

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE INFORMÁTICA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

LUIS GUSTAVO DA SOLEDADE GONZAGA

COLORAÇÃO SIGMA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

PONTA GROSSA

2018

LUIS GUSTAVO DA SOLEDADE GONZAGA

COLORAÇÃO SIGMA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação, do Departamento Acadêmico de Informática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientadora: Prof^a Dr^a Sheila Morais de Almeida

PONTA GROSSA

2018



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Ponta Grossa

Diretoria de Graduação e Educação Profissional
Departamento Acadêmico de Informática
Bacharelado em Ciência da Computação



TERMO DE APROVAÇÃO

COLORAÇÃO SIGMA

por

LUIS GUSTAVO DA SOLEDADE GONZAGA

Este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) foi apresentado em **21 de novembro de 2018** como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação. O candidato foi arguida pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho **aprovado**.

Profa. Dra. Sheila Morais de Almeida
Orientadora

Prof. Leandro Miranda Zatesko
Membro titular

Profa. Denise do Rocio Maciel
Membro titular

Prfa. Dra. Helyane Bronoski Borge
Profa. Responsável pelo
Trabalho de Conclusão de Curso

Prof. MSc. Saulo Jorge Beltrão de Queiroz
Coordenador do curso

AGRADECIMENTOS

Primeiro agradeço imensamente a minha mãe, Irene, a quem devo a vida, toda a motivação e oportunidades que me foram proporcionados.

Agradeço à Cleria, Ivan, Sandra, José, Isabel e Priscila por todo o apoio em momentos difíceis durante a graduação. E aos todos os meus amigos pelo companheirismo durante a graduação.

Agradeço a minha banca de correção pela imensa ajuda a tornar este trabalho o melhor possível.

Por fim, agradeço a minha orientadora Sheila pela paciência, aconselhamento e por me mostrar como pode ser prazeroso trabalhar com a área de grafos.

*“O que torna belo o deserto (...)
é que ele esconde um poço em algum lugar.”
Antoine de Saint-Exupéry*

RESUMO

GONZAGA, L. G. S. *Coloração Sigma*. 2018. 51 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Ciência da Computação) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Ponta Grossa, 2018.

Considere uma coloração de vértices de um grafo, onde cada cor é um número natural. O rótulo sigma de um vértice é a soma das cores dos seus vértices adjacentes. O Problema da Coloração Sigma consiste em colorir os vértices de um dado grafo com o menor número possível de cores de modo que os rótulos sigma de quaisquer dois vértices adjacentes sejam diferentes. Esse número mínimo de cores é chamado de número cromático sigma. Nesse trabalho é determinado o número cromático sigma para as potências de caminho P_n^k tais que $k \leq 2$ ou $k > \frac{n}{3} - 1$. Para as potências de caminho com $2 < k \leq \frac{n}{3} - 1$, provamos que o número cromático sigma é no máximo 3. Além disso foi determinado o número cromático sigma para algumas famílias infinitas de Snarks.

Palavras-chave: Coloração de vértices. Coloração sigma. Rótulo sigma. Número cromático sigma.

ABSTRACT

GONZAGA, L. G. S. *Sigma Coloring*. 2018. 51 f. Work of Conclusion Course (Graduation in Computer Science) — Federal University of Technology - Paraná. Ponta Grossa, 2018.

Consider a vertex coloring of a graph, wherein each color is represented by a natural number. The sigma value of a vertex is the sum of the colors of its adjacent vertices. The Sigma Coloring Problem concerns coloring the vertices of a graph with the least number of colors such that the sigma values of any two adjacent vertices are different. [In this work it is determined the sigma chromatic number for powers of paths P_n^k such that $k \leq 2$ or $k > \frac{n}{3} - 1$. When the power of a path has $2 < k \leq \frac{n}{3} - 1$, we prove that the sigma chromatic number is at most 3. Moreover, the sigma chromatic number of some infinite families of Snarks were determined.

Key-words: Vertex coloring. Sigma coloring. Circulant graphs. Sigma range. Sigma value.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Coloração sigma em grafos	10
Figura 2 – Grafo P_7^3	10
Figura 3 – Representação de grafos	14
Figura 4 – Gêmeos v_1 e v_2	15
Figura 5 – Exemplo de um P_3 e C_4	16
Figura 6 – Exemplo de um K_4	16
Figura 7 – Exemplo de um $K_{2,3}$	17
Figura 8 – Grafo de Petersen	18
Figura 9 – Primeiro snark descoberto	18
Figura 10 – Segundo snark descoberto	19
Figura 11 – Blocos de Blanuša	20
Figura 12 – Bloco f	21
Figura 13 – Snark flor F_7	21
Figura 14 – Bloco g	22
Figura 15 – Snark Goldberg G_3	22
Figura 16 – Snark Goldberg TG_3	23
Figura 17 – Exemplo de vértices com mesma vizinhança	28
Figura 18 – Grafo K_5	29
Figura 19 – Grafo C_6	29
Figura 20 – Grafo $K_{2,3}$	30
Figura 21 – Grafo $K_{5(2),3(3)}$	30
Figura 22 – Grafo de Petersen	31
Figura 23 – Grafos $C_7(1, 2)$, $C_7(1, 3)$ e $C_8(1, 4)$	32
Figura 24 – P_{14}^3	38
Figura 25 – Coloração dos blocos de Blanuša B_i quando o número de blocos B é ímpar.	40
Figura 26 – Coloração do bloco B_0^1 quando o número de blocos B é ímpar.	40
Figura 27 – Coloração dos blocos de Blanuša B_i , quando o número de blocos B é par.	41
Figura 28 – Coloração dos blocos de Blanuša B_0^1 e B_1 , quando o número de blocos B é par.	41
Figura 29 – Coloração dos blocos da segunda família de Blanuša B_i , quando o número de blocos B é ímpar.	42
Figura 30 – Bloco B_0^2	42
Figura 31 – Coloração dos blocos da segunda família de Blanuša B_i , quando o número de blocos B é par.	43
Figura 32 – Coloração dos blocos B_0^2 e B_1 quando o número de blocos B é par.	43
Figura 33 – Coloração dos blocos de um snark flor	44
Figura 34 – Coloração dos blocos de um snark de Goldberg	45
Figura 35 – Coloração dos blocos de um snark de Goldberg torcido	46
Figura 36 – Snark TG_3	47
Figura 37 – Resultados de um P_n^k baseado em k e com n fixo	48

LISTA DE SÍMBOLOS

$\delta(G)$	Grau mínimo do grafo G (p. 15).
$\Delta(G)$	Grau máximo do grafo G (p. 15).
$\chi(G)$	Número cromático de G (p. 25).
$\chi'(G)$	Índice cromático de G (p. 25).
$\nu(G)$	Valor sigma de G (p. 27).
$\rho(G)$	Alcance sigma de G (p. 27).
$\sigma(G)$	Número cromático sigma de G (p. 9).
$\sigma(v)$	Rótulo sigma do vértice v (p. 9).
$\Sigma(G)$	Soma cromática de G (p. 26).
B_n^1	Snark da primeira família de Blanuša com n blocos (p. 19).
B_n^2	Snark da segunda família de Blanuša com n blocos (p. 19).
C_n	Grafo ciclo com n vértices (p. 15).
$C_n(s_1, \dots, s_k)$	Grafo circulante com n vértices e saltos de tamanho s_k (p. 31).
$E(G)$	Conjunto de arestas do grafo G (p. 9).
F_n	Snark flor com n vértices (p. 20).
G_n	Snark de Goldberg com n vértices (p. 21).
TG_n	Snark de Goldberg torcido com n vértices (p. 22).
K_n	Grafo completo com n vértices (p. 16).
$K_{s,t}$	Grafo bipartido completo com conjuntos de tamanho s e t (p. 30).
$K_{k_1(n_1), \dots, k_t(n_t)}$	Multipartido completo com k_i partes de tamanho n_i (p. 30).
$N(v)$	Vizinhança do vértice v (p. 14).
$N[v]$	Vizinhança fechada do vértice v (p. 14).
P_n	Grafo caminho com n vértices (p. 16).
P_n^k	k -ésima potência do grafo caminho com n vértices (p. 10).
$V(G)$	Conjunto de vértices do grafo G (p. 9).

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	9
1.1 ORGANIZAÇÃO DESSE DOCUMENTO.....	11
2 PRELIMINARES	12
2.1 DIVISÃO EUCLIDIANA.....	12
2.2 SOMATÓRIOS.....	12
2.3 CONCEITOS BÁSICOS EM TEORIA DOS GRAFOS.....	14
2.4 SNARKS.....	17
2.4.1 Snarks de Blanuša.....	18
2.4.2 Snarks Flor.....	20
2.4.3 Snarks de Goldberg.....	21
3 COLORAÇÕES QUE DISTINGUEM VÉRTICES	24
3.1 COLORAÇÃO PRÓPRIA.....	24
3.2 COLORAÇÃO TOTAL DVA.....	25
3.3 COLORAÇÃO SOMA.....	25
3.4 CONJECTURAS 1,2 E 1,2,3.....	26
3.5 COLORAÇÃO SIGMA E ROTULAÇÃO SORTUDA.....	26
4 RESULTADOS ANTERIORES	28
5 NOVOS RESULTADOS	33
5.1 POTÊNCIAS DE CAMINHO.....	33
5.2 SNARKS.....	39
6 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	48
REFERÊNCIAS	49

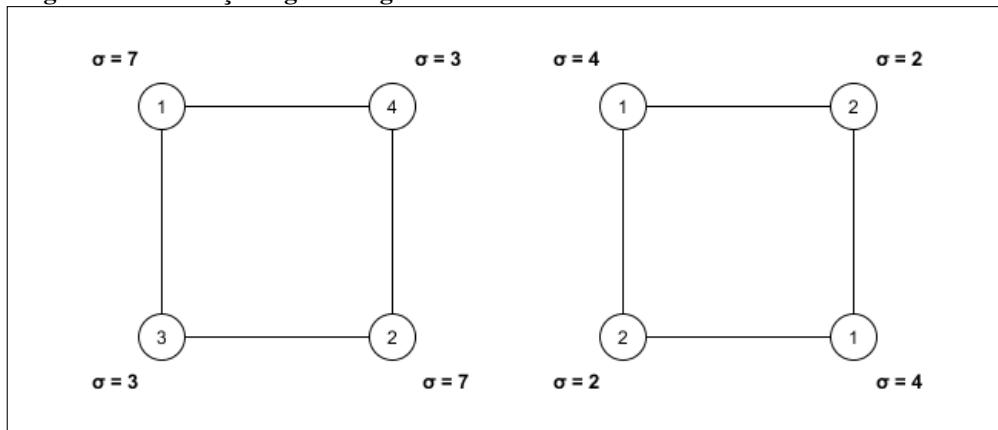
1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, um grafo é um par ordenado $(V(G), E(G))$, em que $V(G)$ é um conjunto de elementos chamados de vértices e $E(G)$ é um conjunto de pares de elementos de $V(G)$ não ordenados, chamados de arestas. Uma coloração em um grafo é uma atribuição de cores para seus vértices, ou para suas arestas, ou para seus vértices e arestas. Em geral as cores são representadas por números inteiros. Os primeiros problemas de coloração em grafos surgiram a partir de 1852, derivados do conhecido Problema das Quatro Cores, cuja história é descrita em detalhes em [Chartrand e Zhang \(2008\)](#). Dentre estes problemas, destacam-se o Problema da Coloração de Vértices, que consiste em responder qual o menor número de cores que permite uma coloração dos vértices de um grafo de forma que vértices pertencentes a uma mesma aresta tenham cores distintas; e o Problema da Coloração de Arestas, que de maneira similar, pergunta qual o menor número de cores com que se pode fazer uma coloração de arestas de forma que arestas que compartilham um mesmo vértice tenham cores distintas.

Vértices que pertencem a uma mesma aresta e arestas que compartilham um vértice são chamados, respectivamente, de vértices adjacentes (ou vizinhos) e arestas adjacentes. Quando uma coloração impõe a restrição de que elementos adjacentes tenham cores diferentes, esta coloração é chamada de coloração própria. Então, uma coloração não-própria é aquela em que elementos adjacentes podem ter a mesma cor. Embora os problemas clássicos de coloração em grafos tenham a restrição de que a coloração deve ser própria, no último século surgiram diversas colorações que não impõem essa restrição. Alguns exemplos de problemas cuja coloração não é necessariamente própria podem ser vistos no livro de [Chartrand e Zhang \(2008\)](#).

Neste projeto, estudou-se uma coloração de vértices não-própria, chamada de coloração sigma. A coloração sigma foi introduzida por [Chartrand, Okamoto e Zhang \(2010\)](#) e consiste de uma coloração não-própria dos vértices de um grafo, de forma que cada vértice tem um rótulo σ dado pela soma das cores dos seus vértices vizinhos, e para quaisquer dois vértices vizinhos u e v tem-se $\sigma(u) \neq \sigma(v)$. O Problema da Coloração Sigma é determinar o menor número de cores que permite uma coloração sigma de um dado grafo G . Esse número é chamado de número cromático sigma e denotado por $\sigma(G)$ ([CHARTRAND; OKAMOTO; ZHANG, 2010](#)). A Figura [1](#) exemplifica duas colorações sigma para o mesmo grafo. Em todos os exemplos deste trabalho, o número que pode ser visto dentro do vértice representa a cor atribuída ao vértice e, para cada vértice v do exemplo, o rótulo $\sigma(v)$ é colocado próximo a v . No grafo da Figura [1](#) à esquerda, a coloração sigma não é ótima, ou seja, utiliza mais cores que o mínimo necessário. Para o grafo da Figura [1](#) à direita, é dada uma coloração sigma ótima e, portanto, $\sigma(G) = 2$ neste caso.

Figura 1 – Coloração sigma em grafos

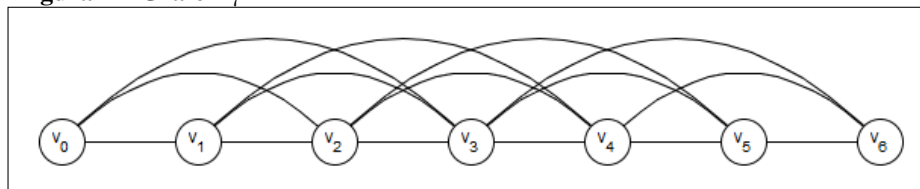


Fonte: Autoria própria

Em 2010 [Chartrand, Okamoto e Zhang \(2010\)](#) apresentou o primeiro artigo com resultados sobre esse problema, determinando o número cromático sigma para grafos completos, ciclos e k -partidos completos com $k \geq 2$. No mesmo trabalho, os autores provaram que para qualquer grafo G , $\sigma(G) \leq \chi(G)$, onde $\chi(G)$ é o menor número de cores para uma coloração própria de G . Até onde vai nosso conhecimento, existem poucos trabalhos publicados sobre o Problema da Coloração Sigma. [Dehghan, Sadeghi e Ahadi \(2014\)](#) mostrou que decidir se um grafo G tem $\sigma(G) = k$ para qualquer k fixo e $k \geq 3$, é um problema NP-Completo. Este autor também provou que decidir se um grafo cúbico G tem $\sigma(G) = 2$ é um problema NP-Completo. Para grafos circulares, [Luzon, Ruiz e Tolentino \(2015\)](#) determinou o número cromático sigma para $C_n(1, 2)$, $C_n(1, 3)$, $C_{2n}(1, n)$.

Uma potência de caminho P_n^k , com n e $k > 0$, é um grafo simples com n vértices e com $V(G) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ e $(v_i, v_j) \in E(G)$ se, e somente se, $0 < |i - j| \leq k$, ou seja, o vértice v_i é adjacente aos vértices com os próximos k índices. Na Figura 2 é possível observar a potência de caminho P_7^3 .

Figura 2 – Grafo P_7^3



Fonte: Autoria própria

Observe que a potência de caminho com n vértices é um grafo P_n^1 , para o qual o número cromático sigma é 2 com exceção do P_3^1 que tem $\sigma(P_3^1) = 1$, como será apresentado no Capítulo 4. Além disso, os grafos completos são potências de caminho P_n^{n-1} , para os quais [Chartrand, Okamoto e Zhang \(2010\)](#) mostrou que $\sigma(P_n^{n-1}) = n$. Considerando esses resultados, esse trabalho determina o número cromático sigma para as potências de caminho P_n^k tais que $k \leq 2$ ou $k > \frac{n}{3} - 1$. Para as potências de caminho com $2 < k \leq \frac{n}{3} - 1$, provamos que o número cromático sigma é no máximo 3.

Como [Dehghan, Sadeghi e Ahadi \(2014\)](#) provou que decidir se um grafo cúbico G tem $\sigma(G) = 2$ é um problema NP-Completo, é interessante considerar o Problema da Coloração Sigma para subclasses dos grafos cúbicos, ou seja, grafos que têm todos os seus vértices com exatamente três vizinhos. Então, neste trabalho apresentamos o número cromático sigma para algumas famílias infinitas de snarks.

1.1 ORGANIZAÇÃO DESSE DOCUMENTO

O restante desse documento é dividido da seguinte maneira: no Capítulo [2](#) são apresentados conceitos básicos em grafos e aritmética que são necessários para o entendimento do trabalho. Caso o leitor esteja confortável com tais conceitos, pode iniciar a leitura a partir do Capítulo [3](#), no qual são mostrados diferentes tipos de coloração em grafos, assim como a coloração sigma. No Capítulo [4](#) são exibidos resultados da literatura para o Problema da Coloração Sigma em algumas classes de grafos. No Capítulo [5](#) novos resultados obtidos nesse projeto com base nas técnicas estudadas são apresentados. Por fim o Capítulo [6](#) se refere às conclusões obtidas nesse trabalho, assim como sugestões de trabalhos futuros.

2 PRELIMINARES

Para o melhor entendimento desse trabalho, esse capítulo apresenta a base teórica necessária para o entendimento dos assuntos discutidos. São englobados aqui uma introdução à aritmética modular, conceitos de somatórios e conceitos básicos em teoria dos grafos.

2.1 DIVISÃO EUCLIDIANA

A divisão euclidiana é uma operação matemática que realiza a divisão de um inteiro por outro, produzindo um quociente e um resto menor que o divisor. A divisão euclidiana é fundamental para a aritmética modular, na qual somente o resto da divisão é considerado.

Intuitivamente, o resto pode ser visto como um contador que se *reseta* para 0 cada vez que seu valor chega ao valor do divisor N . É possível pensar nesse modelo como o modelo de um relógio digital. Seu ponteiro sempre será *resetado* para 0 cada vez que seu valor chegue a 24, ou seja, esse relógio realiza uma divisão euclidiana por 24 considerando sempre o resto.

Formalmente podemos definir que se $x = qn + r$, onde q , r e n são inteiros e $0 \leq r < n$, então $x \bmod n = r$, ou seja r é chamado de resíduo de x módulo n (GERSTING, 2006). Dessa forma $5 \bmod 3 = 2$ pois $3 * 1 + 2 = 5$ e $10 \bmod 2 = 0$ pois $2 * 5 + 0 = 10$.

Considere três inteiros x , y e z . $x \bmod z = y \bmod z$, diz-se que x e y são congruos. Neste caso, denota-se $x \equiv y \pmod{z}$.

A divisão euclidiana, apesar de simples, é usada em várias aplicações na área da computação. Por exemplo, em funções de *hashing*. Onde normalmente o módulo é usado para mapear um conjunto de dados em uma parcela relativamente pequena de valores, sendo essa função muito usada em algoritmos de busca. Outro uso para o módulo é em segurança computacional, onde o famoso algoritmo de Cesar usa a função modular para obter novas letras a partir das leras originais de uma mensagem (GERSTING, 2006).

Nesse trabalho a função de módulo é usada para definir uma classe de grafos onde existem resultados interessantes da coloração sigma, a classe dos grafos circulantes.

2.2 SOMATÓRIOS

Para se entender a definição de somatórios é necessário primeiro definir sequências. Sequências são listas ordenadas de elementos, por exemplo, 1, 2, 3, 4, 5 é um sequência de cinco elementos e 1, 2, 3, ..., 20, ... é uma sequência infinita. Cada elemento de uma sequência é obtido por uma função em um subconjunto dos números naturais para um conjunto S da sequên-

cia. É possível assim representar os termos de uma sequência de tamanho n usando a notação a_1, a_2, \dots, a_n (ROSEN, 2009).

Um exemplo de sequência usando uma definição mais formal é $a_n = \frac{1}{n}$. Dessa forma, os termos dessa sequência são $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$. Sequências também podem ser divididas em diversas categorias, como a progressão aritmética $a_n = x + nd$, com d sendo um número de um subconjunto dos naturais e x o primeiro termo da sequência, ou a progressão geométrica definida por $a_n = xr^n$ com n sendo um número de um subconjunto dos naturais, x o primeiro termo da sequência e r sendo um número real maior que 1 (ROSEN, 2009).

Assim podemos definir um somatório como a soma dos termos de uma sequência. A notação de um somatório seria uma forma reduzida de escrever expressões que representam somas de termos, por exemplo a escrita

$$\sum_{i=1}^5 i$$

representa a soma de inteiros de 1 a 5. Dessa forma,

$$\sum_{i=1}^5 i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

de maneira similar o valor inferior da notação de um somatório não necessariamente é 1, por exemplo podemos ter um somatório com o valor inferior 4,

$$\sum_{n=4}^6 i = 4 + 5 + 6 = 15,$$

o valor que aparece após a notação de somatório pode ser qualquer expressão aritmética, com os valores sucessivos da sequência sendo simplesmente substituídos na função definida. Por exemplo, $\sum_{i=1}^5 i^2$ tem expressão aritmética i^2 e a variável indexadora i deve ser substituída por todos os valores de 1 a 5 para se obter a soma $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$. Uma generalização do somatório pode ser escrita como

$$\sum_{i=p}^q a_i.$$

Caso o limite superior de um somatório seja menor que o inferior ($p > q$), esse somatório possui valor 0 por convenção.

A notação de somatório possui algumas regras que podem ser aplicadas na manipulação de equações tais como as apresentadas a seguir.

$$\sum_{i=p}^q (a_i + b_i) = \sum_{i=p}^q a_i + \sum_{i=p}^q b_i$$

$$\sum_{i=p}^q (a_i - b_i) = \sum_{i=p}^q a_i - \sum_{i=p}^q b_i$$

$$\sum_{i=p}^q c * a_i = c * \sum_{i=p}^q a_i, c \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{i=p}^j a_i + \sum_{i=j+1}^q a_i = \sum_{i=p}^q a_i$$

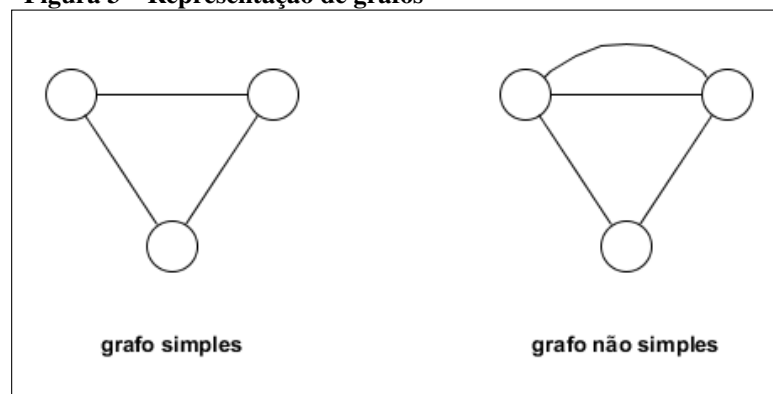
Essas propriedades são extensivamente usadas na prova de alguns teoremas apresentados nesse trabalho. Na classe dos grafos potência de caminho foram identificados alguns padrões de somas e, utilizando as manipulações de somatórios descritas, foi possível chegar aos novos resultados apresentados.

2.3 CONCEITOS BÁSICOS EM TEORIA DOS GRAFOS

Em grafos, um laço é uma aresta formada por dois vértices u e v tal que $u = v$. Um conjunto de arestas múltiplas é um conjunto de arestas que compartilham o mesmo par de vértices. Caso um grafo não possua arestas múltiplas ou laços ele é simples. Todos os grafos usados nesse trabalho são grafos simples. É comum em trabalhos da teoria dos grafos representar o número de vértices em G por n e o número de arestas de G por m .

Um grafo com apenas um vértice é chamado de grafo trivial e um grafo sem vértices é chamado de vazio. Um grafo é tipicamente representado por diagramas onde seus vértices são pontos do diagrama e suas arestas são segmentos de curvas que ligam pares de vértices. A Figura ?? mostra como é a representação gráfica de um grafo, bem como a diferença de grafos simples e não simples.

Figura 3 – Representação de grafos

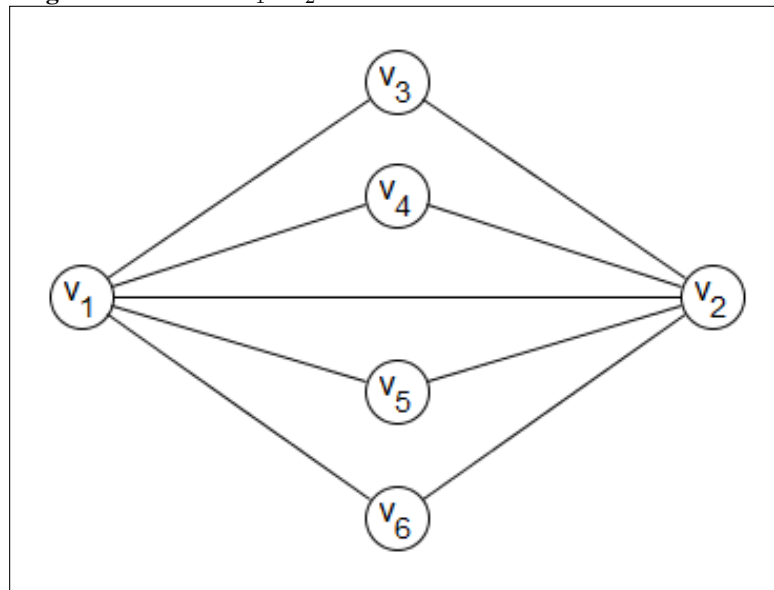


Fonte: Autoria própria

A vizinhança de um vértice v é o conjunto formado por todos os vértices vizinhos de v e é denotada por $N(v)$. Se o próprio v estiver incluso no conjunto então a vizinhança é dita fechada e denotada por $N[v]$. Caso dois vértices tenham a mesma vizinhança, estes são chamados de gêmeos, e caso possuam a mesma vizinhança fechada, eles são chamados de gêmeos fortes. Esse conceito se prova de extrema importância na identificação de colorações sigma ótimas, por

proverem um limite inferior nessa coloração. A Figura 4 mostra um exemplo de vértices gêmeos fortes, v_1 e v_2 .

Figura 4 – Gêmeos v_1 e v_2



Fonte: Autoria própria

O grau de um vértice é o número de vizinhos que esse vértice possui. O maior grau de um vértice no grafo G é denominado grau máximo de G e denotado por $\Delta(G)$. Similarmente, o menor grau de um vértice do grafo G é o grau mínimo de G e é denotado por $\delta(G)$. Na Figura 4, os vértices v_1 e v_2 têm grau máximo e portanto $\Delta(G) = 5$, e todos os outros vértices têm grau 2, fazendo com que G tenha $\delta(G) = 2$.

Dado um grafo G com dois vértices u e v , um caminho entre u e v em G é uma sequência de vértices distintos que começa em u e termina em v de tal forma que vértices consecutivos nessa sequência são vizinhos. Similarmente, um ciclo que contém u em G é uma sequência com pelo menos três vértices que começa e termina em u de tal forma que vértices consecutivos nessa sequência são vizinhos e todos os vértices da sequência são distintos. Se existe caminho entre quaisquer dois vértices de um grafo, então esse grafo é conexo. Todos os grafos nesse trabalho são conexos.

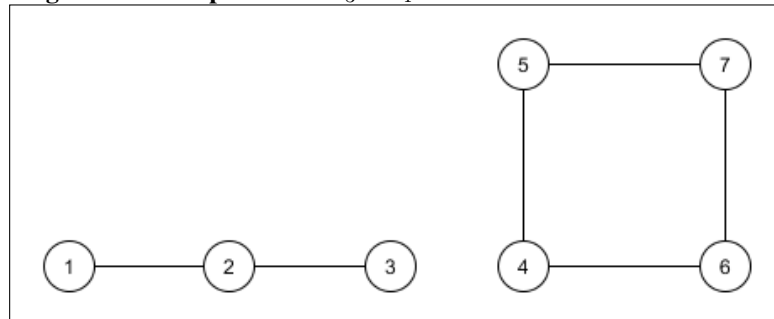
Uma ponte em um grafo conexo é uma aresta no grafo que caso seja removida torna o grafo desconexo. Note que uma aresta em um grafo é uma ponte se esta não fizer parte de nenhum ciclo no grafo.

Uma classe de grafos é um conjunto de grafos com características em comum que lhes distinguem de qualquer outro grafo que não pertença a esse conjunto. Algumas classes de grafos são muito recorrentes no estudo de teoria dos grafos, por esse motivo são identificadas por uma notação especial. A seguir, são apresentados alguns exemplos.

Dentre as classes de grafos mais estudadas se encontram os grafos ciclos, que são os grafos conexos em que todos os vértices têm grau 2. Um grafo ciclo com n vértices é denotado por C_n , com $n > 2$. Outra classe de grafos bem conhecida é a dos grafos caminhos, que são

grafos sem ciclos com exatamente dois vértices de grau 1. Um grafo caminho com n vértices é denotado por P_n . A Figura 5 apresenta um grafo caminho com três vértices e um grafo ciclo com quatro vértices.

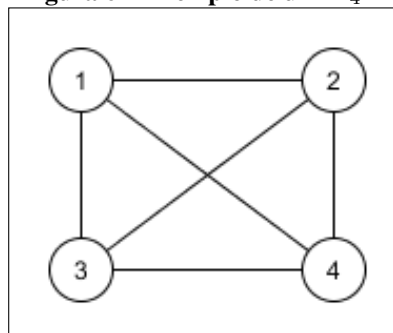
Figura 5 – Exemplo de um P_3 e C_4



Fonte: Autoria própria

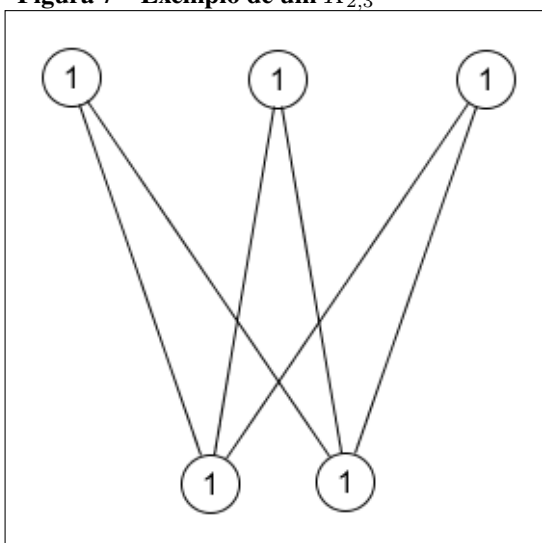
Um grafo é completo caso todos os pares de vértices nesse grafo sejam vizinhos. Grafos completos com n vértices são denotados por K_n . Grafos k -regulares são grafos onde o grau de cada um dos seus vértices é k . Dessa forma é possível perceber que um K_n também é um grafo $(n - 1)$ -regular. Entretanto existem grafos regulares que não são completos, como os ciclos. Um grafo K_4 pode ser visto na Figura 6.

Figura 6 – Exemplo de um K_4



Fonte: Autoria própria

Um grafo G é bipartido se é possível particionar seus vértices em dois subconjuntos U e V de $V(G)$ de modo que vértices no mesmo conjunto não sejam vizinhos entre si. Um bipartido completo é assim chamado caso seja um grafo bipartido onde todo vértice de U é vizinho de todos os vértices de V , sendo assim denotado $K_{s,t}$ onde $s = |U|$ e $t = |V|$. A Figura 7 mostra o exemplo de um bipartido completo $K_{2,3}$.

Figura 7 – Exemplo de um $K_{2,3}$ 

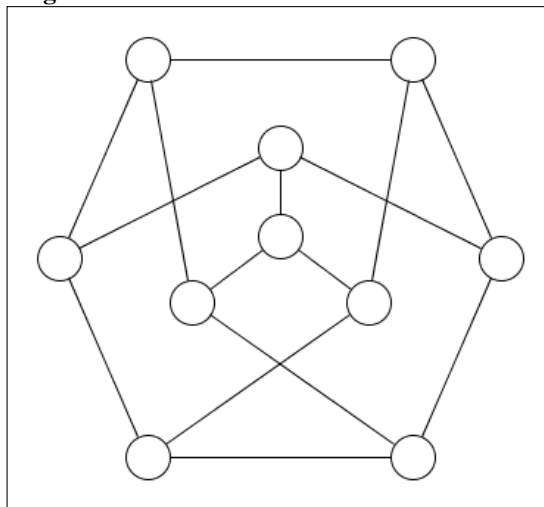
Fonte: Autoria própria

Além das classes mais básicas de grafos introduzidas nessa seção, outras classes mais complexas serão apresentadas neste trabalho quando for apropriado. A próxima seção apresenta conceitos fundamentais sobre coloração em grafos.

2.4 SNARKS

Na busca pela solução do Problema das Quatro Cores, [Tait \(1880\)](#) provou que se fosse descoberto um grafo cúbico, com índice cromático 4, sem pontes e se adicionalmente esse grafo fosse planar, então existiria um mapa cujas regiões não poderiam ser coloridas com quatro cores, contrariando a Conjectura das Quatro Cores. Entretanto, caso fosse possível provar que todo grafo com essas propriedades não é planar então a resposta do problema seria positiva.

Motivados por esses resultados, diversos pesquisadores se dispuseram a procurar esses grafos, o que se provou ser um verdadeiro desafio. O nome snark foi proposto por [Gardner \(1976\)](#) com base no poema *The Hunting of the Snark* ([CARROLL, 1914](#)), que conta a história de uma tripulação em busca de snarks, criaturas fantásticas nunca antes encontradas. O primeiro snark foi descoberto por [Petersen \(1898\)](#) e é amplamente conhecido como grafo de Petersen. Uma imagem do grafo de Petersen pode ser vista na Figura [8](#).

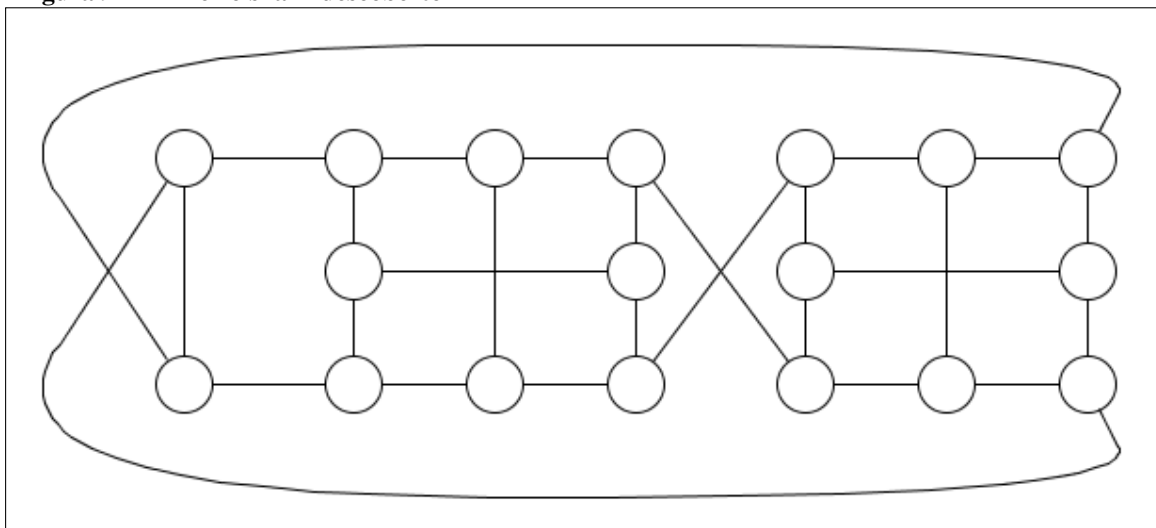
Figura 8 – Grafo de Petersen

Fonte: Autoria própria

Foram determinados neste trabalho o número cromático sigma para quatro famílias de snarks: a primeira e segunda famílias de Blanuša, os snarks Flor, as famílias de Goldberg e Goldberg torcido. Cada uma dessas famílias de snarks são infinitas e usam o mesmo princípio de construir os grafos a partir de blocos interligados entre si, sendo que o último bloco se conecta à origem.

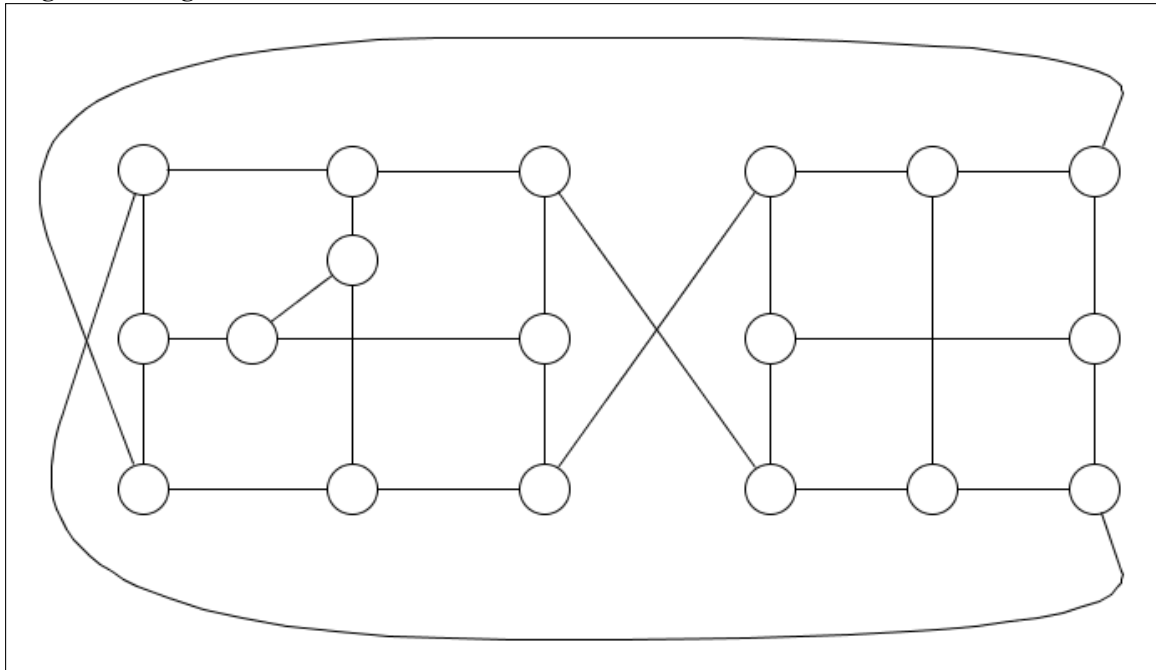
2.4.1 Snarks de Blanuša

Os snarks de Blanuša foram descobertos por [Blanuša \(1946\)](#) e tratam-se de manipulações feitas com duas cópias do grafo de Petersen, que deram origem a dois grafos conhecidos como snarks de Blanuša, apresentados nas figuras [9](#) e [10](#).

Figura 9 – Primeiro snark descoberto

Fonte: Autoria própria

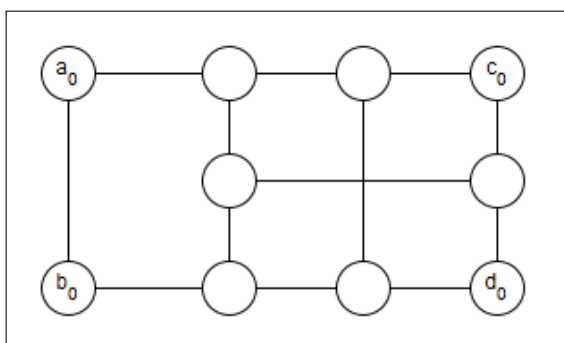
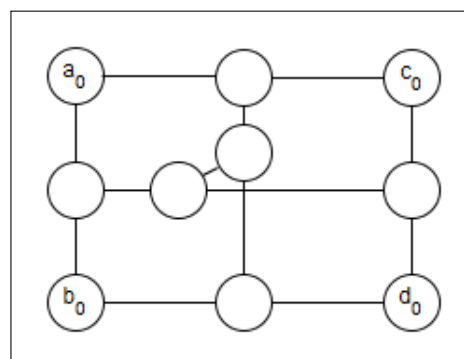
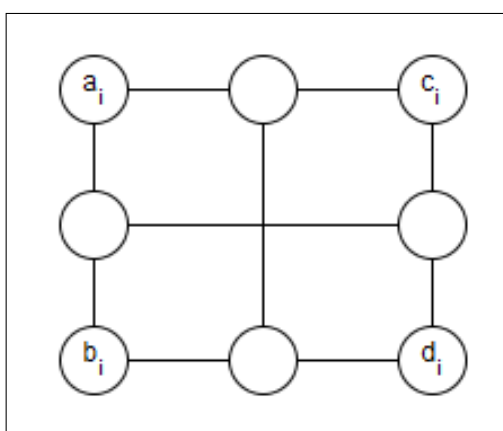
Figura 10 – Segundo snark descoberto



Fonte: Autoria própria

Após isso [Watkins \(1983\)](#) mostrou a construção de uma classe infinita de snarks construídos a partir dos snarks de Blanuša. Esta classe se divide em duas famílias diferentes, denominadas primeira família de Blanuša denotada B_n^1 e segunda família de Blanuša denotada B_n^2 , onde n é o número de blocos usados. A diferença nas duas famílias se dá pela forma com que se constrói o primeiro bloco. A Figura [11\(a\)](#) representa o primeiro bloco da primeira família, que será chamado de B_0^1 e a Figura [11\(b\)](#) apresenta o primeiro bloco da segunda família, que será chamado de B_0^2 .

Cada grafo de Blanuša usa uma cópia do primeiro bloco e n cópias de um bloco B , que pode ser visto na Figura [11\(c\)](#). Vamos denotar a i -ésima cópia do bloco B como B_i .

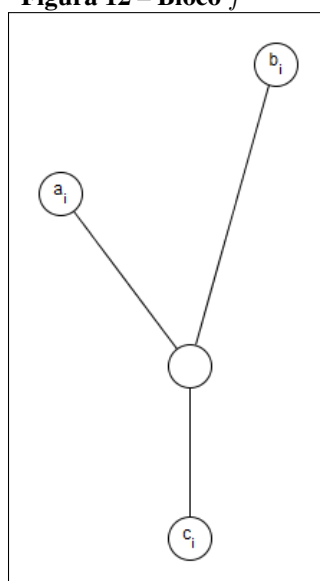
Figura 11 – Blocos de Blanuša**(a) Bloco B_0^1** **(b) Bloco B_0^2** **(c) Bloco B** 

Fonte: Autoria própria

Cada grafo da primeira e da segunda família é formado criando as arestas (a_i, d_{i-1}) , (b_i, c_{i-1}) para $0 < i \leq n$ e as arestas (a_0, d_n) e (b_0, c_n) . Observe que o grafo B_1^1 é o mesmo apresentado na Figura 9 e o grafo B_1^2 é aquele da Figura 10.

2.4.2 Snarks Flor

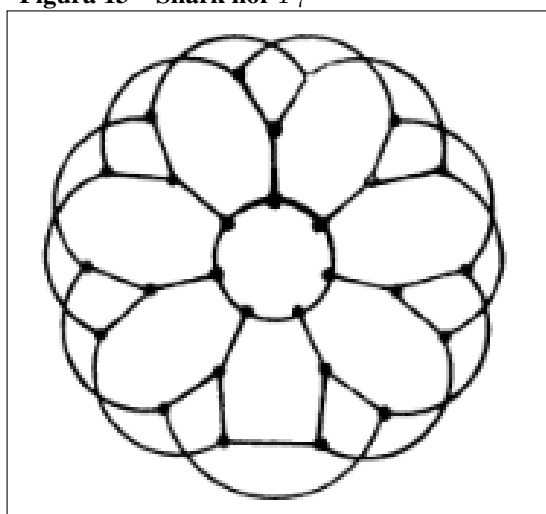
Uma das primeiras famílias infinitas de snarks foi descoberta por Isaacs (1975) e chamada de snarks Flor. Cada snark Flor, denotado por F_n , é formado por um conjunto de n blocos f com 4 vértices, n ímpar e $n \geq 3$. O bloco f é ilustrado na Figura 12.

Figura 12 – Bloco f 

Fonte: Autoria própria

No grafo F_n , o i -ésimo bloco f é denotado por f_i , $1 \leq i \leq n$. O bloco f_i se liga ao bloco $f_{i \bmod (n)+1}$ criando-se as arestas $(a_i, a_{i \bmod (n)+1})$, $(b_i, b_{i \bmod (n)+1})$ e $(c_i, c_{i \bmod (n)+1})$, $1 \leq i \leq n$.

O nome dessa família de snarks se dá pela forma como o grafo pode ser arranjado, como mostra a Figura 13 que exibe o snark flor F_7 .

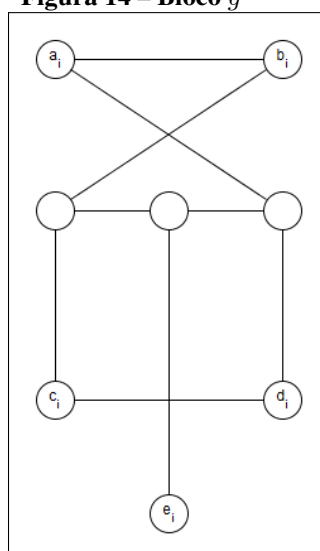
Figura 13 – Snark flor F_7 

Fonte: Isaacs (1975)

2.4.3 Snarks de Goldberg

A família de snarks de Goldberg foi descoberta por Goldberg (1981). Cada snark de Goldberg denotado por G_n , é formado por um conjunto de n blocos g com 8 vértices, n ímpar e $n \geq 3$. O bloco g é ilustrado na Figura 14.

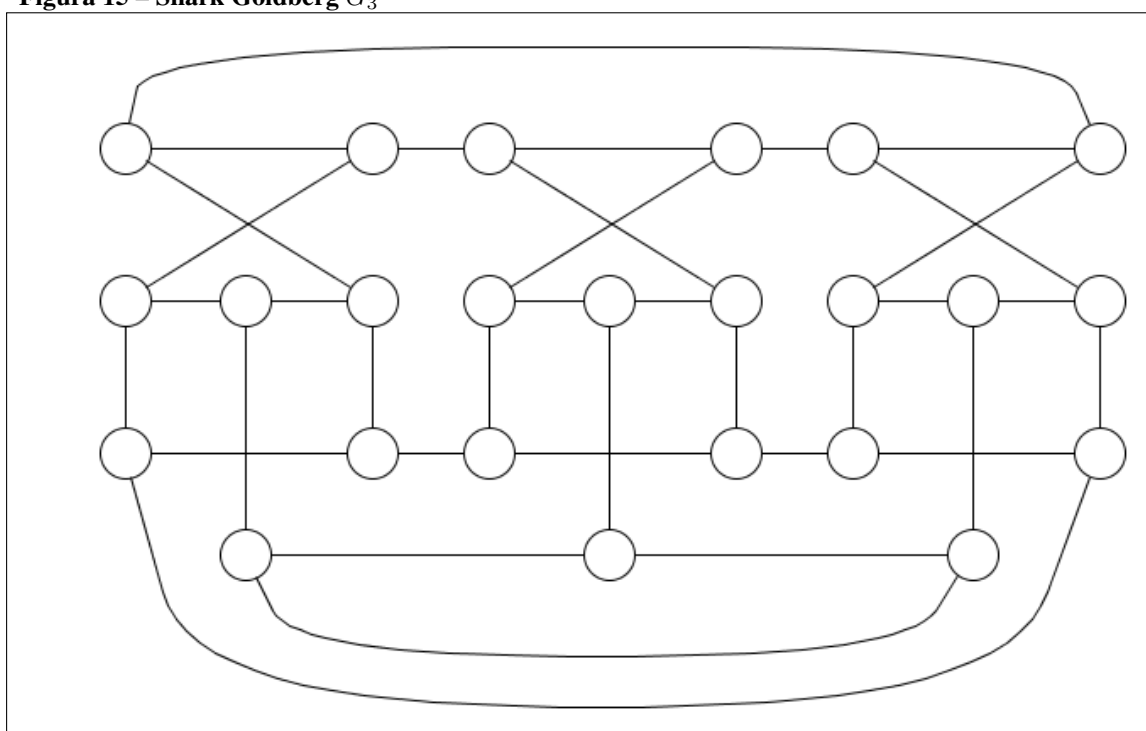
Figura 14 – Bloco g



Fonte: Autoria própria

No grafo G_n , o i -ésimo bloco g é denotado por g_i , $1 \leq i \leq n$. O bloco g_i , se liga ao bloco $g_{i \bmod (n)+1}$ criando-se as arestas $(a_i, b_{i \bmod (n)+1})$, $(c_i, d_{i \bmod (n)+1})$ e $(e_i, e_{i \bmod (n)+1})$. A imagem de um G_3 pode ser vista na Figura [15](#).

Figura 15 – Snark Goldberg G_3

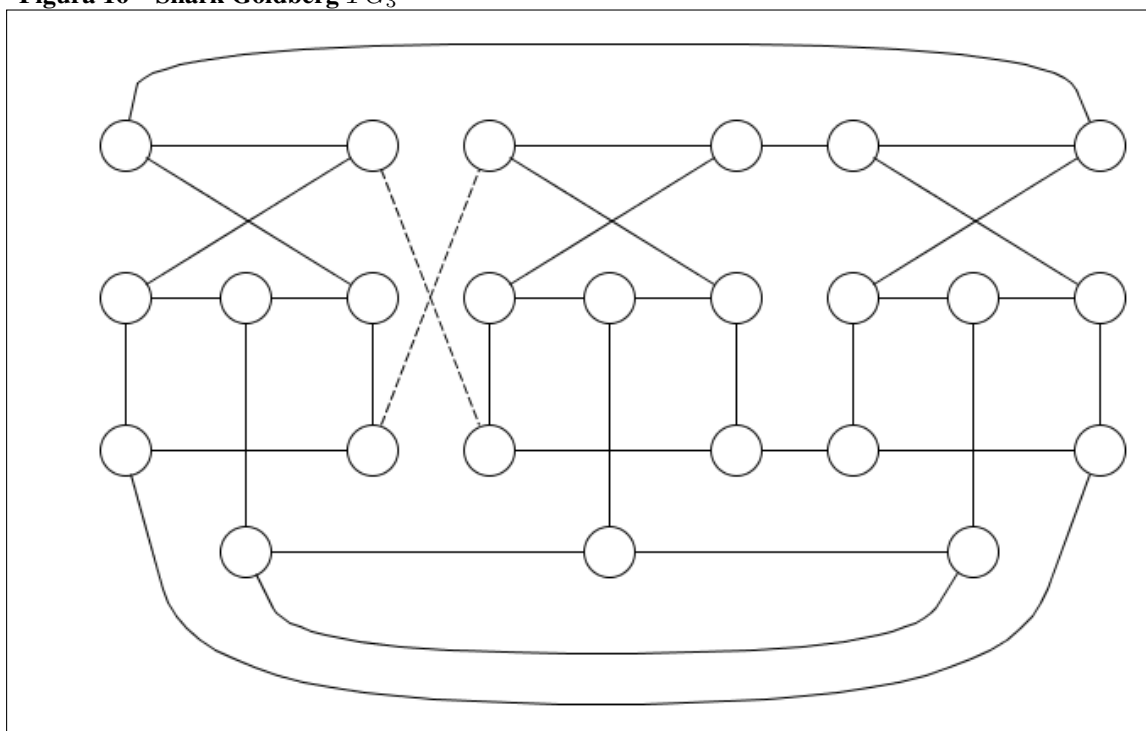


Fonte: Autoria própria

O snark de Goldberg Torcido é um snark de Goldberg que tem as arestas "torcidas" entre dois de seus blocos g_i , denotado por TG_n com n ímpar e $n \geq 3$. A torção do snark de Goldberg é um processo em que as arestas formadas a partir de b_i e d_i são $(b_i, c_{i+1 \bmod (n+1)})$ e $(d_i, a_{i+1 \bmod (n+1)})$ em contrapartida às que normalmente seriam criadas dos mesmos vértices.

Foi provado que torcer mais de uma ligação entre blocos não produz um novo grafo além do Goldberg e Goldberg Torcido (GHEBLEH, 2007). Um exemplo de como funciona a torção das arestas é ilustrada na Figura 16, as arestas alteradas foram detacadas na imagem.

Figura 16 – Snark Goldberg TG_3



Fonte: Autoria própria

3 COLORAÇÕES QUE DISTINGUEM VÉRTICES

Um dos assuntos mais estudados em teoria dos grafos é o de coloração de grafos (CHARTRAND; ZHANG, 2008). Isso se deve ao famoso Problema das Quatro Cores, que durante mais de um século foi alvo de muitos matemáticos que modelaram mapas como grafos e tentaram resolvê-lo criando conceitos como os de coloração de vértices e coloração de arestas. Esses conceitos tornaram-se por si só problemas da teoria dos grafos para os quais não se conhece nenhum algoritmo eficiente.

Normalmente quando se estuda um problema de coloração em grafos, ele é modelado de forma que vértices representam processos que necessitam de determinados recursos, como no uso de CPU por programas em um computador, e arestas representam a relação de processos que concorrem ao uso de recursos por diversas razões. Dessa forma a coloração de vértices desse grafo seria a separação desses vértices, ou processos, em conjuntos que podem ser "processados" ao mesmo tempo sem conflitos. Vértices de um mesmo conjunto são vértices aos quais se atribui a mesma cor. Observe que processos (vértices) que concorrem pelo uso de um mesmo recurso (estão conectados por uma aresta) não podem estar no mesmo conjunto (recebem cores diferentes).

O exemplo apresentado anteriormente pode ser representado como o caso da coloração mais famosa da teoria de grafos, a coloração própria de vértices, onde vértices vizinhos não possuem a mesma cor. Além da coloração própria de vértices, com o passar do tempo diversos novos problemas foram criados com a mesma ideia de separar os vértices em grupos baseando-se em diferentes regras. Alguns desses exemplos serão apresentados nesse capítulo, como por exemplo o da coloração sigma (CHARTRAND; ZHANG, 2008).

Normalmente em problemas de coloração de grafos o objetivo é colorir um determinado grafo G com o menor número de cores possível. Cada cor corresponde a um recurso em problemas como o apresentado anteriormente e, portanto, usar menos cores representa usar menos recursos. Usualmente nesse tipo de problema as cores são representadas com números positivos. Isso deve-se ao fato de o conjunto dos números inteiros positivos ser infinito, o que é útil já que existem colorações de grafos com um número arbitrariamente grande de cores.

3.1 COLORAÇÃO PRÓPRIA

Além da coloração de vértices, existem outras colorações em grafos, onde o objetivo é atribuir cores para as arestas ou para os vértices e arestas simultaneamente. Qualquer uma dessas colorações é própria se dois elementos adjacentes não possuem a mesma cor. Em contrapartida, existem colorações que admitem elementos adjacentes com a mesma cor, estas são chamadas de não-próprias. A coloração sigma, que será estudada nesse projeto, é um exemplo de coloração

não-própria.

Conforme definido, em uma coloração própria de G não existam dois vértices vizinhos com mesma cor em G . O número mínimo de cores com que é possível colorir propriamente os vértices de determinado grafo G é chamado de número cromático de G e denotado por $\chi(G)$ (CHARTRAND; ZHANG, 2008). A coloração própria dos vértices de um grafo é interessante para o presente trabalho por vários motivos. Além de se tratar da coloração mais famosa e simples dentre os diversos tipos de coloração em grafos, ela proporciona um limitante superior para a coloração sigma, como observamos na Seção 3.5. Analogamente a coloração pode ser feita nas arestas do grafo que gera o índice cromático quando for mínima denotado por $\chi'(G)$.

3.2 COLORAÇÃO TOTAL DVA

A coloração total de um grafo é uma coloração dos vértices e das arestas de um grafo simultaneamente. As regras que limitam essa coloração são parecidas a uma mistura da coloração própria de vértices e da coloração própria de arestas. Dessa forma arestas adjacentes e vértices vizinhos não possuem a mesma cor, além disso considerando a aresta $uv \in E(G)$ de um grafo G , tal aresta não possui a mesma cor dos vértices u e v .

Considere uma coloração total de um grafo G , dada por uma função $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$. Para qualquer vértice $v \in V(G)$, o conjunto formado por $\{f(v)\} \cup \{f(vw) : (v, w) \in E(G)\}$ é denotado por $C(v)$.

A coloração total distinta nos vértices adjacentes, resumidamente, coloração total DVA foi introduzida por Zhang et al. (2005) com o nome em inglês de *adjacent-vertex-distinguishing total coloring*. Esta é uma coloração total de um dado grafo G tal que cada par de vértices adjacentes u e w tem $C(u) \neq C(w)$.

A princípio essa coloração possui certa semelhança com a coloração sigma, sendo que é possível realizar um paralelo entre o conjunto $C(v)$ e a rotulo $\sigma(v)$ de um vértice v , caso a soma seja tratada como um conjunto de suas parcelas. Entretanto, além de a coloração sigma não se tratar de uma coloração total e sim de uma coloração de vértices, diferentes conjuntos de parcelas podem ocasionar no mesmo resultado em uma soma. Dessa forma mesmo que dois vértices tenham conjuntos de parcelas diferentes eles podem ter o mesmo rótulo sigma.

3.3 COLORAÇÃO SOMA

A coloração soma (*sum coloring*) é uma coloração própria dos vértices de um grafo de forma que a soma de todas as cores do grafo é mínima. Esse número é chamado de soma

cromática de G e é denotado $\Sigma(G)$. É imediato que o valor de $\Sigma(G) \geq \chi(G)$. O número mínimo de cores necessário para se obter uma coloração ótima de G é denominado força de G , e denotado $s(G)$ (SALAVATIPOUR, 2003).

Essa coloração não deve ser confundida com a coloração sigma, como pode sugerir a sua anotação da soma cromática de G , $\Sigma(G)$.

3.4 CONJECTURAS 1,2 E 1,2,3

Numa coloração não necessariamente própria das arestas de um grafo é possível atribuir um peso para cada vértice v desse grafo como a soma das cores das arestas ligadas a v . Caso se queira obter uma coloração de forma que o peso de cada par de vértices adjacentes sejam diferentes, foi conjecturado que é possível pintar qualquer grafo com apenas três cores 1, 2, 3 (KAROŃSKI; ŁUCZAK; THOMASON, 2004). Tal conjectura se tornou muito famosa sendo comumente chamada de conjectura 1,2,3. Caso cada vértice também seja atribuído com um peso, então é possível pintar as arestas do grafo com duas cores 1, 2. Sendo essa conjectura conhecida como a conjectura 1,2.

A coloração sigma não passa de uma versão dessa coloração com atribuição de cores para os vértices de um grafo. É interessante ressaltar que apesar de existir uma conjectura que limita extremamente o número de cores usados na coloração das arestas, a conjectura 1,2,3, o limite para a coloração sigma ainda é o número cromático de um grafo, que pode ter valores muito maiores que três cores. Além disso, a rotulação sortuda tem valores arbitrariamente grandes mesmo em grafos com $\sigma \leq 2$ (DEHGHAN; SADEGHI; AHADI, 2014).

3.5 COLORAÇÃO SIGMA E ROTULAÇÃO SORTUDA

A coloração sigma é uma coloração não-própria dos vértices de um grafo, então é possível que existam vértices vizinhos de mesma cor em uma coloração válida desse tipo. Dessa forma a maneira como a coloração sigma distingue os vértices de um grafo é usando o rótulo sigma. Para cada vértice v de um grafo G , o rótulo sigma é a soma das cores de todos os vizinhos de v e é denotado como $\sigma(v)$. Uma coloração sigma em um grafo G é uma coloração onde $\sigma(v) \neq \sigma(u)$ para qualquer par de vértices vizinhos u e v no grafo G . O Problema da Coloração Sigma consiste em encontrar o menor número de cores necessárias para se obter uma coloração sigma em um grafo qualquer G , esse número é chamado de número cromático sigma e denotado como $\sigma(G)$. Observe que o objetivo do Problema da Coloração Sigma é minimizar a quantidade de cores e não qual é a maior cor usada. Por exemplo, se um grafo G tem uma coloração sigma com as cores 1 e 2000, então $\sigma(G) = 2$, ou seja, não importa se é necessário que a maior cor usada seja excessivamente grande.

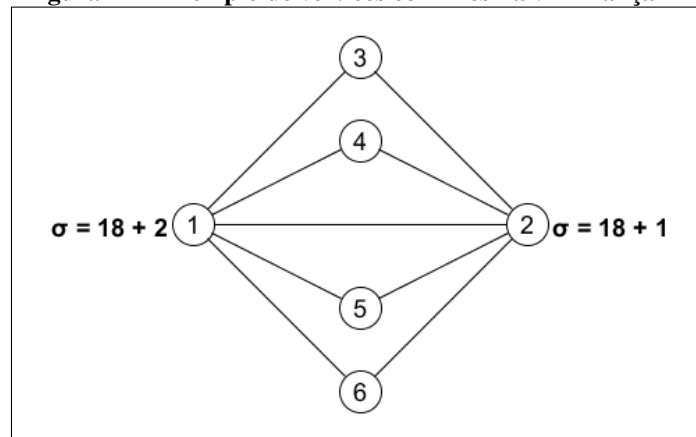
Um outro problema relacionado com a coloração sigma de um grafo é determinar o valor sigma. O valor sigma de um grafo G , representado como $\nu(G)$, é o menor inteiro positivo k para o qual existe uma coloração sigma usando $\sigma(G)$ valores do conjunto $\{1, \dots, k\}$ (CHAR-TRAND; ZHANG, 2008). Observe que o Problema do Valor Sigma consiste em encontrar uma coloração sigma com o menor número de cores possível tal que a cor máxima seja a mínima possível. Por exemplo, se um grafo G tem uma coloração sigma com as cores 1 e 2000, sendo $\sigma(G) = 2$, mas também tem uma coloração sigma com as cores 1 e 10 e não tem coloração sigma com outras duas cores, então $\nu(G) = 10$.

Além desses dois problemas relacionados com a coloração sigma, existe o Problema do Alcance Sigma. O alcance sigma de um grafo G , representado como $\rho(G)$, é o menor inteiro positivo k para o qual existe uma coloração sigma usando cores do conjunto $\{1, \dots, k\}$. Observe que o Problema do Alcance Sigma é minimizar o valor da maior cor que será usada na coloração sigma, mesmo que o número de cores usadas seja maior que $\sigma(G)$. Por exemplo, um grafo pode ter uma coloração sigma usando apenas as cores 1 e 10 e outra coloração sigma usando as cores 1, 2, 3 e 4. Se essas são as únicas duas colorações sigma possíveis para esse grafo, então $\sigma(G) = 2$, $\nu(G) = 10$ e $\rho(G) = 4$. O nome que se dá para a coloração ótima usada para encontrar o alcance sigma de um grafo é rotulação sortuda, como definido por Dehghan, Sadeghi e Ahadi (2014). A rotulação sortuda, apesar de ser um problema derivado da coloração sigma, apresenta muitas vezes seus próprios grupos de resultados na literatura, sendo em tempos estudada individualmente.

4 RESULTADOS ANTERIORES

Como foi definido no Capítulo 1, quando dois vértices são conectados por uma aresta eles são chamados adjacentes ou vizinhos. É possível observar que, dada uma coloração sigma, se dois vértices u e v têm $N[u] = N[v]$, então necessariamente u e v têm cores diferentes, caso contrário $\sigma(u) = \sigma(v)$. A Figura 17 ilustra essa propriedade. Observe que os rótulos σ dos vértices com cores 1 e 2 só se distinguem por essas cores.

Figura 17 – Exemplo de vértices com mesma vizinhança



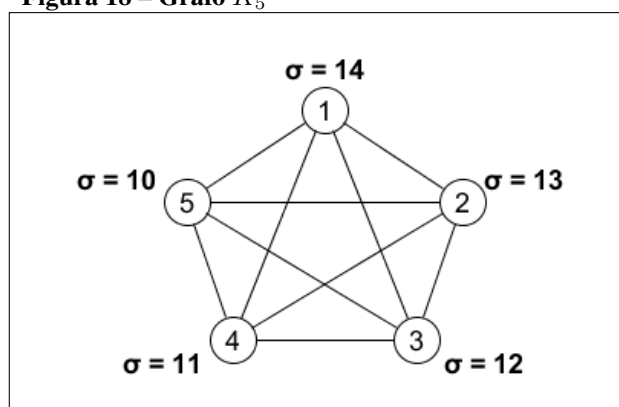
Fonte: Autoria própria

Como consequência vale o Lema 4.1.

Lema 4.1. (CHARTRAND; OKAMOTO; ZHANG, 2010) *Um grafo G tem $\sigma(G) = 1$ se, e somente se, todo par de vértices adjacentes em G tem graus diferentes.*

O número cromático sigma é conhecido para algumas classes de grafos, as quais são apresentadas a seguir.

Um grafo completo K_n é um grafo com n vértices onde cada vértice é vizinho de todos os demais. Em um grafo completo todo par de vértices tem a mesma vizinhança fechada. Portanto, $\sigma(K_n) = n$. Além disso, Chartrand, Okamoto e Zhang (2010) mostraram que $\sigma(G) = n$ se, e somente se $G = K_n$. Na Figura 18 é possível ver um exemplo de grafo completo com $n = 5$.

Figura 18 – Grafo K_5 

Fonte: Autoria própria

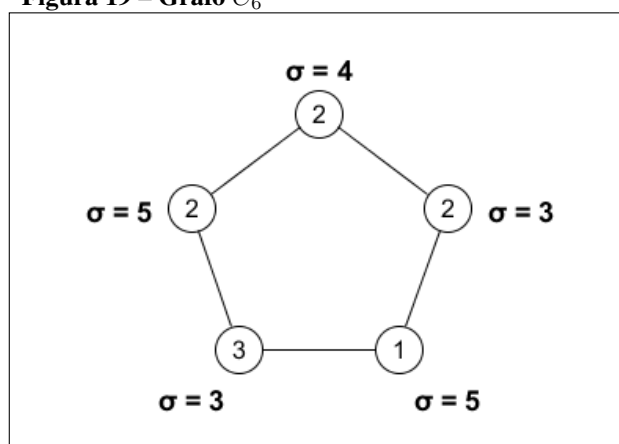
Chartrand, Okamoto e Zhang (2010) não menciona uma solução para o Problema da Coloração Sigma em grafos caminho, porém resolvê-lo é imediato nesses grafos. A seguir apresentamos uma demonstração para este caso.

Lema 4.2. *Seja P_n um grafo caminho com $n \geq 2$. Se $n \neq 3$, então $\sigma(P_n) = 2$. Caso contrário, $\sigma(P_n) = 1$.*

Demonstração. No grafo P_3 não existem vértices vizinhos de mesmo grau. Então, $\sigma(P_3) = 1$.

Agora, considere P_n com $n \geq 2$ e $n \neq 3$. Em todos os casos, P_n tem vértices adjacentes com o mesmo grau. Observe que uma cor não é o suficiente para distinguir vértices que tenham o mesmo grau. Então, vamos apresentar uma coloração sigma com duas cores. Considere os vértices de P_n ordenados, v_0, v_1, \dots, v_{n-1} tal que v_i é adjacente a v_{i+1} , $0 \leq i < n - 1$. Basta colorir os vértices v_{2i+1} com cor 2, $0 \leq i < \lceil \frac{n}{2} \rceil$ e os demais com cor 1. \square

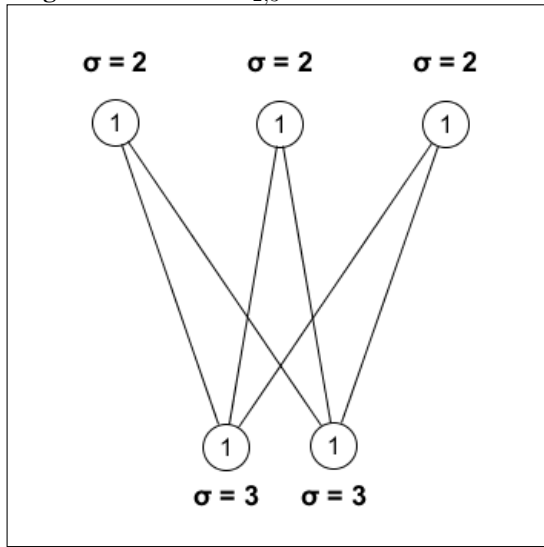
Para qualquer grafo conexo G com n vértices que não seja o K_n , sabe-se que $\sigma(G) \leq n - 2$, já que Chartrand, Okamoto e Zhang (2010) provaram que nenhum grafo conexo G tem $\sigma(G) = n - 1$, adicionalmente foi provado por eles que $\sigma(G) \leq \chi(G)$. No mesmo trabalho, os autores também provaram que o grafo ciclo C_n tem $\sigma(C_n) = 2$ se n é par e 3 se n é ímpar. Exemplos de coloração sigma em ciclos podem ser vistos nas Figuras 1 e 19.

Figura 19 – Grafo C_6 

Fonte: Autoria própria

Em grafos bipartidos existem duas possibilidades de número cromático sigma. Caso um grafo bipartido completo $K_{s,t}$ tenha $s \neq t$, então ele possui a propriedade de não ter vértices vizinhos de mesmo grau, logo $\sigma(K_{s,t}) = 1$, caso contrário é possível colorir os vértices de cada parte do grafo com uma cor diferente, assim $\sigma(K_{s,t}) = 2$ (CHARTRAND; OKAMOTO; ZHANG, 2010). Um exemplo pode ser visto na Figura 20.

Figura 20 – Grafo $K_{2,3}$

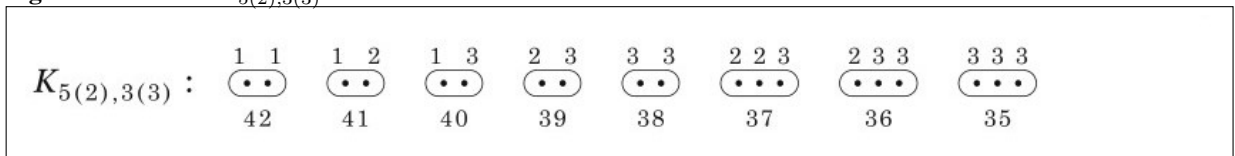


Fonte: Autoria própria

Grafos multipartidos são grafos cujo conjunto de vértices pode ser particionado em conjuntos independentes, ou seja, conjuntos de vértices dois a dois não adjacentes. Um grafo é multipartido completo se é um grafo multipartido em que existe aresta entre quaisquer dois vértices que estejam em partes diferentes. O grafo multipartido completo com k partes de tamanho n é denotado por $K_{k(n)}$. Então, $K_{n(1)} = K_n$, e $K_{(1)n} = \overline{K_n}$. O grafo multipartido completo $K_{k_1(n_1), k_2(n_2), \dots, k_t(n_t)}$ é um grafo multipartido completo com k_i partes de tamanho n_i , $1 \leq i \leq t$. Se $k_1 = k_2 = \dots = k_t = 1$, por simplicidade, escrevemos apenas K_{n_1, n_2, \dots, n_t} . Em adição, caso os inteiros n_1, n_2, \dots, n_t sejam diferentes, temos $\sigma(K_{n_1, n_2, \dots, n_t}) = 1$.

Chartrand, Okamoto e Zhang (2010) apresentam o seguinte resultado: para o case em que $G = K_{k_1(n_1), \dots, k_t(n_t)}$, onde n_1, n_2, \dots, n_t são t números inteiros positivos, então $\sigma(G) = \max\{\sigma(K_{k_i(n_i)}) : 1 \leq i \leq t\}$. Um exemplo de coloração sigma em um grafo multipartido completo é ilustrado na Figura 21.

Figura 21 – Grafo $K_{5(2), 3(3)}$



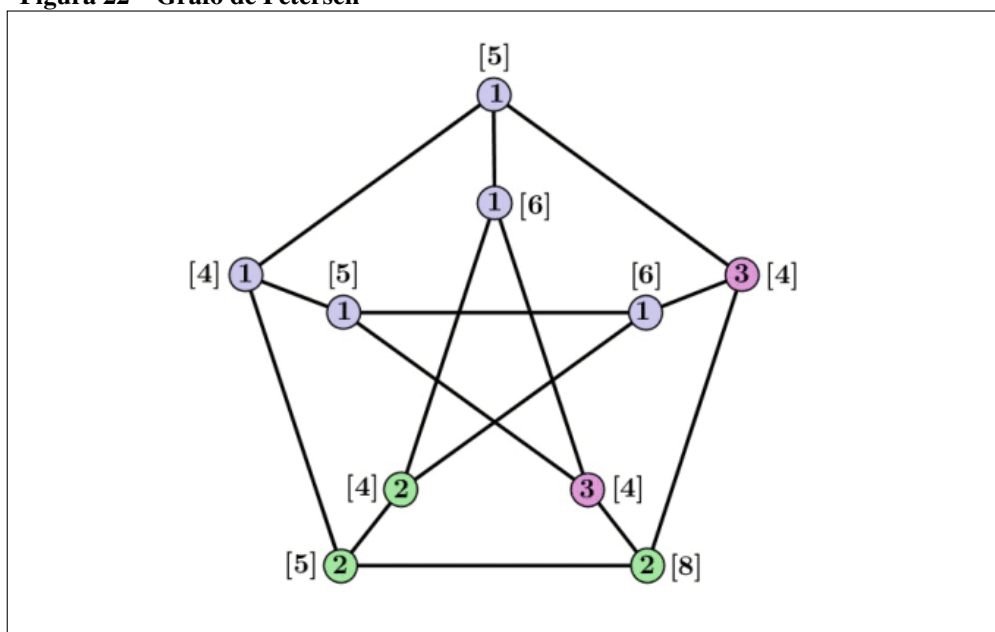
Fonte: Chartrand et al. 2010

A Figura 21 mostra como um grafo $K_{5(2), 3(3)}$ pode ser colorido com o menor número

possível de cores. Nessa figura, os vértices que pertencem à mesma parte estão circulos e o valor abaixo da parte é o rótulo sigma de cada um de seus vértices. Observe que vértices de uma mesma parte em um grafo multipartido completo têm o mesmo rótulo sigma. Nesse caso $\sigma(K_{5(2),3(3)}) = 3$.

Após a publicação do artigo de [Chartrand, Okamoto e Zhang \(2010\)](#), surgiram outros trabalhos que apresentavam novos resultados para o Problema da Coloração Sigma, usando diferentes abordagens. O trabalho de [Dehghan, Sadeghi e Ahadi \(2014\)](#) trata da complexidade do problema, apresentando dois resultados. O primeiro resultado restringe-se aos grafos cúbicos. Os autores provaram que decidir se $\sigma(G) = 2$ quando G é um grafo cúbico é **NP**-completo. O segundo resultado prova que para todo k inteiro, $k \geq 3$, decidir se $\sigma(G) = k$ para um grafo qualquer G é **NP**-completo. Um exemplo de gráfico cúbico é o grafo de Petersen. A Figura 22 mostra o grafo de Petersen, com uma coloração sigma.

Figura 22 – Grafo de Petersen



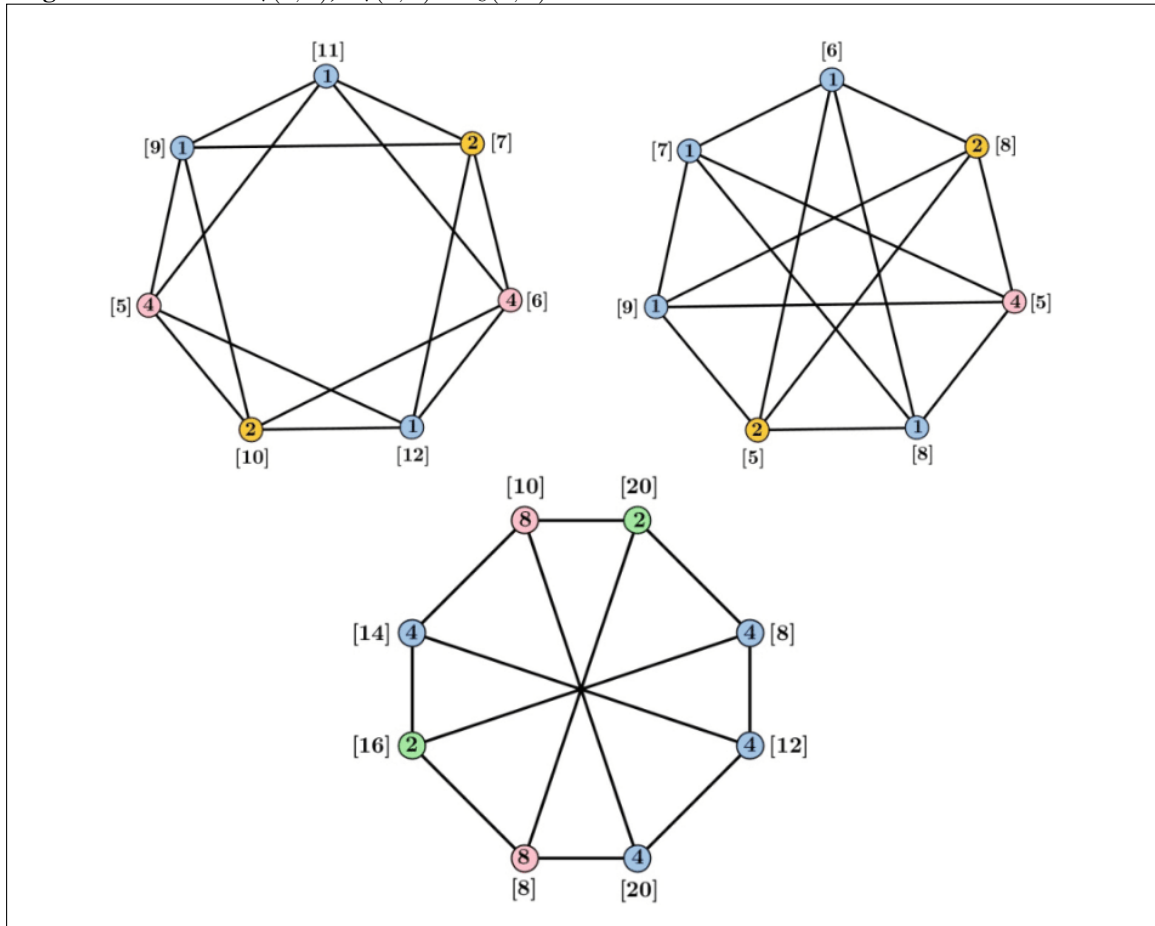
Fonte: Luzon et al. 2010

Recentemente novos números cromáticos sigma foram encontrados para casos específicos na classe dos grafos circulantes ([LUZON; RUIZ; TOLENTINO, 2015](#)). Um grafo circulante é um grafo $C_n(s_1, \dots, s_k)$ com n vértices nomeados $0, 1, \dots, n - 1$ em que cada vértice i é adjacente aos $2k$ vértices do conjunto $\{i \pm s_i \bmod n, \dots, i \pm s_k \bmod n\}$. O artigo de [Luzon, Ruiz e Tolentino \(2015\)](#) apresenta resultados para três famílias de grafos circulantes, os $C_n(1, 2)$, $C_n(1, 3)$ e $C_{2n}(1, n)$.

No primeiro caso, quando o grafo é um $C_n(1, 2)$, para $n \geq 6$, $\sigma(C_n(1, 2)) = 2$ se $n = 6k$, para um inteiro k ; e $\sigma(C_n(1, 2)) = 3$, caso contrário. Note que quando $n < 6$, $C_n(1, 2) = K_n$, e assim $\sigma(C_n(1, 2)) = n$. Quando o grafo é um $C_n(1, 3)$, para $n \geq 3$, $\sigma(C_n(1, 3)) = 2$, se n é par; $\sigma(C_n(1, 3)) = 3$, se n é ímpar e $n \neq 5$; $\sigma(C_n(1, 3)) = 5$, se $n = 5$. Na última família de grafos circulantes resolvida, $C_{2n}(1, n)$, para $n \geq 3$, $\sigma(C_{2n}(1, n)) = 2$, se n é ímpar, e

$\sigma(C_{2n}(1, n)) = 3$, se n é par. A Figura 23, mostra exemplos de coloração sigma nessas famílias de grafos circulares.

Figura 23 – Grafos $C_7(1, 2)$, $C_7(1, 3)$ e $C_8(1, 4)$



Fonte: Luzon et al. 2010

A relação entre o número cromático sigma, o alcance sigma, e o valor sigma de um grafo G é $\sigma(G) \leq \rho(G) \leq \nu(G)$. Caso $\sigma(G) = \nu(G)$ então o grafo é dito sigma contínuo. Toda árvore e ciclo e sigma contínuos (CHARTRAND; OKAMOTO; ZHANG, 2010).

5 NOVOS RESULTADOS

Este capítulo apresenta os resultados obtidos sobre o número cromático sigma em duas classes de grafos: as potências de caminho e os snarks.

5.1 POTÊNCIAS DE CAMINHO

Uma das classes de grafos em que o Problema da Coloração Sigma está em aberto é a classe dos grafos que são potências de caminhos.

Os resultados apresentados a seguir foram divididos em partes distintas em relação ao valor de k das potências de caminho P_n^k . Primeiramente o Teorema 5.2 apresenta um limitante superior quando $2 \leq k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. O Teorema 5.3 apresenta o número cromático sigma quando $k \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Como o Teorema 5.2 não determina exatamente o número cromático sigma, o final desta seção destina-se a apresentar os resultados de estudos em casos particulares deste teorema.

Uma ordem canônica de um grafo P_n^k é uma ordenação linear dos vértices $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ tal que vértices são adjacentes se e somente se, $0 < |i - j| \leq k$, como exemplificado na Figura 2.

Dehghan, Sadeghi e Ahadi (2014) enunciou o Lema 5.1, para o qual apresentamos uma demonstração a seguir.

Lema 5.1. (DEGHAN; SADEGHI; AHADI, 2014) *Quando existe uma relação entre as cores $x_1, x_2, \dots, x_\alpha$ de uma coloração sigma com α cores em um grafo G , de forma que $x_{i+1} > \Delta(G)x_i$, então dois vértices nunca têm mesmo rótulo sigma se tiverem graus diferentes.*

Demonstração. Considere dois vértices v e v' em um grafo G tais que o grau de v é diferente do grau de v' . Sejam c_i e c'_i os números de arestas com cor x_i incidentes em v e v' respectivamente, $1 \leq i \leq \alpha$. Então, $\sigma(v) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_\alpha x_\alpha$ e $\sigma(v') = c'_1x_1 + c'_2x_2 + \dots + c'_\alpha x_\alpha$. Lembre-se que, pelo enunciado, $x_{i+1} > \Delta(G)x_i$, $1 \leq i \leq \alpha$.

Como v e v' tem graus diferentes, tem-se $\sum_{i=1}^{\alpha} c_i \neq \sum_{i=1}^{\alpha} c'_i$. Então, existe pelo menos um i tal que $c_i \neq c'_i$.

A prova é por indução no número de coeficientes diferentes. Primeiro considere o caso em que existe um único c_i diferente de c'_i . Então $\sigma(v) \neq \sigma(v')$.

Agora suponha por hipótese de indução que se duas sequências $c_1, c_2, \dots, c_\alpha$ e $c'_1, c'_2, \dots, c'_\alpha$ têm k coeficientes diferentes, então $\sum_{i=1}^{\alpha} c_i x_i \neq \sum_{i=1}^{\alpha} c'_i x_i$. Observe que se c_q e c'_q são o último par de coeficientes diferentes, então, $\sum_{i=1}^q c_i x_i \neq \sum_{i=1}^q c'_i x_i$. Portanto, a soma de duas sequências, com q elementos cada uma, tais que existem k pares de coeficientes diferentes, tem resultado diferente.

Considere o caso em que existem $k + 1$ coeficientes diferentes, $k \geq 1$. Sejam c_r e c'_r

os últimos coeficientes diferentes. Observe que nas sequências c_1, c_2, \dots, c_{r-1} e $c'_1, c'_2, \dots, c'_{r-1}$ existem k coeficientes diferentes. Por hipótese de indução, $\sum_{i=1}^{r-1} c_i x_i \neq \sum_{i=1}^{r-1} c'_i x_i$. Sem perda de generalidade, suponha que $\sum_{i=1}^{r-1} c_i x_i > \sum_{i=1}^{r-1} c'_i x_i$.

Existem dois casos. Caso $c_r > c'_r$: então $\sum_{i=1}^r c_i x_i > \sum_{i=1}^r c'_i x_i$. Neste caso, $\sum_{i=1}^\alpha c_i x_i > \sum_{i=1}^\alpha c'_i x_i$, já que existem exatamente $k + 1$ coeficientes diferentes, e portanto $\sum_{i=r+1}^\alpha c_i x_i = \sum_{i=r+1}^\alpha c'_i x_i$.

Caso $c_r < c'_r$: então $\sum_{i=1}^r c_i x_i < \sum_{i=1}^r c'_i x_i$. Considere o conjunto $A = \{i | c_i - c'_i \geq 0 \wedge 1 \leq i \leq r - 1\}$, então $\sum_{i=1}^{r-1} c_i x_i - \sum_{i=1}^{r-1} c'_i x_i = \sum_{i=1}^{r-1} (c_i - c'_i) x_i \leq \sum_{i \in A} (c_i - c'_i) x_i \leq \sum_{i \in A} c_i x_i \leq \sum_{i \in A} c_i x_{r-1} < \Delta(G) x_{r-1} < x_r$. Portanto, $\sum_{i=1}^{r-1} c_i x_i - \sum_{i=1}^{r-1} c'_i x_i$ é menor que x_r e como o $c'_r > c_r$, então $\sum_{i=1}^r c_i x_i < \sum_{i=1}^r c'_i x_i$. Neste caso, $\sum_{i=1}^\alpha c'_i x_i > \sum_{i=1}^\alpha c_i x_i$, já que existem exatamente $k + 1$ coeficientes diferentes, e portanto $\sum_{i=r+1}^\alpha c'_i x_i = \sum_{i=r+1}^\alpha c_i x_i$. \square

Teorema 5.2. Em um grafo P_n^k com $2 \leq k < \lceil \frac{n}{2} \rceil$, $\sigma(P_n^k) \leq 3$.

Demonstração. Considere um grafo P_n^k , com $2 \leq k < \lceil \frac{n}{2} \rceil$ e $n \equiv 0 \pmod{2k+1}$, de forma que seus vértices estejam na ordem canônica. O grafo pode ser dividido em blocos $G_0, G_1, \dots, G_{\frac{n}{2k+1}-1}$, com $V(G_i) = v_{i,0}, v_{i,1}, \dots, v_{i,2k}$, $0 \leq i < \frac{n}{2k+1}$ e as cores a, b e c , onde $b > \Delta(P_n^k)a$ e $c > \Delta(P_n^k)b$. Dessa forma, é possível utilizar a seguinte função $\lambda : V(G) \rightarrow \{a, b, c\}$ para colorir os vértices de P_n^k .

$$\lambda(v_{i,j}) = \begin{cases} a, & \text{se } j \neq k, 0 \leq j \leq 2k \text{ e } i \equiv 0 \pmod{3}; \\ b, & \text{se } j = k \text{ e } i \equiv 0 \pmod{3} \\ b, & \text{se } j \neq k, 0 \leq j \leq 2k \text{ e } i \equiv 1 \pmod{3}; \\ c, & \text{se } j = k \text{ e } i \equiv 1 \pmod{3} \\ c, & \text{se } j \neq k, 0 \leq j \leq 2k \text{ e } i \equiv 2 \pmod{3}; \\ a, & \text{se } j = k \text{ e } i \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Pelo Lema 5.1, vértices com graus diferentes têm rótulos sigma diferentes. Assim os primeiros e últimos k vértices do grafo têm sempre cores diferentes dos seus vizinhos por terem graus diferentes. Agora resta provar que os vértices com mesmo grau têm rótulos sigma diferentes.

Primeiro considere os blocos G_i com $i \equiv 1 \pmod{3}$. Nesses casos o valor de sigma é dado a seguir.

$$\begin{cases} \sigma(v_{i,j}) = (k-j)a + (k-1+j)b + c & \text{se } 0 \leq j < k \text{ (caso 1)} \\ \sigma(v_{i,j}) = 2kb & \text{se } j = k \text{ (caso 2)} \\ \sigma(v_{i,j}) = (3k-1-j)b + (1+j-k)c & \text{se } k+1 \leq j \leq 2k \text{ (caso 3)} \end{cases}$$

Os vértices do caso 1 se diferenciam pois $\sigma(v_{i,j}) < \sigma(v_{i,j+1})$, já que $\sigma(v_{i,j+1}) = \sigma(v_{i,j}) - a + b$. Lembre-se que no caso 2 existe apenas um vértice. Os vértices do caso 3 se distinguem pois $\sigma(v_{i,j}) < \sigma(v_{i,j+1})$, já que $\sigma(v_{i,j+1}) = \sigma(v_{i,j}) - b + c$.

Agora considere os blocos G_i com $i \equiv 0 \pmod{3}$. Nesses casos o valor de sigma é dado a seguir.

$$\begin{cases} \sigma(v_{i,j}) = (k-j)c + (k-1+j)a + b & \text{se } 0 \leq j < k \text{ (caso 1)} \\ \sigma(v_{i,j}) = 2ka & \text{se } j = k \text{ (caso 2)} \\ \sigma(v_{i,j}) = (3k-1-j)a + (1+j-k)b & \text{se } k+1 \leq j \leq 2k \text{ (caso 3)} \end{cases}$$

Agora considere os blocos G_i com $i \equiv 2 \pmod{3}$. Nesses casos o valor de sigma é dado a seguir.

$$\begin{cases} \sigma(v_{i,j}) = (k-j)b + (k-1+j)c + b & \text{se } 0 \leq j < k \text{ (caso 1)} \\ \sigma(v_{i,j}) = 2kc & \text{se } j = k \text{ (caso 2)} \\ \sigma(v_{i,j}) = (3k-1-j)c + (1+j-k)a & \text{se } k+1 \leq j \leq 2k \text{ (caso 3)} \end{cases}$$

Por argumento análogo ao usado para os blocos G_i com $i \equiv 1 \pmod{3}$, os vértices se distinguem dentro do mesmo bloco quando $i \equiv 0 \pmod{3}$ e $i \equiv 2 \pmod{3}$. Então resta provar que dois vértices adjacentes com mesmo grau em blocos diferentes têm sigma diferente.

Sejam $v_{i,p}$ e $v_{i+1,q}$ dois vértices adjacentes com mesmo grau, $0 \leq i < \frac{n}{(2k+1)} - 2$. Logo, $\sigma(v_{i,p}) \neq \sigma(v_{i+1,q})$ pois nenhum vértice do bloco G_i tem vizinho com a cor de $v_{i+1,q}$, que é adjacente a todos os vértices do bloco G_{i+1} .

Agora considere um P_n^k em que n não é múltiplo de $2k+1$. É possível obter uma coloração sigma para o P_n^k pintando um grafo $H = P_{n+2k+1-(n \bmod (2k+1))}^k$ e removendo os últimos vértices desse grafo para obter o P_n^k .

Considere o grafo H com uma coloração sigma como a definida anteriormente. Remova o último vértice do grafo H e observe que o novo grafo tem uma coloração sigma, pois a remoção do vértice irá apenas afetar o rótulo sigma dos vértices v_{p-k-1} a v_{p-1} , onde $p = n + 2k + 1 - (n \bmod 2k + 1)$. Tais vértices são os novos últimos k vértices do grafo, na ordem canônica e, portanto têm graus diferentes e menores que $2k$. Pelo Lema 5.1 o rótulo sigma desses vértices são diferentes entre si. Dessa forma a coloração sigma do novo grafo continua válida.

Utilizando o mesmo procedimento pode-se remover os vértices de H até obter o P_n^k com uma coloração sigma válida.

Portanto $\sigma(P_n^k) \leq 3$ quando $k < \lceil \frac{n}{2} \rceil$. □

Em relação a coloração sigma dada no Teorema 5.2, observa-se que os vértices mais próximos de v_x na ordem canônica que têm rótulos sigma iguais ao de v_x são os vértices $v_{x \pm (6k+3)}$ se existirem, com x natural.

No caso em que $k \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ pode-se determinar o número cromático sigma, como mostra o Teorema 5.3.

Teorema 5.3. *Em um grafo P_n^k com $k \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, $\sigma(P_n^k) = n_\Delta$, onde n_Δ é o número de vértices de grau $\Delta(G)$.*

Demonstração. Como todos os vértices com grau $\Delta(P_n^k)$ são gêmeos fortes, então cada um desses vértices deve ser colorido com uma cor diferente dos demais. Logo, $\sigma(P_n^k) \geq n_\Delta$. Vamos apresentar uma coloração sigma com n_Δ cores.

Para apresentar uma coloração sigma do P_n^k com n_Δ cores, considere que o conjunto dos vértices desse grafo, ordenados de acordo com a ordem canônica, será particionado em dois subconjuntos A e B tais que $A = \{v_i : 1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor\}$ e $B = \{v_i : \lfloor n/2 \rfloor < i < n\}$. Além disso, seja D um subconjunto com todos os vértices de grau $\Delta(P_n^k)$. Seja a_i o vértice com grau $\Delta(P_n^k) - i$ em A , $1 \leq i \leq k$. Similarmente, seja b_i o vértice com grau $\Delta(P_n^k) - i$ em B , $1 \leq i \leq k$. Considere que as cores $\{c_1, c_2, \dots, c_{n_\Delta-2}, x, y\}$ são números naturais positivos e satisfazem $y > \Delta(P_n^k)x$. Pinte os vértices de $(A \setminus D) \cup \{b_1\}$ com a cor x , os vértices de $B \setminus (D \cup \{b_1\})$ com cor y e os vértices de D com cores distintas de $\{c_1, c_2, \dots, c_{n_\Delta-2}, x, y\}$.

Vamos mostrar que essa coloração é uma coloração sigma válida. Quando dois vértices têm graus diferentes, pelo Lema 5.1, seus rótulos sigma são diferentes. Então, considere que os vértices v e u tenham o mesmo grau. Esses vértices são, pela definição apresentada anteriormente, a_i e b_i com $1 \leq i < k$. Sejam d_i , $1 \leq i \leq n_\Delta$, os vértice com grau $\Delta(P_n^k)$. Os valores de sigma são:

$$\begin{aligned}\sigma(a_i) &= \left(\sum_{i=1}^{n_\Delta} \lambda(d_i) \right) - \lambda(a_i) + \sum_{j=1}^{\frac{n-n_\Delta}{2}} \lambda(a_j) + \sum_{j=1}^{k-n_\Delta-i+1} \lambda(b_j) \\ \sigma(b_i) &= \left(\sum_{i=1}^{n_\Delta} \lambda(d_i) \right) - \lambda(b_i) + \sum_{j=1}^{\frac{n-n_\Delta}{2}} \lambda(b_j) + \sum_{j=1}^{k-n_\Delta-i+1} \lambda(a_j)\end{aligned}$$

Agora suponha por absurdo que os valores sigma de a_i e b_i são iguais, teremos:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n_\Delta} \lambda(d_i) \right) - \lambda(a_i) + \sum_{j=1}^{\frac{n-n_\Delta}{2}} \lambda(a_j) + \sum_{j=1}^{k-n_\Delta-i+1} \lambda(b_j) &= \\ \left(\sum_{i=1}^{n_\Delta} \lambda(d_i) \right) - \lambda(b_i) + \sum_{j=1}^{\frac{n-n_\Delta}{2}} \lambda(b_j) + \sum_{j=1}^{k-n_\Delta-i+1} \lambda(a_j) & \\ \left(\sum_{j=k-n_\Delta-i+2}^{\frac{n-n_\Delta}{2}} \lambda(a_j) \right) - \lambda(a_i) &= \left(\sum_{j=k-n_\Delta-i+2}^{\frac{n-n_\Delta}{2}} \lambda(b_j) \right) - \lambda(b_i)\end{aligned}$$

$$\left(\sum_{j=k-n_{\Delta}-i+2}^{\frac{n-n_{\Delta}}{2}} \lambda(a_j) \right) + \lambda(b_i) = \left(\sum_{j=k-n_{\Delta}-i+2}^{\frac{n-n_{\Delta}}{2}} \lambda(b_j) \right) + \lambda(a_i).$$

Como $n = 2k - n_{\Delta} + 2$, $\frac{n-n_{\Delta}}{2} = k - n_{\Delta} + 1$, logo:

$$\left(\sum_{j=k-n_{\Delta}-i+2}^{k-n_{\Delta}+1} \lambda(a_j) \right) + \lambda(b_i) = \left(\sum_{j=k-n_{\Delta}-i+2}^{k-n_{\Delta}+1} \lambda(b_j) \right) + \lambda(a_i).$$

Considere o caso em que $1 < i < n - n_{\Delta}$. Como $\lambda(a_i) = x$ e $\lambda(b_i) = y$, essa equação tem a forma $cx + y = dy + x$, com $c, d \in \mathbb{N}$, onde $c + 1$ é o grau de a_i e $d + 1$ é o grau de b_i . Como os vértices a_i e b_i têm o mesmo grau, $c = d > k$, logo $(d - 1)x = (d - 1)y$ e $x = y$, o que é um absurdo já que $x \neq y$.

Quando $i = 1$, temos:

$$\left(\sum_{j=k-n_{\Delta}-1+2}^{k-n_{\Delta}+1} \lambda(a_j) \right) + \lambda(b_1) = \left(\sum_{j=k-n_{\Delta}-1+2}^{k-n_{\Delta}+1} \lambda(b_j) \right) + \lambda(a_1).$$

Então, $\lambda(a_{k-n_{\Delta}+1}) + \lambda(b_1) = \lambda(b_{k-n_{\Delta}+1}) + \lambda(a_1)$. Como $\lambda(a_1) = \lambda(b_1)$ temos, $\lambda(a_{k-n_{\Delta}+1}) = \lambda(b_{k-n_{\Delta}+1})$, o que é um absurdo já que pela hipótese $\lambda(a_{k-n_{\Delta}+1}) \neq \lambda(b_{k-n_{\Delta}+1})$. Assim a coloração proposta é uma coloração sigma válida. \square

Para casos específicos do Teorema 5.2 é possível determinar o número cromático sigma. Considerando valores de k fixos, pode-se determinar o número cromático sigma quando $k = 2$ ou em alguns casos em que $k = 3$.

Teorema 5.4. *Se P_n^k tem $k = 2$ e $n > 3$, então $\sigma(P_n^k) = 2$.*

Demonstração. Suponha um grafo P_n^k com $k = 2$, com vértices numerados $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ em ordem canônica. Pinte os primeiros seis vértices (se existirem) com as cores b, a, b, b, a, a , nesta ordem, sendo $b \geq \Delta(P_n^k)a$. Os próximos seis vértices com a mesma sequência de cores e assim sucessivamente. Pode-se definir tal coloração por uma função $\lambda : V(P_n^2) \rightarrow \{a, b\}$ tal que $\lambda(v_{6i}) = b, \lambda(v_{6i+1}) = a, \lambda(v_{6i+2}) = b, \lambda(v_{6i+3}) = b, \lambda(v_{6i+4}) = a, \lambda(v_{6i+5}) = a$, com $i \in \mathbb{N}$.

Então $\sigma(v_0), \sigma(v_1), \sigma(v_{n-2}), \sigma(v_{n-1})$ se distinguem dos demais por não terem vizinhos com o mesmo grau, de acordo com o Lema 5.1. Para os demais vértices, tem-se:

$$\sigma(v_{3j+2}) = 2a + 2b;$$

$$\sigma(v_{3j+3}) = 3a + b;$$

$$\sigma(v_{3j+4}) = a + 3b;$$

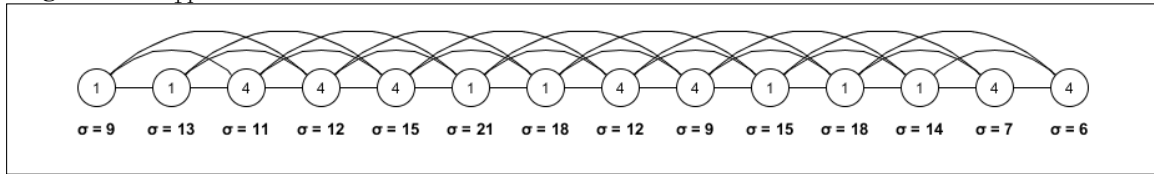
com $j \in \mathbb{N}$.

Desta forma, $\forall i, \sigma(v_i) \neq \sigma(v_i \pm 1)$ e $\sigma(v_i) \neq \sigma(v_i \pm 2)$. Como $k = 2$, o grafo tem sua coloração sigma ótima e válida. \square

Teorema 5.5. Em um grafo P_n^k com $k = 3$ e $n < 15$, $\sigma(P_n^k) = 2$

Demonstração. Primeiro, vamos mostrar que um P_n^k com $k = 3$ e $n = 14$ tem uma coloração sigma. Suponha que os vértices do P_{14}^2 estão em ordem canônica. Particione-os em seis conjuntos, X^0, X^1, \dots, X^5 tais que os primeiros $|X^0|$ vértices da ordem pertencem a X^0 , os próximos $|X^1|$ vértices pertencem a X^1 e assim sucessivamente, onde $|X^0| = |X^2| = |X^3| = |X^5| = 2$ e $|X^1| = |X^4| = 3$. Pinte cada conjunto X^i com a cor 1 se $i \equiv 0 \pmod{2}$ e 4 se $i \equiv 1 \pmod{2}$. Dessa forma o grafo tem a coloração apresentada na Figura 24.

Figura 24 – P_{14}^3



Fonte: Autoria própria

Analogamente à demonstração no Teorema 5.2, é possível remover sucessivamente o último vértice desse grafo de forma que essa coloração sigma seja válida para todo P_n^3 com $n < 15$. Portanto, $\sigma(P_n^3) = 2$ para $n < 15$. \square

Ainda considerando o limite superior apresentado pelo Teorema 5.2, pode-se determinar o número cromático sigma quando k está no intervalo $\{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$.

Teorema 5.6. Em um grafo P_n^k com $\frac{n}{2} > k > \max\{3, \frac{n}{3} - 1\}$, $\sigma(P_n^k) = 2$.

Demonstração. Primeiro, considere o caso em que $k > 3$ e $k = \frac{n-2}{3}$. Suponha que os vértices do grafo P_n^k estão em ordem canônica. Particione os vértices de P_n^k em quatro conjuntos X^0, X^1, X^2 e X^3 , tal que os primeiros $k + 1$ vértices pertencem a X^0 , $X^1 = \{v_{k+1}\}$, $X^2 = \{v_{k+2}, v_{k+3}, \dots, v_{2k+1}\}$ e $X^3 = \{v_{2k+2}, v_{2k+3}, \dots, v_{3k+1}\}$. Denotamos o i -ésimo vértice em cada conjunto X^w por x_i^w , $0 \leq i < |X^w|$.

Considere duas cores a e b tais que $b > \Delta(P_n^k)a$. Pinte todos os vértices dos conjuntos X^0 e X^2 com a cor a . Pinte todos os vértices dos conjuntos X^1 e X^3 com a cor b . Dessa forma, vértices com graus diferentes têm rótulos sigma diferentes pelo Lema 5.1. Então, os k primeiros vértices do conjunto X^0 e os vértices do conjunto X^3 têm rótulos sigma diferentes dos seus vizinhos por terem graus diferentes.

Para os demais vértices, são obtidos os seguintes rótulos sigma:

$$\sigma(x_k^0) = (2k - 1)a + b;$$

$$\sigma(x_0^1) = 2ka;$$

$$\sigma(x_i^2) = (2k - 2 - i)a + (2 + i)b, \quad 0 \leq i < k;$$

Dessa forma, usando a coloração proposta todos os vértices do grafo tem rótulos sigma diferentes e $\sigma(P_n^k) = 2$.

Quando $k > \frac{n}{3} - 1$, use a mesma técnica para colorir a potência de caminho P_{3k+3}^k . Analogamente a demonstração do Teorema 5.2, é possível remover o primeiro vértice do grafo P_{3k+3}^k de forma que essa coloração sigma seja válida para o grafo P_{3k+2}^3 . O processo pode-se repetir, removendo o primeiro vértice do grafo até que se obtenha o grafo P_n^k com uma coloração sigma válida. Assim $\sigma(P_n^k) = 2$. \square

Com base em testes computacionais, realizados por um algoritmo de força bruta, que obteve coloração sigma mínima para todas as potências de caminho P_n^k com $n \leq 27$ e $k \leq 8$, enunciamos a seguinte conjectura.

Conjectura 5.7. *Seja P_n^k uma potência de caminho. Se $k = 3$ e $n \geq 15$ ou se $3 < k \leq \frac{n}{3} - 1$, então $\sigma(P_n^k) = 3$.*

5.2 SNARKS

Essa seção apresenta os resultados sobre o número cromático sigma e a rotulação sortuda para os snarks das famílias de Blanuša, snarks flor e snarks de Goldberg. Os snarks são uma subclasse dos grafos cúbicos. Dehghan, Sadeghi e Ahadi (2014) provaram que decidir se $\sigma(G) = 2$ para um grafo cúbico G é um problema NP-completo.

Teorema 5.8. *Se G for um grafo da primeira família de snarks de Blanuša então $\sigma(G) = 2$ e G é sigma contínuo.*

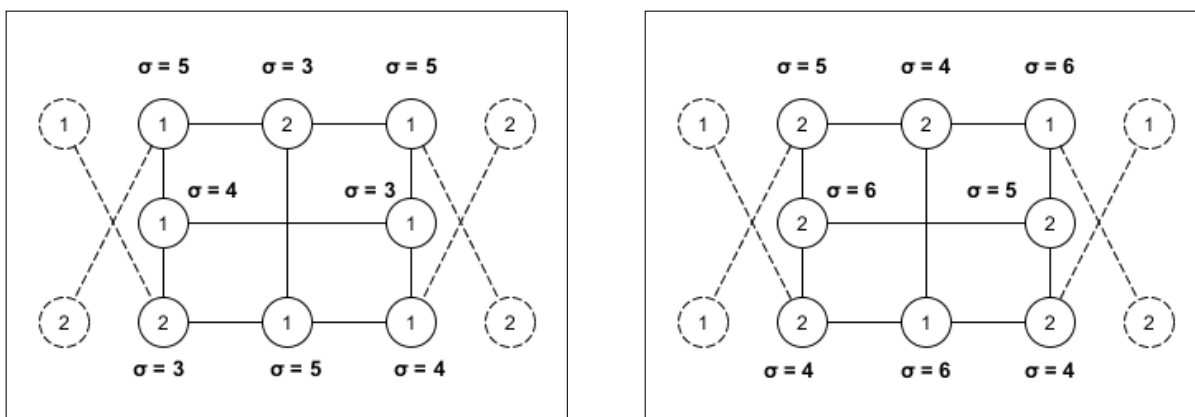
Demonstração. Seja G um snark de Blanuša. A prova é direta e divide-se em dois casos, de acordo com a paridade do número de blocos B no grafo G .

Primeiro, considere que o número de blocos B em G é ímpar. Pinte cada bloco B_i , i par, como apresentado na Figura 25(a). Pinte cada bloco B_i , i ímpar, como ilustrado na Figura 25(b). Os elementos tracejados representam elementos de outros blocos em todas as figuras.

Figura 25 – Coloração dos blocos de Blanuša B_i quando o número de blocos B é ímpar.

(a) Bloco B_i par

(b) Bloco B_i ímpar

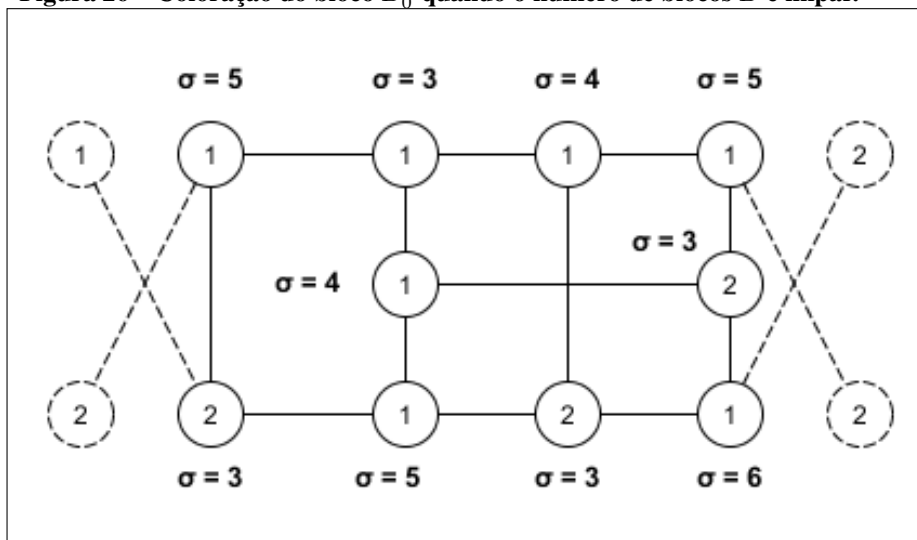


Fonte: Autoria própria

Para mostrar que esta é uma coloração sigma válida, os valores de sigma em cada vértice, de acordo com essa coloração, são apresentados em todas as figuras.

A coloração do bloco B_0^1 deve ser feita como indicado na Figura 26.

Figura 26 – Coloração do bloco B_0^1 quando o número de blocos B é ímpar.



Fonte: Autoria própria

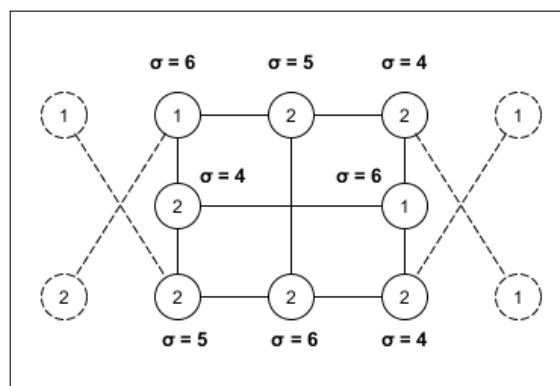
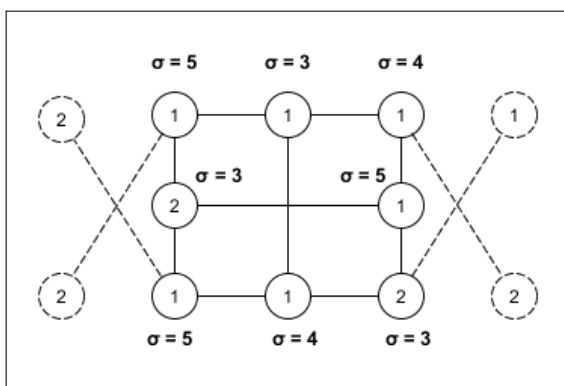
Dessa forma cada bloco tem uma coloração sigma válida e não entra em conflito com seus blocos vizinhos. Como cada bloco foi colorido usando duas cores e o grafo é cúbico, então a coloração é ótima. Como as cores usadas foram do conjunto $\{1, 2\}$, então a rotulação sortuda dessa família é 2 e valor sigma é 2. Assim esses grafos são sigma contínuos.

Agora, considere que o número de blocos B em G é par. Pinte os blocos B_i , i par, como ilustra a Figura 27(a). Pinte cada bloco B_i , i ímpar, com exceção do bloco B_1 , como apresentado na Figura 27(b).

Figura 27 – Coloração dos blocos de Blanuša B_i , quando o número de blocos B é par.

(a) Bloco B_i par

(b) Bloco B_i ímpar



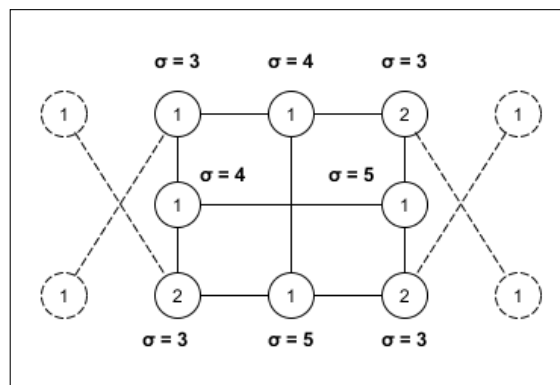
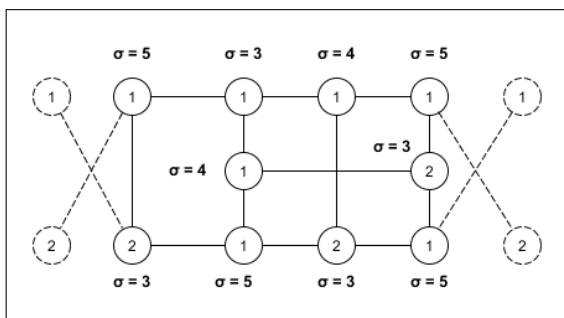
Fonte: Autoria própria

Pinte os vértices dos blocos B_0^1 e B_1 como apresentado na Figura 28.

Figura 28 – Coloração dos blocos de Blanuša B_0^1 e B_1 , quando o número de blocos B é par.

(a) Bloco B_0^1

(b) Bloco B_1



Fonte: Autoria própria

Analogamente ao caso anterior esses grafos também são sigma contínuos com número cromático sigma 2. Dessa forma qualquer grafo da primeira família de Blanuša é contínuo com número cromático sigma igual a 2. \square

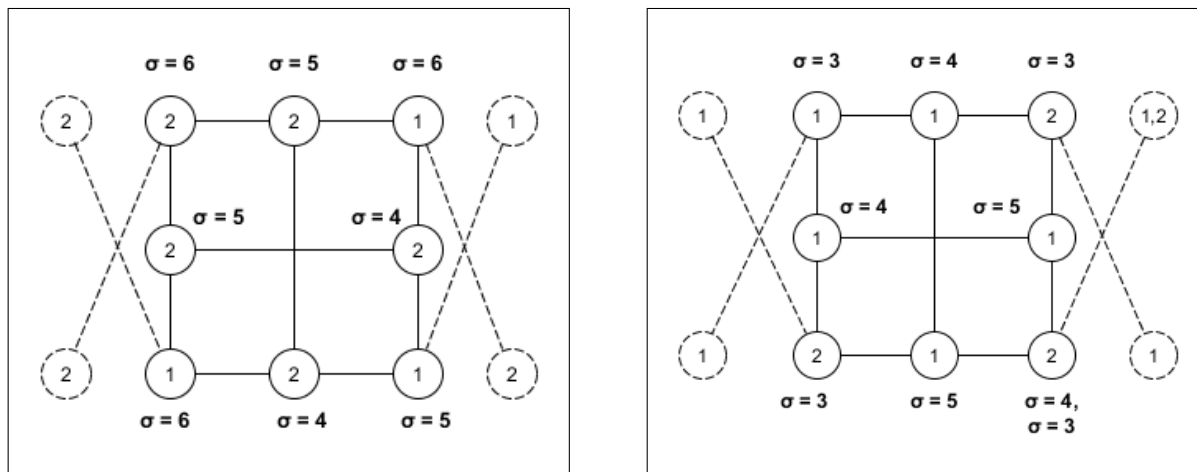
Teorema 5.9. *Se G for um grafo da segunda família de snarks de Blanuša então $\sigma(G) = 2$ e G é sigma contínuo.*

Demonstração. A prova é direta e divide-se em 2 casos. De acordo com a paridade do número de blocos B no grafo G .

O primeiro caso considera o snark de Blanuša com número ímpar de blocos B . Pinte cada bloco B_i , i par, como ilustrado na Figura 29(a). Pinte cada bloco B_i , i ímpar, como mostra a Figura 29(b). Os elementos tracejados representam elementos de outros blocos em todas as figuras. Para garantir que esta é uma coloração sigma válida, os valores de sigma de cada vértice estão calculados em todas as figuras. Os vértices com duas cores, separadas por vírgula, na Figura 29(b) mostram primeiro a cor que deve ser usada por padrão e, após a vírgula, a cor que

deve ser usada apenas no último bloco do grafo, o bloco B_n , quando o mesmo se conectar com o bloco B_0^2 .

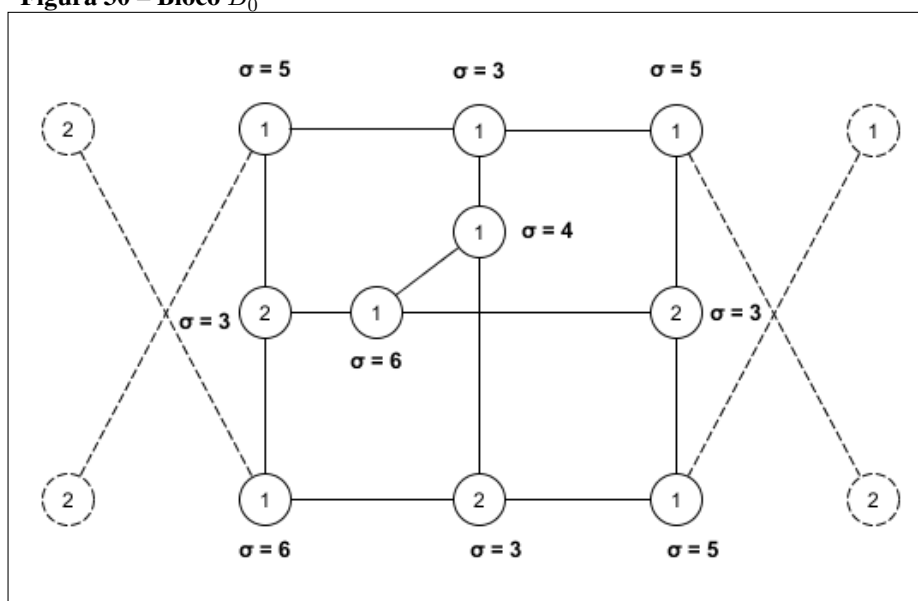
Figura 29 – Coloração dos blocos da segunda família de Blanuša B_i , quando o número de blocos B é ímpar.
 (a) Bloco B_i par (b) Bloco B_i ímpar



Fonte: Autoria própria

A coloração do bloco B_0^2 deve ser feita como ilustra a Figura 30.

Figura 30 – Bloco B_0^2

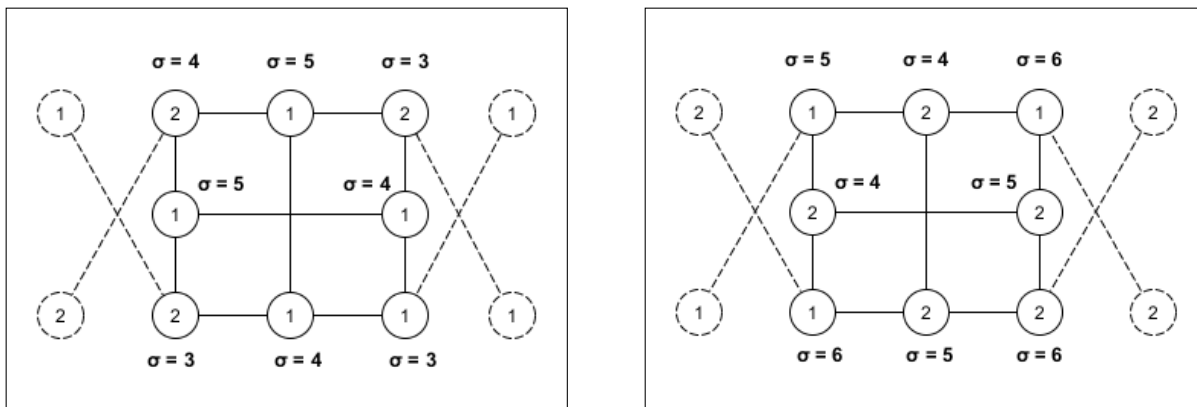


Fonte: Autoria própria

Dessa forma, cada bloco tem colorações sigma válidas e não entram em conflito com seus blocos vizinhos. Como cada bloco foi colorido usando duas cores e o grafo é cúbico, então a coloração é ótima. Como as cores usadas foram do conjunto $\{1, 2\}$, então a rotulação sortuda dessa família é 2 e valor sigma é 2. Assim esses grafos são sigma contínuos.

Agora, considere o caso em que o número de blocos B é par. Pinte cada bloco B_i , i par, como ilustra a Figura 31(a). A coloração dos blocos B_i , com exceção do bloco B_1 , é ilustrada na Figura 31(b).

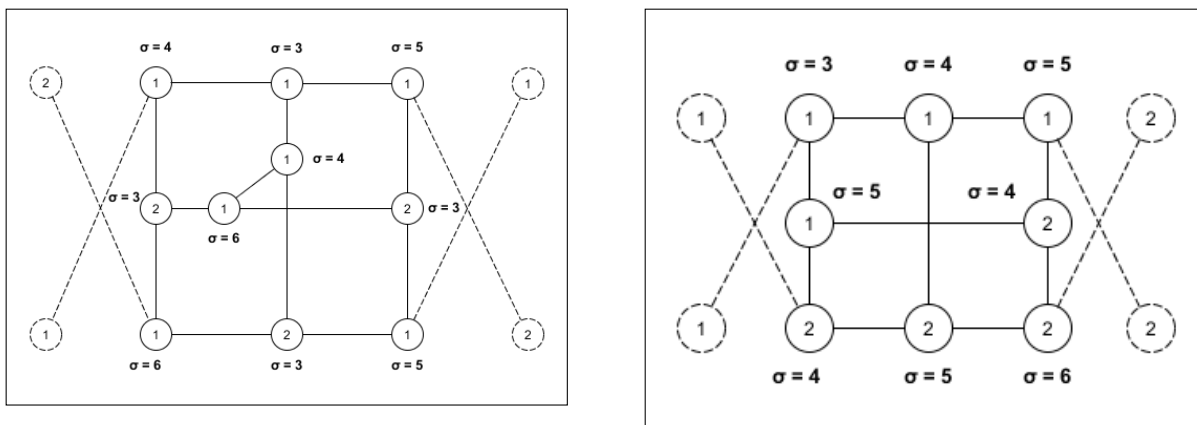
Figura 31 – Coloração dos blocos da segunda família de Blanuša B_i , quando o número de blocos B é par.
 (a) Bloco B_i par (b) Bloco B_i ímpar



Fonte: Autoria própria

A coloração dos blocos B_0^2 e B_1 é representada na Figura 32.

Figura 32 – Coloração dos blocos B_0^2 e B_1 quando o número de blocos B é par.
 (a) Bloco B_0^2 (b) Bloco B_1



Fonte: Autoria própria

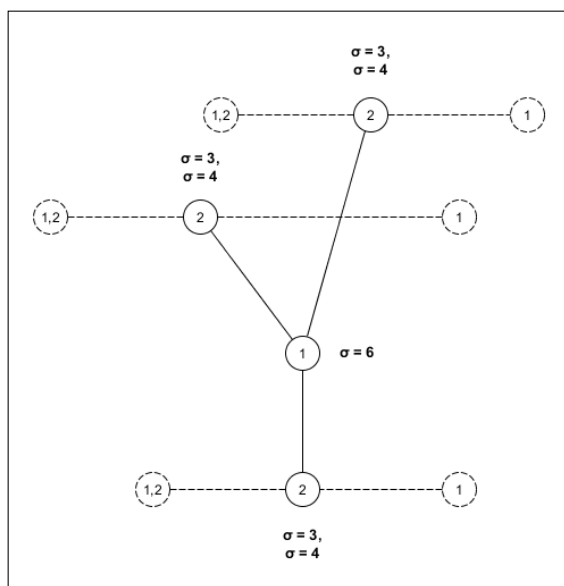
Analogamente ao caso anterior esse grafos também são sigma contínuos com número cromático sigma 2. Dessa forma qualquer grafo da segunda família de Blanuša é contínuo com número cromático sigma 2. □

Teorema 5.10. *Se G for um snark flor então $\sigma(G) = 2$ e G é sigma contínuo.*

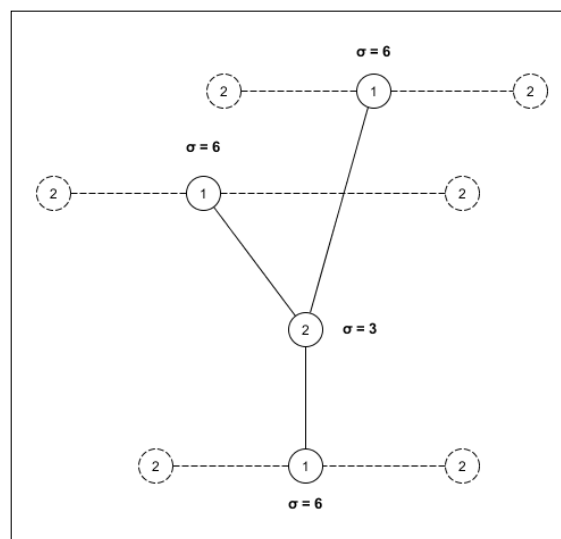
Demonstração. A prova é direta. Pinte cada bloco F_i , i ímpar e $i < n$, como ilustra a Figura 33(a). Pinte cada bloco f_i , i par como ilustrado na Figura 33(b). O bloco f_n deve ser colorido como mostra a Figura 33(c). Os elementos tracejados pertencem a outros blocos. No caso de f_1 os valores de seu rótulo devem ser os representados após a vírgula, quando ele estiver ligado ao bloco f_n como mostra a Figura 33(a).

Figura 33 – Coloração dos blocos de um snark flor

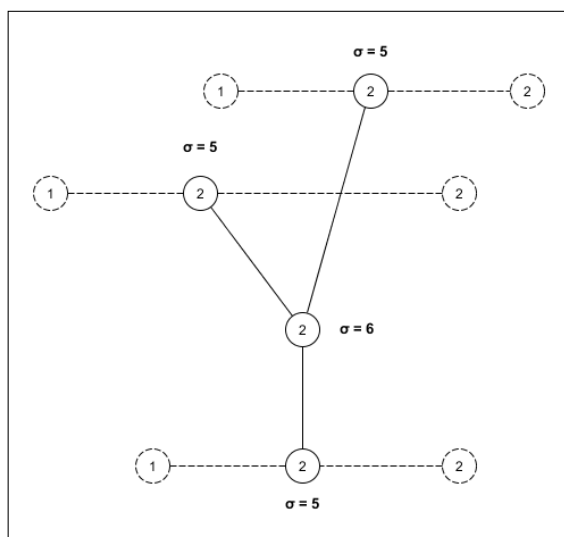
(a) Bloco f_i ímpar



(b) Bloco f_i par



(c) Bloco f_n



Fonte: Autoria própria

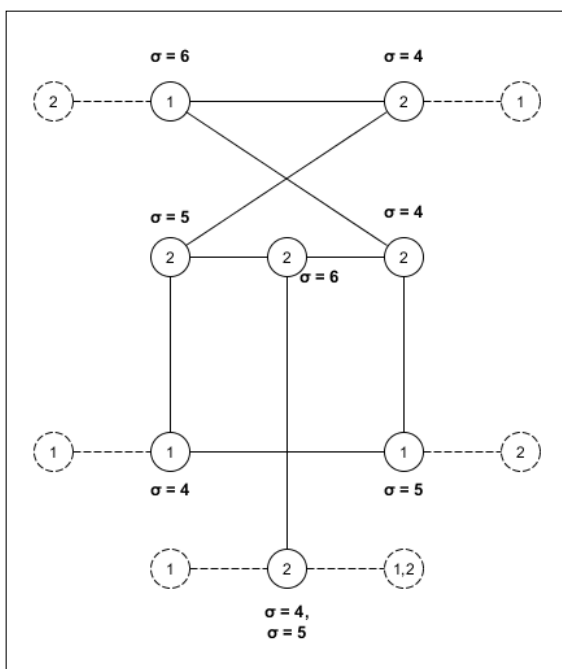
Dessa forma cada bloco tem colorações sigma válidas e não entram em conflito com seus blocos vizinhos. Como cada bloco foi colorido usando duas cores e o grafo é cúbico, então a coloração é ótima. Como as cores usadas foram do conjunto $\{1, 2\}$, então a rotulação sortuda dessa família é 2 e valor sigma é 2. Assim esses grafos são sigma contínuos. \square

Teorema 5.11. *Se G for um snark de Goldberg então $\sigma(G) = 2$ e G é sigma contínuo.*

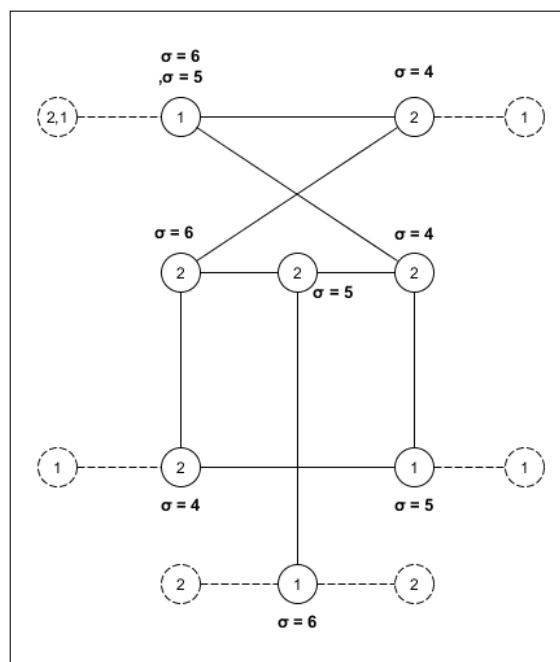
Demonstração. A prova é direta. Pinte cada bloco g_i , i ímpar e $i > 1$, como apresentado na Figura 34(a). Pinte cada bloco g_i , i par, como ilustrado na Figura 34(b). Por fim, o bloco g_1 deve ser colorido como ilustra a Figura 34(c). Os elementos tracejados pertencem a outros blocos e valores após virgula são assumidos quando os blocos estão ligados ao bloco g_1 .

Figura 34 – Coloração dos blocos de um snark de Goldberg

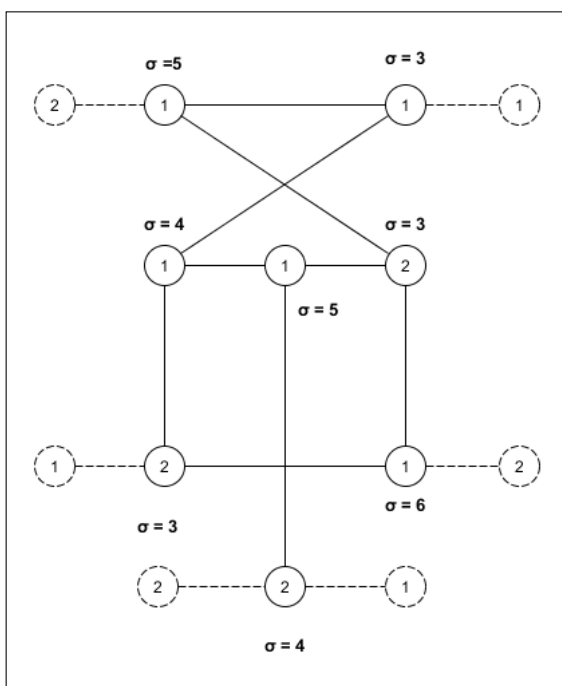
(a) Bloco g_i ímpar



(b) Bloco g_i par



(c) Bloco g_1



Fonte: Autoria própria

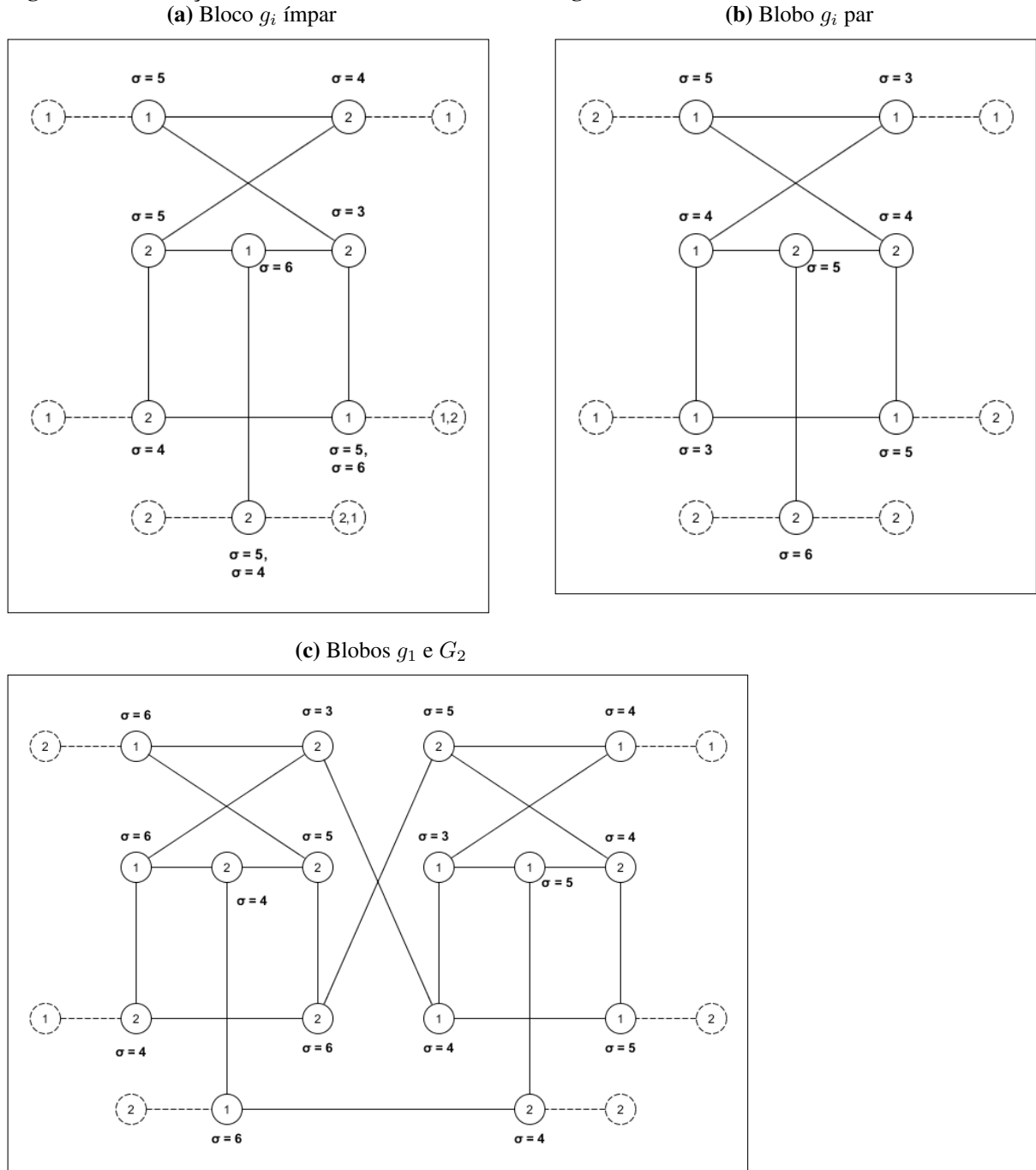
Dessa forma cada bloco tem coloração sigma válida e não entra em conflito com seus blocos vizinhos. Como cada bloco foi colorido usando duas cores e o grafo é cúbico, então a coloração é ótima. Como as cores usadas foram do conjunto $\{1, 2\}$, então a rotulação sortuda dessa família é 2 e valor sigma é 2. Assim, esses grafos são sigma contínuos.

□

Teorema 5.12. *Se TG_n for um snark de Goldberg Torcido e $n > 3$ então $\sigma(TG_n) = 2$ e caso $n = 3$ $\sigma(TG_3) = 3$, TG_n é sigma contínuo.*

Demonstração. A prova é direta. Suponha um grafo TG_n com $n > 3$. Faça uma coloração sigma pintando cada bloco g_i com i ímpar e $i > 2$ como apresentado na Figura 35(a). Pinte cada bloco g_i com i par e $i > 3$ como ilustrado na Figura 35(b). Os blocos g_1 e g_2 devem ser coloridos como mostra a Figura 35(c). Os elementos tracejados pertencem a outros blocos e valores após virgula se referem a quando os blocos estão ligados ao bloco g_1 .

Figura 35 – Coloração dos blocos de um snark de Goldberg torcido

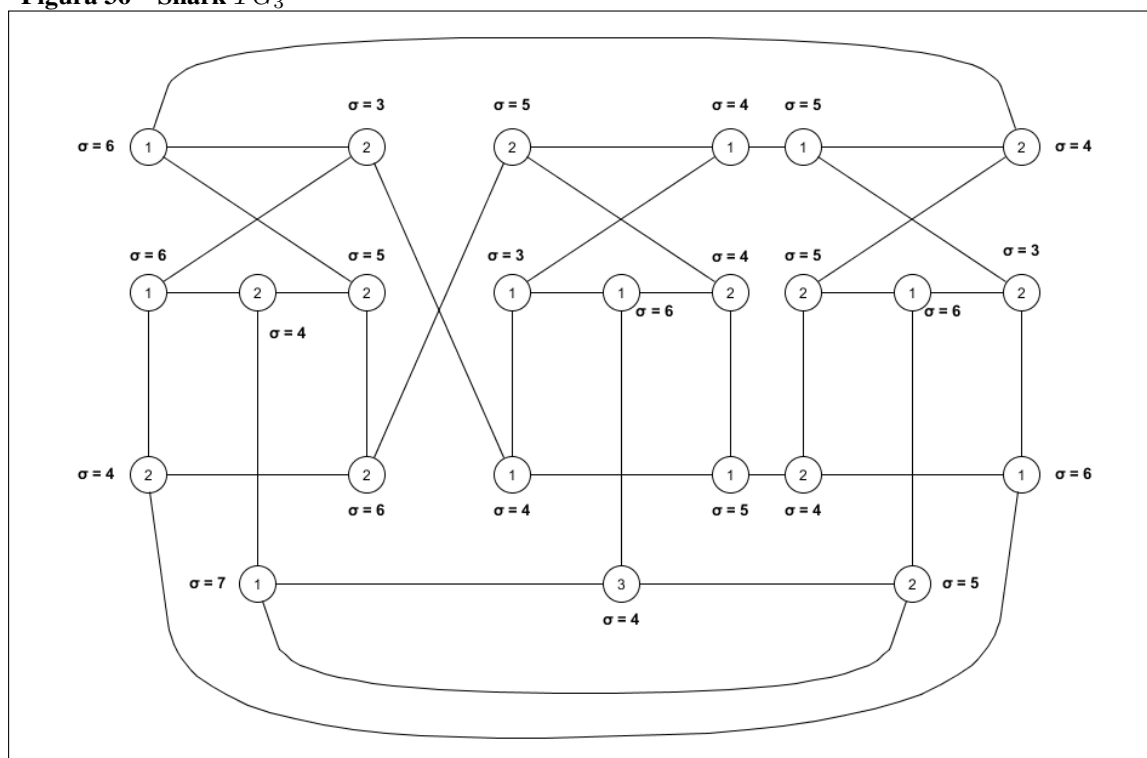


Fonte: Autoria própria

Dessa forma cada bloco tem colorações sigma válidas e não entram em conflito com seus blocos vizinhos. Como cada bloco foi colorido usando duas cores e o grafo é cúbico, então a coloração é ótima. Como as cores usadas foram do conjunto $\{1, 2\}$, então a rotulação sortuda dessa família é 2 e valor sigma é 2. Assim esses grafos são sigma contínuos.

Todas as colorações de duas cores para um snark de Goldberg Torcido com três blocos TG_3 foram testadas através de um algoritmo que utiliza a estratégia de força bruta. O código implementado pode ser visto no Apêndice 6. Assim, foi constatado que não existe coloração sigma válida com duas cores para um TG_3 , dessa forma é necessário fazer o uso de uma cor adicional, a cor 3. A coloração de um TG_3 pode ser feita como ilustra a Figura 36, onde o vértice que teria um sigma conflitante é trocado para a cor 3. Apesar de precisar de uma cor extra e usar o conjunto de cores $\{1, 2, 3\}$, esse grafo continua sendo sigma contínuo por não ser possível pintá-lo com o conjunto $\{1, 2\}$.

Figura 36 – Snark TG_3



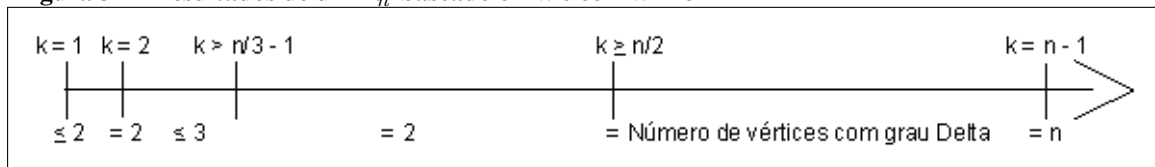
Fonte: Autoria própria

□

6 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Para qualquer grafo potência de caminho foi definido ao menos um limite superior para o número cromático sigma, com um erro de no máximo uma unidade. A Figura 37 representa a distribuição dos resultados encontrados para as potências de caminho com base no valor de k . Quando $k = 1$ o grafo é um caminho e quando $k = n - 1$ ele é um grafo completo. Além disso, não existem valores de k entre $\frac{n-1}{2}$ e $\frac{n}{2}$. Nos snarks, o número cromático sigma foi definido para as famílias de Blanuša (primeira e segunda), flor, Goldberg e Goldberg torcido. Para todas essas famílias, o número cromático sigma encontrado foi 2, exceto no caso do grafo TG_3 , onde $\sigma(TG_3) = 3$. Esses resultados são importantes pois, pela definição de Dehghan, Sadeghi e Ahadi (2014), decidir se $\sigma(G) = 2$ para um grafo cúbico G é um problema NP-Completo. Para essas famílias de snarks este trabalho também apresenta como contribuição o valor sigma e a rotulação sortuda.

Figura 37 – Resultados de um P_n^k baseado em k e com n fixo



Fonte: Autoria própria

É interessante ressaltar como o número cromático sigma não se comporta seguindo padrões simples em relação a estrutura de um grafo. Como no exemplo do TG_3 , onde com apenas uma mudança na disposição de duas arestas do G_3 torna-se impossível obter uma coloração sigma com duas cores. Nas potências de caminho também observa-se resultados contraintuitivos, já que para um valor de k fixo, o valor de n é limitado quando $\sigma(P_n^k) = 2$, mas pode ser infinitamente grande quando $\sigma(P_n^k) = 3$.

Como trabalhos futuros sugere-se provar a Conjectura 5.7. Uma alternativa é determinar se o problema de decidir se $\sigma(P_n^k) = 3$ é um problema NP-Completo. Outro trabalho interessante é encontrar uma prova sem uso de métodos computacionais da impossibilidade da coloração sigma de um TG_3 com apenas duas cores.

REFERÊNCIAS

- BLANUŠA, Danilo. Problem cetiriju boja. **Glasnik Mat. Fiz. Astr. Ser. II**, v. 1, p. 31–42, 1946.
- CARROLL, Lewis. **The hunting of the snark: An agony in eight fits**. Macmillan, 1914.
- CHARTRAND, G.; OKAMOTO, F.; ZHANG, P. The sigma chromatic number of a graph. **Graphs and Combinatorics**, Springer, v. 26, n. 6, p. 755–773, 2010.
- CHARTRAND, G.; ZHANG, P. **Chromatic graph theory**. CRC press, 2008.
- DEGHAN, Ali; SADEGHI, Mohammad-Reza; AHADI, Arash. The complexity of the sigma chromatic number of cubic graphs. **Submitted to Discrete Appl. Math**, 2014.
- GARDNER, M. Snarks, boojums and other conjectures related to the four-colormap theorem. **Scientific American**, v. 234, p. 126–130, 1976.
- GERSTING, Judith L. **Mathematical Structures for Computer Science**. New York, NY, USA: W. H. Freeman & Co., 2006. ISBN 071676864X.
- GHEBLEH, Mohammad. The circular chromatic index of goldberg snarks. **Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 307, n. 24, p. 3220–3225, 2007.
- GOLDBERG, Mark K. Construction of class 2 graphs with maximum vertex degree 3. **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, Elsevier, v. 31, n. 3, p. 282–291, 1981.
- ISAACS, Rufus. Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not tait colorable. **The American Mathematical Monthly**, Taylor & Francis, v. 82, n. 3, p. 221–239, 1975.
- KAROŃSKI, Michał; ŁUCZAK, Tomasz; THOMASON, Andrew. Edge weights and vertex colours. **Journal of Combinatorial Theory Series B**, Academic Press, Inc., v. 91, n. 1, p. 151–157, 2004.
- LUZON, Paul Adrian D; RUIZ, Mari-Jo P; TOLENTINO, Mark Anthony C. The sigma chromatic number of the circulant graphs $C_n(1, 2)$, $C_n(1, 3)$, and $C_{2n}(1, n)$. In: SPRINGER. **Japanese Conference on Discrete and Computational Geometry and Graphs**. 2015. p. 216–227.
- PETERSEN, Julius. Sur le théoreme de tait. **L'intermédiaire des Mathématiciens**, v. 5, p. 225–227, 1898.
- ROSEN, Kenneth H. **Matemática discreta e suas aplicações**. Grupo A Educação, 2009.
- SALAVATIPOUR, Mohammad R. On sum coloring of graphs. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 127, n. 3, p. 477–488, 2003.
- TAIT, Peter Guthrie. Remarks on the colouring of maps. In: **Proc. Roy. Soc. Edinburgh**. 1880. v. 10, n. 729, p. 501–503.
- WATKINS, John J. On the construction of snarks. **Ars Combin**, v. 16, p. 111–124, 1983.
- ZHANG, Zhongfu *et al.* On adjacent-vertex-distinguishing total coloring of graphs. **Science in China Series A: Mathematics**, Springer, v. 48, n. 3, p. 289–299, 2005.

APÊNDICE A - CÓDIGO PARA TESTAR AS POSSIBILIDADES DE UMA COLORAÇÃO SIGMA EM TG_3

Código 1 – Programa em python que testa todas as possibilidades e imprime as válidas

```

1  import itertools
2
3  def makesuma1(s):
4      soma = [0]*24;
5      soma[0] = s[17] + s[1] + s[4];
6      soma[1] = s[0] + s[2] + s[13];
7      soma[2] = s[3] + s[1] + s[5];
8      soma[3] = s[2] + s[4] + s[7];
9      soma[4] = s[3] + s[6] + s[0];
10     soma[5] = s[6] + s[2] + s[22];
11     soma[6] = s[5] + s[4] + s[8];
12     soma[7] = s[23] + s[15] + s[3];
13     soma[8] = s[6] + s[12] + s[9];
14     soma[9] = s[8] + s[16] + s[10];
15     soma[10] = s[11] + s[13] + s[9];
16     soma[11] = s[10] + s[12] + s[15];
17     soma[12] = s[11] + s[14] + s[8];
18     soma[13] = s[10] + s[1] + s[14];
19     soma[14] = s[21] + s[13] + s[12];
20     soma[15] = s[23] + s[7] + s[11];
21     soma[16] = s[9] + s[17] + s[20];
22     soma[17] = s[18] + s[16] + s[0];
23     soma[18] = s[19] + s[17] + s[21];
24     soma[19] = s[18] + s[20] + s[23];
25     soma[20] = s[19] + s[22] + s[16];
26     soma[21] = s[22] + s[18] + s[14];
27     soma[22] = s[21] + s[20] + s[5];
28     soma[23] = s[15] + s[19] + s[7];
29     return soma;
30
31 def checksuma1(s):
32     if(s[0] == s[1] or s[0] == s[4] or s[0] == s[17]):
33         return False
34     if(s[1] == s[2] or s[1] == s[13]):
35         return False
36     if(s[2] == s[3] or s[2] == s[5]):
37         return False
38     if(s[3] == s[4] or s[3] == s[7]):
39         return False
40     if(s[4] == s[6]):
41         return False
42     if(s[5] == s[6] or s[5] == s[22]):

```

```
        return False
44     if (s[6] == s[8]):
        return False
46     if (s[7] == s[15] or s[7] == s[23]):
        return False
48     if (s[8] == s[9] or s[8] == s[12]):
        return False
50     if (s[9] == s[10] or s[9] == s[16]):
        return False
52     if (s[10] == s[11] or s[10] == s[13]):
        return False
54     if (s[11] == s[12] or s[11] == s[15]):
        return False
56     if (s[12] == s[14]):
        return False
58     if (s[13] == s[14]):
        return False
60     if (s[14] == s[15] or s[14] == s[21]):
        return False
62     if (s[15] == s[23]):
        return False
64     if (s[16] == s[17] or s[16] == s[20]):
        return False
66     if (s[17] == s[18]):
        return False
68     if (s[18] == s[19] or s[18] == s[21]):
        return False
70     if (s[19] == s[20] or s[19] == s[23]):
        return False
72     if (s[20] == s[22]):
        return False
74     if (s[21] == s[22]):
        return False
76     return True

78 resposta = []
    for s in itertools.product([1,2], repeat=24):
80         soma = makesumaI(s);
            if (checksumaI(soma)):
82                 resposta.append(s);
                    print(s)
84 print("fim")
```
