo um movimiento de ida e volta, conhecido na literatura como ciclo de histerese. Neste trabalho estamos supondo, que em qualquer instante t, o estado do sistema é completamente caracterizado pelo par $(x(t),\Phi(x))$. (BERTTONI; MAYERGOYZ, 2005). Esta é uma restrição severa, e realmente falha em vários exemplos de interesse físico (BERTTONI; MAYERGOYZ, 2005, p. 8).

Muitos modelos matemáticos foram desenvolvidos para descrever a histerese de forma eficiente considerando o par (x,Φ), por exemplo, o modelo de Duhem (DUHEM, 1897) é usado para descrever a histerese em materiais elásticos, e o modelo Preisach

(PREISACH, 1935) é usado para descrever a histerese magnética. Um importante modelo foi proposto por Bouc em 1967 (BOUC, 1967) e generalizado por Wen em 1976 (WEN, 1976). O modelo de Bouc-Wen é popular pois é capaz de capturar, em forma analítica, uma sequência de ciclos de histerese existentes em uma série de sistemas não lineares (SPENCER, 1996).

Nos últimos anos o fenômeno da histerese tem sido intensamente pesquisado via modelos de Bouc-Wen (IKHOUANE; RODELLAR, 2005), (IKHOUANE; RODELLAR, 2006), (IKHOUANE, 2013), (ROCHDI et al., 2009), (IKHOUANE; GOMIS, 2008) e (IKHOUANE; MAÑOSA; RODELLAR, 2007). A monografia (IKHOUANE; RODELLAR, 2007) apresenta de uma maneira unificada e detalhada os resultados mais importantes com respeito ao modelo de Bouc-Wen. O trabalho desta dissertação usa o modelo de Bouc-Wen em associação ao controle, conforme a seguir.

A versão normalizada do modelo Bouc-Wen, dada em (IKHOUANE; RODELLAR, 2005) (veja também (IKHOUANE; GOMIS, 2008) e (IKHOUANE; RODELLAR, 2007)), relaciona a saída $\Phi_{BW}(x)$ e a entrada $x(t)$ de um sistema com histerese, da seguinte maneira:

$$\Phi_{BW}(x)(t) = k_x x(t) + k_w w(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{1}$$

e

$$\dot{w}(t) = \rho(\dot{x}(t) - \sigma|\dot{x}(t)||w(t)|^{n-1}w(t) - (\sigma-1)\dot{x}(t)|w(t)|^n), \tag{2}$$

com uma condição inicial $w(0)$. Os parâmetros $k_x > 0$, $k_w > 0$, $\rho > 0$, $\sigma \geq 1/2$ e $n \geq 1$, são escolhidos de modo que assegurem a estabilidade do sistema com histerese descrito pelo Equações (1) e (2) (IKHOUANE; RODELLAR, 2007). Nessas condições temos o seguinte resultado,

$$\sup_{t\geq 0}|w(t)| \leq \max\{|w(0)|, 1\}. \tag{3}$$

Para as aplicações, os sinais de entrada $x(t)$ e saída $\Phi_{BW}(x)(t)$ estão acessíveis para medições, e $w(t)$ é um estado não acessível à medição (ISMAIL; IKHOUANE; RODELLAR, 2009, p. 166).

Um controle para sistemas com histerese descrito pelo modelo de Bouc-Wen é de interesse, pois, pode-se compensar a histerese. O objetivo de controle é estabilizar o sistema na presença de histerese, cujos parâmetros devem ser ajustados de forma específica para garantir a estabilidade dos sinais em malha fechada. O controlador PI demonstrou ser adequado para o tratamento da histerese (IKHOUANE; RODELLAR, 2006). Uma limitação nos resultados obtidos em (IKHOUANE; RODELLAR, 2006), é a aplicação aos modelos determinísticos do modelo de Bouc-Wen. Em contraste, nossa abordagem considera o controlador PI sujeito a um detector de falhas aleatórias, que denotamos por DF , na linha de transmissão (veja Figura 2).

Neste contexto aleatório, nossa contribuição é obter condições suficientes para garantir a estabilidade em probabilidade do sistema com histerese descrito pelo modelo de Bouc-Wen com um controlador PI sujeito a um detector de falhas aleatórias na linha de transmissão.

As falhas na linha transmissão seguem um processo estocástico com uma distribuição de Poisson (veja Definição 1). Quando ocorre uma falha, o detector de falhas desliga o controlador PI e volta a liga lo depois de um certo tempo μ constante. Sob este comportamento aleatório, conseguimos provar a estabilidade em probabilidade para o sistema com histerese. Tal resultado é a principal contribuição deste trabalho.

Este trabalho, em uma parte, foi aceito na “Conference On Automatic Control-CONTROLO 2014”, Portugal, com o titulo “Control of a hysteresis model subject to random failures”.

1.1 OBJETIVOS

Listaremos os principais objetivos neste trabalho:

- Identificação dos parâmetros do modelo de Bouc-Wen.
- Os parâmetros de nosso projeto de um controle PI sujeito a falhas aleatórias na linha de transmissão para um sistema com histerese, foram escolhidos satisfazendo o teorema principal.
- Resultados experimentais.

2 DEFINIÇÕES BÁSICAS E RESULTADO PRINCIPAL

Na seguinte seção apresentamos o método de identificação dos parâmetros para o modelo normalizado de Bouc-Wen (1)-(2), na qual faremos uso nos resultados experimentais, na seção 2.5.1.

2.1 IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO BOUC-WEN

Defina-se as seguintes funções,

$$\varphi^{-}_{\sigma,n}(w) = \int_0^w \frac{du}{1+\sigma|u|^{n-1}u+(\sigma-1)|u|^n},$$

$$\varphi^{+}_{\sigma,n}(w) = \int_0^w \frac{du}{1-\sigma|u|^{n-1}u+(\sigma-1)|u|^n},$$

$$\varphi_{\sigma,n}(w) = \varphi^{-}_{\sigma,n}(w)+\varphi^{+}_{\sigma,n}(w),$$

para um escalar $w \in (-1,1)$. Nesta seção, $w(t)$ denota a solução da Equação (2). Como se mostra em (IKHOANE; RODELLAR, 2005), as funções $\varphi^{-}_{\sigma,n}(\cdot)$, $\varphi^{+}_{\sigma,n}(\cdot)$ e $\varphi_{\sigma,n}(\cdot)$ são não decrecentes no intervalo $(-1,1)$, de modo que são bijetivas. Denotemos seus funções inversas $\psi^{-}_{\sigma,n}$, $\psi^{+}_{\sigma,n}$ e $\psi_{\sigma,n}$, respectivamente.

Em muitos casos, de importância prática, o ciclo limite de histerese podem ser obtidos experimentalmente da seguinte forma. Para a identificação dos parâmetros o sinal de entrada $x(t)$ é considerada T-periódico e contínua no intervalo $[0,+\infty)$ (IKHOANE; RODELLAR, 2005). Existe T^+, tal que, $0 < T^+ < T$ no qual, x é C^1 sobre o intervalo $(0,T^+)$ e (T^+,T) com $\dot{x}(\tau) > 0$, para $\tau \in (0,T^+)$ e $\dot{x}(\tau) < 0$, para $\tau \in (T^+,T)$. Denotaremos $X_{min} = x(0)$ e $X_{max} = x(T^+) > X_{min}$ o máximo e mínimo do sinal $x(t)$, repectivamente como na proposição adiante.

Proposição 1 . *Considere o sistema* (1)-(2) *com uma condição inicial* $w(0)$*, no qual o sinal de entrada* $x(t)$ *é T-periódica e suficientemente regular. Defina as funções* w_m *e* Φ_m *para quaisquer inteiro* m *não negativo, da seguinte forma:*

$$\Phi_m(x)(\tau) = k_x x(\tau) + k_w w_m(\tau), \quad \forall\tau \in [0,T], \tag{4}$$

e

$$w_m(\tau) = w(mT + \tau), \quad \forall \tau \in [0, T]. \tag{5}$$

Então,

a) As sequências de funções $\{\Phi_m\}_{m \geq 0}$ e $\{w_m\}_{m \geq 0}$ convergem uniformemente no intervalo $[0, T]$ para as funções continuas $\bar{\Phi}_{BW}$ em $[0, T]$ e $\bar{w}$ em $[0, T]$ respectivamente. No qual,

$$\bar{\Phi}_{BW}(\tau) = k_x x(\tau) + k_w \bar{w}(\tau), \quad \forall \tau \in [0, T],$$

$$\bar{w}(\tau) = \psi^{+}_{\sigma,n}(\varphi^{+}_{\sigma,n}\{-\psi_{\sigma,n}(\rho(X_{max} - X_{min}))\} + \rho(x(\tau) - X_{min})), \quad \forall \tau \in [0, T^{+}], \tag{6}$$

$$\bar{w}(\tau) = -\psi^{+}_{\sigma,n}(\varphi^{+}_{\sigma,n}\{-\psi_{\sigma,n}(\rho(X_{max} - X_{min}))\} - \rho(x(\tau) - X_{min})), \quad \forall \tau \in [T^{+}, T]. \tag{7}$$

b) Para todo $\tau \in [0, T]$, temos

$$-1 < -\psi_{\sigma,n}(\rho(X_{max} - X_{min})) \leq w(\tau) \leq \psi_{\sigma,n}(\rho(X_{max} - X_{min})) < 1. \tag{8}$$

Com mais detalhes veja (IKHOUANE; RODELLAR, 2007). Este método de identificação asume o conhecimiento de $\bar{\Phi}$, que é o conhecimiento do ciclo limite obtido quando o modelo de Bouc-Wen é exitado por sinais T-periódicas $x(t)$. Os parâmetros do modelo Bouc-Wen são obtidos a partir dos dois ciclos limite resultantes dos sinais periódicos. Além disso, mostra-se em (IKHOUANE; RODELLAR, 2007) que a técnica de identificação é robusto respeito a uma classe de distúrbios.

Em geral, a variável de estado não-linear $w(t)$, é não acessível à medição. Usando o resultado na Equação (3) e a Proposição 1.b, para casos práticos, o ciclo limite da histerese pode ser obtido experimentalmente. Entretanto, os parâmetros k_w, k_x, ρ, σ e n são desconhecidos. O objectivo do método de identificação é proposto para determinar os valores destes parâmetros. Então, uma veis obtido $\bar{w}$ e $\bar{\Phi}_{BW}$ como em Proposição 1 equações (6) e (7), temos o seguinte resultado,

$$\frac{d\bar{w}(x)}{dx} = \rho(1 - \bar{w}(x)^n), \quad \text{para} \quad \bar{w}(x) \geq 0, \tag{9}$$

e

$$\frac{d\bar{w}(x)}{dx} = \rho(1 + (2\sigma - 1)(-\bar{w}(x))^n), \quad \text{para} \quad \bar{w}(x) \leq 0. \tag{10}$$

Considerando dois sinais periódicos $x(t)$ e $x_1(t)$, tal que, $x_1(t) = x(t) + q$ para alguma constante q dada. Denotamos as correspondentes histereses $w(x)$ e $w_1(x)$ para $x(t)$ e $x_1(t)$ respectivamente. Da Proposição 1, assim temos, a seguinte equação,

$$\Phi_{BW,1}(x_1) = \Phi_{BW}(x) + k_x q, \quad \forall x \in [X_{min}, X_{max}], \tag{11}$$

então,

$$k_x = \frac{\Phi_{BW,1}(x_1) - \Phi_{BW}(x)}{q}, \tag{12}$$

para qualquer $x \in [X_{min}, X_{max}]$. Uma vez determinado k_x, podemos calcular k_w. Definimos,

$$\theta(x) = k_w w(x) = \Phi_{BW}(x) - k_x x, \quad \forall x \in [X_{min}, X_{max}]. \tag{13}$$

Calculemos o parâmetro γ dada na equação seguinte. Usando a Equação (9), temos que,

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \gamma - b\theta(x)^n, \quad \text{para} \quad \theta(x) > 0, \tag{14}$$

então, da Equação (14), temos que,

$$\gamma = \left[\frac{d\theta(x)}{dx}\right]_{x=x^*}, \tag{15}$$

no qual, x^* é tal que $\theta(x^*) = 0$. A existência deste zero, decorre do fato que a função $w(x)$ é crescente de X_{min} até X_{max} para $x \in [X_{min}, X_{max}]$. Logo, considere-se $x_2^* > x_1^* > x^*$. Avaliamos a Equação (14), para calcular o valor do parâmetro n,

$$n = \frac{log\left(\dfrac{\left[\dfrac{d\theta(x)}{dx}\right]_{x=x_2^*} - \gamma}{\left[\dfrac{d\theta(x)}{dx}\right]_{x=x_1^*} - \gamma}\right)}{log\left(\dfrac{\theta(x_2^*)}{\theta(x_1^*)}\right)}, \tag{16}$$

também, temos que,

$$b = \frac{\gamma - \left[\dfrac{d\theta(x)}{dx}\right]_{x=x_2^*}}{\theta(x_2^*)^n}, \tag{17}$$

agora, calculamos os valores dos parâmetros k_w e ρ, tal que,

$$k_w = \sqrt[n]{\frac{\gamma}{b}}, \tag{18}$$

$$\rho = \frac{\gamma}{k_w}. \tag{19}$$

Uma vez que o parâmetro k_w tenha sido determinado, a função $\bar{w}(x)$ pode ser calculada para todo $x \in [X_{min}, X_{max}]$ a partir da Equação (13), temos que,

$$\bar{w}(x) = \frac{\theta(x)}{k_w}. \tag{20}$$

Para o parâmetro restante σ, usamos a Equação (10),

$$\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{\dfrac{\left[\dfrac{d\bar{w}(x)}{dx}\right]_{x=x_3^*}}{\rho} - 1}{[-\bar{w}(x_3^*)]^n} + 1 \right), \tag{21}$$

no qual x_3^*, foi escolhido de forma que $w(x_3^*) < 0$. Isto é equivalentemente $x_3^* < x^*$. Esta metodologia de identificação pode ser aplicado sistematicamente seguindo os passos descritos no seguinte Quadro.

Passos para a identificação dos parâmetros do modelo Bouc-Wen	
Passo 01	Exitamos o sistema de Bouc-Wen com uma sinal T-periódica $x(t)$. A saída chega a um estado de equilíbrio $\bar{\Phi}_{BW}(x)$. Uma vez que a entrada e a saída são mensuráveis, a relação $(x, \bar{\Phi}_{BW}(x))$ é conhecido (veja Proposição 1).
Passo 02	Escolhemos uma constante q para excitar o modelo de Bouc-Wen com a entrada $x_1(t) = x(t) + q$. A saída chega um estado de equilíbrio $\bar{\Phi}_{BW,1}(x_1)$. A relação $(x_1, \bar{\Phi}_{BW,1}(x_1))$ é determinada.
Passo 03	Calculamos o coeficiente k_x, usar a Equação (12).
Passo 04	Calculamos a função $\theta(x)$, usar a Equação (13).
Passo 05	Procuramos o zero da função $\theta(x)$, que é x^*, tal que $\theta(x^*) = 0$.
Passo 06	Calculamos o valor do parâmetro γ, usar a Equação (15).
Passo 07	Escolhemos os pontos x_1^* e x_2^* tal que $x^* < x_1^* < x_2^*$. Calculamos o parâmetro n e b, usando as Equações (16) e (17).
Passo 08	Calculamos os parâmetros k_w e ρ, usando as Equações (18) e (19).
Passo 09	Calculamos a função $\bar{w}(x)$, usar Equação (20).
Passo 10	Escolhemos o ponto x_3^* tal que $x_3^* < x^*$. Calculamos o parâmetro σ, usar a Equação (21).

2.2 DEFINIÇÕES BÁSICAS

O símbolo $\lambda(\cdot)$ denota a parte real de um número complexo e escrevemos λ para denotar a taxa de ocorrência. Quando A é uma matriz quadrada $n \times n$, $\lambda(A) := \{\max(\lambda(i)), \quad i = 1, 2, ..., n\}$, denota a parte real dos autovalores da matriz A, no qual $\lambda(i)$ é autovalor da matriz A. Denotamos a norma de Frobenius por $||\cdot||$ e o valor absoluto por $|\cdot|$. A expressão $1_{\{\cdot\}}$ denota a função indicadora. O símbolo $\exp(\cdot)$ denota a função exponencial e $\delta_k(\cdot)$ denota o delta de Dirac.

Apresentamos a definição do processo de Poisson homogêneo.

Definição 1 . *(BARRY, 2008, p. 21) Uma coleção $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ de variáveis aleatórias satisfazendo:*

1) $\Pr\,[N(0) = 0] = 1$.

2) Para $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 ...$, temos que $N((t_i, t_{i+1}])$, $i = 0, 1, 2, ...$, são variáveis aleatórias independentes.

3) Para todo $s, t \geq 0$ com uma taxa de ocorrência $\lambda > 0$, temos,

$$\Pr[N((s,t]) = n] = \frac{\exp(-\lambda(t-s))\lambda(t-s)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{22}$$

é chamado de processo de Poisson homogêneo.

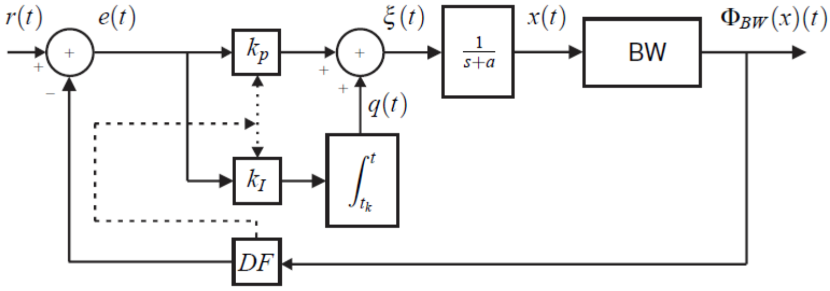

Figura 2 – Diagrama de blocos do controle PI sujeito a falhas aleatórias.
Fonte: Autoria própria.

2.3 CONTROLE PARA UM SISTEMA COM HISTERESE

Vejamos o esquema de controle PI para um sistema com histerese descrito pelo modelo de Bouc-Wen (veja Figura 2). Os instantes de tempo $0 < t_1 < t_2 ... < t_k$ representam as falhas que acontecem de maneira aleatória na linha de transmissão. Daqui em adiante considere BW para dizer Bouc-Wen.

Quando ocorre uma falha na linha de transmissão, as duas constantes k_P e k_I se tornam zero, isto equivale a uma ordem dada pelo detector de falhas DF para que o controlador se desligue. O controlador fica desligado durante um certo periódo de tempo, a ser determinado no projeto do controlador. Denotamos por $\mu > 0$ este periódo de tempo na qual o controlador fica desligado depois de cada falha. Em aplicações, μ pode ser escolhida para atender os requisitos de estabilidade, mais adiante vamos explorar sua importância.

Após o tempo μ passar o sistema liga o controlador PI e isto acontece precisamente no momento $s_k = t_k + \mu$. Para um melhor entendimento veja Figura 3. Observe que nos momentos de tempo s_k e t_k , o controlador PI muda de estado, de 'ON' para 'OFF', e vice-versa. Essa metodologia 'ON' e 'OFF' será util para provar a estabilidade em probabilidade conforme adiante.

Observação 1 *. Notar que, $\mu > 0$ é um valor determinístico escolhido antecipadamente no projeto. A proxima falha na linha de transmissão, ocorre no instante t_{k+1} de forma aleatória, obedecendo o modelo de Poisson. Este modelo representa a probabilidade de ocorrência de um certo "número de chegadas" em um determinado tempo. Neste trabalho modela, por exemplo o número de falhas na linha de transmissão.*

A probabilidade de Poisson é definida para uma variável aleatória discreta (22)*. Ou seja, $Pr[X = n]$ representa a probabilidade de ocorrerem n falhas na unidade de tempo trabalhada, sendo λ a média de chegadas na unidade de tempo. A distribuição expo-*

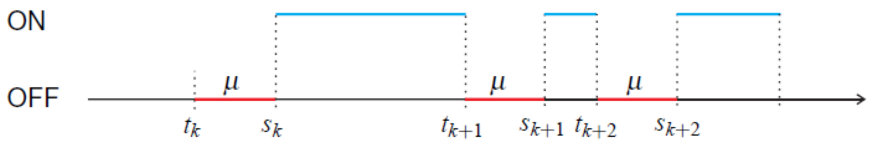

Figura 3 – Na figura, 'OFF' vai de t_k até s_k e 'ON' vai de s_k até t_{k+1}.
Fonte: Autoria própria.

nencial é a correspondente da distribuição de Poisson para os intervalos entre chegadas. Quando ocorrem falhas, por tanto, segue o modelo de Poisson em sua taxa de chegada e comporta-se segundo a distribuição exponencial, em termos de tempo entre chegadas. Nesse sentido, seja $\delta_k := t_{k+1} - s_k$ para todo $k \geq 0$, é uma variável aleatória i.i.d com a distribução de probabilidade exponencial (ROSS, 1985, p. 202),

$$\Pr[\delta_k = t] = \lambda \exp(-\lambda t), \quad \forall t \geq 0, \forall k \geq 0, \lambda > 0. \tag{23}$$

A função indicadora $1_{\{\cdot\}}$ auxilia a representar o ligamento e desligamento do controle, ou seja, quando $t \in [s_k, t_{k+1})$ temos 1 e 0 no outro caso. Então, pode-se definir os parâmetros do controle da seguinte maneira,

$$k_P(t) = 1_{t\in[s_k,t_{k+1})} k_P \quad \text{e} \quad k_I(t) = 1_{t\in[s_k,t_{k+1})} k_I, \quad \forall t \geq 0, \tag{24}$$

na qual k_P e k_I são constantes fixas.

De acordo com o esquema de controle mostrado na Figura 2, pode-se reescrever as equações do controlador, tal que,

$$\xi(t) = k_P(t)e(t) + q(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{25}$$

$$q(t) = k_I(t) \int_{t_k}^{t} e(\tau)d\tau, \quad \forall t \geq 0, \tag{26}$$

$$e(t) = 1_{(s_k,t_{k+1})} \left(r(t) - \Phi_{BW}(x)(t)\right), \quad \forall t \geq 0, \tag{27}$$

no qual $x(t)$ satisfaz a seguinte relação,

$$\dot{x}(t) + ax(t) = \xi(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{28}$$

para $a > 0$ uma constante dada.

Observação 2 . *Notar em* (25), $\xi(t)$ *tem descontinuidades de primeira especie para* $\lambda > 0$, *entretanto, a solução* $x(t)$ *da equação diferencial* (28) *é contínua.*

Derivando a Equação (26), temos,

$$\begin{aligned}
\dot{q}(t) &= \dot{k_I(t)} \int_{t_k}^{t} e(\tau) d\tau + k_I(t) e(t), \\
&= (\delta_{s_k}(t) - \delta_{t_{k+1}}(t)) \int_{t_k}^{t} e(\tau) d\tau + k_I(t) e(t), \\
&= e(s_k) - e(t_{k+1}) + k_I(t) e(t),
\end{aligned}$$

no qual $\delta_{s_k}(t)$ é a função delta de Dirac tal que tem a seguinte propriedade

$$\int_{t_k}^{t} \delta_{s_k}(t) e(\tau) d\tau = e(s_k),$$

e da Equação (27) temos que,

$$\dot{q}(t) = k_I(t) e(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{29}$$

logo, substituindo a Equação (27) na Equação (29) temos que,

$$\dot{q}(t) = k_I(t) r(t) - k_I(t) \Phi_{BW}(x)(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{30}$$

substituindo a Equação (1) na Equação (30) temos que,

$$\dot{q}(t) = k_I(t) r(t) - k_I(t) k_x x(t) - k_I(t) k_w w(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{31}$$

de outro lado, se substituírmos a Equação (25) na Equação (28) temos que,

$$\dot{x}(t) = -a x(t) + k_P(t) e(t) + q(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{32}$$

logo, se substituírmos a Equação (27) e depois a Equação (1) na Equação (32) temos que,

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + q(t) + k_P(t)r(t) - k_P(t)k_x x(t) - k_P(t)k_w w(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{33}$$

então, das equações (31) e (33) temos o seguinte sistema linear,

$$\dot{Y}(t) = A(t)Y(t) + H(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{34}$$

no qual,

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \\ q(t) \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} -(a + k_P(t)k_x) & 1 \\ \\ -k_I(t)k_x & 0 \end{bmatrix}, \tag{35}$$

e

$$H(t) = \begin{bmatrix} k_P(t) \\ \\ k_I(t) \end{bmatrix} r(t) + \begin{bmatrix} -k_P(t)k_w \\ \\ -k_I(t)k_w \end{bmatrix} w(t).$$

Vamos a definir a matrix A (que não depende do tempo) motivada por sua versão, que depende do tempo em (34).

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -(a + k_P k_x) & 1 \\ -k_I k_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Podemos apresentar um importante resultado preliminar. Denotamos por E à esperança matemática de uma variável aleatória. A prova encontra-se na subseção adiante.

O seguinte lema garanta uma condição para a convergência na média ou em L^1 das variáveis aleatórias $x(t_k)$. Este resultado é de grande importancia na prova de nosso resultado principal.

Lema 1 . *Seja $\{t_k\}$ uma sequência que representa um processo estocástico para os instantes de tempo onde ocorrêm as falhas conforme com o esquema de controle mostrado na Figura 2. Então existe uma constante $c > 0$, tal que,*

$$|\mathrm{E}[x(t_k)]| \leq c, \quad \forall k > 0,$$

se e somente se $\lambda(A) - \lambda < 0$.

Observação 3 *. A condição de estabilidade $\lambda(A) - \lambda < 0$ no Lema 1, se determina, mediante análise do polinômio característico da matriz $A - \lambda I$,*

$$p(s) = s^2 + (a + k_p k_x + 2\lambda)s + \lambda(a + k_p k_x + \lambda) + k_p k_x = 0. \tag{36}$$

De acordo com as condições de Routh-Hurwitz (CHEN, 1998), as raízes de $p(s)$ têm parte real negativa se e somente se,

$$a + k_p k_x + 2\lambda > 0 \quad \textit{e} \quad \lambda(a + k_p k_x + \lambda) + k_p k_x > 0, \tag{37}$$

são satisfeitas. A condição em (37) *é necessaria e suficiente para que $\lambda(A) - \lambda < 0$.*

Para provar o Lema 1, precisamos de alguns resultados preliminares.

Proposição 2 *. (HIRSCH; SMALE, 1974, p. 84) Seja A uma matriz de dimensão $n \times n$. Então existe uma matriz inversível Z, tal que,*

$$A = Z J_A Z^{-1},$$

no qual, J_A é a forma de Jordan correspondente à matrix A. Por outra parte, temos para qualquer escalar c, se cumpre que,

$$\exp(cA) = Z \exp(cJ_A) Z^{-1}.$$

Lema 2 *. Seja A uma matriz de dimensão 2.*

(i) A matriz $M_1 = \mathrm{E}[\exp(A\delta_k)]$, $\forall k \geq 0$, existe se e somente se $\lambda(A) - \lambda < 0$.

(ii) Seja h uma função vetorial contínua e limitada de dimenção 2. A matriz quadrada

$$M_2 = \mathrm{E}\left[\int_0^{\delta_k} \exp(A(\delta_k - \tau))h(\tau)d\tau\right], \tag{38}$$

existe se $\lambda(A) - \lambda < 0$.

Demonstração. [Prova de (i)] Lembrar o processo de intervalos entre chegadas, no qual, $\delta_k = t_{k+1} - s_k$, $k > 0$ é uma variável aleatória, então $\exp(A\delta_k)$ é uma variável aleatória e escrevemos,

$$\begin{aligned} M_1 = \mathrm{E}[\exp(A\delta_k)] &= \int_0^{+\infty} \exp(At)\Pr[\delta_k = t]dt, \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} \exp(At)\exp(-\lambda t)dt, \end{aligned}$$

usando o resultado obtido na Proposição 2, então na expressão acima temos que,

$$\begin{aligned} M_1 &= \lambda \int_0^{+\infty} Z\exp(J_A t)Z^{-1}\exp(-\lambda t)dt \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} Z\exp\left((J_A - \lambda I)t\right)Z^{-1}dt. \end{aligned}$$

Sejam σ_1 e σ_2 autovalores de A, então a matriz $J_A - \lambda I$ assume as formas,

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 - \lambda & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \lambda \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \sigma_1 - \lambda & 1 \\ 0 & \sigma_1 - \lambda \end{bmatrix},$$

logo, a matriz $\exp\left((J_A - \lambda I)t\right)$, tem alguma destas formas (CHEN, 1998)

$$\begin{bmatrix} \exp((\sigma_1 - \lambda)t) & 0 \\ 0 & \exp((\sigma_2 - \lambda)t) \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \exp((\sigma_1 - \lambda)t) & t\exp((\sigma_1 - \lambda)t) \\ 0 & \exp((\sigma_1 - \lambda)t) \end{bmatrix},$$

então, a integral $\int_0^{+\infty} \exp\left((J_A - \lambda I)t\right)dt$ existe, se e somente se, ambos $\lambda(\sigma_1) - \lambda < 0$ e $\lambda(\sigma_2) - \lambda < 0$ se cumprem. Está condição é equivalente à condição $\lambda(A) - \lambda < 0$. Com este argumento terminamos a demostração de (i).

[Prova de (ii)] Se fazemos uma avaliação direta do valor esperado na expressão (38) temos que,

$$\begin{aligned} M_2 &= \mathrm{E}\left[\int_0^{\delta_k} \exp(A(\delta_k - \tau))h(\tau)d\tau\right], \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t \exp(A(t-\tau))h(\tau)d\tau\right)\lambda\exp(-\lambda t)dt, \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} \exp(At)\exp(-\lambda t)\left(\int_0^t \exp(-A\tau)h(\tau)d\tau\right)dt, \end{aligned}$$

aplicando a Proposição 2, na identidade anterior, temos que,

$$
\begin{aligned}
M_2 &= \lambda \int_0^{+\infty} Z\exp((J_A-\lambda I)t)Z^{-1}\left(\int_0^t Z\exp(-J_A\tau)Z^{-1}h(\tau)d\tau\right)dt,\\
&= \lambda \int_0^{+\infty} Z\exp((J_A-\lambda I)t)\left(\int_0^t \exp(-J_A\tau)Z^{-1}h(\tau)d\tau\right)dt,
\end{aligned}
$$

assim temos,

$$
||M_2|| \le \bar{h}\int_0^{+\infty}\|\exp((J_A-\lambda I)t)\|\left(\int_0^t \|\exp(-J_A\tau)\|d\tau\right)dt, \tag{39}
$$

desde que, $\bar{h} := \lambda\|Z\|\|Z^{-1}\|(\sup_{t\ge 0}\|h(t)\|)$. Logo com argumentos simples, podemos ter,

$$
\|\exp((J_A-\lambda I)t)\| \le t\exp((\lambda(A)-\lambda)t)
$$

e que,

$$
\|\exp(-J_A\tau)\| \le \tau\exp(\lambda(A)\tau),
$$

substituíndo as duas desigualdades em (39) e com a ajuda de alguns calculos adicionais, podemos mostrar que o limite superior de M_2 depende de $\lambda(A)-\lambda<0$. Com esse argumento terminamos a demostração de (ii).

□

2.3.1 Prova do Lema 1

Apresentamos a demostração do Lema 1. Se divide a prova em dois casos.

Demonstração. **Caso 1. Controle ligado:**
Neste caso t pertence ao intervalo $[s_k, t_{k+1})$, no qual $k_P(t) = k_P$ e $k_I(t) = k_I$, então de (34), temos que

$$
\dot{Y}(t) = AY(t) + h(t), \quad \forall t \in [s_k, t_{k+1}), \tag{40}
$$

no qual,

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \\ q(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -(a+k_P k_x) & 1 \\ \\ -k_I k_x & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$h(t) = \begin{bmatrix} k_P \\ \\ k_I \end{bmatrix} r(t) + \begin{bmatrix} -k_P k_w \\ \\ -k_I k_w \end{bmatrix} w(t).$$

A solução da expressão (40) é dada por,

$$Y(t) = \exp(A(t-s_k))Y(s_k) + \int_{s_k}^{t} \exp(A(t-\tau))h(\tau)d\tau, \tag{41}$$

se $t \uparrow t_{k+1}$ em (41), e lembrando que $\delta_k = t_{k+1} - s_k$, temos que,

$$Y(t_{k+1}) = \exp(A\delta_k)Y(s_k) + \int_{0}^{\delta_k} \exp(A(\delta_k-\tau))h(\tau-s_k)d\tau, \tag{42}$$

logo, introduzimos o operador valor esperado em ambos os lados da Equação (42)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[Y(t_{k+1})] &= \mathrm{E}[\exp(A\delta_k)Y(s_k)] + \mathrm{E}\left[\int_{0}^{\delta_k} \exp(A(\delta_k-\tau))h(\tau-s_k)d\tau\right], \\ &= \mathrm{E}[\exp(A\delta_k)]\mathrm{E}[Y(s_k)] + \mathrm{E}\left[\int_{0}^{\delta_k} \exp(A(\delta_k-\tau))h(\tau-s_k)d\tau\right], \end{aligned} \tag{43}$$

no qual, a última igualdade resulta da propriedade i.i.d do processo de Poisson. Com o Lema (2) e a Equação (43) obtemos a seguinte desigualdade,

$$||\mathrm{E}[Y(t_{k+1})]|| \leq ||M_1||||\mathrm{E}[Y(s_k)]|| + \|M_2\|, \quad \forall k \geq 0, \tag{44}$$

no qual M_1 e M_2 são matrizes que satisfazem o Lema 2. Na definição do vetor $Y(t)$, temos que,

$$\mathrm{E}[Y(s_k)] = \lim_{t \uparrow s_k} \mathrm{E}\begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}[x(s_k)] \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{45}$$

em particular, temos que,

$$||\mathrm{E}[Y(t_1)]|| \leq \|M_1\| + \|M_2\|, \tag{46}$$

quando $|x(s_0)| = |x(0)| = 1$.

Caso 2. Controle desligado:

Agora provamos que,

$$|\mathrm{E}[x(s_k)]| \leq 1, \quad \forall k > 0. \tag{47}$$

Quando o controlador esta desligado, t pertence ao intervalo $[t_k, s_k)$, então temos que $k_P(t) = k_I(t) = 0$. As equações (25)-(28) nos garantam que $q(t) = \xi(t) = 0$ e também que $\dot{x}(t) + ax(t) = 0$ quando $t \in [t_k, s_k)$. A solução deste sistema homogêneo é dado por

$$x(t) = x(t_k)\exp(-a(t-t_k)), \quad \forall t \in [t_k, s_k). \tag{48}$$

Suponhamos que $|\mathrm{E}[x(t_k)]|$ é limitado superiormente por uma constante c_1, tal que, $c_1 := \max(1, \|M_1\| + \|M_2\|)$ não depende de k, no qual M_1 e M_2 são matrizes definidas como no Lema 2. Então, com essa suposição, e aplicando em (48), temos que,

$$|\mathrm{E}[x(t)]| = |\mathrm{E}[x(t_k)]|\exp(-a(t-t_k)) \leq c_1 \exp(-a(t-t_k)), \quad \forall t \in [t_k, s_k). \tag{49}$$

Lembrando que $s_k = t_k + \mu$ para todo $k > 0$, agora escolhemos $\mu > 0$ para garantir um fator de decrecimiento exponencial apropriado. De fato, se deixarmos que $\mu > 0$ seja suficientemente grande, tal que,

$$\mu > \frac{\log(c_1)}{a}, \tag{50}$$

isto equivale escrever,

$$c_1 \exp(-a\mu) < 1, \tag{51}$$

então, para $t \uparrow s_k$ em (49), temos que,

$$\lim_{t \uparrow s_k} |\mathrm{E}[x(t)]| \leq c_1 \exp(-a\mu) < 1, \tag{52}$$

assim temos, de (52) e (45) que $||\mathrm{E}[Y(s_k)]|| = |\mathrm{E}[x(s_k)]| \leq 1$. Aplicando esse fato na desigualdade (44), concluimos que,

$$||\mathrm{E}[Y(t_{k+1})]|| \leq ||M_1|| + ||M_2||,$$

a prova do resultado segue por indução.

□

2.3.2 Estabilidade em probabilidade

Apresentamos o conceito de estabilidade estudado neste trabalho.

Definição 2 . *(KOZIN, 1969) Dizemos que um modelo estocástico não linear de Bouc-Wen* (1)-(2) *e* (25)-(28) *é estável em probabilidade, se dado $\varepsilon > 0$ e $M > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, M, t_0)$, tal que, $|x(t_0)| < \delta$ temos,*

$$\Pr\left(\sup_{t \geq t_0} |\Phi_{BW}(x)(t)| > M\right) < \varepsilon.$$

Observação 4 . *A Definição 2 equivale dizer que existe uma constante suficientemente grande $M > 0$ que depende de $\varepsilon > 0$, tal que,*

$$\Pr\left(\sup_{t \geq t_0} |\Phi_{BW}(x)(t)| \leq M\right) \geq 1 - \varepsilon.$$

Os resultados a seguir serão uteis na prova do principal resultado dessa monografia.

Proposição 3 *.[Desigualdade de Markov] (LIN; BAI, 2011, Th. 6.1, p. 52). Seja X uma variável aleatória e $g(x) > 0$ uma função não decrescente em $\mathbb{R}$. Então, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos que,*

$$\Pr(X \geq x) \leq \frac{\mathrm{E}[g(X)]}{g(x)}.$$

Lema 3 . *Seja X uma variável aleatória e $c > 0$ uma constante fixa, tal que, $|\mathrm{E}[X]| \leq c$. Se $g(x) > 0$ é uma função concava não decrescente, então,*

$$\Pr(|X| \geq x) \leq \frac{2g(c)}{g(x)}, \quad \forall x > 0.$$

Demonstração. Desde que $g(\cdot)$ é uma função concava, usamos a desigualdade de Jensen (LIN; BAI, 2011, Th. 8.4.a) para afirmar que $\mathrm{E}[g(X)] \leq g(\mathrm{E}[X])$. A condição $|X| \geq x$ significa que $X \geq x > 0$ ou que $0 > -x \geq X$. No caso $X \geq x > 0$, temos imediatamente da Proposição 3, temos que,

$$\Pr(X \geq x) \leq \frac{\mathrm{E}[g(X)]}{g(x)} \leq \frac{g(\mathrm{E}[X])}{g(x)}. \tag{53}$$

Agora na condição $0 > -x \geq X$, consideramos $Y = -X$, então temos que $-x \geq -Y$ ou equivalentemente $Y \geq x > 0$. Por tanto, do passo anterior, podemos obter,

$$\Pr(Y \geq x) \leq \frac{g(\mathrm{E}[Y])}{g(x)}. \tag{54}$$

Desde que,

$$|\mathrm{E}[X]| = |-\mathrm{E}[X]| = |\mathrm{E}[-X]| = |\mathrm{E}[Y]|,$$

da hipótese $g(\cdot)$ é não decrescente, temos que,

$$g(\mathrm{E}[X]) \leq g(c) \quad \text{e} \quad g(\mathrm{E}[Y]) \leq g(c), \tag{55}$$

relembrando,

$$\begin{aligned}
\Pr(|X| \geq x) &= \Pr(\{X \geq x\} \text{ ou } \{-x \geq X\}), \\
&= \Pr(X \geq x) + \Pr(-x \geq X), \\
&= \Pr(X \geq x) + \Pr(Y \geq x),
\end{aligned}$$

aplicando (53)–(55) na última igualdade, na qual concluímos que,

$$\Pr(|X| \geq x) \leq \frac{g(\mathrm{E}[X])}{g(x)} + \frac{g(\mathrm{E}[Y])}{g(x)} \leq \frac{2g(c)}{g(x)},$$

assim fica provado o Lema 3.

$\square$

2.4 RESULTADO PRINCIPAL

Apresentamos na sequência o principal resultado dessa monografia.

Teorema 1 . *O modelo estocástico não linear de Bouc-Wen dado em* (1)-(2) *e* (25)-(28)*, é estável em probabilidade, se* $\lambda(A) - \lambda < 0$*.*

Observação 5 . *A importância deste resultado, reside na sua aplicação para estabelecer um controle para os sistemas não lineares modelado por equações do tipo Bouc Wen. Notar que, em* (37)*, é uma condição necessaria e suficiente para garantimos a estabilidade no mesmo sentido que o Teorema 1.*

Tal afirmação é ilustrada via aplicação real de controle de um motor DC sujeito a falhas, a ser descrito na Seção 2.5 adiante.

2.4.1 Prova do Teorema 1

Demonstração. O Lema 1 garante a existência de uma constante $c > 0$, tal que,

$$|\mathrm{E}[x(t_k)]| \leq c, \quad \forall k > 0, \tag{56}$$

no qual nos momentos t_k para todo $k > 0$, se establece o tempo entre chegadas $\delta_k = t_{k+1} - t_k$, $k > 0$. Logo, aplicando (56) no Lema 3 com $g(x) = \log(x)$, $x > 0$, temos que,

$$\Pr(|x(t_k)| \geq x) \leq \frac{2\log(c)}{\log(x)}, \quad \forall x > 0, \quad \forall k > 0,$$

ou equivalentemente

$$\Pr(|x(t_k)| < x) \geq 1 - \frac{2\log(c)}{\log(x)}, \quad \forall x > 0, \quad \forall k > 0. \tag{57}$$

De outra parte, seja $T > 0$ uma constante suficientemente grande. Então, a probabilidade que o tempo entre chegadas δ_k se encontra no interior do intervalo $(0, T]$ é

$$\Pr(0 < \delta_k \leq T) = \int_0^T \lambda \exp(-\lambda t)dt = 1 - \exp(-\lambda T). \tag{58}$$

Como t_k e δ_k são variáveis aleatórias independentes, podemos escrever (57) e

(58) da seguinte forma,

$$\begin{aligned}&\Pr(\{0<\delta_k\le T\}\text{ e }\{|x(t_k)|<x\})\\&=\Pr(0<\delta_k\le T)\Pr(|x(t_k)|<x)\ge(1-\exp(-\lambda T))\left(1-\frac{2\log(c)}{\log(x)}\right).\end{aligned}$$

Isso significa que para alguns momentos de tempo $t>0$, a probabilidade que o evento

$$\{t_k\le t\le t_{k+1}<t_k+T\}\quad\text{e}\quad|x(t_k)|<x\quad\text{e}\quad|x(t_{k+1})|<x,$$

aconteça é maior que $(1-\exp(-\lambda T))\,(1-2\log(c)/\log(x))$. Então, com esse resultado e a continuidade de $x(t)$ (veja Observação 2) podemos afirmar que existe constante $M=M(x,T)$, tal que,

$$|x(t)|\le M,\quad\forall t\in[t_k,t_k+T),\tag{59}$$

com uma probabilidade maior que $(1-\exp(-\lambda T))\,(1-2\log(c)/\log(x))$.
Aplicando (59) e (3) em (1), obtemos,

$$|\Phi_{BW}(x)(t)|\le k_x|x(t)|+k_w|w(t)|\le k_xM+k_w,\tag{60}$$

assim fica provado o resultado principal para x e T qualquer.

$\square$

2.5 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Nesta seção apresentamos um experimento prático. A Figura 4 apresenta o kit didático Datapool Servomecanismo modelo 2208, que permite o controle de velocidade do motor de corrente contínua DC (Direct Current). Também usamos uma placa de aquisição dos dados produzida pela National Instruments denominada NI USB-6008. É um dispositivo simples e de baixo custo para o interfaceamento ENTRADA/SAÍDA de sinais em relação ao PC. Esta placa pode ser conectada via cabo USB a um PC executando o Matlab, e o Matlab realiza as tarefas de enviar e ler voltagens nos terminais da placa.

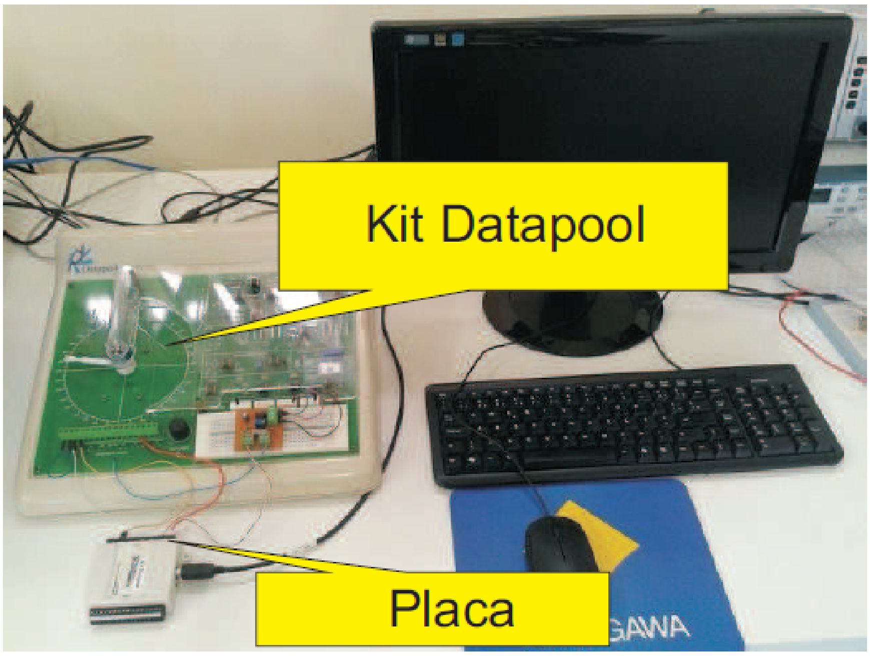

Figura 4 – Kit didático Datapool Servomecanismo e placa de aquisição dos dados. Fonte: Autoria própria.

2.5.1 Identificação do Modelo de Bouc-Wen para motor DC

Desejamos determinar os parâmetros $k_x > 0$, $k_w > 0$, $\rho > 0$, $\sigma \geq 1/2$ e $n \geq 1$ como em (1) e (2) via experimento prático com o kit Datapool Servomecanismo. O sinal de entrada periódico é $x(t)$ e o sinal de saída é $y(t)$. Os sinais se relacionam da seguinte maneira:

$$y(t) = \Phi_{BW}(x)(t) + y_0. \tag{61}$$

Note que y_0 é uma constante a ser calculada. Apresentamos agora os passos do processo de identificação de parâmetros do modelo de Bouc-Wen deacordo com Quadro.

Passo 01: Considere como sinal periódica de entrada ao sistema uma função com frequência de oscilação escolhida de modo a ser menor possível. Adotaremos a função $x(t) = 0.6 + 0.1sen(pi * t/2)$ no qual $t \in [0, 16]$, pois satisfaz os requisitos do Kit Datapool Servomecanismo e a placa de aquisição dos dados.

Passo 02: Escolhemos $q = 0.3$ para gerar o sinal $x_1(t) = x(t) + q$ no qual t esta em $[0 : 16]$ segundos e obter o sinal de saída do Kit Datapool $y_1(t) = \Phi_{BW}(x_1)(t)$, no qual,

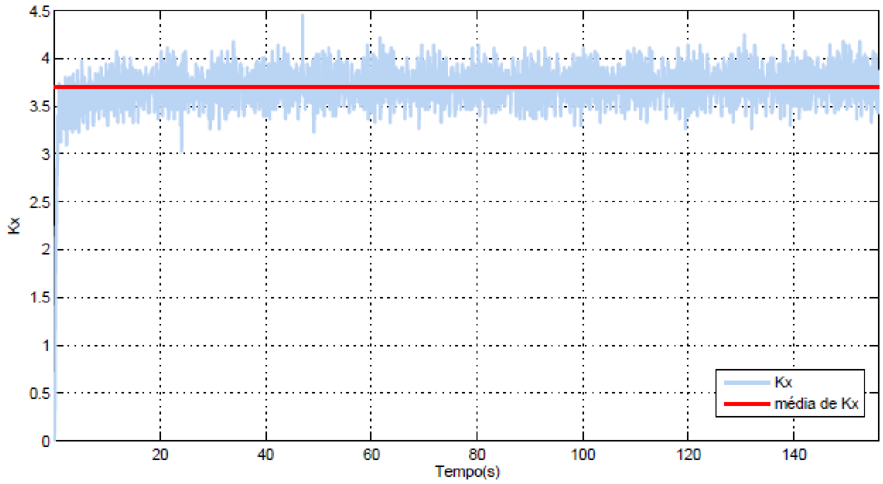

Figura 5 – Média de k_x no tempo.
Fonte: Autoria própria.

$$y_1(t) - y(t) = \Phi_{BW}(x_1)(t) - \Phi_{BW}(x)(t), \quad \forall t > 0.$$

Passo 03: Calculamos k_x,

$$k_x = \frac{y_1(t) - y(t)}{q} = \frac{\Phi_{BW}(x_1)(t) - \Phi_{BW}(x)(t)}{q}, \quad \forall t > 0, \tag{62}$$

para algum valor fixo $x_1, x \in [X_{min}, X_{max}]$. Escolhemos a média de k_x, dada na Equação (62). Na Figura 5, visualizamos a média de k_x, que é aproximadamente 3.7024. O valor que usaremos na equação seguinte.

Passo 04: Calculamos a histerese do Kit Datapool Servomecanismo, a qual denotamos por $\theta(x)$,

$$\theta(x) = \Phi_{BW}(x)(t) - k_x x, \quad \forall t > 0. \tag{63}$$

Veja Figura 6. A curva de histerese será util no proximo passo.

Passo 05: Calculamos o valor de y_0. Somamos y_0 em ambos lados da Equação (63), temos que,

$$\theta(x) + y_0 = \Phi_{BW}(x)(t) + y_0 - k_x x = y(t) - k_x x, \quad \forall t > 0. \tag{64}$$

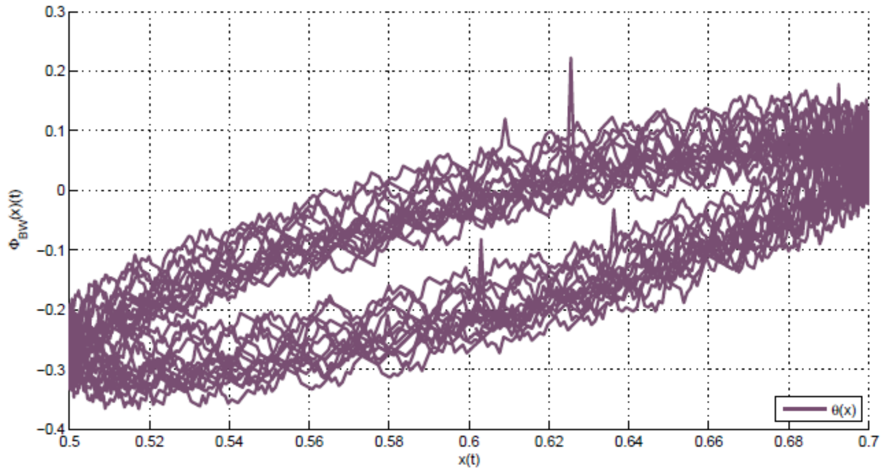

Figura 6 – Histerese do Kit Datapool Servomecanismo.
Fonte: Autoria própria.

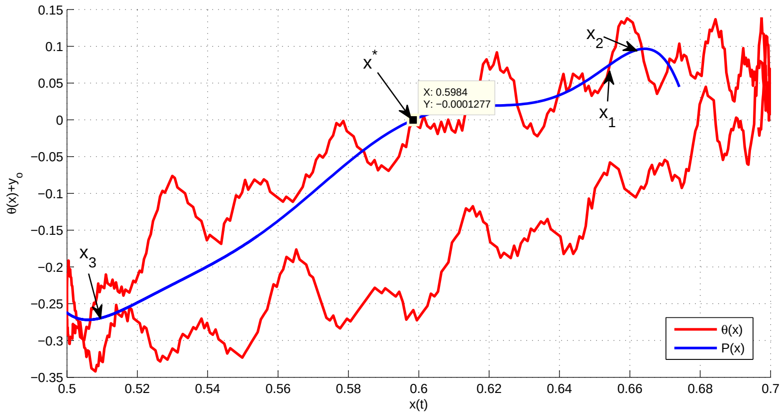

Figura 7 – Localização dos pontos x_1, x_2 e x_3 na histerese do Kit Datapool.
Fonte: Autoria própria.

Essa igualdade em (64) nos possibilita obter de maneira experimental, que $y_0 = 0.65$. Agora calculamos os parâmetros n, k_w, ρ e σ. No passo 4, definimos a equação da histerese do Kit Datapool Servomecanismo, $\theta(x)$.

Passo 06: Na Figura 6, observamos a existência do ponto x^* tal que $\theta(x^*) = 0$, então escolhemos da Figura 6 uma curva superior da histerese do Kit Datapool, como se mostra na Figura 7, isto, para a alocação do ponto x^*. Com ajuda deste ponto, calculamos logo os pontos x_1, x_2 e x_3. A histerese do Kit Datapool Servomecanismo não é uma curva regular, isto é devido à aparição de ruido no momento da aquisição dos dados do Kit Datapool Servomecanismo. Então precisamos de uma regularização de $\theta(x)$.

Na Figura 7, $P(x)$ representa um polinômio regularizador de $\theta(x)$, que na verdade é um polinômio aproximado que usaremos para fazer as derivadas de forma regular da curva de histerese nos pontos x^*, x_1, x_2 e x_3. De forma experimental temos, $x^* = 0.5984$, com esse valor calculamos o valor de γ.

$$\gamma = \frac{dP(x)}{dx}|_{x=x^*} = 1.0780. \tag{65}$$

no qual,

$$P(x) \approx 0.1929x^7 - 0.7834x^6 + 1.3613x^5 - 1.3117x^4 + 0.7570x^3 - 0.2616x^2 + 1.0062x - 0.0041.$$

Passo 07: Agora devemos escolher x_3 de modo que $x_3 < x^* < x_1 < x_2$. Adotamos no experimento $x_3 = 0.5081$, $x_1 = 0.6579$ e $x_2 = 0.6828$ e estes valores produzem,

$$n = \frac{\log\left(\dfrac{\frac{dP(x)}{dx}|_{x=x_2} - a}{\frac{dP(x)}{dx}|_{x=x_1} - a}\right)}{\log\left(\dfrac{P(x_2)}{P(x_1)}\right)} = 1.5817, \tag{66}$$

Passo 08: Calculamos k_w e ρ,

$$k_w = P(x_2)\left(\frac{a}{a - \frac{dP(x)}{dx}|_{x=x_2}}\right)^{1/n} = 0.4514, \tag{67}$$

$$\rho = \frac{\gamma}{k_w} = 2.1939, \tag{68}$$

Passo 09: Assim pode-se calcular a função $\bar{w}(x) = \dfrac{\theta(x)}{k_w}$. Com fines práticos, $\bar{w}(x) = \dfrac{P(x)}{k_w}$.

Passo 10: Logo, calculamos σ,

$$\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{\dfrac{\frac{dP(x)}{dx}|_{x=x_3} - \rho k_w}{\rho k_w}}{\left(-\dfrac{P(x_3)}{k_w}\right)^n} + 1\right) = 0.7996. \tag{69}$$

Confrontamos os dados reais obtidos no Kit Datapool Servomecanismo com os dados da simulação do modelo de Bouc-Wen.

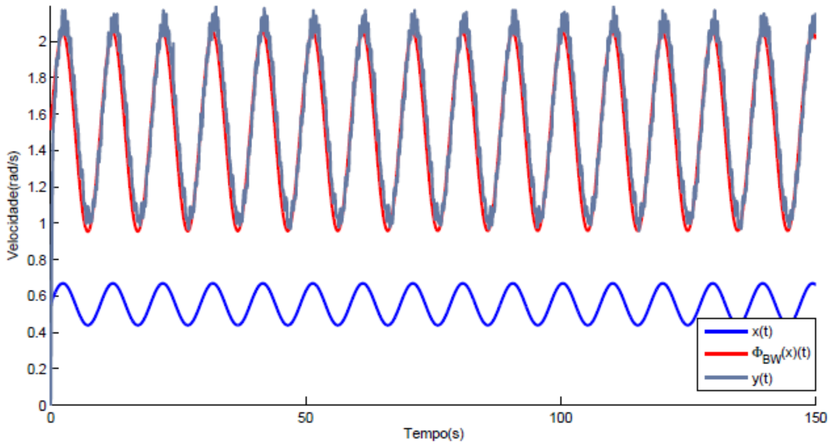

Figura 8 – Comparação entre os sinais de saída, simulado e experimental, do Kit Datapool. Fonte: Autoria própria.

Na Figura 8, temos, o sinal de entrada $x(t)$, o sinal de saída da simulação $\Phi_{BW}(x)(t)$ e o sinal de saída do Kit Datapool $y(t)$. Note-se na Figura 8 uma semelhança entre os sinais de saída real e simulado.

2.6 CONTROLE SUJEITO A FALHAS

O Kit Datapool Servomecanismo foi avaliado sob controle PI sujeito a falhas. No projeto do controlador PI. Tenhendo em conta a condicao (37), adotamos os valores a seguir:

$$a = 10 \quad ; \quad K_I = 0.1 \quad ; \quad K_P = 1.5 \quad e \quad \lambda = 0.25, \tag{70}$$

tais valores satisfazem os requisitos de estabilidade do Teorema 1. Adotamos como sinal de referência $r(t) = 3$rad/s.

Na Figura 9 apresentamos os efeitos do controle PI sujeito a falhas aleatórias para um sistema com histerese. Vemos como o controle PI age imediatamente depois de ocorrido uma falha de forma aleatória. Quando ocôrre uma falha o sistema fica desligado por $\mu = 0.27$ segundos. Depois de passar esse tempo o controlador volta atuar, de modo que a velocidade do motor DC siga o sinal de referência.

De modo a ilustrar a influência das falhas no comportamento médio do equipamento, realizamos 600 experimentos distintos.

A Figura 10, apresenta a média obtida experimentalmente para os sinais. Nota-se claramente a existencia de um erro entre a referência e a velocidade angular angular média do motor DC. A Figura 11, por sua vez, ilustra o desvio padrão de tais realizações.

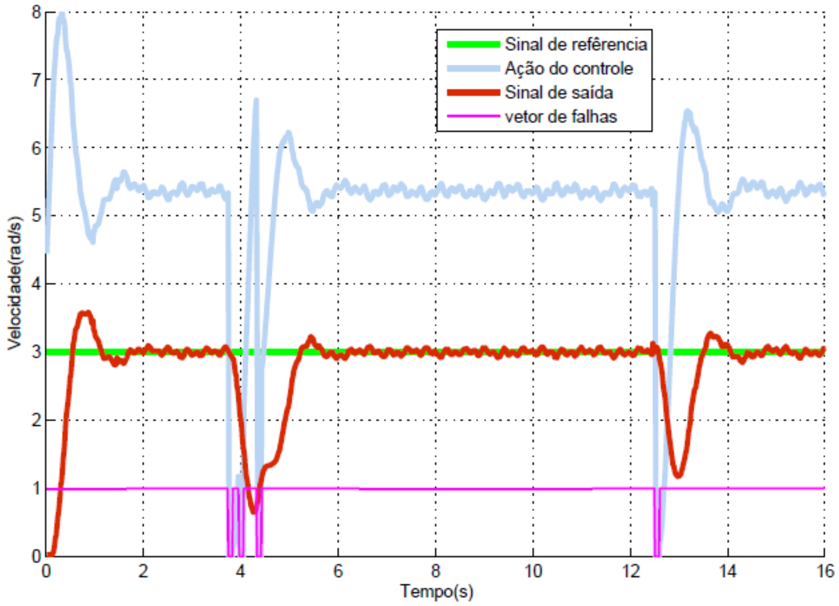

Figura 9 – Efeito do controle PI sujeito a falhas para uma realização.
Fonte: Autoria própria.

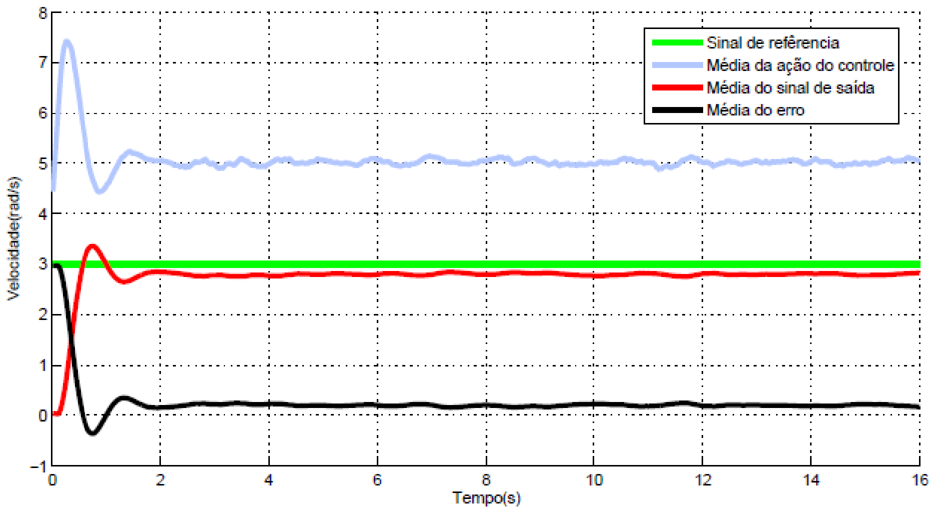

Figura 10 – Média do sinal de saída para 600 realizações.
Fonte: Autoria própria.

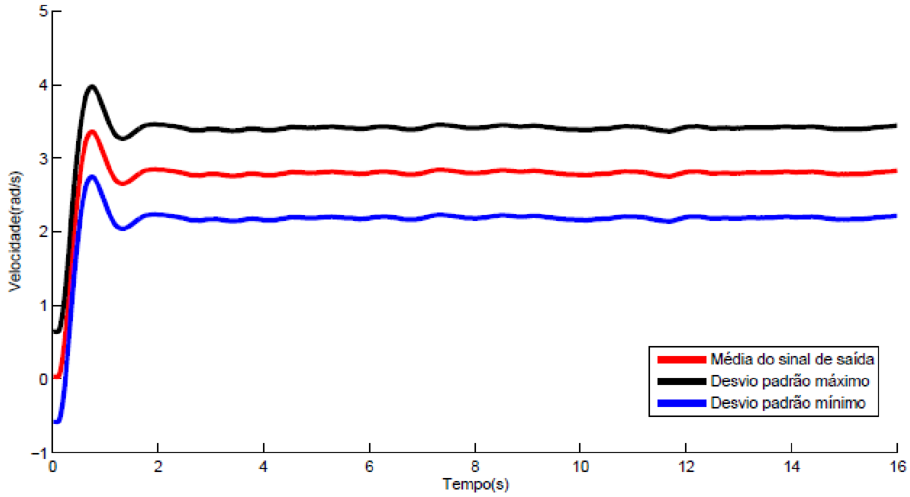

Figura 11 – **Média e desvio padrão para 600 realizações.**
Fonte: Autoria própria.

Em resumo, nota-se experimentalmente que o sistema mantén-se estável, o que confirma o resultado apresentado no Teorema 1.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentou-se resultados de estabilidade para um modelo de Bouc-Wen com controle PI sujeito a falhas aleatórias. Tais falhas seguem um processo de Poisson.

A monografia revisita um método de identificação para o modelo de Bouc-Wen, que usa a descrição analítica do ciclo limite de histerese. O método consiste em excitar o sistema de histerese com dois sinais de entrada, que diferem por uma constante q, e usar os ciclos limite obtidos para derivar os parâmetros do modelo de Bouc-Wen. Esta técnica fornece os valores exatos dos parâmetros (IKHOUANE; RODELLAR, 2007).

Neste trabalho usou-se a hipótese do Teorema 1 na seção 2.6, para desenhar um controlador PI sujeito a falhas aleatórias, que estabilize o sistema modelado pelas equações de Bouc-Wen. Com um experimento prático, que serve para avaliar as condições que garantam a estabilidade em probabilidade do sinal de saída, $\Phi_{BW}(x)(t)$ para w (3) limitado, no qual se uso o controle PI sujeito a falhas aleatórias.

A simulações numéricas dadas nas Figura 9 e Figura 10, mostram a eficácia do controle PI sujeito a falhas aleatórias, para estabilizar o sistema com histerese.

REFERÊNCIAS

BARRY, J. R. **Probabilidade: um curso em nivel intermediário**. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA, 2008. 304 p.

BERTTONI, G.; MAYERGOYZ, I. **The Science of Hysteresis**. [S.l.]: Elsevier Inc, 2005. 2097 p.

BOUC, R. **Forced vibration of mechanical systems with hysteresis**. [S.l.: s.n.], 1967. 315 p.

CHEN, T. **Linear system, theory and desing**. 3rd. ed. [S.l.]: Oxford University Press, 1998.

DUHEM, P. **Die dauernden aenderungen und die thermodynamik**. [S.l.: s.n.], 1897. 543-589 p.

HIRSCH, M.; SMALE, S. **Differential equations, Dynamical systems and Linear algebra**. 1rd. ed. [S.l.]: Acadmic Press, 1974.

IKHOANE, F.; RODELLAR, J. **On the hysteretic Bouc-Wen model, part I: Forced limit cycle characterization**. [S.l.: s.n.], 2005. 6378 p.

IKHOUANE, F. **Characterization of hysteresis processes**. [S.l.: s.n.], 2013. Doi: 10.1007/s00498-012-0099-6.

IKHOUANE, F.; GOMIS, O. **A limit cycle approach for the parametric identification of hysteretic systems**. [S.l.: s.n.], 2008. 663-669 p.

IKHOUANE, F.; MAÑOSA, V.; RODELLAR, J. **Dynamic properties of the hysteretic Bouc-Wen model**. [S.l.: s.n.], 2007. 197-205 p.

IKHOUANE, F.; RODELLAR, J. **On the hysteresis Bouc-Wen model**. [S.l.]: Non Linear Dynamics, 2005. 63-78 p.

IKHOUANE, F.; RODELLAR, J. **A linear controller for hysteretic systems**. [S.l.: s.n.], 2006. 340-344 p.

IKHOUANE, F.; RODELLAR, J. **Systems with hysteresis: Analysis, identification and control using the Bouc-Wen model**. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, 2007.

ISMAIL, M.; IKHOUANE, F.; RODELLAR, J. **The Hysteresis Bouc Wen, a Survey**. [S.l.: s.n.], 2009. 161-189 p.

KOZIN, F. A survey of stability of stochastic systems. **Automatica**, v. 5, p. 95–112, 1969.

LIN, Z.; BAI, Z. **Probability Inequalities**. 1rd. ed. [S.l.]: Springer Verlag, 2011.

PREISACH, F. **Ber die magnetische nachwirkung**. [S.l.: s.n.], 1935. 277-302 p.

ROCHDI, Y.; GIRI, F.; IKHOUANE, F.; CHAOUI, F. Z.; RODELLAR, J. **Parametric identification of nonlinear hysteretic systems**. [S.l.: s.n.], 2009. 393-404 p.

ROSS, S. M. **Introduction to probability models**. 3rd. ed. [S.l.]: Acadmic Press, 1985.

SPENCER, F. **Recent trends in vibration control**. [S.l.: s.n.], 1996. 1-6 p.

TAKACS, J. **A phenomenological mathematical model of hysteresis**. [S.l.: s.n.], 2000. 1002-1014 p.

WEN, K. **Method for random vibration of hysteretic systems**. [S.l.: s.n.], 1976. 249-263 p.