UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DIRETORIA DE GRADUAÇÃO E EDUCAÇÃO PROFISSIONAL
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MAIARA CRISTINA DOS SANTOS

UM ESTUDO SOBRE AUTOESPAÇOS GENERALIZADOS

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO
2015

MAIARA CRISTINA DOS SANTOS

UM ESTUDO SOBRE AUTOESPAÇOS GENERALIZADOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Coordenação do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - COMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR Campus Toledo, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Wilian Francisco de Araujo

TOLEDO

2015

TERMO DE APROVAÇÃO
DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

MAIARA CRISTINA DOS SANTOS

UM ESTUDO SOBRE AUTOESPAÇOS GENERALIZADOS

Trabalho apresentado como forma de avaliação para o Trabalho de Conclusão de Curso do curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR, *Campus* Toledo, e aprovado pela banca examinadora abaixo.

Profª Mª Jahina Fagundes de Assis

Prof Mª Márcia Regina Piovesan

Prof Dr. Wilian Francisco de Araújo

Toledo, novembro de 2015

DEDICATÓRIA

A todos os professores que estiveram presentes na minha trajetoria acadêmica, especialmente ao meu orientador Dr. Wilian Franscico de Araujo. À Deus e a toda minha família.

Um ladrão rouba um tesouro, mas não furta a inteligência. Uma crise destrói uma herança, mas não uma profissão. Não importa se você não tem dinheiro, você é uma pessoa rica, pois possui o maior de todos os capitais: a sua inteligência. Invista nela. Estude!

Augusto Cury

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, que sempre me apoiaram e acreditaram em uma melhor formação educacional para mim, à meu noivo, que puxa minha orelha toda vez que penso em desistir e à Deus, que me deu a vida e está sempre no meu caminho.

RESUMO

O presente trabalho de conclusão de curso, é um estudo sobre alguns resultados de Álgebra Linear, especificamente sobre Diagonalização de Operadores e Autoespaço Generalizado. Durante o texto há vários exemplos, para que seja possível um melhor entendimento do assunto. Também são colocados alguns resultados sobre Autoespaço Generalizado.

Palavras-chave: Autoespaço Generalizado , Diagonalização de Operadores, Álgebra Linear.

ABSTRACT

Is a study of some results from Linear Algebra, specifically on Diagonalization of Operators and Generalized Eigenspace. During the text, we show some examples to make possible a better understanding of this theory. There are also placed some results on Generalized Eigenspace.

Keywords: Generalized Eigenspace, Diagonalization of Operators, Linear Algebra.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática que precisamos atualmente, de acordo com [4],vai bem mais além do que os mesopotâmios e egípcios precisavam. No estudo da Álgebra Linear grandes ideias estão presentes, embora nem sempre são enfatizadas. Um exemplo é o Teorema de Perron, um teorema sobre cálculos de autovalores e autovetores de uma matriz com entradas positivas. Os autovalores e autovetores permitem entender como um operador linear de dimensão finita atua algébrica e geometricamente sobre o espaço.

Existem muitas aplicações em Álgebra Linear importantes para a sociedade, algumas utilizam-se de Autoespaços Generalizados. Os quais podem ser entendidos pela seguinte definição:

Definição 0.0.1. Seja λ um autovalor de um operador T: V $\to$ V. O autoespaço generalizado correspondente a λ é o subconjunto definido por

$$W_\lambda = \{v \in V | (T - \lambda I)^k(v) = \{0\}, \text{ para algum inteiro } k > 0\}.$$

O presente estudo, a partir desta definição com k variando e com lambdas distintos, objetivando encontrar algumas propriedades, realizando exemplos de Autoespaços Generalizados visando um estudo aprofundado da teoria. O trabalho de conclusão de curso tem o seguinte roteiro:Fazer um estudo preliminar na teoria básica utilizada para o estudo, o desenvolvimento da teoria com exemplos de Autovalores e Autovetores e Autoespaços Generalizados e os resultados obtidos. Com o objetivo geral de estudar sobre Autoespaço Generalizados, e através de exemplos verificar a teoria estudada. Assim, como discorrer sobre a teoria que embasa o estudo, desenvolvendo cálculos com Autoespaços Generalizados, verificacando o comportamento destes espaços sobre si mesmos e verificar algumas propriedades do estudo.

A importância do estudo se justifica, pelo fato da aplicabilidade dos Autoespaços Generalizados nos campos da Análise, Sistemas Dinâmicos, Álgebra de Lie, entre outras.

De acordo com [5], a determinação de autovalores e autovetores de uma matriz são conceitos que merecem uma maior atenção por haver inúmeras aplicações práticas em áreas diversificadas como na Mecânica Quântica, processamento de imagem, análise de vibrações, mecânica dos sólidos, estatística, a teoria dos operadores lineares diferenciais e integrais e nas vibrações de asas de aviões. Neste sentido, dada a importância das aplicações, e pela teoria que geralmente se apresenta em outros materiais e com poucos exemplos, para facilitar o entendimento sobre o Autoespaços Generalizados o trabalho assim se justifica.

A pesquisa será um estudo do que já existe publicado sobre Autoespaços Generalizados, desenvolvida na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso II. Há diferentes materias já publicados sobre o assunto, entretanto as mesmas estão espalhadas em várias aplicações, com isso será desenvolvido o estudo com objetivo de verificar algumas propriedades sobre Autoespaços Generalizados e compilar grande parte do estudo que já se tem. Portanto, essa pesquisa é bibliográfica e como pontua [7], será realizada a partir do registro já disponível, de pesquisas anteriores.

1 PRELIMINARES

O presente capítulo é uma breve revisão de alguns conceitos básicos, vistos no curso de Álgebra Linear. Neste sentido, será omitido as demontrações das definições apresentadas, onde podem ser encontradas nos livros [3], [2] e [1].

1.1 ESPAÇO VETORIAL

Um dos conceitos básicos da Álgebra Linear é o de espaço vetorial. Um *espaço vetorial real* é um conjunto V, não vazio, com duas operações: soma,$VXV \overset{+}{\to} V$, e multiplicação por escalar, $\mathbb{R}XV \overset{\cdot}{\to} V$, tais que, para quaisquer $u, v, w \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$ as propriedades abaixo sejam satisfeitas.

(i) $(u + v) + w = u + (v + w)$

(ii) $u + v = v + u$

(iii) Existe $0 \in V$ tal que $u + 0 = u$. (0 é chamado vetor nulo.)

(iv) Para cada u existe um $-u \in V$ tal que $u + (-u) = 0$.

(v) $a(u + v) = au + av$

(vi) $(a + b)v = av + bv$

(vii) $(ab)v = a(bv)$

(viii) $1u = u$

Exemplos de espaços vetoriais:

(1) O espaço vetorial $\mathbb{R}$.

(2) $V = P_n$, o conjunto dos polinômios com coeficiente reais, de grau menor ou igual a n (incluindo o zero).

1.2 SUBESPAÇOS VETORIAIS

Definição 1.2.1. Dado um espaço vetorial V, um subconjunto W, não vazio, será um *subspaço vetorial* de V se:

(i) $0 \in W$;

(ii) Para quaisquer $u, v \in W$ tivermos $u + v \in W$.

(iii) Para quaisquer $a \in \mathbb{R}, u \in W$ tivermos $au \in W$.

Exemplos:

(1) $V = \mathbb{R}^5$ e $W = (0, x_2, x_3, x_4, x_5); x_i \in \mathbb{R}$. Isto é, W é o conjunto dos vetores de $\mathbb{R}^{\mathbf{5}}$, cuja primeira coordenada é nula. Verifiquemos as condições.

(i) $0 \in U$ e $0 \in W$. Logo $0 \in U \cap W$, isto é $(0, 0, 0, 0, 0) \in W$

(ii) $u = (0, x_2, x_3, x_4, x_5)$, $v = (0, y_2, y_3, y_4, y_5); \in W$.
Então $u + v = (0, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4, x_5 + y_5)$ que ainda pertence a W, pois tem a primeira coordena nula e as outras coordenadas são números reais.

(iii) $ku = (0, kx_2, kx_3, kx_4, kx_5) \in W$, pois tem a primeira coordenada é nula para todo $k \in \mathbb{R}$

Portanto, W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^5$

(2) $V = M(n, n)$ e W é o subconjunto das matrizes triângulares superiores. W é subspaço, pois a soma de matrizes triangulares superiores ainda é uma matriz triangular superior, assim como o produto de uma matriz triangular superior por um escalar.

1.3 ALGUNS RESULTADOS IMPORTANTES

Sejam $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ dois subespaços de um espaço vetorial X:

Teorema 1.3.1. *Intersecção de subespaços: A intersecção* $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$ *ainda é subespaço de* X.

Teorema 1.3.2. *Soma de subespaços: O conjunto* $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 = \{v \in V; v = w_1 + w_2, w_1 \in W_1$ *e* $w_2 \in W_2\}$ *é subespaço de* X.

Definição 1.3.3. Sejam U, V subespaços de X. O subespaço $W = U + V$ é a **soma direta** dos subespaços U e V se cada elemento de $w \in W$ puder ser escrito de maneira única como

$$w = x + y.$$

Nesse caso denotaremos W por $W = U \oplus V$.

Teorema 1.3.4. *O subespaço $W = U + V$ é a soma direta dos subespaços U, V de X se, e somente se, $U \cap V = \{0\}$.*

Demonstração: Suponhamos que $W = U \oplus V$. Seja $z \in U \cap V$ e seja $w = x + y$ podemos escrever $w = (x + z) + (-z + y)$. Como a decomposição $w = x + y$ é única, devemos ter $x = x + z$ e $y = y - z$. Assim, $z = 0$.

Reciprocamente, suponhamos que $x_1 + y_1$ e $x_2 + y_2$ sejam duas decomposições de $w \in W$. Então $x_1 - x_2 = y_2 - y_1$ pertencem simultaneamente a U e V. Logo $x_1 - x_2 = 0 = y_2 - y_1$, então $x_1 = x_2$ e $y_2 = y_1$ garantido a unicidade da decomposição.

Teorema 1.3.5. *Seja X um espaço vetorial de dimensão finita. Então vale:*

(i) todo subespaço Y de X possui dimensão finita;

(ii) todo subespaço Y possui um complemento $Z \subset X$, isto é, existe um subespaço Z de X tal que

$$X = Y \oplus Z.$$

1.4 COMBINAÇÃO LINEAR

Uma combinação linear é uma das características importantes de um espaço vetorial, que é a obtenção de novos vetores a partir de vetores dados.

Definição 1.4.1. Sejam V um espaço vetorial real, $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ e $a_1, ..., a_n$ números reais. Então, o vetor

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$$

é um elemento de V ao que chamamos combinação linear de $v_1, ..., v_n$.

Uma vez fixados vetores $v_1, ..., v_n$ em V, o conjunto W de todos os vetores de V que são combinação linear destes, é um subspaço vetorial. W é chamado *subespaço gerado* por $v_1, ..., v_n$ e usamos a notação

$$W = [v_1, ..., v_n]$$

Note que, formalmente, podemos escrever

$W = [v_1, .., v_n] = \{v \in V; v = a_1v_1 + ... + a_nv_n, a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$

Uma outra caracterização de subespaço gerado é a seguinte:$W = [v_1, ..., v_n]$ é o menor subespaço de V que contém o conjunto de vetores $v_1, ..., v_n$, no sentido de que qualquer outro subespaço W' de V que contenha $v_1, ..., v_n$ satisfará $W' \supset W$

Observe no exemplo (1), que dados os dois vetores, obtem-se novos vetores.

(1) Exemplo:$V = \mathbb{R}^2, v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1)$. Logo $V = [v_1, v_2]$ pois, dado $v = (x, y) \in V$, temos $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$, ou seja, $v = xv_1 + yv_2$.

(2) Seja as seguintes matrizes $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Então $[v_1, v_2] \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}$.

1.5 BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL

Seja V um espaço vetorial com produto interno, existe em V um conjunto finito de vetores, tais que qualquer outro vetor de V seja uma combinação linear deles. Uma base de um Espaço Vetorial é denominado, portanto este conjunto de vetores.

Definição 1.5.1. Um conjunto $\{v_1, ..., v_n\}$ de vetores de V será uma base de V se:

(i) $\{v_1, ..., v_n\}$ é LI.

(ii) $[v_1, ..., v_n] = V$.

Definição 1.5.2. Seja V um espaço vetorial e $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é *linearmente independente* (LI), ou que os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são LI, se a equação

$$a_1v_1 + \ldots + a_nv_n = 0.$$

Implica que $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. No caso em que exista algum $a_i \neq 0$ dizemos que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é *linearmente dependente* (LD), ou que os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são LD.

Vetores linearmente dependentes podem ser caracterizados de uma outra maneira.

Teorema 1.5.3. *$\{v_1, \ldots, v_n\}$ é LD se, e somente se um destes vetores for uma combinação linear dos outros.*

Observe agora alguns exemplos abaixo:

(1) $V = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1,0)$ e $(0,1)$. e_1 e e_2 são LI, pois

$$a_1e_1 + a_2e_2 = 0$$
$$a_1(1,0) + a_2(0,1) = (0,0)$$
$$(a_1, a_2) = (0,0)$$
$$a_1 = 0 \text{ e } a_2 = 0$$

(2) $V = \mathbb{R}^2$

$\{(1,-1),(1,0),(1,1)\}$ é LD, pois $\frac{1}{2}(1,-1) - 1(1,0) + \frac{1}{2}(1,1) = (0,0)$.

1.6 MUDANÇA DE BASE

Seja V um espaço vetorial de dimensão n e consideremos duas bases de V: $B = \{u_1, ..., u_n\}$ e $C = \{v_1, ..., v_n\}$. Então existe uma única família de escalares α_{ij} de maneira que

$$v_1, = \alpha_{11}u_i + ... + \alpha_{n1}u_n.$$
$$......................................$$
$$v_n = \alpha_{1n}u_1 + \ldots + \alpha_{nn}u_n$$

ou simplesmente

$$v_j = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}u_i \ (j = 1, 2, .., n).$$

Definição 1.6.1. A matriz quadrada de ordem n

$$P_C^B = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{11} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} \\ .... & ..... & ..... & .... \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & ... & \alpha_{nn} \end{bmatrix},$$

chama-se matriz de mudança de base B para a base C.

Exemplo: Qual a matriz de mudança da base $B = \{1, 1+t\}$ para a base $\{1, t\}$ no espaço $P_1(\mathbb{R})$?

$$\begin{cases} 1 = x_1 1 + y_1(1+t) \\ t = x_2 1 + y_2(1+t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 = 1 \\ y_1 = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x_2 + y_2 = 0 \\ y_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1 y_1 =$$

$0, x_2 = -1$ e $y_2 = 1$.

Logo

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é a matriz pedida.

1.7 TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Dado V e W dois espaços vetoriais reais. Uma Transformação Linear é uma função de V em W, $F : V \to W$, que satisfaz as seguintes condições:

(i) Qualquer que sejam u e $v \in V$,

$$F(u + v) = F(u) + F(v).$$

(ii) Qualquer que sejam $k \in \mathbb{R}$ e $v \in V$,

$$F(kv) = kF(v).$$

(1) Exemplo: Consideremos $\mathbb{R}_2$ e as bases

$$\beta = \{(1,0),(0,1)\} e \beta' = \{(1,1),(-1,1)\}$$

e a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Queremos associar a essa matriz A uma aplicação linear que depende de A e das bases dadas β e β', isto é,

$$T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\mathbf{v} \mapsto T_A(v)$$

Considere $v = (x, y)$. Seja $X = [v]_\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $AX = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 2y \end{bmatrix} = [T_A(v)]_{\beta'}$

Então, $[T_A(v)]_{\beta'} = 3x(1,1) + 2y(-1,1) = (3x - y, 3x + y)$. Por exemplo, se $v = (2,1)$, então $T_A(2,1) = (5,7)$. Note que se tivéssemos partindo de $\beta = \beta' = \{(1,0),(0,1)\}$, teríamos obtido $T_A(v) = (3x, 2y) = Av$.

De um modo geral, fixadas as bases $\beta\{v_1, ..., v_n\}$ e $\beta'\{w_1, ..., w_m\}$, à matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

podemos associar

$$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$\mathbf{v} \mapsto T_A(v) \text{ como:}$$

Seja $X = [v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$$A.X = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Então, $T_A(v) = y_1 w_1 + ... + y_m w_m$ onde $y_i = A_i.X$ e A_i é a i-ésima linha de A.

Em geral, dada uma matriz A_m x n, ela é encarada como um aplicação linear $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ em relação às bases canônicas $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

2 AUTOVALORES E AUTOVETORES

Para o estudo de Autovalores e Autovetores neste trabalho, é fundamental que os conceitos apresentados sejam definidos, demonstrados e exemplificados. Visto que serão usados fortemente para o desenvolvimento do capítulo posterior.

Seja uma Transfomação Linear de um espaço vetorial nele mesmo operador linear, T: V $\rightarrow$ V, quais são os vetores $v \in V$ tais que $T(v) = v$? Observe na definição de Autovalores e Autovetores abaixo, que é possível encontrar o valor que leva esta a esta transformação e seus vetores associados.

2.1 AUTOVALORES E AUTOVETORES

Definição 2.1.1. Seja T: V $\rightarrow$ V um Operador linear. Se existirem $v \in V$, $v \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $Tv = \lambda v$, λ é um autovalor de T e v um autovetor de T associado a λ .

Observe que λ pode ser o número 0, embora v não possa ser o vetor nulo. Exemplos:

(1) $\mathbb{R}^\mathbf{2} \longrightarrow \mathbb{R}^\mathbf{2}$

$v \mapsto -1v$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1x \\ -1y \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Neste caso, -1 é um autovalor de T e qualquer $(x, y) \neq (0, 0)$ é um autovetor de T associado ao autovalor -1.

De modo geral toda tranformação

$T : \boldsymbol{R}^\mathbf{2} \rightarrow \boldsymbol{R}^\mathbf{2}$

$v \mapsto \alpha v, \alpha \neq 0$

tem α como autovalor e qualquer $(x, y) \neq (0, 0)$ como autovetor correspondente. E $T(v)$ é sempre um vetor de mesma direção que v. Ainda mais, se:

(1) $\alpha < 0$, T inverte o sentido do vetor.

(2) $|\alpha| > 1, T$ dilata o vetor.

(3) $|\alpha| < 1, T$ contrai o vetor.

(4) $\alpha = 1, T$ é a identidade.

(2) $r_x : R^2 \to R^2$ (Reflexão no eixo-x)

$(x, y) \mapsto (x, -y)$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Os vetores da forma $\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$ tais que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -y \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}.$$

Assim, todo o vetor $(0, y), y \neq 0$, é autovetor de r_x com autovalor $\lambda = -1$.

Agora com os vetores da forma $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$ tais que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Da mesma forma, o vetor $(x, 0), x \neq 0$, é autovetor de r_x com autovalor $\lambda = 1$.

2.2 AUTOVALORES E AUTOVETORES DE UMA MATRIZ

Teorema 2.2.1. *Da uma transformação $T : V \to V$ e um vetor $v$associado a um autovalor λ, qualquer vetor $w = \alpha v(\alpha \neq 0)$ também é autovetor de T associado a λ.*

Neste sentido, um conjunto formado pelos autovetores associados a um autovalor λ e o vetor nulo é um subespaço vetorial de V, de acordo com a seguinte definição abaixo.

Definição 2.2.2. O subespaço $V_\lambda = \{v \in V : T(V) = \lambda v\}$ é chamado o subespaço associado ao autovalor λ.

Desta definição podemos chegar que det$(A - \lambda I) = 0$

Um estudosobre este conceito é de fundamental importância para as aplicações em física atômica, porque os níveis de energia dos átomos e moléculas são dados por autovalores de determinadas matrizes, entre outros exemplos relacionados a física.

Dada uma matriz quadrada A, de ordem n, o autovalor e autovetor da tranformação linear $T_A : R^n \to \mathbb{R}^2$, associada à matriz A em relação à base canônica, isto é $T_A(v) = A.v$(em forma de coluna). Deste modo, um autovalor $\lambda \in \mathbb{R}^n$, são soluções da equação $A.v = \lambda v$, $v \neq 0$.

Exemplo: Dada matriz diagonal

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \dots & 0 & & \\ 0 & \dots & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nm} & \end{bmatrix}$$

e dados os vetores $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$, temos

$$A.e_1 = A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_{11}e_1$$

e em geral, $A.e_i = a_{ii}e_i$. Então estes vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$ são autovetores para A, e o autovetor e_i é associado ao autovalor a_{ii}.

2.3 POLINÔMIO CARACTERÍSTICO

Ao se tomar como base as definições anteriores de autovalores e autovetores, para obter o seus valores, são necessários cálculos trabalhosos. Entretanto, existe um método mais prático para encontrar autovalores e autovetores de uma matriz real A de ordem n. Observe no exemplo abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Seja A a matriz, procurando vetores $v \in \mathbb{R}^3$ e escalares $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $A.v = \lambda v$. Veja que se I for a matriz identiadade de ordem 3, então a equação acima pode ser escrita da forma $Av = (\lambda I)v$, ou ainda, $(A - \lambda I)v = 0$. Reescrevendo temos:

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na forma de equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculando os autovalores de A, isto é $v \neq 0$, tais que $(A - \lambda I)v = 0$. Obtemos o o polinômio $-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = 0$. Este polinômio é chamado de polinômio característico de A. Efetuando a resolução, temos $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$ raízes do polinômio característico, que são os autovalores, com isso, encontraremos os autovetores correspondentes. Resolvendo a equação $Av = \lambda v$. Os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 3$ são do tipo $(-2y, y, y)$, que pertence ao subespaço $[(0, 0, z)]$, e $\lambda = 2$. Generalizando temos a segunte definição:

Definição 2.3.1. Seja T um operador em um espaço de dimenção finita. O polinômio

$$p(\lambda) = det(T - \lambda I)$$

é chamado **polinômio característico de** T.

2.4 DIAGONALIZAÇÃO

Seja V o espaço vetorial, consideramos um operador linear $T : V \to V$. Tomando um vetor $u \in V$, em geral u e $T(u)$ não tem a mesma direção. Mas, existem, às vezes, certos vetores privilegiados para os quais $T(u) = \lambda u$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, ou seja $T(u)$ e u têm a mesma direção, com isso T irá mudar o módulo ou o sentido de u, isso será definido neste capítulo.

Teorema 2.4.1. *Sejam $T : V \to V$ um operador linear e α uma base qualquer de V de dimensão n. Então T é diagonalizável se, e somente se o polinômio minimal de $[T]^\alpha_\alpha$ é da forma*

$$m(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \ldots (x - \lambda_r)$$

com $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ distintos.

Verifica-se que é necessário para determinar se T é diagonalizável encontrar o polinômio minimal de T.

Definição 2.4.2. Seja $T : V \to V$ um operador linear, α uma base de V e $p(x)$ o polinômio característico de T. Então

$$p([T]_\alpha^\alpha) = 0$$

Isto significa que o polinômio característico é um candidato ao polinômio minimal, pois $p(A) = 0$, ou seja $p(x)$ anula a matriz A.

Teorema 2.4.3. *As raízes do polinômio minimal são as mesmas raízes (distintas) do polinômio característico.*

Os dois teoremas acima, juntos, explicam como achar o polinômio minimal de um operador linear $T : V \to V$. O polinômio minimal deve ser de grau menor ou no máximo igual ao do polinômio característico e ainda deve ter as mesmas raízes. Para completar esta explicação o próximo teorema e o exemplo, mostrará que a T será diagonálizavel, somente se o polinômio anular a matriz T.

Teorema 2.4.4. *Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ os autovalores distintos de um operador linear T. Então T será diagonalizável se, e somente se o polinômio*

$$(x - \lambda_1), (x - \lambda_2) \ldots (x - \lambda_r)$$

anular a matriz T.

Exemplo: O operador linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definido por $T(x, y, z, t) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z, -t)$ é diagonalizável? Seja $\alpha = (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$ a base canônica. Então a matriz

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Calculemos o polinômio característico

$$p(\lambda) = det([T]_\alpha^\alpha - \lambda I) = (3 - \lambda)^2(-1 - \lambda)^2.$$

Os autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$, ambos com multiplicidade 2. Então, os candidatos para o polinômio minimal são

$$\begin{cases} p_1(x) = (x - 3) - (x + 1) \\ p_2(x) = (x - 3)^2 - (x + 1) \\ p_3(x) = (x - 3) - (x + 1)^2 \\ p_4(x) = (x - 3)^2 - (x + 1)^2 \end{cases}$$

Note que $p_1([T]_\alpha^\alpha) = 0$ é, dentre os candidatos é o de menor grau. Então

$$p_1(x) = (x-3) - (x+1)$$

é o polinômio minimal. Logo, T é diagonalizável, isto é, existe uma base β de autovalores e nesta base

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2.4.1 MATRIZES SEMELHANTES

Definição 2.4.5. Dizemos que uma matriz B, n x n, é semelhante a uma matriz A, n x n, se existir uma matriz P tal que

$$B = P^{-1}AP$$

Observações importantes:

- toda matriz quadrada é semelhante a si mesma;
- se uma matriz A é semelhante a B, então B é semelhante a A e
- se A é semelhante a B e B é semelhante a C, então A é semelhante a C.

Exemplo: Toda matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

é diagonalizável, pois

$$A = (I_n)^{-1}AI_n$$

A próxima proposição, mostrará que um operador linear é diagonalizável se, e somente se, a matriz dele em relação a uma base é diagonalizável.

Proposição 2.4.6. *Seja $T : V \to V$ um operador de um espaço vetorial V de dimensão finita. Seja B uma base de V. T é um operador diagonalizável se, e somente se, $[T]_b^b$ é uma matriz diagonalizável.*

Demonstração: *Se um operador linear $T : V \to V$ é diagonalizável, então existe uma base C de V tal que $[T]_c^c$ é diagonal. Seja uma matriz P tal que*

$$[T]_c^c = P^-1[T]_b^b P,$$

ou seja, a matriz $A = [T]_b^b$ é diagonalizável.

Geralmente são trabalhados com matrizes que são diagonalizáveis com esta proposição. Entretanto neste trabalho, irei trabalhar com dois exemplos de matrizes não diagonalizável, para observar o que acontece quando se aplica esta definição.

(1) Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Calculando os autovalores:

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -3 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$p(\lambda) = (3-\lambda)^2(-1-\lambda)$$

. Então $\lambda = 3$ e $\lambda = -1$. Para $\lambda = 3(T(v) = \lambda(v))$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Escrevendo em forma de sistema e resolvendo, temos que:

$$\begin{cases} 3x - 3y - 4z = 3x \\ 3y + 5z = 3y \\ -z = 3z \end{cases}$$

Da terceira temos $-4z = 0 \Rightarrow z = 0$, da segunda $3y + 0 = 3y \Rightarrow y = 0$. Então $x = x$.

Logo temos que $v_1 = (x, 0, 0) = x(1, 0, 0)$

Com $\lambda = -1$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x - 3y - 4z = -x \\ 3y + 5z = -y \\ -z = -z \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x - 3y - 4z = 3x \\ 4y + 5z = 3y \\ y = -\frac{5}{4}z \end{cases}$$

$4x - 3\left(-\frac{5}{4}z\right) - 4z = 0.$

$4x = \frac{-15}{4} + \frac{16}{4}.$

$4x = \frac{z}{4}x = \frac{z}{16}.$

$y = -\frac{5}{4}z.$

$v_2 = z(\frac{1}{16}, -\frac{5}{4}, 1).$

P não é diagonalizável, pois não possui uma base de autovetores. É necessário incluir um novo vetor para obtermos a matriz mudança de base. Então temos que $v_1 = (1,0,0), v_2(1,-20,16), v_3(0,0,1)$. Encontramos a matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -20 & 0 \\ 0 & 16 & 1 \end{bmatrix}$

Agora precisamos calcular a P^{-1}.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 16 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] L_2 \to L_2.\frac{1}{20}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{20} & 0 \\ 0 & 16 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] L_3 \to 16.L_2 + L_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{20} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{16}{20} & 1 \end{array}\right].$$

Com isso, temos:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{20} & 0 \\ 0 & \frac{16}{20} & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, calculando $D = P^{-1}AP$.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{20} & 0 \\ 0 & \frac{16}{20} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -20 & 0 \\ 0 & 16 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -\frac{3}{24} \\ 0 & -1 & -\frac{5}{20} \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(2) Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

Calculando os autovalores:

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3$$

. Então $\lambda = 3$ e $\lambda = 1$ tem multiplicidade 2. Para $\lambda = 1 (T(v) = \lambda(v))$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Escrevendo em forma de sistema e resolvendo, temos que:

$$\begin{cases} 4x + 2y - 3z = x \\ 2x + y + 2z = y \\ -x - 2y = z \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ -x - 2y = z \end{cases}$$

Da segunda temos $x = -z$ substituindo na terceira temos que $z - 2y - z = 0$. Então $y = 0$.

Logo temos que $v_1 = (x, 0, -x) = x(1, 0, -1)$

Calculando com o $\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x + 2y - 3z = 3x \\ 2x + y + 2z = 3y \\ -x - 2y = 3z \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ x = -2y - 3z \end{cases}$$

Substituindo o valor de x na segunda temos que

$$2(-2y - 3z) - 2y + 2z = 0 \tag{1}$$

$$-4y - 6z - 2y + 2z = 0 \tag{2}$$

$$-6y - 4z = 0 \tag{3}$$

$$-\frac{6}{4}y = \frac{4}{4}z \tag{4}$$

$$-\frac{3}{2}y = z \tag{5}$$

Agora substituindo o valor de z em $x = -2y - 3z$

$$x = -2y - 3.(-\frac{3}{2}y) \tag{6}$$

$$x = -2y + \frac{9}{2}y \tag{7}$$

$$x = -2y + \frac{9}{2}y \tag{8}$$

$$x = \frac{5}{2}y \tag{9}$$

Encontramos $v_2 = (\frac{5}{2}y, y, -\frac{3}{2}y)$.

Encontramos dois vetores associados, em um espaço de dimensão 3. Para usar a definição precisamos completar com um novo vetor. Então temos que $v_1 = (1, 0, -1), v_2(5, 2, -3), v_3(0, 0, 1)$

Encontramos a matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

Agora precisamos calcular a P^{-1}.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] L_3 \to L_2 + L_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] L_2 \to L_2 \tfrac{1}{2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] L_3 \to -2L_2 + L_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] L_1 \to -5.L_2 + L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Com isso, temos:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, calculando $D = P^{-1}AP$.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ao se trabalhar com a definição em uma matriz não diagonalizável, nos dois exemplos apresentados pode verificar-se que na diagonal principal da matriz encontramos os autovalores da transformação. Entretato não se tem controle sobre os outros valores da matriz e com isso, não é possível generalizar a todos os casos, neste sentido observe que no exemplo 2, $\lambda = 1$ tem multiplicidade 2, e na matriz aparece duas vezes também, isso ocorre no exemplo 1 onde $\lambda = 3$, o mesmo aparece duas vezes na diagonal principal da matriz. O que é um ponto muito interessante a ser estudado em outras matrizes não diagonalizáveis.

3 AUTOESPAÇO GENERALIZADO

O estudo sobre Autoespaços Generalizados traz muitas contribuções a respeito de alguns teoremas e definições da Álgebra Linear. O presente capítulo é uma abordagem deste teorema, e são desenvolvidos alguns exemplos para que a teoria seja melhor embasada,esta pode ser encontrada no [6].

3.1 DEFINIÇÕES E TEOREMAS

Definição 3.1.1. Seja λ um autovalor de um operador T: V $\rightarrow$ V. O autoespaço generalizado correspondente a λ e o subconjunto definido por

$$W_\lambda = \{v \in V|(T - \lambda v)^k(v) = \{0\}, \text{ para algum inteiro } k > 0\}.$$

Ao encontrarmos autovalores da matriz T, é possivel com k variando $(1, 2, ..., n)$, buscar os autovetores da matriz de acordo com o k. Quando k for o grau maximo da matriz poderemos encontrar a matriz de zeros.

Observe que se v é um vetor associado a λ e p é o menor inteiro positivo tal que $(T - \lambda I)^p(v) = \overline{0}$, então $(T - \lambda I)^{p-1}(v)$ é um autovetor de T associado a λ. Portanto, λ é um autovalor de T. Além disso, $(T - \lambda I)^q(v) = \overline{0}$, para todo $q \geq p$. Como W_λ, consiste dos autovetores generalizados acrescentado o vetor nulo e contém o autoespaço associado a λ e W_λ é um subespaço. Com isso, se obtem uma sequencia de subspaços encaixados:

$$N(A - \lambda I_n) \subseteq N(A - \lambda I_n^2) \subseteq ... \subseteq W_\lambda \subseteq V.$$

No exemplo 1, a matriz A, possui somente um autovalor, note que um vetor não pode ser autovetor associado a dois autovalores distintos e que os autoespaços são T-invariantes, isto é $T(W_\lambda) \subseteq W_\lambda$.

(1) Exemplo: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\text{Seja a matriz } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Realizando os cálculos, temos que $(A-\lambda I)^1(v)=0$, e o $\lambda=1$ é de multiplicidade 3:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$2y+3z=0\Rightarrow y=0; z=0$. Então $v_1=[(1,0,0)]$

Agora $(A-\lambda I)^2(v)=0$

$$\begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&4\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&0&4\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$4z=0\Rightarrow z=0$. Então $v_2=[(1,0,0),(0,1,0)]$. Calculando $(A-\lambda I)^3(v)=0$

$$\begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0&4\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Veja que no exemplo a definição acima aconteceu com um λ com multiplicidade 3, que também é a dimensão do espaço vetorial. Conforme, aumenta o k obtemos um Autoespaço Generalizado de dimensão maior, até a dimensão 3.

Proposição 3.1.2. *Seja λ um autovalor de um operador linear $T:V\to V$ em um espaço de dimensão finita. Então:*

(a) W_λ é um subespaço T-invariante.

Demonstração: *Para mostrar que W_λ é T-invariante, considere $v\in W_\lambda$. Seja p tal que $(T-\lambda I)^p(v)=\overline{0}$. Então:*

$$(T-\lambda I)^pT(v)=T(T-\lambda I)^p(v)=T\overline{0}=\overline{0}.$$

Portanto, $T(V)\in W_\lambda$.

(b) A interseção de dois autoespaços generalizados associados a autovalores diferentes é igual ao subespaço nulo, ou seja, se $\mu\neq\lambda$ são autovalores de T,

então $W_\lambda \cap W_\mu = \{\overline{0}\}$

Demonstração: *Seja $\mu \neq \lambda$ autovalores de T. Inicialmente vamos mostrar que*

$$W_\lambda \cap N(T - \mu I) = \{\overline{0}\}.$$

Vamos supor que exista um vetor $v \neq \overline{0}$ em $W_\lambda \cap N(T - \mu I)$. Seja p o menor inteiro tal que $(T - \lambda I)^p(v) = \overline{0}$. Então, $w = (T - \lambda I)^{p-1}(v)$ é um autovetor de T associado a λ e é também um autovetor associado a μ, pois

$$(T - \mu I)(W) = (T - \mu I)(T - \lambda I)^{p-1}(v) = (T - \lambda I)^{p-1}(T - \mu I)(v) = (T - \lambda I)^{p-1}\overline{0} = \overline{0}.$$

Isto é uma contradição, logo v tem que ser igual ao vetor nulo. Vamos supor, agora, que exista um vetor $v \neq \overline{0}$ em $W_\lambda \cap W_\mu$. Seja p o menor inteiro tal que $(T - \mu I)^p(v) = \overline{0}$. Então, $w = (T - \lambda I)^p(v)$ é um autovetor de T associado a μ e é também um autovetor generalizado associado a λ, pois

$$(T - \lambda I)^k(T - \lambda I)^{p-1}(v) = (T - \lambda I)^{p-1}(T - \lambda I)^k(v) = (T - \lambda I)^{p-1}\overline{0} = \overline{0},$$

para algum inteiro positivo k. Isto está em contradição, então v tem que ser igual ao vetor nulo.

Lembrando que, como definido anteriormente a dimensão do autoespaço é menor ou igual a mutiplicidade de λ no polinômio característico. Na proposição abaixo, será mostrado para autoespaços generizados.

Proposição 3.1.3. *Seja $T : V \to V$ um operador linear. Seja λ um autovalor de T tal que a multiplicidade de λ é igual a m, então*

(a) dim $(W_\lambda) \leq m$.

Demonstração:

Seja r a dimensão de W_λ é T-invariante, seja o polinômio característico de Tw_λ é um fator do polinômio característico de T.

$$r_T(t) = pTw_\lambda(t)q(t).$$

Vamos mostrar que o polinômio característico de Tw_λ é da forma $pTw_\lambda(t) = (-1)^p(t - \lambda)^p$. Para isto vamos mostrar que λ é o único autovalor de Tw_λ. Sejam $\mu \neq \lambda$ e $Z \in W$, tal que $(Tw_\lambda - \mu I)(Z) = \overline{0}$. Então, $Z \in W_\lambda \cap W_\mu = \{\overline{0}\}$,pela proposição anterior, portanto, $pT(t) = (t - \lambda)^p q(t)$ e $p = dim(W_\lambda) \leq m$).

(b) $W_\lambda = N(T - \lambda I)^m$.

Demonstração: *Seja $N(T-\lambda I)^m \subseteq W_\lambda$. Vimos que W_λ é T-invariante e na demostração do item anterior que $pTw_\lambda = (-1)^p(t-\lambda)^p$, com $p \leq m \Rightarrow (Tw_\lambda - \lambda I)^p = 0$, a transformação linear nula. Logo para todo $Z \in W_\lambda$ temos que*

$$(T-\lambda I)^m(Z) = (T-\lambda I)^{m-p}(T-\lambda I)^p(Z) = (T-\lambda I)^{m-p}(\overline{0}) = \overline{0}.$$

O que mostra que $W_\lambda \subseteq N(T-\lambda I)^m$. Portanto, $W_\lambda = N(T-\lambda I)^M$.

3.2 EXEMPLOS

Observe no exemplo abaixo, com a matriz.

(1) Seja a tranformação $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada a matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

O polinômio encontrado por $B - \lambda I$, é $\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda - 1$, encontramos o seguintes autovalores $\lambda = 1$ de multiplicidade 3 e $\lambda = -1$ de multiplicidade 1. Para $\lambda = 1$ $(A-\lambda I)^1$, temos o seguinte

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora vamos encontrar os autovetores da definição $(A-\lambda I)^1(v) = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculando os autovetores associados, dado pelo sistema abaixo.

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ -x + 2y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Da primeira encontramos que $x = y$, na terceira substituindo y, temos que $x = 0$, e na última com $x = 0 \to z = 0$. Portanto $v_1 = (0, 0, 0, w)$, então um possível autovetor é $(0, 0, 0, 1)$.

Calculando agora $(B - \lambda I)^2$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Encontraremos os autovetores,pela definição $(B - \lambda I)^2(v) = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculando os autovetores pelo sistema abaixo.

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 3y = 0 \end{cases}$$

Encontramos no sistema que $x = y$, e que $x = 0 \Rightarrow y = 0$, então $v_2 = (0, 0, z, w)$, os autovetores seriam $\{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$

Calculando agora $(B - \lambda I)^3$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora encontraremos os autovetores,pela definição $(B - \lambda I)^3(v) = 0$

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculando os autovetores pelo sistema abaixo.

$$\begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ 4x - 4y = 0 \\ -6x + 6y = 0 \\ 5x - 5y = 0 \end{cases}$$

Encontramos no sistema que $x = y$, então $v_3 = (x, x, z, w)$, os autovetores possíveis seriam $\{(0,0,1,0),(0,0,0,1),(1,1,0,0)\}$

Calculando a última multiplicidade de transformação $(B - \lambda I)^4$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -8 & 0 & 0 \\ -8 & 8 & 0 & 0 \\ 12 & -12 & 0 & 0 \\ -10 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora encontraremos os autovetores,pela definição $(B - \lambda I)^4(v) = 0$

$$\begin{bmatrix} 8 & -8 & 0 & 0 \\ -8 & 8 & 0 & 0 \\ 12 & -12 & 0 & 0 \\ -10 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculando os autovetores pelo sistema abaixo.

$$\begin{cases} 8x - 8y = 0 \\ -8x + 8y = 0 \\ 12x - 12y = 0 \\ -10x + 10y = 0 \end{cases}$$

Encontramos novamente no sistema que $x = y$, então $v_4 = (x, x, z, w)$, os autovetores possíveis seriam $\{(0,0,1,0),(0,0,0,1),(1,1,0,0)\}$. Observe nesta primeira parte que encontramos 1 autovetor associados a $\lambda = 1$. E conforme k aumentava a quantidade de autovetores aumenta até chegar a multiplicidade de λ que no caso é 3, com isso se percebe que podemos escrever que neste caso $N(B - \lambda I)^1 \subset N(B - \lambda I)^2 \subset N(B - \lambda I)^3 \subset N(B - \lambda I)^4$, e quando chegou a $k = 4$, os vetores eram os mesmos, neste sentido se verifica a definição.

Agora com $\lambda = -1$, vamos calcular $(B - \lambda I)^1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Agora vamos encotrar os autovetores da definição $(B - \lambda I)^1(v) = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculando os autovetores associados, dado pelo sistema abaixo.

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \\ x + z + 2w = 0 \end{cases}$$

Da primeira encontramos que $x = -y$, na terceira substituindo x, temos que $y+2y+2z = 0 \Rightarrow z = -\frac{3}{2}y$, e na última substituindo y encontramos que $-y - \frac{3}{2}y + w = 0$, ou seja $w = \frac{5}{2}y$ Portanto $v_1 = (-y, y, -\frac{3}{2}y, \frac{5}{2}y)$, então o um possivel autovetor é $(-4, 4, -6, 5)$.

Calculando agora $(B - \lambda I)^2$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Agora vamos encotrar os autovertores da definição $(B - \lambda I)^2(v) = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Encontramos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ -x + 5y + 4z = 0 \\ y + 5y + 4w = 0 \end{cases}$$

Da primeira temos que $x = -y$, substituindo x na terceira encontramos que $y + 5y + 4z = 0$, então $z = \frac{-3}{2}y$. Na última substituindo x, z, temos a equação $-2y + 3y - 6y + 4w = 0$, então $w = \frac{5}{4}y$, então o $v_2 = (-y, y, -\frac{3}{2}y, \frac{5}{4}y)$,um possivel vetor seria $(-4, 4, -6, 5)$.

Calculando $(B - \lambda I)^3$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 8 & 0 \\ 5 & 13 & 12 & 8 \end{bmatrix}$$

Agora vamos encontrar os autovertores da definição $(B - \lambda I)^3(v) = 0$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 8 & 0 \\ 5 & 13 & 12 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Encontramos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ 4x + 4y = 0 \\ 12y + 8z = 0 \\ 5x + 13y + 12y + 8w = 0 \end{cases}$$

Da primeira temos que $x = -y$, substituindo x na terceira encontramos $z = -\frac{3}{2}y$. Na última substituindo x, z, temos a equação $-5y + 13y - 18y + 8w = 0$, então $w = \frac{5}{4}w$, então o $v_2 = (-y, y, -\frac{3}{2}y, \frac{5}{4}y)$,um possível vetor seria $(-4, 4, -6, 5)$.

Calculando $(B - \lambda I)^4$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 \\ 4 & 28 & 16 & 0 \\ 14 & 42 & 32 & 16 \end{bmatrix}$$

Agora vamos encontrar os autovertores da definição $(B - \lambda I)^4(v) = 0$

$$\begin{bmatrix} 8 & 8 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 \\ 4 & 28 & 16 & 0 \\ 14 & 42 & 32 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Encontramos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 8x + 8y = 0 \\ 8x + 8y = 0 \\ 4x + 28y + 16z = 0 \\ 14x + 42y + 32y + 16w = 0 \end{cases}$$

Da primeira temos que $x = -y$, substituindo x na terceira equação temos que $-4y + 28y = -16z$, então $z = -\frac{3}{2}y$. Na última substituindo x, z, temos a equação $-14y + 42 + 48y + 16w = 0$, então $w = \frac{5}{4}w$, então o $v_2 = (-y, y, -\frac{3}{2}y, \frac{5}{4}y)$,um possível vetor seria $(-4, 4, -6, 5)$.

Neste exemplo onde $\lambda = -1$, possui multiplicidade 1, encontramos somente um autovetor associado a cada k, e sempre era o mesmo até $k = 4$. Isso mostra que a quantidade dos autovetores generalizados, será dada de acordo com a sua multiplicidade. Veja que com $\lambda = 1$, obtemos os seguintes possíveis autovetores $\{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0)\}$ e com $\lambda = -1$, $(-4, 4, -6, 5)$. Com isso, podemos escrever toda a dimensão da transformação como soma direta destes autovetores, ou seja $\{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (-4, 4, -6, 5)\}$.

4 CONSIDERAÇÕES

Com a realização do trabalho de conclusão de curso, foi possível um maior aprofundamento de estudo de Autoespaços Generalizados, e também produzir um material sobre Autoespaços Generalizados que possua parte dos resultados já obtidos, e que seja de leitura acessível para os alunos de graduação. Pois, com os exemplos realizados no trabalho é possível mostrar como se aplica as definições e entender os resultados.

Verificar o que acontece quando uma matriz não é diagonalizável, aplicando a teoria de uma matriz diagonalizável, percebendo o que aconteceu nos exemplos trabalhados. Outro ponto importante é que quando se estuda e se realiza exemplos sobre Autoespaços Generalizados, não se tem controle do que pode acontecer com os mesmos.

Neste sentido, o presente trabalho é um estudo da teoria, bem como a realização de alguns exemplos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BOLDRINI, J. L., COSTA, S., FIGUEIREDO, V., AND WETZLER, H. Álgebra linear. ampl. e rev. *São Paulo: Harbra* (1986). 10

[2] BUENO, H. P. *Álgebra linear*. SBM, 2006. 10

[3] CALLIOLI, C. A., DOMINGUES, H. H., AND COSTA, R. C. F. *Álgebra linear e aplicações*. Atual, 2009. 10

[4] DE CASTRO JÚNIOR, A. A. Aplicações de análise a Álgebra linear. 8

[5] DE LIMA, P. E., AND DE SOUZA, L. D. F. R. Autovalores e autovetores: Conceitos e uma aplicação a um sistema dinâmico. *Revista Eletrônica de Educação e Ciência 3*, 1 (2013), 22–28. 8

[6] SANTOS, R. J. Álgebra linear e aplicações. *Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte* (2006). 28

[7] SEVERINO, A. J. *Metodologia do trabalho científico*. Cortez editora, 2014. 9