Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Ponta Grossa

CADERNO PEDAGÓGICO PARA APLICAÇÃO DA OFICINA CONHECENDO A GEOMETRIA FRACTAL

MARISTEL DO NASCIMENTO

ORIENTADORA: PROFª. DRª. SANI DE CARVALHO RUTZ DA SILVA

CO-ORIENTADORA: PROFª. DRª. NILCÉIA APARECIDA MACIEL PINHEIRO

PONTA GROSSA
2012

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Figura 1 - MandelShadow
Fonte: Fractarte (2004)

Imagens como esta, e problemas envolvendo a Geometria Fractal começam a aparecer em livros, revistas, provas de vestibulares e avaliações institucionais. Neste sentido nas discussões e reflexões entre os professores da rede estadual de ensino do Paraná, durante o processo de elaboração das Diretrizes Curriculares Estaduais de Matemática, optou-se por incluir neste documento, os conteúdos de Geometria Fractal, lançando assim aos professores um desafio, incluir em suas propostas pedagógica o ensino de Geometria Fractal.

Assim, este caderno tem como objetivo apresentar além de um referencial teórico sobre esta geometria, também elencar atividades visando o desenvolvimento deste tema em sala de aula.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Representar objetos irregulares da natureza foi um desafio para os matemáticos das diferentes épocas. A geometria euclidiana por mais de dois mil anos foi considerada a única forma de representar formas e espaços. No entanto no final do século XVIII, surgem discussões de outras geometrias e aproximadamente no final na década de 70, surge a Geometria Fractal.

2.1 A GEOMETRIA FRACTAL

Ao ser lançado ao ar, a fumaça de um cigarro, qual é a forma que ela toma? Qual é a previsão do tempo para hoje? O imprevisível está em nosso cotidiano. É impossível para o homem prever o comportamento desses fenômenos, pois envolvem muitas variáveis. Fenômenos como estes, que não seguem um padrão e nem têm uma regularidade constituem um sistema caótico. (JANOS, 2008).

A Geometria Fractal está ligada a esta ciência chamada Caos, tendo em vista que na natureza coexistem a ordem (o determinismo) e o Caos (a imprevisibilidade), “assim a estrutura fragmentada do fractal fornece certa ordem ao Caos e busca padrões dentro de um sistema por vezes aparentemente aleatório” (BARBOSA, 2005, p.10).

O estudo dos fractais possibilita a percepção de infinito. James Gleick, citado por Nunes (2006) afirma: “Para os olhos da mente, um fractal é a maneira de entrever o infinito”.

Segundo Capra (1996), o matemático Frances Benoit Mandelbrot a partir da década de 50 iniciou seus estudos da geometria de fenômenos naturais irregulares e compreendeu que estas formas geométricas apresentavam características comuns bastante notáveis.

Matemáticos como George Cantor, Giusepe Peano, Helge Von Koch e Waclaw Sierpinski anterior ao trabalho de Mandelbrot, já haviam criados figuras que não atendiam às definições da Geometria Euclidiana, consideravam estranhas e indefinidas, essas figuras receberam o nome de “monstros matemáticos”. Para Janos (2008) esta designação se deu pelo fato que, diferente do que estamos acostumados, estas figuras nunca são realmente retas ou curvas, são objetos sem forma definida.

George Cantor (1845-1918), matemático descendente de portugueses, nascido na Rússia, adotou nacionalidade alemã, foi professor da Universidade de Hale, dedicou muito de seus estudos em pesquisas relativas à fundamentação da matemática, em 1883 publicou um trabalho no qual apresentava um conjunto que hoje conhecemos por “Conjunto de Cantor” ou “Poeira de Cantor” e este talvez tenha sido o primeiro objeto reconhecido como fractal, na época, considerado um dos “monstros matemáticos”. (BARBOSA, 2005). Para Janos (2008, p.1), “Este conjunto representa também um modelo de imaginação e abstração da Matemática”. Então o que na verdade caracteriza o Conjunto de Cantor, “é o conjunto de pontos que permanecem após as infinitas fases” (BARBOSA, 2005, p. 26). Para construção geométrica do Conjunto de Cantor: (BARBOSA, 2005, p. 25), inicialmente considera-se um segmento de reta, na sequência divide-se este segmento em três partes de iguais, eliminando a parte central, Essa operação, repete-se sucessivamente e indefinidamente em cada segmento restante.

A Figura 2 representa o “Conjunto de Cantor”. Na figura a espessura do segmento foi aumentada para facilitar a visualização.

Figura 2 - Conjunto de Cantor
Fonte: Fractovia

Barbosa (2005) apresenta também como precursor dos trabalhos de Mandelbrot em relação à Geometria Fractal, o matemático, Giusepe Peano, italiano, nasceu em Cuneo (1858) e faleceu em Turim em (1932). Foi professor da Academia Militar de Turim, Peano é o responsável pela axiomatização para números inteiros (positivos). Seus trabalhos, utilizando notações e rigor da lógica, surpreenderam os matemáticos contemporâneos. Segundo Barbosa (2005), em 1890, tratando do aprofundamento das noções de continuidade e dimensão, Peano publica sua famosa curva, também considerada “monstro matemático”. Na construção da “Curva de Peano", iniciamos com um segmento de reta; substituímos por uma curva de nove segmentos, conforme indicado na Figura 3, portanto em escala 1/3. Na sequência substituímos cada segmento anterior pela curva de nove segmentos, e assim sucessivamente até cobrir totalmente uma superfície quadrangular.

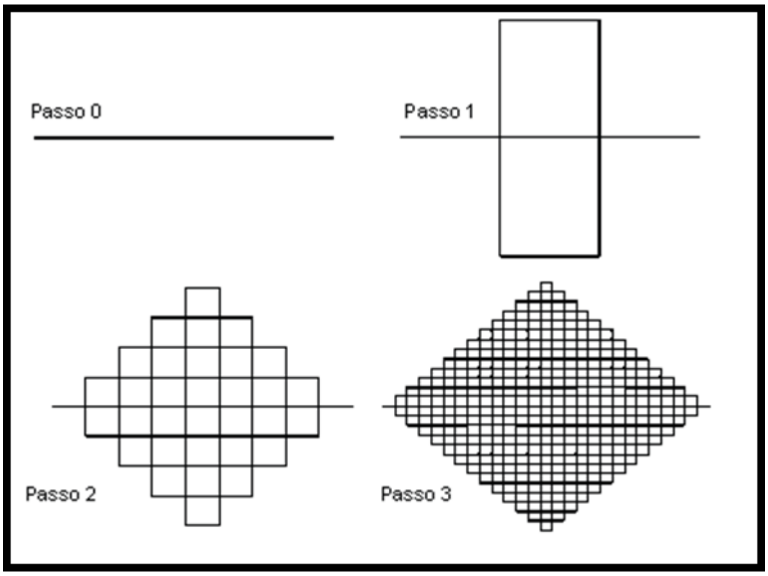


Figura 3 - Curva de Peano
Fonte: Natcomp (2012)

Outro matemático cujos trabalhos também tiveram uma grande influência no desenvolvimento da Geometria Fractal, segundo Barbosa (2005) foi o matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969), professor em Lvov e Wariaw, na década de 1920-1930, se destacou em seus estudos, a ponto de uma das crateras lunares receber o seu nome. Em 1916, apresentou um dos famosos "monstros" que conhecemos por Triângulo de Sierpinski, sua construção parte inicialmente de um triângulo equilátero; marcar os segmentos dos pontos médios formando quatro triângulos equiláteros; eliminar (remover) o central, o que pode ser codificado colorindo com uma única cor; repetir em cada um dos triângulos não eliminados a segunda e a terceira construção, sucessivamente. A Figura 4, a seguir, destaca o Triângulo de Sierpinski nas seis primeiras interações.

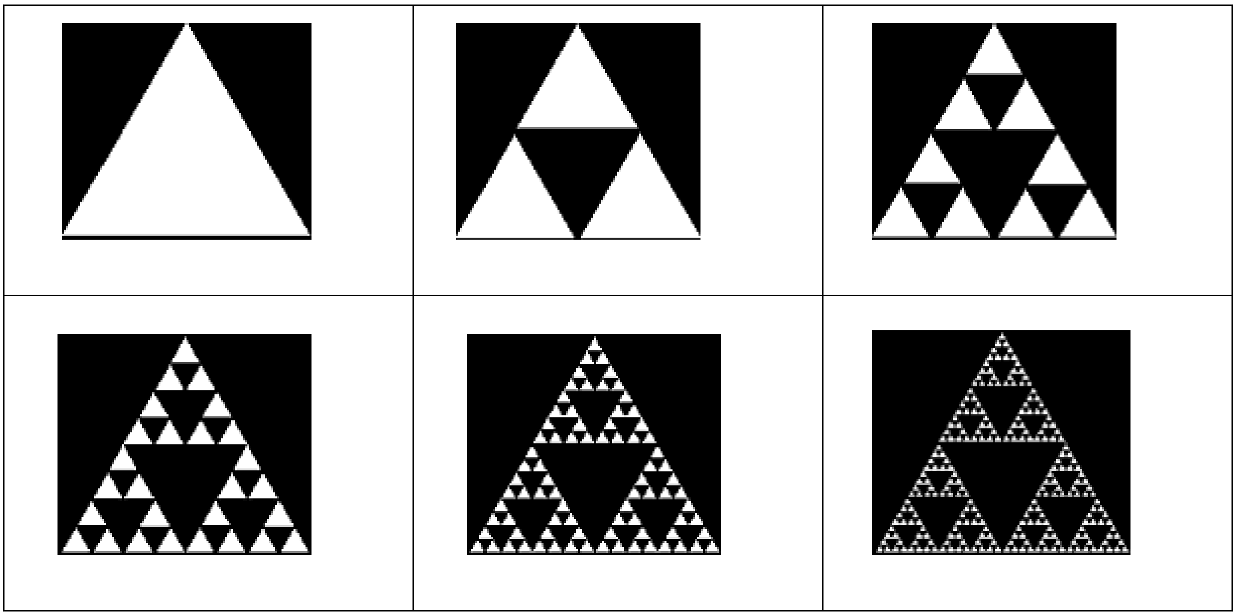


Figura 4 - Triângulo de Sierpinski
Fonte: Fractovia (2012)

Capra (1996, p.119) apresenta uma das formas fractais mais simples geradas pela iteração, isto é, a repetição incessante de certa operação geométrica, é a chamada de “Curva de Koch” ou “Curva do Floco de Neve”. Helge Von Koch, matemático polonês, em 1904 e 1906 introduziu esta curva que recebe seu nome. Na curva “a operação geométrica consiste em dividir uma linha em três partes iguais e substituir a seção central por dois lados de um triângulo equilátero, repetindo muitas vezes, e em escalas cada vez menores, é criada uma Curva de Floco de Neve denteada”. (CAPRA, 1996, p. 120). Na Figura 5 observa-se o fractal Curva de Koch e o aspecto da curva após diversas iterações.

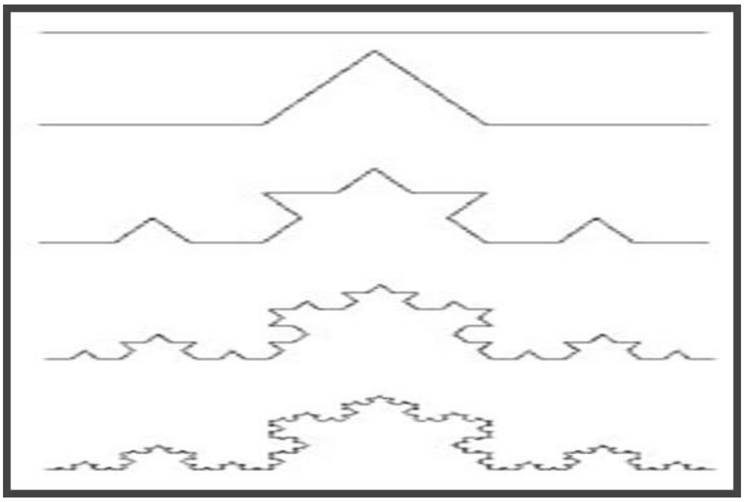


Figura 5 - Curva de Koch
Fonte: Com Ciência (2008)

Influenciado pelos trabalhos destes matemáticos, em 1970 Benoit Mandelbrot publicou o livro “The Fractal Geometry of Nature” no qual introduz o termo “fractal”, que segundo Barbosa (2005), tem sua origem no latim, do adjetivo *fractus*, cujo verbo correspondente fragere, significa quebrar: criar fragmentos irregulares, fragmentar, assim utilizou-se o termo Fractal para denominar as figuras que representam aspectos da natureza, que na geometria tradicional não era possível representar, o fractal Curva de Koch representa uma linha costeira.

> A maior parte da natureza é muito, muito complicada. Como se poderia descrever uma nuvem? Uma nuvem não é uma esfera... É como uma bola, porém muito irregular. Uma montanha? Uma montanha não é um cone [...]. Se você falar de nuvens, de montanhas, de rios de relâmpagos, a linguagem geométrica aprendida na escola é inadequada (MANDELBROT apud CAPRA, 1996, p. 118).

Para representar formas semelhantes às existentes na natureza, Mandelbrot criou a geometria fractal. O termo fractal foi criado para designar um objeto geométrico que nunca perde a sua estrutura, qualquer que seja à distância de visão.

Vale observar que nem tudo na natureza é Fractal, como salienta Alves (2007, p. 141), “uma gota de água ou uma porção de água parada não são fractais, mas a ondas do oceano e as correntes e percurso dos rios são, muitas vezes fractais”.

Benoit Mandelbrot, segundo Barbosa (2005), é considerado o “Pai da Geometria Fractal” e hoje se entende por Geometria Fractal um ramo da Matemática que estuda os Fractais, considerada uma Geometria não Euclidiana, pois nenhum dos cinco postulados de Euclides é satisfeito.

Utilizando um sistema de duas equações Mandelbrot em 1970, criou o seu mais famoso Fractal, dando origem a essa recente geometria chamada Geometria Fractal. O Fractal de Mandelbrot foi reconhecido como o mais complexo objeto da matemática, “em seu interior, infinitas regiões podem ser observadas” (JANOS, 2008). A Figura 6 destaca este fractal em diferentes escalas.

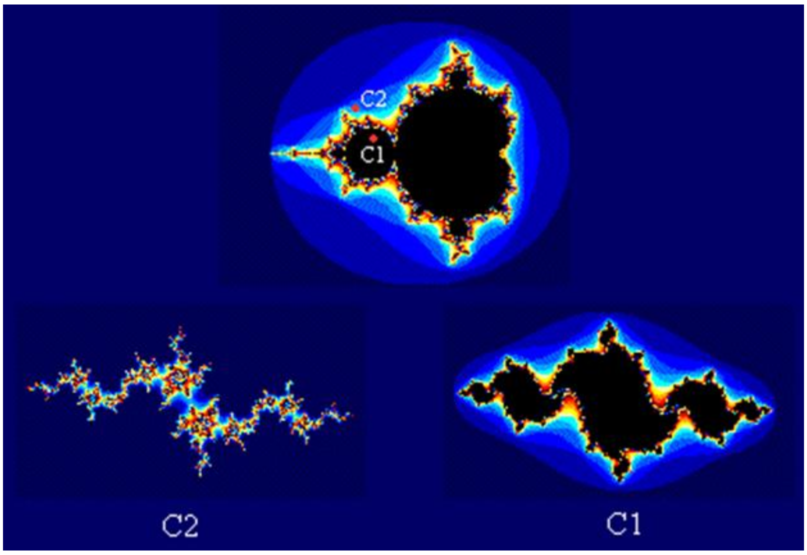


Figura 6 - Fractais de Mandelbrot
Fonte: Ultra Fractal (2012)

Segundo Capra (1996) o conjunto de Mandelbrot é o único, embora as regras (fórmulas) para a sua construção sejam simples, a variedade e a complexidade que ela revela são inacreditáveis. Para Janos (2008) “o Fractal de Mandelbrot é, sem dúvida, um dos objetos mais intricados que conhecemos”. A função interativa que gera o Fractal de Mandelbrot usa um sistema de duas equações:

$$x_{n-1} = x_n^2 - y_n^2 + a$$

$$y_{n-1} = 2x_n y_n + b$$

Para iniciar, Janos (2008), definimos um ponto inicial (x_0, y_0) de onde partir e cada ponto é obtido do anterior. Os valores de a e b são os únicos ajustes que podem ser feitos e determinam a que distância e em que direção será colocado o próximo ponto.

2.1.1 Características dos Fractais

Um fractal é definido por três características básicas, a auto-similaridade, a complexidade infinita (iteração) e a dimensão fracionária.

Auto-similaridade

Segundo Carvalho (2005) auto-similaridade ou auto-semelhança é a mais elementar e marcante das características dos fractais, significa que cada parte em escala menor é exatamente igual ou semelhante à parte inicial, isto é, cada parte ampliada da imagem será igual a da inicial. “Auto-similaridade é que seus padrões característicos são repetidamente encontrados em escala descendente, de modo que suas partes, em escalas menores, em qualquer escala, são, na forma, semelhantes ao todo” (CAPRA, 1996, p. 118). Existem dois tipos de auto-semelhança: exata e a aproximada ou estatística.

Ainda segundo (CAPRA, 1996) a auto-similaridade exata significa que, mesmo ampliado várias vezes, cada parte é idêntica à original, não importando quantas vezes seja ampliado.

A auto-similaridade estatística significa que o objeto ampliado várias vezes não será igual ao inicial, será apenas semelhante. O fractal possui medidas numéricas ou estatísticas que são preservadas em diferentes escalas. Para Janos (2008, p. 35):

> O que existe nas figuras da natureza é uma auto-semelhança aproximada em diferentes escalas. Essa auto-semelhança aproximada é chamada de auto-semelhança estatística, porque, em diferentes escalas, essa auto-semelhança existe em média. Nos fractais matemáticos, as partes são cópias exatas do todo, mas nos fractais naturais as partes são apenas reminiscências do todo.

São exemplos de auto-semelhança exata: Curva de Koch, triângulo de Sierpinski, enquanto que os fractais naturais, couve-flor, gengibre, nuvens tem auto-semelhança estatística, as partes são semelhantes em média ao todo.

Complexidade Infinita ou Iteração

Esta característica se relaciona à existência de um processo recursivo, o que significa que uma determinada operação repete-se infinitamente, de acordo com esta propriedade, cada fractal em sua construção dispõe de um número infinito de procedimentos, resultando em uma estrutura complexa. “A técnica principal para se construir um fractal é a iteração – isto é, a repetição incessante de certa operação geométrica”. (CAPRA, 1996, p. 119).

O processo de repetição com iterações infinitas realmente se efetivou com o desenvolvimento de *softwares* matemáticos, pois manualmente a divisão em escalas menores é limitada.

Com a ajuda de computadores, as iterações geométricas simples podem ser aplicadas milhares de vezes em diferentes escalas, para produzir os assim chamados forjamentos (*forgeries*) fractais–modelos, gerados por computador, de plantas, árvores, montanhas, linhas litorâneas e tudo aquilo que manifeste uma semelhança espantosa com formas reais encontrada na natureza (CAPRA, 1996, p. 120).

A Geometria Fractal teve grande destaque após o desenvolvimento e aprimoramento da informática e tem revelado várias aplicações, como nos exemplos, citado por (TRATCH, 2008), na Biologia, auxilia a compreensão do crescimento das plantas, na Medicina, possibilitou uma visão anatômica do corpo internamente a estruturação de alguns órgãos e no diagnóstico de alguns tipos de câncer, na Engenharia eletrônica possibilitou a análise de ruídos nas comunicações telefônicas, segundo Barbosa (2005) Mandelbrot na IBM, deparou-se com problemas de ruídos nas linhas telefônicas, a aleatoriedade e irregularidade dos ruídos afastavam os engenheiros da busca de soluções. Empregando o trabalho de Cantor resolveu o problema, pensando nos erros de transmissão como um desses conjuntos que alguns ruídos não podiam ser eliminados. Também na Arte os Fractais estão presentes, pois as belas figuras geradas têm inspirados artistas a reproduzi-las.

A Dimensão Fractal

A dimensão da Geometria Fractal, diferente da dimensão da Geometria Euclidiana, é um número fracionário, para Barbosa (2005) “É um novo tipo de dimensão denominada dimensão fractal, associada à aspereza, espessura, densidade, textura etc”.

Na Geometria Euclidiana, segundo Tratch (2008), “a dimensão de um objeto está relacionado ao espaço, no qual o objeto está inserido e indica como o objeto é medido” sabemos que, um ponto tem dimensão zero, não tem nem largura nem comprimento; uma reta tem dimensão um, uma figura plana tem dimensão dois e o espaço que vivemos tem dimensão três.

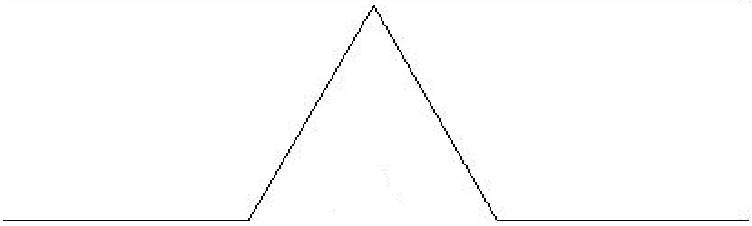
A dimensão fractal, segundo a mesma autora, “é expressa geralmente por um valor não inteiro e está relacionada com sua estrutura, seu comportamento e seu grau de irregularidade”. Mas como medir o litoral da Inglaterra? Como caracterizar o “denteamento” do litoral?

> Madelbrot acentuou essa característica das formas fractais, mostrando que desde que o comprimento medido pode ser indefinidamente estendido se nos dirigimos para escalas cada vez menores, não há uma resposta para essa pergunta. No entanto, é possível definir um número entre 1 e 2 que caracterize o “denteamento” do litoral... Uma linha denteada em um plano preenche mais espaço do que uma linha reta, que tem dimensão 1, porém menos do que o plano, que tem dimensão 2. (CAPRA, 1996, p. 118).

Para o cálculo da dimensão fractal de auto-semelhança exata, utiliza-se a expressão a seguir: $D = \dfrac{\log m}{\log n}$

Nesta expressão “m”, corresponde ao número de segmentos semelhantes e “n” representa o fator de escala, isto é, a razão de semelhança.

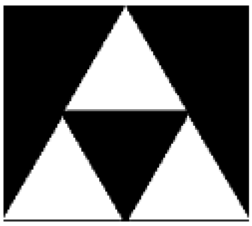
No quadro a seguir, para exemplo, utilizando essa expressão para encontrar a dimensão do fractal geométrico Curva de Koch.

 Curva de Koch (1º Nível) onde, m = 4 e n = 3	$D = \dfrac{\log 4}{\log 3}$ Aproximadamente $D = \dfrac{0{,}60206}{0{,}47712}$ D = 1.262

Quadro 1 - Cálculo da dimensão fractal da Curva de Koch
Fonte: Autoria própria

Este conceito de dimensão fractal, segundo Capra (1996), inicialmente foi uma ideia matemática abstrata, no entanto, tornou-se uma poderosa ferramenta para as analises da complexidade das formas fractais. Quanto mais denteados forem os objetos naturais, contornos de um relâmpago ou nuvens mais altas serão suas dimensões fractais, fracionárias em um intervalo de zero a três. Isso significa, por exemplo, que a Curva de Koch, dimensão 1.262, está situada entre o espaço unidimensional (maior que uma linha reta) e o bidimensional (menor que uma figura plana).

Outro exemplo: Cálculo da dimensão Fractal do Triângulo de Sierpinski

 Triângulo de Sierpinski (2º Nível) onde, m =3 e n = 2	$D = \dfrac{\log m}{\log n} \quad \Rightarrow \quad D = \dfrac{\log 3}{\log 2}$ Aproximadamente $D = \dfrac{0{,}47}{0{,}30}$ D = 1,585

Quadro 2 - Cálculo da dimensão fractal do Triângulo de Sierpinski
Fonte: Autoria própria

No cálculo da dimensão do triângulo de Sierpinski, a dimensão é 1,585 maior que 1 (dimensão de um segmento de reta) menor que 2 (dimensão de uma figura plana).

Janos (2008, p. 74) dá um exemplo de um objeto na dimensão entre os espaços bidimensional e tridimensional: “pegue uma folha de papel 5x10cm e amasse-a até formar uma bola de papel. Esta bola de papel tem dimensão entre 2 e 3. A tentativa de construir objetos de 3 dimensões a partir de objetos de 2 dimensões produz estruturas fractais quebradiças com espaços vazios irregulares como a bola de papel”. Em uma curva quando mais “denteada” for mais próxima de dois será a sua dimensão, e quanto menos amassada for a “bola de papel” mais próxima de dois será a sua dimensão.

2.1.2 Classificação dos Fractais

Os fractais, segundo Menezes (2003), apresentam duas categorias: os geométricos (determinísticos) e os não não-lineares (Aleatórios e da Natureza).

Geometria Fractal da natureza são elementos da natureza que possuem a característica da auto-similaridade, observada por Madelbrot, isto é cada parte, em escala menor é semelhante ao todo. São considerados fractais da natureza; nuvens, algumas rochas, couve-flor, árvores e o brócolis (Figura 7).

Figura 7 - Fractal da natureza – brócolis
Fonte: Com Ciência (2008)

A Geometria Fractal geométrica se caracteriza pelos modelos fractais construídos a partir de figuras geométricas, repetem padrões continuamente são exemplos: Curva de Koch, triângulo de Sierpinski. Exemplo: a Figura 8 o Tapete de Sierpinski.

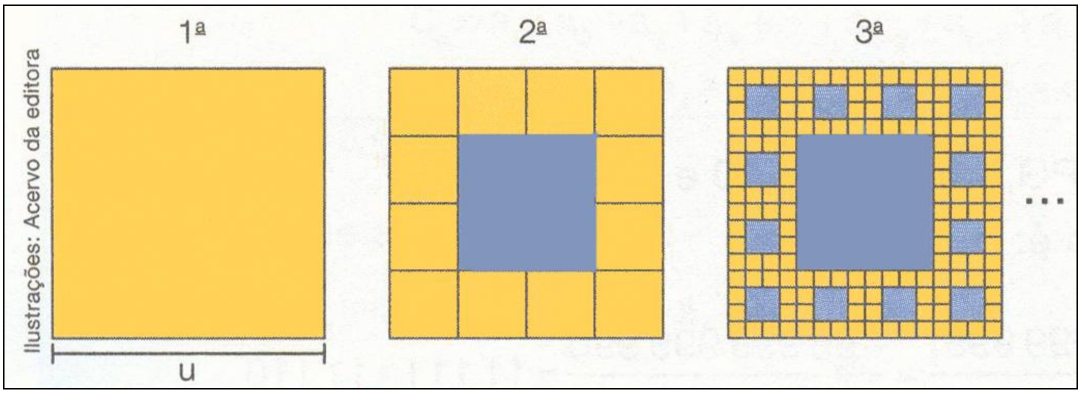


Figura 8 - Tapete de Sierpinki
Fonte: Souza (2010)

Os Fractais Aleatórios são os fractais construídos a partir da geometria dinâmica, na qual as iterações podem ser repetidas uma infinidade de vezes, resultando em belíssimas figuras. "São construídos por meio de funções iterativas complexas, geralmente com o auxílio de programas computacionais específicos. São simétricos na escala, mas a transformação não é previsível". (TRATCH, 2008). São modelos de fractais aleatórios (Figura 9).

Figura 9 - Fractal Aleatório
Fonte: Ultra Fractal (2012)

3 ESTRUTURA DAS AULAS E AVALIAÇÃO

A oficina “Conhecendo a Geometria Fractal” foi elaborada para ser desenvolvida na disciplina de Matemática, podendo ser aplicada tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio. É composta de duas partes, sendo a primeira em sala de aula, com discussões sobre o tema e construções de fractais geométricos, a segunda utilizando um *software* livre no laboratório de informática da escola, para visualização e exploração de fractais aleatórios.

1ª Parte:

- Introdução da Geometria Fractal: construção de um quebra cabeça de uma figura fractal.
- Apresentação de figuras do nosso cotidiano para os alunos representarem utilizando figuras geométricas.
- Apresentação no projetor multimídia de alguns fractais, destacando suas características.
- Construções e explorações de fractais geométricos: Curva e Floco de Neve de Koch, Triângulo e Tapete de Sierpinski, Construção de um cartão fractal.

2ª Parte:

- Explorando fractais aleatórios: Utilizando um software livre, os alunos visualizaram e exploraram fractais aleatórios.

A avaliação da oficina precisa acontecer em todos os momentos do desenvolvimento das atividades, “a avaliação deve acontecer ao longo do processo ensino aprendizagem” (Paraná, 2008, p. 69), nesse sentido, é necessário que o professor utilize a observação direta da participação dos alunos. Também como avaliação da oficina pode-se realizar uma exposição dos fractais construídos para os demais alunos da escola.

4 ROTEIRO DA OFICINA

CONHECENDO A GEOMETRIA FRACTAL

Professor (a)!

A seguir estão sistematizadas as atividades desenvolvidas na oficina. Elas exploram os conceitos básicos da Geometria Fractal. Cada atividade apresentará: objetivos, conteúdos trabalhados, materiais utilizados, bem como informações complementares. Essas atividades servem como sugestão e poderão ser adaptadas e ampliadas conforme a série que seja aplicada (Ensino Fundamental ou Médio).

1ª Etapa:

Esta primeira etapa da oficina, realizada em sala de aula, tem por objetivo introduzir o conceito de Geometria Fractal, tendo em vista que ela foi desenvolvida em horário normal de aula, dividimos a primeira etapa da seguinte maneira: Primeiro encontro: Duas horas/aulas as atividades 1, 2, 3, 4 e 5; Segundo encontro: duas horas/aulas atividades 6, 7 e 8; Terceiro encontro: duas horas/aulas atividades no laboratório de informática; Quarto encontro: Duas horas/aulas atividade avaliativa – exposição de Fractais.

ATIVIDADE 1 - Introduzindo Geometria Fractal

Objetivos:

- Despertar o interesse do aluno para o tema;

- Desenvolver o raciocínio lógico;

Forma de realização: atividade em grupo (quatro alunos por grupo)

Materiais utilizados: Um quebra cabeça de um fractal para cada equipe.

Desenvolvimento da atividade: Distribuir um quebra cabeça de fractal para cada equipe e solicitar que os alunos construam o quebra cabeça e observem a figura formada.

Professor (a)!

Para construir o quebra cabeça, imprimir figuras de diferentes fractais, colar em folhas de cartolinas ou papel cartão, para dar firmeza, fazer recortes nas figuras. (fiz recortes utilizando diferentes figuras geométricas planas)

Após concluírem esta atividade solicitar que oralmente os alunos respondam:

- Quem conhece estas figuras?

- Qual a relação destas figuras com a matemática?

Promover uma discussão na sala fazendo comentários sobre os fractais e sua relação com a matemática.

ATIVIDADE 2 - Introduzindo a Geometria Fractal

Objetivos:

- Despertar o interesse do aluno para o tema;

- Desenvolver no aluno as primeiras noções da Geometria Fractal;

Forma de realização: atividade em grupo (quatro alunos por grupo)

Materiais utilizados: Figuras de objetos, naturais ou construídos.

Desenvolvimento da atividade: Apresentar diferentes figuras da natureza ou construída pelo homem e solicitar aos alunos que pensem em figuras geométricas que possam representá-las.

Professor (a)!

As figuras podem ser apresentadas no multimídia, ou mesmo de recortes de revistas. É importante que as figuras levem a discussões da sua representação, tendo em vista que o objetivo é observar objetos que não podemos representar utilizando a Geometria Euclidiana.

Figuras apresentadas: Tronco de uma árvore, sol, uma casa, montanhas, nuvens, raio, couve flor, brócolis e concha de um molusco. O enunciado da atividade:

Observe as figuras abaixo e escolha formas geométricas que possam representá-las:

Figura 10 - Tronco de árvore

Figura 11 - Sol

Figura 12 - Montanha

Figura 13 - Raio

Figura 14 - Nuvens

Figura 15 - Casa

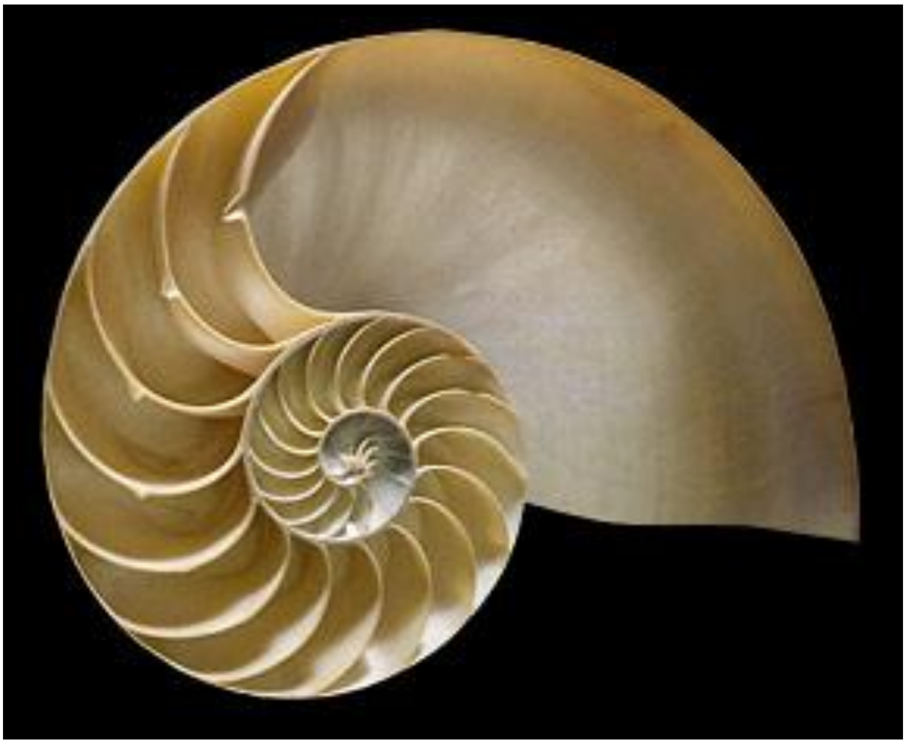


Figura 16 - Nautilus

Figura 17 - Brócolis

ATIVIDADE 3 – A Geometria Fractal teoria

Objetivos:

- Discutir o surgimento da Geometria Fractal;

- Reconhecer as características dos fractais.

Forma de realização: atividade em grupo (quatro alunos por grupo)

Materiais utilizados: Apresentação em Power Point, vídeos sobre fractais.

Desenvolvimento da atividade: Apresentação e explicação em Power Point, o que é fractal e suas características, história do surgimento da Geometria Fractal.

Professor (a)!

A apresentação pode ser elaborada utilizando a fundamentação apresentada neste caderno.

ATIVIDADE 4 – Fractal Curva de Koch

Objetivos:

- Construir o fractal Curva de Koch;
- Reconhecer as características do fractal;
- Rever construções geométricas;
- Rever conceitos de segmento de reta, triângulo equilátero, medida de comprimento.

Forma de realização: atividade individual para a construção do fractal e em grupo para as discussões.

Materiais utilizados: papel A4, régua, compasso, lápis colorido.

Desenvolvimento da atividade:

Construção da Curva de Koch. (adaptada de Barbosa, 2005)

Etapas da construção:

1º. Em uma folha de papel, desenhe um segmento de reta AB, 27 cm;

2º. Divida o segmento AB em três partes iguais, de mesma medida;

3º. Construa um triângulo equilátero, utilizando a parte central como base e em seguida, apague a base;

4º. Nos quatros segmentos obtidos, realizar o mesmo procedimento dos itens 2 e 3, sucessivamente, (iteração).

Professor (a)!

Para esta atividade é necessário que as etapas sejam disponibilizadas aos alunos em forma de apresentação e que durante a construção, se houver necessidade, retomar com os alunos medidas de um segmento e a construção de triângulo equilátero.

Após a construção explorar o fractal construído:

Questões para discussões: Solicitar que os alunos relatem por escrito suas observações.

- Por que a Curva de Koch é considerada um fractal;
- Considere o segmento inicial como Nível zero, e a cada iteração realizada, um nível seguinte, qual o comprimento da curva no 3º nível? Construa uma tabela, identificando o nível e o respectivo comprimento.
- O que acontece em cada nível com o comprimento da curva?

Se houver necessidade o professor poderá auxiliar os alunos na elaboração da tabela.

A tabela 1, modelo para exploração e discussão do comprimento da Curva de Koch, em cada nível.

Tabela 1 - Sistematização do comprimento da Curva de Koch

NÍVEL	QUANTIDADE DE SEGMENTOS	MEDIDA DE CADA SEGMENTO	COMPRIMENTO TOTAL
0			
1			
2			
3			
n			

Fonte: Autoria própria

ATIVIDADE 5 – Fractal Floco de Neve de Koch

Objetivos:

- Construir o fractal Floco de Neve de Koch;
- Reconhecer as características do fractal;
- Rever construções geométricas;
- Rever conceitos de triângulo equilátero, Perímetro e área de triângulos.

Forma de realização: atividade individual para a construção e em grupo para as discussões.

Materiais utilizados: papel A4, régua, compasso, lápis colorido.

Desenvolvimento da atividade:

Construção do Floco de Neve de Koch (adaptado de BARBOSA, 2005)

Etapas da construção:

1ª. Construir um triângulo equilátero de 9 cm de lado.

2ª. Em cada lado do triângulo, realizar a mesma operação da construção da curva de Koch.

3ª. Realizar essa operação sucessivamente.

Professor (a)!

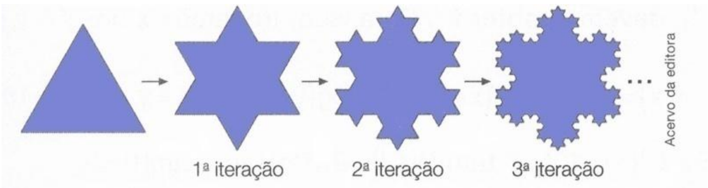
Em cada construção é importante que cada característica dos fractais seja destacada.

Questões para discussões: Solicitar aos alunos que relatem por escrito suas observações.

- Neste fractal, qual operação que consideramos a iteração?
- O que significa auto-similaridade?
- Compare os dois fractais construídos, quais as semelhanças e as diferenças?

O problema a seguir foi retirado do livro didático de Matemática de Joamir Roberto de Souza (2010, p. 185) volume 1 – indicado para a 1ª série do Ensino Médio. Este problema é um modelo para que o aluno observe como o conteúdo Geometria Fractal poderá ser abordado integrado a outros conteúdos matemáticos.

O estudo dos fractais tem revelado de grande importância em vários campos científicos, como na Biologia e Meteorologia. Os fractais são estruturas geométricas complexas que em geral seguem uma ordem. Um exemplo de fractal é o chamado floco de neve, que recebe esse nome devido a sua semelhança com um floco de neve natural. Esse fractal pode ser construído a partir de algumas iterações em triângulo equilátero. Na 1ª, basta dividir cada lado do triângulo equilátero em três partes iguais e, sobre a parte central de cada lado, construir outro triângulo equilátero. A 2ª iteração consiste em dividir cada lado da nova figura em três partes iguais e, sobre cada parte central, construir um novo triângulo equilátero, e assim sucessivamente. Considerando o Triângulo inicial com iteração zero e lado medindo uma unidade, determine o perímetro da figura obtida na: primeira, terceira e sétima iterações.



Quadro1 – Problema envolvendo Geometria dos Fractais
Fonte: Souza (2010, p. 185)

ATIVIDADE 6 – Fractal Triângulo de Sierpinski

Objetivos:

- Construir o fractal Triângulo de Sierpinski
- Reconhecer as características do fractal;
- Rever construções geométricas, triângulos eqüiláteros, ponto médio.
- Rever conceitos de triângulo equilátero, Perímetro e área de triângulos.

Forma de realização: atividade individual para a construção e em grupo para as discussões.

Materiais utilizados: papel A4, régua, compasso, lápis colorido.

Desenvolvimento da atividade:

Construção do Triângulo de Sierpinski (Adaptado de Barbosa, 2005).

Etapas da construção:

1ª. Construir um triângulo equilátero de 24 cm de lado;

2ª. Encontrar o ponto médio de cada lado desse triângulo, unir os pontos médios, dividindo o triângulo inicial em quatro triângulos;

3ª. Eliminar (remover) o triângulo central, o que pode ser codificado, por exemplo, colorindo com uma única cor;

4ª. Repetir essa operação sucessivamente, nos triângulos encontrados, exceto no triângulo central.

Professor (a)!

Conforme a série que seja aplicada a oficina é possível utilizar os fractais para uma retomada dos conceitos de Sequências numéricas, somas de termos de uma Progressão Geométrica infinita.

Questões para discussão: solicitar aos alunos que relatem por escrito suas observações.

- Solicitar aos alunos que elaborem uma tabela, (modelo Tabela 2) para melhorar a visualização dos dados e auxiliara nas discussões:

- Quantos triângulos existem em cada nível? Utilize a notação de potência para representar esta quantidade. (lembre-se que o triângulo central é eliminado).

- Qual a relação entre a quantidade de triângulos de cada nível?

- Comparando os fractais Floco de Neve e o Triângulo de Sierpinski o que existe de semelhante diferente entre eles?

* Nesta comparação é importante que os alunos percebam que na construção do Triângulo de Sierpinski o processo de iteração é de remoção de uma parte (triângulo central) enquanto que na construção do Floco de Neve, o processo de iteração é de acréscimo na figura inicial.

A Figura 18 destaca os quatros níveis iniciais da construção do Fractal Triângulo de Sierpinski, utilizar para responder as questões propostas e completar a tabela.

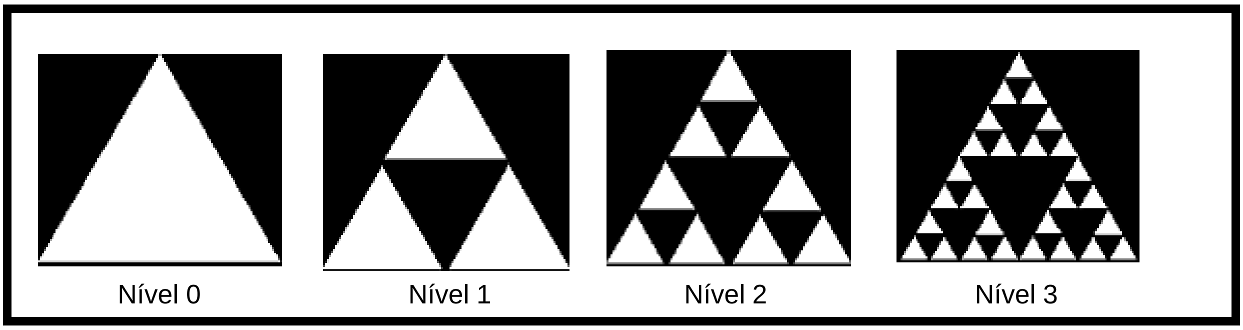


Figura 18 - Iterações do Triângulo de Sierpinski
Fonte: Fractovia (2011)

A tabela a seguir é um modelo para o aluno explorar os dados referentes à construção do Triângulo de Sierpinski.

Tabela 2 - Relação entre a quantidade de triângulos em cada nível do Triângulo de Sierpinski e a representação em potência de base 3

NÍVEL	QUANTIDADE DE TRIÂNGULOS	POTÊNCIA EQUIVALENTE
0	1	3^0
1	3	3^1
2	9	3^2
3	27	3^3
4	81	3^4
n	N	3^n

Fonte: Autoria própria

ATIVIDADE 7 – Fractal Tapete de Sierpinski

Objetivos:

- Construir o fractal Tapete de Sierpinski
- Reconhecer as características do fractal;
- Rever construções de desenho geométrico: quadrado, retas paralelas e perpendiculares;
- Rever conceitos de quadriláteros, Perímetro e área do quadrado.

Forma de realização: atividade individual para a construção e em grupo para as discussões.

Materiais utilizados: papel A4, régua, compasso, transferidor, jogo de esquadro e lápis colorido.

Desenvolvimento da atividade:

Construção do Tapete de Sierpinski (adaptado de Barbosa (2005)

Etapas da construção:

1ª. Construa um quadrado de lado medindo 27 cm;

2ª. Divida o quadrado em nove quadrados congruentes;

3ª. Repita a operação em cada um dos oitos quadrados, exceto o quadrado do centro;

4ª. E assim sucessivamente e iterativamente;

5ª. Colorir os quadrados centrais de cada nível, utilizando a mesma cor.

Professor (a)!

Utilize a construção do quadrado inicial para retomar o conceito de ângulo reto, e a utilização do transferidor e do jogo de esquadros.

Questões para Discussão: Solicitar aos alunos que relatem suas observações por escrito.

- Para construir o Tapete de Sierpinski, dividimos o lado do quadrado inicial em três partes iguais, o perímetro do quadrado também é dividido por três, e a área?

- Construa uma tabela e analise o que acontece com a medida do perímetro e da área nos três primeiros níveis

A seguir, a tabela 3 é um modelo para auxiliar os alunos nas discussões.

Tabela 3 - A relação das iterações no Tapete de Sierpinski

NÍVEL	LADO DO QUADRADO	PERÍMETRO DO QUADRADO	ÁREA DO QUADRADO
0			
1			
2			

Fonte: Autoria própria

ATIVIDADE 8 – Cartão Fractal

Objetivos:

- Rever conceitos geométricos de quadriláteros, retas paralelas e perpendiculares;

- Desenvolver habilidades manuais;

- Desenvolver o raciocínio lógico.

Forma de realização: atividade individual

Materiais utilizados: Folha de papel cartão colorido e tesoura.

Desenvolvimento da atividade:

Construção de um cartão fractal em dobradura.

Etapas da construção:

1ª. Utilizando uma folha de papel retangular, dobre ao meio a folha, no sentido do maior lado.

2ª. Dobre ao meio novamente no mesmo sentido marque bem a dobra e desdobre.

3ª. No sentido contrário, divida o retângulo em três partes iguais;

4ª. Utilizando o lado da dobra, (parte fechada na primeira dobra) recorte a parte central, até a marca da segunda etapa;

5ª. A parte recortada coloque para o interior do cartão;

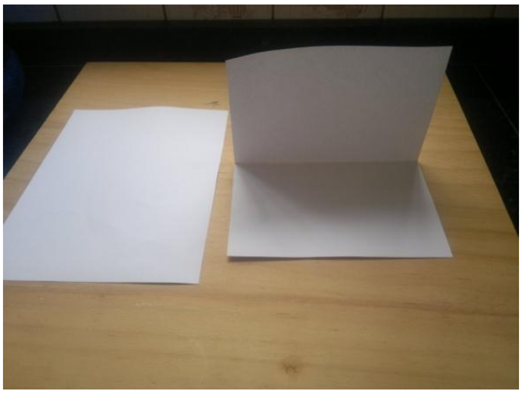
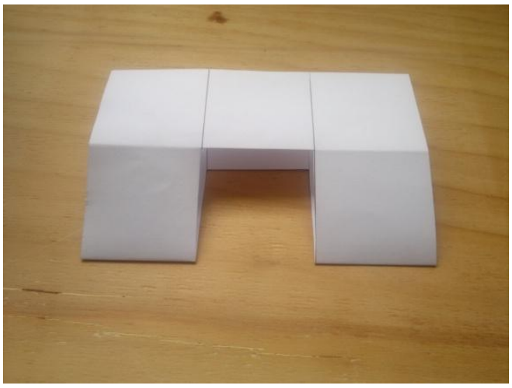
6ª. Repita sucessivamente a operação em cada parte do cartão.

Professor (a)!

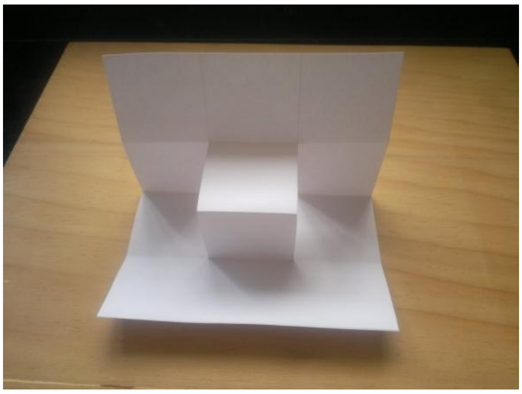
Uma variação do cartão fractal é na terceira etapa dividir o retângulo em quatro partes iguais.

Nas figuras a seguir as etapas da construção do cartão fractal.

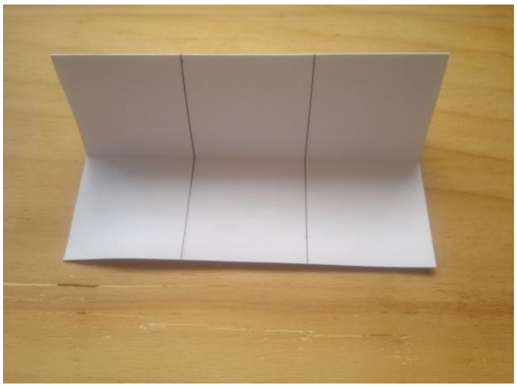
Também, na página do portal: www.diaadia.pr.gov.br/tvpendrive está disponível um vídeo indicando a construção passo a passo do cartão fractal.

 1º. Dobre a folha ao meio (use o lado maior) Formando um cartão.	 4º Recorte as laterais da parte central até a dobra do cartão, inicie pela parte da dobra do cartão.

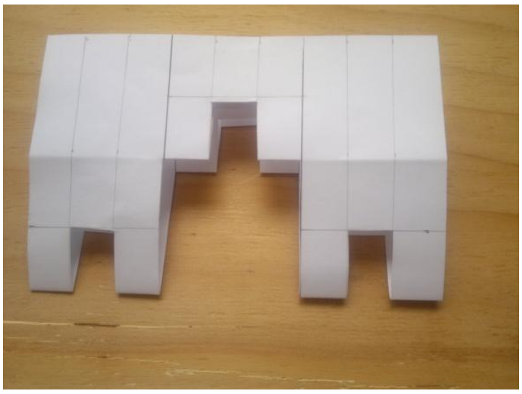
2º. Dobre novamente aos meio, marque bem e desdobre



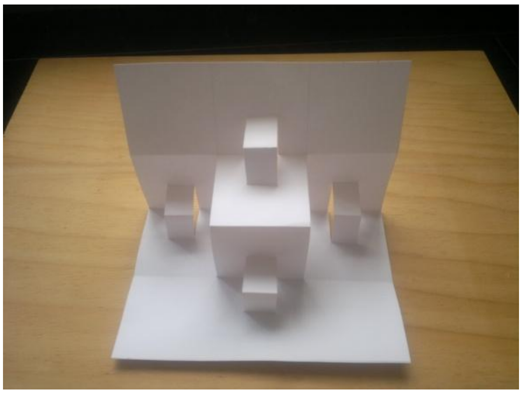
5º. Coloque a dobra recortada para o lado interno do cartão.



3º. Divida o cartão em três partes iguais (outro sentido do cartão)



6º O formato do cartão após os cortes



6º Repita a operação em cada parte do cartão.

Figura 19 - Etapas da construção do Cartão Fractal
Fonte: Autoria própria

2ª Etapa:

Esta etapa da oficina, realizada no laboratório de informática da escola, tem por objetivo visualizar e explorar as características de fractais aleatórios.

Professor (a)!

Para desenvolver esta atividade existem atualmente vários programas e softwares livres, que podem ser utilizados para a visualização e exploração de fractais aleatórios. Em nossa oficina utilizamos o software Fractal Forge. Barbosa (2005) disponibiliza em seu livro um CD, em forma de encarte, no qual há propostas de diversos aplicativos e um software (Nfract) que permite a geração de alguns Fractais. Softwares livres disponíveis, acesso em 25/01/2012.

Fractal Forge – endereço http://paginas.terra.br/absynth/index.htm

Fractovia - endereço http://www.fractovia.org/art/indx.php

Ultra Fractal – endereço http://www.ultrafractal.com

ATIVIDADE 9 - Visualizando Fractais Aleatórios

Objetivos:

- Visualizar fractais construídos a partir de equações matemáticas;
- Manipular fractais alterando suas características (forma, cores, iterações);
- Visualizar a beleza de Fractais Aleatórios.

Forma de realização: atividade em dupla para a utilização dos computadores no laboratório e em grupo para as discussões.

Materiais utilizados: Laboratório de informática.

Desenvolvimento da atividade:

Conforme o programa ou software utilizado é necessário que os alunos inicialmente se familiarizem com as ferramentas disponíveis, assim é interessante que o professor elabore um tutorial do programa ou software a ser utilizado. Em nossa oficina, utilizamos o *software Fractal Forge*, o site *absynth Fractals*, que pode ser acessado no endereço: http://paginas.terra.br/absynth/index.htm, o qual apresenta várias informações sobre os Fractais. As imagens deste site são geradas matematicamente através de funções fractais. Todos os seus elementos: forma, cores, efeitos de iluminação, das imagens apresentadas na GALERIA online foram produzidas em *softwares* específicos para a criação de fractais. O site traz, ainda, uma introdução sobre fractais, além de *links* para informações mais completas e outros *links* para vários sites que trazem exemplos, tutoriais e referências.

Nesta atividade os alunos visualizam fractais, interagem manipulando suas características, no software Nfract são possíveis criar fractais a partir de uma equação dada. Nesta atividade os alunos poderão salvar imagens de fractais para a impressão.

Professor (a)!

Após a realização desta atividade:

Promover uma discussão fazendo comentários sobre os fractais e sua relação com a matemática.

ATIVIDADE 10 - Exposição da Oficina Geometria Fractal

Objetivos:

- Construir um fractal escolhido;

- Comunicar-se matematicamente;

- Expressar oralmente os conhecimentos adquiridos.

Forma de realização: atividade individual.

Materiais utilizados: Livre escolha do aluno.

Desenvolvimento da atividade:

Solicitar aos alunos que construam um fractal, para a exposição, utilizando qualquer tipo de material. Agendar com a Equipe Pedagógica da escola, uma data para a exposição, para que outras turmas possam visitar a exposição. Durante a exposição os alunos apresentam o fractal construído e explicando suas características.

Professor (a)!

Ao solicitar a construção do fractal, oriente aos alunos que construam o fractal em um tamanho que facilite a visualização, por exemplo, utilizar uma folha de cartolina ou papel cartão. Deixe os alunos livres para usarem sua criatividade.

Alguns fractais construídos para a exposição são apresentados nas figuras 20, 21, 22, 23 e 24.

- Fractal Triângulo de Sierpinski recoberto com lacres de latas de refrigerante.
- Fractal Curva de Koch, com recortes de triângulos em papel colorido.
- Construção de um painel utilizando vários fractais aleatórios impressos dos softwares utilizados durante a aula do laboratório.

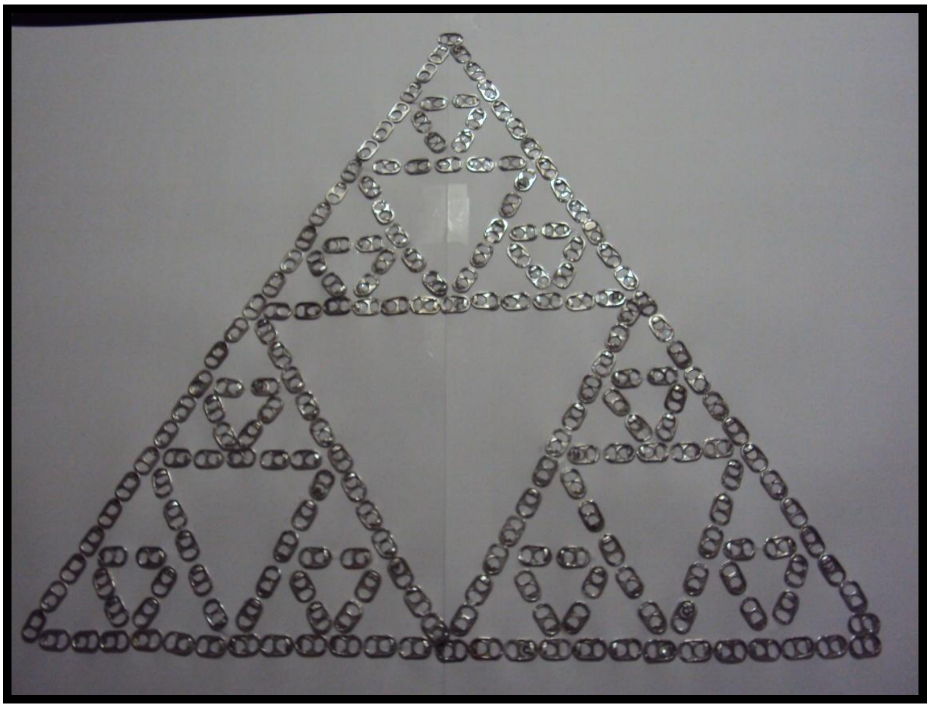


Figura 20 - Fractal Triângulo de Sierpinski construído pelos alunos.
Fonte: Autoria própria

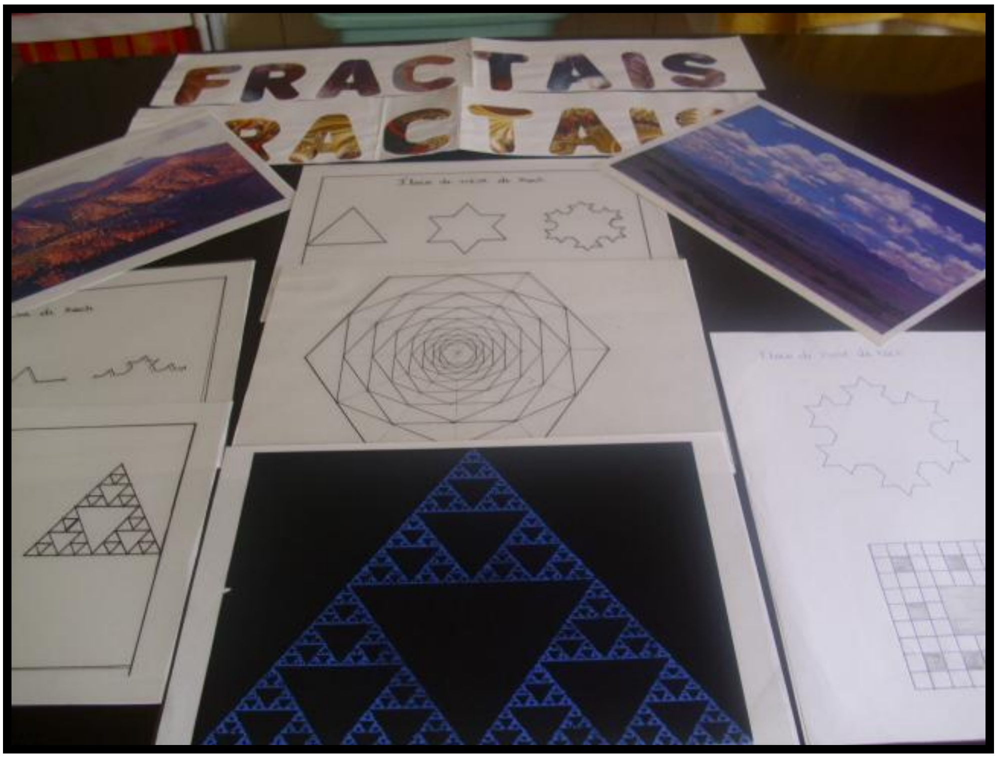


Figura 21 - Fractais geométricos construídos pelos alunos.
Fonte: Autoria própria

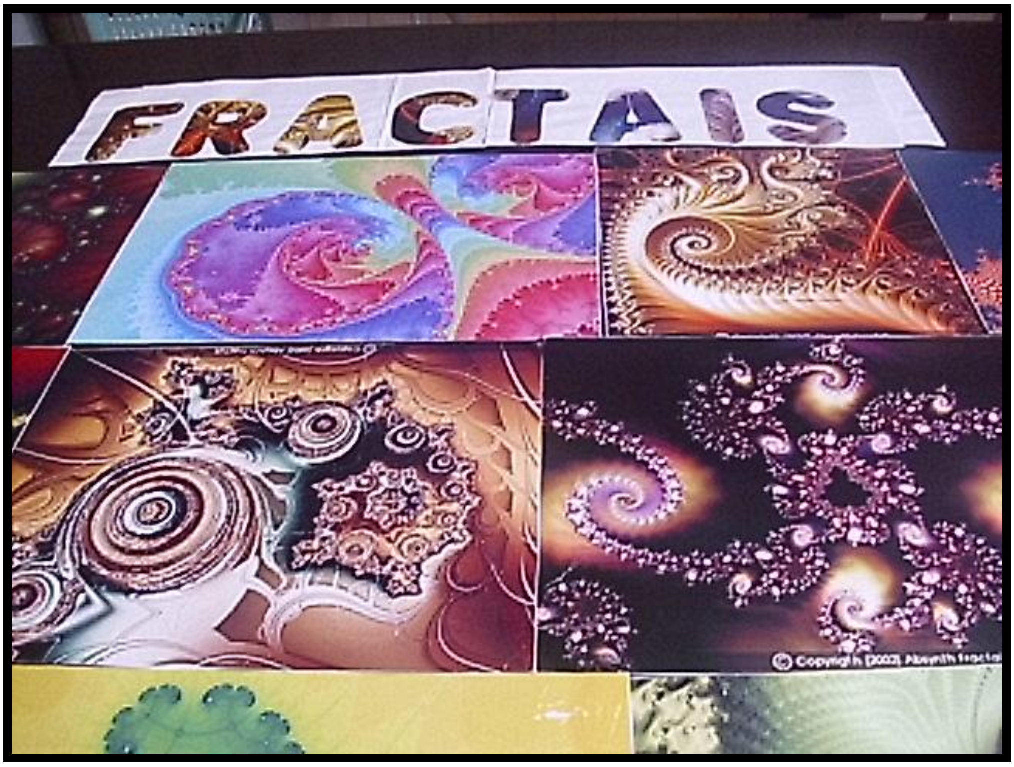


Figura 22 - Fractais aleatório impresso pelos alunos
Fonte: Fractal Forge (foto) - Autoria própria

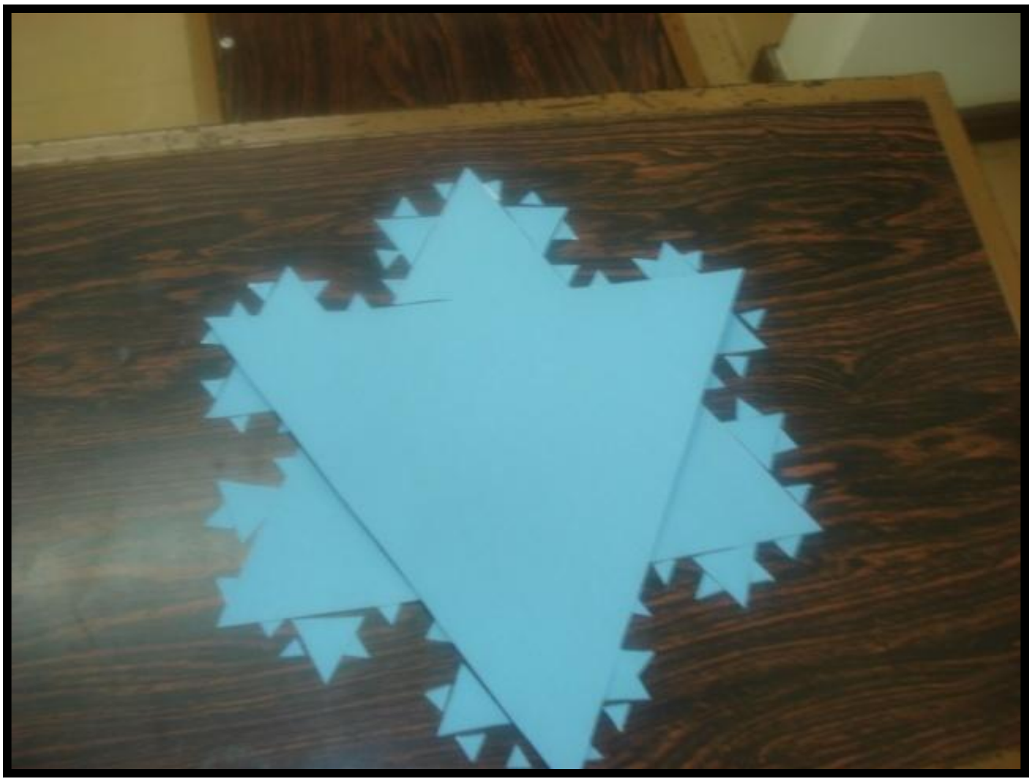


Figura 23 - Fractal Curva de Koch construído pelos alunos com recortes de triângulo
Fonte: Autoria própria**.**

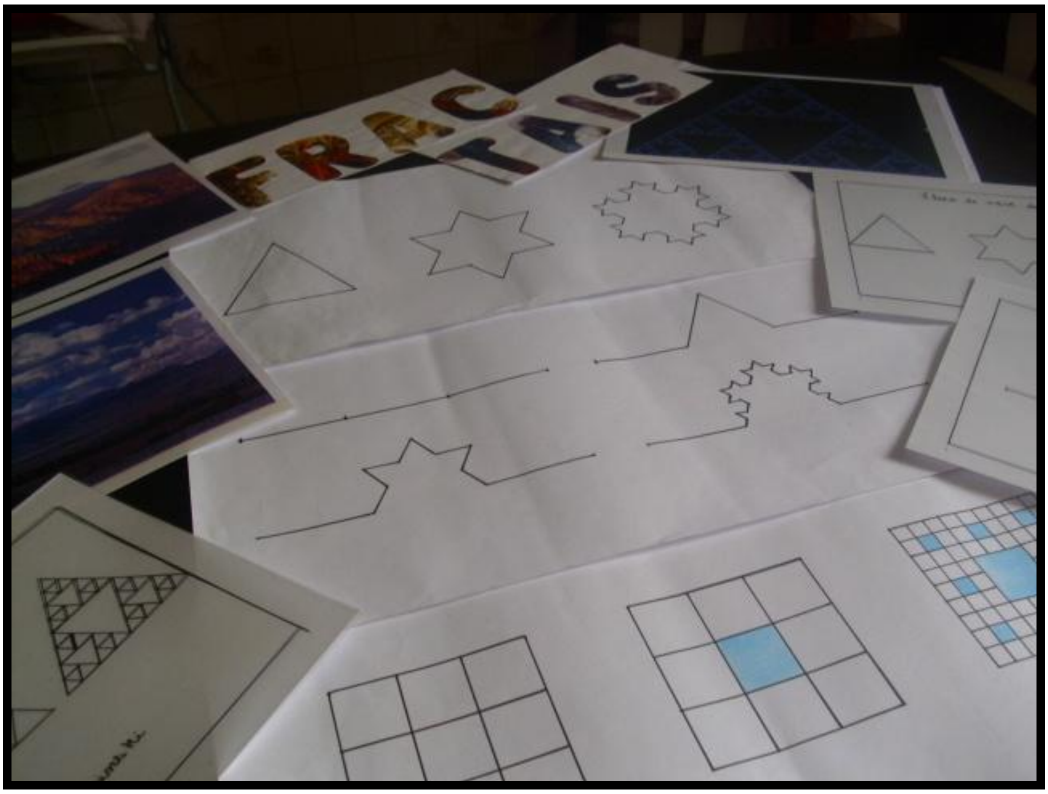


Figura 24 - Fractais geométricos construídos pelos alunos
Fonte: Autoria própria

5 CONSIDERAÇÕES

Professor (a)!

Fazer do ensino de matemática um momento de construção, e descontração ajuda a despertar no aluno um envolvimento e uma participação ativa, condições fundamentais para a aprendizagem. Nesse sentido, acredita-se que a abordagem da Geometria Fractal, possa auxiliar a trazer para as aulas de matemática momentos que levem os alunos a refletirem e se posicionarem frente a questões ligadas a realidade.

A oficina "Conhecendo a Geometria Fractal" foi elaborada visando possibilitar aos alunos discussões e reflexões deste tema que começa a aparecer em livros, revistas e até em filmes. Consideramos este caderno como um ponto de partida, que a partir dele, outras atividades possam ser inseridas.

Espera-se que este caderno pedagógico possa contribuir para a sua prática pedagógica, possibilitando, desenvolver este tema em suas salas de aula.

"**Vivemos num mundo em que a ciência revela novos mistérios a cada dia, e para cada descoberta descortinam-se novos e inesperados horizontes, gerando mais e mais interrogações".**

REFERÊNCIAS

ALVES, C. M. F. S. J. **Fractais:** conceitos básicos, representações gráficas e aplicações ao ensino não universitário. Dissertação (Mestrado em Matemática para o Ensino). Universidade de Lisboa. Lisboa, 2007.

BARBOSA, R. M**. Descobrindo a geometria fractal para sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

Com Ciência. 2008. Disponível em: <http://www.ceticismoaberto.com/ciencia/2139/fractais-uma-nova-viso-da-natureza>. Acesso em: 10 nov. 2011.

CAPRA, F. **A teia da vida:** uma nova compreensão científica dos sistemas vivos. São Paulo: Pensamento-Cultrix, 1996.

CARVALHO, H. C. de. **Geometria fractal, perspectivas e possibilidades no ensino de matemática**. 2005. 101f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Curso de Pós Graduação em Ensino em Ciência e Matemática, Universidade Federal do Pará. Belém, 2005.

FRACTAL DE MONDELBROT. Disponível em: <http://www.fractovia.org/art/what/what_ing1.shtml>. Acesso em: 20 jan. 2012.

JANOS. M. **Geometria fractal**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

NEVES, A. F. **Em busca de uma vivência geométrica mais significativa**. 1998. 225 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual de São Paulo. Marília (SP), 1998.

NEVES, R. S. P. Aprender e ensinar Geometria: um desafio permanente. In: PROGRAMA de Gestão da Aprendizagem Escolar – Gestar II. Matemática: Caderno de Teoria e Prática 3 – matemática nas formas geométricas e na ecologia. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008.

OLIVEIRA, L. H. A. Matemática do delírio. **Superinteressante,** São Paulo: Abril, v. 8, n. 10, out. 1994.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares Estaduais de Matemática**. Curitiba: SEED, 2008.

SIQUEIRA, R. **Janelas para o infinito:** exposição de fractais. USP. São Paulo. 2004. Disponível em: http://fractarte.com.br/galeria.php. Acesso em: 28 jan. 2012.

SOUZA, J.R. **Matemática:** ensino médio. São Paulo: FTD. 2010. (Coleção Novo Olhar).

TRATCH, C. **Investigando matematicamente alguns fractais por meio do software Geogebra**. União da Vitoria. 2008.