**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**
**DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**KEILA TOSTES DE MORAIS**

# APLICAÇÕES DO TEOREMA DO VALOR MÉDIO E DO TEOREMA DE ROLLE

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

**CAMPO MOURÃO**

**2011**

KEILA TOSTES DE MORAIS

# APLICAÇÕES DO TEOREMA DO VALOR MÉDIO E DO TEOREMA DE ROLLE

Monografia apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Especialista em Ciências – Área de Concentração: Matemática na Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – *Campus* Campo Mourão.

Orientador: Prof. M.Sc. Wellington José Corrêa

**CAMPO MOURÃO**

**2011**

Ministério da Educação
**Universidade Tecnológica Federal do Paraná**
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**TERMO DE APROVAÇÃO**

**APLICAÇÕES DO TEOREMA DO VALOR MÉDIO E DO TEOREMA DE ROLLE**

Por

**KEILA TOSTES DE MORAIS**

Esta monografia foi apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Especialista em Ciências – Área de Concentração: Matemática, no Curso de Especialização em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, *Campus* Campo Mourão. A candidata foi argüida pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho ________________________________.

(aprovado, aprovado com restrições, reprovado)

____________________________________
Prof. M.Sc Wellington José Corrêa
(orientador)

____________________________________
Prof. M.Sc. Nayene Michele Pitta Paião

____________________________________
Prof. M.Sc. Diogo Heron Macowski

Dedico esse trabalho aos meus pais, que com muito amor e paciência me ajudaram e me ensinaram o caminho que devo trilhar.

Aos meus irmãos que sempre me incentivaram.

Aos meus parentes e amigos que de forma direta ou indireta me ajudaram, sempre rumo a vitória, superando os obstáculos e conseguindo o objetivo almejado.

## AGRADECIMENTOS

A Deus em especial pela sua grandeza e bondade infinita para comigo. Pela serenidade e paz para dar início a mais uma etapa de minha vida. Nas dificuldades encontradas me fortalece em esperanças e humildade.

Aos meus pais e irmãos, sempre presentes e atenciosos em todos os momentos.

Ao meu orientador M.Sc. Wellington José Corrêa, pelos momentos de apoio e por me guiar na busca do conhecimento.

A Adilandri, coordenador do curso, pelo incentivo e estímulo constantes.

Aos colegas de turma que contribuíram para o crescimento pessoal.

A todos os que contribuíram direta ou indiretamente para a concretização deste trabalho.

*Uma grande descoberta envolve a solução de um grande problema,*
*Mas há uma semente de descoberta na solução de qualquer problema.*
*Seu problema pode ser modesto; porém, se ele desafiar sua curiosidade*
*E fizer funcionar sua capacidade inventiva, e caso você o resolva sozinho,*
*Então poderá experimentar a tensão e o prazer do triunfo da descoberta.*

*George Polya*

# RESUMO

MORAIS, Keila Tostes de. 2011. Aplicações do Teorema do Valor Médio e do Teorema de Rolle. 38 f. Monografia (Especialização em Ciências – Área de Concentração: Matemática). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, 2011.

Esta pesquisa consta de uma revisão bibliográfica e teve como objetivo visualizar as aplicações que o Teorema do Valor Médio e o Teorema de Rolle possuem no âmbito matemático. Desta forma, se utilizou o conceito de derivada. Foi realizado uma explanação dos aspectos históricos do estudo do Cálculo na história da humanidade. Através de exercícios e exemplos, pode-se ver como o Teorema do Valor Médio em conjunto com o Teorema de Rolle possuem aplicações em diversos campos e em diferentes situações, transferindo essas aplicações para o cotidiano do ser humano. Isso se faz importante porque cada vez mais pode vislumbrar a matemática próxima da realidade social do indivíduo, o que torna o seu ensino e sua visibilidade muito mais atraentes para os estudantes.



**Palavras-chave:** Teorema do Valor Médio; Teorema de Rolle; conceito de derivada.

## ABSTRACT

MORAIS, Keila Tostes de. 2011. Applications of the Mean Value Theorem na Rolle's Theorem. 38 f. Monografia (Especialização em Ciências – Área de Concentração: Matemática). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, 2011.

This research consists of a literature review and aimed to view the applications that the Mean Value Theorem and Rolle's Theorem in mathematical feature. Thus, we used the concept of derivate. Was carried out for an explanation of the historical aspects about Calculus in the history of mankind. Through exercises and examples, one can see how the Mean Value Theorem together with the Rolle's Theorem have applications in various fields and in different situations, by moving these applications to the everyday human being. This becomes increasingly important because you can engoy the mathematics of the social reality of the people, which makes their teaching and their visibility much more attractive to students.



**Keywords:** Mean Value Theorem; Rolle's Theorem; derivate's concept

## LISTA DE GRÁFICOS

# LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|---|---|
| $\rightarrow$ | Logo |
| $\forall$ | Tal que |
| $\in$ | Pertence |
| $\leq$ | Menor ou igual a |
| $\geq$ | Maior ou igual a |
| $\Delta$ | Delta |
| $\neq$ | Diferente |
| $\leftrightarrow$ | Assim |
| $<$ | Menor |
| $>$ | Maior |

# SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

Sabe-se que Arquimedes (287-212 a.C.) lidou com as idéias do Cálculo Integral em seus estudos de áreas e volumes, conforme destaca C. H. Edwards em sua obra *The Historical Development of the Calculus*. Contudo, o Cálculo não se desenvolveu na antiguidade. Esta área da matemática esperou mais de dezoito séculos para se desvendar por inteiro, o que só ocorreu nos tempos modernos.

O Cálculo foi se desenvolvendo aos poucos durante todo o século XVII e só no final do século XX que o Teorema Fundamental foi claramente e amplamente reconhecido como elemento importante de ligação entre a derivada e a integral. Uma das razões para o cálculo não ter se desenvolvido com Arquimedes, ou um dos seus sucessores imediatos, foi a insistência exagerada no rigor das demonstrações e na preocupação em evitar o infinito a todo custo. Arquimedes lidou com situações que sugeriam claramente passagem ao limite com um certo parâmetro $n$ tendendo ao infinito; mas se recusava a fazer essa passagem.

O estudioso grego contornava a situação do infinito com o complicado método de “dupla redução ao absurdo”, e pelo qual conseguia provar seus resultados, conforme esclarece Ávila (2002). Mas como Arquimedes descobria seus resultados? Ele se valia de passagens ao limite, ainda que não as pudesse justificar rigorosamente. Em outras oportunidades recorria a raciocínios físicos. O certo é que, feitas as descobertas, ele as apresentava com demonstrações rigorosas.

Desta forma, a mais contundente característica da Matemática grega era exatamente essa insistência de seus estudiosos no rigor e no cuidado em não utilizar o conceito do infinito, pelas contradições que poderia acarretar. Como vários pesquisadores renomados da ciência já observaram, esse traço do pensamento grego foi a causa principal que tornou a matemática da época a uma completa estagnação. Pode-se observar isso pelo fato dos incomensuráveis no século IV a.C. terem marcado a primeira crise de fundamentos da Matemática, pois esta foi interpretada como significando morte certa ao ideal pitagórico de tudo explicar no mundo dos fenômenos em termos do número.

Durante todo esse percurso histórico do cálculo e o desenvolvimento dos fundamentos matemáticos se faz necessário observar que a matemática se desenrolou mais recentemente por duas causas principais, como pontua Ávila (2002): De um lado as obras clássicas antigas, principalmente as de Euclides e

Arquimedes, embora estivessem disponíveis em traduções latinas havia séculos, demoraram para serem devidamente assimiladas, coisa que só começou a acontecer plenamente no final do século XVI. E essas obras, a partir de então, tiveram influência decisiva nos novos desenvolvimentos. Ao lado desse fato, há que se considerar a atitude dos matemáticos da época, que não se pautavam pelos mesmos padrões de rigor dos matemáticos gregos. Bonaventura Cavalieri (1598-1647), que popularizou bastante as técnicas infinitesinais dos indivisíveis, cuidava de suas aplicações ao cálculo de áreas e volumes, deixando de lado qualquer preocupação com a demonstração rigorosa dos resultados, coisa que, segundo ele, deveria preocupar os filósofos, não os matemáticos.

E com essa atitude prática, seguindo raciocínios intuitivos e de visualização geométrica, predominou por cerca de 200 anos, até o começo do século XIX. Leonhard Euler (1707-1783), considerado por muitos o maior gênio matemático de seu tempo, foi também o maior mestre dessa atitude prática, que fez dele um verdadeiro desbravador das mais diversas áreas da Matemática e da Ciência Aplicada.

Assim, o estudo e a aprendizagem do Cálculo vêm permeando o desenvolvimento da Humanidade, pois esta experiência de aprendizagem se tornou algo estimulante e empolgante, visto que o Cálculo é a base para praticamente toda a Matemática e para muitas das grandes realizações no mundo moderno, nas diversas áreas que as ciências exatas se fazem presentes, tais como as Engenharias, a arquitetura, a física, a mecânica, dentre outras.

# 2 O CONCEITO DE DERIVADA

O conceito de derivada é abordado por inúmeros autores, em diferentes livros didáticos, diversas ênfases e aplicações, assim sendo, não é unanime a aceitação e aplicabilidade que o conceito de derivada possui no meio matemático. Diversos estudos vêm sendo realizados e diferentes aplicações estão sendo dadas a derivada, inclusive nas ciências da computação e nas áreas de cálculos gráficos.

Leithold (1994) explica o conceito de derivada em diversas passagens de usa obra. Primeiro o autor considerada a derivada na interpretação geométrica como “a inclinação de uma reta tangente a uma curva”. (ibid, p.138) Assim, uma função que tenha uma derivada será denominada *derivável*. A derivada é calculada pela operação de derivação e os teoremas que auxiliam no cálculo de funções algébricas podem ser enunciados e provados, como é possível encontrar a obra de Leithold.

O autor encerra interpretando a derivada como uma taxa de variação. Essa interpretação mostra a importância da derivada em diversos campos. Por exemplo, em Física, a velocidade no movimento retilíneo é definida em termos de uma derivada, pois é a medida da taxa de variação da distância com relação ao tempo. A taxa de crescimento de bactérias, por exemplo, é uma aplicação da derivada em Biologia.

Cassol (1997) aponta em seus estudos conclusões relativas ao processo de ensino e aprendizagem da derivada, examinando significados que podem a ela ser produzidos nesse processo: a derivada como um limite, derivada como declividade de reta tangente, derivada como resultado da aplicação de uma fórmula, derivada como velocidade e derivada como taxa de variação.

## 2.1 A RETA TANGENTE E A DERIVADA

A taxa de variação de uma reação química é um tópico de interesse para um químico. Os economistas estão preocupados com conceitos marginais tais como a receita marginal, o custo marginal e o lucro marginal, que são taxas de variação.

Muitos dos problemas importantes de Cálculo envolvem a determinação da reta tangente a uma curva dada, em um determinado ponto dela. Para uma circunferência, sabe-se da Geometria Plana que a reta tangente em um ponto seu é a reta que tem com ela um único ponto comum. Essa definição não é válida para uma curva em geral. Por exemplo, no gráfico 1 a reta que se quer tangente à curva no ponto *P* intercepta a curva em outro ponto *Q*. para chegar a uma definição adequada de reta tangente ao gráfico de uma função em um de seus pontos, começamos pensando em definir a inclinação da reta tangente no ponto. Então, a tangente é determinada por sua inclinação e pelo ponto de tangência.


Gráfico 1 – Reta tangente a curva
Fonte: Leithold, 1994.

Considere a função $f$ contínua em $x_1$. Quer-se definir a inclinação da reta tangente ao gráfico de $f$ em $P(x_1, f(x_1))$. Seja $I$ o intervalo aberto que contém $x_1$ no qual $f$ está definida. Seja $Q(x_2, f(x_2))$ outro ponto do gráfico de $f$, tal que $x_2$ também esteja em $I$.

Desta forma, traça-se uma reta através de *P* e *Q*. qualquer reta que passe por dois pontos de uma curva é chamada de **reta secante**, assim, a reta através de *P* e *Q* é uma reta secante. O gráfico 2 mostra retas secantes para vários valores de $x_2$. A figura 08 mostra uma determinada reta secante, onde *Q* está à direita de *P*. No entanto *Q* pode estar de qualquer lado de *P*, conforme mostra o gráfico 2.

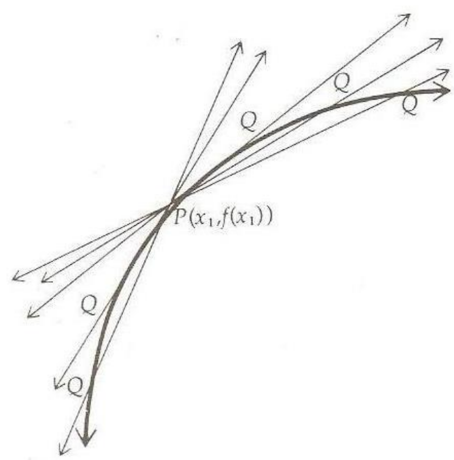


Gráfico 2 – Reta secante
Fonte: Leithold, 1994.

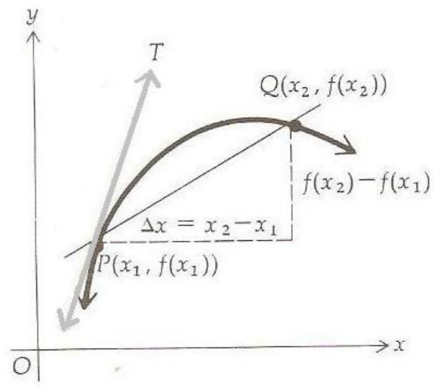


Gráfico 3 – Curva e reta secante
Fonte: Leithold, 1994.

Denota-se a diferença entre as abscissas de *Q* e de *P* por $\Delta x$ (lê-se “delta xis”), assim

$\Delta x = x_2 - x_2$

Observe que $\Delta x$ denota uma variação nos valores de *x*, quando ele muda de $x_1$ para $x_2$ e pode ser positiva ou negativa. Essa variação é chamada de *incremento de x*. É Necessário ter cuidado com o símbolo $\Delta x$, para o incremento de *x*; ele não deve ser interpretado como o “produto de $\Delta$ por *x*”.

Retornando à reta secante *PQ* da Figura 08, sua inclinação é dada por

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Desde que a reta *PQ* não seja vertical. Como $x_2 = x_1 + \Delta x$, a inclinação de *PQ* pode ser escrita como

$$m_{PQ} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Considerando-se o ponto *P* como fixo e o ponto *Q* como móvel, ao longo da curva em direção a *P*, isto é, *Q* tende a *P*. Isto equivale a dizer que $\Delta$x tende a zero. Quando isso ocorre, a reta secante gira em torno do ponto fixo *P*. Se a reta secante tiver uma posição limite como sendo a da reta tangente ao gráfico *f* em *P*. Assim, deseja-se que a inclinação da reta tangente ao gráfico *P* seja o limite de $m_{PQ}$ quando $\Delta$x tende a zero, se esse limite existir. Se lim $m_{PQ}$ for $+\infty$ ou $-\infty$, então, à medida que $\Delta$x tende a zero, a reta *PQ* aproxima-se da reta por *P*, que é paralela ao eixo *y*. Nesse caso, deseja-se que a reta tangente ao gráfico em *P* seja a reta $x = x_1$. Toda essa discussão, de acordo com Leithold (1994) pode chegar à seguinte definição:

Supõe que a função $f$ seja contínua em $x_1$. A **reta tangente** ao gráfico de $f$ no ponto $P\ (x_1,\ f(x_1))$ é

(i) a reta por $P$ tendo inclinação $m(x_1)$, dada por

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0+} = \frac{f\,(x_1 + \Delta x) - f\,(x_1)}{\Delta x}$$

se o limite existir;

(ii) a reta $x = x_1$ se

$$\lim_{\Delta x \to 0+} = \frac{f\,(x_1 +\ \Delta x) -\ f\,(x_1)}{\Delta x}\ \text{for} + \infty\ \text{ou} - \infty$$

e

$$\lim_{\Delta x \to 0-} = \frac{f\,(x_1 +\ \Delta x) -\ f\,(x_1)}{\Delta x}\ \text{for} + \infty\ \text{ou} - \infty$$

Se nem (i) nem (ii) da definição acima forem verdadeiras, então não existirá reta tangente ao gráfico de $f$, no ponto $P(x_1,\ f(x_1))$.

Exemplo: Dada a parábola $y = x^2$, ache a inclinação da reta secante, nos quesitos de (a) até (c) pelos dois pontos: (a) (2, 4), (3, 9); (b) (2, 4), (2,1,4,41); (c) (2, 4), (2,01,4,0401). (d) Ache a inclinação da reta tangente à parábola no ponto (2, 4). (e) Faça um esboço do gráfico e mostre um segmento da reta tangente em (2, 4)

*Solução*:

Sejam $m_a$, $m_b$, $m_c$ as inclinações das retas secantes em (a), (b) e (c), respectivamente.

(a) $m_a = \dfrac{9-4}{3-2}$ logo $m_a = 5$

(b) $m_b = \dfrac{4{,}41-4}{2{,}1-2}$ logo $m_b = \dfrac{0{,}41}{0{,}1}$ logo $m_b = 4{,}1$

(c) $m_c = \dfrac{4{,}0401-4}{2{,}01-2}$ logo $m_c = \dfrac{0{,}0401}{0{,}01}$ logo $m_c = 4{,}01$

(d) Seja $f(x) = x^2$. Tem-se:

$m(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$

$m(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 - 4}{\Delta x}$

$m(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4}{\Delta x}$

$m(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$ $\quad m(2) = \lim_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x)$ $\quad$ logo $m(2) = 4$

(e) O gráfico 04 ilustra um esboço do gráfico e um segmento da reta tangente em (2,4).

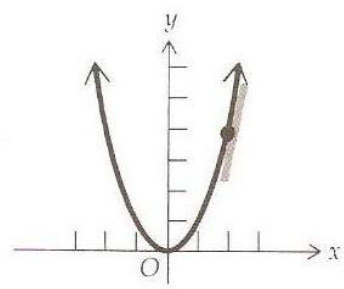


Gráfico 4 – Ilustração segmento reta tangente em (2, 4)
Fonte: Leithold, 1994.

Exemplo 02: Ache a inclinação da reta tangente ao gráfico da função definida por $y = x^3 - 3x + 4$ no ponto ($x_1$, $y_1$).

*Solução*:

$f(x_1) = x_1^3 - 3x_1 + 4$

$f(x_1 + \Delta x) = (x_1 + \Delta x)^3 - 3(x_1 + \Delta x) + 4$

De (1),

$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1 + \Delta x)^3 - 3(x_1 + \Delta x) + 4 - (x_1^3 - 3x_1 + 4)}{\Delta \mathrm{x}}$$

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^3 + 3x_1^2 \Delta x + 3x_1(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3x_1 - 3\Delta x + 4 - x_1^3 + 3x_1 - 4)}{\Delta x}$$

$$m\,(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x_1^2\,\Delta x \;+\; 3x_1(\Delta x)^2 +\; (\Delta x)^3 -\; 3\,\Delta x}{\Delta x}$$

Como $\Delta x \neq 0$, pode-se dividir o numerador e o denominador por $\Delta x$ e obter

$$m\,(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} [3x_1^2 + \; 3x_1\,\Delta x + (\Delta x)^2 - \; 3]$$

$$m\,(x_1) = \; 3x_1^2 - 3$$

Para se fazer um esboço do gráfico da função do exemplo 02, coloca-se pontos no gráfico e um segmento da reta tangente em alguns deles. Os valores de *x* são tomados arbitrariamente e o valor funcional correspondente é calculado pela equação dada, o valor de *m* é calculado de (2). Os resultados são apresentados na Tabela 01 e um esboço do gráfico 5. É importante determinar os pontos onde o gráfico possui tangente horizontal. Como uma reta horizontal possui inclinação zero, esses pontos são encontrados ao se resolver em $x_1$ à equação $m(x_1) = 0$. Fazendo-se os cálculos para esse exemplo tem-se $3x_1^2 - 3 = 0$, resultando $x_1 = \pm 1$. Sendo assim, nos pontos com abscissas -1 e 1 a reta tangente é paralela ao eixo *x*.

**Tabela 1**

| $x$ | $y$ | $m$ |
|---|---|---|
| 0 | 4 | −3 |
| 1 | 2 | 0 |
| 2 | 6 | 9 |
| −1 | 6 | 0 |
| −2 | 2 | 9 |

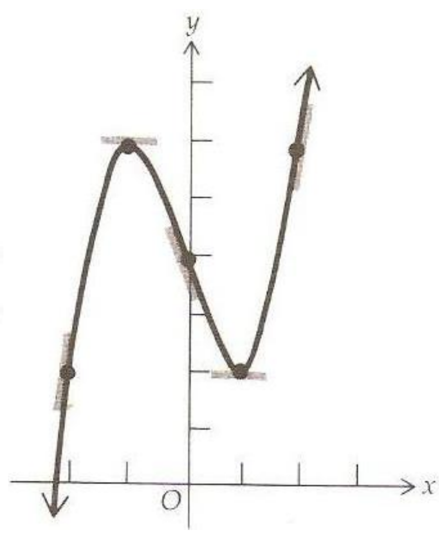


Gráfico 5 – Gráfico da função do exemplo 02.
Fonte: Leithold, 1994.

### 2.1.1 Definição de reta normal

Segundo Leithold (1994) a reta normal a um gráfico em um dado ponto é a reta perpendicular à reta tangente naquele ponto.

<u>Exemplo</u>: A reta normal ao gráfico do Exemplo 02 no ponto (2,6) é perpendicular à reta tangente naquele ponto. Do exemplo 03, a inclinação da reta tangente em (2,6) é 9. Portanto, a inclinação da reta normal a (2,6) é $-\frac{1}{9}$, e uma equação dessa reta normal é

$y - 6 = -\frac{1}{9}(x - 2)$

$9y - 54 = -x + 2$

$X + 9y - 56 = 0$

O gráfico 6 mostra o gráfico e as retas tangente e normal em (2,6). O tipo de limite em (1) usado para definir a inclinação da reta tangente é um dos mais importantes em Cálculo.

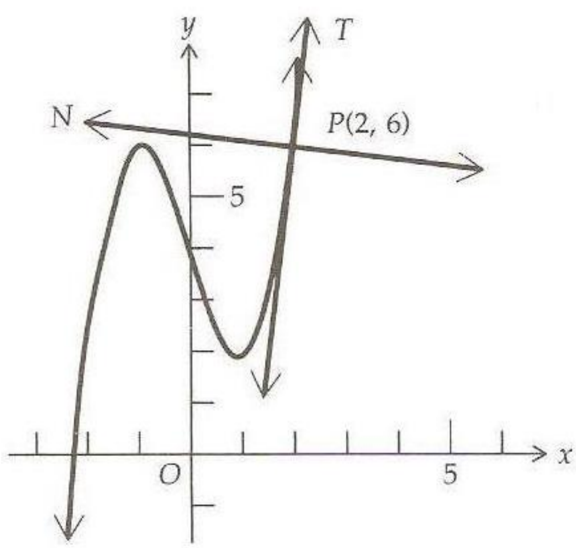


Gráfico 6 – Retas tangentes e normal em (2, 6)
Fonte: Leithold, 1994.

2.1.2. Definição de derivada

A derivada de uma função *f* é a função denotada por *f’*, tal que seu valor em qualquer número *x* do domínio de *f* seja dado por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f\,(x + \Delta x) - f\,(x)}{\Delta x}$$

se esse limite existir.

Se $x_1$ for um determinado número no domínio de *f*, então

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f\,(x_1 + \Delta x) - f\,(x_1)}{\Delta x}$$

Se esse limite existir. Comparando as fórmulas, nota-se que a inclinação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto ($x_1$, $f(x_1)$) é precisamente a derivada de *f* calculada em $x_1$.

<u>Exemplo</u>: Ache a derivada de *f* se

$f\ (x) = 3x^2 + 12$

*Solução:*

Se *x* for qualquer número do domínio de *f*, então de (3),

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f\,(x + \Delta x) - f\,(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3(x + \Delta x)^2 + 12] - (3x^2 + 12)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 12 - 3x^2 - 12}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$f^{'(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\Delta x)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = 6x$$

Logo, a derivada de *f* é a função *f’*, definida por $f'(x) = 6x$. o domínio de *f’* é o conjunto de todos os números reais, sendo igual ao domínio de *f*.

Considere agora a fórmula

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f\,(x_1 + \Delta x) - f\,(x_1)}{\Delta x}$$

Nessa fórmula seja

$x_1 + \Delta x = x$

Então

"$\Delta x \to 0$" é equivalente a "$x \to x_1$".

Destas fórmulas obtêm-se a seguinte fórmula para $f'(x_1)$.

$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$

Se o limite existir. Esta fórmula é uma alternativa para a fórmula anterior no cálculo de $f'(x_1)$.

Exemplo 02: Para a função $f$ do exemplo anterior, ache a derivada de $f$ em 2 de três maneiras: (a) aplicando a fórmula $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f\,(x_1 + \Delta x) - f\,(x_1)}{\Delta x}$; (b) aplicando a fórmula $f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$; (c) substituindo 2 por $x$ na expressão de $f'(x)$ no exemplo anterior.

*Solução*:

(a) $f(x) = 3x^2 + 12$. Da fórmula $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f\,(x_1 + \Delta x) - f\,(x_1)}{\Delta x}$,

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3(2 + \Delta x)^2 + 12] - [3(2)^2 + 12]}{\Delta x}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12 + 12\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 12 - 12 - 12}{\Delta x}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12\,\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} (12 + 3\Delta x)$$

$$f'(2) = 12$$

(b) Da fórmula $f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{(3x^2 + 12) - 24}{x - 2}$$

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 12}{x - 2}$$

$$f'(2) = 3 \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2}$$

$$f'(2) = 3 \lim_{x \to 2}(x + 2)$$

$$f'(2) = 12$$

(c) Como, do exemplo anterior, *f'(x) = 6x*, então *f'(2) = 12*.

O uso do símbolo *f'* para a derivada da função *f* foi introduzido pelo matemático francês Joseph Louis Lagrange (1736-1813), no século XVIII. Essa notação indica que a função *f'* é derivada da função *f* e seu valor em *x* é *f' (x)*.

Se (*x, y*) for um ponto do gráfico de *f*, então *y = f(x)* e *y'* também será usado como notação para a derivada de *f(x)*. Com a função *f* definida pela equação *y = f(x)*, pode-se expressar

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

Onde $\Delta y$ é chamado de *incremento* de *y* e denota a variação no valor da função quando *x* varia de $\Delta x$. Usando $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ e escrevendo $\frac{dy}{dx}$ em lugar de *f'(x)*, a fórmula se torna:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

O símbolo $\frac{dy}{dx}$ como notação para a derivada foi introduzido pelo matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1644-1716), conforme esclarece Leithold (1994). No século XVII Leibniz e Sir Isaac Newton (1642-1727), trabalhando independentemente, introduziram quase ao mesmo tempo o conceito de derivada. É provável que Leibniz considerasse *dx* e *dy* como pequenas variações nas variáveis *x* e *y* e a derivada de *y* em relação a *x* como a razão de *dx* e *dy* tornam-se pequenos. O conceito de Limite como se concebe atualmente não era conhecido por Leibniz.

Na notação de Logrange, o valor da derivada em $x = x_1$ é indicado por $f'(x_1)$. Com a notação de Leibniz, escrever-se-ia:

$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x1}$

É necessário lembrar que enquanto $\frac{dy}{dx}$ foi usado como notação para derivada, *dy* e *dx* não tiveram, na obra de Leithold (1994), significado independente, embora mais adiante em sua obra o autor separará a definição de ambos. Assim, para o efeito dos estudos realizados neste trabalho, $\frac{dy}{dx}$, é um símbolo para derivada e não deve ser considerado como uma razão. Na verdade, $\frac{d}{dx}$ pode ser considerado como um operador (um símbolo para a operação de cálculo da derivada) e quando escrevemos $\frac{dy}{dx}$, isto significa $\frac{d}{dx}(y)$, ou seja, a derivada de *y* em relação a *x*.

# 3 TEOREMA DE ROLLE E TEOREMA DO VALOR MÉDIO

De acordo com Leithold (1994) a demonstração do teorema do valor médio é baseada num caso particular, conhecido como *teorema de Rolle*. Seja $f$ uma função contínua no intervalo fechado [$a, b$], derivável no intervalo aberto ($a, b$) e tal que $f(a) = 0$ e $f(b) = 0$. O matemático francês Michel Rolle (1652-1719) provou que se uma função satisfaz essas condições, existe pelo menos um número *c entre a* e *b* para o qual $f'(c) = 0$.

## 3.1. O TEOREMA DE ROLLE E O TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Vê-se, por exemplo, qual é o significado geométrico do que foi exposto anteriormente. No esboço do gráfico de uma $f$ que satisfaz as condições demonstradas na premissa do Teorema de Rolle, visualizar-se-á, intuitivamente, segundo Leithold (1994) a existência de pelo menos um ponto sobre a curva entre os pontos ($a, 0$) e ($b, 0$), onde a reta tangente é paralela ao eixo $x$; isto é, a inclinação da reta tangente é zero. Esta situação pode ser visualizada no Gráfico 7, no ponto $P$. Sendo assim, a abscissa de $P$ é o $c$, tal que $f'(c) = 0$.

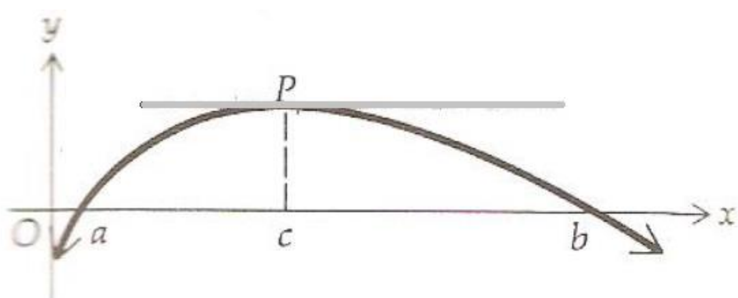


Gráfico 7 – Gráfico significado geométrico do Teorema de Rolle
Fonte: Leithold, 1994.

A função cujo gráfico está esboçado no Gráfico 7 não é derivavél apenas no intervalo aberto *(a, b*); isso ocorre também nos extremos do intervalo. Mas, a condição de que $f$ seja derivavel nos extremos não é necessária para que o gráfico tenha uma reta tangente horizontal em algum ponto no intervalo; o Gráfico 8 ilustra isso perfeitamente. Vê-se, no Gráfico 8, que a função não é derivavel em *a* e *b*.

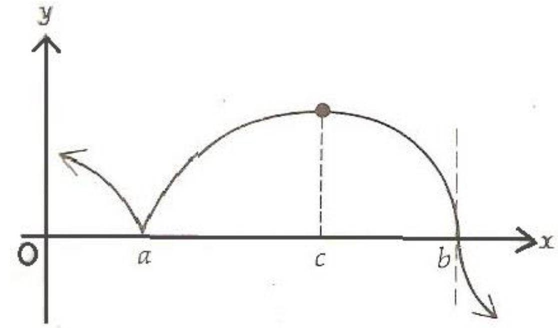


Gráfico 8 – Função não derivável em *a* e *b*
Fonte: Leithold, 1994.

Entretanto, como esclarece Leithold (1994) é necessário que a função seja contínua nos extremos do intervalo, para garantir a existência desta tangente. O gráfico 9 é um esboço do gráfico de uma função que é contínua no intervalo [*a, b*), mas descontínua em *b*; a função é derivável no intervalo aberto (*a, b*), e os valores funcionais são zero em ambos os pontos, *a* e *b*. Não existe, contudo, nenhum ponto no qual o gráfico tenha uma reta tangente horizontal.

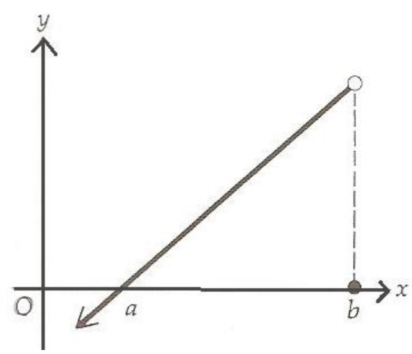


Gráfico 9 – Função contínua no intervalo [*a*, *b)*
Fonte: Leithold, 1994.

Enuncia-se e prova-se o Teorema de Rolle da seguinte maneira, conforme aponta Leithold (1994, p.231):

> Seja *f* uma função, tal que
>
> (i) ela seja contínua no intervalo fechado [*a, b*];
> (ii) ela seja derivável no intervalo aberto (*a, b*);
> (iii) $f(a) = 0$ e $f(b) = 0$.
>
> Então existe um número *c* no intervalo aberto (*a, b*), tal que $f'(c) = 0$.

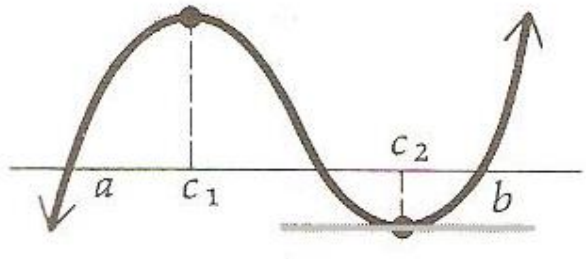


Gráfico 10 – Prova do Teorema de Rolle
Fonte: Leithold, 1994.

Pode-se provar este Teorema, como demonstra Leithold (1994), considerando-se dois casos, por exemplo.

Caso 01: $f(x) = 0$ para todo $x$ em $[a, b]$. Então $f'(x) = 0$ para todo $x$ em $(a, b)$; logo, qualquer número entre $a$ e $c$ pode ser tomado como $c$.

Caso 02: $f(x)$ não se anula para todos os valores de $x$ no intervalo aberto $(a, b)$. Como $f$ é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, do teorema do valor extremo, $f$ tem um valor máximo e um valor mínimo absolutos em $[a, b]$. De (iii), $f(a) = 0$ e $f(b) = 0$. Além disso, $f(x)$ não é zero para todo $x$ em $(a, b)$. Logo, $f$ terá um valor máximo absoluto positivo em algum $c$, de $(a, b)$, ou um valor mínimo absoluto negativo em algum $c_2$ de $(a, b)$, ou ambos. Assim, para $c = c_1$ ou $c = c_2$, conforme o caso, o extremo absoluto $f(c)$, segue do Teorema que $f'(c) = 0$. Isso prova o Teorema.

Pode existir, ainda de acordo com Leithold (1994), mais de um número no intervalo aberto $(a, b)$, para o qual a derivada de $f$ seja zero. Isso é ilustrado geometricamente na Figura 04, na qual a reta tangente é horizontal no ponto onde $x = c$, e também no ponto onde $x = c_2$; assim, ambos $f'(c_1) = 0$ e $f'(c_2) = 0$.

Outros autores discutem o Teorema de Rolle e o estudam. Miquel e Merino (1966, p.121) enunciam o Teorema de Rolle da seguinte maneira:

> Se tivermos uma função $f(x)$ contínua no intervalo (a, b) que se anula para x=a, x=b e que admite derivada única (finita ou infinita de sinal único) em cada ponto interior do intervalo, então há um ponto x=c (a <c <b) para o qual $f'(x) = 0$.

Sendo a função contínua, estará limitada e alcançará seus extremos (valor maior ou menor da função) pelo menos uma vez no intervalo. Se ambos os extremos fossem nulos, a função seria nula em todo o intervalo e a derivada o seria também em todos os pontos, verificando-se assim o teorema. Deixando esse caso particular, supõe-se que um ao menos dos extremos, seja superior (valor máximo), diferente de zero. Designando por x = c o valor de *x* e por *f(c)* este valor máximo da função, tem-se:

$f(c-h)-\ f(c)<0$

E, portanto,

$\frac{f(c-h)-f(c)}{-h}>0$

Seu limite que é a derivada à esquerda, tem de ser ≥ 0. Por ser *f(c)* o valor maior será também

$f(c+h)-\ f(c)<0$

E, por conseguinte

$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}<0$

Seu limite, que é a derivada à direita, tem de ser ≤ 0. Porém o enunciado diz-nos que a derivada é única em cada ponto, logo ambos os limites hão de ter o mesmo valor, por conseguinte tem de ser *f'(c)* = 0 que é valor comum. Se se tratasse do extremo inferior (valor mínimo ou menor) se procederia da mesma maneira.

Geometricamente o teorema nos diz que tendo-se uma curva com tangente única em cada um de seus pontos há um ponto pelo menos entre dois no qual a curva intercepta ao eixo dos *x* no qual a tangente é paralela ao dito eixo. O teorema não se verifica necessariamente nos casos em que falte alguma das condições indicadas no enunciado.

Com efeito, considere-se a função,

$$F(x)=\ f(x)-\ f(a)-\frac{f(b)-\ f(a)}{b-a}\ (x-a)$$

A função *F* é definida como a diferença entre a função *f* e a função cujo gráfico é a reta secante AB ilustrada pelo gráfico a seguir:

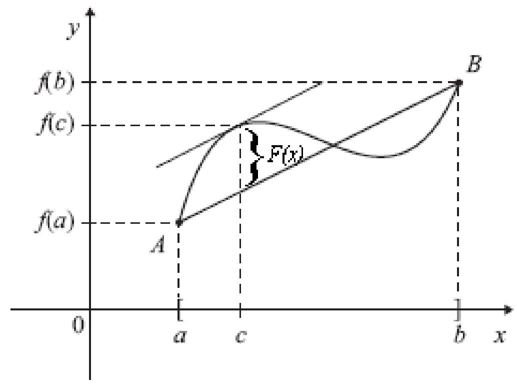


Gráfico 11 – Gráfico da função *F*
Fonte: Stewart, 2006.

Graças as hipóteses sobre *f*, tem-se que

(i) A função *F* contínua em [a, b];

(ii) A função *F* é derivável

Note ainda que *F(a) = F(b) = 0*.

Desta forma se vislumbra as condições do Teorema de Rolle. Sendo assim, existe *c* ϵ (a, b) tal que *F'(c) = 0.*

Todavia,

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Então,

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
$$\rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Nota-se que a reta que passa por (c, f(c)) tem a mesma inclinação da reta secante que passa pelos pontos (a, f(a)) e (b, f(b)), obtendo a fórmula (1).

Sabe-se que se uma função é constante, então sua derivada é zero. Sob algumas condições, pode-se obter a recíproca.

<u>Exemplo 01</u>: Se *f'(x) = 0* para todo *x ϵ (a, b)*, então *f* é constante em (a, b).

*Solução*: Sejam $x_1$, $x_2$ ϵ (a, b), com $x_1 < x_2$. Como *f* é derivável em (a, b), ela é derivável em $(x_1, x_2)$ e contínua em $[x_1, x_2]$.

Aplicando o Teorema do Valor Médio em $[x_1, x_2]$, existe *c* ϵ $(x_1, x_2)$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f(x_2) = f(x_1), \forall x_1, x_2 \in (a, b)$$

o que mostra que *f* é constante em (a, b), devido a arbitrariedade de $x_1$ e $x_2$.

Há uma interpretação interessante do Teorema do Valor Médio quando *s* = *f(t)* é a curva posição *versus* tempo para um carro movendo-se ao longo de uma estrada reta. Neste caso, o lado direito de (1) é a velocidade média do carro em $a \leq t \leq b$, enquanto o lado esquerdo é a velocidade instantânea em $t = c$. Assim, o Teorema do Valor Médio estabelece que pelo menos uma vez, durante o intervalo de tempo, a velocidade instantânea deve ser igual à velocidade média. Isto está de acordo com a nossa experiência no mundo real: se a velocidade média em uma viagem for de 80 km/h, então, em algum instante, o velocímetro marcou 80 km/h.

Exemplo 02: Um motorista está dirigindo em uma estrada reta com o limite de 80 km/h. se o motorista, a partir do repouso, percorreu 10 km em 5 minutos, explique porque o motorista poderia receber uma multa por excesso de velocidade.

*Solução*: Note que 5 minutos é igual a $\frac{1}{12}h$. Logo, sua velocidade média é

$$\frac{10 - 0}{\frac{1}{12} - 0} = 120\ km/h$$

O Teorema do Valor Médio garante que, pelo menos uma vez ao longo dos 10 km, o motorista dirigiu a 120 km/h.

Entre as várias conseqüências deste teorema de Rolle, tem-se as seguintes ainda:

a) Sejam f(x), φ(x), ψ(x) três funções que admitem derivadas finitas e únicas em cada ponto do intervalo (a, b). Considera-se o determinante

$$\begin{matrix} f(a) & \varphi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \varphi(b) & \psi(b) \\ f(x) & \varphi(x) & \psi(x) \end{matrix}$$

que é uma função de *x* contínua pois o são as três funções f(x), φ(x), ψ(x); que se anula para *x* = *a*, *x* = *b* (porque então há duas filas iguais), e que admite por derivada em todos os pontos do intervalo (a, b) a expressão:

$$\Delta = \begin{matrix} f(a) & \varphi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \varphi(b) & \psi(b) \\ f(x) & \varphi(x) & \psi(x) \end{matrix}$$

Logo, pelo teorema anterior, há um valor *x* = *c*, no intervalo (a, b), para o qual o determinante Δ será nulo.

b) Se se fizer no primeiro determinante φ(x) = x, ψ(x) = 1, tem-se:

$$\begin{matrix} f(a) & a & 1 \\ f(b) & b & 1 \\ f(x) & x & 1 \end{matrix}$$

E a derivada Δ para o valor *x* = *c* que a anula será

$$\begin{matrix} f(a) & a & 1 \\ f(b) & b & 1 \\ f(x) & 1 & 0 \end{matrix} = 0$$

A qual subtraindo da segunda fila a primeira se reduz a

$$\begin{matrix} f(b) - f(a) & b - a \\ f'(c) & 1 \end{matrix} = 0$$

Que desenvolvida se converte em

$f(b) - f(a) - (b - a)\ f'(c) = 0$ - fórmula (1)

Que escrita na forma

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ - fórmula (2)

Constitui o *teorema de Ossian Bonet ou da média*.

A igualdade (1), substituindo *b* por *a*+*h* e *c* por *a*+*θh* (sendo 0<θ<1) toma a forma

$$f(a + h) - f(a) = h\ \ f'(a + \theta h)$$

O teorema pode não ser exato se faltar alguma das condições assinaladas no enunciado do teorema de Rolle. A fórmula (2) indica também que não é necessário que se anulem *f(b)* e *f(a)* para que *f'(c)* seja zero, basta que sejam iguais.

O inverso do Teorema de Rolle não é verdadeiro. Isto é, não se pode concluir que se uma função *f* for tal que *f*'(*c)* = 0, como *a* < *c* < *b*, então serão verdadeiras as condições (i), (ii) e (iii).

Leithold (1994, p.232) traz o seguinte exemplo:

Dada $f(x) = 4x^3 - 9x$, comprove que as condições (i), (ii) e (iii) das hipóteses do Teorema de Rolle estão satisfeitas em cada um dos seguintes intervalos: $[-\frac{3}{2}, 0]$ $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ e $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Ache então um valor *c* em cada um desses intervalos para os quais *f' (c) = 0.*

<u>Solução</u>:

$f'(x) = 12x^2 - 9$

Como *f'(x)* existe para todos os valores de *x, f* é derivável em (-∞, +∞). Assim, as condições (i) e (ii) do Teorema de Rolle são válidas em qualquer intervalo. Para determinar em quais intervalos a condição (iii) se verifica, encontramos os valores de *x* para os quais *f(x) = 0*, Se *f(x)* = 0.

$$4x\left(x^2 - \frac{9}{4}\right) = 0 \qquad x = -\frac{3}{2} \qquad x = 0 \qquad x = \frac{3}{2}$$

Com $a = -\frac{3}{2}$ e *b = 0,* o Teorema de Rolle é válido em $[-\frac{3}{2}, 0]$. Analogamente, o teorema de Rolle é válido em $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ $e$ $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Para encontrar os valores adequados de *c,* equacionamos *f*'(*x*) = 0, obtendo:

$12x^2 - 9 = 0$

$x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\qquad$ $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Portanto, no intervalo $[-\frac{3}{2}, 0]$, uma escolha adequada para c é $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$. No intervalo $[0, \frac{3}{2}]$, toma-se $c = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, enquanto que no intervalo $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$, tem-se duas possibilidades para $c = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ou $c = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

É possível aplicar o Teorema de Rolle para provar o teorema do valor médio. É necessário se familiarizar com o conteúdo dos dois teoremas para essas aplicações.

De acordo com Leithold (1994, p.232) o enunciado do Teorema do Valor Médio é o seguinte:

> Seja $f$ uma função, tal que
>
> (i) seja contínua no intervalo fechado [*a, b*];
> (ii) seja derivável no intervalo aberto (*a, b*).
>
> Então, existirá um número c no intervalo aberto (*a, b*), tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

Antes de demonstrar o teorema, é interessante interpretá-lo geometricamente. Num esboço do gráfico da função $f$, [$f$*(b) –* $f$*(a)]/(b – a)* é a inclinação do segmento de reta que liga os pontos A (*a,* $f$*(a))* e *B (b,* $f$*(b))*. O teorema do valor médio afirma que existe um ponto sobre a curva entre A e B, onde a reta tangente é paralela à reta secante por A e B; isto é, existe um número *c em (*a, b*)*, tal que

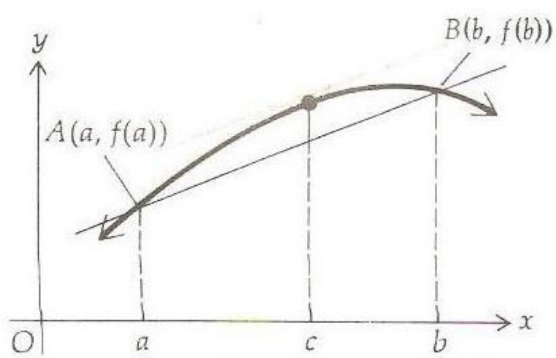


Gráfico 12 – Teorema do Valor Médio
Fonte: Leithold, 1994.

Se se tomar o eixo *x* coincidente com a reta secante *AB*, pode-se observar que o teorema do valor médio é uma generalização do teorema de Rolle, o qual será usado em sua demonstração.

<u>Prova do Teorema</u>: Uma equação da reta que passa por *A* e *B* na Figura 05 é

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x - a) \quad \leftrightarrow \quad y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x - a) + f(a)$$

Seja, agora, *F(x)* a medida da distância vertical entre o ponto (*x, f(x))* do gráfico da função $f$ e o ponto correspondente sobre a reta secante por *A* e *B*; então,

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$$

É possível mostrar que a função *F* satisfaz as três condições da hipótese do teorema de Rolle. A função *F* é contínua no intervalo fechado [*a, b*], pois é a soma de $f$ com uma função polinomial linear, ambas as quais são contínuas no intervalo. Logo, a condição (i) está satisfeita por *F*. A condição (ii) está satisfeita por *F*, pois $f$ é derivável em (*a, b*). De (1), segue que *F(a) = 0* e *F(b) = 0*. Portanto, também a condição (iii) do teorema de Rolle está satisfeita por *F*, conforme aponta Leithold (1994).

Da conclusão do teorema de Rolle, tem-se a existência de um *c* no intervalo aberto (*a, b*), tal que *F'(c)* = 0. Mas

$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

Assim,

$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

Logo, existe um número *c* em (*a, b*), tal que

$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \quad \leftrightarrow \quad f'^{(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

Como se queria demonstrar.

<u>Exemplo 02</u>:

Dada

$f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$

comprove que as hipóteses do teorema do valor médio estão satisfeitas para *a* = 1e *b* = 3. Então, encontre todos os números *c* no intervalo aberto (1,3), tais que

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3-1}$$

*Solução*: Como $f$ é uma função polinomial, ela será contínua e derivável para todos os valores de *x*. Logo, as hipóteses do teorema do valor médio estão satisfeitas para todo *a* e *b*.

$f'(x) = 3x^2 - 10x - 3$

*ƒ(1) = -7* e *ƒ(3) = -27*

Logo,

$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{-27-(-7)}{2}$ = -10

Equacionando *ƒ'(c)* = -10, obtém

$3c^2 - 10c - 3 = -10 \quad \leftrightarrow \quad 3c^2 - 10c + 7 = 0 \leftrightarrow (3c - 7)(c - 1) = 0 \quad \leftrightarrow \quad c = \frac{7}{3} \qquad c = 1$

Como 1 não está no intervalo aberto (1,3), o único valor possível para *c* é $c = \frac{7}{3}$.

<u>Exemplo 3</u>: Dada *ƒ(x)* = $x^{2/3}$ faça um esboço do gráfico de *ƒ*. Mostre que não existe nenhum número *c* no intervalo aberto (-2, 2), tal que

$$f'(c) = \frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}$$

Leithold (1994) pergunta qual a condição dentre as hipóteses do teorema do valor médio não está satisfeita para *ƒ* quando *a* = -2 e *b* =2?

*Solução*: Um esboço do gráfico *ƒ* aparece na figura 06.

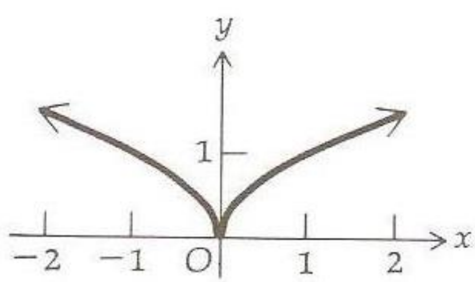


Gráfico 13 – Esboço do gráfico *f*
Fonte: Leithold, 1994.

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$$

Assim,

$$f'(c) = \frac{2}{3c^{1/3}} \qquad\qquad \frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)} = \frac{4^{1/3} - 4^{1/3}}{4} = 0$$

Não existe um número *c* para o qual $\frac{2}{3c^{1/3}} = 0$.

Segundo Leithold (1994) a função $f$ é contínua no intervalo fechado [-2, 2]; contudo, $f$ não é derivável no intervalo aberto (-2, 2), pois $f'(0)$ não existe. Logo, a condição (ii) das hipóteses do teorema do valor médio não está satisfeita para $f$, quando $a = -2$ e $b = 2$.

Leithold (1994) argumenta que anteriormente ao enunciado do teorema do valor médio, indica-se que este teorema é um dos mais importantes teoremas de cálculos, pois é usado na demonstração de muitos outros teoremas. Em tais casos, não se faz necessário encontrar o valor do número *c* garantido pelo teorema. O fato crucial do teorema é a existência do número *c*. Para indicar importância do teorema do valor médio, mostra-se o seu uso na demonstração de um outro teorema, proposto na obra de Louis Leithold, como se segue.

Se $f$ for uma função tal que $f'(x) = 0$ para todos os valores de $x$ num intervalo $I$, então $f$ será constante em $I$.

<u>Prova</u>: Suponha que $f$ não seja constante no intervalo $I$. Então, existem dois números distintos, $x_1$ e $x_2$, em $I$, com $x_1 < x_2$, tais que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Como, por hipótese, $f`(x) = 0$ para todo $x$ em $I$, então $f`(x) = 0$ para todo $x$ no intervalo fechado $[x_1, x_2]$. Logo, $f$ é derivável para todo $x$ em $[x_1, x_2]$ e $f$ é contínua em $[x_1, x_2]$. Portanto, a hipótese do teorema do valor médio está satisfeita, e então existe um número $c$, com $x_1 < c < x_2$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Mas como $f'(x) = 0$ para todo $x$ no intervalo $[x_1, x_2]$, então $f'(c) = 0$ e de (2) segue que $f(x_1) = f(x_2)$. Mas supõe-se que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Temos, portanto, uma contradição e, assim sendo, $f$ é constante em $I$.

## 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como se discutiu e apresentou no decorrer do trabalho, pontua-se que o Teorema do Valor Médio, conhecido como Teorema do Valor Médio de Lagrande é de extrema importância no Cálculo e na Análise. O Cálculo é por muitos estudiosos matemáticos considerado um dos maiores feitos do intelecto humano. A utilização deste teorema em conjunto com o Teorema de Rolle traz ao estudante a habilidade de aplicação em diferentes contextos e em diversas situações matemáticas e do cotidiano social.

O conceito de derivada é igualmente importante e de suma relevância no estudo do Cálculo. Além da conclusão geométrica implicada nestes teoremas, que por sinal se demonstra bem interessante, o Teorema do Valor Médio aparece na demonstração de diversos outros teoremas, como também, termina por fornecer informações sobre uma função a partir de dados sobre sua derivada, e ainda, estabelece certas igualdades e desigualdades.

Através do estudo do Cálculo e dos teoremas do Valor Médio e de Rolle, pode-se perceber o quanto o cálculo é menos estático e mais dinâmico, conforme pontua Stewart (2006) o quanto se trata de variação e de movimento, assim como de quantidades que tendem a outras quantidades. O quanto a derivada é importante no entendimento dos teoremas.

Por fim, visualiza-se que a aplicação matemática dos teoremas pode ser realizada de diversas formas e em diversos contextos. O profissional da matemática, ao explicar e demonstrar esses conceitos matemáticos aos seus aprendizes pode e deve proporcionar a eles o entendimento da abrangência que esse estudo pode ser realizado no cotidiano, aproximando os indivíduos e a matemática ao contexto social e ao ambiente no qual vivemos.

## 5 REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. O ensino do Cálculo e da Análise. **Revista Matemática Universitária**. n.33; dez de 2002; PP.83-95.

CASSOL, A. **Produção de significados para a derivada: taxa de variação**. Rio Claro. Dissertação [Mestrado em Educação Matemática]. IGCE. UNESP. 1997.

LEITHOLD. L. **O cálculo com geometria analítica**. Trad. Cyro de Carvalho Patarra. 3ª edição. São Paulo: Editora Harbra, 1994.

STEWART, J. **Cálculo: volume 1**. 5ª edição. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.