

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

FELIPE COSTA TEIXEIRA

**ANÁLISE NUMÉRICA DO FENÔMENO DE FLAMBAGEM EM BARRAS SOB
COMPRESSÃO CENTRADA, FORMADAS POR MATERIAIS COMPOSTOS,
EM SEÇÕES TRANSVERSAIS TIPO “I” E TUBULAR CIRCULAR**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

LONDRINA
2019

FELIPE COSTA TEIXEIRA

**ANÁLISE NUMÉRICA DO FENÔMENO DE FLAMBAGEM EM BARRAS SOB
COMPRESSÃO CENTRADA, FORMADAS POR MATERIAIS COMPOSTOS,
EM SEÇÕES TRANSVERSAIS TIPO “I” E TUBULAR CIRCULAR**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso 2, do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel.

Orientador: Prof. Dr. Diego Amadeu Furtado Torres

Londrina
2019



TERMO DE APROVAÇÃO

**ANÁLISE NUMÉRICA DO FENÔMENO DE FLAMBAGEM EM BARRAS SOB
COMPRESSÃO CENTRADA, FORMADAS POR MATERIAIS COMPOSTOS,
EM SEÇÕES TRANSVERSAIS TIPO "I" E TUBULAR CIRCULAR**

por

FELIPE COSTA TEIXEIRA

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado(a) em 12 de dezembro de 2019 como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica. O(a) candidato(a) foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

(Prof. Dr. Diego Amadeu Furtado Torres)
Prof.(a) Orientador(a)

(Prof. Dr. João Luiz do Vale)
Membro titular

(Prof. Dr. Jederson da Silva)
Membro titular

Dedico este trabalho primeiramente à Deus, por ser essencial em minha vida, autor do meu destino, meu guia, socorro presente na hora da angústia, ao meu pai Isaltino, minha mãe Tania, e meu irmão Mateus.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus, por ter me proporcionado todas as condições para que pudesse concluir esta etapa da minha vida.

Agradeço aos meus pais Isaltino e Tânia, pela dedicação e pela dedicação de estar fazendo sempre o melhor possível para que eu tivesse uma boa formação, e meu irmão Mateus, pois eles estiveram presentes em toda esta jornada, tendo um papel principal de apoio e suporte.

Ao meu orientador Prof. Dr. Diego Amadeu Furtado Torres pela paciência e pelo empenho em querer transmitir o conhecimento para que este trabalho pudesse ser realizado.

Aos meus colegas Clayson Morikawa, João Sesti, Guilherme Morete, Willian Faria, Rafael Oliveira, e entre tantos outros, que estiveram junto comigo nesta batalha, e que também tiveram papel fundamental em minha formação.

À minha namorada Bruna Narumi Branco Miura, que deixei de estar presente em tantas ocasiões para me esforçar na faculdade, e que sempre foi compreensiva e me apoiou.

Enfim, a todos os que por algum motivo contribuíram para a realização desta pesquisa.

“Cada descoberta nova da ciência é uma porta nova pela qual encontro mais uma vez Deus, o autor dela”. (Albert Einstein)

RESUMO

TEIXEIRA, Felipe Costa. **Análise numérica do fenômeno de flambagem em barras sob compressão centrada, formadas por materiais compostos, em seções transversais tipo “I” e tubular circular.** 2019. 168 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Engenharia Mecânica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2019.

Devido à necessidade de se desenvolver materiais mais resistentes e mais leves surgiram os materiais compostos, que são aplicados em diversas áreas da engenharia como, por exemplo, aeronáutica, mecânica, naval, civil entre outras. O presente trabalho dedica-se à utilização do Método de Elementos Finitos, através do software ANSYS, objetivando a previsão do comportamento de elementos estruturais comprimidos em relação à flambagem, tanto local como global. São considerados materiais compostos ortotrópicos (plástico reforçado com fibra de vidro), e pretende-se avaliar a influência de parâmetros geométricos, da sequência de laminação, e da orientação de reforços, na obtenção de cargas críticas de flambagem. Estas cargas críticas são facilmente determinadas para perfis de material isotrópico, no entanto, para materiais compostos, as equações não são triviais, e necessitam ser modificadas, sendo frequentemente desenvolvidas através de correlações com dados experimentais. Neste trabalho, foram utilizados dois tipos de elementos nas modelagens numéricas: o SHELL 181, que utiliza formulação bidimensional, e o elemento SOLID 46, que utiliza formulação tridimensional. Esta comparação foi realizada com o propósito de se verificar os erros obtidos com diferentes estratégias de modelagem, considerando-se dados experimentais da literatura. Uma vez escolhida a estratégia de modelagem, observou-se que para modos de flambagem locais em vigas “I”, o melhor desempenho ocorre no caso de sequência de laminação [SF ROV CSM CSM ROV SF], sendo as lâminas SF orientadas a $[45^\circ / -45^\circ]$ nas mesas e $[90^\circ / -90^\circ]$ na alma. Já para os modos de flambagem locais em tubos de seção circular, a melhor sequência de empilhamento também foi a [SF ROV CSM CSM ROV SF], com o reforço SF a $[90^\circ / -90^\circ]$. Para modos globais, o único módulo elástico relevante na resposta da carga crítica é a constante elástica de membrana paralela ao comprimento da peça, visto que para todos os casos onde se manifestaram modos globais, a melhor angulação de reforço tipo SF foi a $[0^\circ / 0^\circ]$. Em se tratando de modos locais, os erros relativos apresentados entre o MEF e métodos analíticos e semi-analíticos foram relativamente baixos somente para algumas faixas estreitas de angulação do reforço tipo SF. Já para modos globais, os erros em geral são menores, indicando maior concordância entre as várias fontes de dados disponíveis e os resultados numéricos alcançados neste trabalho.

Palavras-chave: Flambagem. Plástico Reforçado com Fibra de Vidro (PRFV). Viga I. Tubo de seção circular. Materiais Compostos.

ABSTRACT

TEIXEIRA, Felipe Costa. **Numeric analysis of the buckling phenomenon in bars under centered compression, formed by composite materials, in transversal section "I" type and circular tubular.** 2019. 168 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Engenharia Mecânica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2019.

Composite materials have emerged due to the need of developing stronger and lighter materials. They are applied in several engineering branches such as aeronautics, mechanics, naval, civil among others. The present work is dedicated to the use of the Finite Element Method, through the ANSYS software, aiming to predict the behavior of compressed structural elements in relation to buckling, both local and global. Orthotropic composite materials (glass fiber reinforced plastic) are considered, and it is intended to evaluate the influence of geometrical parameters, the lamination sequence, and the orientation of reinforcements, in obtaining critical buckling loads. These critical loads are easily determined for isotropic material profiles, however for composite materials the equations are not trivial and need to be modified and are often developed through correlations with experimental data. In this work, two types of elements were used in numerical modeling: SHELL 181, which uses two-dimensional formulation, and SOLID 46, which uses three-dimensional formulation. This comparison was performed with the purpose of verifying the errors obtained with different modeling strategies, considering experimental data from the literature. Once the modeling strategy was chosen, it was observed that for local buckling modes in "I" beams, the best performance occurs in the case of stacking sequence [SF ROV CSM CSM ROV SF], with SF layers oriented at $[45^\circ / -45^\circ]$ on the tables and $[90^\circ / -90^\circ]$ in the web. For local buckling modes in circular section tubes, the best stacking sequence was also [SF ROV CSM CSM ROV SF], with SF reinforcement at $[90^\circ / -90^\circ]$. For global modes, the only relevant elastic modulus in the critical load response is the membrane constant parallel to the profile length, since for all cases in which global modes have manifested, the best SF-type reinforcement angle was $[0^\circ / 0^\circ]$. For local modes, the relative errors presented between the FEM results and analytical and semi-analytical methods were relatively low only for some narrow variation ranges of SF-angle reinforcement. For global modes, errors are generally smaller, indicating greater agreement between the several data sources available and the numerical results achieved in this work.

Keywords: Buckling. Glass Fiber Reinforced Plastic (GFRP). I Beam. Tube of circular section. Composite Materials.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Percentual de materiais compósitos utilizados na fabricação de estruturas de aeronaves, de acordo com o ano de lançamento.....	21
Figura 2 - Componentes em material composto em aviões-caça.....	22
Figura 3 - Componentes em material composto em automóveis.	22
Figura 4 - Parâmetros geométricos da seção transversal de uma viga I.....	24
Figura 5 - Flambagem local em viga I obtida por modelagem numérica através do <i>software</i> ANSYS®	25
Figura 6 - Flambagem local em tubo de seção circular obtida por modelagem numérica através do <i>software</i> ANSYS®	25
Figura 7 - Flambagem global por flexão em torno do eixo de menor inércia em viga I.	26
Figura 8 - Flambagem global em tubo de seção circular através do <i>software</i> ANSYS®.	27
Figura 9 - Representação do diagrama da classificação dos materiais compostos. .	30
Figura 10 - Esquema de configuração interna de um elemento pultrudado.	31
Figura 11 - Arquitetura de uma seção transversal de pultrudado.....	31
Figura 12 - Vidro nas formas típicas de reforço: <i>roving</i> , tecidos bidirecionais e mantas de fibras longas e curtas.	32
Figura 13 - Reforço do tipo <i>SF</i>	33
Figura 14 - Composto laminado com várias direções de reforços.....	33
Figura 15 - Linha de produção de elementos pultrudados reforçados com fibras. Fonte: Pultrusão do Brasil (2018).....	34

Figura 16 - Estantes de <i>roving</i> e mantas. Fonte: Fiberprofil (2019).	35
Figura 17 - Chapa-guia e câmara de impregnação.	35
Figura 18 - Representação de algumas configurações das fibras em um material de reforço.	38
Figura 19 - Torre de linha de transmissão de energia, Califórnia, EUA.	39
Figura 20 - Análise microscópica de seção transversal próxima à região de ruptura de um corpo de prova submetido a um ensaio de tração.....	44
Figura 21: Sistema de eixos de ortotropia.	45
Figura 22 - Abordagens para determinar cargas críticas de flambagem local: a) placas discretas com condições simplesmente suportadas; b) placas discretas com bordas rotativamente restringidas; e c) seção completa.	62
Figura 23 - Comprimento de flambagem <i>L_{eff}</i>	66
Figura 24 - Efeitos das condições nas bordas na flambagem local causando força excêntrica.	69
Figura 25 - Representação do gráfico de Southwell.....	70
Figura 26 - Sistema força deslocamento de uma mola.	81
Figura 27 - Curva característica de análise linear.	82
Figura 28 - Curva característica de análise não linear.	83
Figura 29 - Curvas de flambagem.	85
Figura 30 - Contextualização da instabilidade de perfis.	86
Figura 31 - Elemento Shell 181.	87
Figura 32 - Elemento Solid 46. Fonte: ANSYS® <i>Documentation</i> 2019.	88

Figura 33 - Carga Crítica de Flambagem local de mesa e alma para sequência [CSM ROV SF SF ROV CSM] (100x100x6,4) comprimento = 100 cm.	98
Figura 34 - Carga Crítica de Flambagem local de mesa e alma para sequência [ROV CSM SF SF CSM ROV] (100x100x6,4) comprimento = 100 cm.	99
Figura 35 - Carga Crítica de Flambagem local de mesa e alma para sequência [ROV SF CSM CSM SF ROV] (100x100x6,4) comprimento = 100 cm.	100
Figura 36 - Carga Crítica de Flambagem local de mesa e alma para sequência [CSM SF ROV ROV SF CSM] (100x100x6,4) comprimento = 100 cm.	101
Figura 37 - Carga Crítica de Flambagem local de mesa e alma para sequência [SF CSM ROV ROV CSM SF] (100x100x6,4) comprimento = 100 cm.	102
Figura 38 - Carga Crítica de Flambagem local de mesa e alma para sequência [SF ROV CSM CSM ROV SF] (100x100x6,4) comprimento = 100 cm.	103
Figura 39 - Carga crítica de flambagem local de mesa e alma para sequência [SF ROV CSM CSM ROV SF] (100x75x6,4) comprimento = 100 cm.	105
Figura 40 - Carga crítica de flambagem local de mesa e alma para sequência [SF ROV CSM CSM ROV SF] (100x50x6,4) comprimento = 100 cm.	106
Figura 41 - Carga crítica de flambagem global com flexão em torno do eixo de menor inércia para sequência [SF ROV CSM CSM ROV SF] (100x50x6,4) comprimento = 100 cm.	107
Figura 42 - Carga crítica de flambagem global com flexo-torção para sequência [SF ROV CSM CSM ROV SF] (100x50x6,4) comprimento = 100 cm.	108
Figura 43 - Carga crítica de flambagem local de mesa e alma para sequência [SF ROV CSM CSM ROV SF] (100x100x6,4) comprimento = 150 cm.	109
Figura 44: Carga crítica de flambagem local de mesa e alma para sequência [SF ROV CSM CSM ROV SF] (100x100x6,4) comprimento = 200 cm.	110

Figura 45: Carga crítica de flambagem global com flexão em torno do eixo de menor inércia para sequência [SF ROV CSM CSM ROV SF] (100x100x6,4) comprimento = 200 cm.	111
Figura 46 - Carga crítica de flambagem global com flexo-torção para sequência [SF ROV CSM CSM ROV SF] (100x100x6,4) comprimento = 200 cm.	112
Figura 47 - Erro relativo de carga crítica de flambagem local de mesa e alma, utilizando a equação (6.7) para viga I com reforço [SF ROV CSM CSM ROV SF] e geometria (100x100x6,4) comprimento = 100 cm.	114
Figura 48 - Erro relativo de carga crítica de flambagem local de mesa e alma, utilizando a equação (6.4) para viga I com reforço [SF ROV CSM CSM ROV SF] e geometria (100x100x6,4) comprimento = 100 cm.	114
Figura 49: Erro relativo de carga crítica de flambagem local de mesa e alma, utilizando a equação (6.7) para viga I com reforço [SF ROV CSM CSM ROV SF] e geometria (100x100x6,4) comprimento = 200 cm.	115
Figura 50: Erro relativo de carga crítica de flambagem local de mesa e alma, utilizando a equação (6.4) para viga I com reforço [SF ROV CSM CSM ROV SF] e geometria (100x100x6,4) 200cm.	116
Figura 51 - Coeficiente de flambagem k , vs L/bw , para seções I.	117
Figura 52 - Erro relativo de carga crítica de flambagem global com flexão em torno do eixo de menor inércia, para viga I com reforço [SF ROV CSM CSM ROV SF] e geometria (100x100x6,4) comprimento = 200 cm.	118
Figura 53 - Erro relativo de carga crítica de flambagem global com flexo-torção, para viga I com reforço [SF ROV CSM CSM ROV SF] e geometria (100x100x6,4) comprimento = 200cm.	118
Figura 54 - Carga crítica de flambagem local para sequência [CSM ROV SF SF ROV CSM] espessura = 2,4 mm.	120

Figura 55 - Carga crítica de flambagem global para sequência [CSM ROV SF SF ROV CSM] espessura = 2,4 mm.....	121
Figura 56 - Carga crítica de flambagem local para sequência [CSM SF ROV ROV SF CSM] espessura = 2,4 mm.....	122
Figura 57 - Carga crítica de flambagem global para sequência [CSM SF ROV ROV SF CSM] espessura = 2,4 mm.....	123
Figura 58 - Carga crítica de flambagem local para sequência [ROV SF CSM CSM SF ROV] espessura = 2,4 mm.	124
Figura 59 - Carga crítica de flambagem global para sequência [ROV SF CSM CSM SF ROV] espessura = 2,4 mm.	125
Figura 60 - Carga crítica de flambagem local para sequência [SF ROV CSM CSM ROV SF] espessura = 2,4 mm.	126
Figura 61 - Carga crítica de flambagem global para sequência [SF ROV CSM CSM ROV SF] espessura = 2,4 mm.	127
Figura 62: Carga crítica de flambagem local para sequência [CSM ROV SF SF ROV CSM] espessura = 7,5 mm.....	128
Figura 63 - Carga crítica de flambagem global para sequência [CSM ROV SF SF ROV CSM] espessura = 7,5 mm.....	129
Figura 64 - Carga crítica de flambagem local para sequência [CSM SF ROV ROV SF CSM] espessura = 7,5 mm.....	130
Figura 65 - Carga crítica de flambagem global para sequência [CSM SF ROV ROV SF CSM] espessura = 7,5 mm.....	131
Figura 66 - Carga crítica de flambagem local para sequência [ROV SF CSM CSM SF ROV] espessura = 7,5 mm.	132

Figura 67 - Carga crítica de flambagem global para sequência [ROV SF CSM CSM SF ROV] espessura = 7,5 mm.	133
Figura 68: Carga crítica de flambagem local para sequência [SF ROV CSM CSM ROV SF] espessura = 7,5 mm.	134
Figura 69 - Carga crítica de flambagem global para sequência [SF ROV CSM CSM ROV SF] espessura = 7,5 mm.	135
Figura 70 - Erro relativo carga crítica de flambagem local para espessura = 7,5 mm.	136
Figura 71 - Erro relativo carga crítica de flambagem global para espessura = 7,5 mm.	137

LISTA DE SIMBOLOS

Alfabeto Grego

ε_1	Deformação normal no eixo longitudinal (Eixo 1)
ε_2	Deformação normal no eixo transversal (Eixo 2)
ε_3	Deformação normal no eixo ortogonal à 1 e 2
γ_1	Deformação cisalhante no eixo longitudinal (Eixo 1)
γ_2	Deformação cisalhante no eixo transversal (Eixo 2)
γ_3	Deformação cisalhante no eixo ortogonal à 1 e 2
σ_1	Tensão normal no eixo longitudinal (Eixo 1)
σ_2	Tensão normal no eixo transversal (Eixo 2)
σ_3	Tensão normal no eixo ortogonal à 1 e 2
σ_f	Tensão normal na mesa para viga simplesmente apoiada
σ_w	Tensão normal na alma para viga simplesmente apoiada
$\sigma_{cr}^{local, I-flange}$	Tensão crítica de flambagem local na mesa
λ_m	Metade do comprimento de onda
λ_n	Comprimento de onda circunferencial
ν_{12}	Coefficiente de Poisson no plano dado pelas direções 1 e 2
$\nu_{LT,f}$	Coefficiente de Poisson no plano longitudinal da mesa
$\nu_{LT,w}$	Coefficiente de Poisson no plano longitudinal da alma
$\nu_{TL,f}$	Coefficiente de Poisson no plano transversal da mesa
$\nu_{TL,w}$	Coefficiente de Poisson no plano transversal da alma
ρ	Densidade da fibra do <i>continuous strand mat</i>
ρ_c	Massa específica de um material composto
ρ_f	Massa específica de fibras de um material composto
ρ_m	Massa específica de matriz de um material composto

Alfabeto Latino

a	Metade do comprimento de onda
A_{ij}	Coefficientes da matriz de comportamento em membrana
A_{web}	Área da alma
A_z	Área da seção transversal
b_f	Largura de mesa de viga de seção I

B_{ij}	Coeficientes da matriz de acoplamento membrana/flexão-torção
b_w	Altura de alma de viga de seção I
D_{ij}	Coeficientes da matriz de comportamento em flexão
E	Módulo de Elasticidade
E_1	Módulo de Elasticidade longitudinal do composto
E_2	Módulo de Elasticidade transversal do composto
E_{CSM}	Módulo de Elasticidade do <i>continuous strand mat</i>
E_f	Módulo de Elasticidade longitudinal das fibras
E^{f_1}	Módulo de Elasticidade longitudinal das fibras
E^{f_2}	Módulo de Elasticidade transversal das fibras
$E_{L,f}$	Módulo de Elasticidade longitudinal da flange
$E_{L,w}$	Módulo de Elasticidade longitudinal da alma
E_m	Módulo de Elasticidade longitudinal da matriz
$E_{T,w}$	Módulo de Elasticidade transversal da alma
F_{cr}	Força crítica de flambagem
$F_{crw,SS}$	Força crítica de flambagem na alma para viga simplesmente apoiada
$F_{crf,FS}$	Força crítica de flambagem na mesa para viga engastada em uma extremidade e livre na outra
G_{12}	Módulo de Coulomb referente aos planos 1 e 2
G_{CSM}	Módulo de Coulomb do <i>continuous strand mat</i>
G_f	Módulo de Coulomb das fibras pela Regra das Misturas
$G^{f_{12}}$	Módulo de Coulomb das fibras pela Regra das Misturas Modificada
G_{LT}	Módulo de Cisalhamento da seção
$G_{LT,f}$	Módulo de Coulomb no plano longitudinal da flange
$G_{LT,w}$	Módulo de Coulomb no plano longitudinal da alma
G_m	Módulo de Coulomb da matriz
H_{ij}	Coeficientes da matriz de rigidez de cisalhamento transversal
L_{eff}	Comprimento efetivo da seção
m_c	Massa total do composto
m_f	Massa total das fibras de um material composto
M_f	Fração mássica de fibras
m_m	Massa total da matriz de um material composto
M_m	Fração mássica de matriz

N_x	Forças normais por unidade de comprimento no eixo x
N_y	Forças normais por unidade de comprimento no eixo y
p	Função do coeficiente de restrição elástica
P_{cr}	Carga crítica de flambagem global
P_{euler}	Carga crítica de flambagem da equação de Euler
P_u	Carga última suportada pela peça
q	Função do coeficiente de restrição elástica
Q_x	Força cisalhante na direção x
Q_y	Força cisalhante na direção y
t_{CSM}	Espessura do <i>continuous strand mat</i>
t_f	Espessura da mesa de viga de seção I
t_w	Espessura da alma de viga de seção I
T_{xy}	Forças cisalhante por unidade de comprimento no plano xy
v_c	Volume total de um material composto
ν_{CSM}	Coefficiente de Poisson do <i>continuous strand mat</i>
V_{CSM}	Fração volumétrica do <i>continuous strand mat</i>
v_f	Volume total de fibras de um material composto
V_f	Fração volumétrica de fibras de um material composto
v_m	Volume total da matriz de um material composto
v_v	Volume total de vazios de um material composto
V_v	Fração volumétrica de vazios
w	Peso por unidade de área
W_c	Peso total do material composto
W_f	Peso total das fibras de um material composto
γ_c	Peso específico do material composto
γ_f	Peso específico de fibras do material composto
γ_{xz}	Deformação cisalhante no plano médio em relação aos eixos x e z
γ_{yz}	Deformação cisalhante no plano médio em relação aos eixos y e z

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	20
1.1	Tipos de flambagem e suas características	24
1.1.1	Flambagem Local	24
1.1.2	Flambagem Global	26
1.2	Objetivo Geral	27
1.2.1	Objetivo Específico	27
2	JUSTIFICATIVA	29
3	CLASSIFICAÇÃO DOS MATERIAIS COMPOSTOS	30
3.1	Perfil pultrudado de resina reforçada com fibras	31
3.1.1	Elementos Pultrudados.....	31
3.2	O processo de pultrusão	33
3.2.1	Comportamento estrutural das fibras de vidro.....	36
3.2.2	Comportamento estrutural da matriz	36
3.2.3	Materiais de reforço	37
3.3	Reforço de fibra de vidro (RFV)	38
4	PROPRIEDADES FÍSICAS E MECÂNICAS DE UMA LÂMINA DE MATERIAL COMPOSTO REFORÇADO COM FIBRAS	41
4.1	Considerações Iniciais	41
4.2	Determinação das Propriedades Mecânicas	42
4.2.1	Fração volumétrica de fibras	43
4.2.2	Propriedades mecânicas de uma lâmina com fibras unidirecionais	45
4.2.3	Propriedades mecânicas de uma lâmina reforçada com <i>continuous strand mat</i> 48	
4.2.4	Coeficiente de Poisson	49
5	COMPORTAMENTO MECÂNICO DE COMPOSTOS LAMINADOS	50
5.1	Equações constitutivas para uma lâmina de material composto	50
5.2	Teoria clássica de placas laminadas	53
5.3	Teoria de Primeira Ordem	56
6	METODOLOGIA	59
6.1	Método analítico para determinação da carga crítica de flambagem em viga I	59

6.1.1	Flambagem Local	61
6.1.2	Flambagem global por flexão	64
6.1.1	Flambagem global por flexo-torção	66
6.1.2	Investigações experimentais anteriores relatadas na literatura	67
6.2	Método analítico para cálculo da carga crítica de flambagem em tubo de seção circular	73
7	PRINCÍPIO DA APROXIMAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS	78
7.1	Análise linear de estabilidade	81
7.2	Análise não linear de estabilidade	82
7.3	Análise linear e não linear	84
7.4	Elemento Shell 181	87
7.5	Elemento Solid 46.....	88
8	VALIDAÇÃO DOS MODELOS NUMÉRICOS.....	89
8.1	Perfil I.....	89
8.1.1	Verificação do modelo numérico de viga I	90
8.2	Tubo de Seção Transversal Circular.....	91
8.2.1	Validação dos modelos numéricos para tubo de seção circular	93
9	RESULTADOS E DISCUSSÕES	95
9.1	Definição das propriedades mecânicas utilizadas	95
9.2	Resultados para viga I.....	96
9.3	Resultados para viga tubo de seção circular.....	119
10	CONCLUSÃO.....	138
	REFERÊNCIAS.....	141

1 INTRODUÇÃO

O interesse em utilizar materiais compostos está ligado a dois fatores: econômico e performance, visto que o material composto apresenta uma alta resistência e baixo peso específico, e, conseqüentemente, economizando combustível, como a indústria automobilística, aeronáutica e aeroespacial. A redução da massa total do produto pode chegar a 30% ou mais (PEREIRA, J. C., 2006), em função da aplicação do material composto.

A performance vem da fácil adequação dos materiais compostos a várias aplicações. Em particular, os plásticos reforçados com fibras (PRF) são muito bem aplicados para: ambientes quimicamente corrosivos, ambientes onde podem haver abalos sísmicos, aplicações em baixas e altas temperaturas, devido a sua resistência mecânica a baixas temperaturas, e o baixo coeficiente de expansão térmica a altas temperaturas, além de ter características decorativas (MOSALLAM, 2002).

Os materiais compostos reforçados com fibras são materiais resultantes da junção de uma matriz plástica com reforços de fibras. As fibras mais utilizadas na indústria são as fibras de vidro, de carbono e de aramida (*kevlar*), além das menos usuais, como é o caso da fibra de boro e alumínio oxidado (MALLICK apud NAGAHAMA, 2003). O primeiro material composto reforçado com fibras que se tem conhecimento, foi produzido à partir de uma matriz de argamassa com fibras naturais, que é de grande interesse econômico para o Brasil.

Os compostos surgiram da necessidade de redução de peso, preservando a resistência e robustez dos componentes estruturais (PEREIRA, J. C., 2006). Por isso foram empregados primeiramente na área aeronáutica, o peso é um fator importantíssimo no desempenho das aeronaves. A Figura 1 mostra a evolução da utilização de materiais compostos na indústria aeronáutica comercial.

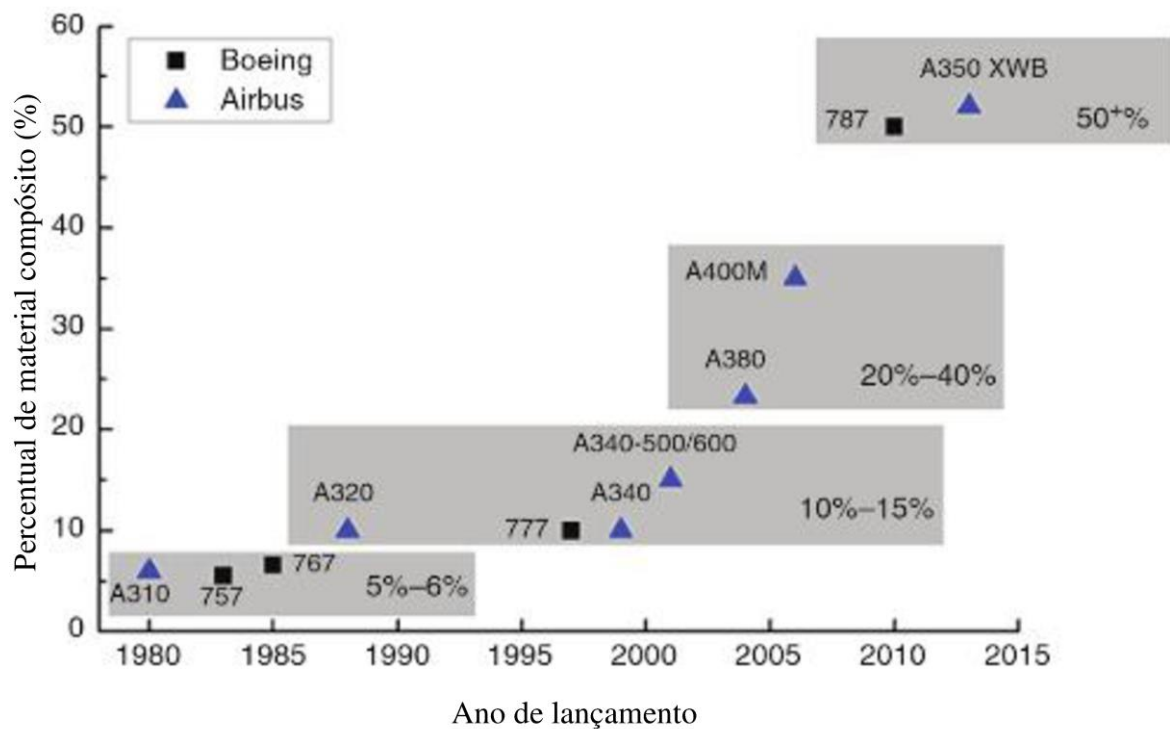


Figura 1 - Percentual de materiais compósitos utilizados na fabricação de estruturas de aeronaves, de acordo com o ano de lançamento.
Fonte: Ren et al., (2017).

Atualmente já está mais difundida a aplicação deste tipo de material em várias partes das aeronaves em substituição aos materiais metálicos, como: fuselagem, *spoilers*, portas de trem de aterrissagem, portas internas, etc (GAY, 2015; CAMPBELL, 2006; SHACKELFORD, 2008). Normalmente estes compostos são fabricados de uma maneira diferente da abordada neste trabalho (processo de pultrusão), pois são fabricados em uma placa de baixa densidade, contra-placadas (colada sob forte pressão) por placas finas de alta resistência. Esta configuração geralmente é denominada de sanduíche, porém não deixa de ser um composto, visto que combinam diferentes materiais. A Figura 2 mostra partes de uma aeronave onde são utilizados materiais compostos.

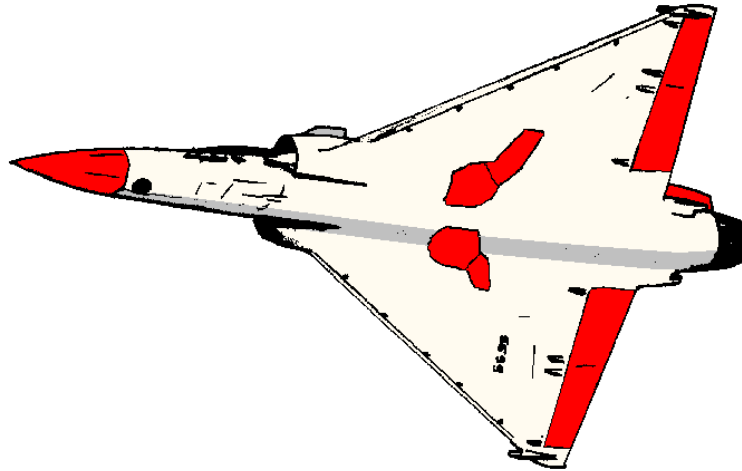


Figura 2 - Componentes em material composto em aviões-caça.
Fonte: Pereira (2005).

Outra aplicação bastante utilizada, porém bem mais recente, é dentro da indústria automobilística. Inicialmente, eram produzidos somente para-choques e tetos de automóveis. O material composto é utilizado para fabricação de capôs, carters de óleo, colunas de direção, árvores de transmissão, molas laminadas, painéis, etc. (PEREIRA, 2005, p. 6).

Uma das grandes vantagens trazidas para o meio automobilístico pelos materiais compostos é, além da redução do peso, a facilidade em confeccionar peças com superfícies complexas (PEREIRA, 2005, p. 6). A Figura 3 aponta diversas partes de um veículo onde são empregados materiais compostos.



Figura 3 - Componentes em material composto em automóveis.
Fonte: Pereira (2005).

O material composto na indústria automobilística começou a ser empregado à partir de uma atividade esportiva, a Fórmula 1, considerada um laboratório de

inovações tecnológicas para a indústria automobilística, onde o que se emprega muitas vezes será utilizado futuramente em carros de passeio (PEREIRA, J. C., 2006). Ademais, neste caso a relação peso/potência é fundamental para um bom desempenho.

O composto também é muito empregado em variadas atividades esportivas, onde a redução de peso resulta em melhor desempenho no quesito redução de tempo. Exemplos disso são: barcos a vela, skis, bicicletas, etc.. Além disso se procura também agilidade e precisão, como nas raquetes de tênis, tacos de golfe e pranchas de surfe.

O fenômeno físico que será observado no presente trabalho será a flambagem, que ocorre em peças esbeltas (peças onde a área de seção transversal é pequena em relação ao seu comprimento), quando submetidas a um esforço de compressão axial. A flambagem ocorre quando a peça sofre deslocamentos laterais devido à compressão axial. Este fenômeno é considerado uma instabilidade elástica, assim, a peça pode perder sua estabilidade sem que o material já tenha experimentado algum tipo de ruptura. A deflexão lateral ocorrerá geralmente em um plano perpendicular ao eixo de menor inércia da seção transversal.

A carga crítica para a ocorrência da flambagem não depende do limite de resistência à compressão do material, mas de seu módulo de elasticidade E (BEER e JOHNSTON, 1996). Para vigas de seção maciça, o único modo de flambagem que ocorre é a chamada flambagem global, onde a instabilidade se dá ao longo de todo o comprimento da peça. Já em vigas de seção aberta, como viga "I", e viga de seção fechada, como o tubo de seção circular, além da flambagem global, pode ocorrer também o fenômeno de flambagem local, dependendo de alguns parâmetros geométricos, como no caso de viga I, sua altura de alma " b_w ", sua largura de mesa " b_f ", a altura total da seção " H " e sua espessura de mesa e alma, " t_f " e " t_w ", respectivamente, como mostrado na Figura 4.

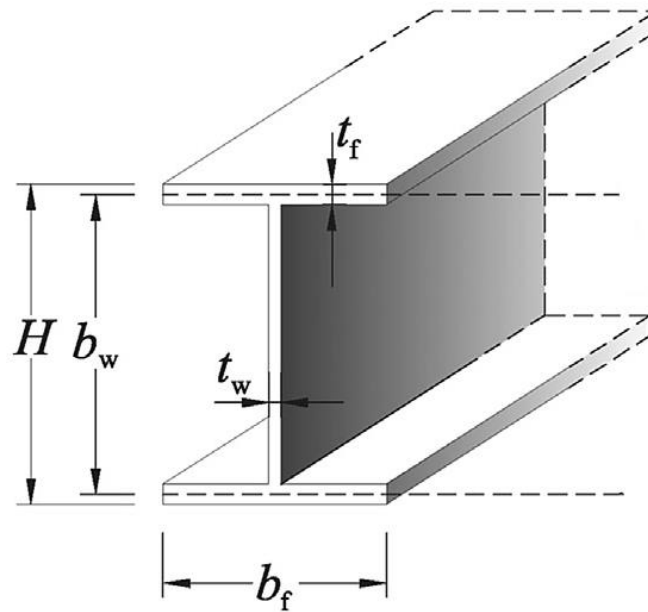


Figura 4 - Parâmetros geométricos da seção transversal de uma viga I.
Fonte: Adaptado de Ascione (2016).

1.1 Tipos de flambagem e suas características

1.1.1 Flambagem Local

Flambagem local pode ser definida pela mudança repentina na forma da estrutura, com aparecimento de grandes deslocamentos transversais, por flexão, sem necessariamente provocar a curvatura global do elemento estrutural (DE CASTRO E SILVA, 2006). É conhecida também como “flambagem de parede fina”, ou seja, não acontece em componentes estruturais com seção transversal de grande espessura. Este tipo de instabilidade provoca um deslocamento transversal localizado em um setor da peça, diferentemente da flambagem global, na qual a perda de retinidade se dá ao longo do comprimento da peça toda. Para viga I, existem dois tipos de flambagem local: flambagem local de mesa e flambagem local de alma, sendo que dependendo das propriedades geométricas, podem ocorrer simultaneamente ou isoladamente. Já para o tubo, existe apenas um tipo de flambagem local, visto que sua seção transversal possui um perímetro fechado e, por isso, exibindo menos liberdade à deformação se comparado a uma seção transversal aberta como a seção I, e é basicamente dependente da relação entre diâmetro e espessura da parede e comprimento. A figuras 5 e 6 são, respectivamente, modo de flambagem local de mesa e alma, e modo de flambagem local com deformações longitudinais.

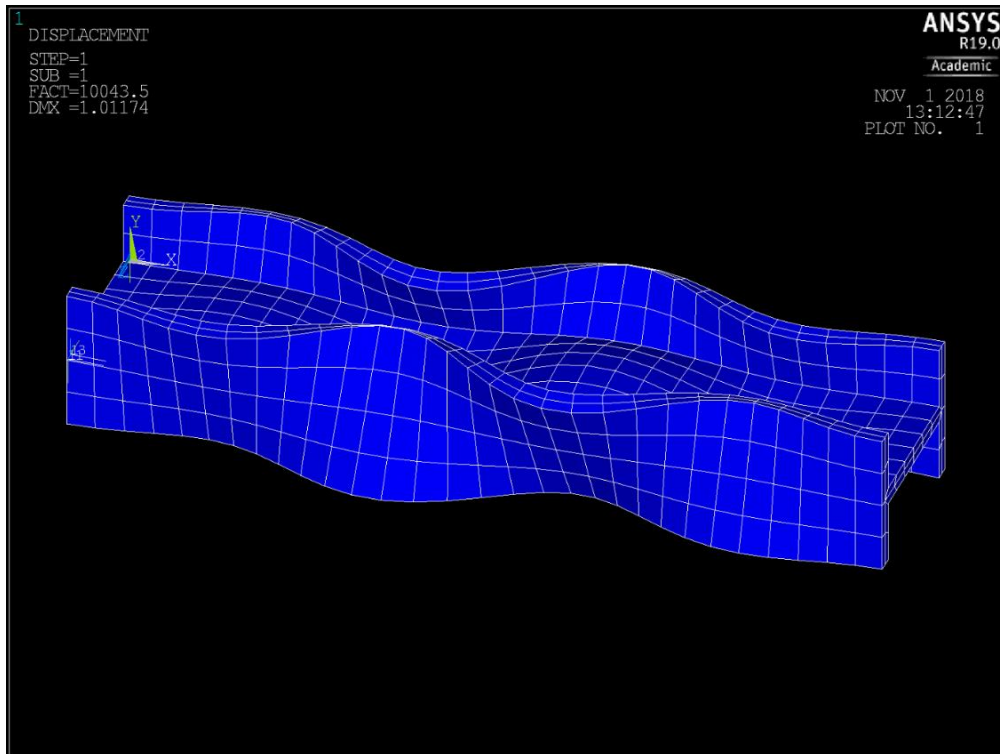


Figura 5 - Flambagem local em viga I obtida por modelagem numérica através do software ANSYS®
Fonte: Autoria própria (2019).

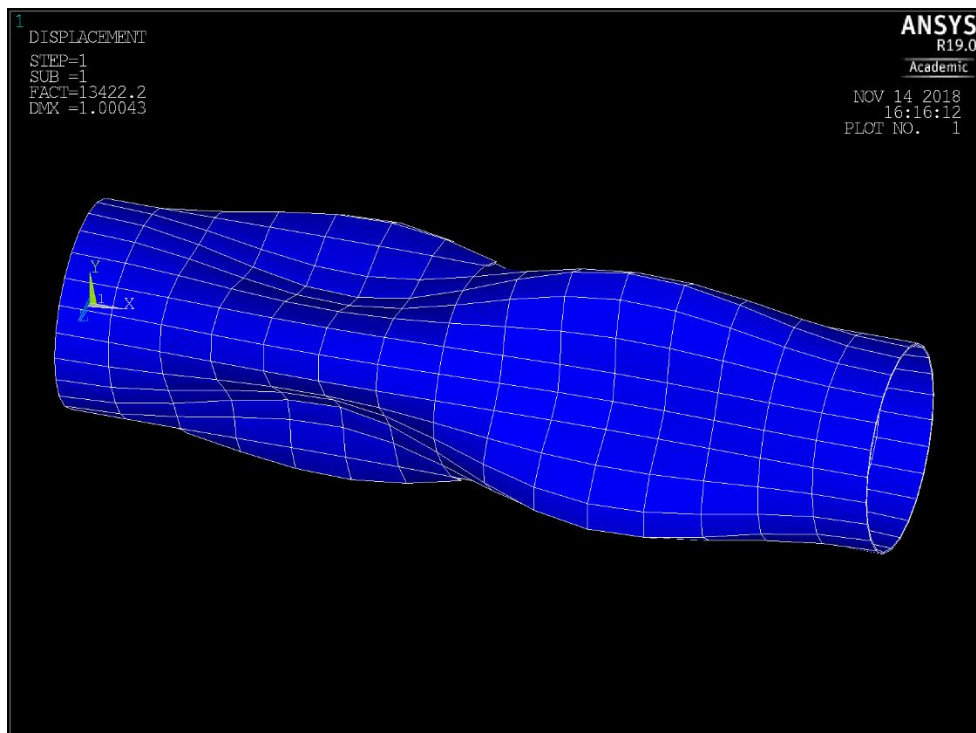


Figura 6 - Flambagem local em tubo de seção circular obtida por modelagem numérica através do software ANSYS®
Fonte: Autoria própria (2019).

1.1.2 Flambagem Global

Flambagem global é o modo de flambagem mais comumente conhecido. Ela se manifesta por todo o comprimento da peça, envolvendo a seção transversal como um todo e, de modo geral, em barras de grande esbeltez e está relacionada às propriedades geométricas da seção do perfil (momentos de inércia, constantes de torção e de empenamento), à excentricidade da carga aplicada e às condições de contorno da peça.

O modo global pode ocorrer basicamente de três formas. A primeira, bem comum em pilares esbeltos, ocorre em torno do eixo de menor inércia à flexão da seção transversal e denomina-se flambagem por flexão. A segunda forma de ocorrência, a flambagem por torção, envolve a rotação da seção transversal em torno de um eixo definido pelo centro de torção, ou centro de cisalhamento. A terceira e mais complexa forma envolve a combinação de flexão e torção, mesmo em barras sob compressão axial, denominada de flexo-torção de colunas.

As Figuras 7 e 8 são exemplos do modo de flambagem global em torno do eixo de menor inércia.

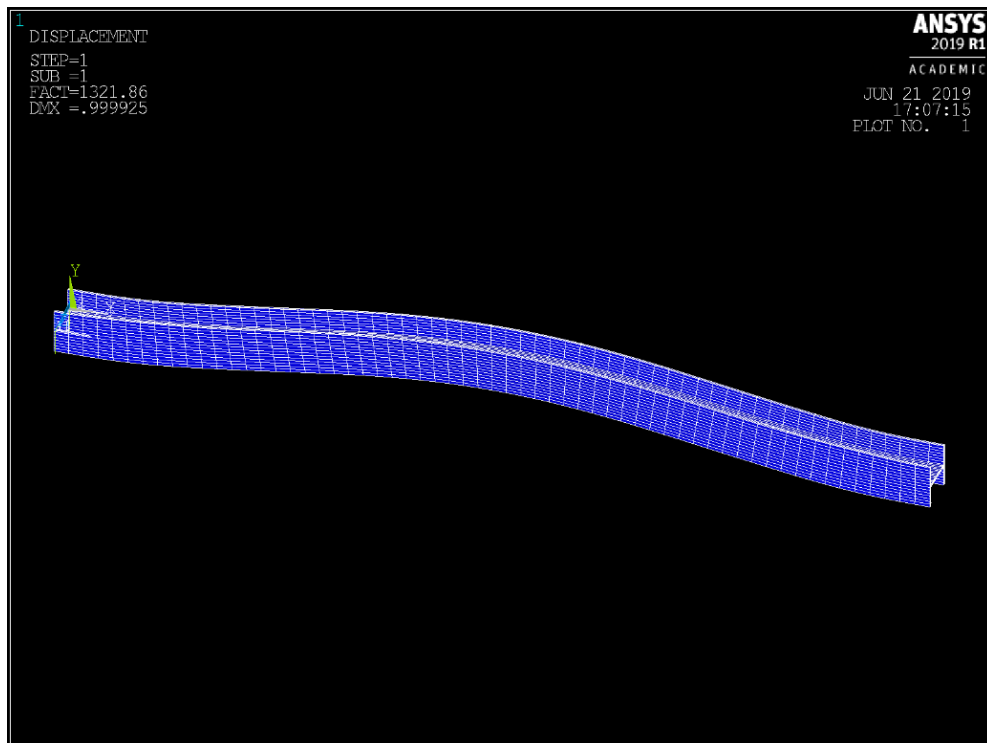


Figura 7 - Flambagem global por flexão em torno do eixo de menor inércia em viga I.
Fonte: Autoria Própria (2019).

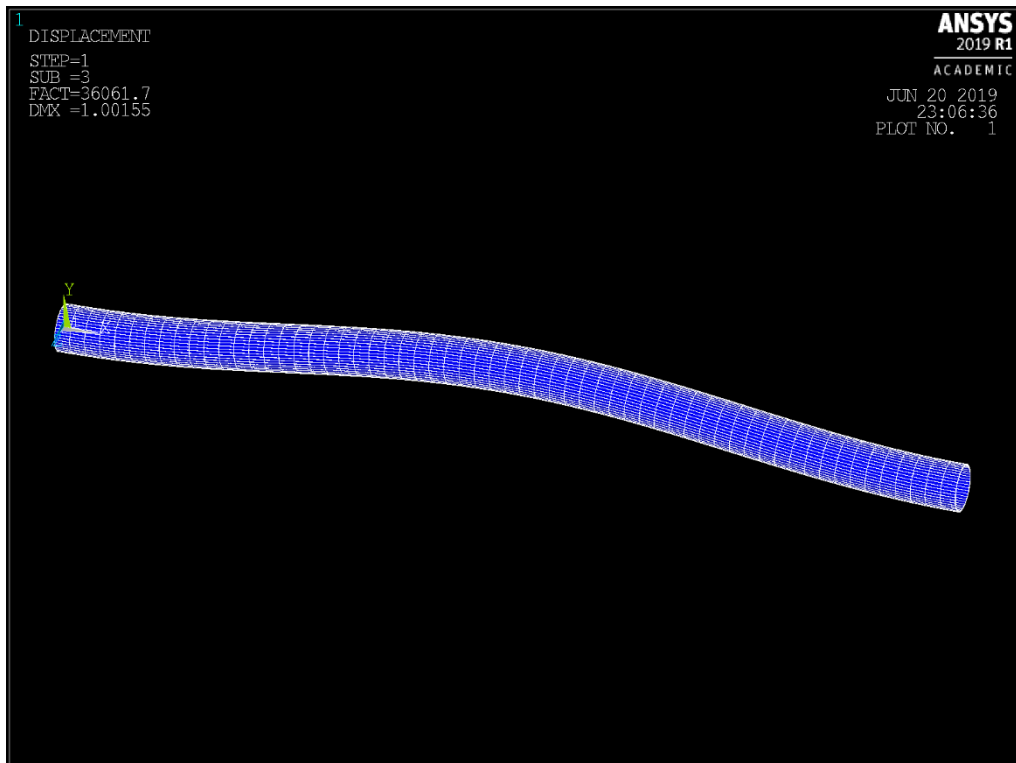


Figura 8 - Flambagem global em tubo de seção circular através do *software* ANSYS®.
Fonte: Aatoria Própria (2019).

1.2 Objetivo Geral

Este trabalho tem como objetivo realizar um estudo das características do fenômeno de flambagem, em particular aquelas produzidas pelo processo de pultrusão. A citar, especificamente, seções transversais tipo I e tubular com seção circular, através de comparação da modelagem numérica via software ANSYS, com dados analíticos e experimentais de trabalhos da literatura correlata.

1.2.1 Objetivo Específico

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Modelar elementos estruturais de seções transversais tipo I e tubulares com seção circular, via software ANSYS, com elementos tipo Shell 181 (modelagem bidimensional tipo casca ou placa) e Solid 46 (modelagem tridimensional, com elementos sólidos) para realizar comparações com a literatura já documentada, utilizando equações analíticas e métodos empíricos para o confrontamento de dados.

- Avaliar os modos de flambagem com a alteração da esbeltez de vigas I e tubos de seção circular.
- Avaliar as diferentes orientações das fibras, a fim de se obter a orientação que apresente melhor desempenho em relação à carga crítica de flambagem.
- Avaliar diferentes arquiteturas das sequências de laminação, e determinar qual delas apresenta um melhor desempenho em relação à carga crítica de flambagem.

2 JUSTIFICATIVA

O trabalho foi motivado pela necessidade de se prever o comportamento estrutural de elementos estruturais comprimidos, e em particular vigas feitas de materiais ortotrópicos, onde sua análise é mais complexa do que em materiais isotrópicos.

Os materiais têm comportamento anisotrópico quando as propriedades mecânicas macroscópicas, como elasticidade, por exemplo, variam com a direção. No entanto, pode ser quaisquer direções, não necessariamente direções perpendiculares entre si. Quanto as direções particulares onde as propriedades são bem definidas são perpendiculares entre si, dizemos que é um material ortotrópico. Um material isotrópico contrasta por ter sempre as mesmas propriedades em todas as direções.

A necessidade de se prever via modelos numéricos o comportamento estrutural vem da dificuldade em se fabricar protótipos para cada tipo de aplicação, acarretando um dispêndio financeiro e um demasiado consumo de tempo. Com uma modelagem numérica bem feita e capaz de minimamente representar alguma realidade observável é possível prever diversos tipos de comportamentos em estruturas, apenas alterando suas dimensões, como no caso de viga I, sua largura de mesa, altura de alma, espessura, sua sequência de laminação. No caso do tubo, sua espessura, diâmetro interno e externo do tubo, comprimento e sequência de laminação.

Em particular a necessidade de se prever a carga crítica flambagem, pois muitas vezes é fator limitante para um projeto de peças em compressão, principalmente em peças com maiores índices de esbeltez. Além disso, para a flambagem local também há outros parâmetros geométricos muito importantes, além do índice de esbeltez, como já dito anteriormente.

Para materiais ortotrópicos, uma peça de mesma geometria pode ter diferentes cargas críticas de flambagem mesmo tendo as mesmas dimensões e peso, sendo assim, o número de protótipos seria muito maior que qualquer situação envolvendo material isotrópico.

3 CLASSIFICAÇÃO DOS MATERIAIS COMPOSTOS

Uma forma de classificar e estudar os materiais compostos é com base no agrupamento das fibras, juntamente com a resina plástica e a geometria utilizada. Isso pode ser explicado devido ao mecanismo de enrijecimento do composto (fortalecimento) depender basicamente destes fatores (AGARWAL; BROUTMAN; CHANDRASHEKHARA, 2006, p. 3).

Segundo Levy Neto e Pardini (2006, p. 3), pode-se ainda classificar os materiais compostos como sintéticos e naturais. Os autores ainda constroem um diagrama mostrando a classificação dos materiais compostos sintéticos e naturais, que pode ser visto na Figura 9. Porém, neste trabalho o foco será em materiais compostos sintéticos.

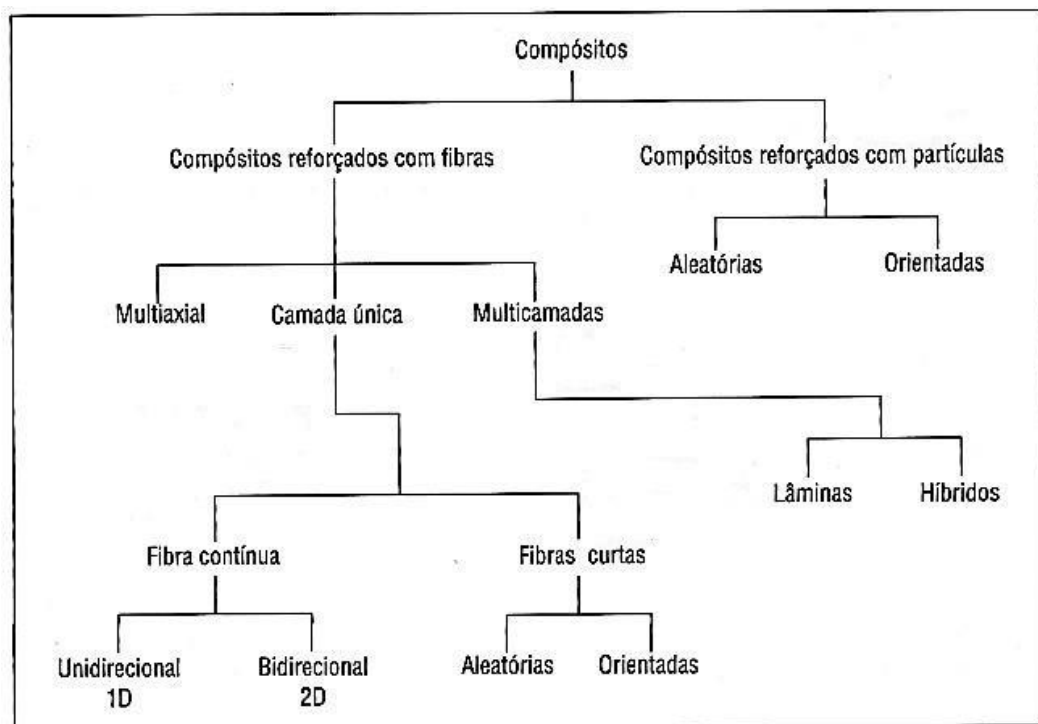


Figura 9 - Representação do diagrama da classificação dos materiais compostos.
Fonte: Adaptado de Levy Neto e Pardini (2006, P.4).

3.1 Perfil pultrudado de resina reforçada com fibras

3.1.1 Elementos Pultrudados

Os perfis pultrudados são na maioria das vezes a opção mais utilizada para a fabricação de perfis estruturais, de seção transversal com perímetro aberto ou fechado, devido à capacidade de produção em alta escala deste tipo de manufatura, sendo que o perfil é fabricado de maneira contínua. Perfis pultrudados não são necessariamente laminados, porém sua arquitetura interna permite que ele seja tratado como tal (DAVALOS e QIAO, 1999).

Uma configuração típica de pultrudados envolve lâminas de CSM (*continuous strand mats*), SF (*sitched fabrics*) e roving (Figura 10 e Figura 11).

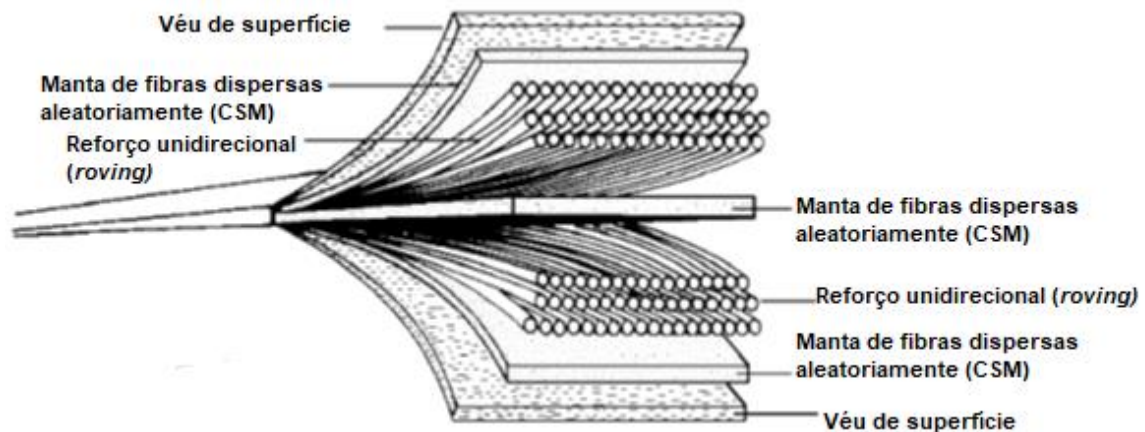


Figura 10 - Esquema de configuração interna de um elemento pultrudado.
Fonte: Adaptado de Creative Pultrusions (2004).

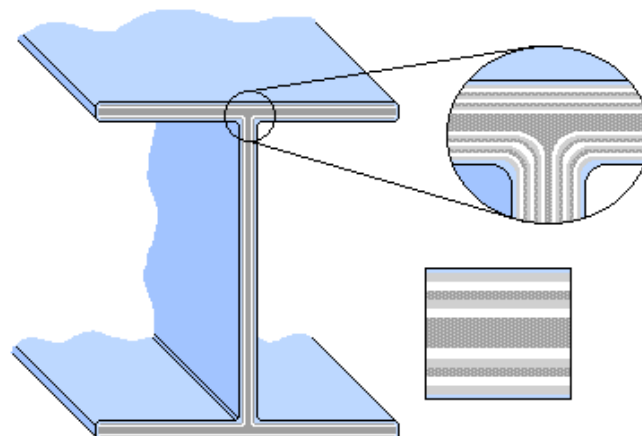


Figura 11 - Arquitetura de uma seção transversal de pultrudado.
Fonte: Torres (2005).

O *roving* é o reforço unidirecional em forma de fios ao longo do comprimento da peça, perpendicular à secção transversal, considerado a forma mais simples de reforço, sendo o principal responsável pela resistência á flexão e à tração, porém não contribuindo com a resistência e a rigidez transversais.



Figura 12 - Vidro nas formas típicas de reforço: *roving*, tecidos bidirecionais e mantas de fibras longas e curtas.

Fonte: Owen Corning Corporation (2019).

Para se atenuar as características anisotrópicas de um composto unicamente reforçado com *roving*, é comumente empregado o CSM. Ele é constituído por uma manta de fibras dispostas aleatoriamente, melhorando as propriedades transversais do estratificado, e também reduzindo a probabilidade de delaminação. Pode-se utilizar variadas densidades de fibras para o CSM, e como ele é composto por fibras aleatoriamente dispersas, a fração volumétrica de matriz fica limitada à um valor específico, pois sua utilização dificulta o preenchimento de vazios com a resina.

Já o stitched fabrics (SF), mostrado na Figura 13, consiste em um número de camadas unidirecionais, parecido com o *roving*, porém podendo variar a angulação em relação ao sistema de eixos global, conforme Figura 14. São encontrados comercialmente em duas, três ou quatro camadas.

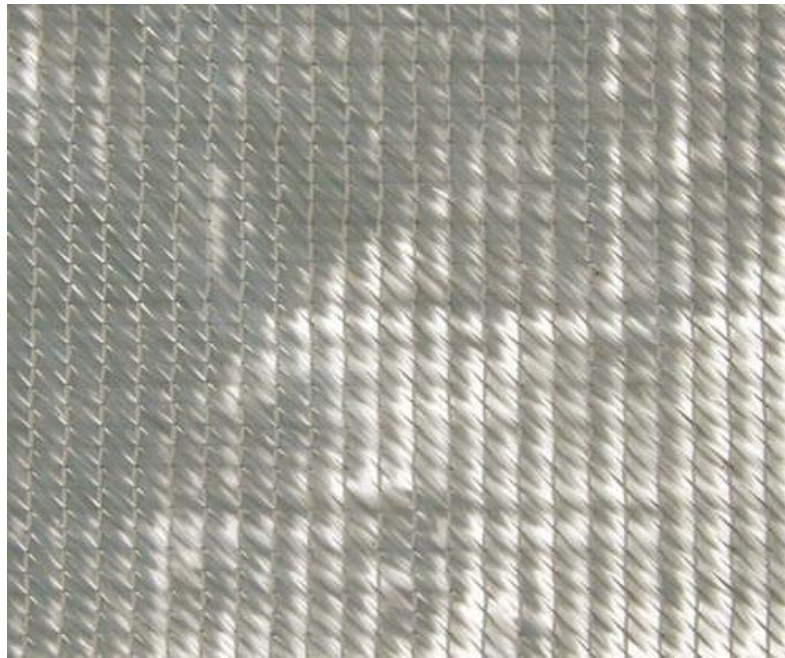


Figura 13 - Reforço do tipo SF.
Fonte: Direct Industry (2019).

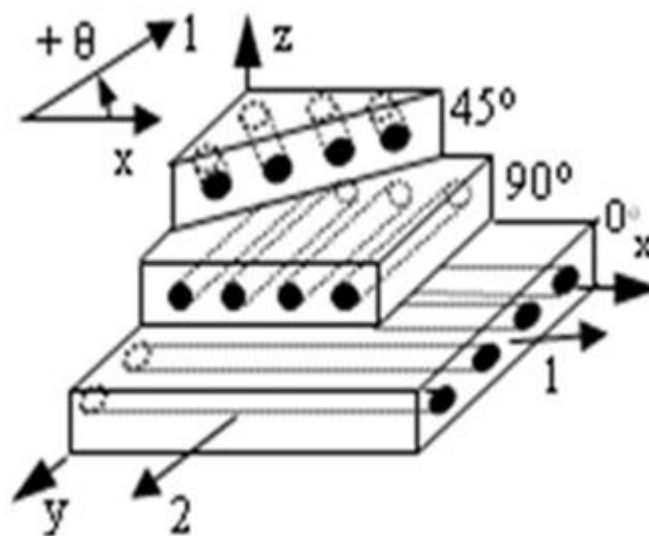


Figura 14 - Composto laminado com várias direções de reforços.
Fonte: Adaptado de Fam (2010).

3.2 O processo de pultrusão

Pultrusão é um processo de fabricação contínua de perfis estruturais de PRF, que utiliza uma resina como matriz e reforços na forma de fibras. Estas fibras são embebidas pela resina, e puxadas por um molde de aço pré-aquecido, por um dispositivo de tracionamento (Strongwell Corporation, 2019), como mostrado na Figura 15.

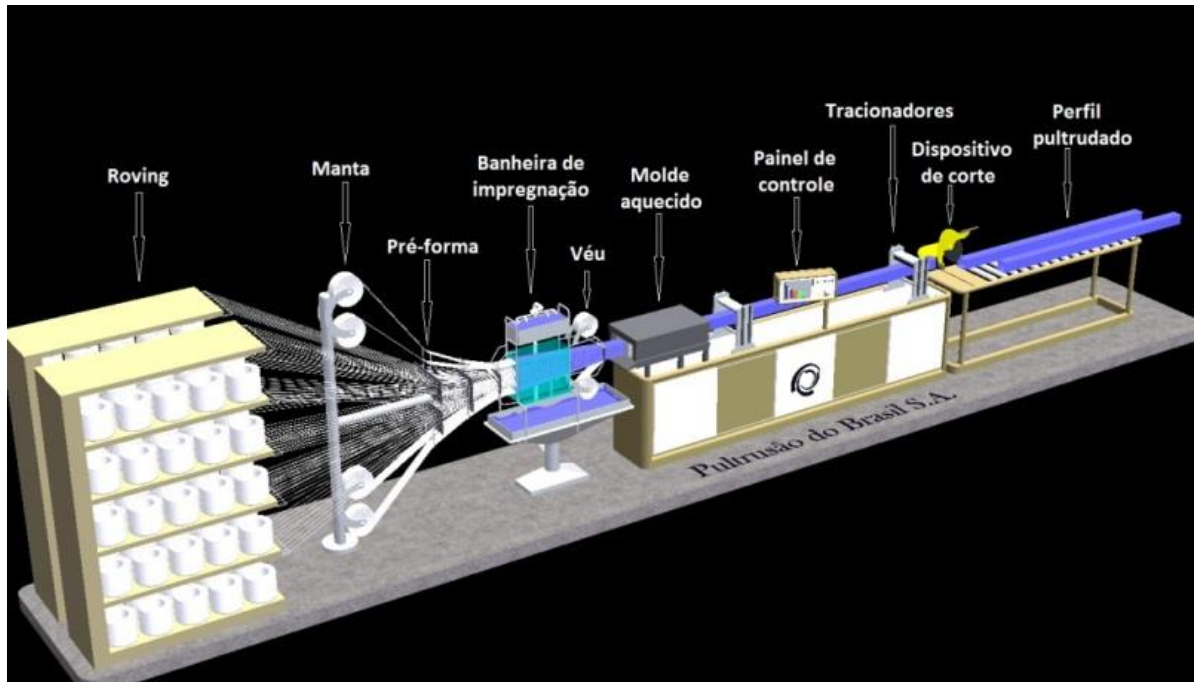
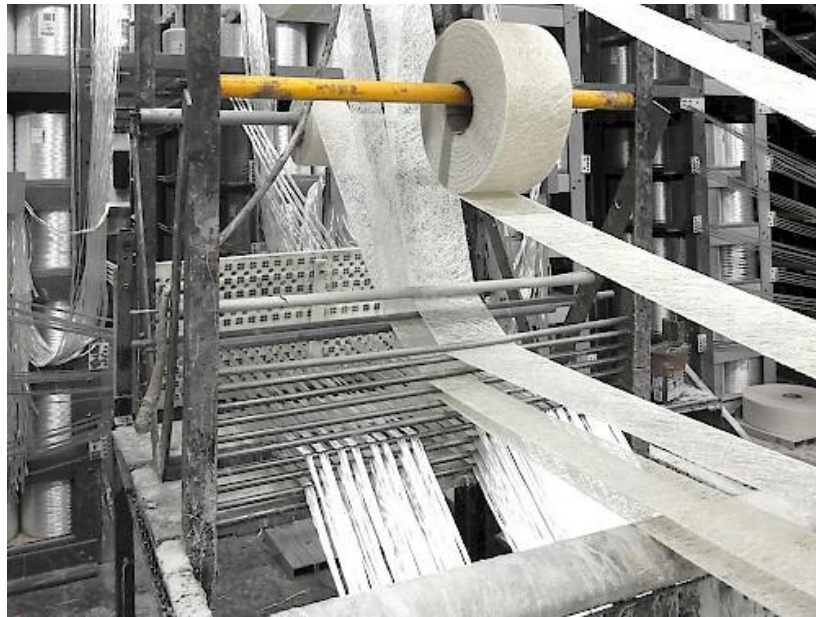


Figura 15 - Linha de produção de elementos pultrudados reforçados com fibras. Fonte: Pultrusão do Brasil (2018).

O processo deve prever que para diferentes reforços, as prateleiras devem ser adequadamente dispostas, para determinado tipo de material empregado, visto que vários reforços genéricos serão adicionados diferentemente. Múltiplas camadas de manta podem ser empregadas em diferentes sequências no estratificado, alternando entre roving ou outro tipo de reforço (STRONGWELL CORPORATION, 2004). A Figura 16 exemplifica uma estante de uma pultrusora, com as fibras preparadas para serem embebidas na matriz.



**Figura 16 - Estantes de roving e mantas.
Fonte: Fiberprofil (2019).**

Os reforços são tracionados através de uma chapa-guia, que auxilia o acabamento do produto final, e então conduzidos através de uma câmara de impregnação de resina que contém o composto resinado, como mostra a Figura 17. A solução de resina funciona como uma espécie de cola, conectando os reforços. A solução da resina contém aditivos que funcionam como catalisadores e outros aditivos químicos que melhoram a performance do composto (STRONGWELL CORPORATION, 2004).



**Figura 17 - Chapa-guia e câmara de impregnação.
Fonte: Fiberprofil (2019).**

O material da superfície, denominado de “véu”, é adicionado após a etapa de impregnação, devido ao fato da resistência à tração ser insuficiente para resistir ao esforço gerado no banho em resina, além da tendência em absorver mais resina que os reforços, prejudicando o processo. Geralmente o reforço passa pela câmara de impregnação através de barras transversais, para melhor espalhamento e impregnação da resina.

3.2.1 Comportamento estrutural das fibras de vidro

O vidro é um dos materiais mais empregados como fibras pelos seguintes motivos:

- é facilmente obtido na forma de fios de alta resistência à partir do estado fundido;
- é obtido facilmente e permite diversas formas de fabricação, utilizando uma grande variedade de técnicas industriais economicamente viáveis;
- como fibra é muito resistente, e quando embutido em uma matriz resinosa, produz um composto de alta resistência;
- dependendo da combinação resina-fibra, possui uma inércia química que produz um composto com alta resistência à corrosão.

As características das fibras são muito importantes, pois qualquer imperfeição pode afetar o desempenho das fibras. Falhas geralmente ocorrem quando as fibras se atritam com algum material mais duro. A fibra exposta ao ambiente também não é uma prática aconselhável, pois ela se degrada muito rápido perante a umidade. Comumente, para prevenir esses efeitos, as fibras são recobertas por um material que as protege de ações externas indesejáveis, o que permite uma melhor adesão entre matriz e fibra.

As fibras têm como vantagens a alta resistência e baixo custo, sendo leve, de fácil transporte, e como desvantagens pode-se citar a baixa dureza, a baixa resistência a altas temperaturas, e baixa resistência quando submetida à fadiga.

3.2.2 Comportamento estrutural da matriz

A matriz desempenha várias funções importantes para no material composto. Primeiramente, a matriz funciona como elemento de união das fibras, e a carga

aplicada na peça é melhor distribuída por elas. Ademais, a matriz também tem como função a proteção das fibras de ações exteriores do ambiente em que está inserida, que diminuiriam a vida útil do composto, fazendo com que ele se rompesse em baixos níveis de tensão. Por último, mantém as fibras separadas, e devido a sua plasticidade, evita a propagação de fraturas do tipo frágil, que poderiam resultar em ruptura do composto como um todo, catastroficamente. Basicamente a matriz funciona como uma barreira de propagação de ruptura para as fibras, protegendo-as e fazendo com que elas funcionem em condições adequadas àquelas para que foram projetadas (ALMEIDA e SANDRA, 2004).

3.2.3 Materiais de reforço

Como já definido por Carneiro e Teixeira (2008, p. 55), os materiais de reforço desempenham um papel fundamental na construção de um composto e nas suas propriedades. Ainda segundo os autores, esse material de reforço (fibras ou partículas) deve ser selecionado de modo que corresponda às necessidades de sua aplicação, sejam elas de resistência mecânica, rigidez, durabilidade e etc..

Da Silva (2014, p. 14) define que um material de reforço pode ser classificado, entre outros, como:

- Partículas aleatórias;
- Fibras descontínuas unidirecionais;
- Fibras descontínuas aleatórias;
- Fibras contínuas unidirecionais;
- Fibras contínuas “*crossply*” (bidirecionais) também chamadas de fibras cruzadas;
- Fibras contínuas multidirecionais.

A Figura 18 representa alguns tipos de orientações dessas fibras.

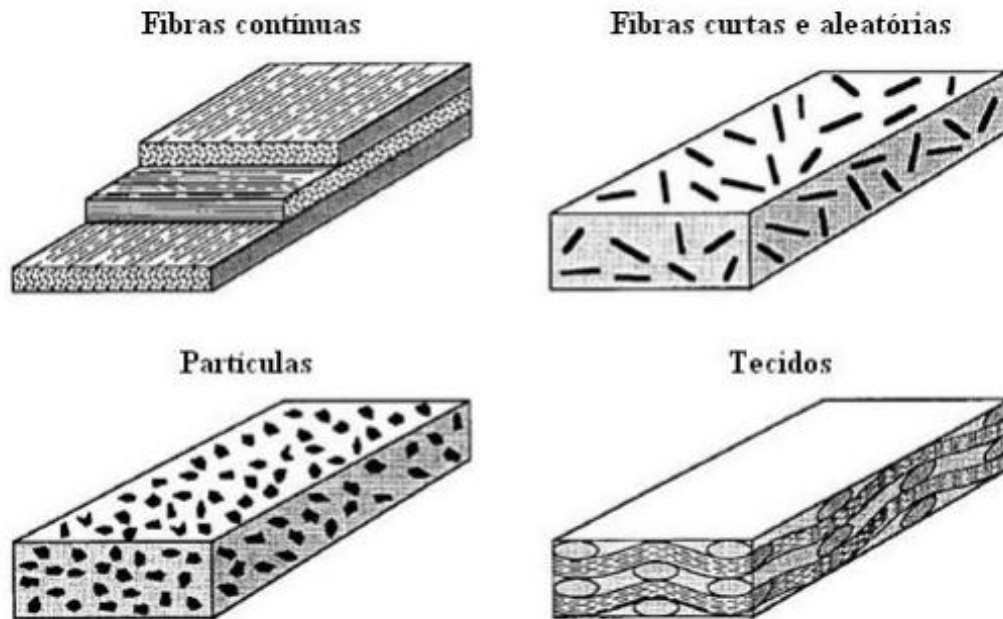


Figura 18 - Representação de algumas configurações das fibras em um material de reforço.
Fonte: Adaptado de Kutz (2006).

Os materiais de reforço, neste caso fibras, mais utilizados na fabricação de compostos segundo Agarwal, Broutman e Chandrashekhara (2006, p. 7), são as fibras de carbono, fibras de vidro (tipo S e tipo E), fibras de aramida (Kevlar 49) e fibras de boro. Dentre as fibras citadas, uma das mais importantes é a fibra de vidro do tipo E, que devido ao seu baixo custo quando comparada as demais fibras, se torna a mais utilizada. No entanto, eles ainda destacam as fibras de carbono, aramida e boro por apresentarem maiores valores de rigidez.

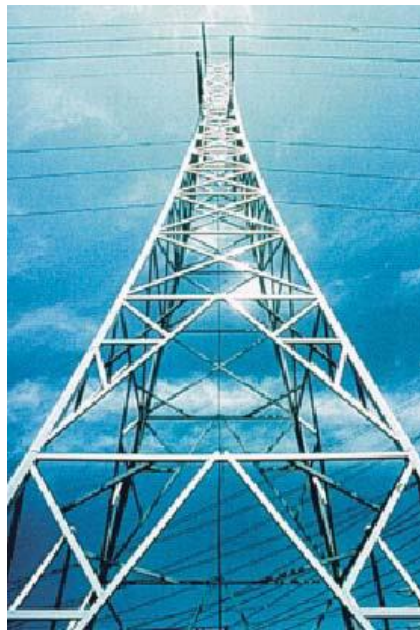
3.3 Reforço de fibra de vidro (RFV)

Um dos compostos mais utilizados atualmente consiste em fibras de vidros embebidas por uma matriz polimérica, o chamado PRFV (Plástico Reforçado com Fibra de Vidro), onde a resistência se altera conforme o tipo, quantidade, orientação e posição do reforço.

Os processos de fabricação de compostos são um pouco diferentes dos processos convencionais de fabricação, como a extrusão ou laminação. Um exemplo de manufatura bastante empregada para a obtenção de PRFV's é a pultrusão, onde as seções transversais dos perfis podem assumir as mais variadas formas, e são de

vasta aplicação em locais onde se necessita de materiais com grande resistência química e leveza.

Um exemplo de estrutura feita de perfis pultrudados compostos são as torres de transmissão de energia elétrica da costa da Califórnia (Figura 19). A estrutura contendo 26,5m foi toda construída à partir de materiais pultrudados de PRFV (WEAVER, 1999), com redução de dois terços do peso se comparado a uma versão em aço, e de mais fácil e rápida fabricação, transporte e montagem.



**Figura 19 - Torre de linha de transmissão de energia, Califórnia, EUA.
Fonte: Weaver (1999).**

Como as aplicações destes materiais são muito complexas e razoavelmente novas, muitos engenheiros não tem o conhecimento adequado para projetar estruturas com esse tipo de material, exigindo uma abordagem completamente diferente das usuais, adequadas para materiais isotrópicos. A pultrusão é um processo de fabricação que pode empregar reforços na forma de fios contínuos, e ainda em mantas ou reforços na forma de tramas, e que podem produzir reforços diversos, originando produtos com anisotropia em suas propriedades mecânicas. Isto pode dificultar em algumas complicações por ocasião da montagem. A perfuração para parafusagem pode alterar a distribuição de tensão nas fibras. Até o momento não existe possibilidade de soldagem nesse tipo de estrutura, e uma das técnicas utilizadas para fixação são adesivos, que exigem especificações cuidadosas que não são triviais para que a ligação seja eficiente e durável.

O perfil pultrudado é um dos mais utilizados pois permite uma produção em larga escala, com boa repetibilidade de propriedades físicas e mecânicas, porém necessitam inevitavelmente de um reforço de fibras alinhadas longitudinalmente, a menos que sejam adicionadas tiras de tecido ou *SF* para melhorar as propriedades mecânicas transversais. Como a pultrusão requer moldes e pré-formas muito caros, para se tornar um processo vantajoso no quesito econômico, deve-se reutilizar esses moldes.

4 PROPRIEDADES FÍSICAS E MECÂNICAS DE UMA LÂMINA DE MATERIAL COMPOSTO REFORÇADO COM FIBRAS

4.1 Considerações Iniciais

Os compostos, em geral, são apresentados com uma configuração onde se pode identificar várias camadas, cada qual contendo matriz e reforço de um tipo particular. A este conjunto se dá o nome de estratificado, que pode ser formado com camadas onde o reforço em cada uma delas tenha diferentes orientações. Em cada camada, podemos determinar a orientação do reforço em um determinado eixo de ortotropia, e que a superposição delas se dá de infinitas maneiras. A partir das propriedades mecânicas de cada lâmina, medida em seu sistema de coordenadas local, é possível estimar as propriedades mecânicas da mesma lâmina no sistema de coordenadas global do laminado.

A previsão de comportamento e a determinação das propriedades mecânicas dos materiais compostos é bem diferente de materiais convencionais como aço e alumínio, devido à dependência de vários fatores, como a ortotropia, a direção dos reforços, o tipo de matriz utilizada, a arquitetura do estratificado, etc. Tudo isso aumenta o grau de complexidade, e uma previsão exata do comportamento para efeito de projeto é muito difícil de se obter, havendo a necessidade de se recorrer à ensaios experimentais para comprovação das previsões.

Para a estimação destas propriedades, podemos utilizar métodos aproximados como a regra das misturas, que é uma simplificação adequada aos compostos unidirecionais. Este método é utilizado pelo fato de que o reforço predominante em materiais pultrudados é o reforço unidirecional. Podem ser citados também modelos auto-consistentes, métodos variacionais, modelos estatísticos e os métodos semi-empíricos (MAKKAPATI,1994).

No desenvolvimento dos métodos matemáticos, temos que definir algumas suposições, a fim de ser possível a resolução de um problema para previsão de comportamento estrutural. A matriz e as fibras são consideradas homogêneas, e podem ser isotrópicas ou ortotrópicas. Geralmente, faz-se a suposição de que o comportamento seja elástico linear. Outra consideração é que não podem haver impurezas, e nem vazios, pois isso altera os cálculos dos módulos de elasticidade.

Supõe-se também uma perfeita aderência entre fibra e matriz, sendo as fibras paralelas entre si e de comprimento infinito.

Embora a suposição de isotropia dos constituintes, isoladamente, seja frequentemente adotada, isto nem sempre é verdade. Sendo assim, outras propriedades devem ser incluídas, no caso da fibra ser considerada anisotrópica. Inclusive as fibras mais utilizadas, como as fibras de vidro, carbono e aramida, podem ser consideradas como ortotrópicas.

4.2 Determinação das Propriedades Mecânicas

Para esta seção, todos os equacionamentos podem ser obtidos à partir das referências Berthelot (1996) e Mendonça (2005).

Para a determinação das propriedades físicas dos compostos, deve-se levar em conta a densidade, o peso específico, as frações volumétricas de fibra, de matriz, e de vazios, entre outras.

As propriedades mecânicas são obtidas a partir destes valores de cada componente da mistura.

Considerando um composto de massa m_c , a massa total do composto será a soma das massas de fibra e matriz, ou seja:

$$m_c = m_f + m_m \quad (4.1)$$

Os índices c , f e m indicam respectivamente composto, fibra e matriz, sendo que nesta equação, os vazios não são considerados pois têm massa nula.

O mesmo não ocorre com o volume total, onde o volume de vazios influencia no volume final, e sendo assim, também influencia na massa específica do composto. Incluindo o volume de vazios:

$$v_c = v_f + v_m + v_v \quad (4.2)$$

Sendo assim, e sabendo que a massa específica é a razão entre a massa e o volume:

$$\rho_c = \frac{m_c}{v_c} = \frac{m_f + m_m}{v_c} = \frac{\rho_f \cdot v_f + \rho_m \cdot v_m}{v_c} \quad (4.3)$$

ou ainda, desenvolvendo uma expressão, em termo de frações mássicas, onde M_f e M_m são, respectivamente, as frações (ou porcentagem) em massa de fibras e matriz. V_v é a fração (ou porcentagem) volumétrica de vazios.

Logo, simplificando:

$$\rho_c \left(\frac{M_f}{\rho_f} + \frac{M_m}{\rho_m} \right) + V_v = \frac{\rho_c}{\rho_c} = 1 \quad (4.4)$$

e, portanto

$$V_v = 1 - \rho_c \cdot \left(\frac{M_f}{\rho_f} + \frac{M_m}{\rho_m} \right) \quad (4.5)$$

e, conforme a definição de fração volumétrica

$$v_v = V_v \cdot v_c \quad (4.6)$$

Se agora considerarmos não a massa, mas o peso total do composto (W_c), teremos o peso específico que é dado pela expressão:

$$\gamma_c = \frac{W_c}{v_c} \quad (4.7)$$

4.2.1 Fração volumétrica de fibras

A fração volumétrica de fibras é a razão entre o volume de fibras e o volume total do composto.

Os métodos de queima ASTM D 2584 (1990) e D297 (1975) podem ser aplicados a compostos que têm fibras inorgânicas em uma matriz orgânica, como vidro/epóxi. O material é seco em estufa e então pesado. Após este procedimento, ele será aquecido até a matriz ser completamente queimada. O resíduo das cinzas é então lavado, seco e pesado.

A relação de volume de fibras é obtida como:

$$V_f = \frac{\left(\frac{W_f}{\gamma_f}\right)}{\left(\frac{W_c}{\gamma_c}\right)} \quad (4.8)$$

onde W_c e W_f são os pesos do composto e fibras, respectivamente.

A relação do volume de fibras pode também ser determinada através de ensaios ópticos, como microscopia eletrônica, através de imagens de fotomicrografia de seções transversais às fibras. Uma aproximação similar consiste em contar a quantidade de fibras da seção transversal, de uma fração dentro da região analisada, calcular a área total das seções das fibras e dividir pela área total considerada.

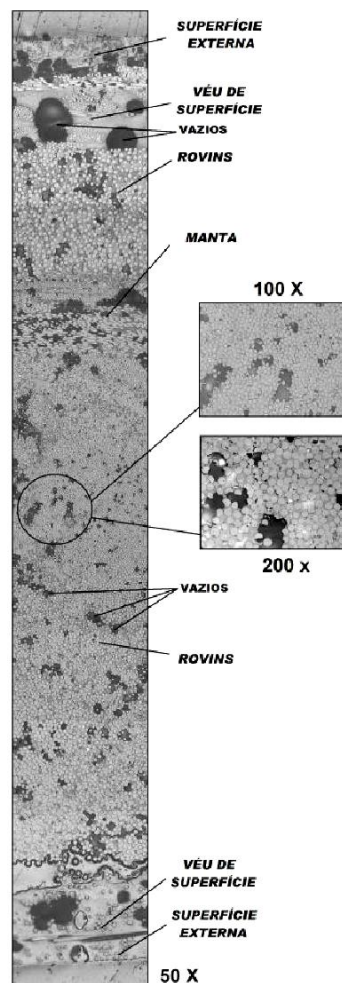


Figura 20 - Análise microscópica de seção transversal próxima à região de ruptura de um corpo de prova submetido a um ensaio de tração.

Fonte: Almeida (2004).

4.2.2 Propriedades mecânicas de uma lâmina com fibras unidirecionais

Para materiais compostos, deve-se adotar um sistema de eixos ortogonais, que definem direções nas quais as propriedades mecânicas podem ser identificadas. Um eixo designado 1 (ou l), é o eixo longitudinal das fibras. Outro eixo, designado 2 (ou t), é o eixo transversal em relação as fibras longitudinais, e um terceiro eixo designado 3 (ou t') é o eixo ortogonal aos dois anteriores, como mostra a Figura 21.

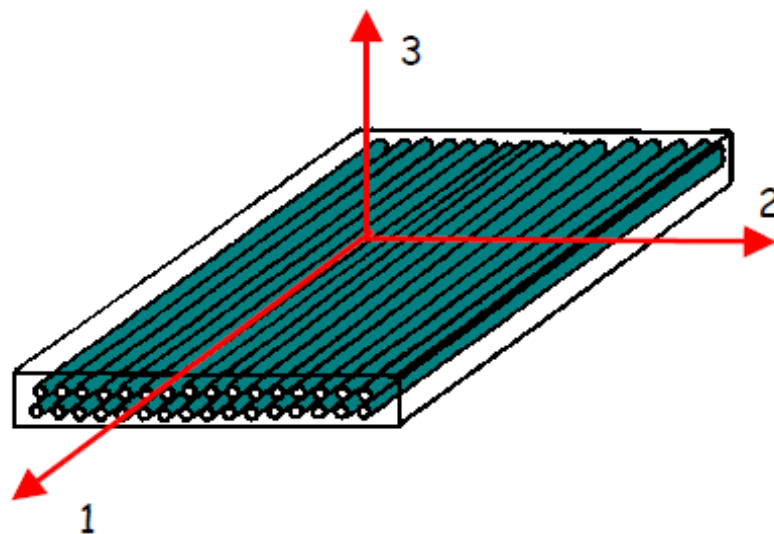


Figura 21: Sistema de eixos de ortotropia.
Fonte: Pereira (2005).

4.2.2.1 Módulo de Young Longitudinal – E_1

O módulo de Young longitudinal é caracterizado por ser o módulo de proporcionalidade entre tensão e deformação que se manifesta na direção longitudinal às fibras.

Quando se tem algum carregamento na direção das fibras, os módulos E_1 e o Coeficiente de Poisson ν_{12} (referente ao plano dado pelas direções 1 e 2) são mais influenciados pelas fibras.

Neste caso, os resultados experimentais são bem condizentes com os cálculos obtidos à partir da regra das misturas, onde o módulo longitudinal E_1 pode ser determinado pela expressão:

$$E_1 = V_f \cdot E_f + V_m \cdot E_m \quad (4.9)$$

onde E_m e E_f são os módulos longitudinais da fibra e da matriz, respectivamente, e V_f e V_m as porcentagens volumétricas da fibra e da matriz, respectivamente. Neste cálculo, é suposto que as fibras podem ser anisotrópicas, com propriedades diferentes nas diferentes direções.

4.2.2.2 Módulo de Young transversal – E_2

Utilizando a metodologia da regra das misturas, o módulo de elasticidade transversal é obtido pela seguinte expressão:

$$E_2 = \left(\frac{V_m}{E_m} + \frac{V_f}{E_f} \right)^{-1} \quad (4.10)$$

Porém, esta expressão não condiz tanto com a realidade no sentido de se aproximar de valores experimentais obtidos se comparado à equação do Módulo de Young longitudinal, e diversos autores sugerem outras metodologias para cálculo desta propriedade.

4.2.2.3 Módulo de Coulomb – G_{12}

A regra das misturas nos faz concluir que o módulo de cisalhamento é uma característica basicamente dependente da matriz, assim como o módulo de Young transversal, fornecendo a seguinte expressão:

$$G_{12} = \left(\frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m} \right)^{-1} \quad (4.11)$$

Esta é outra propriedade que não pode ser obtida com precisão pela regra das misturas, necessitando de alguma abordagem mais aprofundada com o emprego de outras hipóteses e considerações geométricas da meso-escala.

4.2.2.4 Coeficiente de Poisson – v_{12}

Similarmente à determinação do módulo de elasticidade longitudinal, o coeficiente de Poisson pode ser obtido pela expressão:

$$v_{12} = v_f \cdot V_f + v_m \cdot V_m \quad (4.12)$$

Lembrando que, considerando a hipótese de isotropia dos constituintes, tem-se as seguintes relações:

$$G_f = \frac{E_f}{2 \cdot (1 + v_f)} \quad e \quad G_m = \frac{E_m}{2 \cdot (1 + v_m)} \quad (4.13)$$

onde G_f e G_m são os Módulos de Coulomb das fibras e matriz, respectivamente.

4.2.2.5 Regra das misturas modificada

A regra das misturas pode ser modificada de forma a considerar que as fibras sejam ortotrópicas. As análises para estes casos são análogas àquelas desenvolvidas para fibras isotrópicas. Assim, chamando de E^{f_1} o Módulo de Young da fibra na direção 1, E^{f_2} o Módulo de Young da fibra na direção 2, $G^{f_{12}}$ o módulo de Coulomb da fibra no plano 12 e $v^{f_{12}}$ o coeficiente de Poisson referente ao plano 12 da fibra, as novas expressões para a regra das misturas são as seguintes:

- Módulo de Young longitudinal

$$E_1 = V^{f_1} \cdot E_f + V_m \cdot E_m \quad (4.14)$$

- Módulo de Young transversal

$$E_2 = \left(\frac{V_m}{E_m} + \frac{V_f}{E^{f_2}} \right)^{-1} \quad (4.15)$$

- Módulo de Coulomb

$$G_{12} = \left(\frac{V_f}{G^{f_{12}}} + \frac{V_m}{G_m} \right)^{-1} \quad (4.16)$$

- Coeficiente de Poisson

$$v_{12} = v^{f_{12}} \cdot V_f + v_m \cdot V_m \quad (4.17)$$

4.2.3 Propriedades mecânicas de uma lâmina reforçada com *continuous strand mat*

O *continuous strand mat (CSM)* é um reforço na forma de manta com fibras dispersas, que podem ser longas ou curtas. Desde que esta manta tenha fibras dispersas nas mais diversas direções no seu próprio plano, ela contribui para a resistência e rigidez da lâmina composta também em todas as direções coplanares à lâmina. Estas camadas se fazem necessárias no processo de pultrusão por minimizarem a formação de fissuras e para melhorar as propriedades mecânicas do perfil pultrudado nas direções transversais ao comprimento. As propriedades elásticas de uma camada reforçada com CSM podem ser determinadas de acordo com as relações propostas por Hull (MAKKAPATI, 1994)

4.2.3.1 Módulo de Elasticidade de CSM

O Módulo de Elasticidade pode ser determinado para uma camada reforçada com mantas assumindo que ela seja isotrópica em seu plano:

$$E_{CSM} = \frac{3}{8}E_1 + \frac{5}{8}E_2 \quad (4.18)$$

onde E_1 e E_2 são os módulos de elasticidade longitudinal nas direções 1 e 2 para um composto reforçado unidirecionalmente com a mesma fração volumétrica de fibras do CSM, que é determinada partindo do peso por unidade de área. A partir deste valor e sabendo-se a espessura, pode-se determinar a fração volumétrica da manta, como a seguir:

$$V_{CSM} = \frac{w}{16.144. \rho. t_{CSM}} \quad (4.19)$$

onde w é o peso por unidade de área, ρ é a densidade da fibra e t_{CSM} é a espessura da manta de CSM e as constantes 16 e 144 são utilizadas para converter as unidades de oz/ft² para lb/in².

4.2.3.2 Módulo de Coulomb

Do mesmo modo que o Módulo de Elasticidade, o módulo de cisalhamento pode ser obtido à partir da seguinte relação:

$$G_{CSM} = \frac{1}{8} \cdot E_1 + \frac{1}{4} \cdot E_2 \quad (4.20)$$

para uma camada com reforço unidirecional com a mesma fração volumétrica de fibras de CSM.

4.2.4 Coeficiente de Poisson

O coeficiente de Poisson no plano da camada (ν_{CSM}) pode ser obtido à partir dos valores dos módulos de Coulomb e de Young, como a seguir:

$$\nu_{CSM} = \frac{E_{CSM}}{2 \cdot G_{CSM}} - 1 \quad (4.21)$$

5 COMPORTAMENTO MECÂNICO DE COMPOSTOS LAMINADOS

5.1 Equações constitutivas para uma lâmina de material composto

As referências clássicas para todos os equacionamentos dessa seção são: Berthelot (1996) e Reddy (2004).

Para lâminas compostas tipicamente empregadas em placas e cascas estratificadas, pode-se definir um sistema de eixos ortogonais, da própria lâmina, no qual as propriedades mecânicas são identificadas. Um eixo designado 1 é colocado paralelamente às fibras (no caso de reforço longitudinal), outro designado 2 é admitido transversalmente às fibras, e o último, designado 3, ortogonalmente aos dois outros.

A lei de comportamento da lâmina composta que relaciona deformações e tensões evidencia a matriz de flexibilidade do material, no sistema de eixos de ortotropia próprio da lâmina, exibindo 9 constantes elásticas independentes, e pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\nu_{21} & -\nu_{31} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\nu_{32} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

A relação tensão/deformação é dada pela matriz constitutiva do material, inversa da matriz de flexibilidade:

$$\{\sigma\} = [C].\{\varepsilon\}$$

com $[C] = C_{ij}$, para i e j de 1 a 6, considerando a notação reduzida de Kelvin-Voigt, onde os termos não nulos são:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{1 + \nu_{23} \cdot \nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & C_{22} &= \frac{1 + \nu_{13} \cdot \nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} \\
C_{33} &= \frac{1 + \nu_{12} \cdot \nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} & C_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31} \cdot \nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} \\
C_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21} \cdot \nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & C_{21} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12} \cdot \nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} \\
C_{44} &= G_{23} & C_{55} &= G_{31} & C_{66} &= G_{12} \\
\Delta &= \frac{1 + \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{13} \nu_{31} - 2\nu_{21} \nu_{31} \nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}
\end{aligned}$$

Considerando somente o estado plano de tensão (com $\sigma_3 = 0$, $\tau_{32} = 0$ e $\tau_{31} = 0$), a matriz de rigidez do material composto pode ser escrita como:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} & Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \\
Q_{12} &= \frac{\nu_{21} E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} & Q_{66} &= G_{12}
\end{aligned}$$

Como um laminado pode conter lâminas em diferentes orientações, faz-se necessário definir a transformação de coordenadas oriunda de uma rotação do sistema de ortotropia da lâmina em relação ao eixo perpendicular ao seu plano, e então utilizar estas constantes em diferentes direções na coordenada global do sistema, a fim de se encontrar as propriedades globais da peça.

A matriz que relaciona as tensões no eixo de ortotropia de uma lâmina específica com as tensões no sistema de coordenadas globais (ou de referência) é obtida fazendo o balanço de forças sobre um elemento diferencial de volume, e é descrita da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 2 \cdot s \cdot c \\ s^2 & c & 0 & 0 & 0 & -2 \cdot s \cdot c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -s \cdot c & s \cdot c & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \text{ ou } \{\sigma^x\} = [T] * \{\sigma^1\}$$

onde s e c são, respectivamente, o seno e cosseno do ângulo entre o eixo 1 do sistema de eixos de ortotropia da lâmina com o eixo x do sistema de eixos de referência.

O vetor com as componentes de deformação também pode ser obtido à partir da mesma matriz de transformação:

$$\{\varepsilon^x\} = [T] \cdot \{\varepsilon^1\}$$

A lei de comportamento do composto, considerando comportamento elástico-linear, no sistema de eixos de referência (x, y, z) pode ser expressa na seguinte forma:

$$\{\sigma^x\} = [T] \cdot \{\sigma^1\} = [T] \cdot [C^1] \cdot [T]^{-1} \cdot \{\varepsilon^x\}$$

Sendo assim, a matriz de rigidez, ou matriz constitutiva dada no sistema de referência (x, y, z) é:

$$[C^x] = [T] \cdot [C^1] \cdot [T]^{-1}$$

Frequentemente a lei de constituição do material composto pode ser obtida no sistema de eixos de referência, considerando estado plano de tensões, na seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Com

$$\bar{Q}_{11} = c^4 \cdot Q_{11} + s^4 \cdot Q_{22} + 2 \cdot c^2 \cdot s^2 \cdot (Q_{12} + 2 \cdot Q_{66}),$$

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{22} &= s^4 \cdot Q_{11} + c^4 \cdot Q_{22} + 2 \cdot c^2 \cdot s^2 \cdot (Q_{12} + 2 \cdot Q_{66}), \\ \bar{Q}_{66} &= [Q_{11} + Q_{22} - 2 \cdot (Q_{12} + Q_{66})] \cdot s^2 \cdot c^2 + Q_{66} \cdot (s^4 + c^4), \\ \bar{Q}_{12} &= c^2 \cdot s^2 \cdot (Q_{11} + Q_{22} - 4 \cdot Q_{66}) + (c^4 + s^4) Q_{12}, \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2 \cdot Q_{66}) \cdot s \cdot c^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2 \cdot Q_{66}) \cdot s^3 \cdot c, \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2 \cdot Q_{66}) \cdot s^3 \cdot c + (Q_{12} - Q_{22} + 2 \cdot Q_{66}) \cdot s \cdot c^3,\end{aligned}$$

A matriz de flexibilidade, que relaciona tensão/deformação no sistema de eixo de referência (x,y,z) é:

$$\{\varepsilon^x\} = [T] \cdot \{\varepsilon^1\} = [T] \cdot [S^1] \cdot \{\sigma^1\} = [T] \cdot [S^1] \cdot [T]^{-1} \cdot \{\sigma^x\}$$

logo

$$[S^x] = [T][S^1] \cdot [T]^{-1}$$

Após a multiplicação das matrizes, a matriz de flexibilidade pode ser obtida, e desta matriz surgem termos de acoplamento, que relacionam tensões normais com deformações normais, e termos de acoplamento que relacionam tensões cisalhantes com deformações cisalhantes.

5.2 Teoria clássica de placas laminadas

A Teoria Clássica dos laminados reduz o problema ao estado plano de tensões, considerando o cisalhamento transversal (perpendicular ao plano da placa) nulo, onde as únicas tensões não nulas são σ_x , σ_y e τ_{xy} considerando um sistema de eixos global para a placa.

Algumas hipóteses são estabelecidas a fim de se entender melhor a teoria de estratificados:

- pode-se considerar desprezível o deslocamento coplanar no plano médio, pois ele é muito pequeno quando comparado à espessura da placa;
- as seções planas inicialmente normais ao plano médio permanecem planas e normais ao plano médio após a flexão;

- as tensões normais transversais (na direção da espessura) são pequenas quando comparadas com as outras componentes, e por isso podem ser desprezadas;

Com estas condições, temos o chamado comportamento em membrana dos materiais compostos. Então, considerando um laminado com espessura h , com n lâminas de espessura e_k cada, as solicitações no plano do laminado são denominadas como N_x e N_y (forças normais por unidade de comprimento) e T_{xy} e T_{yx} (forças cortantes por unidade de comprimento)

As tensões σ_x , σ_y e σ_z são obtidas à partir do sistema de referência (x, y, z) , que são relacionadas com as deformações da matriz de rigidez.

Considerando somente esforços de membrana, N_x , N_y e T_{xy} são determinados em função das constantes elásticas de cada lâmina.

Calculando os esforços através de uma equação matricial, temos:

$$\{N\} = [A] \cdot \{\varepsilon\}$$

A_{ij} para i e j de 1 a 6, com

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^k \cdot (z_k - z_{k-1})$$

onde z_k e z_{k-1} são, respectivamente, as distâncias das faces superior e inferior da camada k , considerando como referência o plano médio do estratificado.

Observações:

- As expressões citadas não dependem da ordem de empilhamento das lâminas.
- Os termos de acoplamento A_{16} , A_{26} , A_{61} e A_{62} se anulam quando o laminado é simétrico e equilibrado (mesmo número de lâminas de mesma espessura na direção $+\theta$ e $-\theta$ em relação ao eixo longitudinal) ou antissimétrico.

Logo, tendo os valores dos esforços, é possível calcular as tensões globais do estratificado considerado como homogêneo.

$$\sigma_x = \frac{N_x}{h}, \quad \sigma_y = \frac{N_y}{h} \quad e \quad \sigma_z = \frac{N_z}{h}$$

A matriz de constantes elásticas aparentes ou homogeneizadas do laminado pode ser obtida através da inversão da matriz de comportamento:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{-\nu_{yx}}{E_y} & \frac{\eta_{xy}}{G_{xy}} \\ \frac{-\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & \frac{\mu_{xy}}{G_{xy}} \\ \frac{\eta_x}{E_x} & \frac{\mu_y}{E_x} & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

A partir destas constantes elásticas e conhecendo o carregamento aplicado do laminado (N_x , N_y e N_{xy}), é possível determinar as deformações.

Para o estudo do comportamento em flexão de um material composto, também considerando um laminado de espessura total h , com n número de lâminas de espessura e_k cada uma, temos as solicitações de momento por unidade de comprimento, denotadas M_x e M_y os momentos fletores, e M_{xy} e M_{yx} os momentos torçores. Assim, temos a seguinte equação matricial:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

com

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^k \cdot \frac{(z_k^3 - z_{k-1}^3)}{3}$$

Observações:

- as expressões acima dependem da ordem de empilhamento das lâminas;
- os coeficientes D_{16} e D_{26} são termos de acoplamento que torcem o laminado quando aplicados somente momentos fletores e os coeficientes D_{61} e D_{62} são termos de acoplamento que flexionam o laminado quando aplicados somente momentos torçores.

De uma forma geral, quando o laminado não é simétrico, temos que o comportamento global é dado pela seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

onde os coeficientes da matriz $[B]$ são:

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}^k_{ij} \cdot \frac{(z_k^2 - z_{k-1}^2)}{2}$$

5.3 Teoria de Primeira Ordem

As simplificações da Teoria Clássica podem gerar erros significativos nos cálculos de tensão, devido ao fato de que as placas estratificadas, em geral, são sensíveis ao cisalhamento transversal.

Uma nova teoria proposta, considerando as deformações cisalhantes nos cálculos, e sendo sua distribuição constante ao longo da espessura, é conhecida como Teoria de Primeira Ordem.

Aplicando a Teoria de Primeira Ordem, a aplicação dos princípios de equilíbrio ou variacionais, juntamente as relações tensão/deformação da Teoria da Elasticidade, leva à seguinte relação constitutiva do material composto:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{16} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{26} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{44} & H_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}$$

sendo

A_{ij} = coeficientes da matriz de comportamento em membrana;

D_{ij} = coeficientes da matriz de comportamento em flexão;

B_{ij} = coeficientes da matriz de acoplamento membrana/flexão-torção;

H_{ij} = coeficientes da matriz de rigidez de cisalhamento transversal;

Q_x = força cisalhante na direção x;

Q_y = força cisalhante na direção y;

γ_{yz} = deformação cisalhante no plano médio em relação aos eixos y e z; e

γ_{xz} = deformação cisalhante no plano médio em relação aos eixos x e z.

onde os coeficientes H_{ij} podem ser determinados pelas expressões:

$$H_{ij} = k_{ij} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^k \cdot (z_k - z_{k-1})$$

e k_{ij} os fatores de correção do cisalhamento transversal. Os coeficientes de rigidez são dados pela expressão:

$$[\bar{Q}] = [T] \cdot [Q] \cdot [T^{-1}]$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 & Q_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ Q_{61} & Q_{62} & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

com

$$Q_{11} = \frac{E_1}{\Delta} \cdot \left(1 - \nu_{13}^2 \cdot \frac{E_3}{E_2} \right)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{\Delta} \cdot \left(1 - \nu_{12}^2 \cdot \frac{E_3}{E_1} \right)$$

$$Q_{12} = Q_{21} \frac{E_2}{\Delta} \cdot \left(\nu_{12} - \nu_{13} \nu_{23} \cdot \frac{E_3}{E_2} \right)$$

$$Q_{16} = Q_{61} \frac{E_3}{\Delta} \cdot (\nu_{13} + \nu_{13} \nu_{23})$$

$$Q_{26} = Q_{62} \frac{E_3}{\Delta} \cdot \left(\nu_{23} - \nu_{13} \nu_{12} \cdot \frac{E_2}{E_1} \right)$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad Q_{44} = G_{23} \quad Q_{55} = G_{13}$$

onde

$$\Delta = 1 - v_{12}^2 \cdot \frac{E_2}{E_1} - v_{23}^2 \frac{E_3}{E_2} - v_{13}^2 \frac{E_3}{E_1} - 2v_{23} \cdot v_{12} \cdot \frac{E_2}{E_1} \cdot v_{23} \cdot \frac{E_3}{E_2}$$

6 METODOLOGIA

Os elementos estruturais pultrudados possuem seções transversais que podem possuir perímetro aberto ou fechado, geralmente com pequenas espessuras. Portanto, o fenômeno de flambagem pode se manifestar de maneira global ou local. Para cada tipo de seção, foram encontrados diferentes tipos de análise, sendo que a mesma fórmula analítica para tubos nem sempre se aplicam para vigas I, e com isso, cada seção terá uma análise particular.

Primeiramente a intenção do projeto é comparar o modelo numérico com resultados experimentais de diferentes autores, a fim de avaliar se o modelo de elementos finitos fornece valores próximos das previsões analíticas ou valores obtidos por experimentos, ou seja, para se confirmar se foi utilizado elementos finitos apropriados, se as condições de contorno e de deslocamentos e giros foram apropriadas, se a força foi aplicada adequadamente, e se o processo de análise por autovalores foi bem utilizado, e analisar se a porcentagem de erro é satisfatória para se fazer análises posteriores com o modelo validado.

6.1 Método analítico para determinação da carga crítica de flambagem em viga I

Uma alternativa de aproximação para análise de flambagem para seção fechada foi introduzida por Bleich (1952), que propôs considerar os elementos das seções, mesas e alma, cada qual como placas individuais com rotação restringida pelas suas placas adjacentes. Para compressão uniaxial de placas infinitamente longas feitas de material linear elástico isotrópico e considerando todas as possibilidades de configuração de restrição rotacional para bordas longas, tem-se que a equação para a força crítica de flambagem local pode ser apresentada da seguinte forma:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 (p + 2\sqrt{q}) \quad (6.1)$$

onde E é módulo de elasticidade longitudinal; ν o coeficiente de Poisson; b e t são as larguras e espessuras da placa, respectivamente; e p e q as funções do coeficiente

de restrição elástica. Bleich (1952) se referiu aos termos finais nos parênteses como coeficientes de flambagem, k .

Esta aproximação foi adotada por outros autores, (Bank e Yin 1996; Qiao et al. 2001; Kollar 2002, 2003; Qiao e Zou 2003) para desenvolver propostas de equações para flambagem local de seções fechadas feitas de material ortotrópico. Tentativas para resolver os problemas de restrição rotacional para placas longas foram feitas por Schulz (1963), seguido por Blank e Yin (1996) e Qiao et al. (2001), mas estas tentativas envolviam análises numéricas e expressões explícitas que não foram alcançadas.

Este tipo de análise também foi adotada por Lee (1978) para se obter o coeficiente mínimo para peças comprimidas de lâminas ortotrópicas como uma função da razão entre as larguras de mesa e alma. Por conta das equações explícitas não serem desenvolvidas, os coeficientes têm de ser obtidos numericamente e são apresentados em gráficos. Posteriormente, Lee (1978) estendeu este trabalho considerando diferentes condições de contorno. Uma solução aproximada para flambagem local foi obtida por Lee e Hewson (1978) e por Jeong e Yoon (1998).

Previsões precisas de modos de flambagem de seções de parede fina e suas cargas críticas associadas foram obtidas usando aproximações baseadas no *FSM* (*finite-strip method*) ou na *generalized beam theory* (GBT) (Turvey e Wittrick, 1973; Silvestre e Camotim, 2003). Outra abordagem é adotada por Batista (2010), que propôs equações para típicas seções fechadas de aços laminados a frio oriundas da análise de regressão pelo FSM e GBT.

O primeiro conjunto de equações para seções transversais de perímetros fechados para este problema foi obtido por Kollar (2002, 2003). A forma para estas equações é similar à equação (6.1), porém inclui termos relacionados às propriedades ortotrópicas. Kollar (2003) comparou os resultados das equações com modelagem numérica por elementos finitos e experimentais disponíveis na literatura e concluiu que, para seções-I, os autores chegaram a um resultado da flambagem da alma em, no máximo, 6,5% acima do esperado, e a flambagem nas mesas 5,5% abaixo do esperado. A precisão e a sensibilidade das equações de Kollar (2002, 2003) foram investigadas por McCarthy e Bank (2010), que concluíram que elas se relacionam melhor com resultados experimentais do que equações desenvolvidas mediante a hipótese de junções mesas-alma simplesmente apoiadas.

Outra tentativa de previsão analítica assumindo a condição de simples apoio na junção das mesas e alma bastante utilizada para se determinar a carga crítica de flambagem local para seções I foi adotada pela ASCE *Structural Plastics Design Manual* (Gray, 1984), o *Eurocomp Design Code Handbook* (Clarke, 1996), e o *Italian Guide for the Design and Construction of Structures Made of FRP Pultruded Elements* (National Research Council of Italy (CNR) 2008), embora o último também apresente as equações de Kollar (2002, 2003) para se determinar a carga crítica de flambagem local de seções I como alternativa. Neste caso, o problema é reduzido para uma lâmina individual ortotrópica sujeita a uma compressão uniforme, onde a alma têm as duas extremidades longitudinais simplesmente apoiadas, e cada metade da mesa tem uma extremidade livre e a outra simplesmente apoiada.

Para o estudo de flambagem de elemento estrutural de seção “I” de PRFV pultrudado vários parâmetros são considerados a seguir. Há três principais tipos de modos de flambagem da seção.

1. Flambagem de flexão global;
2. Flambagem de torção global;
3. Flambagem local;

Como cada tipo de flambagem pode se manifestar com pequenas diferenças de propriedades geométricas, é muito difícil prever exatamente qual tipo de flambagem irá ocorrer, devendo ser calculada separadamente para se obter o menor valor de carga crítica, e assim, analiticamente pode ser determinado o tipo de flambagem. Com isso, cada modo de flambagem será explicado nas seções seguintes separadamente, e suas equações foram determinadas pelos autores mencionados anteriormente.

6.1.1 Flambagem Local

Perfis de PRFV convencionais são especificamente suscetíveis à flambagem local quando sujeitos a cargas axiais. Isto se deve ao baixo módulo de cisalhamento no plano transversal e à esbeltez (razão largura/espessura) de elementos de placas que constituem a seção do perfil de paredes finas. Cada elemento da seção, mesas ou alma, podem ser tratados como placas, cada qual com condições de contorno apropriadas, como mostra a Figura 22.

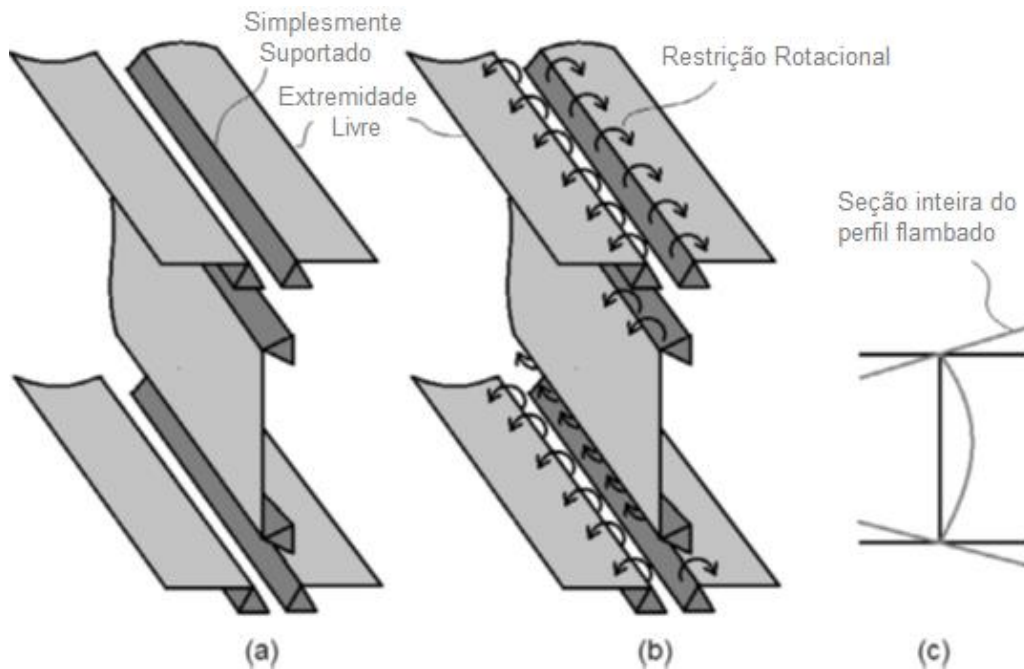


Figura 22 - Abordagens para determinar cargas críticas de flambagem local: a) placas discretas com condições simplesmente suportadas; b) placas discretas com bordas rotativamente restringidas; e c) seção completa.

Fonte: Adaptado de Cardoso (2017).

Soluções para peças longas com condições de contorno considerando a alma uma placa simplesmente apoiada nas duas extremidades, e a metade de cada flange considerada fixada em uma borda e livre em outra, foram primeiramente obtidas por Lekhnitskii (1968) e proporcionam resultados em termos de propriedades elásticas para a mesa e alma, respectivamente, para $F_{crw,SS}$ a força crítica na alma para placa simplesmente suportada, e $F_{crf,FS}$ a força crítica na mesa para placa com uma extremidade livre e a outra extremidade simplesmente apoiada, como:

$$F_{crw,SS} = \frac{\pi^2 E_{L,w}}{12(1 - \nu_{LT,w}\nu_{TL,w})} \left(\frac{t_w}{b_w}\right)^2 \left[2 \sqrt{\frac{E_{T,w}}{E_{L,w}}} + 2\nu_{LT} \frac{E_{T,w}}{E_{L,w}} + 4 \frac{G_{LT,w}}{E_{L,w}} (1 - \nu_{LT,w}\nu_{TL,w}) \right] \quad (6.2)$$

$$F_{crf,FS} = 4G_{LT,f} \left(\frac{t_f}{b_f}\right)^2 = \frac{\pi^2 E_{L,f}}{12(1 - \nu_{LT,f}\nu_{TL,f})} \left(\frac{t_f}{b_f}\right)^2 \left[\frac{48 G_{LT,f}}{\pi^2 E_{L,f}} (1 - \nu_{LT,w}\nu_{TL,w}) \right] \quad (6.3)$$

no qual b_f e b_w são as larguras de mesa e alma, respectivamente; t_f e t_w a espessura de mesa e alma, respectivamente. E_L e E_T o módulo de elasticidade longitudinal e transversal, respectivamente; G_{LT} = módulo de cisalhamento no plano; ν_{LT} o coeficiente de Poisson no plano longitudinal à peça; e ν_{TL} o coeficiente de Poisson no plano transversal à peça. Os subscritos w e f se referem à alma e mesa, respectivamente. Como visto, as equações (6.2) e (6.3) também podem ser escritas de forma similar à equação (6.1), com os termos finais em colchetes representando os coeficientes de flambagem, k .

Cardoso (2014) deu prosseguimento ao estudo de Lekhnitskii (1968), e propôs um outro cálculo para o coeficiente de flambagem k , considerando o perfil inteiro da seção submetido à carga, e utilizando constantes elásticas homogeneizadas para toda a seção, conforme mostrado na equação (6.4):

$$F_{cr} = k \frac{\pi^2 E_L}{12(1 - \nu_{LT}\nu_{TL})} \left(\frac{t_f}{b_f} \right)^2 \quad (6.4)$$

com

$$k = \left(\frac{b_w}{L} \right)^2 + \frac{1}{\alpha} \frac{E_T}{E_L} \left(\frac{L}{b_w} \right)^2 + \frac{2}{\alpha} \left[\nu_{LT} \frac{E_T}{E_L} + 2 \left(1 + \frac{b_f}{b_w} \right) (1 - \nu_{LT}\nu_{TL}) \frac{G_{LT}}{E_L} \right] \quad (6.5)$$

e

$$\alpha = 1 + \left(\frac{\pi^2}{3} \right) \left(\frac{b_f}{b_w} \right)^3 \quad (6.6)$$

Uma outra importante contribuição no estudo de carga crítica de flambagem local de viga I para material ortotrópico foi desenvolvida por Davalos, *et al.* (1999), e foi descrita no *The Pultex® Pultrusion Design Manual*, Volume 5, de 2016, onde ao invés de ser calculada a carga crítica de flambagem, a equação fornece a resposta em termos de tensão de flambagem, e é mostrada a seguir na equação (6.7):

$$\sigma_x^{cr} = \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{t_f}{b} \right)^2 \left[\sqrt{q} \left(2 \sqrt{(E_x)_f (E_y)_f} \right) + p \left((E_y)_f (\nu_{xy})_f + 2(G_{xy})_f \right) \right] \quad (6.7)$$

com os coeficientes p e q dependentes do coeficiente de restrição da junção das placas ξ , definidas pelas equações

$$p = 0,3 + \left(\frac{0,004}{\xi - 0,5} \right)$$

$$q = 0,025 + \left(\frac{0,065}{\xi + 0,4} \right)$$

$$\xi = \frac{2b_w(E_y)_f}{b_f(E_y)_w}$$

$$b = \frac{b_f}{2}$$

onde σ_x^{cr} = Tensão crítica de flambagem (MPa)

b = Metade da largura da mesa (m)

b_f = Largura da mesa (m)

b_w = Altura da alma (m)

E_x = Módulo de elasticidade Longitudinal (MPa)

E_y = Módulo de elasticidade Transversal (MPa)

f = Flange ou mesa

G_{xy} = Módulo de elasticidade transversal (MPa)

p = Constante definida pelo coeficiente de restrição (ξ)

q = Constante definida pelo coeficiente de restrição (ξ)

t = Espessura da mesa (m)

ξ = Coeficiente de restrição das placas comprimidas

w = Alma

6.1.2 Flambagem global por flexão em torno do eixo de menor inércia

O termo flambagem global é usado para descrever a mais comum instabilidade física que pode ocorrer na compressão de membros carregados axialmente.

Flambagem global se refere à flambagem prevista pela equação de Euler. O instante da carga crítica de flambagem global é caracterizada pelo deslocamento lateral de toda a seção transversal ao longo de um plano perpendicular ao eixo de menor inércia à flexão. Para elementos estruturais de PRFV, com índice de esbeltez suficiente para haver modo de flambagem global, vários artigos mostraram através de trabalhos experimentais e analíticos que a carga crítica de flambagem global pode ser prevista com uma precisão aceitável (Zhan, 2017) utilizando a fórmula clássica de Euler, dada pela equação (6.8).

$$P_{euler} = \pi^2 E_L I_{min} / (k L_{eff})^2 \quad (6.8)$$

onde E_L = Módulo de elasticidade longitudinal (MPa)

I_{min} = Menor momento de inércia da seção transversal (m⁴)

L_{eff} = Comprimento efetivo da peça (m)

k = Coeficiente de restrição das extremidades

Atualmente, a fórmula clássica de Euler é adotada pela *EURO-COMP Design Code Handbook*, *Bedford Reinforced Plastics Inc.* e *Creative Pultrusions Inc.*

Como em ensaios de compressão as placas que comprimem os elementos não tem liberdade de movimento, como rotação de uma rótula, e as duas extremidades tem a mesma condição de contorno, podemos aproximar esta configuração como engastada nos dois bordos, fazendo com que o comprimento efetivo recomendado seja de 0,65 vezes o comprimento total da peça, como descrito no livro *Estruturas de Aço - Dimensionamento prático de Acordo com a NBR 8800:2008, 8ª Edição*, de Walter Pfeil (2009).

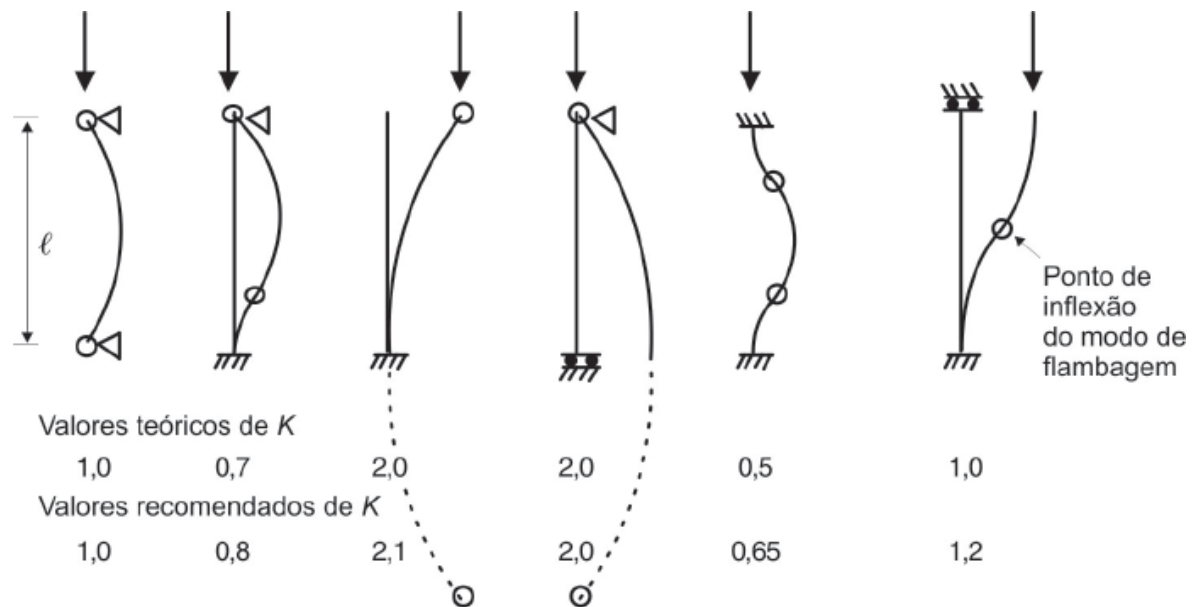


Figura 23 - Comprimento de flambagem L_{eff} .
Fonte: Pfeil (2009).

6.1.1 Flambagem global por flexo-torção

Membros comprimidos de seção aberta podem flambar em um modo torsional puro. Para seções duplamente simétricas, como as chapas de perfis I, tem como vantagem ter seu centro de cisalhamento se dá coincidentemente com seu centroide, fazendo com que a flambagem global por flexo-torção não ser relevante. Contudo, para seções onde não há esta dupla simetria, o centro de cisalhamento não coincide com o centroide, o que pode aumentar a suscetibilidade à torção, que para materiais ortotrópicos foi obtida por Dhruv R. Patel et al. como:

$$\sigma_{cr}^{tor} = \frac{1}{I_p} \left[\frac{\pi^2 E_L C_\omega}{(k_\omega L)^2} + G_{LT} J \right] \quad (6.9)$$

onde A_z = área da seção transversal

I_p = o segundo momento polar de área

J = a constante torsional

C_ω = a constante de deformação

k_ω = o coeficiente de restrição na extremidade para flambagem torsional

L = o comprimento efetivo do membro

G_{LT} = é o módulo de cisalhamento no plano previamente definido para a peça pultrudada.

A carga crítica de flambagem global por flexo-torção para membros homogêneos é:

$$P_{cr}^{tor} = \sigma_{cr}^{tor} A_z \quad (6.10)$$

6.1.2 Investigações experimentais anteriores relatadas na literatura

Uma revisão das mais relevantes investigações experimentais que abordam a flambagem local de seções pultrudadas de PRFV foi apresentada por Mottram (2004), que observou que um teste apropriado de flambagem local deve ser conduzido em colunas tendo comprimentos mínimos de 4 metades de comprimentos de onda, por causa da influência das condições de extremidade das peças, consequência da forma de aplicação do carregamento, na flambagem local para colunas muito curtas para que a influência das condições de contorno possa ser negligenciada.

De qualquer modo, isso pode resultar em comprimentos nos quais as peças sejam também suscetíveis à flambagem global. Significativamente, as colunas adotadas pela maioria dos trabalhos citados não podem ser consideradas para serem corpo-de-prova de experimentos (Yoon 1993; Lane e Mottram 2002; Mottram et al. 2003), porque elas não são curtas o suficiente para atenuar a influência de deflexões laterais totais (flambagem global).

Um dos primeiros trabalhos realizados que se tem conhecimento para colunas de seção I (Tomblin e Barbero 1994), investiga o comportamento em flambagem local de diferentes seções ($d \times b_f \times t = 102 \times 102 \times 6,4$ mm; $152 \times 152 \times 6,4$ mm; $152 \times 152 \times 9,5$ mm; $203 \times 203 \times 9,5$ mm) sendo d a altura total da seção, b_f a largura das mesas, e t a espessura das placas, sob compressão, tendo comprimentos variando de 2 a 4 vezes a metade de comprimento de onda do modo deformado previsto. Os comprimentos adotados variaram de 26,7 a 54,6 cm para $102 \times 102 \times 6,4$ mm; de 38,1 para 76,2 cm para $152 \times 152 \times 6,4$ mm; de 39,4 para 77,5 cm para $152 \times 152 \times 9,5$ mm; e de 49,5 a 100,3 cm para $203 \times 203 \times 9,5$ mm, respectivamente, para cada tamanho de seção descrito.

Reconhecendo que o fato desse modo de flambagem ser desconhecido a priori, as amostras de colunas foram instrumentadas com aparelho de medição (micrômetro) a fim de capturar a deflexão em diferentes pontos ao longo de seu comprimento.

Os autores observaram que a deflexão lateral aumenta sob carga constante após a flambagem ocorrer, e, portanto, afetando as cargas de flambagem descritas. As cargas críticas experimentais, determinadas usando o gráfico de Southwell (1932), foram comparadas com aquelas determinadas teoricamente por Kollar (2002, 2003) e Qiao et al. (2003), e foi constatado um desvio máximo de 24,2% nas mesmas condições de aplicação das equações propostas. Por conta das propriedades elásticas serem estimadas por uma aproximação elástica através de micromecânica (Barbero, 1991), ao invés de ser determinada experimentalmente, a correlação entre experimentos e previsão analítica não foi conclusiva. As cargas críticas de flambagem para colunas com índices de esbeltez baixos foram até 36% maiores do que colunas com índices de esbeltez elevados.

Turvey e Zhang (2004, 2006) testaram seções "I" de 102 x 102 x 6,4 mm de amostras de colunas tendo comprimentos variando de 200 a 800 mm (aproximadamente 1 a 4 vezes a metade do comprimento de onda). As colunas foram instrumentadas com medidores de tensão e deslocamento, transdutores e as cargas críticas foram obtidas pelos gráficos de Southwell (1932). Os resultados foram comparados com aqueles obtidos utilizando o MEF (Método dos Elementos Finitos) baseado em propriedades materiais determinadas experimentalmente e assumindo restrições das espessuras das paredes da peça em relação à rotação nas suas bordas. Um desvio máximo de 10% foi observado entre resultados experimentais e previsões via MEF. A carga crítica obtida para colunas curtas foi 32% maior do que as longas nas previsões via MEF.

As diferenças entre as cargas críticas para colunas curtas e longas descrita por Tomblin e Barbero (1994) e Turvey e Zhang (2004) são notáveis. Cargas críticas de até 36% maiores foram obtidas via MEF para colunas curtas, e podem ser explicadas pelo fato de que as placas comprimindo as seções não são simplesmente suportadas nas suas bordas por que as linhas de ação das forças mudam conforme a placa deforma lateralmente, causando uma excentricidade que afeta a flambagem do perfil e pode aumentar significativamente a carga crítica de elementos estruturais curtos, conforme a Figura 24.

Contudo, quanto mais curto o elemento estrutural, menos esses efeitos são importantes.

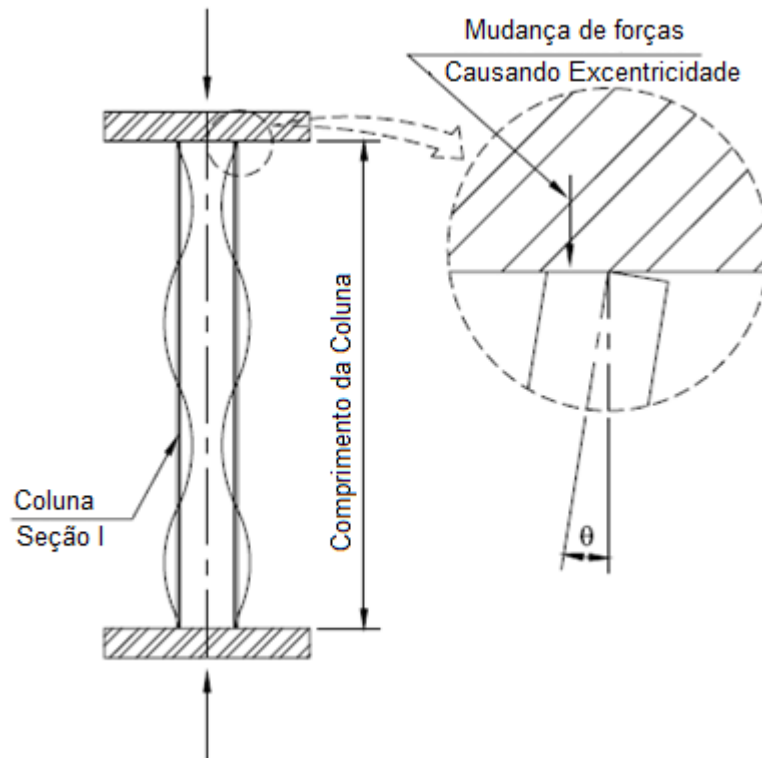


Figura 24 - Efeitos das condições nas bordas na flambagem local causando força excêntrica.
Fonte: Adaptado de Cardoso (2014).

Tomblin, et al. (1994) estudaram a flambagem local da flange de colunas de PRFV pultrudadas de paredes finas. Os procedimentos experimentais e dados usados para obter a flambagem local foram apresentados. Para interpretar os dados de teste de flambagem local, uma nova técnica utilizando o método de Southwell (1932) foi desenvolvida, como mostra a Figura 25.

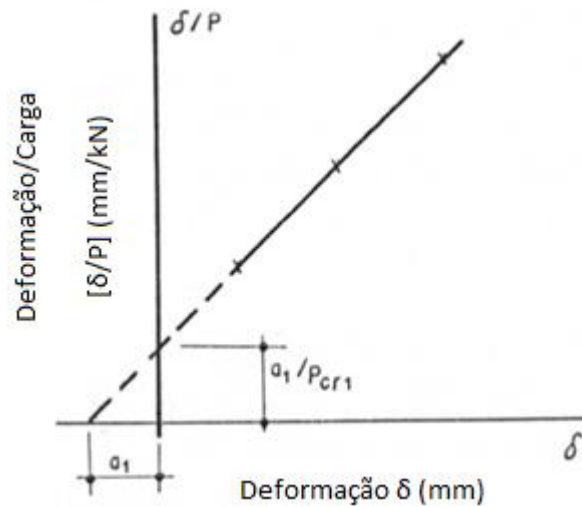


Figura 25 - Representação do gráfico de Southwell.
Fonte: Adaptado de Carvalho (2001).

A demonstração da técnica para vários tipos de seção de colunas e condições experimentais foram mostradas. As cargas foram aumentadas até a coluna estar evidentemente flambada. Após as análises dos resultados, pode-se dizer que todos os instrumentos de medição apresentaram pequenos deslocamentos da carga inicial aplicada e então estabilizados na carga antes da flambagem da flange ocorrer. Em alguns casos, uma flange flambou antes da outra, o que pode ser causado devido à imperfeições existentes na flange.

Southwell (1932) propôs um método com o qual os dados obtidos em testes de colunas com curvatura inicial poderiam ser analisados para determinar a carga crítica de flambagem da coluna caso ela fosse perfeitamente reta. A capacidade é estimada a partir da medida da deflexão lateral e da força axial aplicada. Este é essencialmente útil em testes não destrutivos para demonstrar propriedades de resistência e rigidez de um componente de uma estrutura real desde que a coluna seja solicitada com carregamento dentro do limite elástico.

Para determinar a carga crítica basta obter o inverso da inclinação desta reta. Se o valor aproximado da carga crítica é conhecido, o carregamento pode ser encerrado antes de que seja atingido, prevenindo a ruptura do material. Esse procedimento é conhecido como Diagrama de Southwell.

McCarthy, et al. (2010) tiveram como objetivo principal investigar a sensibilidade do seu modelo de sua equação proposta para flambagem local na flange, também para a determinação da precisão da equação, que inclui o efeito da restrição rotacional na junção mesa-alma. A equação pode ser usada para

modelagem de perfil macroscopicamente não-homogêneo, por incorporar propriedades ortotrópicas ou constantes homogeneizadas para laminados, a exemplo daqueles da teoria clássica dos laminados. A equação obtida nos trabalhos anteriormente citados não fornece um resultado preciso. McCarthy e Bank examinaram a equação baseada na teoria de lâmina ortogonal para tensão de flambagem local para uma placa. Também examinaram a equação para uma junção de mesa-alma com restrição rotacional. A constante rotacional é maior em peças submetidas predominantemente a esforço do tipo momento fletor, do que em colunas com esforços predominantemente do tipo compressão, por causa da alma fazer um melhor trabalho de restrição da flange contra a flambagem.

A fim de avaliar o erro das equações, as forças previstas para equações foram comparadas com resultados experimentais. Isto está feito por um cálculo, definido pela equação que é a razão da força experimental pela força prevista. Se o valor calculado é 1, isso significa que a equação correlaciona perfeitamente com o resultado. Se for maior que 1, significa que a equação é conservativa, e menor que 1, não conservativa. No geral, quanto mais perto do valor 1, a equação apresenta uma melhor relação com a realidade.

Cardoso, et al. (2015) forneceram uma equação com resultados bem próximos de resultados experimentais, e simples para determinar a tensão crítica de flambagem local de seções I pultrudadas de PRFV. Seções feitas de matrizes de vinyl ester e polyester foram testadas. A expressão proposta é comparada com resultados experimentais, bem como o resultado de análises numéricas utilizando *finite strip-method* (FSM). Neste trabalho, o método do Quociente de Rayleigh foi utilizado para determinar a carga crítica de flambagem local. A equação foi desenvolvida para uma placa infinitamente longa que é capaz de acomodar o comprimento crítico de meia onda. A equação proposta mostrou boa correlação com dados numéricos e experimentais. As seções de vinyl ester (VE) exibiram propriedades elásticas um pouco maiores que as de polyester (PE), porém não foi noticiada diferenças quando foram observados testes de colunas curtas.

Brooks, et al. (1995) consideraram uma série de testes de flambagem em elementos estruturais de seção I de PRFV pultrudado engastado. Comparações com cargas críticas teóricas, determinadas por uma equação aproximada, e análise numérica via elementos finitos através de análise linear por problemas de autovalores,

com os resultados dos testes foram apresentados. Os resultados revelaram que a análise de flambagem linear não fornece uma estimativa precisa, para uso na modelagem, da carga máxima na extremidade que um elemento engastado possa suportar. As cargas críticas obtidas com análises por autovalores via elementos finitos foram no geral menores que as cargas de testes experimentais observados no início da flambagem lateral.

Isto ocorre quando se usa módulos de seção fechada na fórmula de carga crítica clássica de Timoshenko, providenciando uma correlação de flambagem global com os resultados de testes que são comparados com as melhores previsões de análise de autovalores em elementos finitos. Brooks, et al. (1995) sugeriram que, incorporando deformações iniciais como as deformações de pré-cargas de flambagem em uma análise não-linear de elementos finitos pode levar a uma correlação mais próxima com os resultados de testes.

Lane, et al (2002). apresentaram uma investigação experimental acerca do comportamento de flambagem de elementos pultrudados de PRFV pultrudado. Modos de flambagem local e global ocorrem simultaneamente em uma maneira violenta e instável de flambagens combinadas é descrito. Seções “H” tem uma melhor proporção de reforço de fibra unidirecional orientada ao longo do eixo longitudinal em comparação com a maioria dos outros tipos de perfis PRFV. O valor da carga de flambagem global aumenta conforme o comprimento da coluna diminui, o que permite a flambagem local das mesas serem o modo de falha crítica para colunas abaixo de certo comprimento. A restrição rotacional na interface mesa-alma é a principal causa da modelagem precisa, e para estimativa de valores. Os efeitos não lineares são altamente sensíveis à imperfeições. Os dois principais tipos de imperfeições encontradas em flambagem de colunas são cargas excêntricas e imperfeições de fabricação das colunas.

Barbero, et al. (1993) consideraram para colunas pultrudadas longas, que flambagem global (Euler) é provável de acontecer antes de qualquer outra falha por instabilidade e a equação de flambagem necessita incorporar a natureza anisotrópica do material. Para colunas curtas, a flambagem local ocorre primeiro levando tanto à grandes deflexões, que por sua vez acabam por desencadear a flambagem global, ou consequentemente levando à falha material localizada graças a estas grandes deflexões. Visto que o material composto acomoda grandes deformações até a sua

falha, o material composto permanece linearmente elástico para grandes deflexões e deformações ao contrário de materiais convencionais.

6.2 Método analítico para cálculo da carga crítica de flambagem em tubo de seção circular

Uma casca cilíndrica carregada em compressão pode falhar pela flambagem global (Euler), pela flambagem local (flambagem relacionada à espessura da parede), ou pela falha no material (escoamento, ruptura de fibra, micro fissura na matriz, etc). Weaver (1999) produziu gráficos que identificam estes mecanismos de falhas como função da configuração do laminado e espessuras da casca. O foco são as espessuras da circunferência onde ocorrem a flambagem local em carregamentos que independem do comprimento, tipicamente em razões de comprimento/raio inferiores a 5.

Dois fenômenos que reduzem a carga crítica de flambagem são os efeitos anisotrópicos de acoplamento entre tensão normal e deformação e a sensibilidade à imperfeições. Tomando o primeiro efeito, os fenômenos de acoplamento são bem conhecidos por terem efeitos prejudiciais à capacidade de suportar carga para várias estruturas. Soluções analíticas para seções de perímetro fechado são geralmente disponíveis apenas para configurações simétricas ou arranjos anisotrópicos no qual os efeitos de acoplamento entre esforços de membrana e deformação de flexão são eliminados ou reduzidos drasticamente. Vasiliev (1993) fornece uma equação para determinação do esforço compressivo, na direção longitudinal, por unidade de comprimento como:

$$N = \left[D_{11}\lambda_m^2 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda_n^2 + D_{22}\frac{\lambda_n^4}{\lambda_m^4} \right] + \frac{(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)\lambda_m^2}{r^2 \left[A_{11}\lambda_m^4 + \left(\frac{(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)}{A_{66}} - 2A_{12} \right) \frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2} + A_{22}\lambda_n^4 \right]} \quad (6.11)$$

onde, D_{ij} e A_{ij} são constantes de rigidez homogeneizadas para o laminado. O autor modelou o padrão de flambagem local como sendo séries de dobro do seno, onde λ_m

é a metade do comprimento de onda e λ_n é o comprimento de onda circunferencial, dados por:

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{l} \quad \text{e} \quad \lambda_n = \frac{n}{r}$$

tipicamente, m e n são determinados por uma técnica exaustiva de busca. Esta carga de flambagem da equação (6.11) é altamente dependente dos dois lados da configuração e modo da viga. O valor superior da borda é para uma configuração homogênea quase isotrópica. Na prática, os projetos frequentemente negligenciam os efeitos do acoplamento flexão/torção enquanto os termos de rigidez à flexão D_{16} e D_{26} forem suficientemente pequenos. Utilizando exclusivamente sequências simétricas de empilhamento de lâminas, muitas vezes impedem a presença de acoplamento de deformação de membrana por alongamento.

Foi mostrado que a flambagem local é melhor resistida utilizando laminados *quasi-isotropic* (laminados onde sua configuração produz valores nulos para coeficientes da matriz A_{ij}). Onoda (1985) constatou teoricamente que a carga máxima de flambagem local para laminados simétricos pode ser alcançada usando uma configuração *quasi-isotropic* consistindo de um número infinito de lâminas finas infinitesimais criando um laminado homogêneo efetivamente. Essa configuração é evidentemente impraticável. Após um estudo, tornou-se aparente que esses laminados contendo um número finito de lâminas que satisfaz a melhor solução de Onoda (1985) não são determinadas diretamente.

O número mínimo de lâminas de camadas ($0, 90$ e $\pm 45^\circ$) que satisfazem a solução de Onoda é 48. Apenas com este número mínimo de lâminas é possível fazer um laminado *quasi-isotropic* (no plano que é ao mesmo tempo homogêneo e especialmente ortotrópico). Isso tem potenciais ramificações no que diz respeito ao modelo. De fato, se uma casca cilíndrica é fabricada de materiais unidirecionais, a espessura mínima para alcançar 48 lâminas é no momento 6mm, assumindo 8 lâminas por milímetro. Parece, então, que uma solução finita para a proposta de Onoda (1985) resulta em uma estrutura de espessura considerável. Isso deixa claro que o uso da configuração *quasi-isotropic*, na prática, corre o risco de incluir efeitos de acoplamentos indesejáveis. É um equívoco comum supor que os efeitos de acoplamento são eliminados em um laminado balanceado e simétrico. Contudo isso

não é necessariamente o caso. Claramente acoplamentos de torção/flexão podem ocorrer e é devido ao posicionamento não coincidente de lâminas -45 e -45° .

Portanto, supostamente um laminado *quasi-isotropic* laminado consistindo de proporções iguais a 0 , $+45$, -45 e 90° tem diferentes módulos de flexão nas principais direções, ou acoplamentos flexão/torção, ou os dois. Isso é assim, a menos que um mínimo de 48 lâminas e configurações especiais seja usado. Alternativamente, as camadas de fibras anguladas no laminado pode ser posicionada antissimetricamente sobre o plano médio para eliminar o acoplamento flexão/tensão, mas á custa de introduzir acoplamentos flexão/torção através dos termos da matriz B_{16} e B_{26} .

É bem conhecido que, em estruturas com larguras mínimas, os mecanismos de falha interagem, e isso tem uma outra consequencia: eles podem ser altamente sensíveis para defeitos. Como um exemplo, a carga axial de flambagem de tubos cilíndricos de paredes finas são altamente sensíveis na espessura da parede: uma imperfeição com uma amplitude de 20% da espessura da parede pode reduzir a carga geral de flambagem em mais de 50%.

O primeiro experimento relatado de cascas compostas aparece realizado em meados dos anos 1960, por Card e Petersen (1962). Eles reconheceram o efeito de imperfeições na flambagem por compressão axial de fissuras em cascas cilíndricas. A NASA subsequentemente modificou a expressão clássica de autovalor linear por carga de flambagem utilizando uma base empírica de coeficiente baseado nesse resultados. O coeficiente foi também relacionado com a razão raio/espessura da parede, na rigidez do plano e termos de rigidez à flexão e foi definido para fornecer um limite inferior aos resultados experimentais.

Os autores seguintes modelaram efeitos não-lineares em cascas cilíndricas incluindo imperfeições na determinação da estabilidade pós flambagem. Tennyson e Simites modelaram um composto laminado de cascas cilíndricas com imperfeições e mostraram efeitos catastróficos silimares. Tennyson et al. (1990) também consideraram experimentalmente e analiticamente efeitos de arranjos e sensibilidade à imperfeições de tubos compostos, e assim, forneceram uma visão física valiosa sobre este fenômeno. Hansen e colegas de trabalho identificaram um laminado de 4 lâminas ótimo para resistir à flambagem local com $(26,7, -36,8, 69,1, \text{ e } -10,6^\circ)$. Embora não tenha sido discutido por eles, este laminado é apenas ótimo para 4 lâminas de um sistema de material particular utilizado. Isto é interessante pelo fato de conter todas

as possibilidades de termos de acoplamentos, e como a consequência, provavelmente tem um padrão incomum de flambagem, embora isto também não está apresentado. Esta técnica de modelagem também questiona a validade desses resultados. Assumindo implicitamente condições de contorno simétrica e assimétrica no comprimento médio, assim como reduzir o tamanho do modelo para uma metade, força efetivamente os modos de flambagem ao de um modelo ortotrópico, e impossibilita tais efeitos anisotrópicos.

Após alguns anos, Pandey e Sherbourne (1995) tentaram expressar a discrepância entre resultados experimentais e métodos teóricos usando uma aproximação de dureza reduzida baseado no trabalho de cascas cilíndricas isotrópicas de Croll, feito anteriormente. Enquanto providenciavam os conhecimentos necessários sobre a resposta física, os autores concluíram que o método fornece um indicador qualitativo de efeitos da configuração na sensibilidade à imperfeição. Em particular, eles sugeriram que essa redução de sensibilidade à imperfeições pode ser obtida utilizando configurações com uma alta dureza e baixo coeficiente de Poisson no plano.

Estes últimos trabalhos compartilham um tema comum de introduzir imperfeições dentro da geometria perfeita de casca, e por considerar um equilíbrio estático linear, e então determinar a estabilidade dos modos de flambagem posteriores. Essa pós flambagem sustenta uma carga muito menor que um limite de carga inicial para um cilindro perfeito. Embora estas imperfeições providenciam o mecanismo para pular para um estado de pós flambagem de um estado inicial estável. Esta tem sido a longa explicação para a discrepância entre cargas de flambagem experimental e analítica clássica.

Os modelos de código refletem um entendimento mais básico. De fato, a atual *European Space Agency (ESA)* projetou um manual de composto, recomendando usar a expressão simplificada através do qual um fator de ruptura empírico em conjunto com a análise clássica de autovalores é utilizado. A NASA utiliza a mesma aproximação. Embora reconhecendo que as respostas a estabilidade pós flambagem são provavelmente mais indicada para o comportamento de uma casca cilíndrica real, ela ainda não tem solução confiável para prever a resposta à cascas compostas de formas fechadas. A esbeltez para fórmula clássica de auto valor com um fator de

ruptura é aquela que, mesmo reconhecendo a sensibilidade à imperfeição, preserva a solução simplificada de formas fechadas.

Já Amir Fam et. al (2010) propõe um modelo simplificado para estabilizar a interação das curvas para tubos longos compostos engastados. A capacidade de carga puramente axial para tubos longos pode ser calculada utilizando a equação de flambagem de Euler. A equação de flambagem de Euler é baseada em um material linear elástico homogêneo, entretanto, ele pode ser aplicado para tubos compostos com uma consideração especial de o módulo de elasticidade E estar na direção longitudinal. A tabela feita por Amir Fam et. al (2010) compara a capacidade de carga axial obtida para os casos estudados utilizando o método de elementos finitos com aqueles utilizando previamente a equação de Euler. A tabela mostra que, na maioria dos casos, (onde o índice de esbeltez é de 114 ou maior), a carga crítica para tubos compostos foram geralmente bem previstas pela equação de Euler, com uma diferença média de 7,6%. Por outro lado, para tubos curtos, com índice de esbeltez de 19, foi encontrado um erro significativamente grande de mais de 80%. Isto é porque a carga crítica de Euler, que é essencialmente baseada na flambagem global, vem a ser infinitamente grande quando o comprimento efetivo de um tubo se aproxima de 0. Tubos curtos falharam por flambagem local e compressão, à cargas muito menores que aquelas previstas pela equação de Euler. Os modos globais de flambagem serão calculado utilizando condições de contorno para comprimento efetivo da mesma forma abordada para o caso da viga I, ou seja, um comprimento efetivo de 0,65 vezes o comprimento da peça.

7 PRINCÍPIO DA APROXIMAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos (MEF) teve suas origens na análise estrutural. Com o surgimento dos primeiros computadores digitais no início da década de 50, os métodos matriciais para a análise estrutural tiveram um grande desenvolvimento. As primeiras aplicações envolviam apenas estruturas reticuladas, mas a crescente demanda por estruturas mais leves, conduziu ao desenvolvimento de métodos numéricos que pudessem ser utilizados nas análises de problemas mais complexos. Entre os primeiros trabalhos a tratarem deste tema, estão os autores Turner et al. (1956), Argyris e Kelsey (1960), e Zienkiewicz e Taylor (2005). Na década de 70 o MEF teve suas aplicações estendidas a problemas de mecânica dos fluidos e, desde então, vem consolidando-se como um método mais geral de solução de equações diferenciais parciais.

Esta abrangência, aliado ao sucesso do método, propiciou o estudo mais profundo e extenso de seus fundamentos matemáticos. Da análise matemática do método resultaram estimadores de erro e critérios de estabilidade numérica, que garantem aos resultados mais confiabilidade. A evolução do método nas últimas 5 décadas foi muito significativa, passando de problemas lineares para não lineares, de análises de somente um fenômeno para análises multi-físicas, utilizando interfaces gráficas muito mais intuitivas do que as primeiras interfaces computador-usuário. O MEF continua sendo muito utilizado, e em constante evolução, visto a quantidade de artigos científicos publicados em torno dele nas últimas décadas.

A geometria submetida aos carregamentos e restrições é subdividida em pequenas partes, denominadas de elementos. A divisão da geometria em pequenos elementos permite resolver um problema complexo, subdividindo-o em problemas mais simples. A solução do problema como um todo se dá mediante a solução de vários problemas simples simultaneamente. Isto resulta em sistemas de equações algébricas, que por sua vez são apropriados para a utilização de computadores.

Para um modelo físico volumétrico, onde se tem infinitos pontos, e onde cada ponto pode se ter um eixo de coordenadas x , y e z , com deslocamentos na direção destes eixos, o problema teria infinitas variáveis desconhecidas. O método propõe que o número infinito de variáveis desconhecidas, sejam substituídas por um número limitado de elementos de comportamento bem definido. Essas divisões podem

apresentar diferentes formas, tais como a triangular, quadrilateral, entre outras, em função do tipo e da dimensão do problema. Como são elementos de dimensões finitas, são chamados de “elementos finitos” – termo que nomeia o método.

Os elementos finitos são conectados entre si por pontos, os quais são denominados de nós ou pontos nodais. Ao conjunto de todos esses itens – elementos e nós – dá-se o nome de malha. Em função dessas subdivisões da geometria, as equações matemáticas que regem os comportamentos físicos não serão resolvidas de maneira exata, mas de forma aproximada por este método numérico. A precisão do MEF depende da quantidade de nós e elementos, do tamanho e dos tipos de elementos da malha. Ou seja, quanto menor for o tamanho e maior for o número deles em uma determinada malha, maior a precisão nos resultados da análise (ESSS, 2019).

Apesar do MEF, geralmente, considerar os elementos individualmente como contínuos, o método em sua essência consiste de um procedimento de discretização. Isso porque exprime os deslocamentos em qualquer ponto do elemento contínuo, em termos de um número finito de deslocamentos associados aos pontos nodais multiplicados por funções de interpolação apropriadas. A partir destes deslocamentos, por diferenciação das deformações e, no caso de comportamento linear, utilizando-se a lei de Hooke (Timoshenko, 1970), em que a variação da tensão pelo deslocamento é constante. Esta relação linear serve apenas quando estamos tratando de pequenos deslocamentos. Quando os deslocamentos e deformações aumentam significativamente, ou o comportamento do material apresenta fenômenos como plasticidade e fissuração os efeitos não-lineares ganham importância.

A vantagem do método é que a equação de equilíbrio para o sistema como um todo pode ser obtida pelo agrupamento das equações determinadas, individualmente, para cada elemento finito utilizado na modelagem. A interpolação é, geralmente, feita com funções de interpolação polinomiais de grau reduzido.

Uma outra vantagem do MEF é a facilidade com que a sua generalização pode ser conseguida para a resolução de problemas bidimensionais e tridimensionais constituídos por vários materiais diferentes e para domínios com contornos irregulares.

Os passos essenciais de uma solução numérica pelo MEF são os seguintes:

1. Subdivisão do sistema global contínuo em elementos finitos;

2. Para cada elemento finito m calcular a matriz de rigidez $[K^{(m)}]$ e, para problemas dinâmicos, matriz de massa $[M^{(m)}]$ e a matriz de amortecimento $[C^{(m)}]$ relativamente a um referencial local conveniente;
3. No caso particular deste trabalho, é necessário obter a matriz geométrica de cada elemento, para compor o problema de auto-pares;
4. Determinação do sistema global, composto por uma matriz de rigidez global $[K]$ e, para problemas dinâmicos, da matriz de massa $[M]$ e da matriz de amortecimento $[C]$ através da compatibilização das contribuições elementares expressas relativamente a um mesmo sistema de referência global;
5. Determinação do vetor das cargas aplicadas ao sistema global $\{R\}$;
6. Estabelecimento das equações de movimento para o sistema global $[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{R\}$, onde $\{U\}$, $\{\dot{U}\}$ e $\{\ddot{U}\}$ os vetores dos deslocamentos, velocidades e acelerações nodais, respectivamente.
7. Cálculo das variáveis do problema em questão, tais como: deslocamentos, deformações e tensões.

Através dos autovalores extraídos, se determina as cargas críticas de flambagem, e então descrito para cada autovalor qual será seu modo de flambagem correspondente. Neste estudo, utilizaremos apenas quatro primeiros autovalores, que matematicamente já é um número razoável de soluções possíveis para se observar em uma peça.

O MEF apresenta diversas formulações possíveis. Em problemas estáticos, por exemplo, no caso da análise estrutural, é comum derivar-se a matriz de rigidez utilizando-se a abordagem direta que consiste no relacionamento do vetor dos deslocamentos nodais com o vetor das forças nodais. Tal abordagem apresenta algumas dificuldades em problemas dinâmicos, tais como na análise de vibrações, sendo mais adequado neste tipo de problema obter-se para cada elemento individual a derivação das matrizes de elementos finitos de rigidez, de massa e do vetor das forças não conservativas nodais a partir respectivamente da energia cinética, da energia potencial e da expressão dos trabalhos virtuais.

As análises feitas pelo *software* ANSYS® são em relação as coordenadas globais da peça. Porém, como as modelagens foram realizadas com materiais ortotrópicos, uma importante definição da modelagem são sistemas de coordenadas

locais, de modo que o programa entenda exatamente a contribuição de cada lâmina para as propriedades mecânicas nas coordenadas globais. Para materiais isotrópicos, isto não é relevante, pois mesmo que as coordenadas locais não estejam modeladas corretamente, o resultado da análise não seria alterado.

7.1 Análise linear de estabilidade

A relação entre as forças nodais e os deslocamentos nodais para cada elemento define o conceito de rigidez, que pode ser comparado a uma mola, como ilustra a Figura 26. A rigidez da mola nada mais é do que uma relação entre a força aplicada e o deslocamento medido na extremidade da mola. A constante elástica da mola pode ser considerada como um coeficiente de rigidez no MEF (ALVES FILHO, 2007).

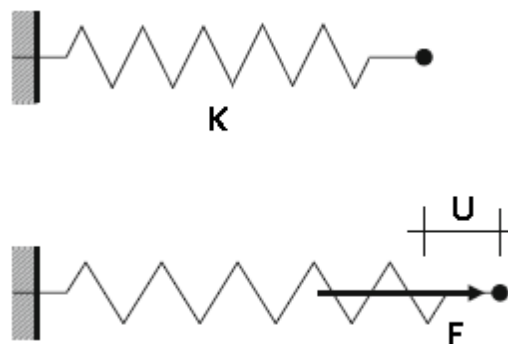


Figura 26 - Sistema força deslocamento de uma mola.
Fonte: Adaptado de Rust (2015)

O equacionamento do MEF utiliza o princípio semelhante ao da mola, porém utilizam-se diversos componentes de rigidez simultaneamente. Relacionando assim todos os deslocamentos e forças aos diversos componentes de rigidez. Quando essas relações são lineares e os componentes de rigidez são constantes, temos a análise mais simples, que caracteriza uma análise linear (ALVES FILHO, 2007).

A tarefa principal da análise estrutural é analisar os esforços internos da estrutura e os deslocamentos internos, baseando-se no carregamento externo, nas propriedades mecânicas e geometria da peça, para isso utilizam-se equações algébricas na forma matricial da seguinte maneira:

$$[K].\{U\} = \{F\}$$

onde $\{F\}$ é uma matriz coluna com todas as forças nodais, $[K]$ é uma matriz quadrada de rigidez da estrutura, contendo os coeficientes de rigidez de toda a estrutura, que relacionam todos os deslocamentos nodais com as forças nodais e $\{U\}$ é uma matriz coluna com todos os deslocamentos nodais. Este é o equacionamento linear para cálculos estruturais, caracterizado pela matriz de rigidez constante e a curva ilustrada na Figura 27 (ALVES FILHO, 2007).

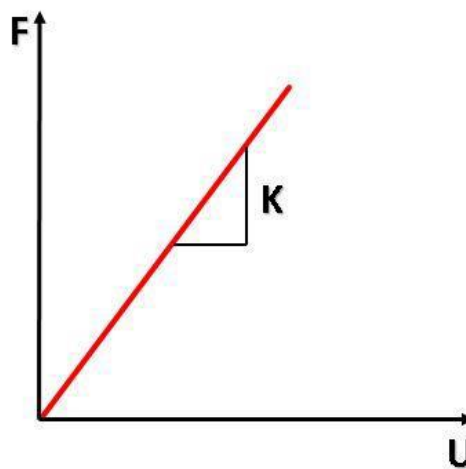


Figura 27 - Curva característica de análise linear.
Fonte: Adaptado de ANSYS (2015)

A determinação da matriz de rigidez de elementos bi e tridimensionais é feita através de técnicas matemáticas de interpolação e análises de força, energia de deformação e transformação de energia, obtendo assim coeficientes de rigidez aproximados. Cada elemento possui uma matriz de rigidez característica, que está disponível na biblioteca de elementos dos programas de análise via MEF (ALVES FILHO, 2007).

7.2 Análise não linear de estabilidade

A análise não linear ocorre em múltiplos passos, diferentemente da análise linear que é realizada em apenas um passo de carregamento. A análise não linear requer que as forças ou deslocamentos impostos sejam aplicados gradualmente em múltiplas etapas. No caso da não linearidade geométrica, a matriz de rigidez $[K]$ é

atualizada à medida que a estrutura se deforma e conseqüentemente a equação de equilíbrio do sistema é atualizada para a estrutura deformada a cada passo da análise, equilibrando a estrutura em relação as forças externas e internas e as deformações (ALVES FILHO, 2012).

A equação geral para a análise não linear é:

$$([K] + [K_G]).\{U\} = \{F\}$$

onde $\{F\}$ é uma matriz coluna contendo as forças nodais, $[K]$ é a matriz quadrada de rigidez antes do incremento de deformação, $[K_G]$ é a matriz quadrada de correção da rigidez para o incremento de força aplicado e $\{U\}$ é a matriz coluna referente ao deslocamento. A cada novo incremento a matriz de rigidez é corrigida (ALVES FILHO, 2012). A Figura 28 representa uma curva característica de análise não linear.

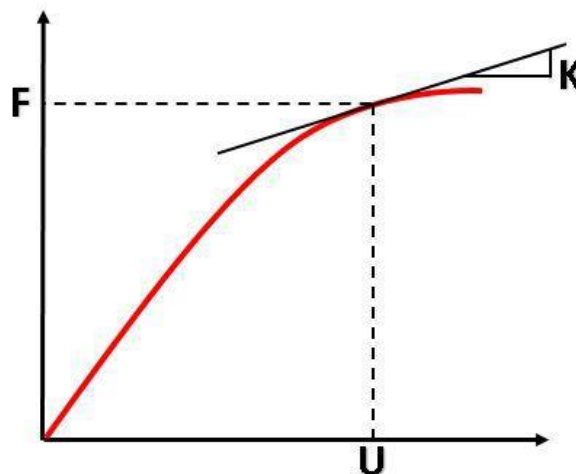


Figura 28 - Curva característica de análise não linear.
Fonte: Adaptado de ANSYS (2015)

Em casos de instabilidade como a flambagem, o objetivo é encontrar a carga que gera a instabilidade no sentido de modificações bruscas na configuração geométrica da peça em nível de carregamento praticamente constante, e ainda descrever o comportamento da estrutura logo após a instabilidade, o que não é possível por meio da análise linear. No caso da flambagem, a estrutura tende a apresentar aumento dos deslocamentos e redução da força suportada logo após a flambagem (ALVES FILHO, 2012).

A condição física de equilíbrio entre as forças internas e externas dos elementos deformados é a base dos métodos iterativos, que buscam traçar a trajetória de equilíbrio do sistema. Em casos nos quais o fenômeno físico é caracterizado pela instabilidade, são necessárias técnicas alternativas que utilizam o conceito do método de *Newton-Raphson*. Algumas destas técnicas são a de controle do deslocamento, técnicas de controle de energia, do comprimento de arco constante e do controle de deslocamento generalizado (ALVES FILHO, 2012).

7.3 Análise linear e não linear

A análise estática linear de flambagem via elementos finitos é feita através do método de autopares, o qual prediz a carga crítica de flambagem de uma estrutura elástica linear ideal, bem como, o modo de flambagem. Entretanto, imperfeições e não linearidades impedem a maioria das estruturas reais de atingir a sua carga crítica de flambagem, logo, esta análise normalmente produz resultados rápidos, mas não conservadores. Além disso, apenas o comportamento pré-flambagem pode ser analisado por esse método (ANSYS, 2015).

Problemas de autopares são caracterizados pela possibilidade de que haja mais que uma única solução para o sistema. O objetivo da análise através do método de autopares é calcular as inúmeras soluções possíveis para o sistema em questão. Para o caso da flambagem o menor valor dentre estes encontrados é o desejado (BATHE, 1982).

A análise de flambagem linear através do método de autopares é formulada da seguinte maneira:

$$([K] + \lambda_i[S] \cdot \{\psi\}_i) = \{0\}$$

tal que $[K]$ é a matriz rigidez, $[S]$ é a matriz de rigidez de tensão, λ_i i -ésimo autovalor e $\{\psi\}_i$ o i -ésimo autovetor de deslocamento (ANSYS, 2015).

A equação é resolvida através de algoritmos e então o menor autovalor λ positivo (em um problema bem modelado, todos estes λ_i são positivos) é utilizado para determinar a carga crítica de flambagem.:

$$P_{cr} = \lambda F_0$$

onde F_0 são as cargas iniciais que foram utilizadas para gerar $[S]$ (ANSYS, 2015).

Uma abordagem mais precisa para prever a instabilidade é realizar uma análise de flambagem não linear. Isso envolve uma análise estática estrutural considerando os efeitos da deformação. Usando a técnica não linear, o modelo pode incluir características como imperfeições iniciais, comportamento plástico e resposta de grande deflexão. Além disso, usando o carregamento controlado por deflexão, pode-se acompanhar o comportamento pós-flambagem da estrutura (ANSYS, 2015).

A Figura 29 apresenta um comparativo dos resultados dos dois modos de análise, o gráfico (a) mostra a curva de uma análise não linear que possibilita o estudo do comportamento pós-flambagem da estrutura. Já o gráfico (b) ilustra as cargas críticas obtidas pelas duas análises (linear e não linear), caracterizando a análise não linear pela obtenção de valores mais conservadores para a carga crítica de flambagem (ANSYS, 2015).

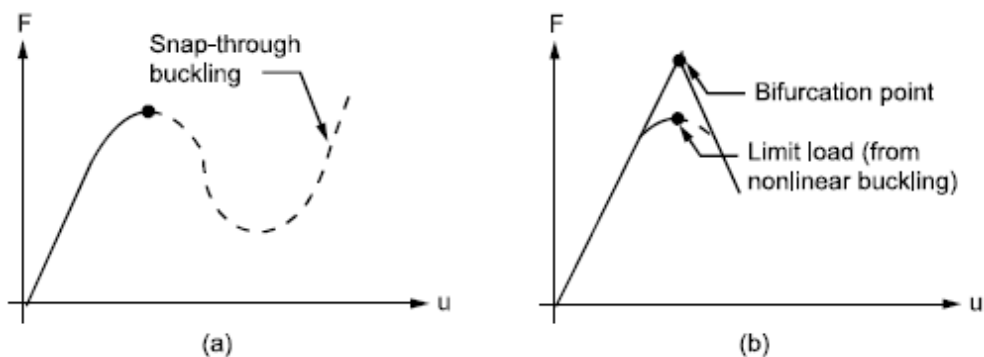


Figura 29 - Curvas de flambagem.
Fonte: ANSYS (2015)

No contexto analisado, a instabilidade pode ocorrer por (i) bifurcação ou (ii) ponto limite, sendo que a primeira contextualiza a instabilidade de barras esbeltas, quando consideradas peças ideais (sem imperfeições geométricas e sem tensões residuais) e de material infinitamente elástico.

A instabilidade bifurcacional pode ser dividida em (i) simétrica estável, (ii) simétrica instável, (iii) assimétrica. A Figura 30 ilustra o contexto teórico no qual se insere esse trabalho.

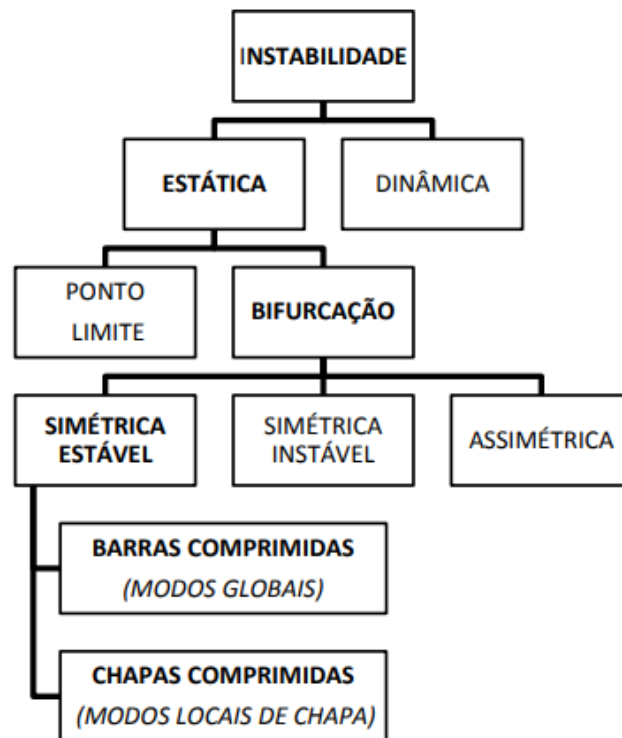


Figura 30 - Contextualização da instabilidade de perfis.
Fonte: Braga (2015).

Os métodos numéricos de análise linear de estabilidade são aqueles que fornecem os carregamentos críticos elásticos de bifurcação (no caso deste trabalho, o carregamento crítico de bifurcação será a flambagem). Formalmente, consistem na resolução de um problema de autovalores e autovetores associados às matrizes de rigidez elástica e geométrica da estrutura discretizada (qualquer que seja o método de discretização empregado).

É possível estimar a carga crítica de flambagem elástica de dada estrutura pela extração dos seus autovalores. A carga de flambagem é obtida como um multiplicador da carga de perturbação, a qual é adicionada ao conjunto das cargas externas aplicadas à estrutura no estado inicial da análise. Para assegurar que os autovalores obtidos sejam razoáveis, a resposta da carga de perturbação deve ser elástica para valores acima da carga de flambagem estimada. Nas próximas seções serão apresentados os elementos utilizados para a obtenção destes autovalores.

7.4 Elemento Shell 181

O elemento Shell 181 é apropriado para analisar estruturas finas a moderadamente grossas. É um elemento originalmente quadrangular de quatro nós com seis graus de liberdade em cada nó: translações nas direções x, y e z, e rotações sobre os eixos x, y e z, e sua modelagem não exige que a geometria tenha um volume definido. Assim, a malha é construída sobre um modelo geométrico contendo somente as superfícies médias. A espessura é contemplada somente nos elementos finitos. O elemento pode ter dois nós superpostos, de modo a se tornar triangular, porém resultando em um elemento que fornece uma aproximação excessivamente pobre. A formulação do Shell 181 acomoda cinemática de grandes rotações e relações constitutivas não-lineares. O Shell 181 considera efeitos seguidos de pressões distribuídas (ANSYS, 2019).

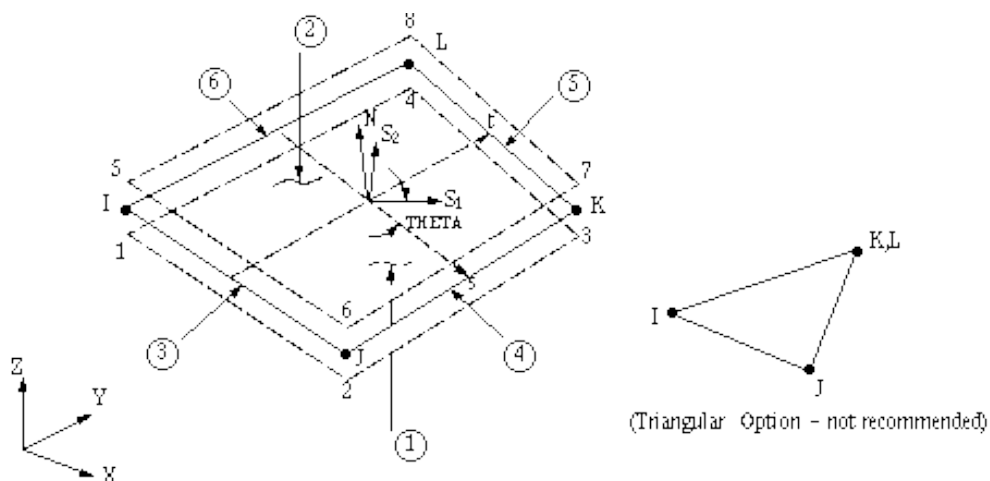


Figura 31 - Elemento Shell 181.
Fonte: ANSYS® Documentation (2019).

O elemento Shell 181 pode ser usado para a modelagem de placas / cascas laminadas ou sanduíche, empregando para isso propriedades elásticas homogêneas ao longo da espessura obtidas por meio da Teoria de Primeira Ordem, na qual o cisalhamento nos planos contendo a espessura é suposto constante, ao longo da própria espessura. A precisão na modelagem de cascas compostas é regida pela teoria de primeira ordem (geralmente referido como teoria shell Mindlin-Reissner, Mindlin (1951)).

A formulação do elemento é baseada na definição logarítmica de deformações e tensões verdadeiras, com base na configuração deformada.

7.5 Elemento Solid 46

Outra alternativa seria a utilização do elemento Solid 46 e o Solid 191. O Solid 46 é uma versão estratificada do elemento Solid 45 e, é claro, se destina à simulação de materiais laminados. O elemento possui 8 nós, sendo 3 graus de liberdade por nó (translações nos eixos x, y e z) e pode possuir até 250 camadas de material ortotrópico de mesma espessura, sendo que este elemento necessita de modelo geométrico com um volume definido. O elemento possui um sistema de coordenadas próprio, assim como o Shell 181, onde o eixo z é perpendicular ao plano de referência (KREF), plano este que pode coincidir com o plano médio ou estar nas superfícies inferior ou superior do elemento.

A importância deste sistema de referência se revela na orientação das camadas, pois o ângulo θ é medido a partir do eixo x do elemento. Assim como, no caso do Shell181, é necessário especificar os módulos de elasticidade (E_x, E_y, E_z), os módulos de cisalhamento transversal (G_{xy}, G_{yz}, G_{xz}) e os coeficientes de Poisson (ν_{xy}, ν_{yz} e ν_{xz}), com base no sistema de coordenadas locais do elemento. O elemento ainda pode assumir as formas prismática e piramidal.

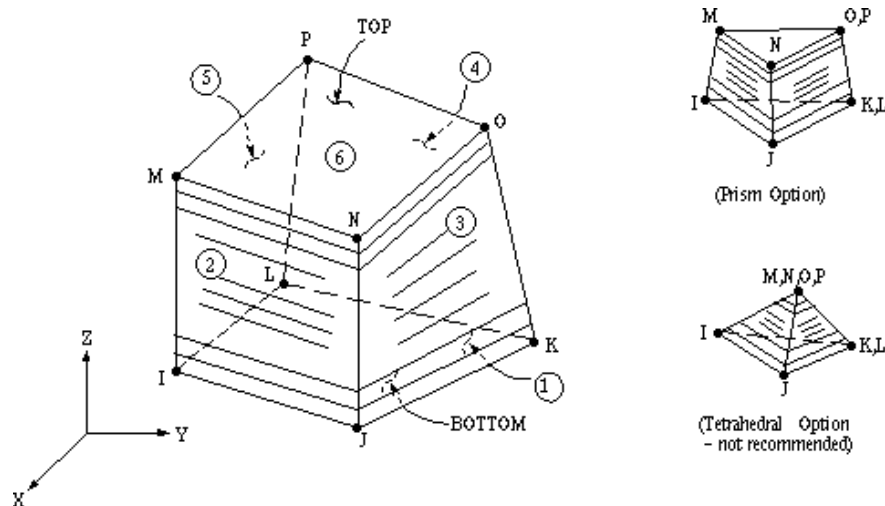


Figura 32 - Elemento Solid 46.
Fonte: ANSYS® Documentation 2019.

8 VALIDAÇÃO DOS MODELOS NUMÉRICOS

Nesta primeira etapa de estudo, os resultados numéricos apresentados somente se destinam à verificação da estratégia de modelagem, ou seja, se o código implementado no *software* foi bem preparado, com condições de contorno e propriedades mecânicas e geométricas adequadas, a fim de se chegar a um resultado próximo de resultados experimentais, ou seja, resultados reais.

8.1 Perfil I

Elementos estruturais de perfil I de PRFV de 100 x 100 x 6,4 mm foram consideradas, variando os comprimentos de 0,5 m à 6 m, que são fabricadas com polyester (PE) pelo processo de pultrusão. Os resultados para valores de carga crítica de flambagem para todos os perfis foram relatados por Patel et al. (2016), onde ele confrontou sua modelagem numérica, com os dados experimentais e solução analítica relatadas por Cardoso et al. (2014), onde houve uma boa correlação dos resultados, sendo adequado utilizá-los para comparação. As fibras relatadas nos experimentos de Cardoso (2014) foram produzidas com frações volumétricas de 60% de fibras *E-glass* e 40% resina polyester no processo de pultrusão. As propriedades da lâmina da seção relatadas por Cardoso (2014) são dadas a seguir:

Tabela 1 - Propriedades materiais da lâmina.

E_x	1,14e10 Pa
E_y	4,47e10 Pa
E_z	1,14e10 Pa
ν_{xy}	0,272
ν_{yz}	0,272
ν_{xz}	0,446
G_{xy}	4,20e9 Pa
G_{yz}	4,20e9 Pa
G_{xz}	4,20e9 Pa

Fonte: Cardoso et al. (2014).

Cada perfil foi modelado com condições de contorno da seguinte maneira: em uma das extremidades (em $x = 0$), foram restringidos os deslocamentos em todos os eixos (x , y e z), e na outra extremidade ($x = L$), foram restringidos apenas deslocamentos na direção y e z . Foi aplicada uma força axial compressiva em todos os nós em $x = L$, e então obtidos os resultados da análise não linear de autovalores, utilizando os dois elementos de modelagem.

A Tabela 2 mostra os valores calculados encontrados por Patel et al. (2016) para as dimensões mencionadas acima, onde LB indica flambagem local (*local buckling*) e GB indica flambagem global (*global buckling*):

Tabela 2 - Valores calculados para Viga I 100 x 100 x 6.4mm.

Comprimento (m)	Modos de flambagem	Carga calculada (kN)
0,5	LB	311,08
1	LB	305,10
1,5	GB	202,92
2	GB	126,71
2,5	GB	75,48
3	GB	52,72
3,5	GB	38,86
4	GB	29,82
4,5	GB	23,53
5	GB	19,90

Fonte: Patel et. al (2016)

8.1.1 Verificação do modelo numérico de viga I

As modelagens foram preparadas considerando apenas uma lâmina de material ortotrópico com as propriedades mecânicas indicadas na Tabela 1.

Com ela foi possível calcular o erro de cada modelo, e com isso saber qual se comporta de uma forma mais condizente com a realidade. A Tabela 3 indica os erros entre as modelagens numéricas utilizando o elemento Shell 181 e Solid 46, com a solução analítica apresentada no trabalho de Patel (2016).

Tabela 3 - Erro comparativo de modelagens numéricas.

Comprimento (m)	Solução Shell 181 (kN)	Solução Solid 46 (kN)	Solução Analítica (kN)	% Erro Shell 181	% Erro Solid 46
0,5	303,9974	310,0670	311,0800	2,2767	0,3256
1	297,0348	298,7390	305,1000	2,6434	2,0848
1,5	205,5165	204,6950	202,9200	1,2795	0,8747
2	117,5408	117,7770	126,7100	7,2363	7,0499
2,5	75,8054	76,1770	75,4850	0,4245	0,9167
3	52,8629	53,2070	52,7210	0,2692	0,9218
3,5	38,9365	39,2280	38,8690	0,1735	0,9236
4	29,8601	30,1030	29,8200	0,1347	0,9490
4,5	23,6204	23,8240	23,5300	0,3844	1,2494
5	19,1487	19,3200	19,9000	3,7753	2,9145
Erro Médio				1,8597	1,8210

Fonte: Autoria própria (2019).

Utilizando o desvio padrão como método de cálculo de erro, com um erro de 1,8597% na modelagem com Shell 181 e de 1,8210% na modelagem com Solid 46, concluímos que os modelos de elementos finitos foram preparados com discretizações e condições de contorno apropriados para bem representar o experimento reportado por Cardoso (2014).

8.2 Tubo de Seção Transversal Circular

Considerando o tubo de seção transversal circular, a modelagem via MEF foi validada com uma série de experimentos conduzidos por Fam e Ibrahim (2000). Os modelos avaliados consideraram uma estrutura de 8 lâminas de material ortotrópico, feitos de fibras *E-glass* e resina poliéster.

A **Tabela 4** mostra as propriedades mecânicas de uma lâmina única para ambos os tubos denominados por Fam (2000) de 2A e 25A, onde '1' e '2' denotam direções paralelas e normais às fibras em qualquer lâmina, respectivamente. A **Tabela 5** mostra a sequência de laminação e suas angulações, em ambos os tubos, e a espessura de cada lâmina. Os tubos que utilizam propriedades materiais A25 são essencialmente angulados (por exemplo $\pm 10^\circ$), enquanto que os tubos que utilizam as propriedades materiais 2A, utilizam angulações em cruz, ou *cross-ply* (por exemplo $0^\circ/90^\circ$).

Tabela 4 - Propriedades materiais básicas de uma única lâmina de PRFV.

Propriedades Materiais	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}
2A	38,0	7,8	3,5	0.28
A25	43,3	11,9	4,6	0.24

Fonte: Fam et al. (2010)

A Tabela 5 fornece um sumário dos parâmetros de investigação. Os principais parâmetros serão a estrutura das lâminas, incluindo ambos os laminados arranjados em cruz $[0^\circ/90^\circ]$ (material 2A) e arranjos angulados $[\pm\theta]$ (material A25), razão diâmetro/espessura (D/t), e razão comprimento/diâmetro (L/D) do tubo. Três laminados em cruz foram considerados, com sequência de laminação de (3:1), (1:1), e (1:3) nas direções $[0^\circ/90^\circ]$. O laminado (3:1) indica que 75% das fibras são orientadas na direção longitudinal e 25% na direção circunferencial. Três laminados angulados também foram considerados, nomeadamente $[\pm 10^\circ]$, $[\pm 45^\circ]$, e $[\pm 75^\circ]$, onde o ângulo é medido em relação ao eixo longitudinal do tubo. O diâmetro do tubo foi mantido constante a 300 mm. Duas espessuras de paredes foram consideradas, nomeadamente 2,4 mm e 7,5 mm, fornecendo razões (D/t) de 125 e 40, respectivamente. Três diferentes comprimentos de 1, 6, e 12 m são utilizados, fornecendo uma razão (L/D) de 3, 20 e 40, respectivamente.

As propriedades materiais nos modelos estudados aqui foram assumidas similares para aqueles das amostras 2A, e são exibidas na Tabela 4.

Tabela 5 - Resumo dos parâmetros numéricos dos estudos de caso de Fam.

Amostra	Sequência de empilhamento e angulações	Parâmetros Geométricos				
		D (mm)	t (mm)	L (m)	D/t	L/D
A31	(3:1) $[90/0/0/0/0/0/90]$	300	2,4	6	125	20
A11	(1:1) $[90/0/90/0/0/90/0/90]$	300	2,4	6	125	20
A13	(1:3) $[90/90/90/0/0/90/90/90]$	300	2,4	6	125	20
B31	(3:1) $[90/0/0/0/0/0/90]$	300	7,5	6	40	20
B11	(1:1) $[90/0/90/0/0/90/0/90]$	300	7,5	6	40	20
B13	(1:3) $[90/90/90/0/0/90/90/90]$	300	7,5	6	40	20

Continua

Amostra	Sequência de empilhamento e angulações	Parâmetros Geométricos				
		D (mm)	t (mm)	L (m)	D (mm)	L/D
D10	($\pm 10^\circ$) [10/-10/10/-10/- 10/10/-10/10]	300	2,4	6	125	20
D45	($\pm 45^\circ$) [45/-45/45/-45/- 45/45/-45/45]	300	2,4	6	125	20
D75	($\pm 75^\circ$) [75/-75/75/-75/- 75/75/-75/75]	300	2,4	6	125	20
E10	($\pm 10^\circ$) [10/-10/10/-10/- 10/10/-10/10]	300	7,5	6	40	20
E45	($\pm 45^\circ$) [45/-45/45/-45/- 45/45/-45/45]	300	7,5	6	40	20
E75	($\pm 75^\circ$) [75/-75/75/-75/- 75/75/-75/75]	300	7,5	6	40	20
I11	(1:1) [90/0/90/0/0/90/0/90]	300	2,4	12	125	40
J11	(1:1) [90/0/90/0/0/90/0/90]	300	7,5	12	40	40

Fonte: Fam et al. (2010)

8.2.1 Validação dos modelos numéricos para tubo de seção circular

Comparando as amostras da Tabela 5 e os resultados experimentais foram retirados do artigo de Fam et. al. (2010) e comparados com os elementos Shell 181 conforme Tabela 6.

Tabela 6 - Carga crítica de flambagem de tubo de seção circular comparando valores experimentais com elemento tipo Shell 181.

Amostra	Análise Experimental (kN)	Shell 181 (kN)	% Erro Shell 181
A31	52,2000	52,4380	0,4559
A11	39,3000	39,6040	0,7735
A13	26,4000	26,6030	0,7689
B31	162,8000	163,9380	0,6990
B11	123,0000	123,820	0,6666
B13	82,8000	83,1620	0,4371
D10	60,6000	61,2380	1,0528
D45	19,0000	19,0780	0,4105
D75	13,4000	13,4540	0,4029
E10	190,0000	191,4950	0,7868
E45	59,5000	59,6930	0,3243

Continua

Amostra	Análise Experimental (kN)	Shell 181 (kN)	% Erro Shell 181
E75	42,0000	42,0710	0,1690
I11	9,8000	9,9730	1,7653
J11	31,0000	31,1800	0,5806
Erro Médio			0,6638

Fonte: Autoria própria (2019).

Com um erro médio de 0,6638% para elemento tipo Shell 181, concluímos que o modelo preparado conduz à estimativas bem próximas da realidade observável e, sendo assim, podemos utilizá-los para análises futuras de flambagem. A modelagem para o elemento Solid46 para tubo de seção circular não foi realizada, devido a uma dificuldade para definição das coordenadas locais para as lâminas.

9 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com as estratégias de modelagem numérica validadas, pode-se então analisar as diversas cargas críticas de flambagem variando-se o índice de esbeltez, espessura, sequência de laminação e orientação das lâminas. Os elementos estruturais (perfil “I” e tubo de seção circular) serão tratados de maneira separada, devido às suas diversas diferenças, principalmente as geométricas.

9.1 Definição das propriedades mecânicas utilizadas

Como exemplo, os valores de propriedades mecânicas dos constituintes do material composto foram obtidos no sítio da *Creative Pultrusions*, através da bibliografia *The Pultex® Pultrusion Design Manual* (2018), e são mostrados na Tabela 7.

Tabela 7 - Propriedades mecânicas de fibras e resinas.

Fibras						
Tipo	Módulo de Elasticidade (GPa)	Módulo de Cisalhamento (GPa)	Tensão de Ruptura (GPa)	Elongação na ruptura (%)	Massa específica (kg/m ³)	
Vidro-E	72,4	30	3,4	4,8	2,60	
Vidro S	86,9	-	4,6	5,4	2,49	
Carbono	227,6 a 379,3	-	1,9 a 3,1	0,6 a 1,2	1,77	
Aramida (Kevlar®)	62,1	1,6	2,8	2,3	1,47	
Resinas						
Tipo	Módulo de Elasticidade na flexão (GPa)	Módulo de Cisalhamento (GPa)	Coefficiente de Poisson	Tensão de Ruptura (MPa)	Tensão de Ruptura na flexão (MPa)	Elongação na ruptura (%)
Polyéster	3,0	1,07	0,4	77,2	122,8	4,5
Epoxy	3,2	1,4	-	75,9	115,2	6,3
Vinylester	3,7	1,32	0,4	81,4	137,9	5,0

Fonte: Adaptado de Creative Pultrusions (2018).

Então admitiu-se para as fibras de vidro e a resina polyester, para todas as simulações, as seguintes propriedades mecânicas:

$$E_f = 72,4 \text{ GPa}$$

$$E_m = 3,5 \text{ GPa}$$

$$\nu_f = 0,25$$

$$\nu_m = 0,40$$

$$G_f = 30,0 \text{ GPa}$$

$$G_m = 1,40 \text{ GPa}$$

Com estes dados, e utilizando as equações (4.9) a (4.12), as propriedades mecânicas para uma camada de PRFV com reforço longitudinal, considerando $V_f = 39\%$, são:

$$E_1 = 30,37 \text{ GPa}$$

$$E_2 = 5,566 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0,3425$$

$$G_{12} = 2,229 \text{ GPa}$$

As propriedades mecânicas das lâminas de *SF* terão as mesmas propriedades mecânicas das lâminas de *roving*, com a diferença de que o *SF* pode ser angulado, conforme já citado anteriormente.

Por outro lado, para uma camada de CSM, considerando $V_f = 23,6\%$, obtém-se:

$$E_{CSM} = 10,231 \text{ GPa}$$

$$G_{CSM} = 3,598 \text{ GPa}$$

$$\nu_{CSM} = 0,422$$

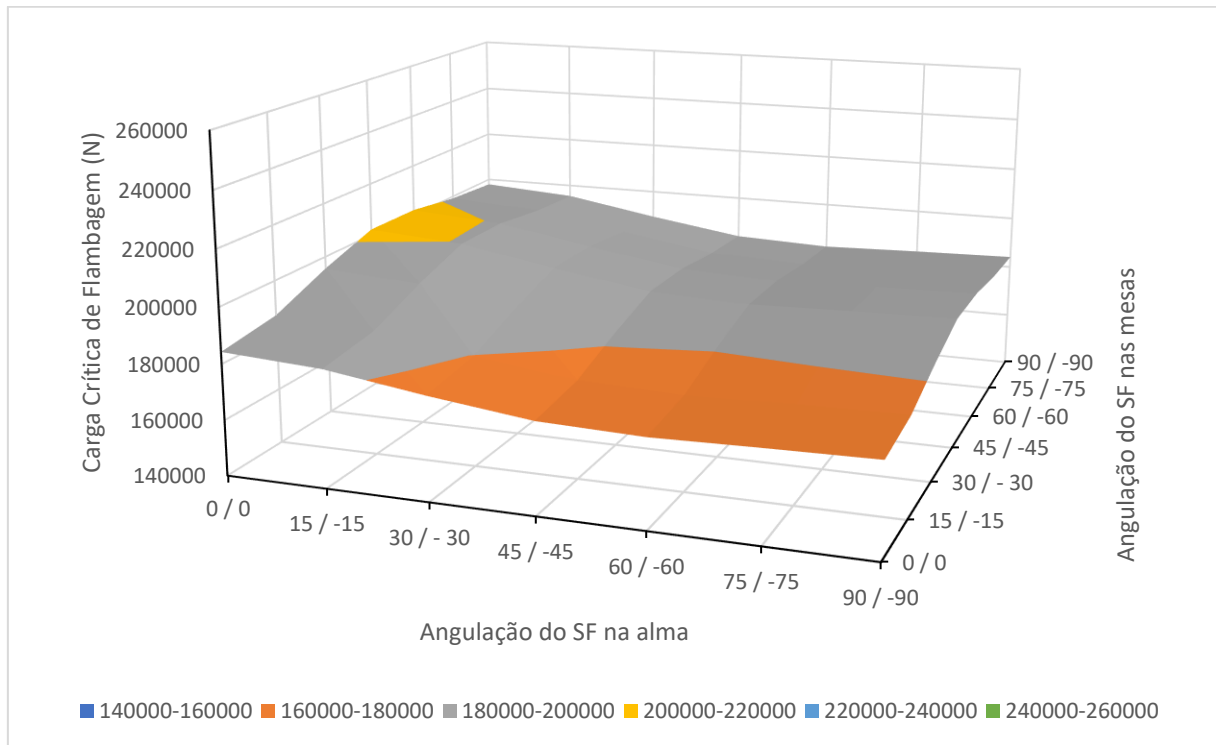
Estes valores de propriedades mecânicas serão utilizados para todos os cálculos a seguir, tanto de previsões analíticas quanto para as modelagens por elementos finitos.

9.2 Resultados para viga I

Para viga I, as primeiras análises foram feitas utilizando geometrias com seções transversais iguais às relatadas anteriormente, ou seja, o perfil (100x100x6,4), cuja razão de $b_f/b_w = 1,0$, e 100 cm de comprimento. Com 6 lâminas de reforço, sendo 2 lâminas de *roving*, 2 lâminas de CSM, e 2 lâminas de SF. Foram utilizadas todas as

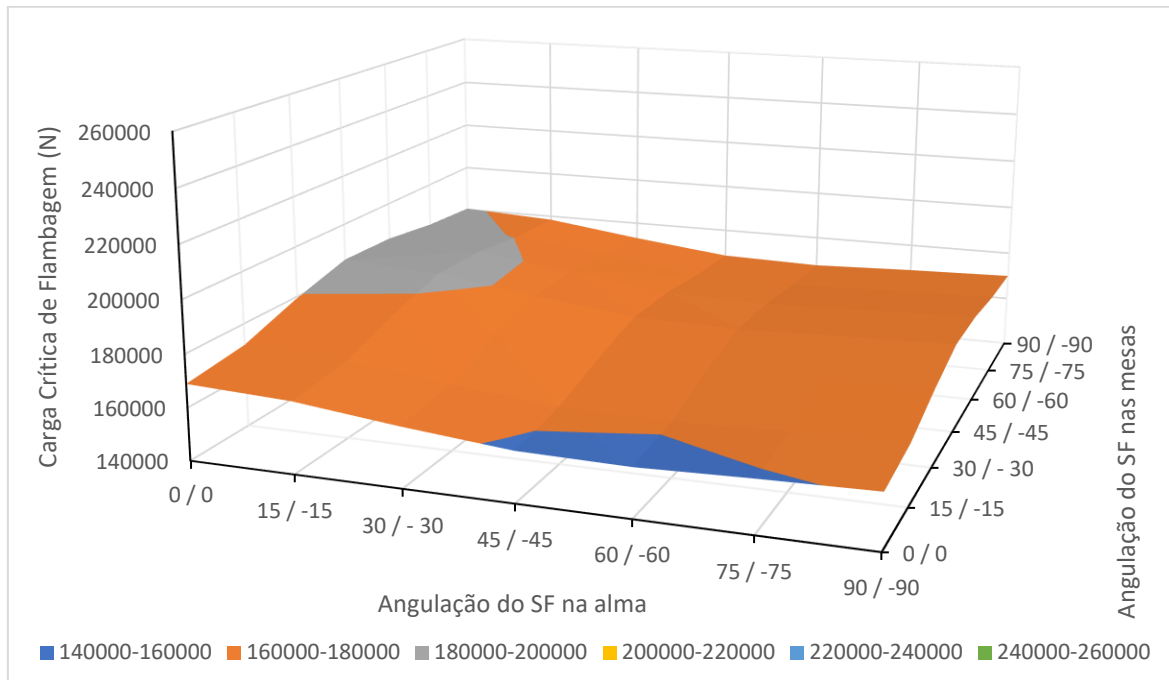
combinações possíveis de sequência de laminação, dentre as sequências de laminação simétricas. Os reforços de SF foram definidos de 0 a 90°, variando de 15° em 15°, e com valores positivos e negativos, para zerar os coeficientes da matriz B_{ij} , pois esta é uma matriz de comportamento de membrana acoplado com flexão. Em outras palavras, um esforço trativo poderia provocar mudança de curvatura. Sendo assim, não é interessante fabricar um perfil com uma sequência de laminação tal que uma simples variação de temperatura possa provocar curvatura. Posto isto, serão utilizados reforços de SF seguindo a ordem de [0° / 0°], [15° / -15°], [30° / -30°], e assim sucessivamente até chegar a 90 graus. Além disso, as sequências de empilhamento podem ser diferentes nas mesas e nas almas, sendo que as lâminas podem ter angulações diferentes nos dois setores do perfil.

Sendo assim, para cada sequência de laminação, foram feitas 49 simulações, para atender a todas as angulações de mesa e alma, e um total de 6 sequências de laminações, que são: [CSM ROV SF SF ROV CSM], [CSM SF ROV ROV SF CSM], [ROV CSM SF SF CSM ROV], [ROV SF CSM CSM SF ROV], [SF CSM ROV ROV CSM SF], e [SF ROV CSM CSM ROV SF]. A seguir os gráficos dos resultados de carga crítica para viga I estão mostrados, dispostos em três eixos, onde um eixo representa a angulação do SF nas mesas, um eixo perpendicular à esse representa a angulação do SF na alma, e um eixo perpendicular aos outros dois representando a carga crítica de flambagem para cada sequência, e seus valores são definidos na legenda.



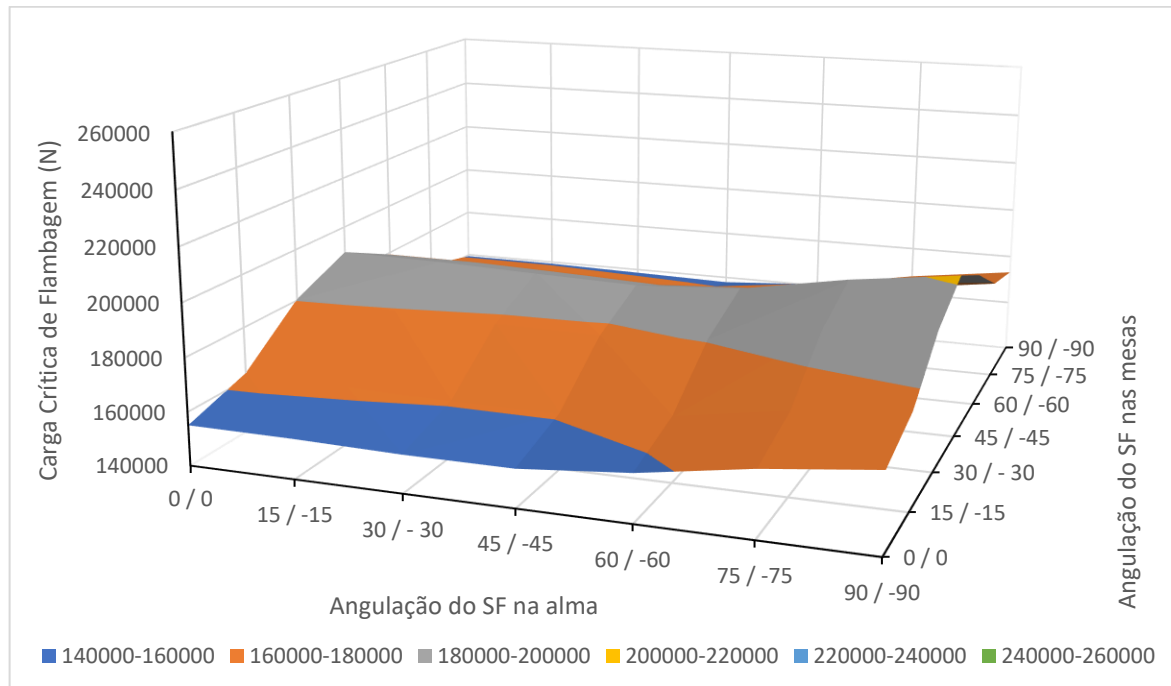
**Figura 33 - Carga Crítica de Flambagem local de mesa e alma para sequência [CSM ROV SF SF ROV CSM] (100x100x6,4) comprimento = 100 cm.
Fonte: Autoria Própria (2019).**

A Figura 33 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem local de mesa e alma utilizando reforços de *SF* com angulação de $[45^\circ / -45^\circ]$ nas mesas e $[0^\circ / 0^\circ]$ na alma, com um valor de carga crítica de 202176,4N, e menor valor utilizando reforços de $[60^\circ / -60^\circ]$ nas mesas e $[0^\circ / 0^\circ]$ na alma, com um valor de carga crítica de 171577,4N. Com o reforço *SF* próximo ao plano médio das “placas”, a contribuição na carga crítica de flambagem não é tão significativa, sendo que o valor máximo se deu com a angulação de *SF* a $[0^\circ / 0^\circ]$ na alma, podendo ser substituído por um *roving*. De qualquer modo, para a flambagem local de mesa, o melhor reforço foi de $[45^\circ / -45^\circ]$, pois a “placa” mesa engastada em um bordo e livre nos outros três, pode flambar em relação aos dois eixos de seu plano, e o único reforço que pode realizar a tarefa de aumentar a rigidez nestas duas direções é o *SF* a $[45^\circ / -45^\circ]$. Isto será mais visível nos próximos gráficos, e será este resultado da angulação para as mesas que se repetirá para todas as arquiteturas.



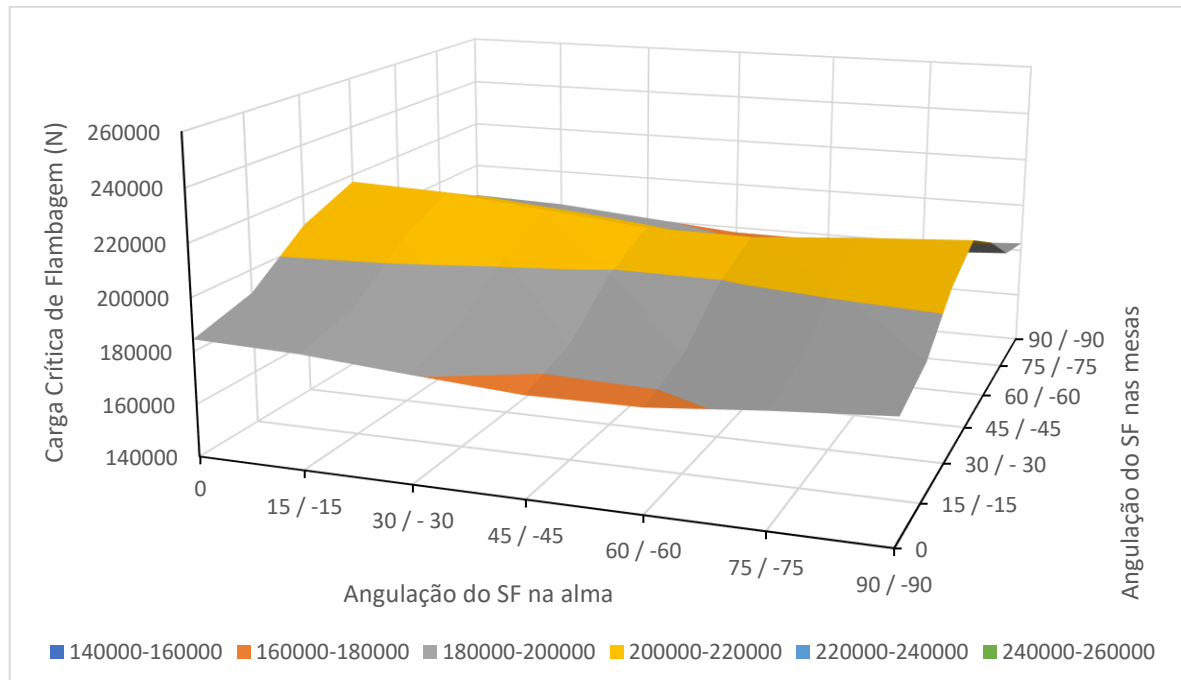
**Figura 34 - Carga Crítica de Flambagem local de mesa e alma para sequência [ROV CSM SF SF CSM ROV] (100x100x6,4) comprimento = 100 cm.
Fonte: Autoria Própria (2019).**

A Figura 34 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem local de mesa e alma utilizando reforços de *SF* com angulação de [45° / -45°] nas mesas e [0° / 0°] na alma, com um valor de carga crítica de 185203,5N, e menor valor utilizando reforços de [60° / -60°] nas mesas e [0° / 0°] na alma, com um valor de carga crítica de 158918,6N. Novamente, como comentado na Figura 33, a variação da angulação do reforço *SF* na alma não é tão significativa para os resultados.



**Figura 35 - Carga Crítica de Flambagem local de mesa e alma para sequência [ROV SF CSM CSM SF ROV] (100x100x6,4) comprimento = 100 cm.
Fonte: Autoria Própria (2019)**

A Figura 35 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem local de mesa e alma utilizando reforços de *SF* com angulação de $[45^\circ / -45^\circ]$ nas mesas e $[90^\circ / -90^\circ]$ na alma, com um valor de carga crítica de 201633,9N, e menor valor utilizando reforços de $[0^\circ / 0^\circ]$ nas mesas e $[30^\circ / -30^\circ]$ na alma, com um valor de carga crítica de 154126,4N. Quando o *SF* se encontra pouco mais afastado do plano médio da “placa” mesa, os valores começam a apresentar um “pico” para angulações de $[45^\circ / -45^\circ]$, e assim sendo, um valor máximo de carga crítica de flambagem para esta angulação. Também começa a haver uma tendência maior do aumento da carga crítica em relação a alteração da angulação do reforço *SF* na alma, ficando evidente o aumento da carga conforme a angulação do *SF* aumenta. Isto tem relação também ao *SF* se encontrar mais afastado do centro de gravidade da “placa” alma, e se tratando a alma como uma placa engastada em dois bordos, e sujeita a uma compressão nestes bordos, ela tende a flambar em relação ao eixo de menor inércia desta placa, e o reforço que aumenta a rigidez desta flambagem seria o *SF* a $[90^\circ / -90^\circ]$



**Figura 36 - Carga Crítica de Flambagem local de mesa e alma para sequência [CSM SF ROV ROV SF CSM] (100x100x6,4) comprimento = 100 cm.
Fonte: Autoria Própria (2019).**

A Figura 36 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem local de mesa e alma utilizando reforços de *SF* com angulação de $[45^\circ / -45^\circ]$ nas mesas e $[0^\circ / 0^\circ]$ na alma, com um valor de carga crítica de 217234,1N, e menor valor utilizando reforços de $[90^\circ / -90^\circ]$ nas mesas e $[60^\circ / -60^\circ]$ na alma, com um valor de carga crítica de 177524,6N. Do mesmo modo da Figura 35, se fixarmos uma angulação do reforço *SF* na alma, variando as angulações de *SF* na mesa, seria possível visualizar um “pico” de carga crítica de flambagem em $[45^\circ / -45^\circ]$ para todas as angulações de reforços na alma. Ocorreu de não haver um valor máximo na alma para $[90^\circ / -90^\circ]$, porém estes valores foram bem próximos, mas evidencia que ainda a flambagem local não está tão dependente das angulações de reforço *SF* na alma.

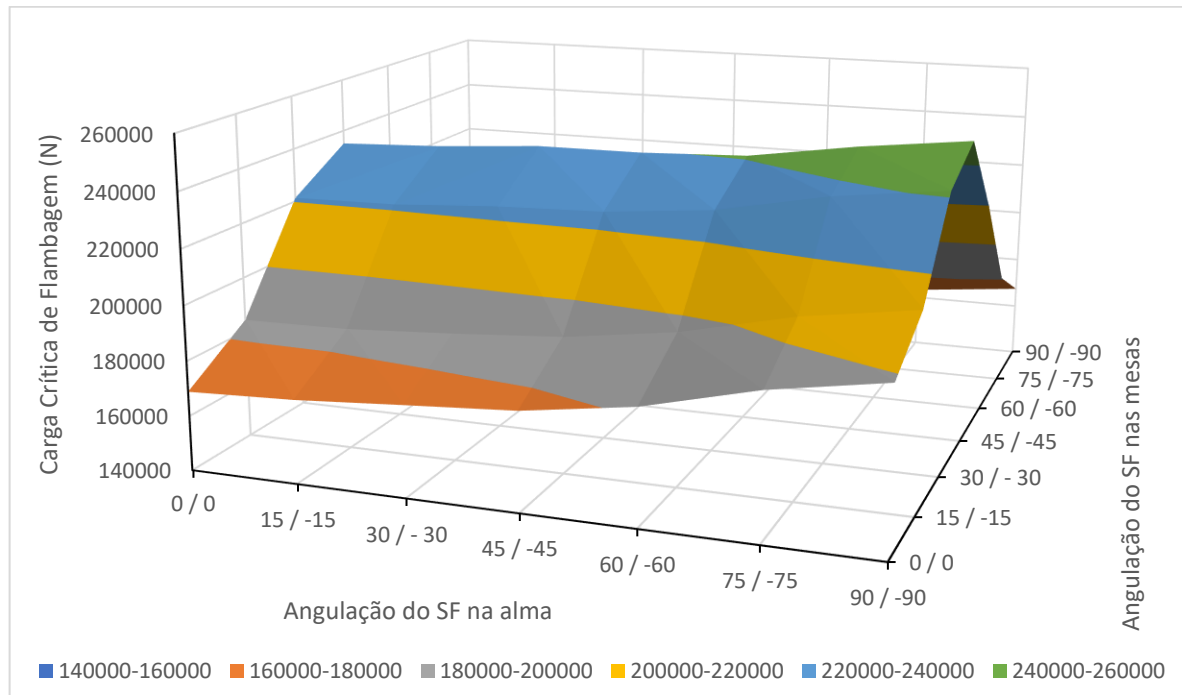
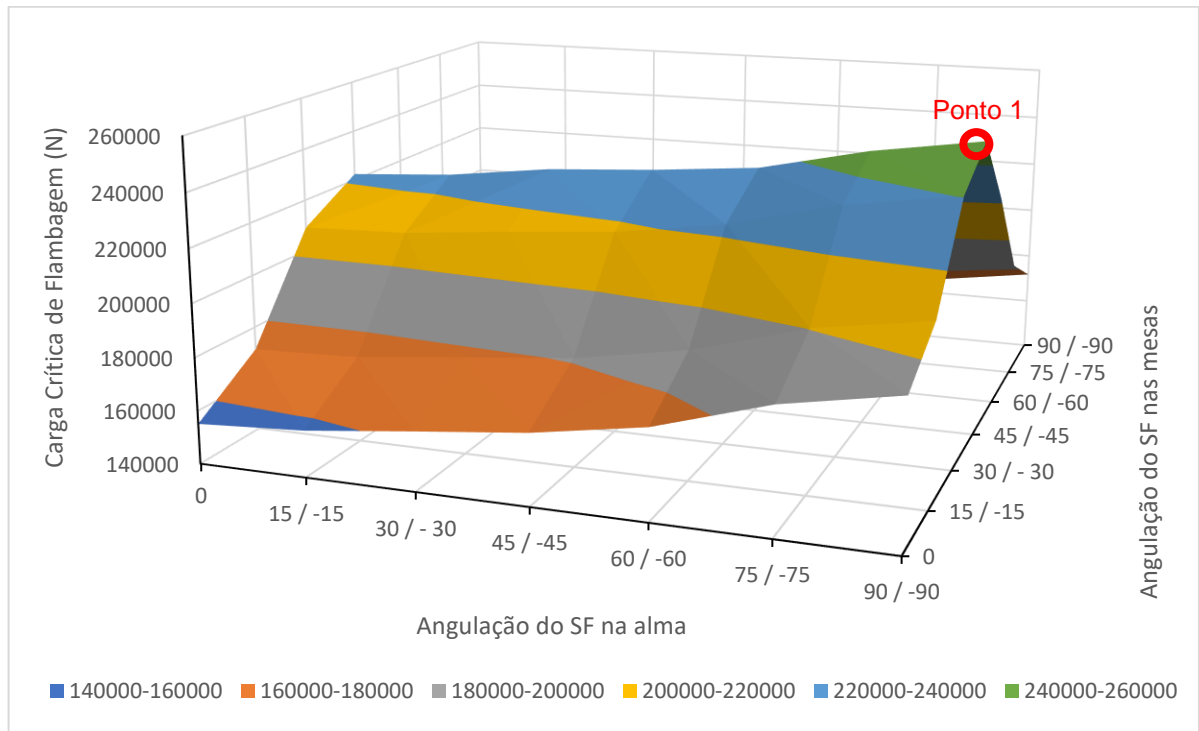


Figura 37 - Carga Crítica de Flambagem local de mesa e alma para sequência [SF CSM ROV ROV CSM SF] (100x100x6,4) comprimento = 100 cm.
Fonte: Aatoria Própria (2019).

A Figura 37 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem local de mesa e alma utilizando reforços de *SF* com angulação de $[45^\circ / -45^\circ]$ nas mesas e $[90^\circ / -90^\circ]$ na alma, com um valor de carga crítica de 251563,5N, e menor valor utilizando reforços de $[0^\circ / 0^\circ]$ nas mesas e $[90^\circ / -90^\circ]$ na alma, com um valor de carga crítica de 151345,3N. Neste gráfico observa-se uma grande diferença de carga crítica de flambagem para variações de angulação do reforço *SF* na “placa” mesa, sendo o reforço que mais contribui com o aumento da carga. Como a flambagem local de mesa pode ocorrer em duas direções da “placa”, o único reforço capaz de aumentar a rigidez nestas duas direções seria o *SF* a $[45^\circ / -45^\circ]$, e além disso, como nesta arquitetura do estratificado o reforço *SF* se encontra mais próximo da extremidade do plano médio da mesa, ele vai influenciar mais no resultado pelo fato de ser o reforço mais afastado do centro de gravidade da “placa”, tendo seu momento de inércia maior em relação à outras arquiteturas. Também é possível ver uma tendência ao aumento da carga crítica de flambagem local conforme a angulação do reforço *SF* na alma aumenta. Pelos mesmos motivos explicados na Figura 35, tendo maior influência neste caso pois o reforço *SF* está mais afastado do plano médio da “placa” alma. A razão entre a carga máxima e mínima desta arquitetura de estratificado para a faixa de valores onde o reforço de *SF* na alma é $[90^\circ / -90^\circ]$ foi de 1,5025 vezes.



**Figura 38 - Carga Crítica de Flambagem local de mesa e alma para sequência [SF ROV CSM CSM ROV SF] (100x100x6,4) comprimento = 100 cm.
Fonte: Autoria Própria (2019).**

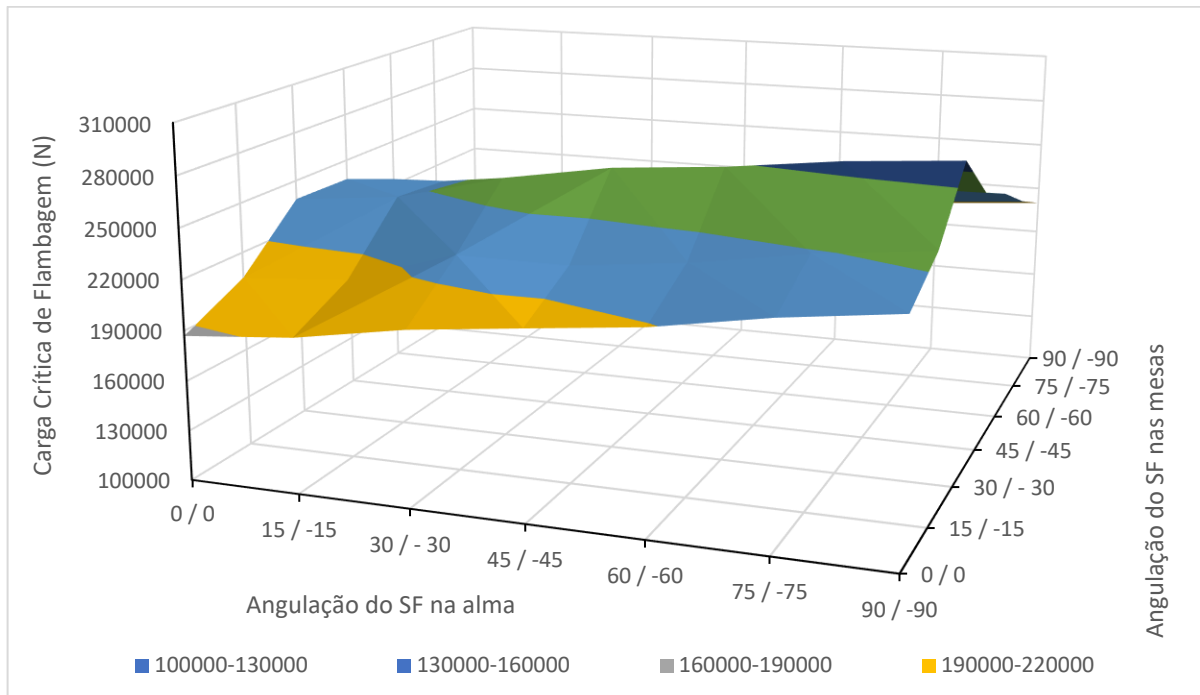
A Figura 38 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem local de mesa e alma utilizando reforços de *SF* com angulação de $[45^\circ / -45^\circ]$ nas mesas e $[90^\circ / -90^\circ]$ na alma, com um valor de carga crítica de 252119,73N, e menor valor utilizando reforços de $[90^\circ / -90^\circ]$ nas mesas e $[0^\circ / 0^\circ]$ na alma, com um valor de carga crítica de 142491N. Os mesmos comentários em relação à Figura 37 são válidos para este caso, porém houve um aumento da carga crítica de flambagem para esta arquitetura de estratificado, devido ao fato do *roving* estar mais afastado do plano médio das “placas”, sendo que este tipo de reforço possui o módulo de elasticidade maior que o reforço *CSM*, e então a rigidez à flambagem neste caso também aumentará.

A sequência de laminação que apresentou um melhor desempenho em relação à flambagem local de mesa e alma, foi a sequência [SF ROV CSM CSM ROV SF], com angulação de $[45^\circ / -45^\circ]$ na mesa, e de $[90^\circ / -90^\circ]$ na alma, com uma carga crítica de flambagem de 252119,7 N (ponto 1 da Figura 38). Isto é esperado, pelo fato de que as mesas e almas sendo tratadas como placas separadas (Figura 22), as mesas são engastadas em uma borda e livre em outra, fazendo com que a aplicação da força cause ondulações nas duas direções do plano em que elas se encontram, tendo que se reforçar a estrutura nas duas direções. O reforço que consegue realizar

esta tarefa é o reforço à 45°. Já para a alma, como ela se comporta como uma placa engastada em dois bordos opostos, e estando sujeita a uma rotação prescrita em um destes bordos, por exemplo, sofrendo compressão axial nos bordos engastados, ocorre flexão da placa em relação ao eixo de menor inércia, fazendo com que o reforço que possa aumentar a resistência desta flambagem seja o reforço de 90°. E também, como o reforço que melhora esta condição é o SF, ele estando mais afastado da espessura da “placa alma”, aumenta sua contribuição na rigidez do setor como um todo, como mostrado na matriz de rigidez a flexão D_{ij} .

Foi definido na programação a extração dos primeiros quatro autovalores, sendo que para esta geometria do elemento estrutural I, todos os auto-modos para todas as angulações de lâmina com reforço SF forneceram o mesmo modo de flambagem, a flambagem local de mesa e alma. Em nenhuma das simulações houve a ocorrência de flambagem local apenas na mesa ou apenas na alma.

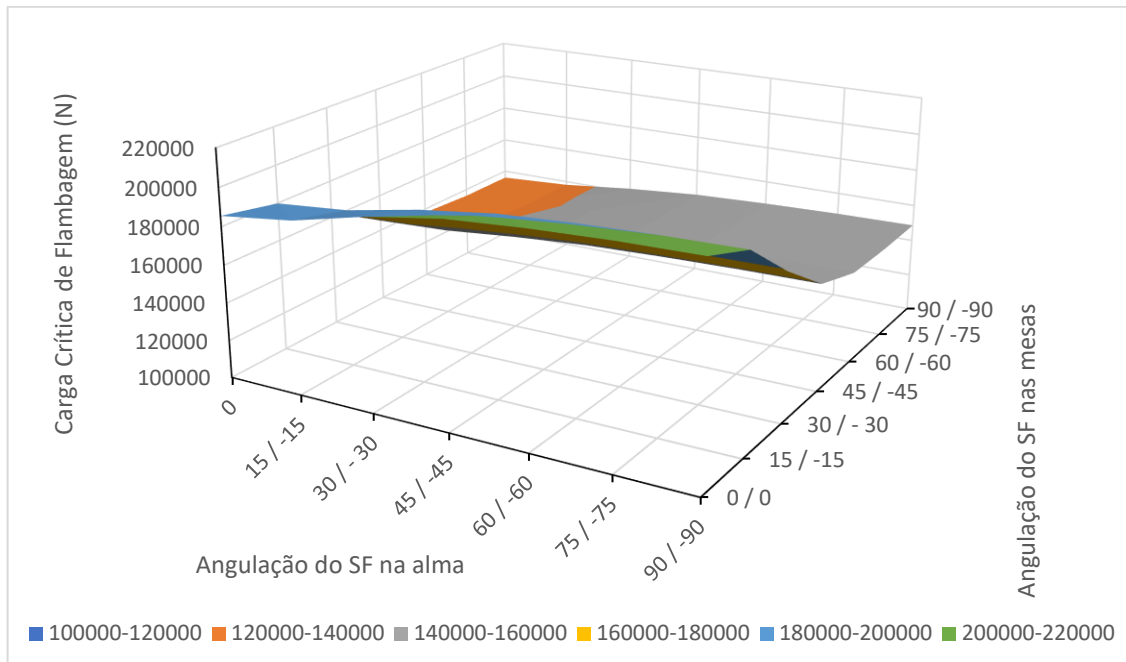
Para a ocorrência de outros modos de flambagem, para fins de comparação com os métodos analíticos de cálculo de carga crítica, foram definidas diferentes geometrias. Nas simulações anteriores, a razão da largura de mesa e largura de alma (b_f/b_w) era de 1, e na tentativa de desacoplar as flambagens locais de mesa e alma, foram utilizadas geometrias em que a razão b_f/b_w foi de 0,75 e 0,5. Como anteriormente o melhor desempenho se deu com a sequência [SF ROV CSM CSM ROV SF], as análises a seguir foram feitas com esta arquitetura. A seguir são mostradas, da Figura 39 até a Figura 42, os resultados das simulações da viga I com $b_f/b_w = 0,5$ e $b_f/b_w = 0,75$, e a leitura dos gráficos se dá da mesma maneira que os gráficos anteriores.



**Figura 39 - Carga crítica de flambagem local de mesa e alma para sequência [SF ROV CSM CSM ROV SF] (100x75x6,4) comprimento = 100 cm.
Fonte: Aatoria Própria (2019).**

A Figura 39 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem local de mesa e alma para a razão de $b_f/b_w = 0,75$ utilizando reforços de SF com angulação de $[30^\circ / -30^\circ]$ nas mesas e $[90^\circ / -90^\circ]$ na alma, com um valor de carga crítica de 290994,9N, e menor valor utilizando reforços de $[90^\circ / -90^\circ]$ nas mesas e $[0^\circ / 0^\circ]$ na alma, com um valor de carga crítica de 170596,5N.

A diferença relativa entre os valores máximos e mínimos de carga crítica de flambagem local de mesa e alma para a faixa de valores onde a angulação do reforço SF na alma é de $[90^\circ / -90^\circ]$ foi de 1,3862 vezes.



**Figura 40 - Carga crítica de flambagem local de mesa e alma para sequência [SF ROV CSM CSM ROV SF] (100x50x6,4) comprimento = 100 cm.
Fonte: Autoria Própria (2019).**

A Figura 40 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem local de mesa e alma para a razão de $b_f/b_w = 0,5$ utilizando reforços de *SF* com angulação de $[0^\circ / 0^\circ]$ nas mesas e $[90^\circ / -90^\circ]$ na alma, com um valor de carga crítica de 211130,7N, e menor valor utilizando reforços de $[90^\circ / -90^\circ]$ nas mesas e $[0^\circ / 0^\circ]$ na alma, com um valor de carga crítica de 135883N.

A diferença dos valores máximos e mínimos de carga crítica de flambagem local de mesa e alma para a faixa onde o reforço *SF* é $[90^\circ / -90^\circ]$ na alma foi de 1,4257 vezes.

Com a diminuição na largura das mesas, aumenta-se a dificuldade em se curvar a placa em torno do eixo longitudinal, predominando a flexão em torno do eixo transversal. Para se evitar este tipo de flexão, o reforço que aumenta a rigidez em relação ao eixo transversal, é o reforço *SF* a $[0^\circ / 0^\circ]$, ou seja, ele poderia ser substituído por um reforço do tipo *roving*.

Há uma maior dependência da rigidez ao giro na conexão entre mesa e alma quando $b_f/b_w = 0,50$. Se o *SF* está em $[90^\circ / -90^\circ]$ na alma, maior a referida rigidez, pois maior será a rigidez à flexão da “placa alma” em torno de um eixo axial (Figura 22).

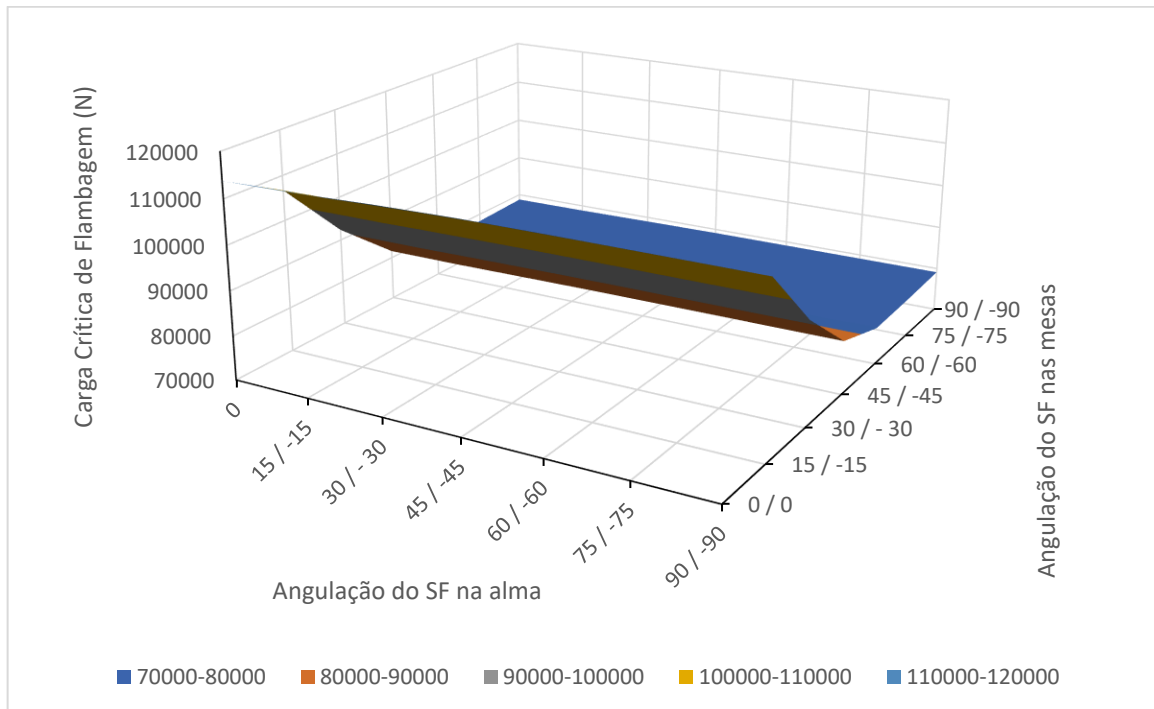
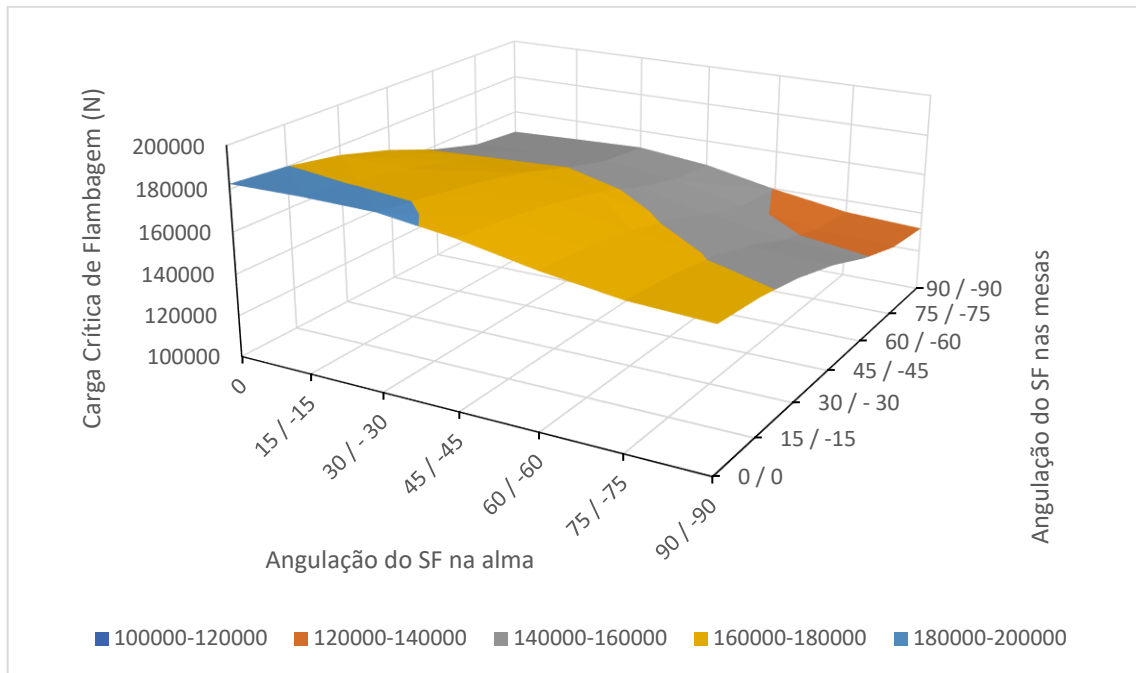


Figura 41 - Carga crítica de flambagem global com flexão em torno do eixo de menor inércia para sequência [SF ROV CSM CSM ROV SF] (100x50x6,4) comprimento = 100 cm. Fonte: Autoria Própria (2019).

A Figura 41 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem global com flexão em torno do eixo de menor inércia para a razão de $b_f/b_w = 0,5$ utilizando reforços de SF com angulação de $[0^\circ / 0^\circ]$ nas mesas e $[90^\circ / -90^\circ]$ na alma, com um valor de carga crítica de 115431N, e menor valor utilizando reforços de $[60^\circ / -60^\circ]$ nas mesas e $[0^\circ / 0^\circ]$ na alma, com um valor de carga crítica de 78006,43N.

A Figura 41 indica que é somente a rigidez longitudinal das mesas que governa o resultado, pois na alma o reforço de SF está muito próximo do eixo em torno do qual ocorre a flexão, fazendo com que o resultado seja governado somente pelos reforços nas mesas.



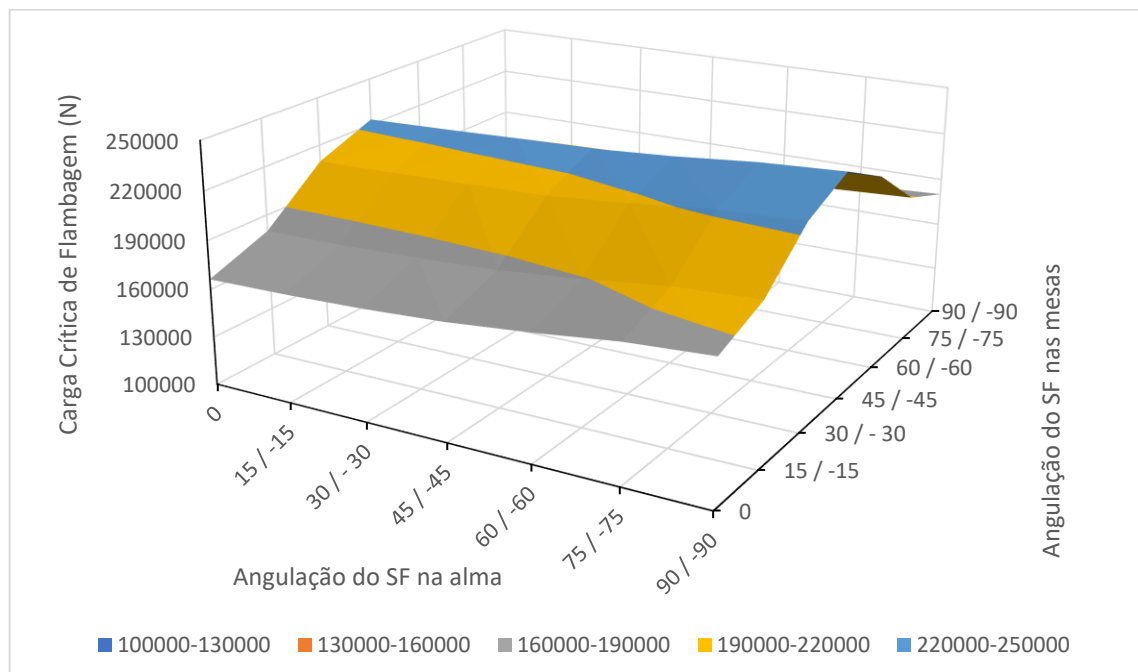
**Figura 42 - Carga crítica de flambagem global com flexo-torção para sequência [SF ROV CSM CSM ROV SF] (100x50x6,4) comprimento = 100 cm.
Fonte: Autoria Própria (2019).**

A Figura 42 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem global com flexão-torção para a razão de $b_f/b_w = 0,5$ utilizando reforços de SF com angulação de $[0^\circ / 0^\circ]$ nas mesas e $[15^\circ / -15^\circ]$ na alma, com um valor de carga crítica de 182960,8N, e menor valor utilizando reforços de $[90^\circ / -90^\circ]$ nas mesas e $[90^\circ / -90^\circ]$ na alma, com um valor de carga crítica de 131918,1N.

Para uma razão de $b_f/b_w = 0,5$, foi possível observar diferentes modos de flambagem, como flambagem global em torno do eixo de menor inércia, e flambagem global com flexo-torção, além da flambagem local de mesa e alma já mencionada anteriormente. A relação b_f/b_w que apresentou maior valor de carga crítica de flambagem local de mesa e alma foi a relação de 0,75, tendo uma carga superior tanto da razão $b_f/b_w = 0,5$ quanto da razão $b_f/b_w = 1,0$, pois se manifestou em um autovalor maior aos da razão 0,5 e 1,0. Não ocorreram modos de flambagem global com flexão em torno do eixo de menor inércia e flambagem global com flexo-torção para a razão de 0,75.

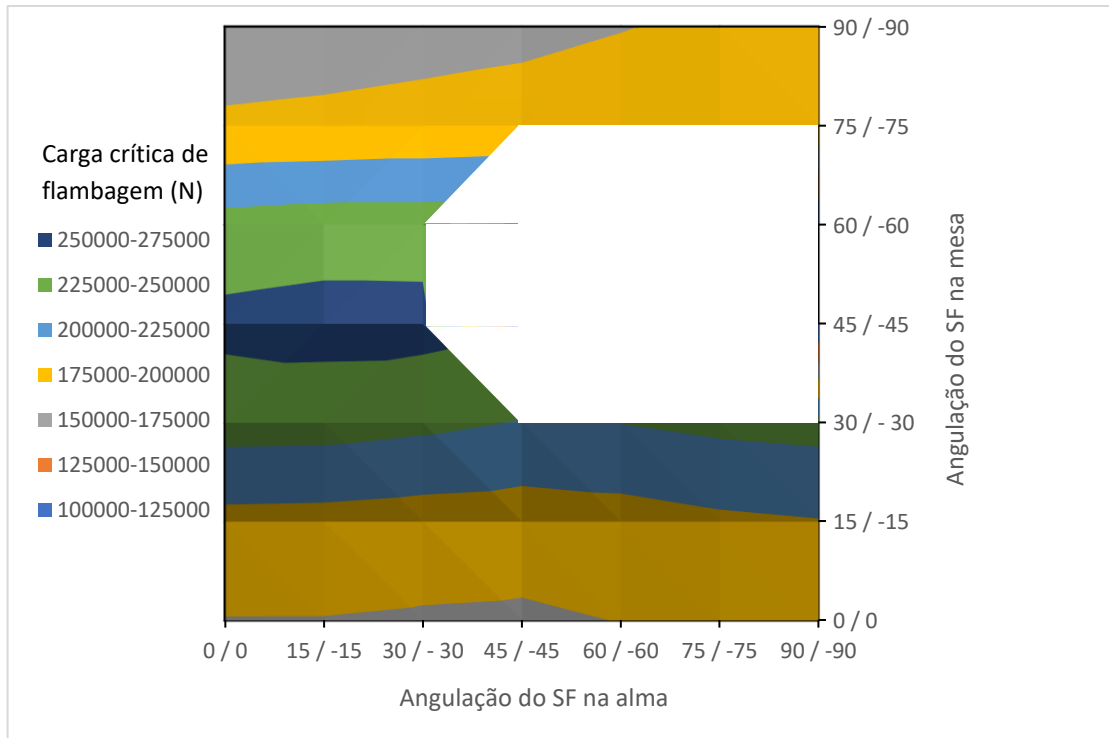
Também foram feitas simulações com comprimentos diferentes, aumentando em 50 cm em cada análise, utilizando comprimentos de 150 cm e 200 cm para a mesma geometria de seção transversal do início das análises (100x100x6,4) e com a mesma sequência de laminação que apresentou o melhor desempenho nas cargas

críticas de flambagens locais, [SF ROV CSM CSM ROV SF], para se observar a dependência da variação dos modos de flambagem em relação à variação do comprimento da peça. Diferentemente dos elementos com menor comprimento, agora a tendência é de ocorrer modos globais de flambagem. Como em alguns casos em que o modo relatado na figura não ocorre dentre os 4 primeiros autovalores, não há dados disponíveis para ser mostrado no gráfico, então os gráficos foram apresentados com uma vista superior, onde as partes em branco dizem respeito à angulações de SF para as quais não se dispõe de dados. As figuras Figura 43 e Figura 44 indicam cargas críticas de flambagem local de mesa e alma para comprimento de 150 e 200 cm respectivamente, a Figura 45 indica flambagem global por flexão em torno do eixo de menor inércia para comprimento de 200 cm, e a Figura 46 indica flambagem global por flexo-torção para comprimento de 200 cm.



**Figura 43 - Carga crítica de flambagem local de mesa e alma para sequência [SF ROV CSM CSM ROV SF] (100x100x6,4) comprimento = 150 cm.
Fonte: Autoria Própria (2019).**

A Figura 43 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem local de mesa e alma para um comprimento de 150 cm utilizando reforços de SF com angulação de $[45^\circ / -45^\circ]$ nas mesas e $[90^\circ / -90^\circ]$ na alma, com um valor de carga crítica de 238273,1N, e menor valor utilizando reforços de $[90^\circ / -90^\circ]$ nas mesas e $[0^\circ / 0^\circ]$ na alma, com um valor de carga crítica de 163838,3 N. Os mesmos comentários da Figura 38 para flambagem local de mesa e alma são válidos neste caso.



**Figura 44: Carga crítica de flambagem local de mesa e alma para sequência [SF ROV CSM CSM ROV SF] (100x100x6,4) comprimento = 200 cm.
Fonte: Autoria Própria (2019).**

A Figura 44 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem local de mesa e alma para um comprimento de 200 cm utilizando reforços de SF com angulação de [45° / -45°] nas mesas e [15° / -15°] na alma, com um valor de carga crítica de 259472,5 N, e menor valor utilizando reforços de [90° / -90°] nas mesas e [0° / 0°] na alma, com um valor de carga crítica de 164342,5 N. Não foram obtidos valores para carga crítica de flambagem local de mesa e alma neste caso para reforço SF de [90° / -90°], não sendo possível comparar com os resultados obtidos para comprimento de 200 cm.

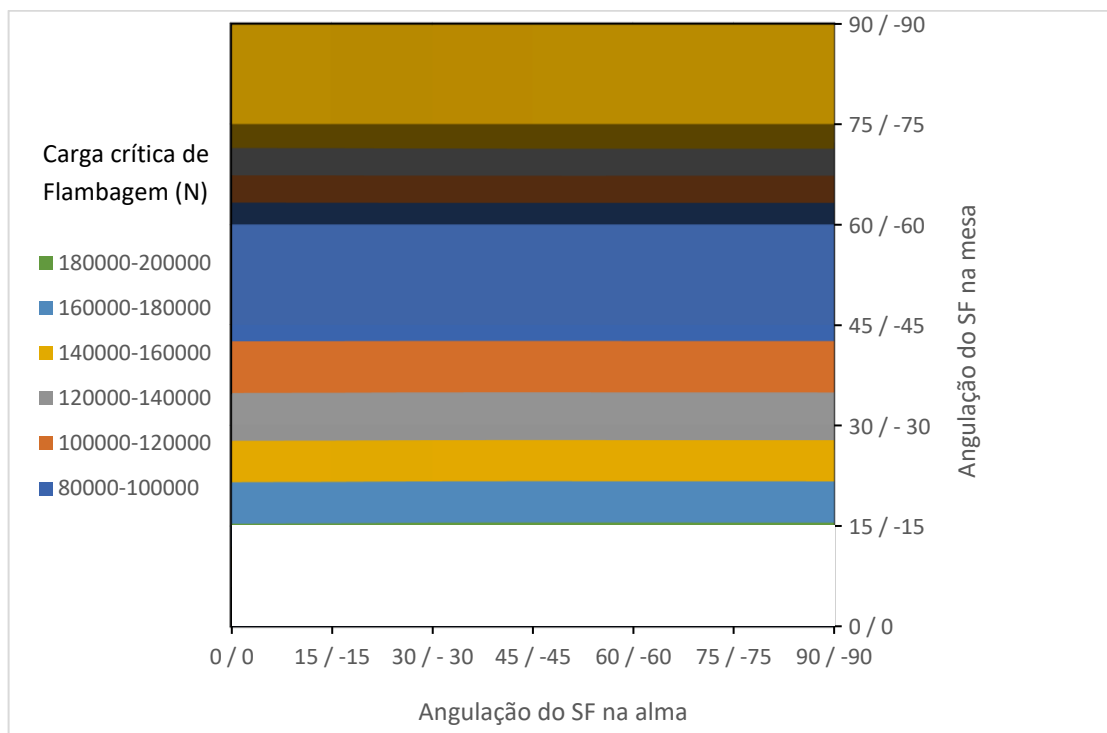
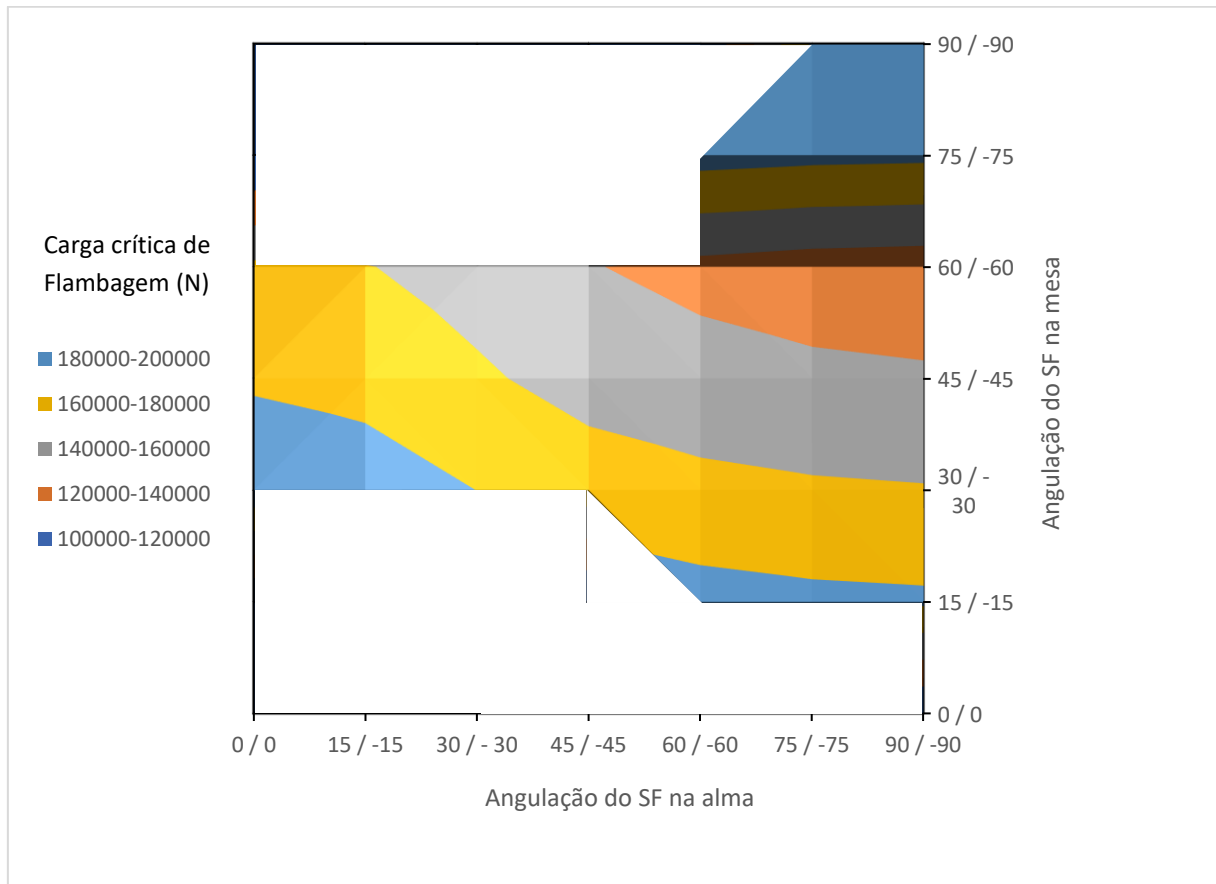


Figura 45: Carga crítica de flambagem global com flexão em torno do eixo de menor inércia para sequência [SF ROV CSM CSM ROV SF] (100x100x6,4) comprimento = 200 cm. Fonte: Autoria Própria (2019).

A Figura 45 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem global com flexão em torno do eixo de menor inércia para um comprimento de 200 cm utilizando reforços de SF com angulação de [15° / -15°] nas mesas e [45° / -45°] na alma, com um valor de carga crítica de 181722,3 N, e menor valor utilizando reforços de [60° / -60°] nas mesas e [90° / -90°] na alma, com um valor de carga crítica de 83498,53 N.

Novamente, o gráfico mostra que apenas a angulação dos reforços nas mesas que governam o resultado, não tendo nenhuma dependência das angulações de reforços na alma. Isto porque para flambagem global em torno do eixo de menor inércia, os reforços na alma estão muito próximos do eixo, não influenciando no resultado. Já para as mesas, elas estão bem mais afastadas do eixo de menor inércia, governando os valores de cargas críticas.



**Figura 46 - Carga crítica de flambagem global com flexo-torção para sequência [SF ROV CSM CSM ROV SF] (100x100x6,4) comprimento = 200 cm.
Fonte: Autoria Própria (2019).**

A Figura 46 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem global com flexo-torção para um comprimento de 200 cm utilizando reforços de SF com angulação de [30° / -30°] nas mesas e [0° / 0°] na alma, com um valor de carga crítica de 194577 N, e menor valor utilizando reforços de [60° / -60°] nas mesas e [90° / -90°] na alma, com um valor de carga crítica de 129859,3 N.

Para o comprimento de 150 cm, não houve a ocorrência de modos de flambagens diferentes de flambagem local de mesa e alma, ou seja, as flambagens globais não ocorreram dentre os 4 modos extraídos. Já para o comprimento de 200 cm, se manifestaram os outros 2 modos de flambagem (flambagem global com flexão em torno do eixo de menor inércia e flambagem global com flexo-torção). De modo a comparar os resultados anteriores, foram utilizadas as equações analíticas (6.4) e (6.7) para cálculo de carga crítica de flambagem local, (6.8) para carga crítica de flambagem global com flexão em torno do eixo de menor inércia, e (6.9) para cálculo da carga crítica de flambagem por flexo-torção, para se comparar os erros percentuais relativos entre o método analítico e o MEF (método dos elementos finitos).

Para a utilização das equações analíticas, é necessário definir as propriedades mecânicas homogeneizadas do laminado. Para isto, foi utilizado a Teoria Clássica dos Laminados, utilizando as propriedades mecânicas de fibra e matriz relatadas na seção 9.1. Estes cálculos podem ser realizados manualmente, porém como são muitos resultados a se comparar, foi necessário o uso de um *software* que pudesse calcular estas propriedades rapidamente, de modo a facilitar os cálculos. O *software* escolhido foi o Autodesk Heliu Composite[®], pois há uma versão disponível para estudantes gratuitamente. O *software* fornece todas as propriedades necessárias, como o E_L , E_T , ν_{LT} , ν_{TL} , G_{LT} , e então foi aplicado os valores obtidos nas equações, juntamente com as propriedades geométricas da peça. Em equações em que as propriedades mecânicas das mesas diferem das propriedades mecânicas da alma, como é o caso da equação (6.7), é necessário obter as propriedades separadamente, e então aplicar na equação.

Primeiramente, foi utilizada a peça com melhor desempenho para o comprimento de 100 cm e geometria de (100x100x6,4), ou seja, com a sequência de laminação [SF ROV CSM CSM ROV SF], para comparar o erro entre as equações (6.4) e (6.7), e os resultados numéricos, e estão mostradas em uma superfície de erro, nas figuras Figura 47 e Figura 48, que corresponde ao erro para cada simulação numérica realizada, totalizando 49 valores para cada gráfico, conforme descrito anteriormente.

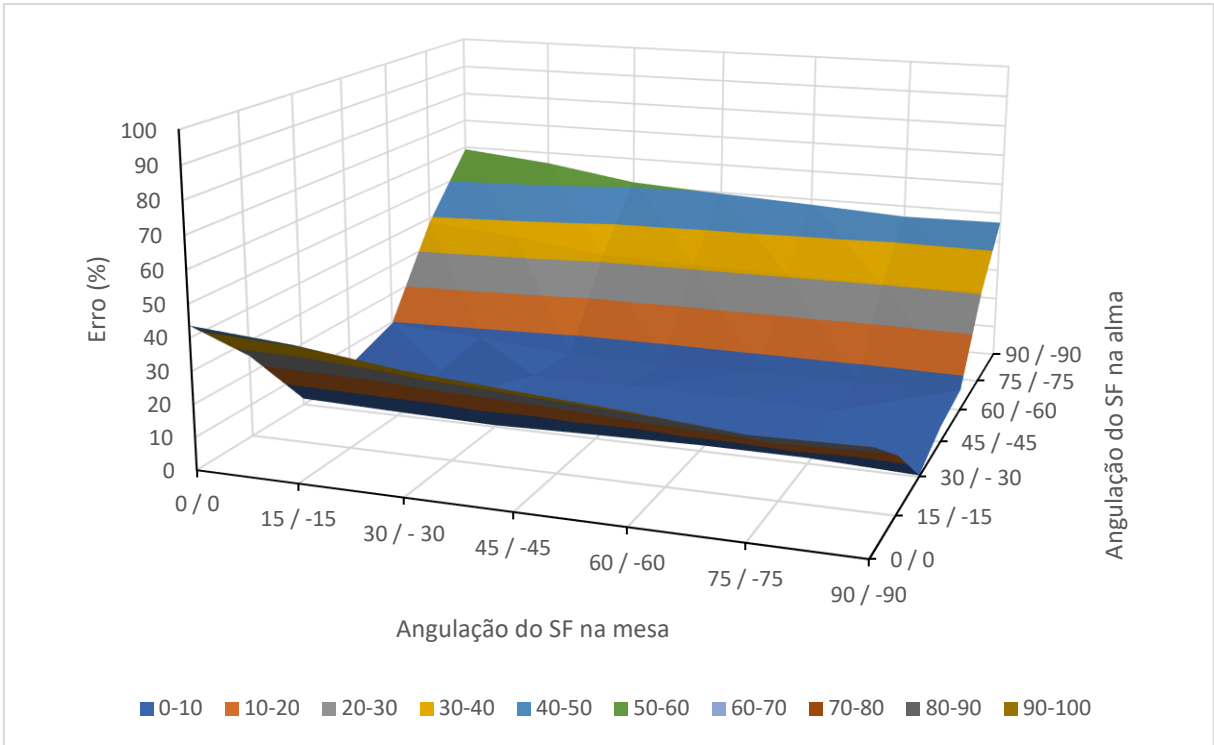


Figura 47 - Erro relativo de carga crítica de flambagem local de mesa e alma, utilizando a equação (6.7) para viga I com reforço [SF ROV CSM CSM ROV SF] e geometria (100x100x6,4) comprimento = 100 cm. Fonte: Autoria Própria (2019).

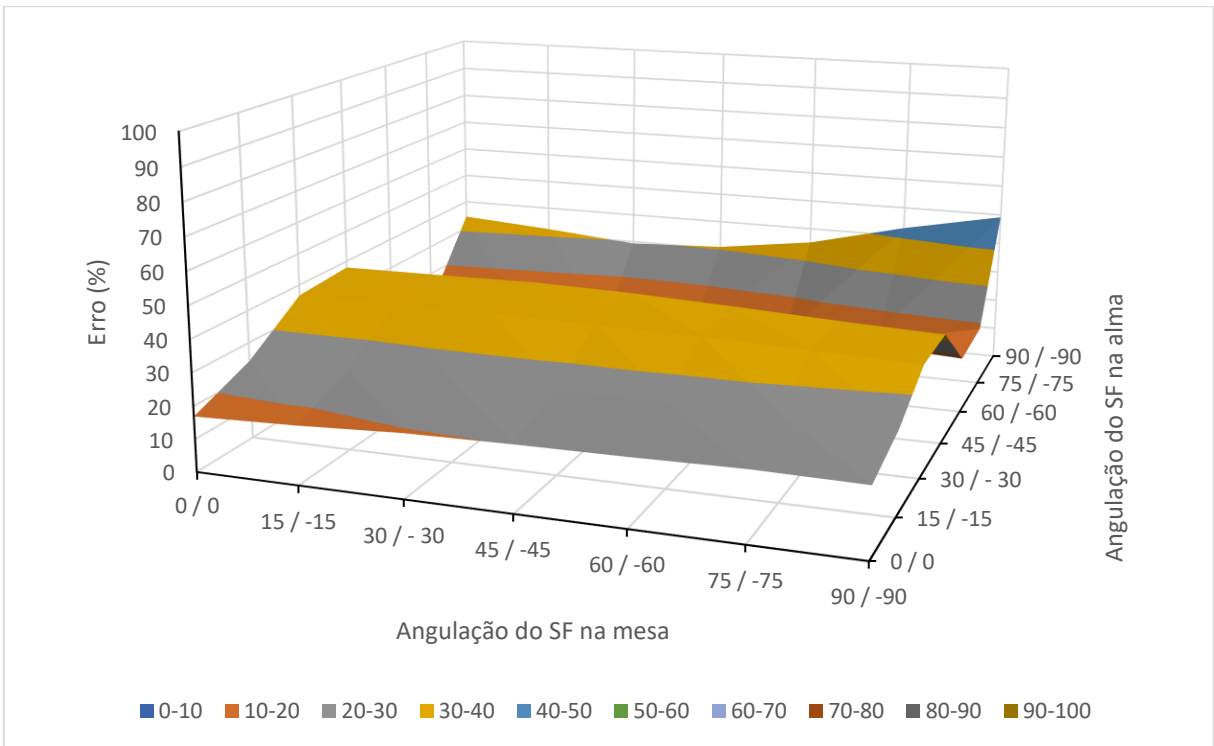
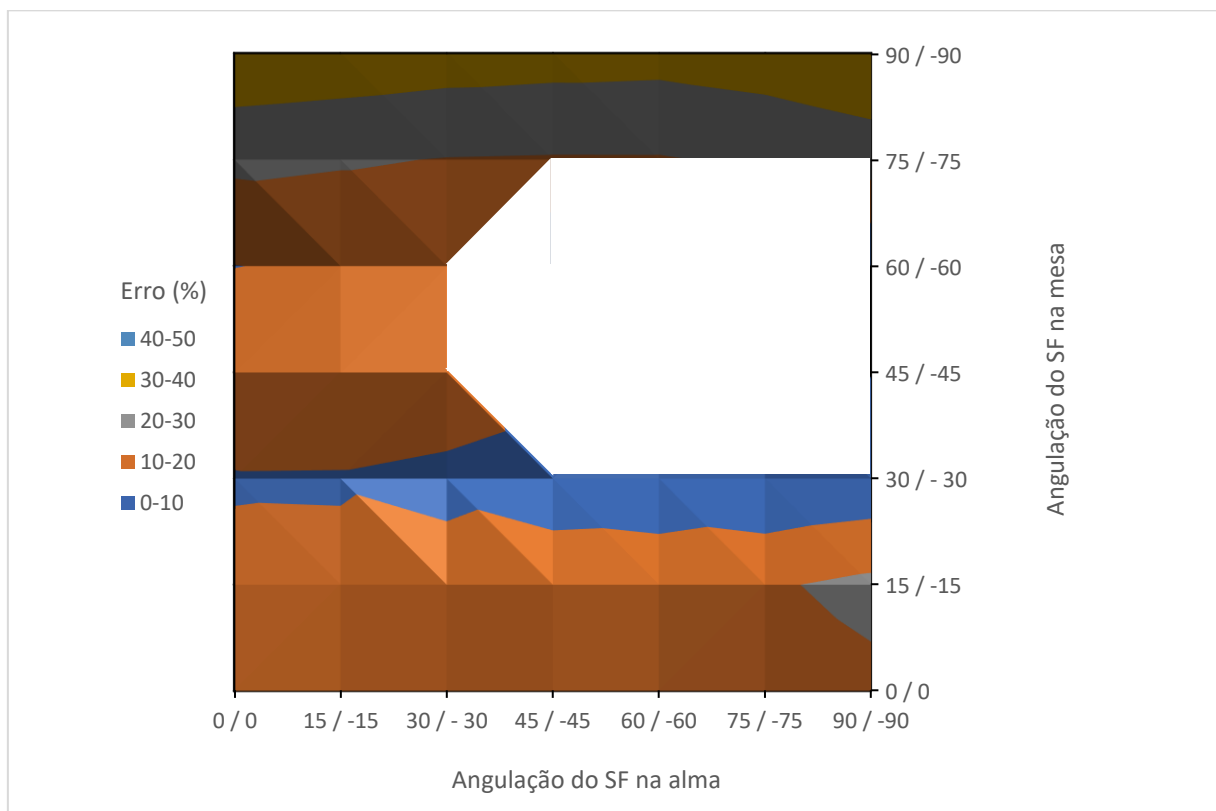


Figura 48 - Erro relativo de carga crítica de flambagem local de mesa e alma, utilizando a equação (6.4) para viga I com reforço [SF ROV CSM CSM ROV SF] e geometria (100x100x6,4) comprimento = 100 cm. Fonte: Autoria Própria (2019).

Para a análise da carga crítica de flambagem local de alma e mesa, as equações (6.4) e (6.7) tiveram uma correlação com os resultados numéricos satisfatória, sendo que para a equação (6.4) houve um erro relativo médio de 21,9092% e desvio padrão de erro de 17,5197 %, e para a equação (6.7) houve um erro médio de 26,6545%, com um desvio padrão de erro de 9,9820 %, fazendo com que a equação proposta por Cardoso (2014) tenha uma melhor correlação com os resultados numéricos do que a equação disponibilizada pelo *The Pultex® Pultrusion Design Manual*, para a geometria (100x100x6,4) 100 cm.

A seguir, nas figuras 49 e 50 serão mostrados os erros para carga crítica de flambagem local de mesa e alma para a mesma geometria de seção transversal e mesmo reforço, com comprimento de 200 cm.



**Figura 49: Erro relativo de carga crítica de flambagem local de mesa e alma, utilizando a equação (6.7) para viga I com reforço [SF ROV CSM CSM ROV SF] e geometria (100x100x6,4) comprimento = 200 cm.
Fonte: Autoria Própria (2019).**

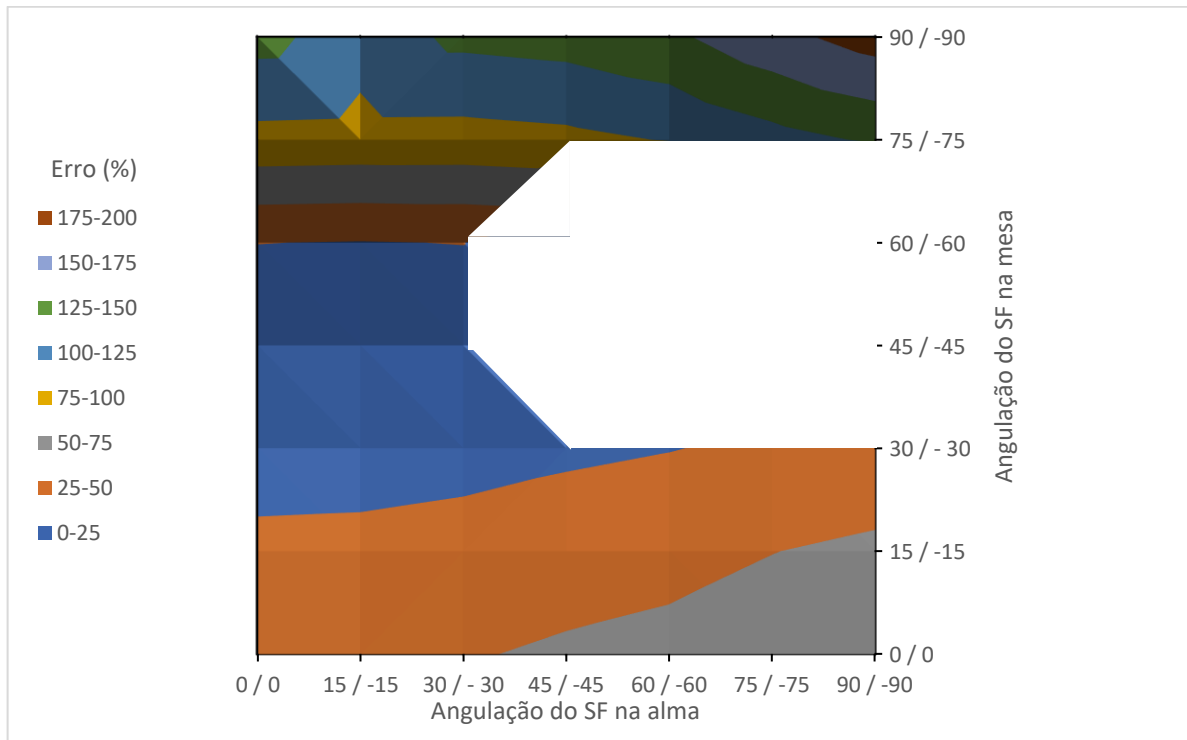


Figura 50: Erro relativo de carga crítica de flambagem local de mesa e alma, utilizando a equação (6.4) para viga I com reforço [SF ROV CSM CSM ROV SF] e geometria (100x100x6,4) 200cm.

Fonte: Autoria Própria (2019).

Para a equação (6.7), o desvio padrão do erro foi de 9,9482%, havendo uma boa correlação com os resultados numéricos, com um desvio padrão até menor que na viga de 100 cm de comprimento. Já a equação (6.4) apresentou um erro muito alto, com um desvio padrão do erro de 47,8163%. Isto pode ser explicado pelo fato de no trabalho de Cardoso (2013), em que ele fornece esta equação, os valores variam para uma razão de L/b_w entre 0,5 e 2,5 aproximadamente, como mostra a Figura 51.

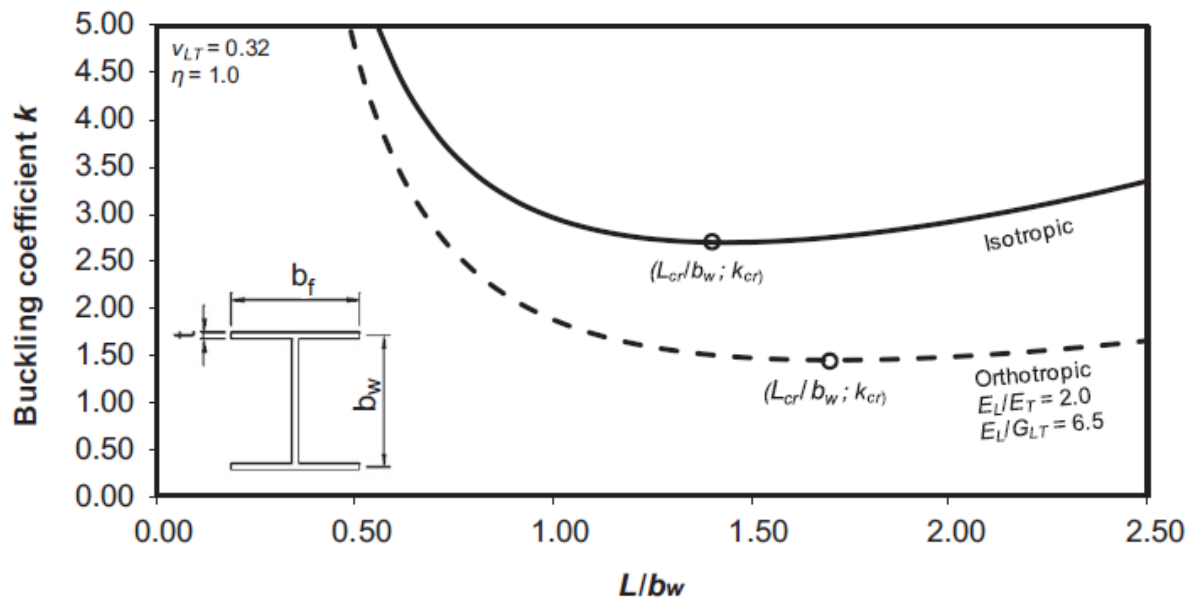
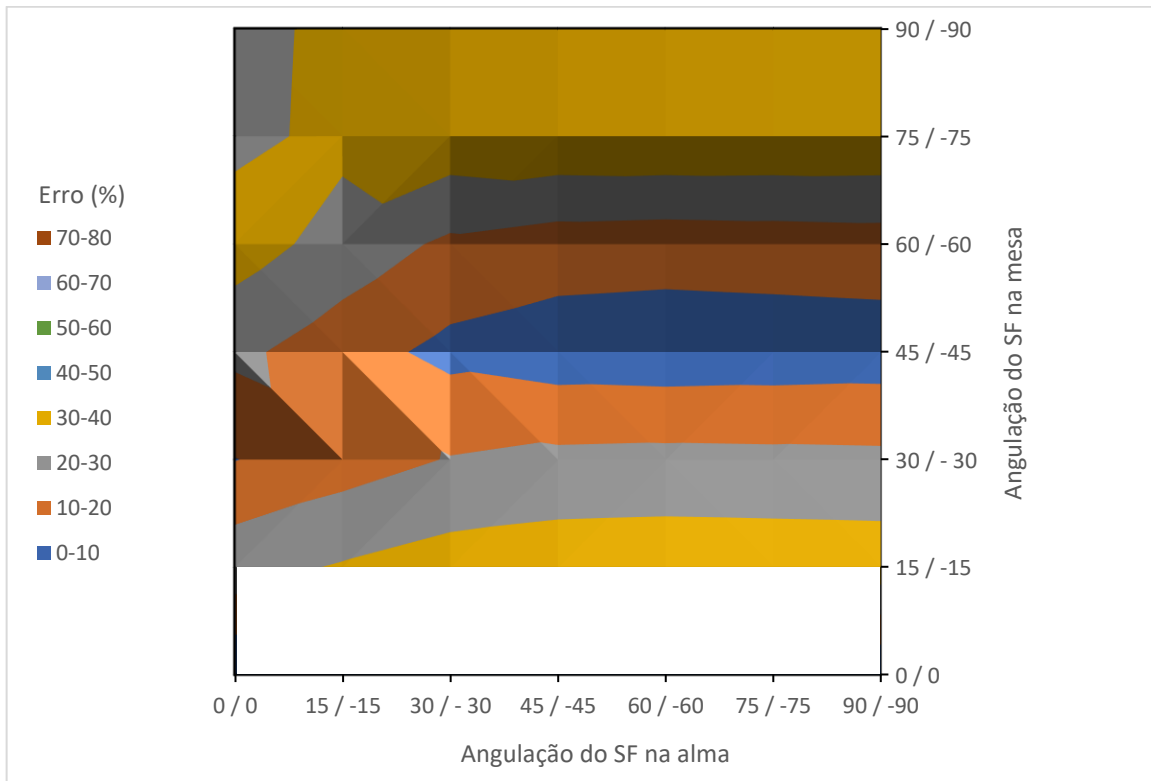


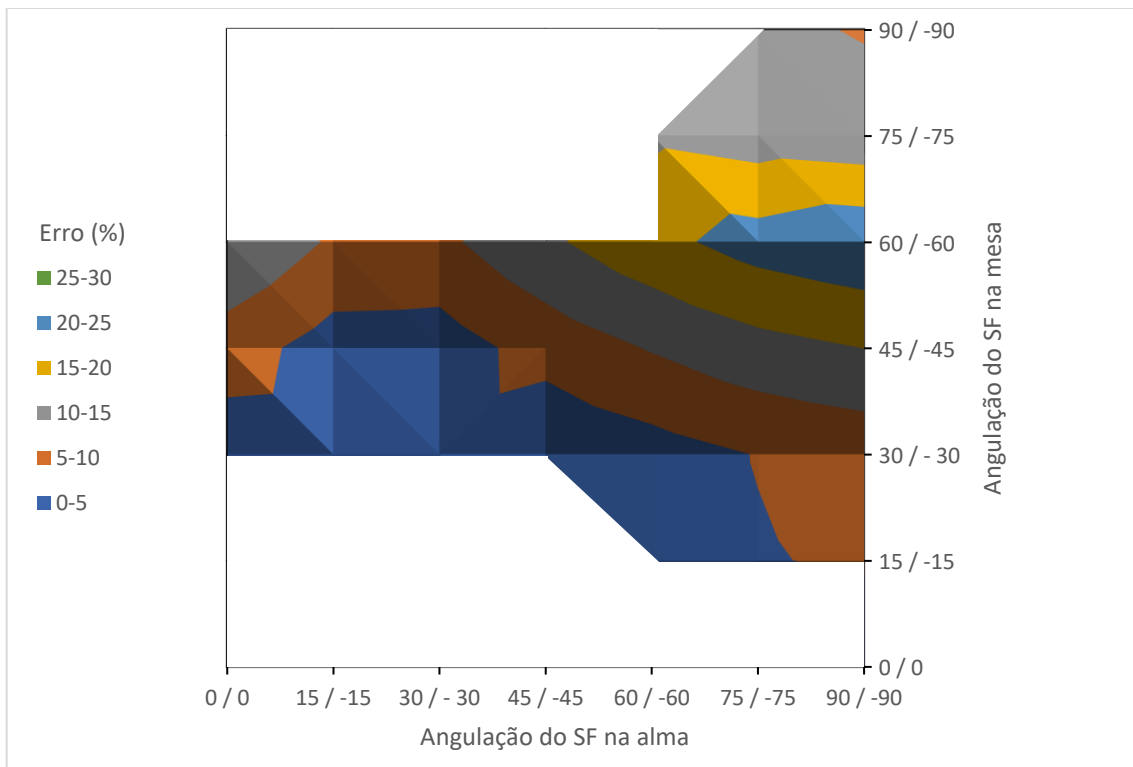
Figura 51 - Coeficiente de flambagem k , vs L/b_w , para seções I
Fonte: Cardoso (2014).

Neste caso em estudo, a razão L/b_w para viga de 100 cm foi de 10, e para viga de 200 cm, 20. Ou seja, está em uma área onde não foi testada esta equação analítica, e não seria confiável utilizá-la para grandes comprimentos. Neste caso, a equação disponibilizada por Cardoso (2014) não tem uma boa correlação.

A fim de avaliar os erros relativos entre os métodos analíticos e o MEF para valores de carga crítica de flambagem global, tanto de flexão em torno do eixo de menor inércia, quanto para flexo-torção, foram utilizadas as equações (6.8) e (6.9), respectivamente, e estão descritas nas figuras 52 e 53.



**Figura 52 - Erro relativo de carga crítica de flambagem global com flexão em torno do eixo de menor inércia, para viga I com reforço [SF ROV CSM CSM ROV SF] e geometria (100x100x6,4) comprimento = 200 cm.
Fonte: Autoria Própria (2019).**



**Figura 53 - Erro relativo de carga crítica de flambagem global com flexo-torção, para viga I com reforço [SF ROV CSM CSM ROV SF] e geometria (100x100x6,4) comprimento = 200cm.
Fonte: Autoria Própria (2019).**

Para a análise de carga crítica de flambagem global com flexão em torno do eixo de menor inércia, a equação descrita por Euler (equação (6.8)) apresenta uma boa correlação, apresentando um erro médio relativo de 25,5172%, com um desvio padrão do erro de 11,4141%. Os valores que estão com erro de 0%, que seriam no reforço de $0^\circ / 0^\circ$ na mesa, são valores onde não se manifestou a flambagem global dentre os autovalores extraídos, portanto não foram comparados.

Para a análise da carga crítica de flambagem global por flexo-torção, a equação (6.9) também apresentou uma boa correlação com os resultados numéricos, apresentando um erro relativo médio de 11,4141%, com um desvio padrão do erro de 6,1113%, sendo que para erros de 0%, não houve presença deste modo de flambagem nas simulações.

9.3 Resultados para viga tubo de seção circular

Para as análises de carga crítica de flambagem em tubos, serão utilizadas geometrias com seção transversal circular com diâmetro de 300 mm, e espessura de 2,4 e 7,5 mm, variando o comprimento de modo a se ter 4 valores de índice de esbeltez, de 10 até 40, variando-se de 10 em 10 este índice, com as mesmas sequências e mesmas angulações de reforço *SF* utilizados na análise de viga I. Os resultados foram separados em flambagem local e global, pois para este tipo de geometria só ocorrem estes dois modos de flambagem. Serão apresentados conjuntos de gráficos 3D, separando flambagem global e local, e separando as duas espessuras. Os resultados para espessura de 2,4 mm serão apresentados nas figuras Figura 54 a Figura 61, e serão discutidos posteriormente.

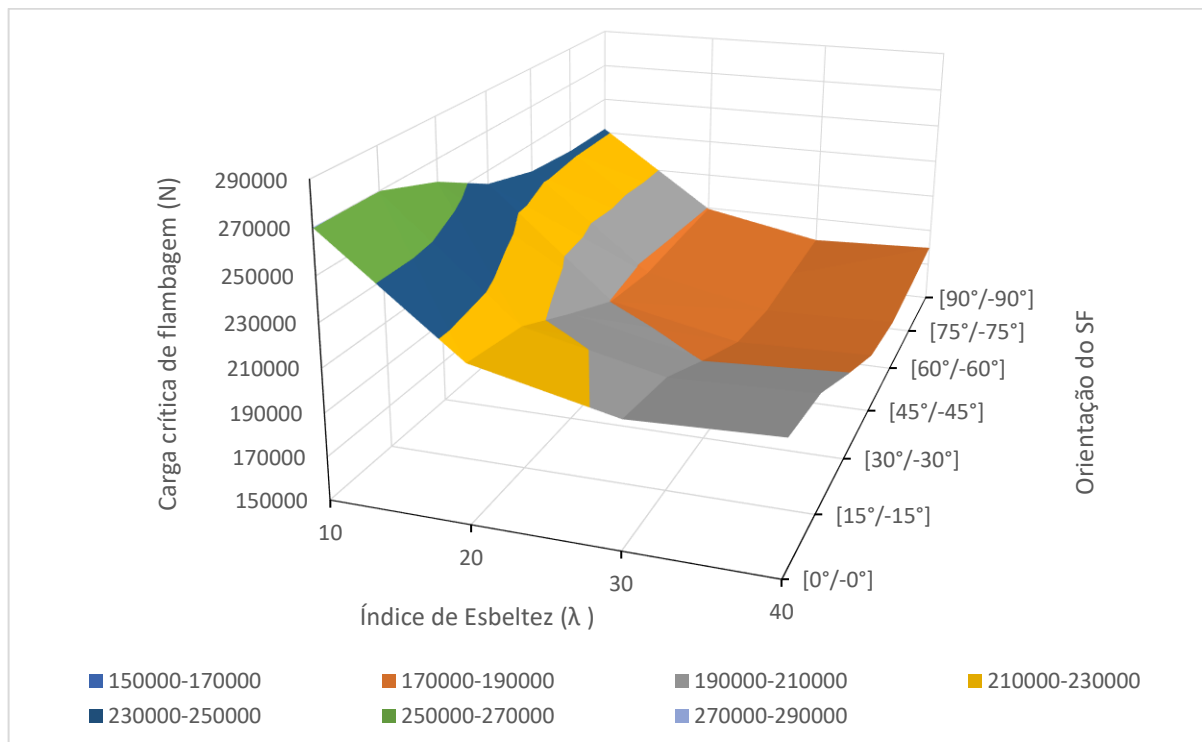


Figura 54 - Carga crítica de flambagem local para sequência [CSM ROV SF SF ROV CSM] espessura = 2,4 mm. Fonte: Autoria Própria (2019).

A Figura 54 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem local para todos os índices de esbeltez utilizando reforços de *SF* com angulação de [0° / 0°], e menor valor utilizando reforços de [90° / -90°] para índice de esbeltez igual a 10, e [60° / -60°] para os demais índices.

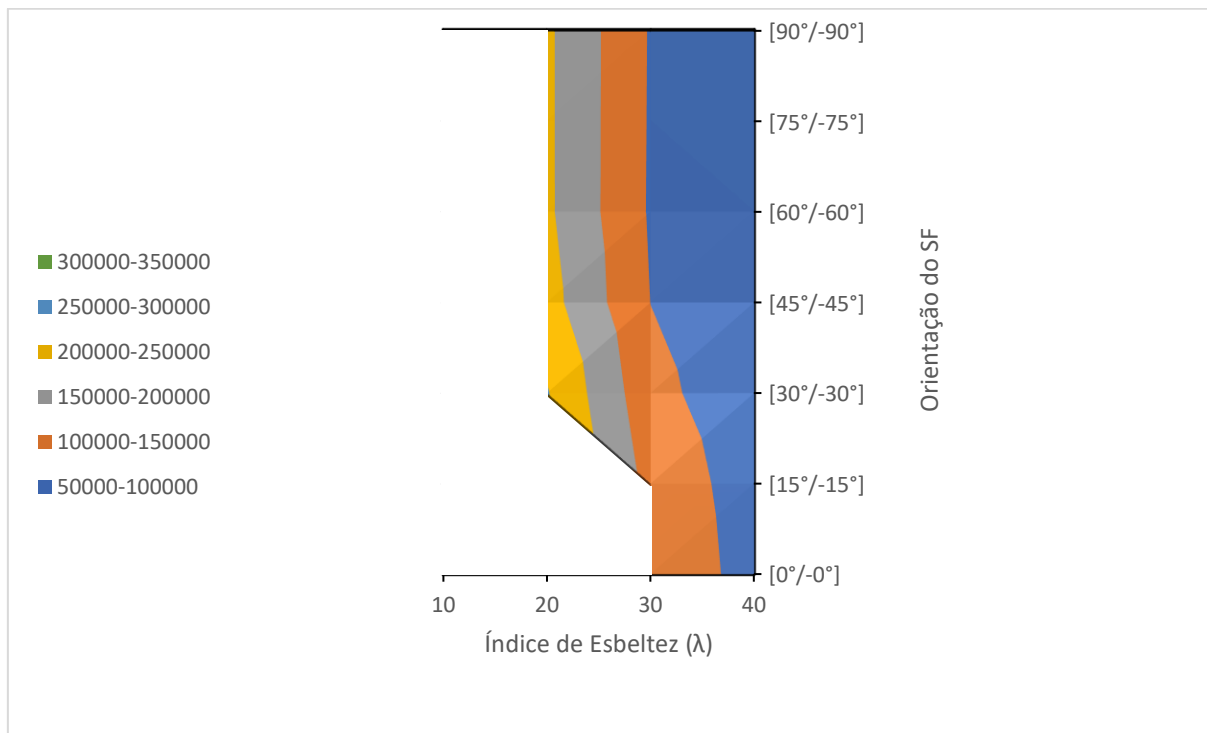
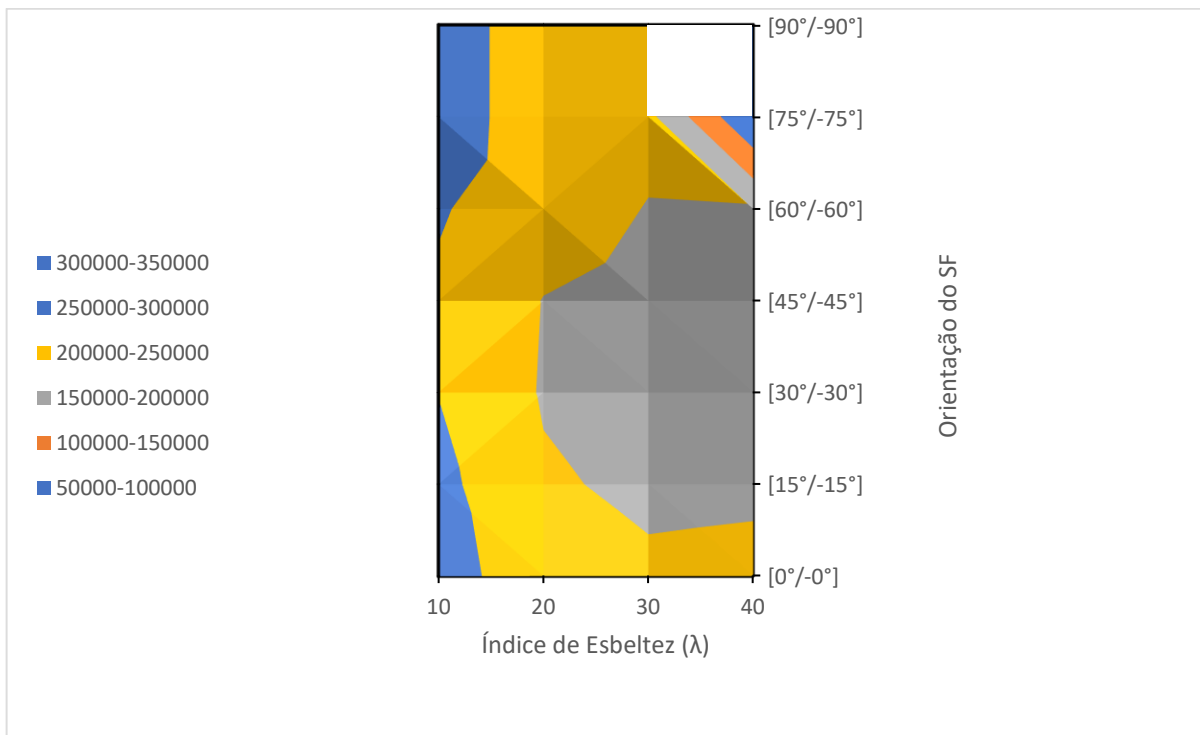


Figura 55 - Carga crítica de flambagem global para seqüência [CSM ROV SF SF ROV CSM] espessura = 2,4 mm. Fonte: Autoria Própria (2019).

A Figura 55 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem global para os índices de esbeltez iguais a 30 e 40, utilizando reforços de SF com angulação de [0° / 0°], e para índice de esbeltez 20, o valor máximo foi obtido com reforços de [30° / -30°], pois não manifestaram a flambagem em angulações menores, e menor valor utilizando reforços de [90° / -90°] para índice de esbeltez de 20, e [60° / -60°] para os demais índices. Não houve flambagem global retirado dos 4 autovalores para índice de esbeltez igual a 10.



**Figura 56 - Carga crítica de flambagem local para sequência [CSM SF ROV ROV SF CSM] espessura = 2,4 mm.
Fonte: Autoria Própria (2019).**

A Figura 56 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem local para os índices de esbeltez 10, 20 e 30, utilizando reforços de SF com angulação de [90° / -90°], e para índice de esbeltez 40, o valor máximo foi obtido com reforços de [0° / 0°], e menor valor utilizando reforços de [60° / -60°] para índice de esbeltez de 10, e [45° / -45°] para os demais índices.

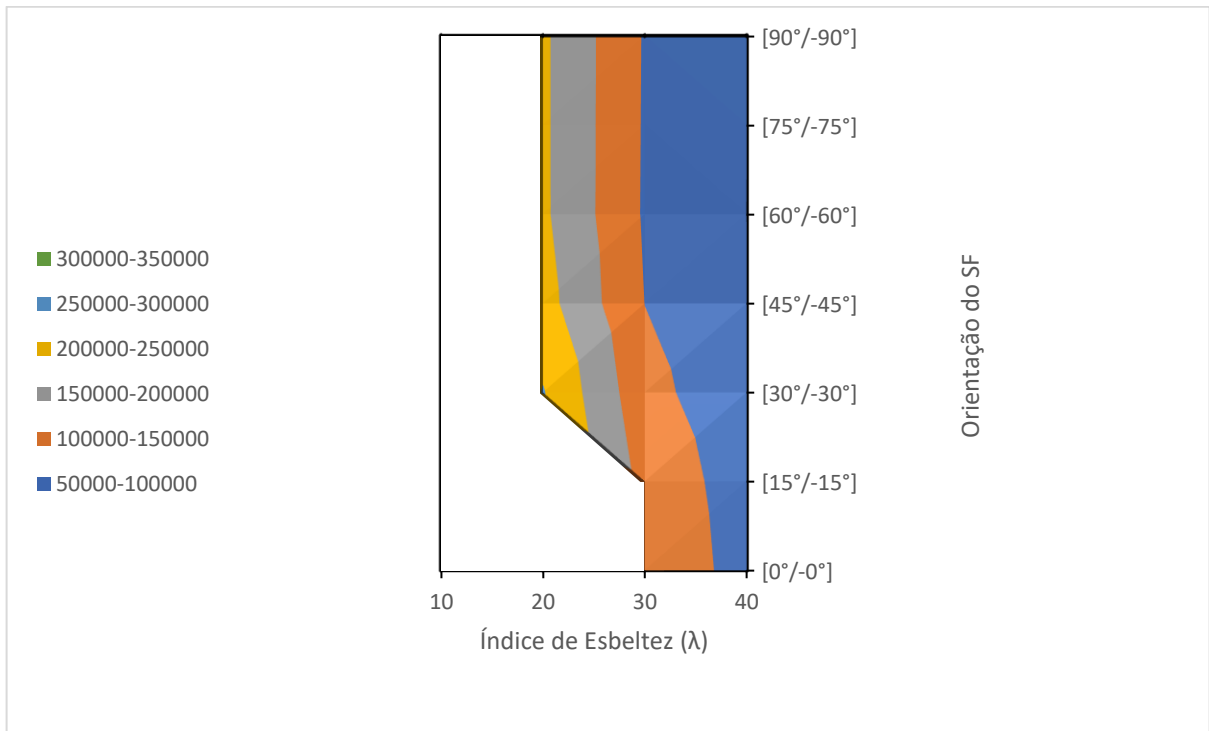


Figura 57 - Carga crítica de flambagem global para seqüência [CSM SF ROV ROV SF CSM] espessura = 2,4 mm. Fonte: Aatoria Própria (2019).

A Figura 57 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem global para os índices de esbeltez 30 e 40, utilizando reforços de SF com angulação de [0° / 0°], e para índice de esbeltez 20, o valor máximo foi obtido com reforços de [30° / -30°], e menor valor utilizando reforços de [90° / -90°] para índice de esbeltez de 20, e [60° / -60°] para os índice 30 e 40. Não houve manifestação de flambagem global para índice de esbeltez 10.

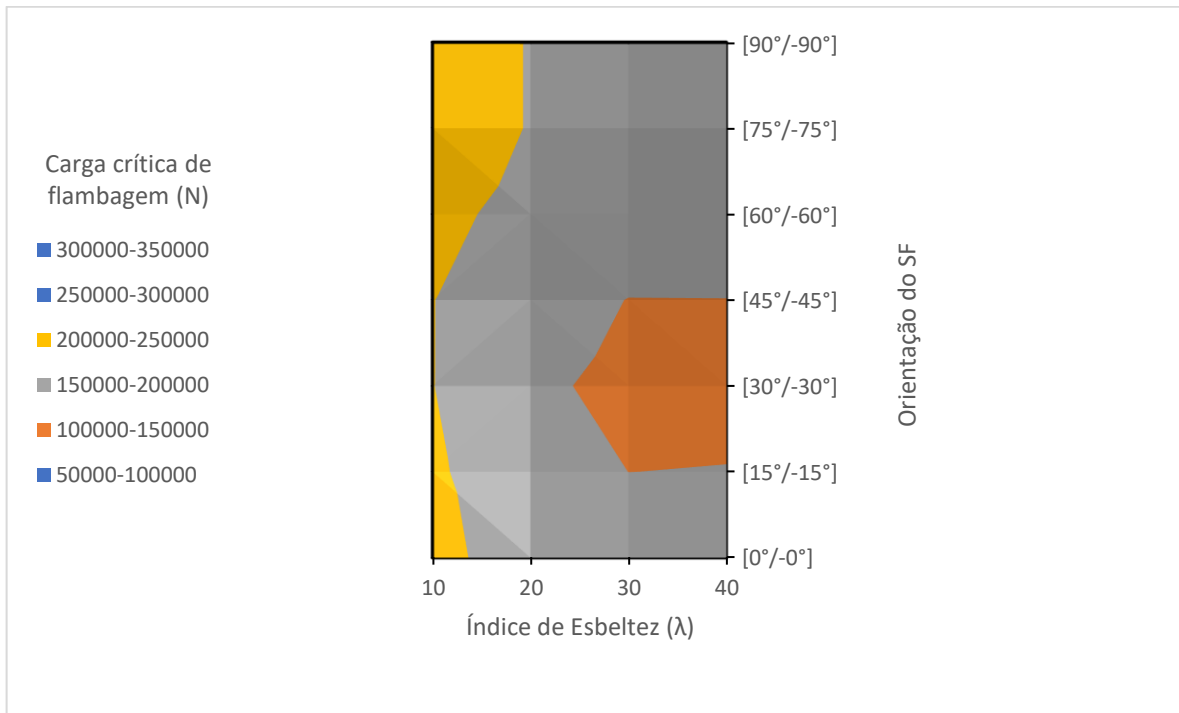


Figura 58 - Carga crítica de flambagem local para seqüência [ROV SF CSM CSM SF ROV] espessura = 2,4 mm. Fonte: Autoria Própria (2019).

A Figura 58 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem local para todos os índices de esbeltez, utilizando reforços de *SF* com angulação de $[90^\circ / -90^\circ]$, e menor valor utilizando reforços de $[45^\circ / -45^\circ]$ para todos índices de esbeltez.

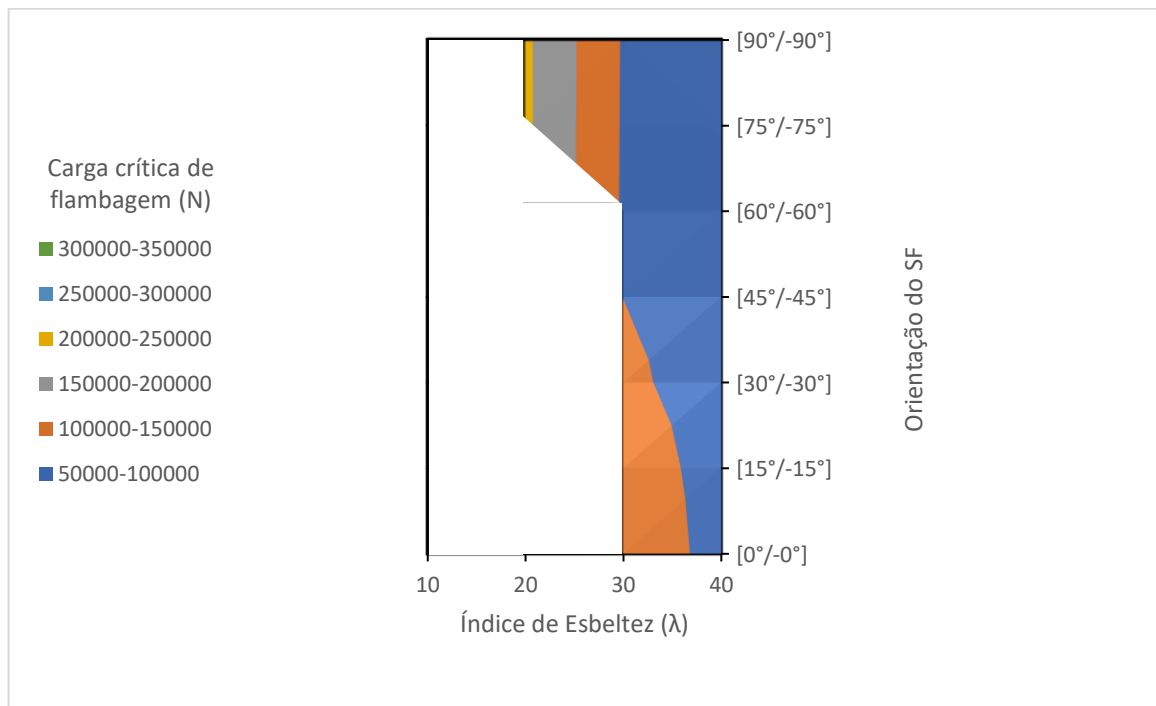


Figura 59 - Carga crítica de flambagem global para sequência [ROV SF CSM CSM SF ROV] espessura = 2,4 mm. Fonte: Autoria Própria (2019).

A Figura 59 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem global para os índices de esbeltez 30 e 40, utilizando reforços de *SF* com angulação de [0° / 0°], e para índice de esbeltez 20, o valor máximo foi obtido com reforços de [75° / -75°], e menor valor utilizando reforços de [60° / -60°] para índice de esbeltez de 30 e 40, e [90° / -90°] para o índice de 20. Não houve manifestação de flambagem global para índice de esbeltez 10.

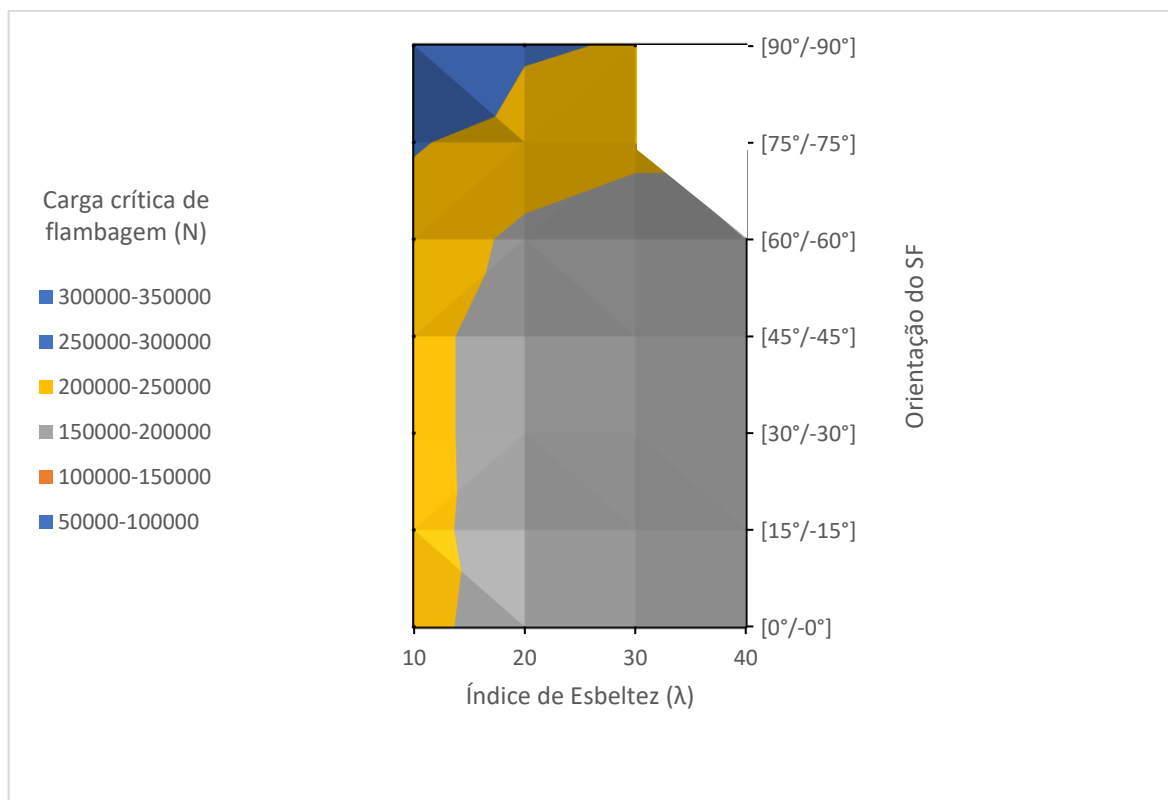


Figura 60 - Carga crítica de flambagem local para sequência [SF ROV CSM CSM ROV SF] espessura = 2,4 mm.

Fonte: Autoria Própria (2019).

A Figura 60 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem local para os índices de esbeltez 10, 20 e 30, utilizando reforços de *SF* com angulação de [90° / -90°], e para índice de esbeltez 40, o valor máximo foi obtido com reforços de [60° / -60°], e menor valor utilizando reforços de [0° / 0°] para índice de esbeltez de 10, e [30° / -30°] para os índice 20, 30 e 40.

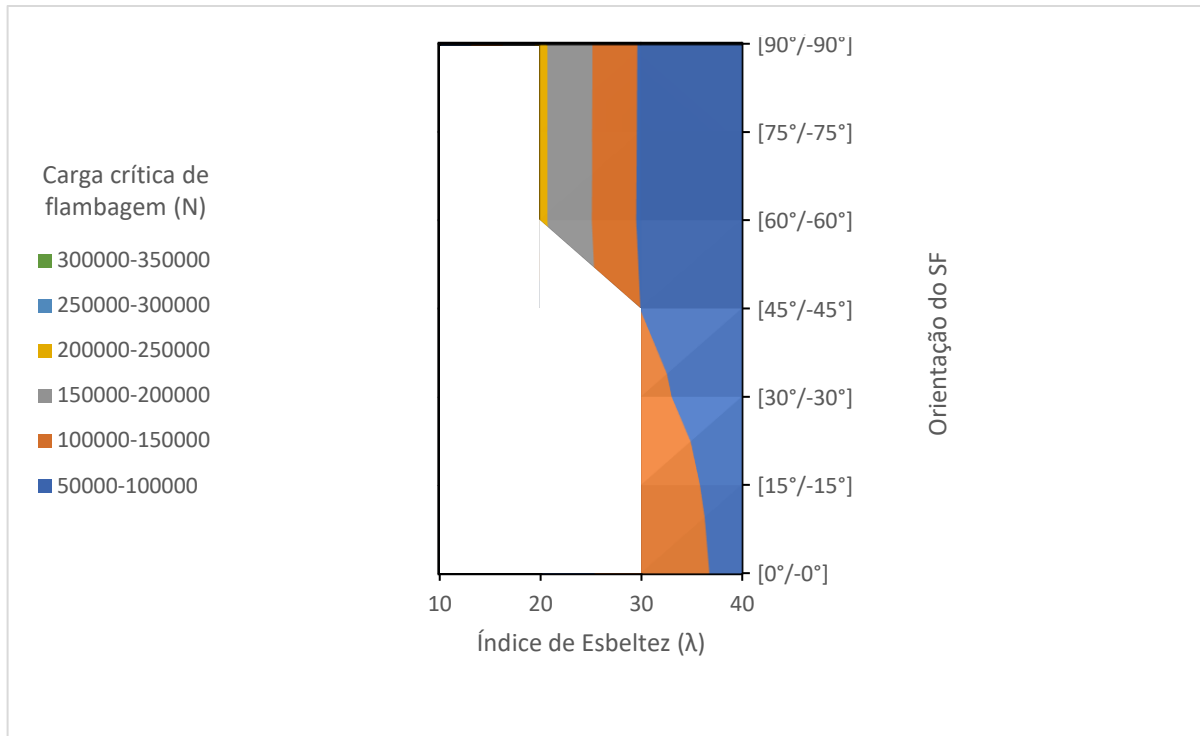


Figura 61 - Carga crítica de flambagem global para seqüência [SF ROV CSM CSM ROV SF] espessura = 2,4 mm.

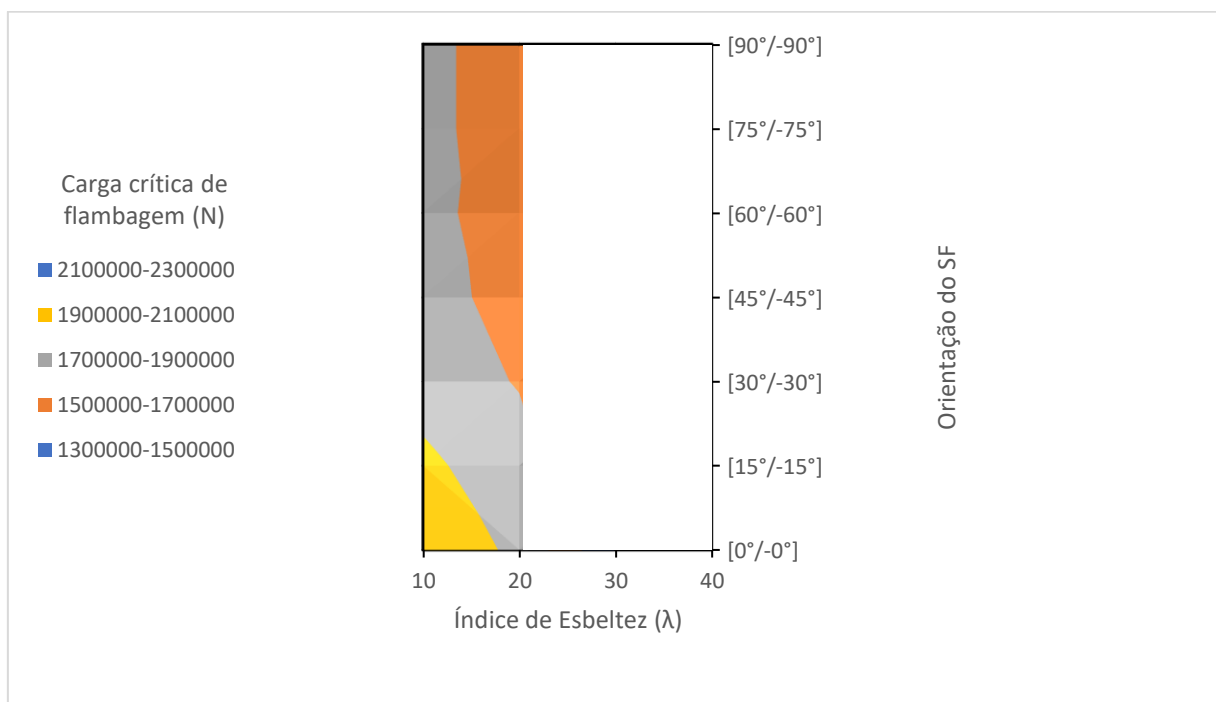
Fonte: Autoria Própria (2019).

A Figura 61 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem global para os índices de esbeltez 30 e 40, utilizando reforços de *SF* com angulação de [0° / 0°], e para índice de esbeltez 20, o valor máximo foi obtido com reforços de [60° / -60°], e menor valor utilizando reforços de [90° / -90°] para índice de esbeltez de 20, e [60° / -60°] para os índice 30 e 40. Não houve manifestação de flambagem global para índice de esbeltez 10.

Para carga crítica de flambagem local no caso do tubo com 2,4 mm de espessura, a seqüência de laminação que forneceu um melhor desempenho para índices de esbeltez 10, 20 e 30, foi a seqüência [SF ROV CSM CSM ROV SF], com angulação do SF de [90° / -90°]. Não foi possível mensurar qual a melhor seqüência para o índice de esbeltez 40, pois para reforço *SF* nas angulações [75° / -75°] e [90° / -90°] não houve manifestação de modo de flambagem local, pelo menos dentre os primeiros quatro modos de flambagem extraídos, e também não seria possível definir a melhor orientação da angulação de reforço *SF*. Já para carga crítica de flambagem global, houveram duas seqüências em que o valor de carga crítica foi o maior, comparando índices de esbeltez de 30 e 40, sendo as seqüências [CSM ROV SF SF

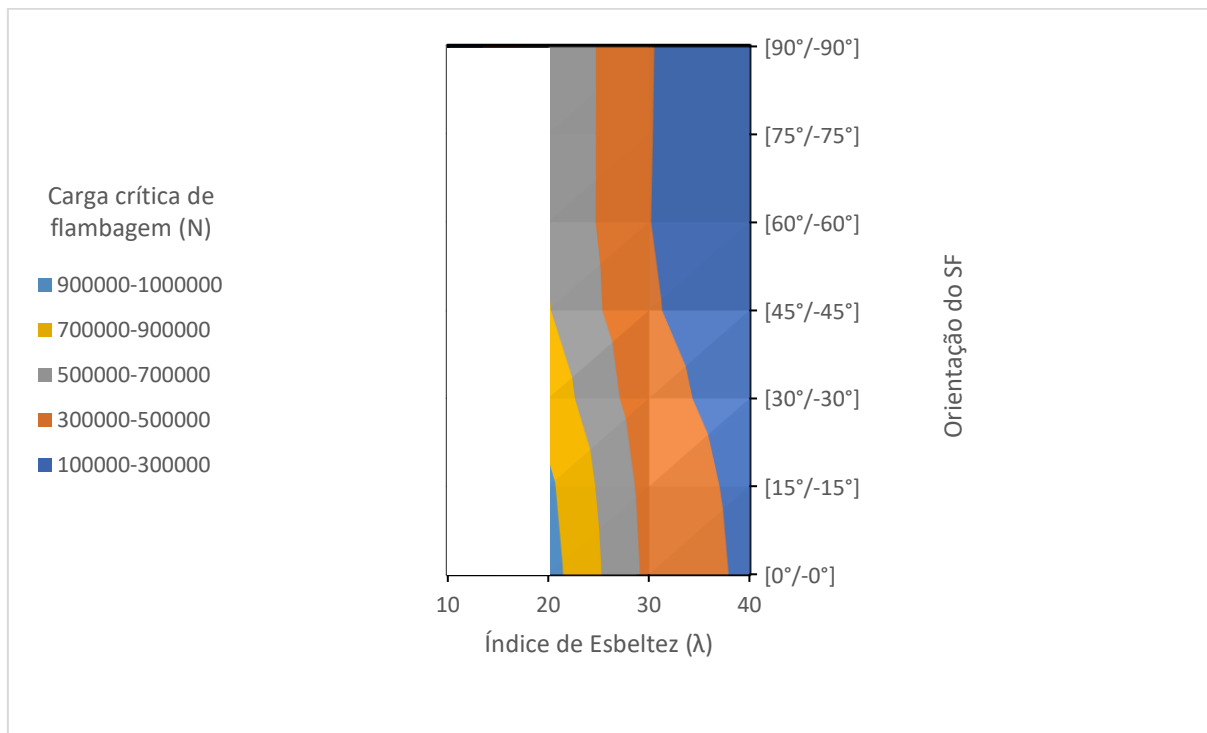
ROV CSM] e [CSM SF ROV ROV SF CSM], com orientação do SF de $[0^\circ / 0^\circ]$. Isto ocorre pelo fato de o SF a 0° se comportar da mesma forma que o *roving*, fazendo com que não haja diferença de rigidez mecânica entre estas duas arquiteturas. Para índice de esbeltez de 10, não houve nenhuma manifestação de flambagem global para nenhuma sequência. Os valores de 0 N, representados em branco nos gráficos, indicam que não se manifestaram os modos de flambagem.

Agora serão apresentados os resultados para a geometria com 7,5 mm de espessura, nas figuras Figura 62 a Figura 69.



**Figura 62: Carga crítica de flambagem local para sequência [CSM ROV SF SF ROV CSM] espessura = 7,5 mm.
Fonte: Autoria Própria (2019).**

A Figura 62 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem local para o índices de esbeltez 10, utilizando reforços de SF com angulação de $[15^\circ / -15^\circ]$, e para índice de esbeltez 20, o valor máximo foi obtido com reforços de $[0^\circ / 0^\circ]$, e menor valor utilizando reforços de $[90^\circ / -90^\circ]$ para índice de esbeltez de 10, e $[75^\circ / -75^\circ]$ para os índice 20. Não houve manifestação de flambagem local para índice de esbeltez 30 e 40.



**Figura 63 - Carga crítica de flambagem global para seqüência [CSM ROV SF SF ROV CSM] espessura = 7,5 mm.
Fonte: Autoria Própria (2019).**

A Figura 63 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem global para o índices de esbeltez 10, 20 e 30 utilizando reforços de SF com angulação de [0° / 0°], e menor valor utilizando reforços de [90° / -90°] para índice de esbeltez de 20, e [60° / -60°] para os índice 30 e 40. Não houve manifestação de flambagem global para índice de esbeltez 10.

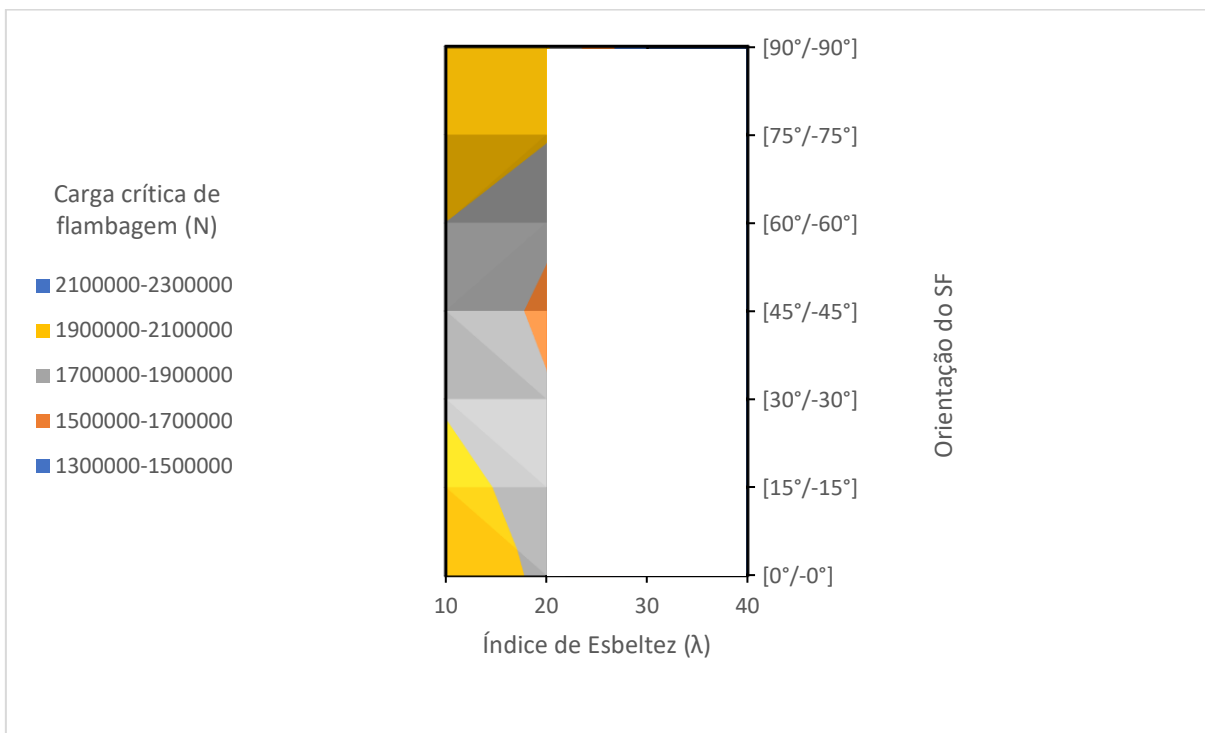
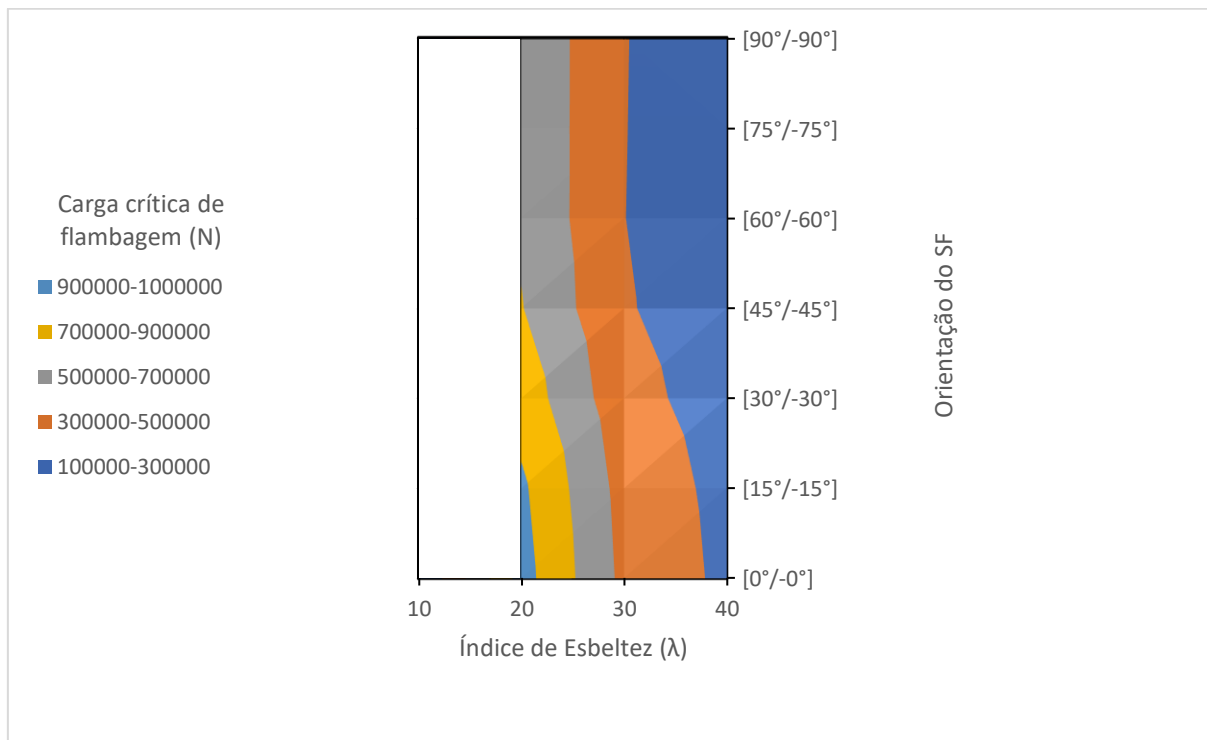


Figura 64 - Carga crítica de flambagem local para sequência [CSM SF ROV ROV SF CSM] espessura = 7,5 mm.

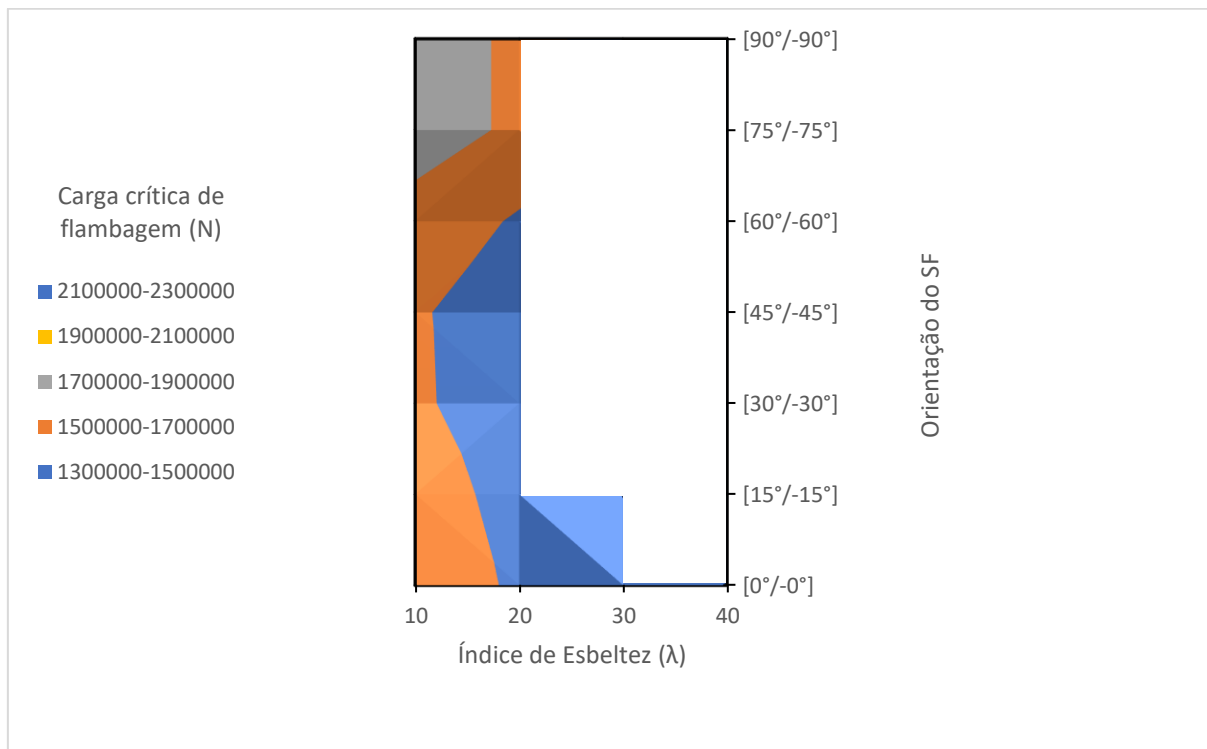
Fonte: Autoria Própria (2019).

A Figura 64 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem local para o índices de esbeltez 10 e 20, utilizando reforços de *SF* com angulação de [90° / -90°], e menor valor utilizando reforços de [60° / -60°] para índice de esbeltez de 10, e 20. Não houve manifestação de flambagem local para índice de esbeltez 30 e 40.



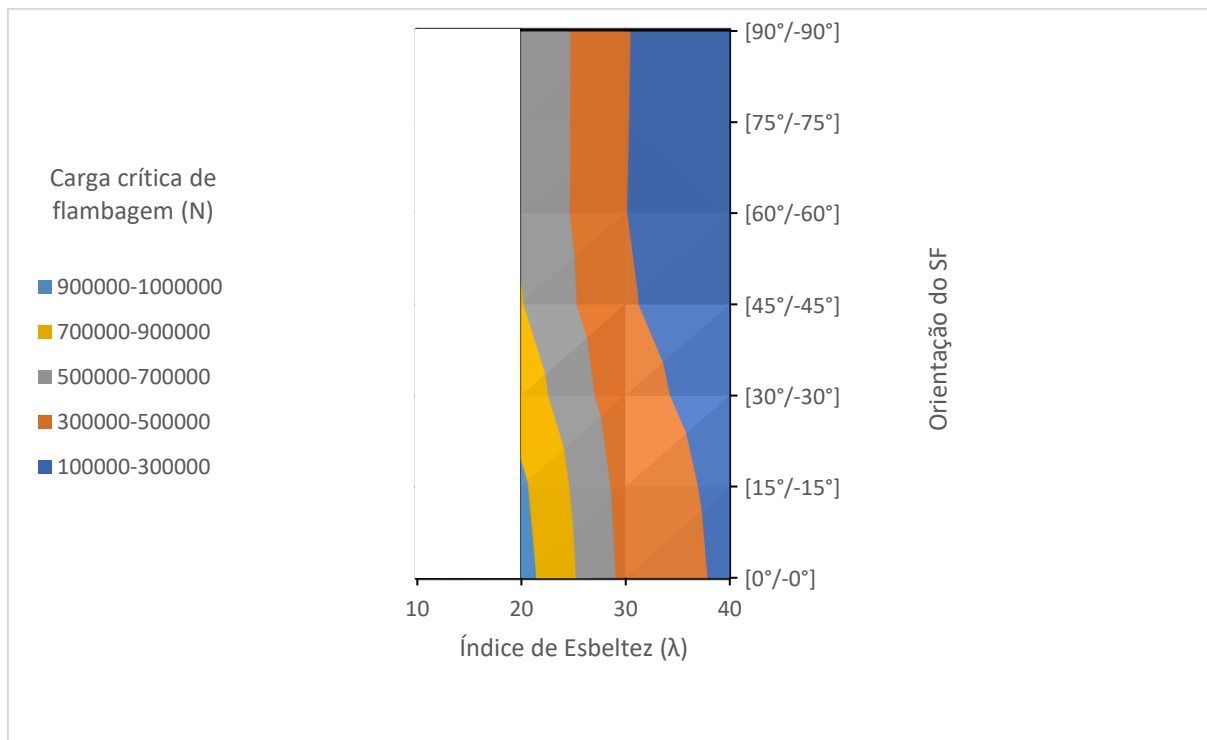
**Figura 65 - Carga crítica de flambagem global para sequência [CSM SF ROV ROV SF CSM] espessura = 7,5 mm.
Fonte: Autoria Própria (2019).**

A Figura 65 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem global para o índices de esbeltez 20, 30 e 40, utilizando reforços de SF com angulação de [90° / -90°], e menor valor utilizando reforços de [90° / -90°] para índice de esbeltez de 20, e [60° / -60°] para os índices 30 e 40. Não houve manifestação de flambagem global para índice de esbeltez 10.



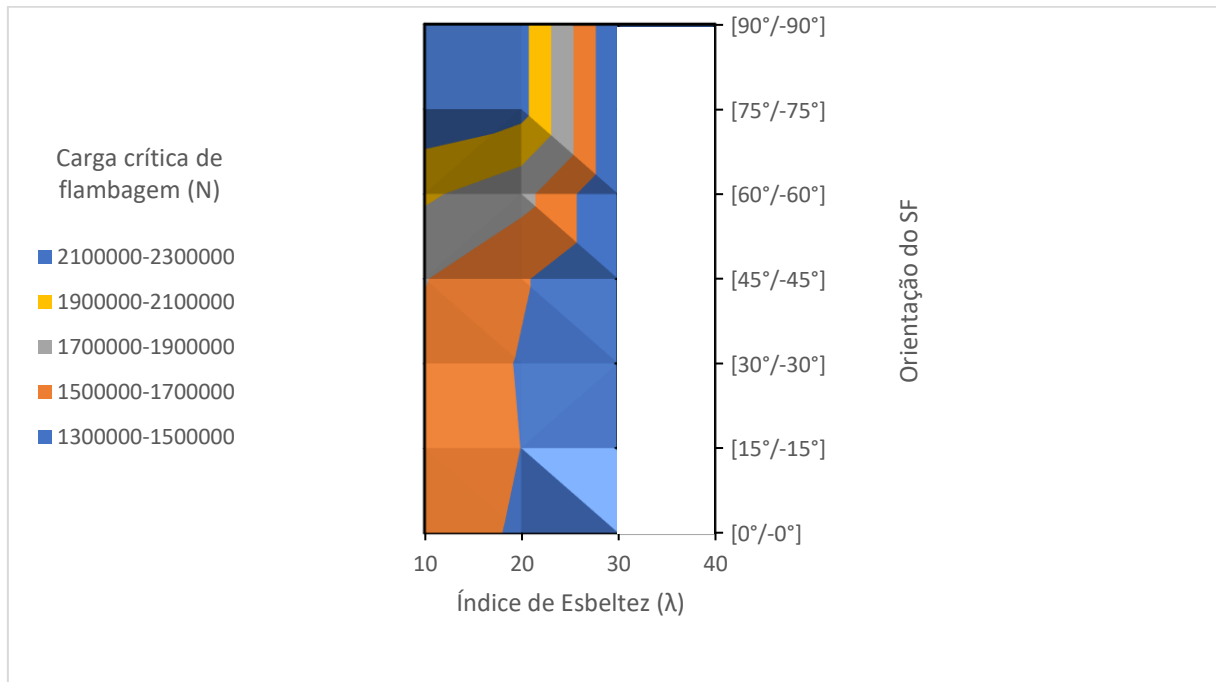
**Figura 66 - Carga crítica de flambagem local para seqüência [ROV SF CSM CSM SF ROV] espessura = 7,5 mm.
Fonte: Aatoria Própria (2019).**

A Figura 66 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem local para o índices de esbeltez 10 e 20, utilizando reforços de *SF* com angulação de [90° / -90°], e para índice de esbeltez 30, o valor máximo foi obtido com reforços de [0° / 0°], e menor valor utilizando reforços de [60° / -60°] para índice de esbeltez de 10 e 20, e [15° / -15°] para o índice 30. Não houve manifestação de flambagem local para índice de esbeltez 40.



**Figura 67 - Carga crítica de flambagem global para seqüência [ROV SF CSM CSM SF ROV] espessura = 7,5 mm.
Fonte: Autoria Própria (2019).**

A Figura 67 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem global para o índices de esbeltez 10, 20 e 30 utilizando reforços de SF com angulação de [0° / 0°], e menor valor utilizando reforços de [90° / -90°] para índice de esbeltez de 20, e [60° / -60°] para os índices 30 e 40. Não houve manifestação de flambagem global para índice de esbeltez 10.



**Figura 68: Carga crítica de flambagem local para sequência [SF ROV CSM CSM ROV SF] espessura = 7,5 mm.
Fonte: Autoria Própria (2019).**

A Figura 68 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem local para o índices de esbeltez 10 e 20, utilizando reforços de *SF* com angulação de [90° / -90°], e para índice de esbeltez 30, o valor máximo foi obtido com reforços de [0° / 0°], e menor valor utilizando reforços de [0° / 0°] para índice de esbeltez de 10, e [15° / -15°] para os índices 20 e 30. Não houve manifestação de flambagem local para índice de esbeltez 40.

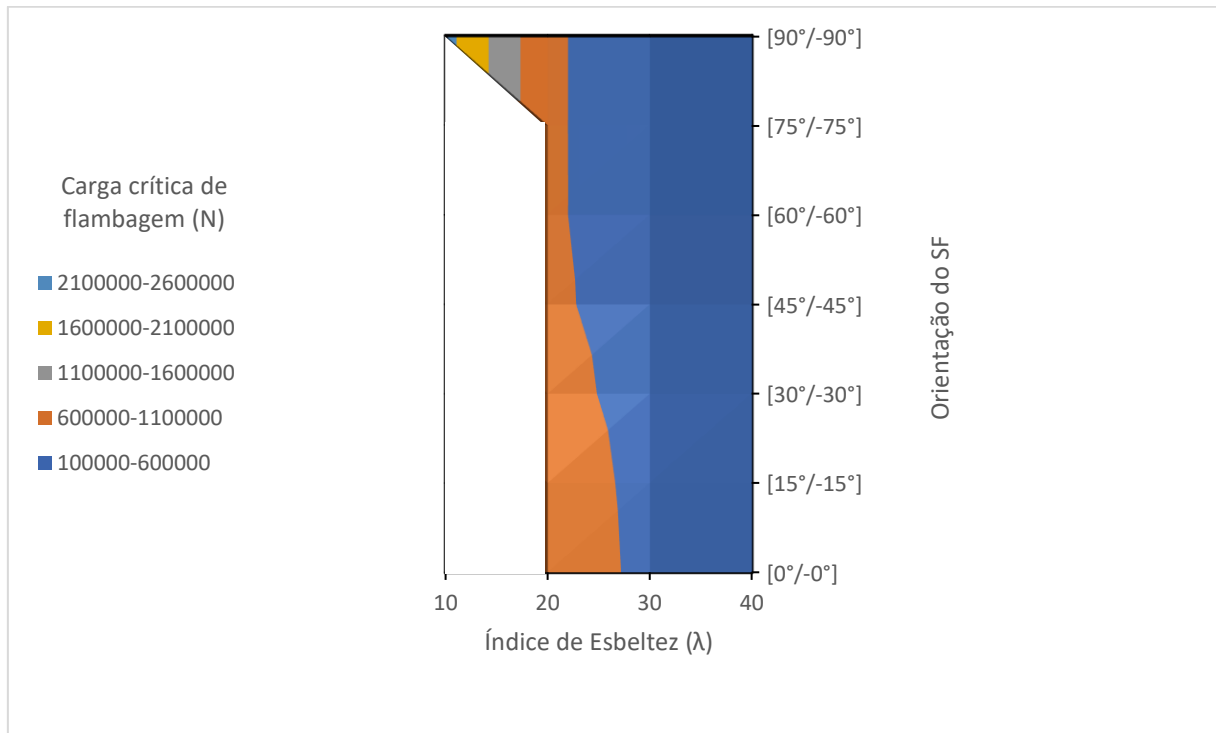


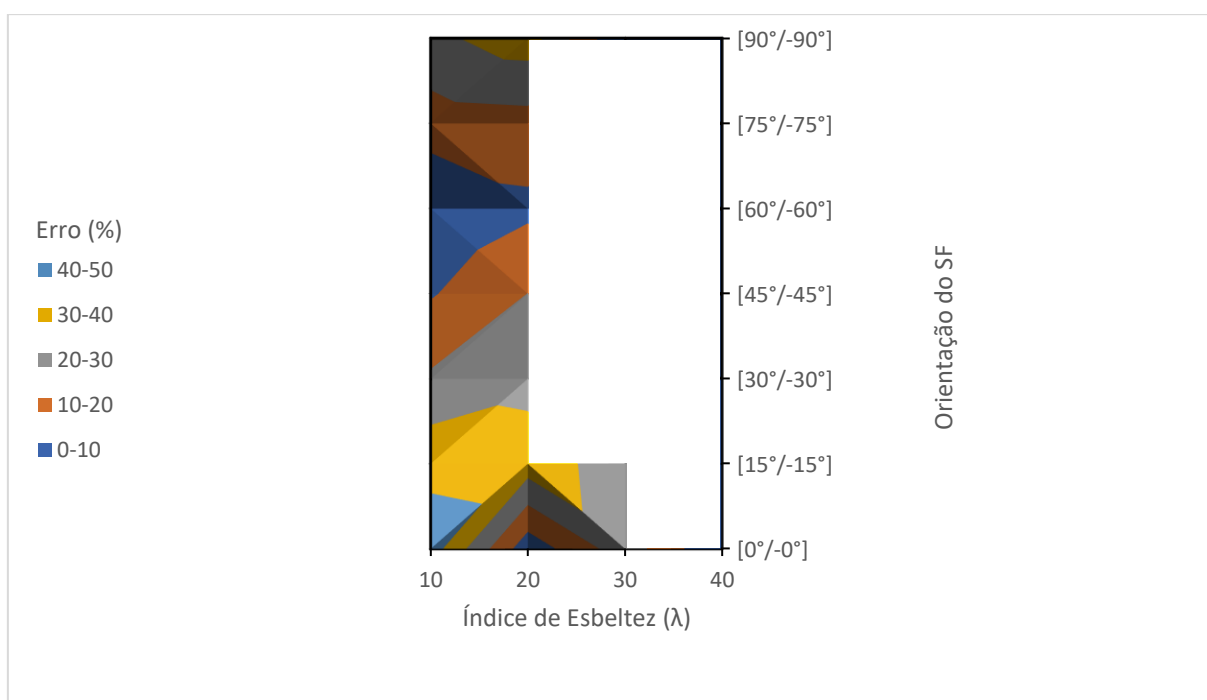
Figura 69 - Carga crítica de flambagem global para seqüência [SF ROV CSM CSM ROV SF] espessura = 7,5 mm. Fonte: Aatoria Própria (2019).

A Figura 69 apresentou um valor máximo de carga crítica de flambagem local para o índices de esbeltez 20, 30 e 40 utilizando reforços de *SF* com angulação de [0° / 0°], e menor valor utilizando reforços de [90° / -90°] para índice de esbeltez de 20, e [60° / -60°] para os índices 30 e 40. Houve apenas uma única manifestação de flambagem global para índice de esbeltez 10, utilizando reforço *SF* com angulação [90° / -90°], sendo então o mesmo valor de máximo e mínimo.

No que diz respeito à flambagem local, a espessura de 7,5 mm apresentou uma maior carga crítica de flambagem, para os índices de esbeltez 10 e 20, com a mesma seqüência e angulação das lâminas *SF* com 2,4 mm de espessura, com exceção das situações nas quais não se manifestaram modos de flambagem local, e portanto não permitindo a comparação dentre todas as angulações de *SF* consideradas. Isto mostra que realmente o reforço *SF* localizado na parte externa do tubo, com angulação de [90° / -90°], permite um melhor desempenho em termos de flambagem local em tubos circulares. Para flambagem global, as seqüências [SF ROV CSM CSM ROV SF] e [ROV SF CSM CSM SF ROV] apresentaram os maiores valores de carga crítica, com angulação do *SF* de [0° / 0°], para índices de esbeltez 20, 30 e 40. Para índice de esbeltez 10 não houve manifestação de modo de flambagem global. Os valores para as duas seqüências foram os mesmos pelo mesmo fato explicado na geometria de

2,4 mm de espessura. Com isto pode-se afirmar que para modos de flambagem global, o melhor reforço seria o CSM no meio da espessura do tubo, e a angulação de SF em 0° , para se obter maiores valores de cargas críticas.

De posse destes resultados, apresentam-se na sequência as distribuições de erro relativo entre o método numérico e o método analítico. Para isto, serão comparados os resultados obtidos na sequência [SF ROV CSM CSM ROV SF], com geometria de 7,5 mm de espessura, e a equação utilizada para comparação de flambagem global será a própria equação de Euler (6.4), e para comparação com o modo de flambagem local, será utilizada a equação de Vasiliev (6.11), e estão presentes nas figuras 70 e 71.



**Figura 70 - Erro relativo carga crítica de flambagem local para espessura = 7,5 mm.
Fonte: Autoria Própria (2019).**

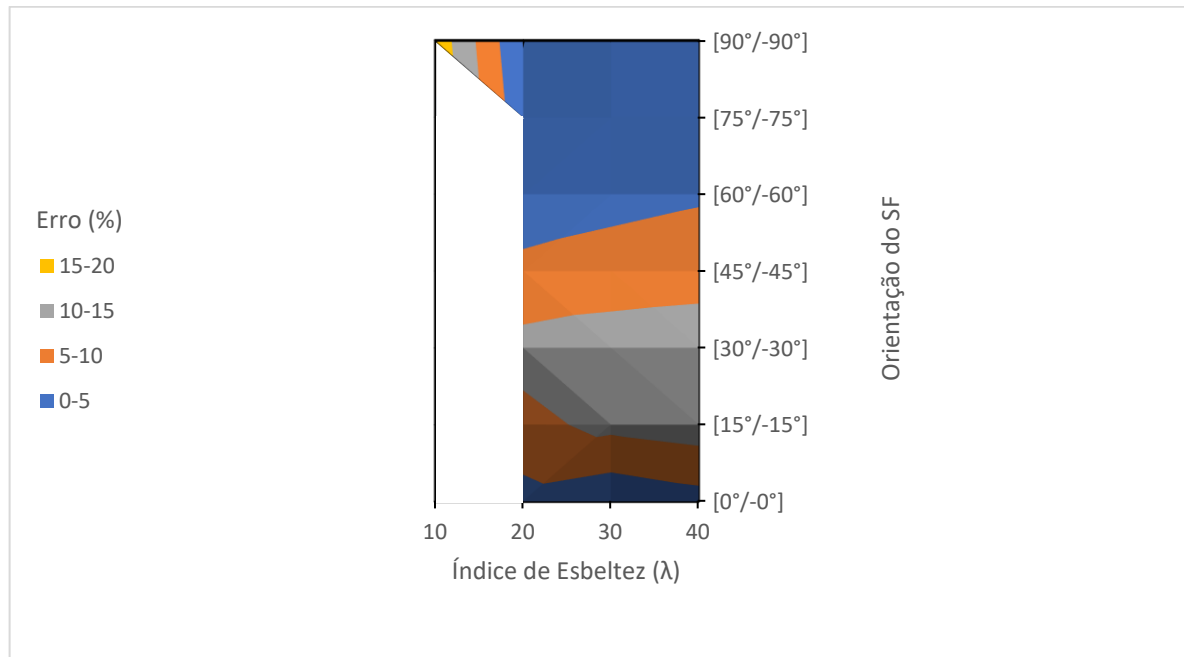


Figura 71 - Erro relativo carga crítica de flambagem global para espessura = 7,5 mm.
Fonte: Autoria Própria (2019).

Para carga crítica de flambagem local, a equação proposta por Vasiliev apresenta uma correlação razoável, com um desvio padrão de 12,3654%. Os valores resultantes desta equação são muito sensíveis quanto ao número de meias-ondas da configuração deformada obtida na simulação, isto diminui muito a precisão desta equação, sendo que dependendo da simulação, quando se varia algum parâmetro que não influencie muito na carga crítica de flambagem, mas aparece uma meia onda a mais na simulação, já é suficiente para apresentar um erro muito grande.

Já para os modos de flambagem global, a equação de Euler aponta uma ótima correlação, melhor ainda do que na viga I, com um desvio padrão de 4,8320%, fazendo com que para modos de flambagem global, a equação de Euler, proposta em 1744, continue sendo muito útil, mesmo para materiais ortotrópicos, pois para a flambagem global a rigidez global é mais significativa. A ortotropia gerada pela utilização de reforços na forma de fibras vai interferir significativamente somente na "rigidez local". A rigidez global se traduz em termos do índice de esbeltez global.

10 CONCLUSÃO

Através do estudo realizado, foi possível observar o comportamento de perfis estruturais produzidos em material composto em compressão axial, estando portanto sujeitos à flambagem, considerando elementos de seção tipo “I” e tubo de seção circular, com uma seção transversal para viga I com dimensões (100x100x6,4mm), e tubo de seção circular com 300 mm de diâmetro externo e espessuras de 2,4 e 7,5 mm, a fim de se analisar quais seriam os melhores reforços para estas aplicações, e a influência de diversos aspectos geométricos que influenciam na carga crítica de flambagem, como a razão entre largura de mesas e alma, aumento do índice de esbeltez, aumento da espessura, etc. Para isto, foi utilizado o *software* comercial ANSYS®, que aplica o MEF para cálculos, e foram utilizados elementos específicos para utilização em materiais compostos, sendo eles o Shell 181 e Solid 46, para a modelagem das geometrias.

Deste modo, foi feita uma grande revisão bibliográfica, utilizando diversas equações e resultados experimentais, para assegurar que os modelos foram preparados de forma a ter uma boa correlação com a realidade, com condições de contorno, sequenciamento das lâminas, geometrias e propriedades materiais adequadas, para poder utilizá-los nas diversas análises posteriores que foram realizadas.

Os resultados para as estratégias de modelagem no *software* foram, em princípio, comparados com resultados experimentais, e apresentaram uma boa correlação, sendo confiável utilizá-los nas análises que foram feitas posteriormente, tanto para viga I quanto para o tubo.

Após a verificação das estratégias de modelagem, foi executado um estudo de desempenho para diferentes arquiteturas de laminação e angulações de reforço do tipo SF. Para isso, foi fixado o número de lâminas em 6, simétricas, a fim de evitar problemas de acoplamento membrana-flexão.

Para flambagem local de mesa e alma, a sequência de laminação que apresentou maior carga crítica de flambagem, foi a sequência [SF ROV CSM CSM ROV SF], com reforço de SF a $[90^\circ / -90^\circ]$ na alma, e $[45^\circ / -45^\circ]$ na mesa. Para flambagem global com flexão em torno do eixo de menor inércia para esta sequência, a angulação de reforço do tipo “SF” que conduz ao melhor desempenho foi a

angulação $[15^\circ / -15^\circ]$ na alma, e $[45^\circ / -45^\circ]$ na mesa. Nesta análise não se manifestaram modos de flambagem global para SF a $[0^\circ / 0^\circ]$ na mesa, pois possivelmente, este modo é um modo além dos 4 primeiros que foram solicitados no software, sendo que provavelmente seria a melhor angulação para este modo. Para flambagem global por flexo-torção, a melhor angulação foi a de $[0^\circ / 0^\circ]$ na alma, e $[30^\circ / -30^\circ]$ na mesa, sendo que também não se manifestaram modos de flambagem global por flexo torção para $[0^\circ / 0^\circ]$ na mesa. Então não seria possível afirmar com certeza que esta seria a melhor angulação para este modo de flambagem.

Para tubos de seção circular, a melhor sequência para as duas espessuras analisadas, em se tratando de carga crítica de flambagem local, foi também a de [SF ROV CSM CSM ROV SF], para todos os índices de esbeltez onde se manifestou a flambagem local, sendo a angulação das lâminas com reforço SF de $[90^\circ / -90^\circ]$. Já para a flambagem global, houveram duas sequências em que apresentaram as maiores cargas críticas, a sequência [SF ROV CSM CSM ROV SF] e [ROV SF CSM CSM SF ROV], devido ao fato de se manifestarem quando o reforço de SF está com angulação de $0^\circ / -0^\circ$, se comportando igual a uma camada de *roving*, ou seja, poderia ser substituído pelo *roving*, já que é um reforço mais barato, e diminuiria o custo de fabricação da peça.

As equações utilizadas de modo a comparar os valores simulados foram satisfatórias, porém com limitações. Para um comprimento maior, a equação (6.4) desenvolvida por Cardoso (2013) não apresentou uma boa correlação. Para comprimentos menores, o desvio padrão da distribuição de erros relativos foi baixo, porém, como o erro relativo varia dependendo da variação da angulação do reforço, a equação deixa a desejar no que tange a avaliação de qual seria o melhor reforço, devendo ser utilizado realmente o MEF para garantir qual seria a melhor angulação.

Na análise da dependência da relação da largura de mesa e altura de alma para viga I, a peça que apresentou maior carga crítica foi a com razão intermediária, com razão b_f/b_w de 0,75. Este é um resultado bastante importante, pelo fato de que em um projeto, isto diminuiria o peso da estrutura, ao invés de utilizar uma peça com razão 1,0, além de diminuir o custo da peça.

Para estudos posteriores, pode-se utilizar diversas outras configurações de empilhamento, com diversas angulações de reforços, e outros tipos de materiais também, para poder comparar com o reforço de fibra de vidro, em questão de

resistência, peso e custo. Também poderia ser definido um modo de utilizar o elemento Solid 46 para simulações com tubo circular, pois devido a geometria deste elemento, ele apresenta muitas dificuldades na sua modelagem, principalmente em posicionar as coordenadas locais de modo adequado, e por esses motivos, não foi realizada simulações para tubo de seção circular utilizando este elemento.

REFERÊNCIAS

- ADAMS, D., CARLSSON, L., and PIPES, R. (2002). **Experimental characterization of advanced composite materials**, CRC Press, New York.
- AGARWAL, B. D., BROUTMAN, L. J., e K. CHANDRASHEKHARA. “**Analysis and performance of fiber composites**”. (3rd ed.). Wiley and Sons. (2006).
- ALMEIDA, SANDRA P. S. “**Avaliação das Propriedades Mecânicas de Compósitos Pultrudados de Matriz Polimérica com Reforço de Fibra de Vidro**”. 87 p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.
- ALVES FILHO, A. “**Elementos Finitos: a base da tecnologia CAE**”. São Paulo: Editora Érica Ltda, 2007.
- ALVES FILHO, A. “**Elementos Finitos - A Base da Tecnologia CAE - Análise não Linear**”. 1. ed. São Paulo: Ltda, Editora Érica, 2012.
- DE CASTRO E SILVA, A. L. “**Análise numérica não-linear de flambagem local de perfis de aço estrutural submetidos à compressão uniaxial**”. Tese Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, 2006.
- ANSYS, R. 16. “**Help System, Couple Field Analysis Guide**” CanonsburgSAS IP, Inc., 2015.
- ARGYRIS, J. H., KELSEY, S. “**Energy Theorems and Structural Analysis**”, Butterworth Scientific Publications, London, 1960.
- ASCE Fiber Composites, and Polymers Standards Committee. (2010). “**Pre-standard for load & resistance factor design (LRFD) of pultruded fiber reinforced polymer (FRP) structures.**” Final Rep. Submitted to American Composites Manufacturers Association (ACMA), ASCE,

Reston, VA.

ASTM. (2010). **“Test methods for flexural properties of unreinforced and reinforced plastics and electrical insulating materials.”** D790-10, West Conshohocken, PA.

BANK, L. C. **“Composites for construction: structural design with FRP materials”**. John Wiley & Sons; 2006.

BANK, L. C.; YIN, J. (1996). **“Buckling of orthotropic plates with free and rotationally restrained unloaded edges.”** Thin Walled Struct., 24(1), 83–96.

BARBERO, E. J. (1991). **“Pultruded structural shapes—From constituents to the structural behavior.”** SAMPE J., 27(1), 25–30.

BARBERO, E. J. (2011). **Introduction to composite materials design**, 2nd Ed., CRC Press, Boca Raton, FL.

BATISTA, E. M. (2010). **“Effective section method: A general direct method for the design of steel cold-formed members under local-global buckling interaction.”** Thin Wall Struct., 48(4), 345–356.

BATHE, K. J. **“Finite Element Procedures in Engineering Analysis”**. New Jersey: Prentice Hall, Inc., 1982.

BAZANT, Z. P.; CEDOLIN, L. (1991). **Stability of structures: Elastic, inelastic, fracture and damage theories**. Oxford University Press, New York.

BEER, F. P., JOHNSTON, E. R., **“Resistência dos Materiais”**, McGraw-Hill, Ed. Makron Books, 3a ed., 1996

BERTHELOT, J. M., “**Composite Materials: Mechanical Behavior and Structural Analysis**” (in French), 4th edition, 1996.

BLEICH, F. (1952). **Buckling strength of metal structures**, McGraw-Hill, New York.

BRAGA, D. C., “**Avaliação De Métodos Numéricos De Análise Linear De Estabilidade Para Perfis de Aço Formados à Frio**”. Mestrado em Engenharia, Escola Politécnica da USP, São Paulo, 2015.

CAMPBELL, W. D.; RETHWISCH, D. G. “**Ciências e engenharia de materiais: Uma introdução**”. Oitava edição. LTC- Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda. Rio de Janeiro, 2012.

CARD M. F., PETERSEN J. P. “**On the stability of orthotropic cylinders**”. NASA-TN-D-1510, 1962.

CARDOSO, Daniel C. T; HARRIES, Kent. A. **Compressive Local Buckling of Pultruded GRFP I-Sections: Development and Numerical/Experimental Evaluation of an Explicit Equation**. American Society of Civil Engineers, 2014.

CARNEIRO, L.; TEIXEIRA, Ana Maria Abreu Jorge. “**Propriedades e características dos materiais compósitos poliméricos aplicados na Engenharia de Construção. 2008**”. Disponível em: Acesso em: 12 nov. 2018.

CARVALHAR, F. C. **Determinação experimental da carga de flambagem e da excentricidade acidental de pilares compostos de madeira**. Dissertação de mestrado, Departamento de Estruturas UFMG, 2001.

CLARKE, J. L. (1996). **Structural design of polymer composites: EUROCOMP design code and handbook**, Taylor & Francis, London.

Strongwell Corporation. **“COMPANY PORTFOLIO”**. Produced by Strongwell Corporation. Disponível em: <<http://www.strongwell.com>>. Acesso em 12 de novembro de 2019.

Column Research Committee of Japan (CRCJ). (1971). **Handbook of structural stability**, Corona, Tokyo, Japan.

CORREIA, J. R., BRANCO, F. A., SILVA, N. M. F., CAMOTIM, D., e SILVESTRE, N.(2011). **“First-order, buckling and post-buckling behaviour of GFRP pultruded beams. Part 1: Experimental study.”** Comput. Struct., 89(21), 2052–2064.

CREATIVE PULTRUSIONS, INC. (2019). **“The New and Improved Pultex® Pultrusion Design Manual of Standard and Custom Fiber Reinforced Polymer Structural Profiles”**. Volume 5 – Revision 9. Disponível em: <<https://www.creativepultrusions.com/index.cfm/data/product-literature/pultexc2ae-pultrusion-design-manual1/>>. Acesso em 15 de agosto de 2019.

DA SILVA, Henrique P. **“Comportamento Mecânico de compostos de fibra de vidro/epoxy nano-reforçados.”** 2014. 271 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica). Universidade de Coimbra, Coimbra, 2014.

DAVALOS, Julio F., BARBERO, EVER, J., QIAO, Pizhong, P.E. **“Step-by-Step Engineering Design Equations for Fiber-reinforced Plastic Beams for Transportation Structures.”** Diss. West Virginia Department of Transportation, 1999.

DAVALOS, J. F., SALIM, H. A., QIAO, P., LOPES-ANIDO, R., and BARBERO, E. J. (1996). **“Analysis and design of pultruded FRP shapes under bending.”** Composites Part B, 27(3), 295–305.

DUTHEIL, J. **Verifica delle aste compresse: Principi fondamentali.** Construzioni Metalliche. P. 266-275 (1966)

EULER, L., 1744, E. 65, “**Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti.** Lausanne et Genève: Bousquet, - Leonhardi Euleri Opera Omnia”, series 1, vol. 24.

FAM, A. Z., **Concrete-filled fiber reinforced polymer tubes for axial and flexural structural members**, Ph.D. thesis, The University of Manitoba, Winnipeg, MB, Canada; 2000.

FAM, A; KIM, Y. J.; SON, Je-Kuk. “**A numerical investigation into the response of free end tubular composite poles subjected to axial and lateral loads**”. Department of Civil Engineering Queens University, 2010.

GAY, D. “**Composite materials design and applications**”. Terceira edição. CRC Press Taylor & Francis Group, 2015.

GOSLING, P. D., SARIBIYIK, M. (2003). “**Nonstandard tensile coupon for fiber-reinforced plastics.**” J. Mater. Civ. Eng., 10.1061/(ASCE)0899-1561(2003)15:2(108), 108–117.

GRAY, E. F. (1984). Structural plastics design manual, ASCE, New York. JEONG, S. K., YOON, S. J. (1998). “**Elastic buckling of orthotropic open section compression members with edge stiffeners.**” KSCE J. Civ. Eng., 2(4), 377–386.

IBRAHIM, S.M. “**Performance evaluation of fibre-reinforced polymer poles for transmission lines**”, Ph.D. thesis, The University of Manitoba, Winnipeg, MB, Canada; 2000.

REDDY, J. N., “**Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis**”, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, 2004.

KOLLAR, L. P. (2002). “**Buckling of unidirectionally loaded composite plates**

with one free and one rotationally restrained unloaded edge.” J. Struct. Eng., 10.1061/(ASCE)0733-9445(2002)128:9(1202), 1202–1211.

KOLLAR, L. P. (2003). **“Local buckling of fiber reinforced plastic composite structural members with open and closed cross sections.”** J. Struct. Eng., 10.1061/(ASCE)0733-9445(2003)129:11(1503), 1503–1513.

KROLL, W. D., FISHER, G. P., HEIMERL, G. J. (1943). **“Charts for calculation of the critical stress for local instability of columns with I-, Z-, channel, and rectangular-tube section.”** No. NACA-WR-L-429, National Aeronautics and Space Admin Langley Research Center, Hampton, VA.

KUTZ, M. **“Mechanical Engineers Handbook: Materials and Mechanical Design”**, 3rd ed. Hoboken: John Wiley & Sons (2006). 1350p.

LANE, A., e MOTTRAM, J. T. (2002). **“The influence of modal coupling upon the buckling of concentrically PFRP columns.”** Inst. Mech. Eng. Part L J. Mater. Des. Appl., 216(12), 133–144.

LEÃO, M. ARAGÃO, Moniz. **“Estruturas Metálicas: Dimensionamento segundo a NBR-8800:2008”**. Instituto Militar de Engenharia, 2015.

LEE, D. J. (1978a). **“The local buckling coefficient for orthotropic structural sections.”** Aeronaut. J., 82(575), 313–320.

LEE, D. J. (1978b). **“Some observations on the local instability of orthotropic structural sections.”** Aeronaut. J., 82(811), 110–114.

LEE, D. J., HEWSON, P. J. (1978). **“The use of fiber-reinforced plastics in thin-walled structures.”** Proc., Stability Problems in Engineering Structures and Composites, Applied Science, London, 23–55.

LEISSA, A. W. (1985). **“Buckling of laminated composite plates and**

shell panels.” AFWAL-TR-85-3069, Air Force Wright Aeronautical Laboratories, Wright-Patterson AFB, OH.

LEKHNITSKII, S. G. (1968). **Anisotropic plates**, Gordon and Breach Science Publishers, New York.

LEVY NETO, F. L.; PARDINI, L.C., **Compostos Estruturais – Ciência e Tecnologia**. Editora Edgard Blucher LTDA, 2006.

LI, Z., SCHAFER, B. W. (2010). **“Buckling analysis of cold-formed steel members with general boundary conditions using CUFSM: Conventional and constrained finite strip methods.”** Proc., 20th Int. Specialty Conf. on Cold-Formed Steel Structures, St. Louis, MO.

LOPEZ-ANIDO, R. A.; NAIK, T. R. (ed). **Emerging materials for civil infrastructure**. 1. ed. Reston: ASCE, 2000.

LUNDQUIST, E. E. (1938). **Generalized analysis of experimental observations in problems of elastic stability**, Vol. 658, National Advisory Committee for Aeronautics.

LUNDQUIST, E. E., STOWELL, E. Z., SCHUETTE, E. H. (1943). **Principles of moment distribution applied to stability of structures composed of bars or plates**, National Advisory Committee for Aeronautics.

MAKKAPATI, SATHEESH. **Compressive Strength of Pultruded Structural Shapes**. 241 p. Dissertação (Mestrado) – West Virginia University, Morgantown, 1994.

MAQUOI, R., RONDAL, J. **Mise en équation des nouvelles courbes européens de flambement**. Construct Métalli, 1, 17-30. (1978)

MCCARTHY, M. J., BANK, L. C. (2010). **“Sensitivity studies in local flange buckling equations for pultruded beams and columns.”** Proc., 5th Int. Conf. on FRP Composites in Civil Engineering, Beijing, China.

MENDONÇA, P. DE TARSO R., **“Materiais Compostos e Estruturas Sanduíche: projeto e análise”**, São Paulo: Manole, 2005.

MOSALLAM, A. S. **Polymer composites: architectural and civil construction materials for the 21st century**. Anais da Conferência Internacional de Compostos na Arquitetura e Construção Civil – Arquimacom 2002, São Paulo, 2002.

MOTTRAM, J. T. **Determination of critical load for flange buckling in concentrically loaded pultruded columns**. Composites, Part B, 35, 35-47. (2004)

MOTTRAM, J. T., BROWN, N. D., ANDERSON, D. (2003). **“Physical testing for concentrically loaded columns of pultruded glass fibre reinforced plastic profile.”** Proc, ICE Struct. Build., 156(2), 205–219.

NAGAHAMA, KOJI J. **Análise de Estabilidade Local em Perfis de Seção Aberta em Aço e em Resina Reforçada com Fibra de Vidro**. 160 p. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002.

National Research Council of Italy (CNR). (2008). **“Guide for the design and construction of structures made of thin FRP pultruded elements.”** CNR-DT 205/2007, Rome, Italy.

PANDEY, M. D., SHERBOURNE, A. N. **“Flexural-torsional stability of thin-walled composite I-section beams”**. Department of Civil Engineering, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada (1995).

PEREIRA, J. C. **Curso de Projeto Estrutural com Materiais Compostos**. [Florianópolis]: GRANTE – Universidade Federal de Santa Catarina, [2005]. Apostila.

PFEIL, W., PFEIL M. **“Estruturas de Aço – Dimensionamento Prático”**. 8^o ed. Rio de Janeiro, 2009.

QIAO, P., DAVALOS, J. F., WANG, J. (2001). **“Local buckling of composite FRP shapes by discrete plate analysis.”** J. Struct. Eng., 10.1061/(ASCE) 0733-9445(2001)127:3(245), 245–255.

QIAO, P., ZOU, G. (2003). **“Local buckling of composite fiber-reinforced plastic wide-flange sections.”** J. Struct. Eng., 10.1061/(ASCE)0733-9445(2003)129:1(125), 125–129.

MINDLIN, R. D., **“Influence of the rotatory inertial and shear on flexural motions of isotropic elastic plates”**, 18(2) Trans ASME. 73, A3, 1951.

ROSEN, B. W. (1972). **“A simple procedure for experimental determination of the longitudinal shear modulus of unidirectional composites.”** J. Compos. Mater., 6(4), 552–554.

SCHULZ, H. G. (1963). **“Zum Stabilitätsproblem elastisch eingespannter orthotroper Platten.”** Der Stahlbau, 32(1), 22–25 (in German).

SHACKELFORD, J. F. **“Ciência dos materiais”**. Sexta edição. Pearson Prentice Hall, 2008.

SILVESTRE, N., CAMOTIM, D. (2003). **“GBT buckling analysis of pultruded FRP lipped channel members.”** Comput. Struct., 81(18), 1889–1904.

SONTI, S. S., BARBERO, E. J. (1996). **“Material characterization of pultruded laminates and shapes.”** J. Reinf. Plast. Compos., 15(7), 701–717.

SOUTHWELL, R. V. (1932). **“On the analysis of experimental observations in problems of elastic stability.”** Proc. R. Soc. Lond. A, 135(828), 601–616.

SPENCER, H. H., WALKER, A. C. (1975). **“Critique of Southwell plots with proposals for alternative methods.”** Exp. Mech., 15(8), 303–310.

TAVARES, João. M. R. S. **Introdução ao Método dos Elementos Finitos.** FEUP – Faculdade de Engenharia da Universidade de Porto, Porto, 1998.

TIMOSHENKO, S. P., Gere, J. M. (1961). **Theory of elastic stability,** McGraw-Hill, New York.

TENNYSON, R. C., CHAN, K. C. **“Buckling of imperfect sandwich cylinders under axial compression”.** University of Toronto, Institute for Aerospace Studies, Toronto, Ontario, Canada, 1990.

TOMBLIN, J., BARBERO, E. (1994). **“Local buckling experiments on FRP columns.”** Thin Walled Struct., 18(2), 97–116.

TORRES, D. A. (2004). **“Simulação numérica de estruturas reticuladas de construção civil, formadas por materiais compostos”.** Universidade Federal de Uberlândia, 2004.

TURNER, M. R., CLOUGH, R., MARTIN, H., TOPP, L. **“Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures”**, J. Aero. Sci., 23, no. 9, pp. 805-823, (1956).

TURVEY, G. J., WITTRICK, W. H. (1973). **“The influence of orthotropy on the stability of some multi-plate structures in compression.”** Aeronaut. Q., 24, 1–8.

TURVEY, G. J., ZHANG, Y. (2004). **“Local buckling of axially compressed, pultruded GRP, WF-section, short columns—Comparison of experimental and FE analysis buckling loads.”** Appl. Mech. Mater., 1, 87–92.

TURVEY, G. J., ZHANG, Y. (2006). **“A computational and experimental analysis of the buckling, postbuckling and initial failure of pultruded**

GRP columns.” Comput. Struct., 84(22–23), 1527–1537.

VANEVENHOVEN, L. M., SHIELD, C. K., BANK, L. C. (2010). “**LRFD factors for pultruded wide-flange columns.**” J. Struct. Eng., 10.1061/ (ASCE)ST.1943-541X.0000126, 554–564.

WEAVER,A. **Composites: world markets and opportunities.** Materials Today , Elsevier, (1999)

WEAVER, P. M; DRIESEN. J. R; ROBERTS. P. **Anisotropic effects in the compression buckling of laminated composite cylindrical shells.** Department of Aerospace Engineering, University of Bristol, 2001.

YOON, S. J. (1993). “**Local buckling of pultruded I-shape columns.**” Ph.D. thesis, Georgia Institute of Technology, Atlanta.

ZIEMIAN, R. D., ed. (2010). **Guide to stability design criteria for metal structures**, 6th Ed., John Wiley & Sons, New York.

ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. “**The Finite Element Method**”, 6ª Edição, vol. 1: “**Basic Formulation and Linear Problems**”, MacGraw-Hill, 1989.