

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DE ENGENHARIA MECÂNICA
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

SANDMARA LANHI

**ANÁLISE NUMÉRICA PARA BAIXOS NÚMEROS DE MACH AO
REDOR DE GEOMETRIAS AERODINÂMICAS E NÃO-
AERODINÂMICAS**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

PATO BRANCO

2014

SANDMARA LANHI

**ANÁLISE NUMÉRICA PARA BAIXOS NÚMEROS DE MACH AO
REDOR DE GEOMETRIAS AERODINÂMICAS E NÃO-
AERODINÂMICAS**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do Curso de Engenharia Mecânica da Coordenação de Engenharia Mecânica – COEME – da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, Câmpus Pato Branco, como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Augusto Aparecido Gomes.

PATO BRANCO

2014

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus pela oportunidade de vida e por ser fonte de minha fé, sabedoria e por ser responsável pelo meu sucesso durante a minha caminhada.

Agradeço à minha família e amigos pelo apoio e paciência nos momentos de dificuldade, que sempre buscaram me incentivar a nunca desistir desse sonho. E agradeço também, ao companheirismo de todos ao longo de todo o período da faculdade.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Francisco Augusto A. Gomes pelo empenho em colaborar com seu conhecimento e sabedoria, ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

RESUMO

O estudo do escoamento ao redor de geometrias de interesse é de fundamental importância no desenvolvimento de novas tecnologias nas mais diversas áreas. Perfis aerodinâmicos e corpos rombudos são exemplos de geometrias de interesse que podem ser comparadas a diversas estruturas de engenharia. Sabendo-se disso, neste trabalho é proposto uma análise numérica considerando escoamento transônico ou subsônico ao redor do perfil NACA 0012, e ainda, desenvolver um código baseado no Método da Compressibilidade Artificial para simular o escoamento de fluido incompressível, utilizando o caso clássico de literatura, escoamento ao redor do cilindro bidimensional, para validar o modelo numérico para o fluido incompressível. As implementações serão acopladas ao código já existente *HYNE2D* através de sub-rotinas, escritas na linguagem Fortran 95/2003. O código *HYNE2D* emprega o método de volumes finitos baseado em faces como técnica de discretização das equações diferenciais que representam a física do problema, em um contexto de malhas não-estruturadas. Como método de discretização das equações diferenciais no tempo será utilizado o método de Runge-Kutta. As simulações serão validadas utilizando dados experimentais pertinentes aos casos teste.

Palavras-chave: Volumes Finitos, Malhas Não-Estruturadas, Método da Compressibilidade Artificial, Runge-Kutta, Fortran 95/2003.

ABSTRACT

The study of the flow around the interest geometry is fundamental importance in the development of new technologies in several areas. Airfoils and blunt bodies are examples of interest geometries that may be compared to various engineering structures. Knowing this, it is proposed in this work numerical analysis for subsonic to transonic flow, around NACA 0012 profile and also to develop a code based on the Artificial Compressibility Method for simulating the the classical test case, i.e., incompressible fluid flow around a two-dimensional cylinder, which will be used to validate the numerical model of incompressible fluid. The subroutines will be couple to the existing code *HYNE2D*, using a Fortran 95/2003 language. In the *HYNE2D* code the governing equations are discretized using a edge-based unstructured finite volume method. To advance the ordinary differential system of equations in time, the Runge-Kutta method is employed. The simulations will be validated using the experimental data related to the test cases.

Keywords: Finite Volume, Unstructured Meshes, Artificial Compressibility Method, Runge-Kutta, Fortran 95/2003.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - MALHA ESTRUTURADAS (A) TIPO H, (B) TIPO O E (C) TIPO C.....	7
FIGURA 2- EXEMPLO DE MALHA NÃO-ESTRUTURADA.	8
FIGURA 3- VALOR RELATIVO DA RESISTÊNCIA PARA DIVERSAS GEOMETRIAS COM O MESMO RAIO.	12
FIGURA 4- ESCOAMENTO SOBRE PLACA PLANA.	12
FIGURA 5- SEPARAÇÃO DA CAMADA LIMITE LAMINAR COM UMA ESTEIRA TURBULENTA.	13
FIGURA 6 - ESCOAMENTO LAMINAR AO REDOR DE UM CILINDRO.....	14
FIGURA 7- ESCOAMENTO AO REDOR DE UM AEROFÓLIO: (A) COM BAIXO ÂNGULO DE ATAQUE; (B) COM ALTO ÂNGULO DE ATAQUE.	15
FIGURA 8- ESQUEMA DE VOLUME DE CONTROLE TRIANGULAR.....	25
FIGURA 9- MALHA GERADA (GEOMETRIA COMPLETA).....	42
FIGURA 10- MALHA GERADA (GEOMETRIA APROXIMADA).	43
FIGURA 11- CAMPO DE PRESSÃO.	43
FIGURA 12 - LINHAS DE CORRENTE DE FLUIDO.	44
FIGURA 13 – GRÁFICO DE COEFICIENTE DE PRESSÃO EM RELAÇÃO À CORDA AERODINÂMICA ...	45
FIGURA 14: ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL PARA CILINDRO A NÚMERO DE REYNOLDS IGUAL A 50.	46
FIGURA 15 - ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL PARA CILINDRO A NÚMERO DE REYNOLDS IGUAL A 100.	46
FIGURA 16 – RELAÇÃO STROUHAL X REYNOLDS.....	47

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	5
1.1	MOTIVAÇÃO.....	9
1.2	OBJETIVOS.....	9
1.1.1	Objetivo Geral	9
1.1.2	Objetivos específicos	9
1.1.3	Organização do trabalho	10
2	FÍSICA DO PROBLEMA	11
2.1	EQUAÇÕES BÁSICAS	16
3	METODOLOGIA NUMÉRICA	25
3.1	MÉTODO DA COMPRESSIBILIDADE ARTIFICIAL	27
3.2	DISCRETIZAÇÃO NO TEMPO	31
3.2.1	Esquema com dois passos no tempo.....	31
3.3	CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	35
3.3.1	Condições de contorno para fluxos subsônicos e transônicos	35
3.3.2	Condição não reflexiva	37
3.3.3	Condições de contorno para fluidos incompressíveis.....	39
3.4	DESCRIÇÃO DA METODOLOGIA	41
4	RESULTADOS	42
4.1	ESCOAMENTO TRÂNSONICO EM TORNO DO PERFIL NACA 0012.....	42
4.2	ESCOAMENTO AO REDOR DE UM CILINDRO BIDIMENSIONAL.....	45
5	CONCLUSÃO	48
5.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	48
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	50

1 INTRODUÇÃO

O estudo e a análise de escoamentos ao redor de corpos têm sido de fundamental importância para o desenvolvimento tecnológico em várias áreas do conhecimento como por exemplo, em áreas como a automobilística e a aeronáutica, e quando se trata destes assuntos os maiores avanços que se tem são no estudo da aerodinâmica.

A aerodinâmica tem como análise o movimento dos fluidos gasosos, estudando as propriedades, características e as forças que estes fluidos exercem sobre corpos sólidos. A aerodinâmica ganhou importância em estudos na área automobilística e aeronáutica, pois descobriu que os aviões e automóveis precisavam movimentar-se com altas velocidades e consumir o mínimo de combustível, para isso o atrito com o ar deveria ser o menor possível levando ao desenvolvimento de perfis aerodinâmicos que favorecessem a sua locomoção.

No estudo da aerodinâmica, as várias estruturas estudadas na engenharia podem ser aproximadas a corpos rombudos ou a corpos esbeltos. Os corpos rombudos são corpos menos aerodinâmicos e com comprimentos equiparados nas três dimensões (x , y e z), ou seja, podem ser cilindros, esferas ou cones. Devido as suas características, os corpos rombudos são amplamente empregados no desenho e desenvolvimento de veículos espaciais, mísseis, projéteis, entre outros (BONO; F. BONO; AWRUCH, 2011). Já os corpos esbeltos, também chamados de aerofólios ou perfis de asa, apresentam superfície projetada para que se obtenham reações aerodinâmicas. Dessa forma, qualquer superfície que converta a resistência do ar em força útil pode ser chamada de aerofólio. Um exemplo disso é a asa do avião, a principal responsável pela sustentação da aeronave (RIBEIRO, 2011).

No escoamento ao redor dos corpos rombudos e esbeltos há uma grande quantidade de fenômenos fluidodinâmicos presentes, por exemplo, a transição para turbulência que até hoje é o centro de estudos de vários pesquisadores e atrai cada vez mais deles, quais buscam entender melhor como se comporta essa região transitória no escoamento. A grande dificuldade em se obter soluções precisas a respeito dessa região do escoamento torna esse estudo bastante interessante e atrativo. São necessários esforços experimentais e computacionais para entendê-los melhor. No entanto, experimentos muitas vezes são inviáveis, pois necessitam de muito tempo e custam caro, já por outro lado o desenvolvimento de algoritmos para simulação numérica é um meio barato, rápido e preciso, muito procurado para análises de escoamentos. Para entender os fenômenos complexos presentes nos escoamentos ao redor destes corpos é necessário estudar corpos de geometria simples como,

por exemplo cilindros de seção circular, que restringem a complexidade do problema e ainda assim permitem observar as características fundamentais do escoamento (BIMBATO, 2012).

A Dinâmica dos Fluidos Computacionais (DFC) consiste na análise de sistemas envolvendo fluxos de fluidos, transferência de calor e fenômenos associados a reações químicas destes fluidos. Através de modelação numérica (GONÇALVES, 2007) permitiu a DFC chegar a soluções sobre escoamentos sobre as geometrias em questão, que não seriam possíveis através de métodos analíticos ou experimentos em laboratórios. O desenvolvimento nessa área tem permitido cada vez mais o desenvolvimento de ferramentas capazes de analisar com maior facilidade os fenômenos envolvidos no escoamento ao redor de corpos rombudos.

Contando com o avanço contínuo da computação foi possível desenvolver vários métodos numéricos, dentre estes se destacam os mais utilizados: método de diferenças finitas, volumes finitos e método de elementos finitos. Porém, o presente trabalho se deterá ao método de volumes finitos para malhas não-estruturadas.

A função dos métodos numéricos é solucionar uma ou várias equações diferenciais substituindo as derivadas da equação por expressões algébricas que envolvam a função incógnita. Quando se decide utilizar os métodos numéricos para se aproximar as equações diferenciais, aceita-se ter a solução num número discreto de pontos, esperando que quanto maior for o número de pontos, mais próximo da solução exata será a solução aproximada (GONÇALVES, 2007).

O método dos volumes finitos, parte da forma integral da equação da conservação da massa e energia. O domínio da solução é dividido num número finito de volumes de controle, aplicando a equação da conservação para cada um. Como resultado, obtém-se uma equação algébrica para cada volume de controle, na qual aparecem os valores das variáveis no nó em questão e nos nós vizinhos. Este método pode ser aplicado a qualquer tipo de malha e se adapta muito bem a geometrias complexas.

Em geometrias complexas, as malhas estruturadas são difíceis e até impossíveis de construir, o que levou ao estudo de malhas não-estruturadas que apresentam grande flexibilidade na adaptação a estudos dessas geometrias. Os volumes de controle dessas malhas têm várias formas possíveis assim como o número de vizinhos é variável, levando a uma maior complexidade no modo como os dados são organizados.

Nas malhas estruturadas os elementos estão alocados em famílias de linhas, onde os membros de uma mesma família não cruzem uns com os outros e atravessam cada membro das outras famílias somente uma vez. A posição de cada elemento dentro da malha é numerado dentro do domínio, onde é identificado por um conjunto de dois (em duas

dimensões) ou três (em três dimensões) índices, como por exemplo (i, j, k) . Este tipo de estrutura de malha é o mais simples e logicamente é próximo a uma malha ortogonal. Para malhas em duas dimensões cada nó possui quatro vizinhos e para malhas em três dimensões tem seis vizinhos (GONÇALVES, 2007). Devido à forma como os nós estão dispostos apresentam vantagens, pois os índices que definem os nós tornam o tratamento numérico fácil em relação às condições de contorno (GOMES, 2012). Ainda, segundo Gonçalves (2007, p. 22) a forma como as células dessas malhas estão conectadas simplifica a programação. Seguem sistemas de coordenadas globais, ou seja, seguem uma determinada lei de construção e sempre possuem o mesmo número de vizinhos (MORAIS, 2004).

A desvantagem das malhas estruturadas é que só podem ser aplicadas a malhas de média complexidade. Outra desvantagem é que a distribuição de pontos da malha pode ser difícil, quando há concentração de células em alguma região da malha, isso implica em menor espaço em outras regiões do domínio e conseqüentemente desperdício de recursos, isso pode se tornar ainda mais grave em problemas 3D (GONÇALVES, 2007).

As malhas estruturadas são divididas conforme a geometria das linhas da malha e podem ser de três tipos: tipo H, tipo O e tipo C, conforme a Figura 1.

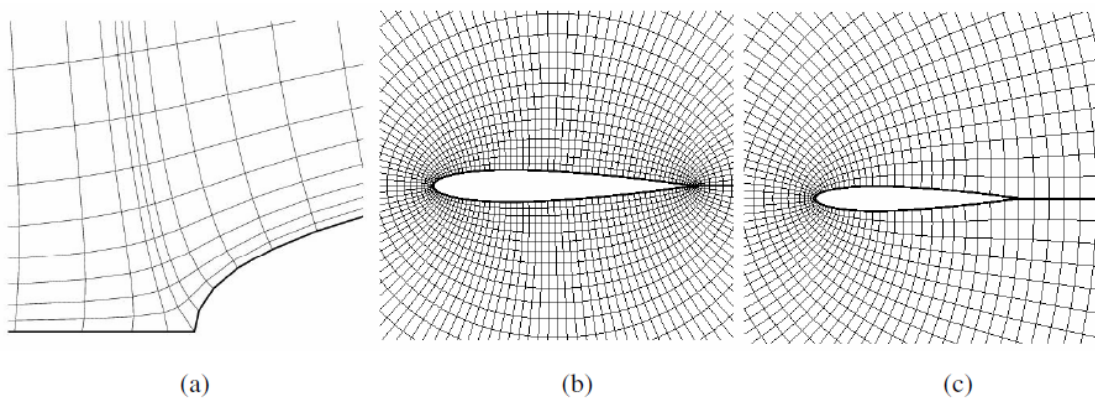


Figura 1 - Malha estruturadas (a) Tipo H, (b) Tipo O e (c) Tipo C.
Fonte: Gonçalves, 2007, p. 22.

Já as malhas não-estruturadas adaptam-se melhor às geometrias complexas, pois se adaptam sem qualquer limitação à fronteira do domínio de solução, são malhas que não obedecem a nenhuma lei de construção (MORAIS, 2004), um exemplo desse tipo de malha é apresentado na figura 2.

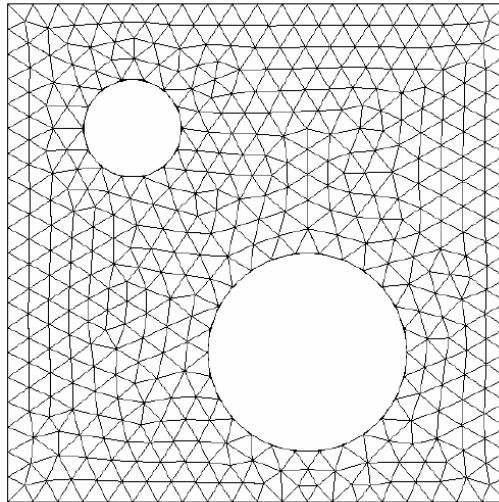


Figura 2- Exemplo de malha não-estruturada.
Fonte: Gonçalves, 2007, p. 25.

Segundo Gomes (2012, p. 93), esse tipo de malha utiliza volumes triangulares em sistemas bidimensionais e tetraédricos em sistemas tridimensionais. É um tipo de malha que se adapta a métodos numéricos por volumes finitos e por elementos finitos. Uma das desvantagens dessa malha é que os algoritmos que solucionam as equações algébricas são mais lentos que os utilizados para as malhas estruturadas. Outra vantagem apresentada para malhas não-estruturadas é que elas permitem fazer um refinamento localizado, ou seja, em regiões específicas, favorecendo a precisão dos cálculos para a região de interesse. Porém, é difícil de identificar as vizinhanças em caráter imediato para cada elemento nessa forma de malha.

Outra vantagem dessa malha é que ela permite o uso de elementos com diferentes tamanhos ao longo da malha, possibilitando o desenvolvimento de malhas de melhor qualidade. Essa malha é muito usada para simular situações onde envolvam as equações de Navier-Stokes onde a teoria da camada limite representa grande importância nos cálculos, do fluxo de calor na parede. O uso de malhas não estruturadas permite o uso de malhas mistas, aumentando a qualidade da solução numérica dos problemas de escoamento nos corpos (GOMES, 2012).

1.1 MOTIVAÇÃO

O desenvolvimento de ferramentas numéricas tornou-se de fundamental importância no estudo da fluidodinâmica. A principal motivação para este trabalho é desenvolver um código a fim de auxiliar os alunos do curso de engenharia mecânica em estudos de escoamentos sobre corpos que apresentem geometrias aproximadas a corpos rombudos ou esbeltos.

Com o desenvolvimento deste trabalho deverá ser possível criar uma interação entre a abordagem numérica e a experimental em trabalhos futuros, que utilizem o túnel de vento do departamento de engenharia mecânica.

Para validar resultados obtidos a partir do código desenvolvido neste trabalho, possibilitando aos alunos deste curso a resolução de problemas de escoamento os quais não são possíveis de resolver por métodos analíticos, ou ainda quando experimentos tornarem-se extremamente dispendiosos.

1.2 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

Desenvolver um código para simular o comportamento de escoamentos aerodinâmicos ao redor de corpos rombudos e esbeltos. No presente trabalho será realizado o estudo em geometrias cilíndrica e perfil de asa, considerando a sua superfície lisa, para fluidos a baixa velocidade, em regime transônico e subsônico, utilizando o método de volumes finitos em malhas não-estruturadas.

1.1.2 Objetivos específicos

Desenvolver um código (sub-rotina) para acoplar ao código já existente ***HYNE2D*** (*Two-Dimensional Hypersonic Non-Equilibrium*). O código ***HYNE2D*** foi implementado para simular altos valores de número de Mach, por assim dizer, puramente escoamento de fluido compressível.

No desenvolver do trabalho será simulado o escoamento ao redor do perfil NACA 0012, utilizando valor número de Mach de 0,8, para escoamento de fluidos nos regimes

subsônico e transônico, para quais o código já se encontra adaptado, faltando apenas que as condições de contorno sejam implementadas.

A nova sub-rotina a ser implementada conterá a técnica numérica conhecida como método da compressibilidade artificial, desenvolvido por Chorin (1967), utilizada para simular escoamentos com baixos valores de número de Mach. Com isto, o código ***HYNE2D*** poderá ser utilizado para simular também escoamentos incompressíveis, ou seja, para baixos valores de número de Mach, aumentando o campo de aplicações para o código. O desenvolvimento desse código deverá possibilitar a simulação de escoamentos a baixas e altas velocidades, podendo ser utilizado em simulações de escoamentos de transição de velocidades.

Procura-se desenvolver o código focando no estudo do coeficiente de pressão, para geometrias de interesse na engenharia especialmente, os corpos rombudos e o perfil NACA 0012. E mais futuramente tem-se como objetivo fazer a análise do escoamento turbulento sobre esses perfis, adotando por exemplo o modelo de Spalart – Allmaras (1992).

1.1.3 Organização do trabalho

Este trabalho será apresentado em seis capítulos sendo que um deles será apenas as referências bibliográficas. No primeiro capítulo será descrito qual será o objeto de estudo e quais as variáveis envolvidas no problema, e no capítulo da Metodologia Numérica, será apresentada o equacionamento e os métodos numéricos utilizados. No capítulo Resultados Preliminares, serão apresentadas premissas a respeito do trabalho a ser desenvolvido.

2 FÍSICA DO PROBLEMA

Corpos rombudos e o perfil aerodinâmico, NACA, se aproximam a vários corpos estudados na engenharia, principalmente quando a geometria em estudo é o cilindro. Nestes casos o escoamento agindo sobre os corpos é relacionado a escoamentos incompressíveis, pois a velocidade do ar (fluido em questão) não é tão alta e sua densidade e pressão não variam significativamente.

Qualquer corpo que se mova em meio ao ar sofrerá a resistência ao deslocamento, devido a massa de fluido que escoar através do mesmo. De forma que o corpo está sendo sujeito a forças e momentos devido à ação do ar (WHITE, 2002), haverá a formação de uma distribuição de pressão específica em relação a geometria do corpo, de modo que a resistência ao ar é proporcional a sua área, variando com a área frontal do corpo, qual é a superfície com maior seção perpendicular as linhas de corrente do fluido (RIBEIRO, 2011). Sabe-se ainda que quanto maior a velocidade do fluido a percorrer o corpo, maior é a dificuldade em percorrer o contorno do corpo, pois ao aumentar a velocidade aumentam-se as forças de reação do corpo, tornando-se proporcional ao quadrado da velocidade.

A resistência do ar, está relacionado a forma do corpo, juntamente com a formação do turbilhonamento que se forma devido a depressão gerada na parte posterior do corpo, devido ao fato de as linhas de corrente não conseguirem contorná-lo. Dessa forma, quanto mais aberta for a curvatura das linhas de corrente menor será a depressão e a tendência a formar turbilhões.

As formas que determinam a menor curvatura da linha de corrente serão as mais aerodinâmicas, pois, para a mesma área frontal e mesma velocidade, apresentam menores diferenças de pressão. Na figura abaixo, pode ser observado um valor relativo da resistência para diversas geometrias com o mesmo raio.

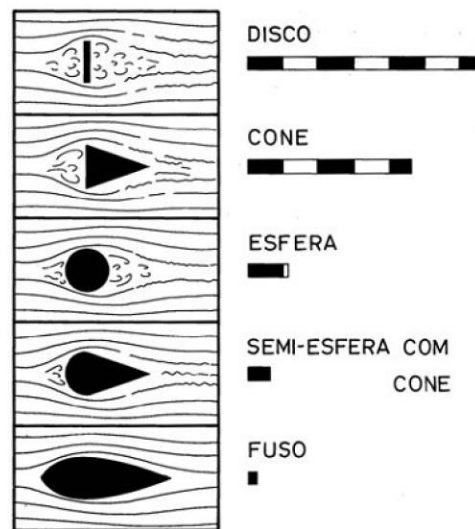


Figura 3– Valor relativo da resistência para diversas geometrias com o mesmo raio.
Fonte: Ribeiro, 2011, p.6.

Já na figura 4, pode ser observada a influência da velocidade no escoamento e na resistência. Nesta figura são mostrados os fluxos em torno de uma placa plana e de um fusão. Na primeira coluna o fluido apresenta uma velocidade baixíssima, já na segunda coluna o fluido apresenta alta velocidade. O que pode ser observado com esta figura é que com velocidades baixas não ocorre turbulência de forma significativa e que a forma do corpo pode evitar este fenômeno e evitar o deslocamento da camada-limite. No entanto, para altas velocidades é inevitável que se obtenha turbulência. (RIBEIRO, 2011)

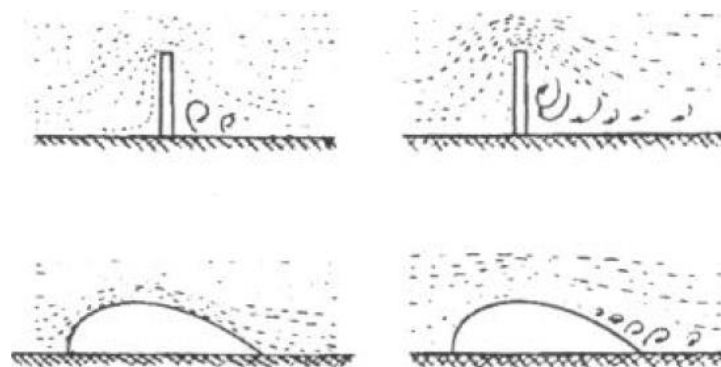
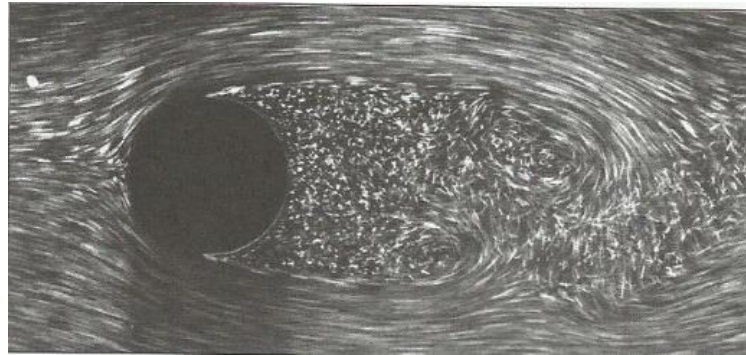


Figura 4- Escoamento sobre placa plana.
Fonte: Ribeiro, 2011, p.7.

Será dada maior atenção para os corpos a serem estudados nesse trabalho, primeiramente será abordado os corpos rombudos, relacionando o número de Reynolds ao escoamento ao redor destas geometrias. Posteriormente será abordado a geometria com perfil de asa, mais precisamente o perfil NACA, destacando também o comportamento do escoamento ao seu redor.

O corpo rombudo pode ser definido como sendo aquele que segundo Gabbi (2010 apud MENEGHINI, 2013, p. 25), quando exposto a uma corrente de fluido, gerará a separação do escoamento ocorrendo em uma porção considerável da superfície, este fenômeno normalmente pode ser encontrado para valores de Reynolds igual a 10, o fluido cerca o cilindro na região frontal, porém ele está muito rápido para permanecer junto à superfície do cilindro na parte de trás (Figura 5), dessa forma a camada limite se separa da superfície, formando a região de separação. A região de separação aumenta conforme o aumento do número de Reynolds, até atingir valores próximos de $Re=10^3$ (ÇENGEL, 2007). A figura 5 retrata essa característica.



**Figura 5- Separação da camada limite laminar com uma esteira turbulenta.
Fonte: Çengel, 2007, p. 510.**

As partículas do fluido que envolvem o cilindro atingem no ponto de estagnação, fazendo com que o fluido pare, aumentando a pressão nesse ponto. Na direção do escoamento conforme a velocidade do fluido aumenta a pressão diminui (ÇENGEL, 2007).

Já quando a velocidade do fluido é muito baixa, acontece o contrário. Para Reynolds próximo a um, o fluido cerca completamente o cilindro de forma regular e ordenada e permanece assim ao se encontrar no lado de trás do cilindro, conforme figura 6.

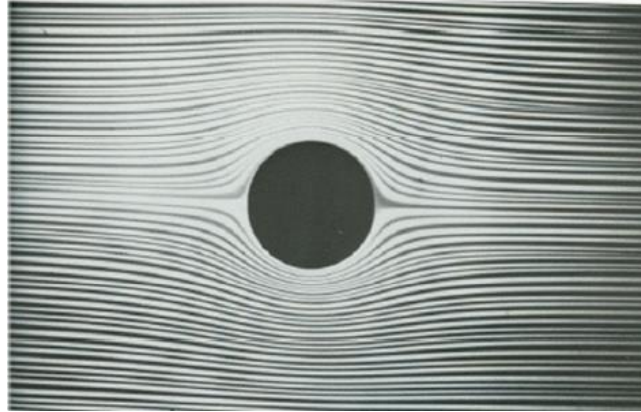


Figura 6 - Escoamento laminar ao redor de um cilindro.
Fonte: Gabbi, 2013, p.28.

De forma geral, todo escoamento ao redor de corpos rombudos gerará perturbação devido à forma do corpo. A forma deste escoamento dependerá de vários fatores, em exemplo, para cilindros circulares lisos e longos, quando submetidos a escoamentos uniformes, o parâmetro que governará o escoamento será o número de Reynolds e o fato de se estudar a geometria cilíndrica se dá por possuir a combinação desejada de geometria simples com a configuração complexa do escoamento ao redor de um corpo rombudo (GABBI, 2010).

Outro tipo de geometria que gera perturbação no escoamento é o aerofólio, porém é um corpo que possui superfícies aerodinâmicas, definido como sendo o corpo que cuja a forma é especialmente desenhada com o intuito de manipular as forças resultantes entre o contato do corpo e o escoamento ao seu redor. Estes tipos de corpos são utilizados em aeronaves, em pás de turbinas a gás e eólicas, rotores de bombas e outros (SANTIAGO, 2008).

O estudo do escoamento ao redor desses corpos tem como importância o estudo das forças que atuam no escoamento em contato com o corpo, pois estas se referem ao projeto estrutural do equipamento. Essas forças surgem como reação à variação do movimento que o corpo está exercendo sobre o fluido, sendo fenômeno extremamente complexo e de difícil solução.

Silva (2000 apud SCHLICHTING; GERSTEN, 2005, p. 8) afirma que em casos onde as geometrias são aerodinâmicas, mesmo para números de Reynolds fixos, os escoamentos podem apresentar padrões diferentes, isso se dá pela orientação entre o corpo e o escoamento sobre o corpo. Como por exemplo, um escoamento em um perfil NACA onde o ângulo de ataque é baixo ou nulo, o escoamento comporta-se como se não houvesse efeitos viscosos e há a formação de uma camada limite e um esteira, porém extremamente finas. No entanto

onde há ângulos de ataque maiores, ocorre o deslocamento da camada limite como pode ser visto na figura 7, devido a isso ocorre instabilidades de diversos tipos e escalas, a análise para esses casos torna-se complicada de ser resolvida até mesmo nos dias de hoje.

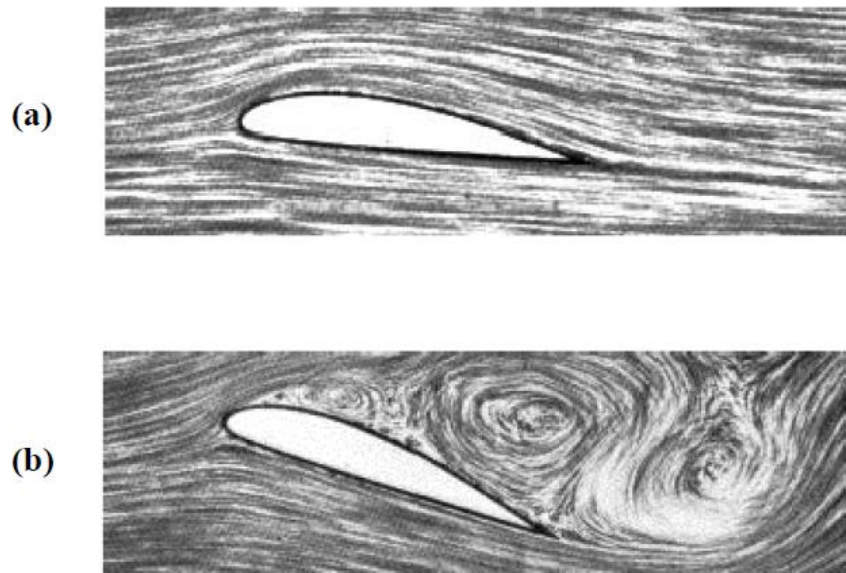


Figura 7– Escoamento ao redor de um aerofólio: (a) com baixo ângulo de ataque; (b) com alto ângulo de ataque.
Fonte: Silva, 2005, p. 8.

Esse tipo de geometria é especialmente projetado para diminuir ao mínimo possível o arrasto e para gerar sustentação, pois esse perfil tem como principal aplicação as asas dos aviões, onde o princípio do voo é baseado em sustentação. A sustentação nesse perfil pode ser considerada devido à distribuição de pressão na superfície do corpo, assim o corpo tem uma influencia fundamental sobre a sustentação. Para que isso aconteça, no projeto de aerofólios deve-se minimizar a pressão média na superfície superior e maximizar a pressão na superfície inferior (ÇENGEL, 2007).

As forças aerodinâmicas produzidas ao redor destes corpos são resultantes de duas fontes: distribuição de pressão e fricção viscosa. Sendo assim, qualquer corpo que move no ar sofre deslocamento em função do escoamento do fluido, considerando que o corpo esteja sofrendo às ações de forças e momentos das correntes de ar, haverá a formação de uma distribuição de pressão específica para a geometria do corpo. Ou seja, a resistência do ar varia conforme a distribuição de pressão. E avaliando-se a velocidade também, chega-se a conclusão de que quanto mais rapidamente o ar se deslocar, maior será a dificuldade em percorrer o corpo, pois maiores serão as forças de inércia e as de reação do corpo (RIBEIRO,2011).

A observação das linhas de distribuição de pressão permite avaliar as possíveis possibilidades de se melhorar a geometria do perfil, aprimorando o desempenho do equipamento. Quando a pressão varia de forma menos acentuada ao longo do perfil, isso impede a formação de turbulência reduzindo a resistência ao avanço. No caso onde o perfil não é aerodinâmico, como é o caso de corpos rombudos, haverá a formação de uma elevada depressão que se dá pelo desalinhamento das linhas de corrente gerando condições de turbulência. Com a diminuição do gradiente de pressão, se reduz a formação de turbulência, melhorando a aerodinâmica do corpo (RIBEIRO, 2011).

Por outro lado, o escoamento ao redor de corpos cuja sua seção diminui progressivamente apresentará um gradiente de pressão suave, de modo que o fluxo permanece em contato com a superfície até o final, assim, com a camada limite se descolando até o final do corpo, a energia recebida das camadas mais externas de ar é suficiente para evitar grandes turbulências (RIBEIRO, 2011).

A partir das questões apresentados anteriormente, onde relatou-se que a forma do corpo e a velocidade do fluido interferem no escoamento, ditando-o como laminar ou turbulento, pretende-se aqui simular o escoamento ao redor destes corpos, a baixas velocidades, visando a variação de pressão, comportamento da camada limite e do escoamento do fluido, juntamente com o estudo dos coeficientes de pressão e de velocidade, representados a partir do estudo das equações de Navier-Stokes

2.1 EQUAÇÕES BÁSICAS

As equações matemáticas que modelam o problema podem ser obtidas através de três princípios da física Newtoniana, a partir do princípio da Conservação da Massa, Quantidade de Movimento e Conservação da Energia. Estes princípios são conhecidos como sendo as equações de Navier-Stokes, como são comumente conhecidas. São equações diferenciais parciais não lineares, variáveis no tempo, onde os efeitos viscosos e de transferência de calor descrevem o escoamento de um fluido Newtoniano.

Os sistemas de equações parciais que representam as equações de Navier - Stokes para escoamentos compressível e laminar são descritas abaixo:

Para a Equação da *Conservação da Massa*:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{u}) = 0. \quad (1)$$

Para a Equação da *Quantidade de Movimento*;

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \vec{\tau}. \quad (2)$$

Para a Equação da *Conservação da Energia*:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \nabla \cdot [-p\vec{u} + \vec{\tau} \cdot \vec{u} - \vec{q}], \quad (3)$$

Onde:

ρ - densidade do fluido;

\vec{u} - vetor velocidade, $\vec{u} = \{u, v, w\}$;

p - pressão;

$\vec{\tau}$ - tensor de tensões viscosas;

\vec{q} - vetor de fluxo de calor por condução;

t - tempo;

∇ - gradiente de uma variável do problema.

A energia total (\hat{e}_t) por unidade de massa é dada pela equação:

$$e_t = \hat{e} + \frac{1}{2}(\vec{u} \cdot \vec{u}), \quad (4)$$

Onde:

\hat{e} - é a energia interna específica cuja definição será apresentada na sequência.

O sistema de equações apresentado acima não determina a solução das equações de Navier-Stokes, pois estas equações apresentam maior número de variáveis que o número de equações. Para tornar o sistema de equações determinado, faz-se o uso de equações constitutivas, quais apresentam as condições para o desenvolvimento da solução das equações de Navier – Stokes, estas equações serão apresentadas no subtítulo a seguir.

1.1.1 Equações Constitutivas

O fluido de trabalho, neste caso é o ar atmosférico e será estudado sob a condição termodinâmica de um gás termicamente e caloricamente perfeito. Sendo assim, pode ser apresentada a equação dos gases perfeitos como:

$$p = \rho RT = \rho(\gamma - 1)\hat{e}, \quad (5)$$

Onde:

R - constante do gás;

T - temperatura absoluta;

γ - razão entre os calores específicos a pressão e a volume constante, na forma de $\gamma = C_p/C_v$, nas condições para a presente modelagem, $\gamma=1,4$ para o ar atmosférico, e;

\hat{e} - energia interna específica que para as condições assumidas é dado pela equação:

$$\hat{e} = C_v T. \quad (6)$$

Os calores específicos podem ser escritos em função da constante do gás e da razão entre os calores específicos, na forma a seguir:

$$C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}, \quad (7)$$

$$C_v = \frac{R}{\gamma - 1}, \quad (8)$$

Onde:

$$R = C_p - C_v. \quad (9)$$

A transferência de calor no escoamento pode ser assumida pela formulação da Lei de Fourier, sob a seguinte forma:

$$\vec{q} = -k \nabla T, \quad (10)$$

Onde:

k - coeficiente de condutividade térmica;

∇T - é o gradiente de temperatura.

A relação da taxa de deformação do fluido é modelada nas equações de Navier-Stokes através do tensor de tensão viscosa, dado:

$$\tilde{\tau}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \lambda (\nabla \cdot \vec{u}) \delta_{ij}, \quad (11)$$

Onde:

μ - coeficiente de viscosidade dinâmica;

δ_{ij} - tensor de Kronecker para expressar a forma indicial ou *notação de Einstein*.

λ - segundo coeficiente de viscosidade dinâmica, definido pela hipótese de Stokes como:

$$\begin{aligned} 2\mu + 3\lambda &= 0, \\ \lambda &= -\frac{2}{3}\mu. \end{aligned} \quad (12)$$

O coeficiente de viscosidade dinâmica, para o escoamento laminar pode ser calculado em função da temperatura através da lei de Sutherland,

$$\mu = \mu_{\infty} \left(\frac{T}{T_{\infty}} \right)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{T_{\infty} + S}{T + S} \right], \quad (13)$$

onde S representa uma constante, cujo valor é função do modelo assumido para o gás, neste caso, $S = 110 \text{ K}$.

O coeficiente de viscosidade cinemática é calculado por:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (14)$$

O coeficiente de condutividade térmica do gás é dado por:

$$k = \frac{c_p \mu}{Pr}, \quad (15)$$

onde Pr é o número de Prandtl, cujo valor para escoamento laminar é 0,72.

As equações (5), (10) e (11) são o grupo principal de equações constitutivas relacionadas ao modelo de Navier-Stokes, as quais possibilitam a modelagem de um gás caloricamente e termicamente perfeito.

As equações (1), (2) e (3) foram apresentadas na forma não conservativa, no entanto quando observadas pelo ponto de vista numérico, estas equações podem apresentar resultados não físicos em regiões de escoamento onde são notados altos gradientes. Altos gradientes significam descontinuidades presentes em escoamentos a altas velocidades, como por exemplo, as ondas de choque. Assim, a fim de se evitar resultados não físicos nas simulações numéricas, estas equações podem ser escritas na forma conservada, como comumente são apresentadas. Desta forma, define-se o operador que representa a derivada substancial ou material na seguinte forma:

$$\frac{D}{Dt} (\cdot) = \frac{\partial}{\partial t} (\cdot) + \vec{u} \cdot \nabla (\cdot). \quad (16)$$

As equações (1) e (16) são utilizadas para reescrever as equações parciais de Navier-Stokes na forma conservada, como:

- *Equação da conservação da Massa:*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0. \quad (17)$$

- *Equação da Quantidade de Movimento*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tilde{\tau}_{ij}}{\partial x_j} = 0. \quad (18)$$

- *Equação da Conservação da Energia*

$$\frac{\partial e_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}[(e_t + p)u_j - \tilde{\tau}_{ij}u_i + q_j] = 0. \quad (19)$$

Assim, a energia total por unidade de volume pode ser escrita na forma:

$$e_t = \rho \left[\hat{e} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \right]. \quad (20)$$

A partir da equação (20) é possível reescrever a equação de estado para os gases perfeitos sob a seguinte forma:

$$p = (\gamma - 1) \left[e_t - \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2 + w^2) \right]. \quad (21)$$

Em aplicações da Mecânica dos Fluidos Computacional, normalmente procura-se definir grupos adimensionais para adimensionalizar as equações de Navier-Stokes. Fazendo isso, minimiza-se a ordem de grandeza das variáveis na solução, favorecendo as simulações computacionais. Pode-se notar que no *Sistema Internacional de Unidades* os valores para a densidade possuem ordem de grandeza igual a 1, no entanto a velocidade apresenta ordem de grandeza de 10^2 . Como resultado para o vetor de variáveis na sua forma conservada apresenta variáveis com grande diferença entre as escalas de valores. Essas diferenças podem apresentar erros numéricos em potencial, como erros de precisão para arredondamento na solução. Estes erros podem ser evitados quando se introduz uma normalização no sistema de equações, ou seja, aplicar grupos adimensionais no sistema de equações tornando-os adimensionais. Deste modo, é possível tornar a ordem de grandeza das variáveis em aproximadamente na ordem de um.

A adimensionalização pode ser aplicada considerando grupo de variáveis dimensionais de referência. Neste trabalho, os valores de referencia que deve ser adimensionalizados são: o comprimento de referência, L_r , a velocidade de referencia, U_r , o coeficiente de viscosidade

dinâmica de referência, μ_r , a temperatura de referencia, T_r , e a densidade de referência, ρ_r . As variáveis adimensionais, definidas pelo subscrito “*” são fornecidas:

$$\text{Tempo adimensional: } t_* = \frac{tU_r}{L_r},$$

$$\text{Comprimento adimensional: } l_* = \frac{l}{L_r},$$

$$\text{Densidade adimensional: } \rho_* = \frac{\rho}{\rho_r},$$

$$\text{Vetor de velocidade adimensional: } \vec{v}_* = \frac{\vec{v}}{U_r},$$

$$\text{Pressão e energia total adimensional: } [p, e_t]_* = \frac{[p, e_t]}{\rho_r U_r^2},$$

$$\text{Temperatura adimensional: } T_* = \frac{T}{T_r},$$

$$\text{Coeficiente de viscosidade dinâmica adimensional: } \mu_* = \frac{\mu}{\mu_r}.$$

Na dinâmica dos gases, as propriedades do gás formam um conjunto final de variáveis de entrada para a solução do sistema de equações. Onde as propriedades são: a constante R do gás, o calor específico a pressão constante C_p e o calor específico a volume constante C_v . Uma outra propriedade do gás fundamental para a solução é o número de Prandtl (Pr), que é um número adimensional.

O número de Reynolds pode ser escrito da seguinte forma, de forma referencial:

$$R_e = \frac{\rho_r U_r L_r}{\mu_r}. \quad (22)$$

Em escoamentos compressíveis quase todas as propriedades são descritas em função do número de Mach, M , este por sua vez é uma forma adimensional da velocidade do escoamento, sendo a razão da magnitude da velocidade pela velocidade do som, a . O número de Mach, pode ser calculado pela seguinte fórmula:

$$M = \frac{|\vec{v}|}{a} = \frac{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}{a}, \quad (23)$$

Aonde a velocidade do som assume a seguinte forma:

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}. \quad (24)$$

Para o desenvolvimento deste trabalho foram utilizadas as seguintes variáveis de referência:

$$L_r = \hat{L}; U_r = U_{\infty}; \mu_r = \mu_{\infty}; T_r = T_{\infty}; \rho_r = \rho_{\infty},$$

Onde:

\hat{L} - comprimento característico do corpo submetido ao escoamento;

O subscrito ∞ representa as variáveis obtidas diretamente do escoamento não perturbado.

Por fim, substituindo as variáveis adimensionais mostradas anteriormente nas equações de Navier-Stokes, estas podem agora ser escritas na forma adimensional. As equações de Navier-Stokes tridimensionais em coordenadas cartesianas na forma adimensional são apresentadas na forma vetorial:

$$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} + \frac{\partial(\vec{E}_c - \vec{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial(\vec{F}_c - \vec{F}_v)}{\partial y} + \frac{\partial(\vec{G}_c - \vec{G}_v)}{\partial z} = \vec{S}, \quad (25)$$

Onde:

ρ - densidade (u, v, w) são as componentes do vetor velocidade nas coordenadas x, y e z .

e_t - energia total por unidade de volume.

\vec{Q} - vetor de variáveis conservadas, assumido pela forma:

$$\vec{Q} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e_t \end{Bmatrix}. \quad (26)$$

Os vetores de fluxo convectivo \vec{E}_c, \vec{F}_c e \vec{G}_c nas coordenadas cartesianas x, y e z são dados na seguinte forma:

$$\vec{E}_c = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho wu \\ (e_t + p)u \end{Bmatrix}, \quad (27)$$

$$\vec{F}_c = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho wv \\ (e_t + p)v \end{Bmatrix}, \quad (28)$$

$$\vec{G}_c = \begin{Bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (e_t + p)w \end{Bmatrix}. \quad (29)$$

Os vetores de fluxo viscoso \vec{E}_v , \vec{F}_v e \vec{G}_v nas coordenadas cartesianas x , y e z são dados na seguinte forma:

$$\vec{E}_v = \frac{1}{Re} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\tau}_{xx} \\ \tilde{\tau}_{xy} \\ \tilde{\tau}_{xz} \\ u\tilde{\tau}_{xx} + v\tilde{\tau}_{xy} + w\tilde{\tau}_{xz} - q_x \end{pmatrix}, \quad (30)$$

$$\vec{F}_v = \frac{1}{Re} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\tau}_{xy} \\ \tilde{\tau}_{yy} \\ \tilde{\tau}_{yz} \\ u\tilde{\tau}_{xy} + v\tilde{\tau}_{yy} + w\tilde{\tau}_{yz} - q_y \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$\vec{G}_v = \frac{1}{Re} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\tau}_{xz} \\ \tilde{\tau}_{yz} \\ \tilde{\tau}_{zz} \\ u\tilde{\tau}_{xz} + v\tilde{\tau}_{yz} + w\tilde{\tau}_{zz} - q_z \end{pmatrix}. \quad (32)$$

O tensor de tensão viscosa pode ser obtido pelas componentes nas coordenadas cartesianas x , y e z como:

$$\tilde{\tau}_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad (33)$$

$$\tilde{\tau}_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad (34)$$

$$\tilde{\tau}_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad (35)$$

$$\tilde{\tau}_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (36)$$

$$\tilde{\tau}_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (37)$$

$$\tilde{\tau}_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (38)$$

E por fim, a transferência de calor qual é modelada pela lei de Fourier, é dada:

$$q_x = -\frac{\mu}{Pr M_\infty^2 (\gamma - 1)} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (39)$$

$$q_y = -\frac{\mu}{Pr M_\infty^2 (\gamma - 1)} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (40)$$

$$q_z = -\frac{\mu}{P_r M_\infty^2 (\gamma - 1)} \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (41)$$

O termo \vec{S} representa o termo fonte da equação, e pode ser representado por um vetor característico do problema.

3 METODOLOGIA NUMÉRICA

As equações de Navier-Stokes foram apresentadas na forma tridimensional no Capítulo 2, no entanto neste trabalho será abordada a análise apenas para as equações na forma bidimensional.

As equações básicas do problema serão discretizadas a partir do método de volumes finitos, cujo o domínio será representado por malhas não-estruturadas, com volumes de controle formados por triângulos. A representação esquemática da discretização dos fluxos convectivo e viscoso nas arestas de um volume de controle Ω_i é apresentada na figura 8.

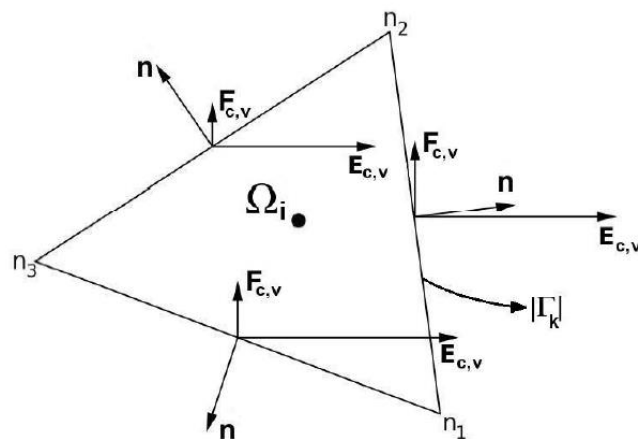


Figura 8- Esquema de volume de controle triangular.
Fonte: Gomes, 2012, p. 99.

A representação das equações de Navier-Stokes utilizando o método dos volumes finitos pode ser obtida através da forma integral das equações:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \cdot f) d\Omega = \int_{\Omega} S_q d\Omega, \quad (42)$$

Onde:

$$f = (F_c - F_v), \quad (43)$$

E:

$F_c = E_{ci} + F_{cj}$ - fluxo convectivo e;

$F_v = E_{vi} + F_{vj}$ - fluxo viscoso para o volume de controle Ω . E o termo S_q é o termo fonte do volume de controle Ω .

Aplicando-se o teorema de Gaus no segundo termo da equação do lado esquerdo do sinal de igual, temos:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial t} d\Omega + \oint_{\partial T} f(Q) \cdot n d\Gamma = \int_{\Omega} S_q d\Omega, \quad (44)$$

Onde:

Ω – volume da célula;

Γ – indica a superfície da célula;

$f(Q)$ - fluxo numérico através da aresta do volume de controle Ω ;

$n = n_{xi} + n_{yj}$ - vetor normal unitário em cada aresta do volume de controle, neste caso ele sempre estará apontando para o lado de fora do volume de controle.

Esta orientação é baseada na ordem de leitura dos nós de cada aresta, ou seja, na ordem do nó 1 para o nó 2. Preservando esta ordem, a leitura dos nós será feito na direção anti-horária.

Todas as arestas em conjunto, formam o volume de controle, conforme a equação:

$$\partial\Gamma_i = \bigcup_{k=1}^{N_f} \Gamma_k . \quad (45)$$

O volume de controle i em volumes finitos depende da aproximação na forma de integral para este volume de controle. Dessa forma pode-se considerar que Q_i representa o valor médio de Q em um instante de tempo t , para o volume de controle i , esta aproximação pode ser escrita sob a forma de:

$$Q_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} Q d\Omega . \quad (46)$$

Desta forma substituindo a equação (46) na equação (44), as equações de Navier-Stokes podem ser discretizadas na forma bidimensional sob a forma sub-discreta por:

$$\frac{dQ_i}{dt} = - \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{k=1}^{N_j} (F_{cnk} - F_{vnk}) |\Gamma_k| + S_{qi}, \quad (47)$$

Onde:

$$F_{cnk} = E_{cnx} + F_{cny};$$

$F_{Vnk} = E_{Vnx} + F_{Vny}$, são respectivamente as equações para o fluxo convectivo e viscoso normal à face k .

N_f - número de arestas do volume de controle;

$|\Omega_i|$ - área do volume de controle Ω_i ;

$|\Gamma_k|$ - comprimento da aresta k .

A partir da figura 8 é possível encontrar os seguintes termos: n_x , n_y , $|\Gamma_k|$ e $|\Omega_i|$:

$$n_x = \frac{\Delta y}{|\Gamma_k|};$$

$$n_y = - \frac{\Delta x}{|\Gamma_k|};$$

$$\Delta_y = y_{n2} - y_{n1}; \quad (48)$$

$$\Delta_x = x_{n2} - x_{n1};$$

$$|\Gamma_k| = \sqrt{(\Delta_x)^2 + (\Delta_y)^2};$$

$$|\Omega_i| = \frac{\hat{b}}{2} [(x_{n1} - x_{n2})(y_{n1} + y_{n2}) + (x_{n2} - x_{n3})(y_{n2} + y_{n3}) + (x_{n3} - x_{n1})(y_{n1} + y_{n2})];$$

\hat{b} - profundidade ocupada pela geometria no espaço, como neste caso é bidimensional \hat{b} assume valor igual a 1.

A forma compacta da equação (47) é:

$$\frac{dQ_i}{dt} = R_i, \quad (49)$$

Onde R_i é o resíduo resultante da discretização do conjunto de equações, e pode ser expresso como:

$$R_i = -\frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{k=1}^{N_f} f_{n_k}(Q_k) |\Gamma_k| + S_{q_i}, \quad (50)$$

Onde:

$f_{n_k}(Q_k) = (F_{Cn_k} - F_{Vn_k})$ representa o fluxo numérico em direção normal a aresta k .

Na discretização semi-discreta das equações de Navier-Stokes através do método de volumes finitos as variações no tempo e no espaço são realizadas separadas. Na discretização no espaço o fluxo convectivo e o fluxo viscoso, precisam ser calculados por métodos diferentes devido às equações serem equações diferenciais parciais. Para o fluxo convectivo sua representação é feita por equações hiperbólicas, enquanto que para o fluxo viscoso a representação é feita a partir de equações elípticas, devido a isso os cálculos dos fluxos devem ser realizados separadamente. Isto deve ser feito para todas as arestas do volume de controle, onde a soma de todos os fluxos representará o fluo numérico no volume de controle Ω_i .

3.1 MÉTODO DA COMPRESSIBILIDADE ARTIFICIAL

Este método é capaz de adaptar códigos para altos números de Mach para baixos números de Mach, introduzido pela primeira vez por Chorin (1967).

Na aproximação de Chorin, uma derivada temporal da pressão é adicionada à equação da continuidade (qual é chamado de fator de compressibilidade artificial), permitindo que essa equação avance no tempo convergindo para uma condição estacionária, progredindo através de um transitório não físico, até que a solução convirja para uma condição estacionária onde a

derivada temporal seja é igual a zero. Com isso tem-se satisfeita a condição de incompressibilidade (HERNÁNDEZ, 2005). Este método tem sido amplamente aplicado em várias pesquisas para escoamentos no estado estacionário e dependentes do tempo. Em casos onde a temperatura não é requerida, ou seja, em que a equação da energia não é resolvida, essa técnica apresenta vantagem em relação aos métodos de pré-condicionamento (ANDERSON,1996), Dessa forma a eficiência do código é melhorada tanto no tempo computacional quanto na redução do uso da memória em tempo de processamento.

Desta forma, busca-se aqui adaptar um código para números de Mach elevados para fluidos compressíveis, à baixos números de Mach para fluidos incompressíveis.

Através do método da *compressibilidade artificial*, a equação (42), torna-se,

$$V \frac{\partial q}{\partial t} + \oint_{\partial\Omega} \vec{f}_i \hat{n} dl - \oint_{\partial\Omega} \vec{f}_v \hat{n} dl = 0, \quad (51)$$

Onde:

\hat{n} - vetor normal apontando para fora do volume de controle V ;

q - vetor de variáveis dependentes (ou variáveis primitivas);

f_i - fluxo convectivo normal à face do volume de controle;

f_v - fluxo viscoso normal à face do volume de controle.

O vetor de variáveis dependentes pode ser escrito sob a seguinte forma:

$$q = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Os fluxos viscoso e convectivo podem ser reescritos, mas agora em sua formulação apresentará um novo componente, esta componente é o termo de compressibilidade artificial, β .

$$\vec{f}_c \cdot n = \begin{bmatrix} \beta\Theta \\ u\Theta + n_x p \\ v\Theta + n_y p \end{bmatrix}, \quad (53)$$

$$\vec{f}_v \cdot n = \begin{bmatrix} 0 \\ n_x \tau_{xx} + n_y \tau_{xy} \\ n_x \tau_{xy} + n_y \tau_{yy} \end{bmatrix}, \quad (54)$$

Onde:

u e v são as componentes cartesianas da velocidade nas direções em x e y ;

p – pressão;

Θ - velocidade normal à face do volume de controle, onde esta assume a forma:

$$\Theta = n_x u + n_y v . \quad (55)$$

O tensor de tensões viscosas é dado por:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \mu \frac{2}{Re} u_x , \\ \tau_{yy} &= \mu \frac{2}{Re} v_y , \\ \tau_{xy} &= \mu \frac{2}{Re} (u_y + v_x) , \end{aligned} \quad (56)$$

Onde:

μ - viscosidade para o fluxo laminar;

Re - número de Reynolds.

Para se obter a solução das equações deve-se fazer a divisão do domínio em um número finito de triângulos a partir dos quais definem-se os volumes de controle. Os fluxos convectivos são avaliados nas faces dos volumes de controle. Dessa forma o fluxo convectivo através das faces do volume de controle são dados pela equação:

$$\Phi = \frac{1}{2} (f(q^+; n) + f(q^-; n)) - \frac{1}{2} |\tilde{A}| (q^+ - q^-) , \quad (57)$$

Onde:

Φ – função de fluxo numérico utilizada para calcular o fluxo convectivo;

f - vetor do fluxo dado pela equação (53);

q^+ e q^- são os valores das variáveis dependentes para os lados esquerdo e direito do volume de controle, tendo como referencial a face em comum entre estes dois volumes, e $|\tilde{A}|$ é uma matriz diagonal cujos valores representam os autovalores da matriz Jacobiana. Na forma matricial, $|\tilde{A}|$ pode ser escrita como,

$$|\tilde{A}| = \tilde{T} |\tilde{\Lambda}| \tilde{T}^{-1} , \quad (58)$$

Onde $|\tilde{\Lambda}|$ representa os autovalores da matriz Jacobiana:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \Theta , \\ \lambda_2 &= \Theta + c , \\ \lambda_3 &= \Theta - c . \end{aligned} \quad (59)$$

E c é a ponderação da velocidade normal à face do volume de controle pelo termo da compressibilidade artificial, ou seja,

$$c = \sqrt{\Theta^2 + \beta} . \quad (60)$$

Os autovetores associados à matriz Jacobiana são representados na forma:

$$T = Q^T R = \begin{bmatrix} 0 & -c(\Theta - c) & c(\Theta + c) \\ -n_y & n_x - n_y\phi & -(n_x c + n_y\phi) \\ n_x & n_y c + n_x\phi & -n_y c + n_x\phi \end{bmatrix}. \quad (61)$$

A matriz inversa dos autovetores é dada por,

$$T^{-1} = R^{-1}Q = \begin{bmatrix} -\frac{\phi}{c^2} & -\frac{\phi\Theta n_x + n_y c^2}{c^2} & -\frac{\phi\Theta n_y + n_x c^2}{c^2} \\ \frac{1}{2c^2} & \frac{(\Theta + c)}{2c^2} n_x & \frac{(\Theta + c)}{2c^2} n_y \\ \frac{1}{2c^2} & \frac{(\Theta - c)}{2c^2} n_x & \frac{(\Theta - c)}{2c^2} n_y \end{bmatrix}. \quad (62)$$

Onde:

ϕ – é a velocidade tangencial à face do volume de controle, e sua formulação é:

$$\phi = n_x v - n_y u. \quad (63)$$

Nas equações (57) a (62), o símbolo “~” representa os valores médios para as quantidades avaliadas, os quais já estão implementadas no código **HYNE2D**. Os valores do lado esquerdo e direito podem ser avaliados através uma expansão em série de Taylor em torno de um ponto central no volume de controle (centroide), de modo que os valores para as variáveis dependentes ou primitivas na face do volume de controle pode ser dada a partir de:

$$q_{\text{face}} = q_{\text{nó}} + \nabla q \cdot \vec{r}, \quad (64)$$

Onde:

\vec{r} - vetor que se estende do ponto central até o ponto médio de cada extremidade;

∇q - gradiente das variáveis dependentes para o nó e é avaliado pelo método dos mínimos quadrados.

A Eq. (64) é necessária para aumentar a ordem de precisão das variáveis dependentes para o cálculo do fluxo convectivo. Isto é necessário em função da característica hiperbólica deste termo, pois as derivadas parciais envolvidas são instáveis numericamente. Logo, o aumento da precisão faz-se necessário para aumentar a acurácia nos cálculos, que em conjunto com uma função de fluxo adequada, Eq. (57), irá possibilitar o controle numérico quanto à presença de valores espúrios ao longo da solução.

O termo de compressibilidade artificial pode ser adotado uma constante, (ANDERSON, 1996), ou calculado a partir da extrapolação dos valores de velocidade, (JAMESON, 2001). Experimentos indicam que a influência na dissipação numérica da solução é pequena para valores menores que 100. Ainda que valores elevados de β correspondem a valores elevados de c , se β for escolhido para ser muito grande, existirá uma

grande disparidade entre as magnitudes dos próprios valores. Esta disparidade pode levar a lentas taxas de convergência. Devido a isso, em todas as simulações presentes neste trabalho serão consideradas duas possibilidades, a saber: (i) valor constante, $\beta = 10$, (JAMESON, 2001); (ii) valor extrapolado a partir das velocidade do campo de solução, (JAMESON, 2001).

3.2 DISCRETIZAÇÃO NO TEMPO

3.2.1 Esquema com dois passos no tempo

Neste esquema são utilizados dois tempos diferentes para a solução numérica do sistema de equações diferenciais ordinárias, sendo que um deles é em tempo real (t) e outro um tempo fictício (t^*). O tempo real é derivado e discretizado utilizando uma fórmula de segunda ordem de precisão, e para o esquema do tempo fictício utiliza-se o método de Runge-Kutta. A cada passo do tempo real, o tempo fictício segue para a convergência através de um método de múltiplos passos.

Com as parcelas de fluxo viscoso, convectivo e a dissipação artificial no volume de controle (Ω_i), o esquema com dois passos de tempo para um nó i é dado pela equação (71). No entanto, é necessário definir anteriormente os membros da equação (71), onde a matriz de pré-condicionamento, P , é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 1/\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (65)$$

O fluxo convectivo é dado por:

$$\oint_{S_i} (F_i i + G_j j) \cdot \mathbf{n} dS \approx \sum_{j=1}^{J_i} (\mathcal{F})_j \Delta S_j = C_i(Q), \quad (66)$$

Onde:

$(\mathcal{F})_j = F_i n_x + G_i n_y$ - é o fluxo numérico avaliado no ponto médio da face j ;

J_i - é o número de faces vizinhas para o nó i ;

n_x, n_y - são as componentes do vector unitário normal para fora do limite do nó duplo;

ΔS_j - a área do limite do nó duplo associado com a face j ;

$C_i(Q)$ - é a soma numérica dos fluxos convectivo através do limite do volume de controle.

O fluxo viscoso é dado por:

$$\oint_{S_i} (F_V i + G_V j) \cdot \mathbf{n} dS \approx \sum_{j=1}^{J_i} (\mathcal{F}_V)_j \Delta S_j = V_i(Q), \quad (67)$$

Onde:

$(\mathcal{F}_V)_j = F_V n_x + G_V n_y$ - é o fluxo numérico avaliado na face j ;

J_i - é o número de faces conectadas ao nó i ;

ΔS_j - é a área do limite do nó duplo associado com a face j ;

$V_i(Q)$ - é a contribuição final do fluxo viscoso no nó i ;

E por fim, o termo de dissipação artificial para o caso de discretização espacial centrado, o qual é adicionado à equação (71). Caso contrário este termo será considerado igual a zero, pois o fluxo numérico será baseado em um esquema *upwind* (ROE, 1982), conforme equação:

$$D_i(Q) = - \sum_{j=1}^{J_i} \sigma_4 \rho_{ij} (\delta_{xx} Q_j - \delta_{xx} Q_i), \quad (68)$$

Onde:

J_i - é o números de nós conectados ao nó i pelas faces vizinhas;

σ_4 - é o coeficiente de dissipação escalar de quarta ordem;

ρ_{ij} - é a estimativa de raio espectral associado com o vizinho de face j ;

δ_{xx} - é o operador indivisível de segunda ordem definido como:

$$\delta_{xx} Q_i = \sum_{j=1}^{J_i} (Q_j - Q_i). \quad (69)$$

Onde i e j representam os volumes de controle que compartilham a face $\partial\Omega$.

E para encontrar a estimativa do raio espectral utiliza-se a expressão:

$$\rho_{ij} = (|u_n| + c) \Delta S_j, \quad (70)$$

Onde u_n é velocidade normal à face do volume de controle, $u_n = u n_x + v n_y$ e a velocidade artificial do som é $c = \sqrt{u_n^2 + \beta}$.

Com todos os membros definidos a equação geral para o esquema de dois passes no tempo é:

$$P \frac{d}{dt^*} (Q_i \Omega_i) + \frac{d}{dt^*} (U_i \Omega_i) + C_i(Q) = \Omega_i(Q) + D_i(Q). \quad (71)$$

O sistema de equações pode ser escrito conforme a equação:

$$\frac{d}{dt^*}(Q_i \Omega_i) + P^{-1}R_i^*(Q) = 0, \quad (72)$$

Onde:

$R_i^*(Q)$ – é o resíduo da equação (72), considerando a solução variável no tempo t^* numericamente este termo pode ser entendido como variável no tempo (t^*).

O termo $R_i^*(Q)$ é discretizado utilizando o método de *backward* de segunda ordem, conforme a equação e Δt é o passo de tempo real.

$$R_i^*(Q) = \frac{3}{2\Delta t}(U_i^{n+1} + \Omega_i^{n+1}) - \frac{2}{\Delta t}(U_i^n + \Omega_i^n) + \frac{1}{2\Delta t}(U_i^{n-1} + \Omega_i^{n-1}) + R_i(Q). \quad (73)$$

O termo do resíduo que corresponde às variações de fluxo através do volume de controle é escrito na forma:

$$R_i(Q) = C_i(Q) - \Omega_i(Q) - D_i(Q) \quad (74)$$

Para avançar do tempo atual t_n para o próximo tempo t_{n+1} , o termo $R_i^*(Q)$, equação (73) é obtido através da discretização da derivada do tempo real, como obtido na equação (67). Nesse estágio o tempo real é mantido constante, enquanto o tempo fictício varia através de um esquema de múltiplos estágios até atingir a convergência, tem-se então, a condição para iniciar o próximo passo de tempo, t_i (KALLINDERIS; AHN, 2005). Devido a isso, tal esquema depende da eficiência da solução do tempo fictício no estado estacionário. Para resolver o modelo numérico contendo o tempo fictício é utilizado o método de Runge-Kutta de cinco estágios.

$$\begin{aligned} Q^{(0)} &= Q^k, \\ Q^{(1)} &= Q^0 - \alpha_1 \Delta t_i^* \frac{1}{\Omega_i} P^{-1} R_i^*(Q^0), \\ Q^{(2)} &= Q^0 - \alpha_2 \Delta t_i^* \frac{1}{\Omega_i} P^{-1} R_i^*(Q^1), \\ Q^{(3)} &= Q^0 - \alpha_3 \Delta t_i^* \frac{1}{\Omega_i} P^{-1} R_i^*(Q^2), \\ Q^{(4)} &= Q^0 - \alpha_4 \Delta t_i^* \frac{1}{\Omega_i} P^{-1} R_i^*(Q^3), \\ Q^{(5)} &= Q^0 - \alpha_5 \Delta t_i^* \frac{1}{\Omega_i} P^{-1} R_i^*(Q^4), \end{aligned} \quad (75)$$

$$Q^{k+1} = Q^{(5)},$$

Onde Δt^* é o passo de tempo fictício e α_1 a α_5 são coeficientes utilizados para otimizar a solução numérica ou seja, para acelerar a convergência para o estado estacionário. De acordo com Melson (1993) e assumem os valores são assumidos como:

$$\alpha_k = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, 1 \right\}.$$

Foi utilizado o esquema centrado na face para os fluxos difusivos (fluxo viscoso e dissipação artificial) somente nos estágios ímpares. O esquema de múltiplos estágios é capaz de analisar todos os fluxos em cada estágio.

O esquema com dois passos de tempo é dividido em dois: o passo de tempo verdadeiro e passo de tempo fictício. O passo de tempo verdadeiro é discretizado através do método de *backward* de segunda ordem, este método é estável independente do tamanho do passo no tempo. Já para o tempo fictício é necessário encontrar o passo de tempo, qual pode ser encontrado pela equação:

$$\Delta t_i^* = \omega \frac{\Omega_i}{A_x + A_y + D}, \quad (76)$$

Onde:

$$A_x = (|u| + c_x)N_x, \quad A_y = (|v| + c_y)N_y, \quad (77)$$

e

$$D = 2 \frac{1}{Re} \frac{\Omega_i}{N_x + N_y}, \quad (78)$$

As velocidades artificiais de som em cada coordenada são:

$$c_x = \sqrt{\mu^2 + \beta}, \quad c_y = \sqrt{v^2 + \beta}, \quad (79)$$

e projeção dos versores de face serão dadas por:

$$N_x = \frac{1}{2} \sum_e |N_x|_e, \quad N_y = \frac{1}{2} \sum_e |N_y|_e, \quad (80)$$

onde N_x e N_y são os componentes do vetor normal a face.

O fator de ponderação ω e o número de CFL local (Couran, Friedrichs e Lewy Condition) e será usado valores entre 1 a 3, para preservar a estabilidade numérica da solução, (HIRSCH, vol.2, 2007).

3.3 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Neste item serão apresentadas as condições de contorno para escoamentos compressíveis transônico e subsônico e para escoamento incompressível através da aplicação do método de compressibilidade artificial. Ambos os casos são calculados considerando as equações características de Navier-Stokes e condições para contornos distantes (“*farfield*”).

E ainda, para aplicar as condições de contorno foram utilizadas células fantasmas (*ghost cell*), as quais não são representadas fisicamente no domínio de solução, pois simulam uma posição das variáveis conservadas na memória computacional, quando calculados os fluxos nas arestas dos volumes de controle (GOMES, 2012).

3.3.1 Condições de contorno para fluxos subsônicos e transônicos

As condições de contorno iniciais e de limite para fluxos subsônicos e transônicos utilizadas nesse trabalho são para parede não viscosa ou escorregamento, parede viscosa ou não-escorregamento e condição não reflexiva ou contorno distante (do inglês: *farfield*). Todas as extrapolações de variáveis para os cálculos das condições de contorno foram realizadas a partir dos valores alocados no centroide do volume de controle adjacente à fronteira, ou seja, do volume de controle interior.

3.3.1.1 Condição de parede

Tem-se dois tipos de condições de contorno para representar numericamente uma parede sob a condição de escoamento, as quais dependem se o fluido é viscoso ou não-viscoso.

3.3.1.2 Parede Não-Viscosa

Aa condição de contorno para fluido não-viscoso requer que a componente normal da velocidade na parede seja igual a zero. Para que essa condição seja atendida, é implementado um sistema de coordenadas auxiliares ligadas ao limite da face do volume de controle. Um dos eixos de coordenadas auxiliares é denotado pela letra **n**, o qual é alinhado com a direção

do vetor normal à face. O outro eixo, \mathbf{t} , é alinhado com a direção tangencial à face do volume de controle.

Desta forma, um vetor velocidade genérico, \mathbf{v} , pode ser projetado no sistema de coordenadas auxiliares, tendo como resultado as componentes:

$$\begin{aligned} v_n &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \\ v_t &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}. \end{aligned} \quad (81)$$

Através destas equações, a velocidade interna na célula, é representada por \mathbf{v}_{int} , e quando projetada no sistema de coordenadas auxiliares resulta em:

$$\begin{aligned} v_{n_{int}} &= \mathbf{v}_{int} \cdot \mathbf{n}, \\ v_{t_{int}} &= \mathbf{v}_{int} \cdot \mathbf{t}. \end{aligned} \quad (82)$$

Para as células fantasmas, a velocidade é definida de forma que quando somada a velocidade interna, a componente resultante seja igual à zero. As componentes de velocidade para a célula fantasma são representadas pelo subscrito gh , e são dadas como:

$$\begin{aligned} v_{n_{gh}} &= -v_{n_{int}}, \\ v_{t_{gh}} &= v_{t_{int}}. \end{aligned} \quad (83)$$

A projeção destas componentes no sistema de coordenadas cartesianas é obtido por:

$$v_{gh} = \begin{bmatrix} v_{n_{gh}} & v_{t_{gh}} & v_{r_{gh}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \end{bmatrix}, \quad (84)$$

Para obter as propriedades conservadas nas células fantasmas é preciso considerar pressão igual a zero e os gradientes de temperatura ao longo da direção normal a face. Fazer esta última consideração, não é o correto para faces curvas, visto que, nesses casos o gradiente de pressão é em função da curvatura da parede. Entretanto, para uma boa aproximação é considerar que o gradiente de pressão seja igual a zero na direção normal à parede. Diante disso, a densidade e a energia total por unidade de volume podem ser assumidos como:

$$\rho_{gh} = \rho_{int}, \quad e_{gh} = e_{int}. \quad (85)$$

Os gradientes para as componentes da velocidade são copiados do interior da célula para o volume da célula fantasma, através de uma extrapolação de ordem zero. Os gradientes de pressão e de energia interna da célula fantasma podem ser copiados para a célula vizinha com o sinal oposto. Esta operação garante que a condição de gradiente zero seja correta para as propriedades nas condições de parede.

3.3.1.3 Condição de parede viscosa

A velocidade na face da célula fantasma deve ser definida de forma que seja igual a zero. A partir de que isso seja definido, as componentes de velocidade para os volumes de controle para as células fantasmas podem ser dadas por:

$$\begin{aligned}u_{gh} &= -u_{int}, \\v_{gh} &= -v_{int}.\end{aligned}\tag{86}$$

Considera-se parede adiabática nas células fantasmas para se obter a densidade e a energia total por unidade de volume na forma conservada. Além disso, o gradiente de pressão deve ser igual a zero ao longo da parede na direção normal. De maneira semelhante para o caso da parede não viscosa, essa última opção é correta para um fluido viscoso que flui sobre paredes curvas. Essa hipótese é considerada para simulações de fluxo viscoso, onde tem-se células muito finas perto da parede. Dessa forma, o erro para tal suposição irá diminuir à medida que a altura da célula se tornar menor.

Deste modo, as condições de contorno para a densidade e para energia total por unidade de volume, são implementadas a partir de um modelo similar a formulação (84).

3.3.2 Condição não reflexiva

3.3.2.1 escoamento subsônico:

As invariantes de Riemann são constantes derivadas das equações características de Euler, e portanto, verificam localmente se a condição de escoamento é de entrada ou de saída na face, são utilizadas para implementar as condições de contorno não reflexivas, ou seja, para que aplicações em contornos distantes não venham a ter problema de reflexo de resultados

nos cálculos para as condições de contorno para campos subsônicos. Na interface do limite externo, as equações se aplicam como:

$$R^- = R_\infty^- = v_{n\infty} - \frac{2}{\gamma-1} a_\infty, \quad R^+ = R_\infty^+ = v_{nint} + \frac{2}{\gamma-1} a_{int}, \quad (87)$$

Onde:

$v_{n\infty}$ é a componente de velocidade normal à superfície exterior do escoamento;

v_{nint} é a componente de velocidade normal do volume interno adjacente à fronteira;

Onde os subscritos ∞ e int , representam as propriedades na condição de fluxo livre e nas regiões internas, e v_n é a componente de velocidade normal à superfície externa, que para o sentido exterior considera-se o sinal positivo. Determinando v_n e a , encontra-se as propriedades na fronteira da face, onde o subscrito f representa as propriedades na superfície de fronteira.

$$v_{nf} = \frac{R_{int}^+ + R_\infty^-}{2}, \quad a_f = \left(\frac{\gamma-1}{4}\right) (R_{int}^+ - R_\infty^-). \quad (88)$$

Para limites subsônicos, onde $0 < v_{nint}/a_{int} < 1$, as componentes da velocidade são obtidas através da velocidade normal, definida na equação (88). Assim:

$$\begin{aligned} u_f &= u_{int} + (v_{nf} - v_{nint})n_x, \\ v_f &= v_{int} + (v_{nf} - v_{nint})n_y. \end{aligned} \quad (89)$$

Através da extrapolação da entropia no interior do centróide da célula adjacente obtém-se:

$$\rho_f = \left(\frac{\rho_{int}^\gamma a_f^2}{\gamma P_{int}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad p_f = \frac{p_f a_f^2}{\gamma}. \quad (90)$$

Para uma entrada subsônica, onde $-1 < v_{nint}/a_{int} < 0$, as propriedades são similares as obtidas a partir das variáveis para fluxo livre, como:

$$\begin{aligned} u_f &= u_\infty + (v_{nf} - v_{n\infty})n_x, \\ v_f &= v_\infty + (v_{nf} - v_{n\infty})n_y. \end{aligned} \quad (91)$$

E:

$$\rho_f = \left(\frac{\rho_\infty^\gamma a_f^2}{\gamma p_\infty} \right), \quad p_f = \frac{\rho_f a_f^2}{\gamma}. \quad (92)$$

3.5.2.3 Outras considerações para contornos distantes não reflexivas

Em primeiro lugar, os gradientes de variáveis primitivas nas células fantasma são todos copiados a partir do vizinho interno. Esta operação é aplicada tanto para fluxos subsônicos e supersônicos. Em segundo lugar, deve salientar-se que todas as expressões derivadas das invariantes Riemann são utilizadas para calcular as propriedades de fluxo na face. No entanto, para a aplicação das condições de contorno, deve-se obter as propriedades de fluxo nos volumes das células fantasmas. A expressão para as propriedades conservadas no volume fantasma, como uma função das propriedades da face, é prontamente obtido a partir de:

$$q_{gh} = 2q_f - q_{int}. \quad (93)$$

Onde q_{gh} indica uma propriedade conservada genérica no volume fantasma, q_f é a respectiva propriedade conservada na face, e q_{int} , de forma semelhante, é conservado na propriedade do elemento interno. Também é importante ressaltar aqui que as invariantes de Riemann anteriormente descritas são derivadas para as condições de contornos distantes. Dente modo, eles só devem ser usados para casos de fluxo com esse tipo de limite. É muito recomendável evitar o uso de invariantes de Riemann para outras situações de fluxo, tais condições de contorno para entrada e de saída para casos de fluxo interno, onde esses limites podem estar perto de paredes sólidas.

3.3.3 Condições de contorno para fluidos incompressíveis

As condições de contorno para fluido incompressível devem ser aplicadas para atender as condições impostas ao escoamento devido à implementação do método da compressibilidade artificial.

As condições de parede não-viscosa e viscosa são implementadas identicamente como apresentado para o escoamento subsônico e transônico.

Para a condição não reflexiva o será aplicado o modelo unidimensional linearizado das equações características do escoamento (ANDERSON, 2010). A partir deste modelo, tem-se a equação:

$$\frac{dq}{dt} + A \frac{dq}{dx} = 0, \quad (94)$$

Onde:

$$A = \frac{\partial f_i}{\partial q}. \quad (95)$$

A equação (91) pode ser diagonalizada através de uma transformação similar para se obter um sistema de equações dissociadas:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (96)$$

Onde w é um vetor de variáveis características, que assume os seguintes valores:

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_o(p + \Theta_o \Theta) - c_o^2 \phi \\ p + (\Theta_o + c_o) \Theta \\ p + (\Theta_o - c_o) \Theta \end{bmatrix}. \quad (97)$$

O segundo autovalor $\Theta + c$ é sempre positivo, quando assumido que os pontos limites sejam normal ao contorno exterior e w_2 é o mesmo no limite como no interior da malha. Da mesma forma o vetor $\Theta - c$ é sempre negativo. Assim, w_3 é o mesmo como na fronteira de fluxo livre. A relação entre o w_1 no limite depende ou não se o fluxo é para fora ou para dentro do domínio. Para a entrada o valor do limite é o mesmo que no fluxo livre, já para a saída o limite será o mesmo que para o fluxo interior. Essas relações fornecem um sistema com três equações com três incógnitas desconhecidas, que podem ser resolvidas para a pressão, velocidade normal e para a velocidade tangencial no limite do campo distante. Assim

$$\begin{bmatrix} \phi_o & \phi_o \Theta_o & -c_o^2 \\ 1 & \Theta_o + c_o & 0 \\ 1 & \Theta_o - c_o & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_b \\ \Theta_b \\ \phi_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_o p_r + \phi_o \Theta_o \Theta_r - c_o^2 \phi_r \\ p_i + (\Theta_o + c_o) \Theta_i \\ p_\infty + (\Theta_o - c_o) \Theta_\infty \end{bmatrix}. \quad (98)$$

Para esse sistema o subscrito r ao lado direito da equação se refere aos dados obtidos fora do domínio de entrada e de dentro do domínio de saída. O subscrito i , aponta os dados obtidos de dentro do domínio, e o subscrito ∞ indica os dados obtidos fora do domínio, qual inclui a correção do ponto de vértice para contabilizar a elevação. Vale salientar que os

valores tomados como referência são avaliados em condições de fluxo livre a fim de facilitar a linearização do fluxo de fronteira para o campo distante.

3.4 DESCRIÇÃO DA METODOLOGIA

A metodologia aplicada no desenvolvimento deste projeto deverá atender às necessidades pertinentes ao desenvolvimento, execução e análise numérica de escoamentos de fluidos a baixas velocidades. Para tanto empregar-se-á a seguinte metodologia:

(i) Para o desenvolvimento deste projeto será necessário implementar uma sub-rotina baseada no método da compressibilidade artificial. A linguagem de programação *Fortran 95/2003* será empregada, (Chapman, 2007). Neste trabalho será utilizado o software livre e de código aberto para Matlab, chamado *DistMesh*, Persson e Strang (2004), Persson (2004) para o desenvolvimento das malhas ao redor da geometria NACA0012 e o software livre *Gmesh* para desenvolver as malhas ao redor do cilindro bidimensional;

(ii) Para execução do código será utilizado o compilador *Gfortran* (*GNU Fortran – Free Software Foundation*);

(iii) Na etapa de pós-processamento, análise dos resultados, são duas as possibilidades, os programas *ParaView* ou o *ViSit*.

Todos os aplicativos mencionados nos itens (i), (ii) e (iii) estão disponíveis no sistema operacional Linux, o qual será utilizado em todas as etapas desta pesquisa. Os códigos utilizados pelo gerador de malhas *DistMesh* serão adaptados ao modelo padrão do programa *Scilab*, compatível e disponível gratuitamente nas distribuições Linux.

A metodologia empregada na execução deste projeto é baseada em programas livres e na sua maioria de código aberto, incluindo o sistema operacional. É importante lembrar que o código fonte, *HYNE2D*, já está implementado, validado e executando simulações para baixos valores para o número de Mach, cabendo exclusivamente à etapa de desenvolvimento a implementação do método compressibilidade artificial, (CHORIN, 1967). O código *HYNE2D* foi implementado utilizando o método de Volumes Finitos baseado em arestas num contexto de malhas não-estruturadas, sendo esta última opção extremamente desejável para simulações cujas geometrias de interesse sejam complexas.

4 RESULTADOS

As simulações realizadas utilizando o modelo numérico supracitado serão apresentadas neste capítulo. As simulações objetivaram analisar o efeito de baixas velocidades quanto à estabilidade numérica, preservação das variáveis dependentes ao longo do tempo e a acurácia da solução através de comparações com resultados experimentais.

4.1 ESCOAMENTO TRÂNSONICO EM TORNO DO PERFIL NACA 0012

Algumas das simulações feitas no código *HYNE2D* serão apresentadas aqui, primeiramente para o perfil NACA 0012, para qual considerou-se número de Mach igual a 0,8. Para a simulação desse perfil a densidade foi adimensionalizada com respeito à densidade do escoamento livre e a pressão foi adimensionalizada com respeito a densidade multiplicada pela velocidade do som ao quadrado.

A seguir é possível observar a malha para a geometria completa que foi gerada na simulação do perfil NACA 0012, esta malha para este tipo de solução é muito grossa, pois contém 668 volumes de controle e 360 nós. Para casos onde a geometria é de maior complexidade é interessante usar malhas mais refinadas, para se obter melhores resultados.

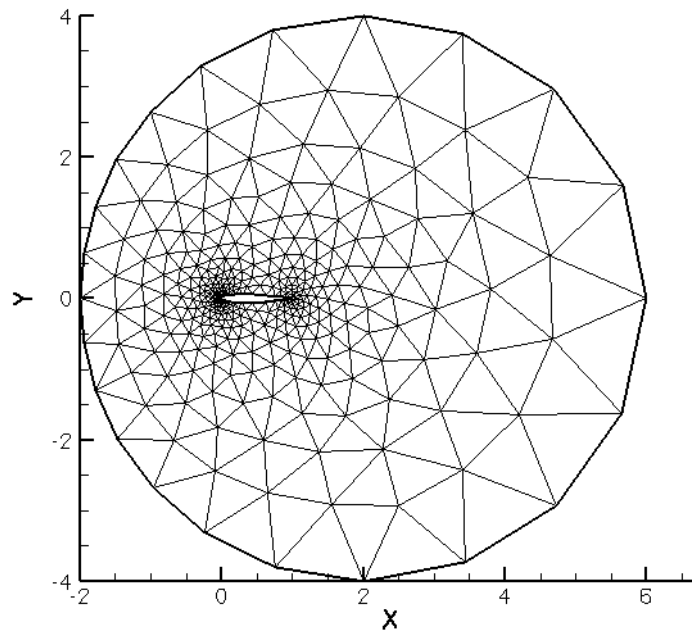


Figura 9- Malha gerada (geometria completa).

Fonte: A autora.

Para maior detalhamento da malha e do perfil da geometria é apresentada a geometria na forma aproximada conforme a Figura 10.

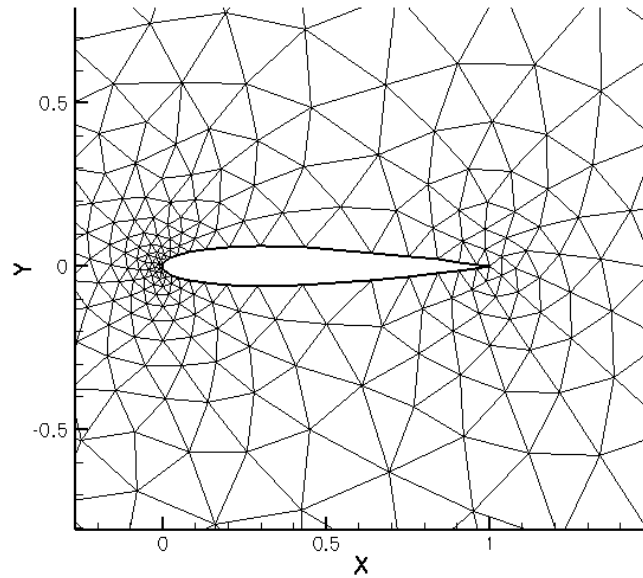


Figura 10- Malha gerada (geometria aproximada).
Fonte: A autora.

Na Figura 11, o campo de pressão ao redor da geometria pode ser observado, no entanto para esse caso devido ao tempo ser curto, a simulação foi realizada utilizando uma malha mais grosseira, o que causou uma distorção na mesma, como pode ser visto na Figura 11, para se evitar essa distorção na malha é necessário a utilização de malhas mais refinadas, que requerem um pouco mais de tempo.

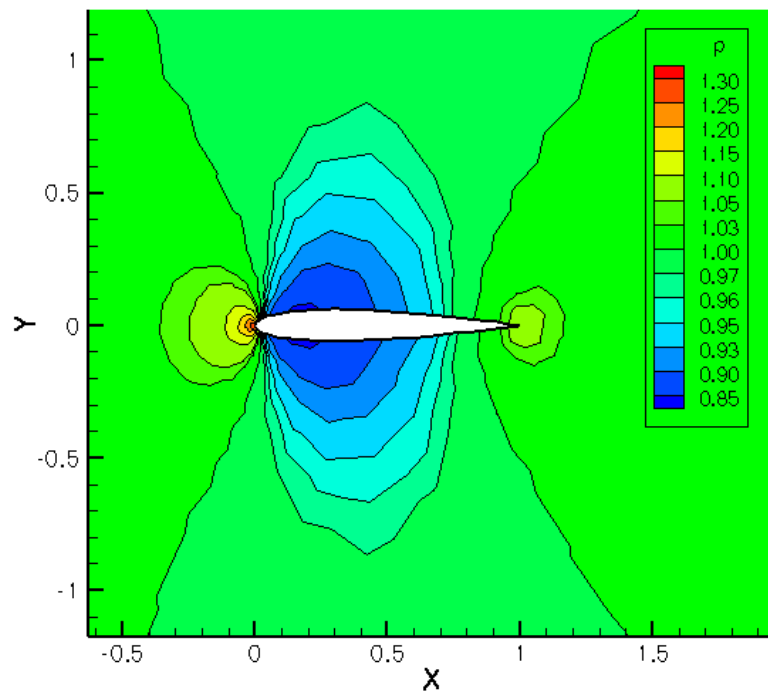


Figura 11- Campo de pressão.
Fonte: A autora.

Como pode ser visto na Figura 12 as linhas de corrente do fluido acompanham perfeitamente o corpo seguindo com o escoamento, com isto pode se perceber que o código atende perfeitamente à física do escoamento, assim, é possível afirmar que o código consegue simular perfeitamente escoamentos para baixos números de Mach.

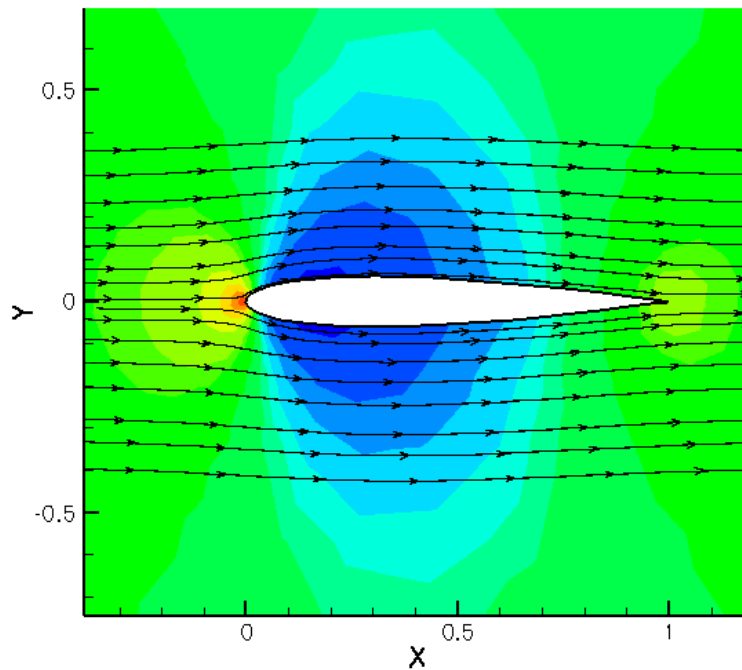


Figura 12 - Linhas de corrente de fluido.
Fonte: A autora.

Na figura 13, tem-se a relação entre o coeficiente de pressão (C_p) e a corda aerodinâmica para o perfil NACA 0012. [$C_p = \left(\frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \right)$, e U_∞ é a velocidade na direção cartesiana x e ρ_{ar} é igual a 1,225 kg/m³ ao nível do mar e a 15°C]

Nesse resultado compara-se dados obtidos experimentalmente com os resultados obtidos utilizando-se as ferramentas citadas anteriormente, pode-se observar que houve um leve desvio de resultados, isso se dá devido ao fato da utilização de malhas grosseiras, isso impossibilitou também que a captura do choque que forma sobre o perfil não fosse observado. No entanto, mesmo utilizando-se malhas mais grossas o comportamento físico do coeficiente de pressão preservou-se, tornando o trabalho satisfatório, pois, este projeto representa um início de pesquisa, que para se obter melhores resultados será necessário tempos maiores para que as simulações sejam feitas utilizando malhas mais finas.

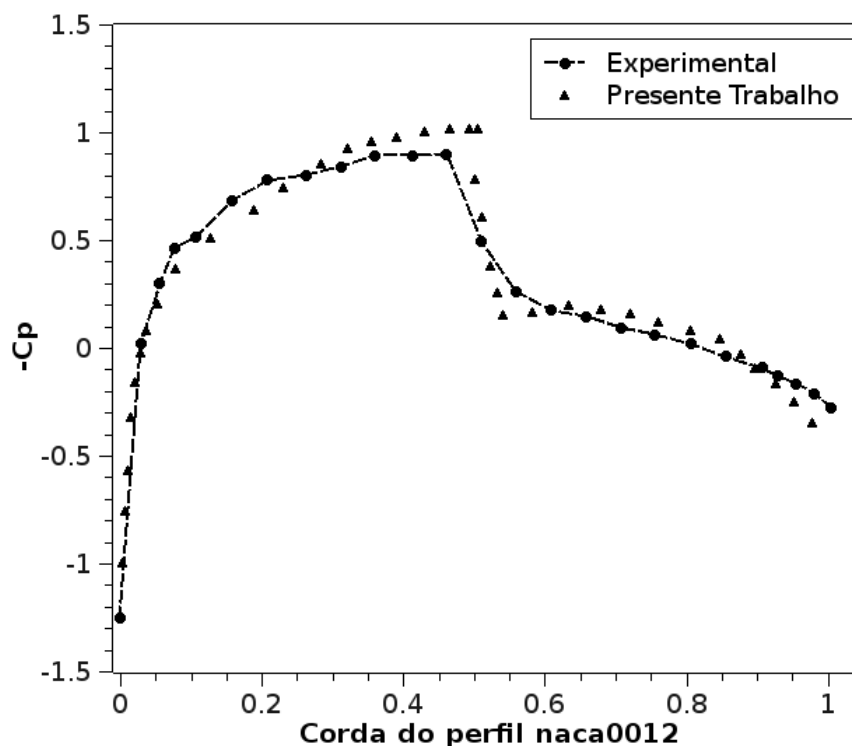


Figura 13 – Gráfico de coeficiente de pressão em relação à corda aerodinâmica do perfil naca0012.
Fonte: O Autor.

4.2 ESCOAMENTO AO REDOR DE UM CILINDRO BIDIMENSIONAL

Em experimentos feitos por Jameson (2001), determinam que para escoamentos de fluxo laminar com baixos números de Reynolds ao redor de cilindros, podem ocorrer grandes disparidades nas escalas do comprimento do escoamento, isso exige com que a malha também tenha disparidade. O problema quando a geração de malha requer uma grande diferença no tamanho é preciso, a princípio, ter algum conhecimento a respeito do local exato onde haverá gradientes elevados. No entanto, normalmente não se tem esse conhecimento antecipado sobre onde são necessárias malhas mais finas para corrigir essas disparidades.

Para corrigir as diferenças nos tamanhos da malha e evitar que em locais indevidos sejam geradas malhas finas, utilizou-se o técnica Delaunay. Esta técnica determina se deve ser feito a eliminação ou o enriquecimento da malha baseada na fração de desvio padrão.

Para a validação dos resultados, foi simulado o escoamento incompressível ao redor do cilindro para dois valores de número de Reynolds, 50, 75 e 100. A simulação foi realizada em uma malha contendo 1102 volumes de controle. Sendo assim tem-se a figura 14 para número de Reynolds igual a 50.

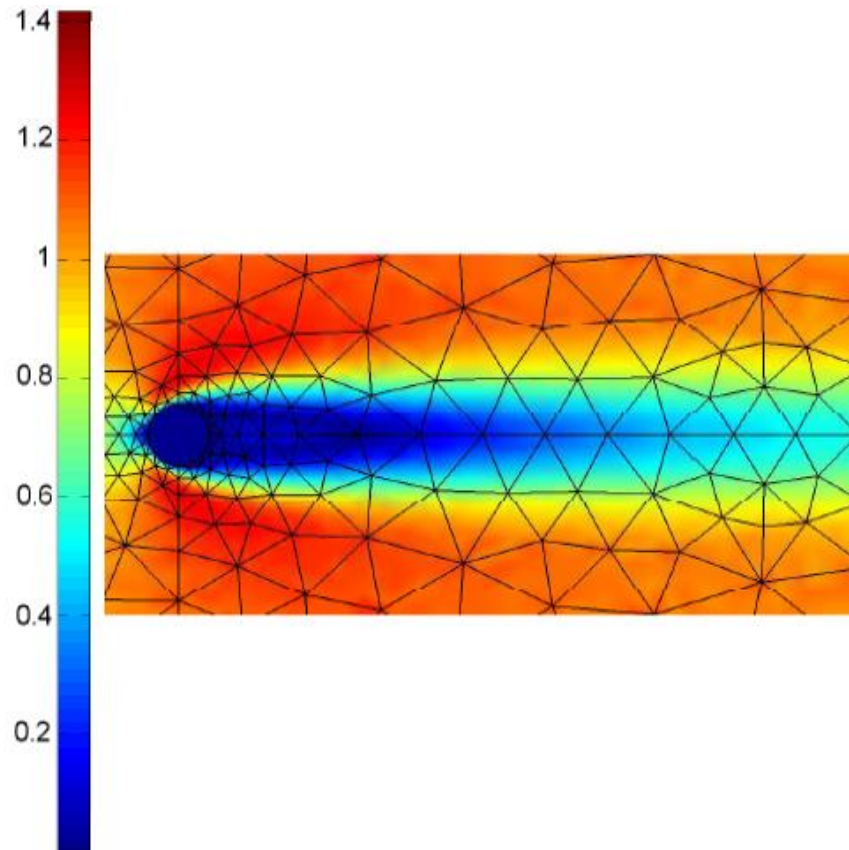


Figura 14: Escoamento incompressível para cilindro a número de Reynolds igual a 50.
Fonte: A autora.

E para escoamento laminar para número de Reynolds igual a 100, tem-se a figura 15.

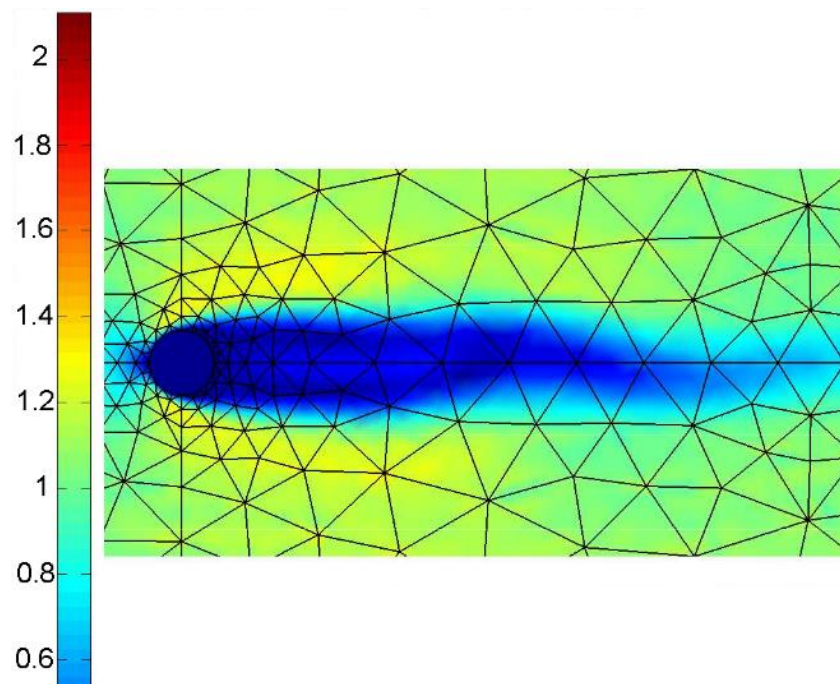


Figura 15 - Escoamento incompressível para cilindro a número de Reynolds igual a 100.
Fonte: A autora.

Foi escolhido o cilindro para simular escoamentos incompressíveis ao seu redor por ter muitos dados e resultados experimentais na literatura envolvendo essa geometria. Para validação dos resultados na geração da malha, Williamson (1988), propôs a relação entre a frequência de Strouhal e o número de Reynolds (Equação (99)), onde ele propôs que escoamentos ao redor de cilindros não se tornará instável até números de Reynolds crítico até 49.

$$St(Re) = \frac{A}{Re} + B + C * Re \quad (99)$$

Onde:

A , B e C – são constantes, onde $A = -3.3265$, $B = 0.1816$ e $C = 1.600 \times 10^{-4}$.

Esta relação propõe que para valores de Reynolds crítico até 49 o escoamento não se tornará instável, já para valores acima de 49 e abaixo de 180 validam algoritmos instáveis. A Figura 16, retrata isso:

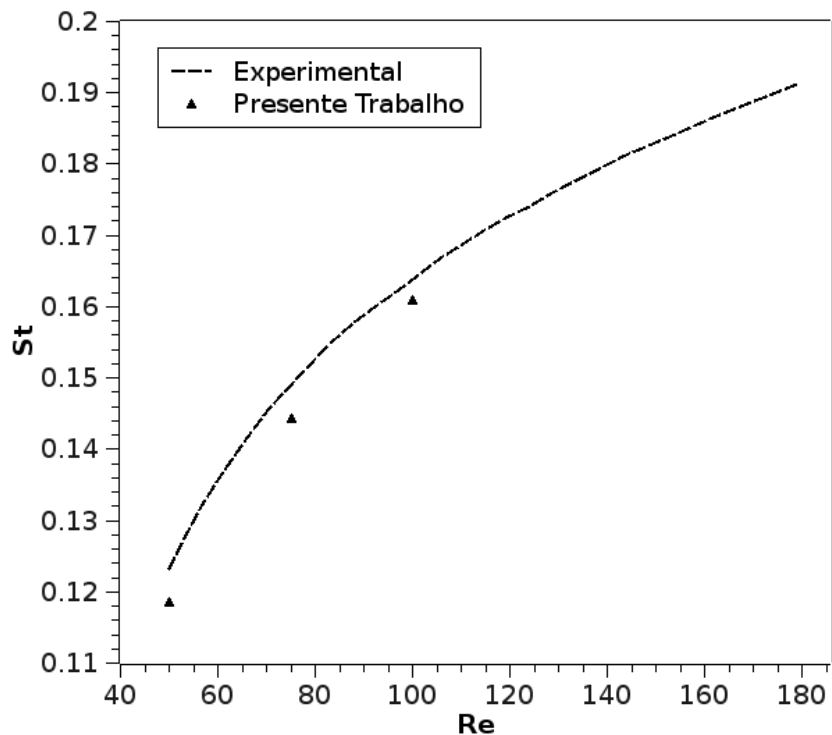


Figura 16 – Relação Strouhal x Reynolds.
Fonte: A autora.

Pode-se observar que os resultados obtidos foram bons, ou seja, mesmo usando malhas mais grosseiras os resultados ficaram muito próximos dos encontrados na literatura.

5 CONCLUSÃO

Os objetivos propostos no começo deste trabalho foram cumpridos, pois foi desenvolvido um código para o Método de Compressibilidade Artificial a fim de simular o escoamento ao redor do cilindro e foi simulado escoamentos subsônico e transônicos para o perfil NACA 0012.

Quanto ao desenvolvimento das simulações para o perfil NACA 0012 à valores de Mach igual a 0,8 as condições foram implantadas através das equações características de Navier-Stokes para condições de contornos distantes, ou como é conhecido também por *farfield*.

Para poder simular o escoamento ao redor de cilindros foi necessário implementar ao código ***HYNE2D*** o método de compressibilidade artificial, também a partir das equações de Navier-Stokes, pois o código ***HYNE2D*** não estava apto à simular escoamentos de fluidos incompressíveis. Para ambos os casos o método de discretização no tempo foi o esquema de dois passos no tempo.

Com os resultados obtidos, é possível afirmar que mesmo com malhas grosseiras o código se adaptou perfeitamente as condições de contorno e os resultados obtidos foram bem próximos aos encontrados na literatura.

Foram utilizadas malhas mais grossas devido ao fato de que malhas mais finas demandam mais tempo para a simulação e necessitam de maior memória computacional, problemas quais foram encontrados no desenvolvimento do trabalho.

A validação dos resultados foi feita a partir de dados experimentais encontrados na literatura. Devido a isso, os resultados obtidos podem ser considerados satisfatórios. Para outras pesquisas deixa-se como sugestão, validar os resultados com experimentos feitos a partir do túnel de vento, desta forma pode ser dado sequencia para esta pesquisa, melhorando os resultados que serão obtidos.

5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestão para trabalhos futuros, indica-se a implementação de métodos que acelerem a convergência dos resultados, podendo assim gerar malhas mais finas em tempos mais curtos. Para isso deixa-se como exemplo a implementação de método *multigrid*. Outra sugestão é a implementação do paralelismo a fim de diminuir o tempo de simulação.

Ainda, pode-se tridimensionalizar o código e implementar o modelo de turbulência, fazendo isso, abre-se ainda mais o leque de aplicações do código. Assim, quando desenvolvidas estas sugestões os alunos do curso de Engenharia Mecânica poderão simular escoamentos e gerar interação com dados experimentais utilizando o túnel de vento da UTFPR câmpus Pato Branco.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDERSON, W. Kyle; RAUSCH, Russ D.; BONHAUS, Daryl L. *Implicit/Multigrid algorithms for incompressible turbulent flows on unstructured grids*. Hampton, Virginia. 1996.
- BECK, Paulo A. **Análise metodológica de simulações de escoamentos turbulentos sobre seções de perfis aerodinâmicos**. 2010. 138 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.
- BIMBATO, Alex M. **Análise do comportamento aerodinâmico de um corpo na presença de uma superfície plana móvel**. 2008. 110 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2008.
- BIMBATO, Alex M. **Estudo de escoamentos turbulentos em torno de um corpo rombudo de superfície hidraulicamente lisa ou rugosa utilizando o método de vórtices discretos**. 2012. 165 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2012.
- ÇENGEL, Yunus A.; CIMBALA, John M. **Mecânica dos Fluidos: Fundamentos e Aplicações**. São Paulo: Editora Mcgraw – Hill Brasil, 2007.
- BONO, Gustavo; BONO, Giuliana F. F.; AWRUCH, Armando M. **Simulação numérica de um corpo rombudo em escoamentos compressíveis**. Rosário, Argentina. v. 3. p. 1413-1422, nov. 2011.
- CHAPMAN, S. Fortran 95/2003 for scientists & engineers. 3rd. ed. New York, USA: McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 2007.
- GABBI, Renan. **Modelagem matemática do escoamento turbulento em canal assimétrico com “Bluff-body”**. 2013. 92 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) - Programa de Pós Graduação em Matemática, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, 2013.
- GIRARDI, Roberto da M. **Modelo aerodinâmico do escoamento plano sobre corpos rombudos**. 1990. 211 f. Tese (Doutorado em Ciências na área de Aerodinâmica, Propulsão e Energia) – Divisão de Pós Graduação, Instituto Tecnológico da Aeronáutica, São Jose dos campos, 1990.
- GOMES, Francisco A. A. **Análise numérica do escoamento hipersônico em torno de corpos rombudos utilizando métodos de alta ordem**. 2012. 257 f. Tese (Doutorado em

ciências) – Programa de Pós Graduação e Pesquisa, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2012.

GONÇALVES, Nelson D. F. **Método dos volumes finitos em malhas não-estruturadas**. 2007. 71 f. Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, 2007.

HERNÁNDEZ, José E. R. **Aplicação de um esquema convectivo de baixa difusão numérica em escoamentos com alta recirculação**. 2005. 139 f. Tese (Doutorado em Ciências em Engenharia Oceânica) – Programa de Pós Graduação, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2005.

JAMESON, A. et al. **Two – dimensional implicit time dependente calculations for incompressible flows on adaptive unstructured meshes**. *America Institute of Aeronautics and Astronautics-AIAA*. 2001.

KALLINDERIS, Y.; AHM, H. T. **Incompressible Navier-Stokes method with general hybrid meshes**. *Journal of Computational Physics*. Paper 210, pg. 75-108, 2005.

MENEGHINI, J. R. **Projeto de pesquisa no tópico de geração e desprendimento de vórtices no escoamento ao redor de cilindros**. Resenha apresentada à Escola Politécnica da USP para obtenção de título de Livre-Docência em Engenharia, (2002).

MORAIS, Emerson L. de. **Verificação de soluções numéricas de escoamentos laminares obtidas com o método dos volumes finitos e malhas não-estruturadas**. 2004. 128 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2004.

PERSSON, P. O., **Mesh Generation for Implicit Geometries**, Ph.D. thesis, Department of Mathematics, MIT, 2004.

PERSSON, P. O., STRANG, G., **A Simple Mesh Generator in MATLAB**, *SIAM Review*, v. 46, n. 2, p. 329-345, 2004.

RIBEIRO, Fernanda A. **Análise aerodinâmica de perfis de asa para aeronaves experimentais tipo JN-1**. 2011. 80 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011.

SANTIAGO, Victor S. **Modelagem numérica do escoamento ao redor de corpos aerodinâmicos utilizando o método de vórtices**. 2008. 275 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

SCHNEIDER, Fabio A.; MALISTA, Clovis R. **Solução numérica simultânea de escoamentos bidimensionais incompressíveis pelo método dos volumes finitos usando malhas não estruturadas.** Caxambu, MG. IX Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências Térmicas. 2002.

SILVA, Daniel F. de C. e. **Simulação numérica do escoamento ao redor de aerofólios via método de vórtices associados ao método dos painéis.** 2005. 175 f. Dissertação (Mestrado em Ciências em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós Graduação de Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.

SPALART, P.; ALLMARAS, S. **A one-equation turbulence model for aerodynamics flows.** *America Institute of Aeronautics and Astronautics-AIAA.* Paper 92-0439, 1992.

WILIAMSON, C.H.K.; **Defining a universal and continuous Strouhal-Reynolds number relationship of the laminar vortex shedding of a circular cylinder.** *Physics of fluids*, 31:pp 2742-2744, 1988.