UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

PATRICIA VALENTI

O DESENVOLVIMENTO DA LINGUAGEM ALGÉBRICA E SUAS CONTRIBUIÇÕES PARA A SALA DE AULA

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

CAMPO MOURÃO

2011

PATRICIA VALENTI

O DESENVOLVIMENTO DA LINGUAGEM ALGÉBRICA E SUAS CONTRIBUIÇÕES PARA A SALA DE AULA

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

Orientadora: Sara Coelho Silva

CAMPO MOURÃO

2011

TERMO DE APROVAÇÃO

Patricia Valenti

O desenvolvimento da linguagem algébrica e suas contribuições para a sala de aula

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

Orientadora: Prof. Msc. Sara Coelho da Silva

Prof. Msc. Diogo Heron Macowski

Prof. Msc. Viviane Colucci

Campo Mourão, 2011

À Deus, pois sem ele não sou capaz de nada.

E a minha família que é minha fonte de energia.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que me apoiaram direta ou indiretamente no desenvolvimento deste trabalho.

Em especial ao coordenador do curso, que esteve sempre pronto a nos atender, sanando nossas dúvidas a qualquer hora. E à minha orientadora que com toda paciência e atenção me orientou neste trabalho.

“Creio que não é possível compreender as matemáticas de hoje se não se tiver pelo menos uma idéia sumária de sua história”

Jean Dieudonné

RESUMO

VALENTI, Patricia. O desenvolvimento da linguagem algébrica e suas contribuições para a sala de aula. 53 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2011.

Uma parcela considerável dos alunos entram na escola com o preconceito de que a disciplina de matemática é a mais difícil e, uma grande maioria torna este preconceito uma realidade, tendo dificuldades com a matemática. No objetivo de amenizar esta resistência dos alunos a esta disciplina há muitos pesquisadores investindo em métodos para transmitir o conteúdo de forma atraente. Nesse intuito surgem várias tendências matemáticas, entre elas a história da matemática. Mas para que se trabalhe com a história da matemática em sala de aula é necessário que o professor tenha conhecimento desta. Portanto, neste trabalho apresentaremos parte desta história, mais especificadamente traremos um pouco da história da álgebra para o conhecimento dos professores e, no final de cada sessão apontaremos algumas sugestões que podem ser utilizadas em sala de aula.

Palavras-chave: Álgebra, Ensino, História.

ABSTRACT

VALENTI, Patricia. Algebraic language development and its contributions to the classroom. 53 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2011.

A considerable parcel of students enter school with the prejudice that the discipline of math is the most difficult and, a large majority makes this prejudice a reality, having difficulties with math. In object of reduce this student resistance to this discipline there is many researchers investing in methods for convey the content of attractive form. In this intention appear several mathematical trends, between them the history of mathematics. But in order to work with the history of mathematics in the classroom is necessary that the teacher have knowledge of this. So, in this paper we present part of this story, more specifically we bring a little of history of algebra to the knowledge of teachers and at the end of each session we will point some suggestions that can be used in the classroom.

Keywords: Algebra, Teaching, History.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

É comum a apresentação da álgebra, na educação básica como um conteúdo abstrato e sem aplicabilidade.

Várias pesquisas em educação matemática indicam que esta apresentação pode se tornar mais interessante e humanizada se estiver vinculada aos aspectos históricos pois, a História da Matemática pode:

- esclarecer aos alunos a origem de alguns conceitos matemáticos;

- proporcionar o encontro entre os profissionais da matemática e de outras áreas, como os professores de geografia, história, arte, entre outros, em uma atividade interdisciplinar;

- levar os alunos a conhecer o desenvolvimento cultural da humanidade por meio da matemática e de outras áreas;

- ilustrar e tornar mais interessante o ensino da matemática.

Neste trabalho temos como objetivo mostrar a história da matemática como um instrumento de ensino-aprendizagem do conteúdo de álgebra, que auxiliará o professor no importante papel de conduzir os alunos a perceber que as dificuldades encontradas por eles no tratamento álgebrico também foram sentidas por diversos matemáticos no decorrer do desenvolvimento da álgebra e, que todos esses conceitos surgiram da necessidade humana na resolução de problemas práticos, simbolismo e notações.

A coleta de dados, foi feita em obras de autores clássicos da história da matemática, e as informações foram colocadas em ordem cronológica, para que se possa perceber o desenvolvimento da linguagem algébrica no decorrer dos séculos, podendo auxiliar o professor de matemática da educação básica nas aulas de álgebra.

2 O INÍCIO DA ÁLGEBRA

Segundo (EVES, 2004) a matemática primitiva necessitava de um embasamento para se desenvolver, e esse embasamento surgiu com a evolução para formas mais avançadas de sociedade. Com a drenagem de pântanos, o controle de inundações e a irrigação era possível transformar as terras ao longo do Nilo, Tigre e Eufrates em regiões de agricultura ricas. Projetos dessa natureza não serviram somente para ligar localidades anteriormente separadas, mas também para a aquisição de um desenvolvimento considerável da tecnologia e da matemática. E pode-se dizer que foi assim que originou-se a matemática primitiva em algumas regiões do Oriente Antigo, primordialmente como uma ciência prática para auxiliar as atividades ligadas à agricultura e a engenharia. Posteriormente nasceu o interesse pela aplicação e ensino dessa ciência e assim surgiu a tendência no sentido da abstração e, até certo ponto, passou-se a estudar a ciências por ela mesma.

Vamos acompanhar nesta sessão o desenvolvimento de parte dessa ciência, a álgebra, nas respectivas regiões: Egito, Babilônia e Grécia.

2.1 ÁLGEBRA EGÍPCIA

De acordo com (EVES, 2004) a maioria dos trabalhos manuais eram feitos pelos escravos. Era também de responsabilidade dessa classe erguer grandes templos e pirâmides do Egito. A agrimensura e a engenharia prática, com sua matemática, foram criadas para auxiliar no planejamento e na execução desses trabalhos.

A matemática no Egito nunca alcançou a da Babilônia, que surgiu aproximadamente ao mesmo tempo, uma característica forte para esse acontecimento foi o avançado desenvolvimento econômico na Babilônia. Ao contrário da Babilônia o Egito se mantinha num semi-isolamento e o rio Nilo que o banhava não necessitava de obras de engenharia e administração com grande extensão. O sistema de numeração egípcio era primitivo em comparação com o babilônico.

A fonte primária rica sobre a matemática egípcia antiga está no papiro Rhind com data aproximadamente de 1650 a.C., onde se pode encontrar métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso que faziam de frações unitárias, seu emprego a regra da falsa posição e muitas aplicações da matemática a problemas práticos. É baseado nesse papiro e outros como o papiro Moscou com data aproximadamente de 1850 a.C que se pode dizer como se desenvolveu a álgebra egípcia.

O método utilizado pelos egípcios para resolução de equações lineares consistia de uma estimativa inicial e uma correção final, método ao qual posteriormente os europeus deram o nome de "regra da falsa posição".

Esta regra é um método para resolver equações atribuindo valores à incógnita; se a igualdade não for satisfeita, esse valor é alterado por meio de uma simples proporção.

Para resolver:

$$x + \frac{x}{4} = 30 \tag{2.1.1}$$

Assuma qualquer valor conveniente para x, digamos $x = 4$.

Substituindo em **(2.1.1)** obtemos: $4 + \frac{4}{4} = 5$, em vez de 30.

Como o 5 teve que ser multiplicado por 6 para dar 30, logo a resposta será $4 \times 6 = 24$.

O problema abaixo, é um clássico exemplo encontrado no Papiro Ahmes, onde a quantidade procurada é considerado como montão:

Um montão, sua metade, seus dois terços, todos juntos são 26. Digam-me: Qual é a quantidade?

O primeiro passo para a resolução desse problema é escrevê-lo de forma algébrica, onde representaremos um montão por x:

$$x + \frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = 26$$

O segundo passo é substituir o x por um número qualquer, vamos escolher 18:

$$18 + \frac{18}{2} + \frac{2.18}{3} = 18 + 9 + 12 = 39$$

O terceiro passo é utilizar os valores falsos 18 e 39 para montar uma regra três simples:

$$\frac{18}{39} = \frac{montão}{26}$$

$$montão.39 = 18.26$$

$$montão = \frac{468}{39}$$

$$montão = 12$$

E assim encontramos o resultado do problema que é 12.

De acordo com (BAUMGART, 1992) Diofante, século IV, em seu texto *Arithmetica*, usa um método semelhante para a resolução de equações simultâneas.

2.1.1 Sugestão didática

É comum termos como conteúdos da 6ª série (7º ano) **Equação do 1º grau e Regra de três**. Portanto, o professor poderá apresentar situações problemas que podem ser descritas por equações de primeiro grau e explorar a participação dos alunos na sugestão de valores "falsos". Logo em seguida, deve-se fazer uso da regra de três simples, para analisar o resultado "falso" e assim determinar o valor correto. Esse método de resolução pode ser utilizado em sala de aula como recurso para resolução de equações de primeiro grau e também para equação do segundo grau para quando os alunos ainda não sabem resolver problemas pela fórmula de Bhaskara.

O objetivo aqui é utilizar a história da matemática para envolver o aluno na resolução do problema, fazendo uso de uma investigação ao invés de uma mera aplicação de fórmulas e regras.

A partir de algumas resoluções por investigação então, podemos apresentar técnicas que auxiliarão no cálculo.

Os alunos também poderão criar equações do 1º grau baseados nos exemplos do Papiro de Ahmes: formando duplas, um aluno escreve uma equação do 1º grau envolvendo x, que é um valor conhecido por ele e oculto para o outro da dupla, que deverá resolver a equação para decifrar o enigma proposto pelo colega. Assim, o professor pode explorar as técnicas de resolução de equações do 1º grau e incentivar a interatividade.

2.2 ÁLGEBRA BABILÔNICA

Há aproximadamente quatro milênios antes de nossa era os babilônicos já haviam construído casas e templos decorados com cerâmicas e mosaicos artísticos em desenhos geométricos. Governantes locais se uniram a principados e construíram um sistema de canais para irrigar a terra e controlar a inundação.

Segundo (EVES, 2004) como os egípcios, na Babilônia quem era responsável pela maioria do trabalho manual era os escravos, eram eles quem criavam e mantinham em funcionamento o sistema de irrigação. Foi baseada neste tipo de atividade que surgiu a necessidade de uma matemática primordialmente prática.

A matemática babilônica era superior a dos egípcios devido a seu grande desenvolvimento econômico. E os babilônios dominavam também um princípio posicional superior ao egípcio, onde se estendia o princípio posicional para as frações.

De acordo com (BOYER, 1996) os babilônicos utilizavam a escrita cuneiforme nos seus registros, que eram uma escrita em forma de cunha feita em tabletas de barros mole com um estilete, e após o registro as tabletas eram cozidas ao sol e no forno. O que tornou os registros babilônicos menos vulneráveis aos estragos do tempo que os papiros egípcios, dessa forma dispõe hoje mais documentação sobre a Mesopotâmia do que ao Egito.

Essas tabletas mostravam que os babilônicos estavam familiarizados com contratos como recibos, faturas, notas promissórias, créditos, juros simples. Ainda hoje há pesquisas em andamentos sobre a interpretação das tabletas de barro e podemos ainda ser contemplados com alguma descoberta.

Segundo (BAUMGART, 1992) é provavelmente na Babilônia que se originou a álgebra. Ela era desenvolvida por meio do estilo retórico (verbal), como se fosse uma receita da resolução. Segue um exemplo típico de problema retirado de (BAUMGART, 1992) que foi encontrado em escrita cuneiforme, em tábua de argila (c. 1700 a.C.), no entanto a escrita apresentada a seguir será feita em português, e utilizando a notação decimal indo-arábica.

(1) Comprimento, largura. Multiplique comprimento por largura, obtendo assim a área: 252. Somei comprimento e largura: 32. Pede-se: comprimento e largura.

(2) (Dado) 32 soma; 252 área.

$$\begin{cases} xy & = & p \\ x+y & = & k \end{cases}$$

(3) (Resposta) 18 comprimento, 14 largura

(4) Segue-se este método: Tome metade de 32 (que é 16)

$$\frac{k}{2}$$

16x16 = 256	$\left(\frac{k}{2}\right)^2$
256 - 252 = 4	$\left(\frac{k}{2}\right)^2 - p = t^2$
A raíz quadrada de 4 é 2.	$\sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - p} = t$
16 + 2 = 18 comprimento	$\frac{k}{2} + t = x$
16 - 2 = 14	$\frac{k}{2} - t = y$
(5)(Prova) Multiplique 18 comprimento por 14 largura.	$\left(\frac{k}{2} + t\right)\left(\frac{k}{2} - t\right)$
$18 \times 14 = 252$área	$= \frac{k^2}{4} + t^2 = p = xy$

Note que em um primeiro momento (1) o problema é formulado, a seguir (2) os dados são apresentados, e a resposta já é dada (3), depois então que é apresentada o método de solução (4), e finalmente a resposta é testada (5).

Como no exemplo acima, eles apresentavam o passo a passo para encontrar a resolução de uma determinada forma de equação. E de acordo com (EVES, 2004) nenhum exemplo do que hoje chamamos demonstração foi encontrado na matemática oriental antiga.

A forma apresentada acima é a estrutura de resolução utilizada pelos babilônicos. Vamos entender a resolução do problema estudando a forma geral:

Dado o sistema:

$$\begin{cases} x + y &= k \\ xy &= p \end{cases}$$

façamos:

$$\frac{k}{2} + t = x$$

$$\frac{k}{2} - t = y$$

onde,

$$t = \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - p}$$

Portanto, para encontrar o valor de t, devemos resolver uma raiz quadrada.

A veracidade da regra acima é evidenciada ao substituirmos em

$x+y=k$ e $x.y=p$, os valores dados para x e y.

$$\begin{cases} x+y & = & \left(\frac{k}{2}-t\right)+\left(\frac{k}{2}+t\right) & = & 2\frac{k}{2}-t+t & = & k \\ xy & = & \left(\frac{k}{2}-t\right)\left(\frac{k}{2}+t\right) & = & \left(\frac{k}{2}\right)^2+t^2 & = & p \end{cases}$$

Podemos perceber que a maneira que resolviam o sistema não é igual a que usamos hoje, mas os babilônios também sabiam resolver por substituição como utilizamos atualmente, porém eles preferiam seu método paramétrico.

O problema acima de acordo com (BOYER, 1996) tem significado histórico, pois, a Álgebra grega (geométrica) dos pitagóricos (c. 540 a.C.) e de Euclides(c.300 a.C.) (que em *Os elementos* organizou a matemática existente em seu tempo) seguiam o mesmo estilo de método de solução, utilizando segmentos de retas, áreas e ilustrações por figuras geométricas. Séculos mais tarde, o grego Diofante, século IV,também usou a abordagem paramétrica em seu trabalho com as equações "diofantinas".

Outro problema babilônico pede o lado de um quadrado se a diferença entre a área desse quadrado e seu lado é o número (sexagesimal) 14,30.

Segundo (EVES, 2004) para a resolução desse problema, no qual temos:

$$x^2-px=q \quad \textbf{(2.2.1)}$$

usaremos a fórmula:

$$x=\sqrt{\frac{p}{2}+q}+\frac{p}{2} \quad \textbf{(2.2.2)}$$

O primeiro passo é transformar o problema em uma equação. Para tanto, considerando como x a medida do lado do quadrado, temos:

$$x^2-x=(14,30)_{60}$$

Transformando para a base decimal:

$$x^2-x=14.60^1+30.60^0$$

$$x^2-x=840+30$$

$$x^2 - x = 870 \quad \textbf{(2.2.3)}$$

Comparando **(2.2.3)** com **(2.2.1)** temos: $p = 1$ e $q = (14,30)_{60}$.

Determinaremos então o valor de x dado em **(2.2.2)** utilizando a seguinte receita dada pelos babilônicos:

1) Encontre a metade de 1 : $\frac{p}{2}$ que é:

$$0;30_{60} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$

2) Multiplique $(\frac{p}{2}.\frac{p}{2})$

$$0;30_{60}.0;30_{60} = \frac{p}{4}^2$$

$$\frac{30}{60}.\frac{30}{60} = \frac{900}{3600} = \frac{15}{60} = 0;15_{60}$$

3) Some $\frac{p}{2}^2 + q$:

$$0;15_{60} + 14,30_{60} = 15.60^{-1} + 14.60^1 + 30.60^0 = (14,30;15)_{60}$$

4) Encontre $\sqrt{\frac{p}{2}^2 + q}$:

$$\sqrt{14,30;15_{60}} = y$$

$$(14,30;15)_{60} = y^2 = (29;30)^2_{60} \text{ pois,}$$

$$(29;30)^2_{60} =$$

$$= (29.60^0 + 30.60^{-1})^2 =$$

$$= (29 + \frac{30}{60})^2 =$$

$$= 29^2 + 2.29.\frac{30}{60} + \frac{30}{60}^2 =$$

$$= 841 + 29 + \frac{900}{3600} =$$

$$= 841 + 29 + \frac{15}{60} =$$

$$= 840 + 1 + 29 + \frac{15}{60} =$$

$$= 14.60 + 30.60^0 + 15.60^{-1} =$$

$$= (14,30;15)_{60}$$

Agora é só substuir os valores encontrados em: $x = \sqrt{\frac{p}{2}^2 + q} + \frac{p}{2}$

$$x = 29;30_{60} + 0;30_{60}$$

$$x = 0,29_{60} + 0,1_{60}$$

$$x = 30 = 30.60^0$$

De acordo com (BOYER, 1996) uma tabela que foi de grande utilidade para a álgebra babilônia já não é encontrada mais nos manuais de hoje. Ela era formada por uma tabulação dos valores de $n^3 + n^2$ para valores inteiros de n. Para os babilônios mostrar a solução da equação quadrática completa não era difícil, pois tinham desenvolvido operações algébricas flexíveis e muitas fórmulas simples de fatoração lhes eram familiares. Transportavam termos em uma equação somando iguais a iguais, e multiplicando ambos os membros por quantidades iguais para remover frações ou eliminar fatores. Somando, por exemplo, $4ac$ a $(a-b)^2$ podiam obter $(a+b)^2$. Não usavam letras para representar quantidades desconhecidas, pois o alfabeto ainda não fora inventado, mas palavras como “comprimento”, “largura”, “área” e “volume” serviam bem nesse papel.

Segue um exemplo retirado de (BOYER, 1996), onde abordaremos, à direita, a resolução com notações modernas. Adotando para largura e comprimento x e y, respectivamente:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}largura & + & comprimento & = & 7maos \\ comprimento & + & largura & = & 10maos \end{cases}$$

Substitua cada ”‘mão”’ por cinco ”‘dedos”’;

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x & + & y & = & 35 \\ y & + & x & = & 50 \end{cases}$$

E observando que uma largura igual de 20 dedos e um comprimento igual de 30 dedos satisfaz as duas equações.

$$\begin{cases} x & = & 20 \\ y & = & 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}20 & + & 30 & = & 35 \\ 30 & + & 20 & = & 50 \end{cases}$$

Logo a solução

$$\begin{cases} x & = & 20 \\ y & = & 30 \end{cases}$$

2.2.1 Sugestão didática:

O professor pode apresentar aos alunos a “receita dos babilônicos” para resolverem sistemas de equações do tipo: $\begin{cases} x+y & = & k \\ xy & = & p \end{cases}$ sem fazer uso de substituição, o que levaria a uma equação do segunto grau. Esse tipo de “receita” pode ser utilizado para sistemas de equações e equações de primeiro grau. Ao explorar as “receitas” em problemas similares, o aluno estará desenvolvendo a leitura algébrica aplicando um método em outras equações, o que desencadeará no desenvolvimento do raciocínio lógico. Pode-se ainda, explorar nestes problemas o sistema de numeração babilônico (posicional e de base 60), fazendo uso de uma bibliografia auxiliar para compreensão da notação e das operações utilizadas pelos babilônios, observando também que esta base ainda é usada atualmente nas unidades de tempo: hora, minuto e segundo.

Em conjunto com os professores das disciplinas de arte, história e geografia, pode se desenvolver um projeto, onde o professor de história estaria trabalhando, como os alunos, a história da civilização babilônica antiga e atual. O professor de geografia contribuiria com a localização babilônica. Nas aulas de arte o professor, juntamente aos alunos, construiria em argila a escrita cuniforme. O professor de matemática trabalharia com o desenvolvimento algébrico nesta civilização. Por meio desse trabalho interdisciplinar, a álgebra deixaria de ser vista, pelos alunos, como um conteúdo abstrato da matemática e quando lembrassem da álgebra, fariam uma ligação com a história. Esse projeto tornaria essa área da matemática mais contextualizada e estaria trabalhando, com os alunos, a cultura de uma civilização.

2.3 ÁLGEBRA GREGA

Nos últimos milênios a.C. houve muitas mudanças econômicas e sociais. Algumas civilizações desapareceram, o poder da Babilônia e do Egito declinou e alguns povos entre eles os gregos passaram para o primeiro plano.

Segundo (BOYER, 1996), o mundo grego por muitos séculos teve seu centro entre os mares Egeu e Jônio, mas a civilização helênica não se localizava somente ali. Em 600 a. C. colônias gregas podiam ser encontradas ao longo das margens do Mar Negro e Mediterrâneo e foi nestas regiões afastadas que um novo impulso se manifestou na matemática. Os colonistas a beira-mar tinha uma vantagem, pois estavam em condições de viajar para os centros antigos de conhecimento e adquirirem informações de primeira mão sobre astronomia e matemática. Os gregos não hesitavam em absorver elementos de outras culturas, de outra forma não tinham aprendido tão depressa e passado a frente de seus predecessores, tudo o que tocavam davam mais vida.

Diferente da álgebra da Babilônia e do Egito, conforme (BAUMGART, 1992), na Grécia, como os gregos tinham dificuldades conceituais com frações e números irracionais, então se forçaram a usar conjuntos de segmentos de reta como domínio conveniente de elementos e a álgebra geométrica (formulada pelos pitagóricos (c. 540 a.C.) e por Euclides (c. 300 a.C.)) tomou o lugar da álgebra aritmética.

Podemos citar (como um dos exemplos da facilidade que a álgebra geométrica trouxe aos gregos) a $\sqrt{2}$, que não pode ser expressa em termos de inteiros ou suas razões, mas pode ser representada como um segmento de reta que é precisamente a diagonal do quadrado unitário.

De acordo com (BOYER, 1996) havia haver somas de segmentos, área e volume, era necessário uma estrita homogeneidade dos termos de uma equação, e as formas normais mesopotâmicas $xy = A$ e $x \pm y = b$, eram interpretados geometricamente. Desta forma podemos concluir que, eliminando y, devemos construir sobre um segmento dado b um retângulo cuja altura desconhecida x deve ser tal que a área do retângulo excede a área A pelo x^2 ou, no caso do menos, é a área inferior a A pelo x^2. Dessa forma os gregos construíram a solução de equações quadráticas pelo processo conhecido como “a aplicação de áreas”.

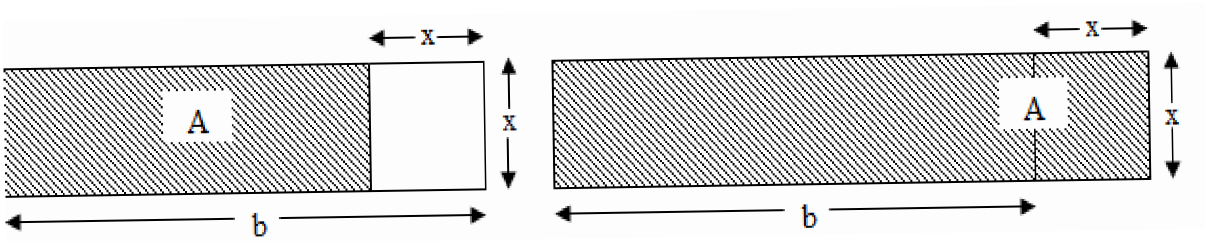

Figura 1: Aplicação de Áreas.

Fonte: (BOYER, 1996)

Também baseando-se em (BOYER, 1996), a equação linear $ax = bc$ era considerada como uma igualdade entre as áreas ax e bc e não como uma proporção. Consequentemente ao construir a quarta proporcional, neste caso o x, era usual construir um retângulo OCDB com lados b = OB e c = OC, e então ao longo de OC marcava AO = a. Completava o retângulo OAEB e traçava diagonal OE que cortava CD em P, onde CP é o segmento x desejado, pois o retângulo OARS tinha área igual à do retângulo OCDB.

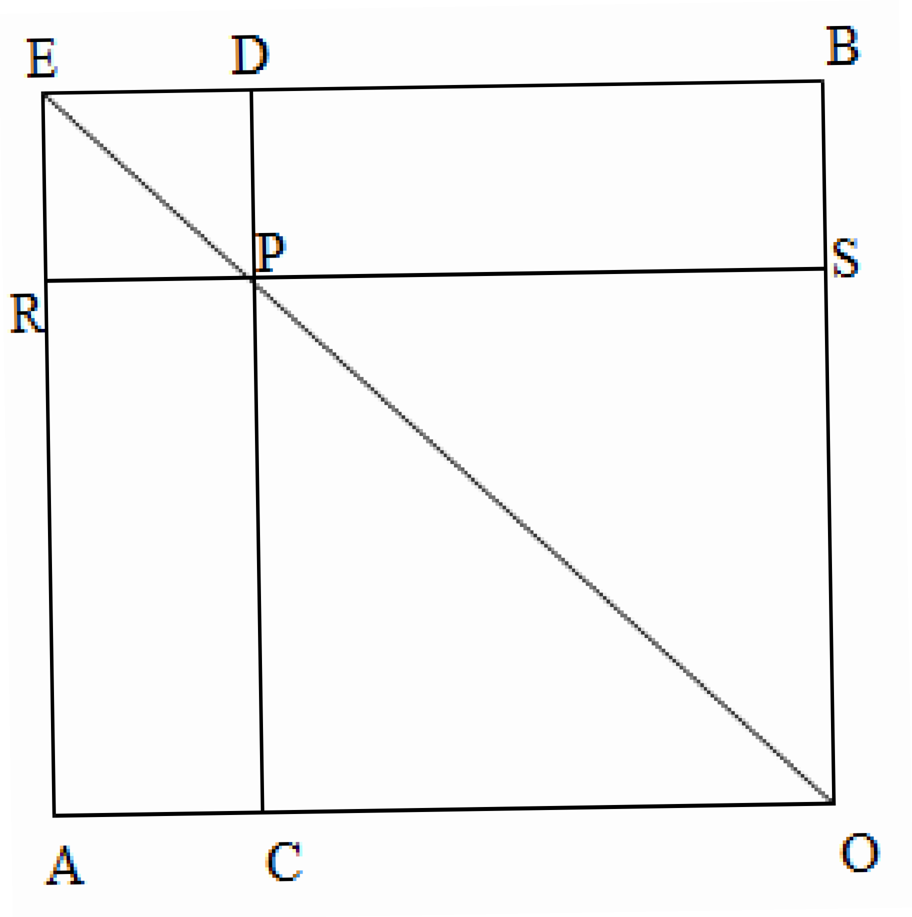

Figura 2: Igualdade entre Áreas.

Fonte: (BOYER, 1996)

Conforme (BOYER, 1996) ao passo que em nosso tempo as grandezas são representadas por letras que se entendem representarem números, conhecidos ou não, com os quais operamos segundo as regras algoritmas da álgebra, nos dias de Euclides as grandezas eram segmentos de retas, satisfazendo os teoremas e axiomas da geometria. O livro II de *Os Elementos* é referente a uma álgebra geométrica servindo aos mesmos fins que nossa álgebra simbólica.

De acordo com (BAUMGART, 1992), o que escrevemos como:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

era representado pelos gregos em termos de um diagrama, e foi enunciado por Euclides em *Elementos: "Se uma linha reta dividida em duas partes quaisquer, o quadrado sobre a linha toda é igual aos quadrados sobre as partes, junto com as duas vezes o retângulo que as partes contêm".*

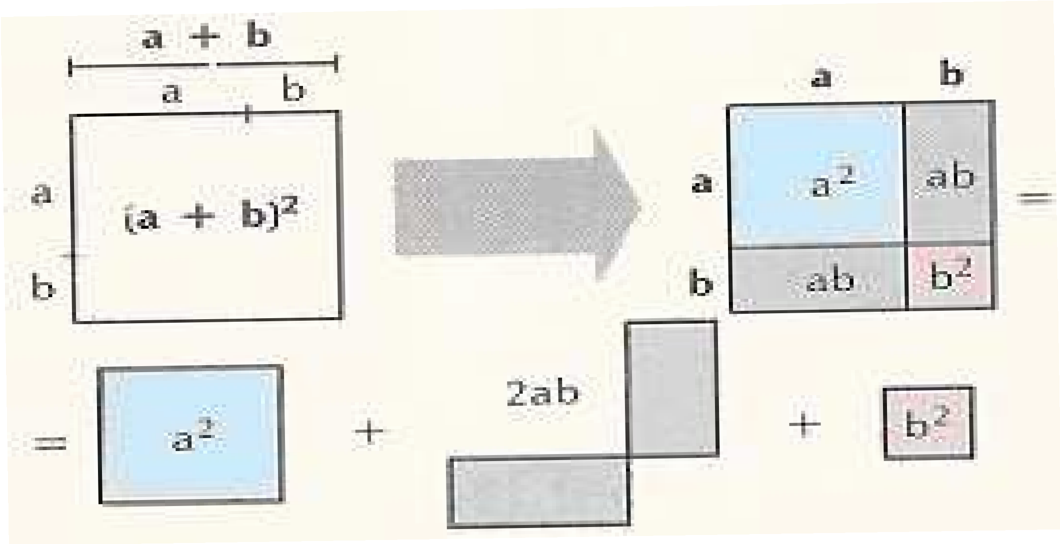

Figura 3: Representação grega do quadrado perfeito

Fonte: (BAUMGART, 1992)

E de forma semelhante o produto notável $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, era escrito de forma geométrica.

De acordo com (GUELLI, 2000), Euclides visualizava concretamente esse produto notável por meio da construção geométrica abaixo:

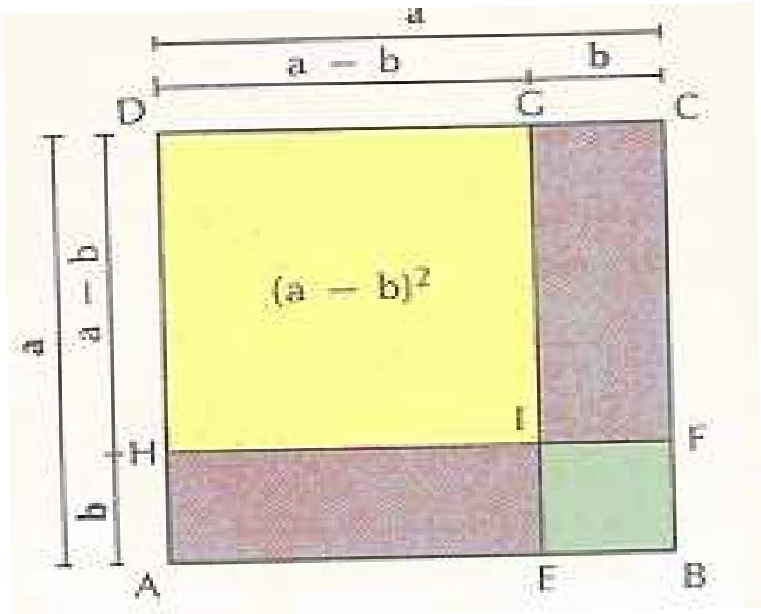

Figura 4: Representação grega do quadrado perfeito

Fonte: (BAUMGART, 1992)

A área do quadrado HIGD é dada por $(a-b)^2$, mas podemos expressá-lo por meio do seguinte raciocínio:

- Se do quadrado de área a^2

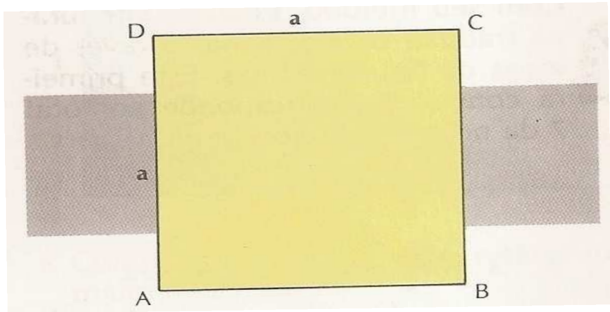

Figura 5: Representação grega do quadrado perfeito

Fonte: (BAUMGART, 1992)

- Retirarmos dois retângulos

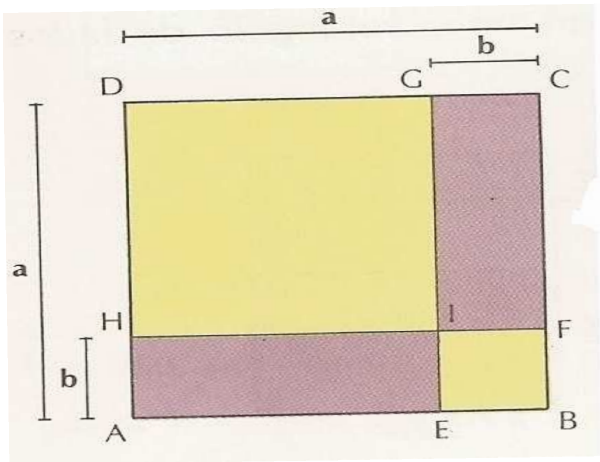

Figura 6: Representação grega do quadrado perfeito

Fonte: (BAUMGART, 1992)

- A área da figura formada será: $a^2 - 2.b.(a-b) = a^2 - 2ab + 2b^2$

- Agora, se retirarmos o quadrado de área b^2

A área da nova figura formada será expressa por:

$$(a^2 - 2ab + 2b^2) - b^2 =$$

$$= a^2 - 2ab + 2b^2 - b^2 =$$

$$a^2 - 2ab + b^2$$

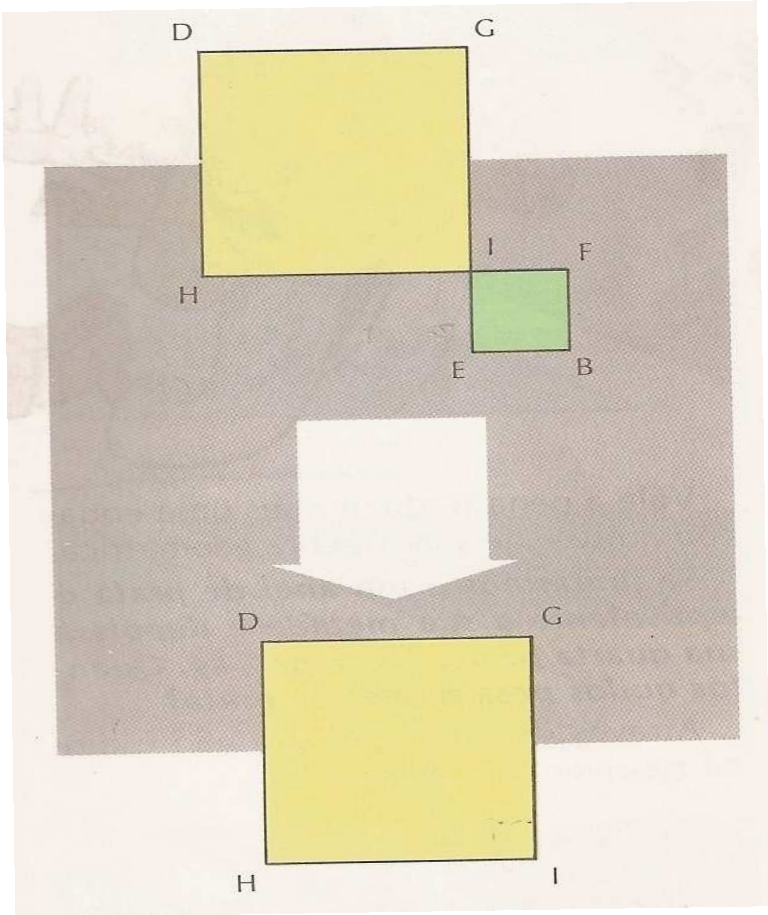

Figura 7: Representação grega do quadrado perfeito

Fonte: (BAUMGART, 1992)

Da mesma forma, podemos utilizar a geometria, para verificar a seguinte igualdade:

$$a(x+y) = ax + ay$$

A área do retângulo:

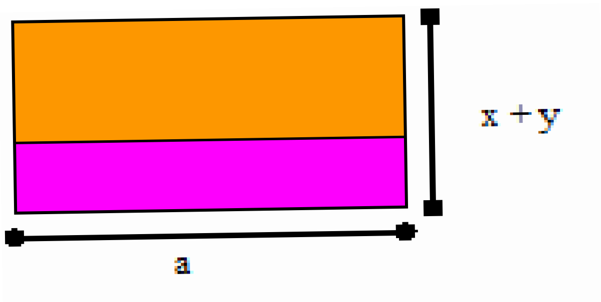

Figura 8: Distributiva

é $A_1 = a(x+y)$. Portanto, é igual a soma das áreas $A_2 = ax$ e $A_3 = ay$.

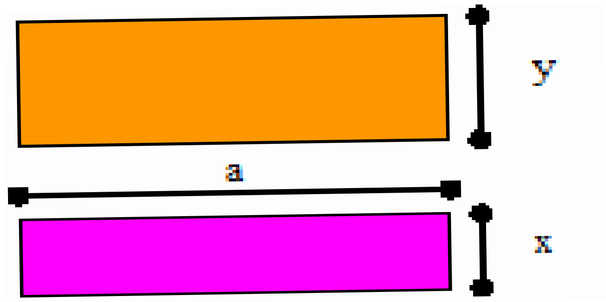

Figura 9: Distributiva

Utilizando a mesma idéia, podemos mostrar que:

$$xy = yx$$

pois encontrar a área $A_1 = xy$ do retângulo de lados x e y é igual a encontrar a área de $A_2 = yx$ do retângulo de lados y e x.

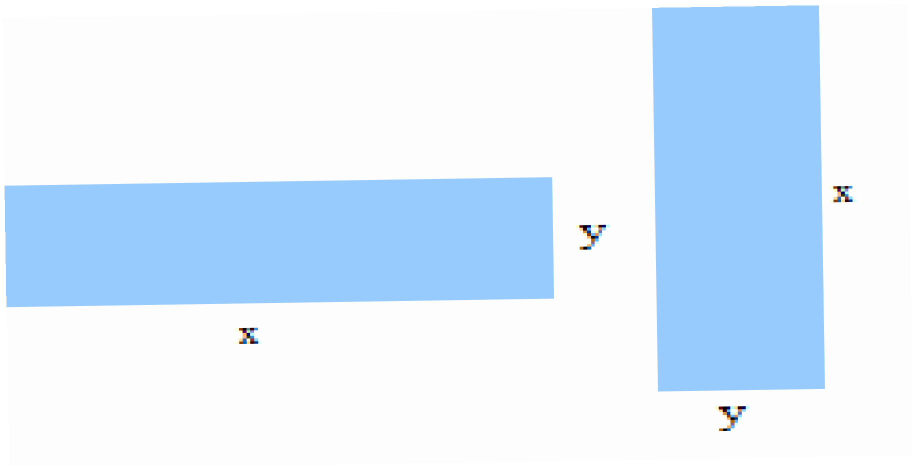

Figura 10: Comutativa

Segue um problema retirado de (BAUMGART, 1992), resolvido pelo método da álgebra geométrica dos gregos.

Achar a raiz positiva x ou AH da equação $x^2 + ax - a^2 = 0$

Temos que AB, ou a, é o segmento dado. Constrói-se o quadrado ABCD. Divide-se AC ao meio em E. Traça-se EB. Estende-se CA até F de maneira que EF = EB. Constrói-se o quadrado FGHA. Então H é o ponto procurado (de maneira que x = AH é a raiz positiva de $x^2 + ax - a^2 = 0$).

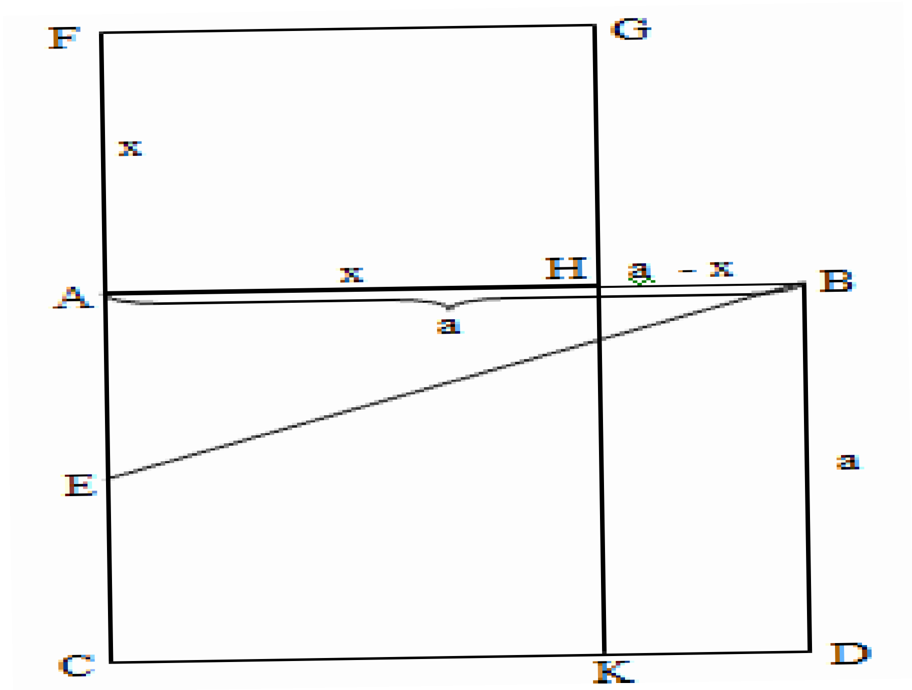

Figura 11: Método de resolução da álgebra geométrica dos gregos

Fonte: (BAUMGART, 1992)

Segue-se a verificação, usando notações moderna na coluna a direita.

	$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) + \beta^2 \equiv \alpha^2$
	(1)
	OU
$CF.FG + AE^2 = EF^2$	$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) \equiv \alpha^2 - \beta^2$
	onde, no presente contexto
	$\alpha = x + \frac{a}{2}$ e $\beta = \frac{a}{2}$
	de modo que
	$\alpha+\beta = a+x$ e $\alpha-\beta = x$
Por construção EF = EB; dai	Dai (1) fornece
$CF.FG + AE^2 = EB^2$	$(a+x)(x) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2$
Pelo teorema pitagórico,	Pelo teorema pitagórico
$CF.FG + AE^2 = AB^2 + AE^2$	$(a+x)(x) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2$
$-AE^2 = -AE^2$	$-\left(\frac{a}{2}\right)^2 = -\left(\frac{a}{2}\right)^2$
$CF.FG = AB^2$	$(a+x)(x) = a^2$
$-AHKC = -AHKC$	$-ax = -ax$

$AH^2 = DB.HB$

ou $x^2 = a\,(a-x)$

$AH^2 = AB.HB$ (2)

Donde H é o ponto procurado (de maneira que AH, ou x, satisfaz a condição (2)).

De acordo com (BAUMGART, 1992), em outro problema apresentado por Euclides, que foi também resolvido pelos babilônicos, retirado do livro VI dos Elementos, temos:

Dado uma linha reta AB (isto é, $x+y=k$), construir ao longo dessa linha um retângulo com uma dada área (xy = p), admitindo que o retângulo “fique aquém” em AB por uma quantidade preenchida por outro retângulo (o quadrado BF na Figura abaixo), semelhante a um dado retângulo.

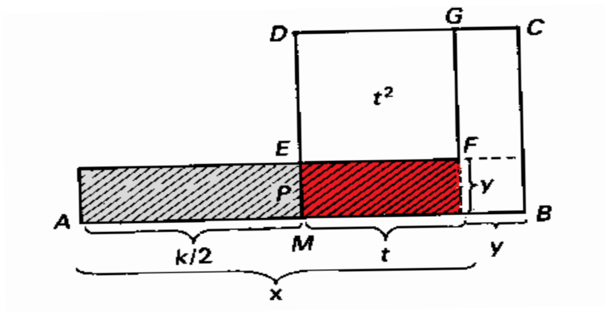

Figura 12: Resolução geométrica dos gregos

Fonte: (BAUMGART, 1992)

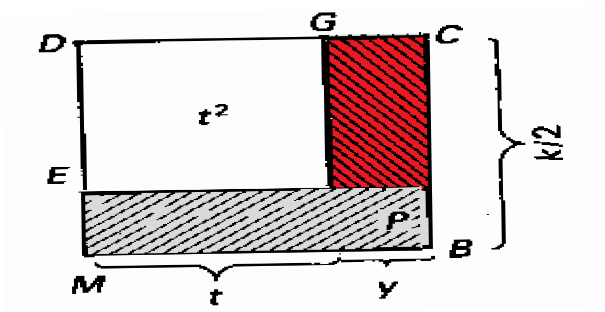

Figura 13: Resolução geométrica dos gregos

Fonte: (BAUMGART, 1992)

Baseado nas figuras pode-se perceber que:

$$t^2 = \frac{k}{2}^2 - p$$

$$t = \sqrt{\frac{k}{2}^2 - p}$$

Analisando o segmento de reta BC na figura 13, pode-se perceber que:

$$y+t=\frac{k}{2}$$

Somando $(-t)$ em ambos os lados da equação temos,

$$y=\frac{k}{2}-t$$

E ao analisar o segmento de reta AB pode-se perceber que:

$$x=\frac{k}{2}+t$$

A álgebra geométrica grega de acordo com (BOYER, 1996) parece-nos artificial e difícil, e também não pode ser considerada um instrumento ideal, mas para os gregos ela foi um instrumento eficaz e conveniente. A lei distributiva $a(b+c+d)=ab+ac+ad$, foi muito mais evidente para um estudioso grego do que um estudioso iniciante na álgebra hoje.

A matemática grega de acordo com (BOYER, 1996) não foi toda de alto nível, mas foi no início do período de Prata (250 a 350 a.C), também chamado de Segunda Idade de Alexandria, que pode-se encontrar um dos maiores algebristas grego: Diofante de Alexandria. Pouco se sabe sobre a vida dele, a não ser uma coleção de problemas chamado “Antologia Grega”.

Segue um enigma sobre a sua vida, considerando x o número de anos vividos por ele:

“Deus lhe concebeu ser um menino pela sexta parte de sua vida: $\frac{x}{6}$

E somando uma duodécada parte e isto cobriu-se as faces de penugem: $\frac{x}{12}$

Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte: $\frac{x}{7}$

E cinco anos após seu casamento concebeu-lhe um filho: 5

Ai! Infeliz, criança tardia; depois de chegar a metade da vida de seu pai: $\frac{x}{2}$

O Destino frio o levou. Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números ele terminou sua vida: 4”

Agora para resolver o enigna basta resolver a equação:

$$x=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4$$

$$\frac{84x}{84}=\frac{14x}{84}+\frac{7x}{84}+\frac{12x}{84}+420+\frac{42x}{84}+336$$

$$84x - 14x - 7x - 12x - 42x = 420 + 336$$

$$9x = 756$$

$$x = \frac{756}{9}$$

$$x = 84$$

Onde encontramos a idade de Diofante que é 84.

Se o enigna acima for historicamente correto, Diofante viveu oitenta e quatro anos. Diofante de acordo com (BOYER, 1996) é freqüentemente chamado o pai da álgebra, mas tal designação não pode ser tomada literalmente, pois sua obra não era o tipo de material que forma a álgebra moderna, nem se assemelha a álgebra geométrica de Euclides. A *Arithmetica* de Diofante era um tratado caracterizado por um alto grau de habilidade matemática e muita engenhosidade. Representava um novo ramo e usava um método diferente que se assemelhava a álgebra babilônica em alguns aspectos. No entanto, a principal diferença era a álgebra diofantina: que se dedicava a resolução exata de equações até o terceiro grau tanto determinadas quanto indeterminadas, enquanto que a álgebra babilônica se preocupava em obter soluções aproximadas.

Nos livros de *Arithmetica* de acordo com (BOYER, 1996), há a utilização de abreviações para potências de números e para relações e operações. Um número desconhecido era representado pela letra grega γ, o quadrado disto era representado por Δ^{γ}, o cubo como k^{γ}, e quarta potência dita quadrado-quadrado $\Delta^{\gamma}\Delta$, a quinta potência ou quadrado-cubo, como ΔK^{γ} e a sexta potência ou cubo-cubo, como $K^{\gamma}K$. Diofante tinha conhecimento de alguma regra de combinação equivalente as nossas leis de expoentes. A equação $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$, por exemplo, poderia aparecer da seguinte forma SS2C3xMS4u6, onde as nossas letras S, C, x, M e u foram usadas para representar: quadrado, cubo, incógnita, menos e unidade, respectivamente. A principal diferença entre a sincopação de Diofante e a álgebra moderna está na falta de símbolos especiais para as operações e notação exponencial.

Vamos apresentar dois problemas resolvidos por Diofante em *Arithmetica*, destacando que os valores apresentados nos problemas estão se referindo a números racionais positivos:

1. "Encontre três números tais que o produto de dois quaisquer deles, acrescido do terceiro, é um quadrado."

   Adotando os valores x,y e z, como valores quaisquer, teremos que $x.y + z$, devem satisfazer o problema, então temos que, se m é um número qualquer e $x = m^2$, $y = (m+1)^2$ e $z = 2(x+y+1)$, Substituindo os de x e y em z, teremos:

$$z = 2[m^2 + (m+1)^2 + 1] =$$
$$= 2[m^2 + m^2 + 2m + 1 + 1] =$$
$$= 4m^2 + 4m + 4$$

Agora, para a resolução do problema basta substituir os valores de x, y e z na equação: $xy + z$.

$$xy + z =$$
$$= m^2 + (m+1)^2 + 4m^2 + 4m + 4 =$$
$$= m^4 + 2m^3 + m^2 + 4m2 + 4m + 4 =$$
$$= m^4 + 2m^3 + 5m^2 + 4m + 4 =$$
$$= (m^2 + m + 2)^2$$

Donde podemos concluir que qualquer que seja os valores de x, y e z dentro dos números racionais positivos, o número final será um quadrado.

2. “Encontre três números tais que o produto de dois quaisquer deles, acrescido da soma dos mesmos, é um quadrado.”

   Adotando os valores x e y, como valores quaisquer, teremos que $x.y + x + y$, que deverão satisfazer o problema, então temos que, se m é um número qualquer e $x = m^2$ e $y = (m+1)^2$,

   Substituindo os valores de x e y em $x.y + x + y$ teremos,

$$x.y + x + y =$$
$$= m^2.(m+1)^2 + m^2 + (m+1)^2 =$$
$$= m^2.(m^2 + 2m + 1) + m^2 + m^2 + 2m + 1 =$$
$$= m^4 + 2m^3 + m^2 + m^2 + m^2 + 2m + 1 =$$
$$= m^4 + 2m^3 + 3m^2 + 2m + 1 =$$
$$= (m^2 + m + 1)^2$$

   Onde podemos concluir que dado $x.y + x + y$ chegamos em um valor que é um quadrado.

2.3.1 Sugestão didática

Asuntos como:

- Sistemas de equações do 1º grau;
- Monômios e Polinômios;
- Produtos Notáveis

são tratados na 7ª série (8º ano). E infelizmente é comum o aluno sentir-se apreensivo com relação a essa nova matemática: cheia de letras e propriedades expressas em fórmulas abstratas. Por isso, é nesta série que a matemática se torna mais disjunta da realidade, o que causa grandes dificuldades na aprendizagem.

Portanto, o professor poderá utilizar a álgebra geométrica para trazer sentido aos conteúdos algébricos como os produtos notáveis: $(a+b)^2$ e $(a-b)^2$, e deixar que os alunos utilizem as regras apresentadas na escola somente após eles terem abstraído o processo por meio da geometria, dessa forma o conteúdo não fica algo imposto para o aluno e ele entenderá o porquê de utilizar aquela fórmula ou regra.

As propriedades de distributividade e comutatividade podem ser exploradas geometricamente como os gregos faziam. Os polinômios também podem ser interpretados como a soma da área de quadrados e/ou retângulos.

Em relação aos produtos notáveis pode também trabalhar com problemas e outro tipo de atividade que leve o aluno ao questionamento e a investigação.

Assim como os anos da vida de Diofante foram descritos em uma equação o professor pode trabalhar as equações utilizando enigmas, poemas, entre outras formas.

3 ÁLGEBRA HINDU E ARÁBICA: ESTÁGIO SINCOPADO

De acordo com (BOYER, 1996), os hindus eram fortes em associações e analogias, em intuição e faro artístico e imaginativo, ao passo que os árabes tinham mente mais prática na sua abordagem matemática. Iremos abordar neste capítulo o desenvolvimento da álgebra nas respectivas regiões.

3.1 ÁLGEBRA HINDU

Pouco se sabe sobre o desenvolvimento da matemática hindu antiga, pois naquela época os registros eram feitos em folhas de palmeira, o que dificultou a conservação. De acordo com (EVES, 2004), a mais antiga fonte histórica preservada são as ruínas de uma cidade de 5000 anos, encontradas em Mohenjo Daro, um sítio localizado a nordeste da cidade de Karachi no Pasquitão. Vestígios de ruas largas, habitações de tijolos com banheiros ladrilhados, redes de esgoto subterrânio e piscinas públicas indicam uma civilização tão avançada quanto qualquer outra do Oriente antigo. O povo dessa civilização tinha sistemas de escrita, contagem, pesos e medidas e construiam canais para irrigação. Tudo isso são requisitos básicos para a matemática e a engenharia. Não se sabe o fim que se teve esse povo.

Segundo (BAUMGART, 1992), a Índia sofreu numerosas invasões, o que facilitou o intercâmbio de idéias. As realizações babilônicas e gregas, em particular, eram conhecidas pelos matemáticos hindus.

A resolução das equações na álgebra hindu era amplamente verbal, mas também era utilizada muita a sincopação, que é uma forma de abreviatura de palavras. De acordo com (EVES, 2004), os hindus indicavam a adição por justaposição e a subtração era indicada colocando-se um ponto sobre o subtraendo; a multiplicação escrevendo-se *bha* (primeira sílaba da palavra *bhavita*, “produto”) depois dos fatores; a divisão escrevendo-se o divisor debaixo do dividendo e a raiz quadrada escrevendo-se *ka* (da palavra *karama*, “irracional” antes da quantidade.

Os hindus admitiam que as equações quadráticas (com resposta reais) tinham duas raízes reais. Eles também aceitavam os números negativos, mas descartavam as raízes negativas, que de acordo com (BAUMGART, 1992) era justificados pelos hindus com o seguinte comentário: “Como na natureza das coisas, um negativo não é um quadrado, não admite raiz quadrada”.

Não podemos deixar de citar alguns dos matemáticos que merecem destaque nesta época: Brahmagupta e Bhaskara.

3.1.1 Brahmagupta

Segundo (ARAGAO, 2009) Brahmagupta foi um matemático italiano que viveu cerca do século VII d.C. Dedicou-se à álgebra e à astronomia. As suas obras foram traduzidas do sânscrito pela primeira vez em 1817 por Henry Colebrooke. Das investigações feitas por esse estudioso, conclui-se que os indianos tinham conhecimentos de Álgebra muito anteriormente aos árabes.

De acordo com (BOYER, 1996), os hindus diferentemente dos gregos, consideravam os irracionais dos números como números. E isso foi de grande utilidade para a álgebra. Mas essa contribuição foi resultado de inocência lógica. Pois para eles não havia distinção entre resultados exatos e inexatos.

Foi grande a contribuição de Brahmagupta para a álgebra, pois com ele encontramos soluções gerais para equações quadráticas, (incluindo duas soluções, mesmo quando uma delas é negativa) e indeterminadas. Ele foi o primeiro a dar soluções gerais as equações lineares diofantinas $ax+by=c$, onde *a, b, c* são inteiros. E resolveu alguns casos da equação diofantina quadrática $x^2 = 1+py^2$, conhecida como equação de Pell.

De acordo com (BAUMGART, 1992), Brahmagupta forneceu uma regra interessante para achar uma das duas raízes positivas de equações quadrática $ax^2+bx=c$. E nos traz como exemplo: $x^2-10x=-9$, que no original é escrito da seguinte forma:

$$\begin{gathered} ya\ v\ 1\ ya\ \dot{1}0 \\ ru\dot{9} \end{gathered}$$

Onde, *ya* é a incógnita; *v* significa ”quadrado”; o ponto sobre um número indica que ele é negativo. O primeiro membro da equação é escrito em uma linha e o segundo membro abaixo; *ru* significa que o número é ”puro”.

(BAUMGART, 1992) nos traz a resolução da equação citada acima, onde teremos na primeira coluna a resolução em notação moderna e na segunda uma generalização para $ax^2 +$

$bx = c$, que é dada da seguinte forma:

$x^2 - 10x = -9$	$ax^2 + bx = c$
$(-9)(1) = -9$	$(c)(a) = ca$
$-9 + \left(\frac{-10}{2}\right)^2 = 16$	$ca + \left(\frac{b}{2}\right)^2$
$\sqrt{16} - \left(\frac{-10}{2}\right) = 9$	$\sqrt{ca + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}$
$\frac{9}{1} = 9$	$\frac{\sqrt{ca + \frac{b}{2}^2} - \frac{b}{2}}{a} = x$ ou $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$

Uma forma mais compreensível de entender a resolução acima é a seguinte dedução:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{1}{a}(ax^2 + bx + c) = \frac{1}{a}(0)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$-\frac{c}{a} + x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$[x^2 + \frac{b}{a}x] + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

$$\sqrt{(x + \frac{b}{2a})^2} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Utilizando uma idéia semelhante à apresentada acima, temos a seguinte dedução:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{1}{a}(ax^2 + bx + c) = \frac{1}{a}(0)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$-\frac{c}{a} + x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

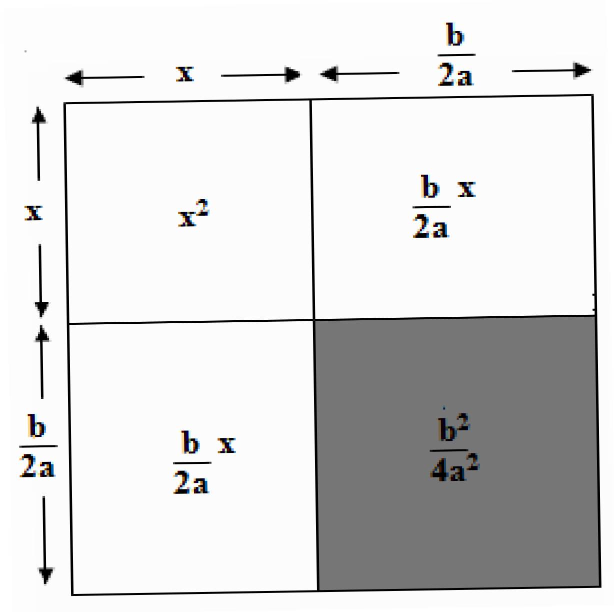

Figura 14: Dedução da fórmula de Bhaskara

Fonte: (RICIERI, 1993)

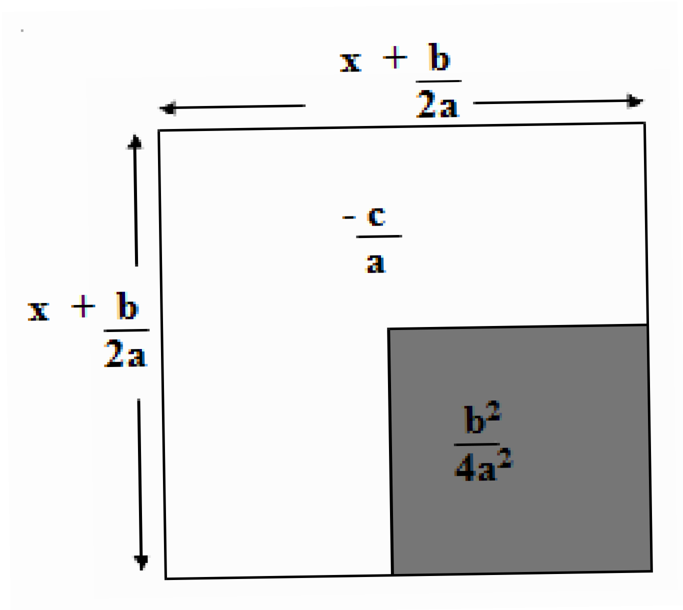

Figura 15: Dedução da fórmula de Bhaskara

Fonte: (RICIERI, 1993)

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$
$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$
$$x+\frac{b}{2a}-\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{b}{2a}$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

3.1.2 Bhaskara

De acordo com (ARAGAO, 2009) Bhaskara Acharya foi um matemático indiano que viveu no século XII d.C. Estudou álgebra, aritmética e geometria. A sua obra *Lilavati* foi traduzida do sânscrito em 1816 por John Taylor. É talvez a sua obra mais conhecida, mas Bhaskara publicou outras duas obras de grande importância para a Matemática, embora menos conhecidas: *Siddhanta-siromani* sobre a esfera celeste e *Bijaganita* sobre Álgebra.

Esse foi o mais importante matemático do século XII, foi ele que preencheu algumas lacunas deixadas por Brahmagupta, dando uma solução geral a equação de Pell.

A obra de Bhaskara representa a junção de toda a contribuição hindu, anterior a ele. Em sua famosa obra *Lilavati* ele engloba problemas de vários matemáticos, incluindo suas próprias observações.

De acordo com (GUELLI, 2000), Bhaskara deu o nome de sua filha a uma de suas obras: *Lilavati*, como consolo pela história romântica e trágica que ela viveu.

Conta em (GUELLI, 2000), que:

“Estava bem próximo a hora do casamento. Os astrólogos tinham previsto que um único momento da vida de Lilavati seria propício para uma união feliz. Um instante particular de um certo dia, quando ela tivesse 12 anos. Seu pai, o famoso matemático hindu Bhaskara, tinha arranjado tudo para que o presságio se cumprisse. Lilavati estava pronta para a cerimônia, olhava nervosa para um pequeno relógio que flutuava numa vasilha com água. O relógio tinha um pequeno burraco no fundo, por onde a água entrava. Quando o relógio afundasse seria o instante propício para o casamento. Quase no minuto fatal, sem ninguém perceber, uma pérola do seu vestido caiu no relógio e tampou a entrada de água e o relógio não afundou. Quando o acidente foi descoberto o instante propicio já havia passado. E Lilavati nunca mais se casou. Para consolar a filha, Bhaskara prometeu-lhe escrever um livro com seu nome.”

Não se sabe se é verdadeira a história, no entanto Bhaskara realmente escreveu um livro, muito importante, cujo o titulo é *Lilavati* que significa “Formosa”.

Nessa obra foi encontrada uma grande variedade de problemas sobre equações lineares e quadráticas , sendo elas determinas e indeterminadas. Em (BOYER, 1996) temos dois exemplos da obra *Lilavati*:

1. "Se um bambu de 32 cúbitos de altura é quebrado pelo vento de modo que a ponta encontra-se no chão a 16 cúbito da base, a que altura a partir do chão ele foi quebrado?".

2. "Um pavão está sobre o topo de uma coluna em cuja a base é um buraco de cobra. Vendo a cobra a uma distância da coluna igual a três vezes a altura da coluna. O pavão avançou para a cobra em linha reta alcançando-a antes que chegasse a sua cova. Se o pavão e a cobra percorreram distâncias iguais a quantos cúbitos da cova eles se encontraram?".

De acordo com (BOYER, 1996), pelos exemplos acima, onde um é determinado e o outro indeterminado, podemos perceber a heterogenia natureza da obra de Bhaskara. O modo de resolução abordado por Bhaskara, em muitos problemas, foi a regra da inversão, muito conhecido pelos matemáticos hindus, onde a resolução iniciava pelo final do problema e as operações contidas no problema deveriam ser invertidas para se resolver o problema.

Segundo (GUELLI, 2000), em seu livro, escrito no século XII, Bhaskara resolve muitos problemas utilizando a **regra da inversão**, conhecido pelos matemáticos hindus desde a Antiguidade:

1. "Digam-me: Qual é o número que, multiplicado por 5, aumenta depois 9, se divide por 6, se multiplica por si mesmo, se acrescenta a 19 e, depois de extraída a raiz quadrada, diminui 2, se divide por 4 e dá 2."

   Para resolver este problema à maneira dos antigos hindus, é preciso inverter tudo: começar a resolver do fim e fazer as operações inversas das indicadas:

   ... se divide por 4 e dá 2

   $$2.4 = 8$$

   ... diminui 2

   $$8 + 2 = 10$$

   ... depois de extraída a raiz quadrada

   $$10^2 = 100$$

... se acrescenta a 19

$$100 - 19 = 81$$

... se multiplica por si mesmo

$$\sqrt{81} = 9$$

... se divide por 6

$$9.6 = 54$$

... aumenta depois 9

$$54 - 9 = 45$$

... que multiplicado por 5

$$45 \div 5 = 9$$

Digam-me: Qual é o número?

O número encontrado é 9.

2. Digam-me doutores matemáticos, qual é o número que, multiplicado por 5, dividindo o produto por 4, acrescentando 5 unidades ao quociente, multiplicado o resultado por si mesmo e, depois de extrair a raiz quadrada, acrescentar 9 unidades e dividir por 3, dá o próprio número?

   Vamos novamente trabalhar com o problema iniciando pelo final e com as operações inversas:

   O número é indeterminado então podemos o classificar como x:

   ... se dividi por 3

$$3x$$

   ... acrescenta 9 unidades

$$3x - 9$$

... depois extrai a raiz quadrada

$$(3x-9)^2$$

... multiplica o resultado por si mesmo

$$\sqrt{(3x-9)^2} = (3x-9)$$

... acrescenta 5 unidades ao quociente

$$(3x-9)-5 = 3x-14$$

... divide o produto por 4

$$(3x-14).4 = 12x+56$$

... multiplica por 5

$$\frac{(12x-56)}{5} = x$$

Resolvendo a equação acima, temos:

$$x.5 = (\frac{(12x-56)}{5}).5$$

$$5x = 12x-56$$

$$5x-12x = 12x-56-12x$$

$$(-7x = -56).(-1)$$

$$7x = 56$$

$$\frac{7x}{7} = \frac{56}{7}$$

$$x = 8$$

Encontramos então o valor procurado que era 8.

Observação: Na resolução da equação apresentada na página 31 podemos observar a correta forma de se usar os números negativos, que era indicado com um ponto sobre ele. Os imaginários não foram trabalhados pelos hindus. Mas eles trabalhavam com liberdade como os números irracionais, e Bhaskara deu as seguintes identidades notáveis:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\left(a + \sqrt{a^2 - b}\right)/2} \pm \sqrt{\left(a - \sqrt{a^2 - b}\right)/2}$$

que é utilizado nos atuais textos de álgebra para encontrar a raiz quadrada de números irracionais.

Os hindus também trabalharam com equações lineares e conseguiram a resolução para equações de grau maior que dois.

Em análise indeterminada, eles tiveram grandes progressos. De acordo com (BAUMGART, 1992), para equações $ax + by = c$, onde *a, b, c* são inteiros e têm soluções inteiras, eles determinavam uma solução por meio de frações contínuas. Depois de achar uma solução, *x = p*, *y = q*, eles achavam outras soluções usando *x = p + bt* e *y = q - at* , para qualquer inteiro *t*.

Temos em (BAUMGART, 1992), uma interessante solução de Bhaskara para o seguinte problema: ”A hipotenusa sendo 85, diga, homem sábio, quais lados retos serão racionais?”, em notação moderna seria: ”Ache valores *x, y* se $x^2 + y^2 = h^2$”.

Dobre a hipotenusa.	$2h$
Multiplicando por um número arbitrário, digamos *a*.	2ah
Divida pelo quadrado do número arbitrário acrescido de 1. E isso nos oferece um lado.	$\frac{2ah}{a^2+1}$
Multiplicando pelo número arbitrário *a*.	$\frac{2a^2h}{a^2+1}$
Subtraia a hipotenusa	$\frac{2a^2h}{a^2+1} - h$
Isto fornece o outro lado.	$\frac{h\left(a^2-1\right)}{a^2+1}$

Com este exemplo podemos dizer que os três lados do triângulo retângulo devem ser proporcionais a $a^2 + 1$, $2a$, $a^2 - 1$, e esses valores não serão únicos, basta variar o *a*.

3.1.3 Sugestão didática

No estudo das equações do 2º grau na 8ª série (9º ano) é comum o professor utilizar a famosa fórmula de Bhaskara. No entanto, para que ocorra uma aprendizagem significativa o professor pode induzir os alunos a deduzirem a respectiva fórmula, partindo de um exemplo particular de uma equação do 2º grau, ou seja, deixar que eles encontre a solução da equação dada utilizando os passos apresentados na dedução geral da página 32. No entanto, para que o aluno entenda os passos da dedução geral, o professor deverá ter explorado a idéia do completamento do quadrado e do equilíbrio da equação.

Explicar para os alunos que a fórmula utilizada para a resolução de equações do segundo grau é conhecida como Fórmula de Bhaskara somente em alguns países, pois houve antes de Bhaskara muitos outros matemáticos que já haviam deduzido essa fórmula para resolução de equação do segundo grau.

Os problemas desenvolvidos por Bhaskara pelo método da inversão podem ser trabalhado com os alunos, onde trabalharão as operações inversas. Enigmas que utilizam a idéia de Bhaskara para serem resolvidos podem ser encontrados em sites educativos como:
http://www.escolakids.com/enigmas-matematicos.htm, onde é apresentado o seguinte exemplo:

Peça a um amigo que:

Pense na idade que tem,

Subtraia 1 desse número.

Multiplique o resultado por 2.

Some o resultado da multiplicação com a idade.

Peça que ele diga a soma obtida, e você determinará a idade dele. Para isso basta somar 2 ao resultado fornecido e dividir tudo por 3.

Esse problema pode ser explorado pelo professor, realizando uma atividade de mágica onde irá descobrir a idade dos alunos ou de algum membro da sua família. Nesta atividade, os alunos podem criar enigmas e até uma feira de adivinhações.

Na coleção Contando a história da matemática - Equação: O idioma da álgebra, o professor encontrará algumas atividades que poderá utilizar com os alunos na sala de aula. E de acordo com (BIANCHI, 2006) no exemplar da 6ª série - Programa Nacional de Livro Didático (PNLD) 2005 - Pg.179, a História da Matemática é mencionada para ilustrar situações-problema que constam na obra ”Lilavati”, e na seqüência, é lançado um desafio ao leitor baseado no conteúdo desta citação histórica.

3.2 ÁLGEBRA ARÁBICA

De acordo com (BAUMGART, 1992), a chegada do islamismo forneceu o movimento que levou os árabes a conquistar a Índia, Pérsia, Mesopotâmia, Norte da África e Espanha. Dessa forma, os árabes obtiveram os escritos científicos de gregos e hindus, que traduzidos pelos árabes foram preservados ao longo da Idade Média da Europa. Uma das melhores aquisições foi o sistema de numeração hindu. Apesar de alguns historiadores acreditarem que os árabes não acrescentaram muito de novo, lhe deram o mérito por ter mantido durante toda a idade média os trabalhos gregos e hindus, pois se não fosse suas traduções, eles teriam se perdido.

A álgebra arábica trabalhava numericamente igual aos hindus e geometricamente igual aos gregos, e por isso era considerada como a junção da álgebra dessas duas localidades. Eles escreviam os problemas em forma de palavras. Após um período de convivência com os hindus, os árabes começaram gradativamente a escrever por meio de números e símbolos hindus. Mas após, por influência dos gregos, voltaram a escrever por meio de palavras novamente.

De acordo com (BAUMGART, 1992), um dos maiores escritores matemáticos arábicos foi Al-Khowarizmi. Ele foi o primeiro a reunir potências iguais da incógnitas e também resolvia equações lineares e quadráticas, numérica e geometricamente. Reconhecia e existência das raízes negativas (como os hindus) mas conscientemente as rejeitava.

3.2.1 Al-Khowarizmi e o surgimento da palavra álgebra

Foi por meio da aritmética que seu nome se tornou conhecido, mas foi do título de seu livro mais importante *Al-jabr Wa'l muqabalah* que surgiu o termo álgebra, ramo da matemática que ficou conhecido pela Europa algum tempo mais tarde por meio do livro de Al - Khowarizmi.

Não se sabe exatamente o que significa *Al-jabr e muqabalah*, mas usualmente se interpreta a palavra *Al-jabr* como "restauração" ou "completação" referindo-se a mudança de termos subtraídos para o outro lado da equação,

$$9x + 12 = 6x + 30$$

$$9x = 6x + 30 - 12$$

e *muqabalah* como "redução" ou "equilíbrio", isto é, ao cancelamento de termos semelhantes em lados opostos da equação,

$$9x = 18 + 6x$$

$$9x - 6x = 18 + 6x - 6x$$

$$3x = 18 + 0$$

Apesar de Diofante ser muitas vezes considerado o “pai da álgebra”, este mérito pertence à Al - Khowarizmi, pois foi ele que desenvolveu a álgebra de uma forma tão sistemática ao ponto que seus leitores não tinham dificuldades para entender as soluções desenvolvidas por ele.

A álgebra de Al - Khowarizmi não utilizava abreviações, era toda expressa em palavras, até mesmo os números são representados por palavras. Nenhum estudioso árabe utilizou sincopação, nem números negativos, eles procuravam desenvolver sempre uma apresentação clara indo do princípio até a conclusão. Mas a álgebra de Al - Khowarizmi era mais parecida com a álgebra de hoje do que a de Diofante, pois enquanto os gregos se preocuparam na resolução de problemas difíceis de análise indeterminada, Al - Khowarizmi desenvolveu uma álgebra contendo uma exposição direta e elementar da resolução de equações, principalmente do segundo grau.

Al - Khowarizmi resolvia as equações por meio da utilização de três elementos: raízes, quadrados e números. No seu livro ele primeiramente explicava o funcionamento da numeração hindu e depois passa para a resolução de algumas equações.

De acordo com (GUELLI, 2000) as resoluções tinham o seguinte tipo, na linguagem do livro Al-jabr e o livro atual respectivamente:

- Raízes iguais a números: $6x + 4x + 2x = 36$

É preciso, em primeiro lugar, que vocês somem seis raízes com quatro raízes e com duas raízes.	$x(6+4+2) = 36$
Como doze raízes valem o mesmo que trinta e seis unidades,	$12x = 36$
então o valor de uma raiz é três unidades.	$x = 3$

- Raízes e números iguais a números: $4x + 9 = 45$

Vocês devem entender que, quando se diminuem do resultado as unidades que acompanham as raízes,	$4x = 45 - 9$
então quatro raízes são mesmo trinta e seis unidades.	$4x = 36$
Dividindo trinta e seis unidades por quatro,	$x = 36 \div 4$
vocês têm que o valor de uma raiz é nove	$x = 9$

- Raízes iguais a números e raízes: $7x = 20 + 2x$

Nesta equação, vocês devem diminuir duas raízes de cada lado da equação;	$7x - 2x = 20 + 2x - 2x$
portanto, cinco raízes valem o mesmo que vinte unidades.	$5x = 20$
Agora vocês devem dividir vinte unidades por cinco raízes,	$x = 20 \div 5$
para encontrar que o valor da raiz é quatro unidades.	$x = 4$

- Números e quadrados iguais a números: $8 + x^2 = 44$

É preciso que entendam que, quando se tomam as unidades que acompanham o quadrado e se diminuem do resultado estas unidades mencionadas,	$x^2 = 44 - 8$

então vocês têm que o quadrado vale o mesmo que trinta e seis;	$x^2 = 36$
portanto, temos de determinar um número que, multiplicado por ele mesmo, resulta trinta e seis.	$6.6 = 36$
Então, vocês têm que a raiz vale seis unidades.	$x = 6$

Os casos de equações citados acima aborda todas as possibilidades de equações lineares e quadráticas que têm raiz positiva. A forma de resolução de Al-Khowarizmi era tão detalhada que os leitores não tinham dificuldades para entender. A álgebra árabe é uma provável combinação da álgebra grega e hindu.

3.2.2 Sugestão didática

Ao iniciar o estudo de equações na 6ª série (7º ano) é apresentado aos alunos um método tradicional para resolução de equações por equilíbrio: "passando para o outro lado, troca-se o sinal", ou ainda, "o que está multiplicando passa para o outro lado dividindo". Formulado desta maneira, a noção de equilíbrio passa desapercebida e o método se torna uma regra sem sentido algum.

Portanto, o professor deve primeiramente explicar aos alunos a idéia defendida por Al-Khowarizmi, para que haja entendimento que a equação é um equilíbrio que para se resolvida deve ser feito adições ou subtrações em ambos os lados da mesma. Neste momento é oportunuo fazer comentários históricos sobre o pai da álgebra, Al-Khowarizmi, onde e quando se viveu, sua obra e seus estudos.

Apresentado aos alunos a maneira de resolução de equações feita por Al-Khowarizmi, deve-se deixar que eles resolvam algumas equações por meio deste método, onde irão desenvolver o raciocinío matemático e também estarão trabalhando a escrita. Após o desenvolvimento de algumas atividades por meio deste método de equilíbrio e depois do aluno já ter entendido a idéia de resolução de equação, o professor pode explicar para os alunos o método tradicional, que agora (com a noção de equilíbrio) fará sentido e tornará os cálculos mais rápidos.

4 ÁLGEBRA SIMBÓLICA

4.1 ÁLGEBRA NA EUROPA

Foi por meio dos árabes, especificamente por meio de Liber abaci(1202) de Fibonacci, que a álgebra entrou para a Europa, mas a álgebra que chegou na Europa sofreu uma regressão tanto no estilo como também no conteúdo. De acordo com (EVES, 2004) a renascença e rápido florescimento da álgebra na Europa foi devido aos seguintes fatores: facilidade de manipulação dos números por meio do sistema indo-árabico , que era superior aos sistemas que requeriam a utilização do ábaco; invenção da impressa móvel, que acelerou a padronização do simbolismo; ressurgimento da economia, sustentando a atividade intelectual; e a retomada do comércio e viagens, facilitando o intercâmbio de idéias tanto quanto de bens. O renascimento algébrico na Europa teve inicio na Itália, onde primeiramente surgiu cidades comercialmente fortes.

A Europa baseou-se diretamente na álgebra arábica. Grande parte do trabalho inicial foi realizado na Itália onde Fibonacci fez grande contribuição para a popularização dos números indo-árabicos com o seu livro de aritmética e álgebra Líber abaci (Livro do ábaco), escrito em 1202.

Houve alguns séculos com poucas atividades algébricas na Europa, pois os matemáticos não publicavam suas descobertas em periódicos, eles preferiam usá-las para se destacar em competições públicas, nas quais desafiavam uns aos outros para a resolução de problemas.

De acordo com (BAUMGART, 1992), Scipione de Ferro, um professor da Universidade de Bolonha, descobriu em 1515 o método para a resolução da equação cúbica $x^3 + bx = c$, mas não publicou seu trabalho. Niccolo Tartaglia, por volta de 1535, resolveu a equação cúbica $x^3 + ax^2 = c$ e depois também $x^3 + bx = c$, e aproveitou da descoberta para vencer vários desafiadores. Girolamo Cardano, conseguiu que Tartaglia lhe fornecesse a solução e após aperfeiçoá-las e resolver todos os casos possíveis para raízes positivas, publicou as soluções completas de todas as variedades de cúbicas (exceto as irredutíveis envolvendo imaginários) , reconhecendo, em seu livro, que não foi o descobridor original da solução, no entanto, deixou de citar o juramento, feito a Tartaga, de não revelar o segredo da solução.

De acordo com (BAUMGART, 1992), Cardano fez muito mais que publicar resultados dos outros. Ele foi o primeiro a exibir três raízes de uma cúbica particular (suspeitava de que existissem três raízes para todas as cúbicas, mas ficava confuso com as raízes negativas). Reconheceu de uma certa forma as raízes negativas, que ele chamava de raízes fictícias. Teve a curiosidade de trabalhar com os conhecidos números imaginários, mesmo que não os conheciam com essa nomenclatura ainda. Removeu o termo x^3 adicionando e subtraindo das raízes um quarto do coeficiente do termo cúbico. Para a resolução da equação $x^4+6x^2+36=60x$ de acordo com (BOYER, 1996) Cardano utilizava dos seguintes passos:

(1) Primeiro somar suficientes quadrados e números em ambos os lados para que o primeiro membro fique um quadrado perfeito, nesse caso x^4+12x^2+36 ou $\left(x^2+6\right)^2$.

(2) Agora somar a ambos os membros da equação termos envolvendo uma nova incógnita y de modo que o primeiro membro permaneça um quadrado perfeito, como $\left(x^2+6+y\right)^2$. A equação agora fica: $\left(x^2+6+y\right)^2=6x^2+60x+y^2+12y+2yx^2=(2y+6)x^2+60x+\left(y^2+12y\right)$.

(3) O passo crucial seguinte consiste em escolher y de modo que o trinômio no segundo membro fique um quadrado perfeito. Isso se faz, é claro, igualando a zero o discriminante.

(4) Do passo 3 resulta uma equação cúbica em y, $y^3+15y^2+36y=450$. Essa é agora resolvida em relação a y pelas regras previamente dadas para a resolução de equações cúbicas, sendo resultado:

$$y=\sqrt[3]{287\tfrac{1}{2}+\sqrt{80449\tfrac{1}{4}}}+\sqrt[3]{287\tfrac{1}{2}+\sqrt{80449\tfrac{1}{4}}}-5.$$

(5) Substituir o valor de y obtido no passo (4) na equação para x do passo (2) e extrair a raiz quadrada de ambos.

(6) O resultado do passo 5 é uma equação quadrática, que deve agora ser resolvida a fim de achar o valor de x desejado.

Mas foi Rafael Bombelli, um matemático bolonhês do século XVI, que alcançou progressos quanto ao caso irredutível da equação cúbica.

Entre os algebristas do século XVI, se destaca também Thomas Harriot, um inglês que introduziu o símbolo $<$ e $>$, e usou aa para o que hoje indicamos como a^2 e aaa para a^3. E o inglês Willlian Oughtred, responsável pela régua de cálculo, pelo sinal de multiplicação $\times$ e :: para proporção.

O sinal de igualdade utilizado por todos atualmente, foi um símbolo utilizado pela primeira vez por Robert Recorde em seu livro The Whetstone of Witte, publicado em 1557, onde Recorde justifica seu uso por entender que não existe algo tão igual quanto duas retas paralelas. Um outro símbolo que foi utilizado quase ao mesmo tempo foi o radical, introduzido por Christoff Rudolff em 1525 em seu livro de álgebra intitulado como Die Coss.

Descartes foi um dos maiores matemáticos de sua época. A sua obra é freqüentemente descrita por meio de aplicações da álgebra geométrica. De acordo com (BOYER, 1996), ele foi mais longe que seus predecessores com a álgebra simbólica e geométrica. A álgebra alcançou seu auge com Descartes. É em suas obras que os atuais estudantes podem encontrar o mais antigo texto matemático, onde poderão seguir sem ter dificuldades com as notações. Um dos únicos símbolos arcaicos é o ∞ em vez de = para a igualdade.

A utilização de letras do início do alfabeto para parâmetros e do final para incógnitas, as notações exponenciais e o uso dos símbolos germânicos + e -, foram utilizados por Descartes, isso faz com que suas notações se assemelham a nossa. Os sinais de + e - eram utilizados inicialmente em armazéns para representar excesso e deficiências de medidas, somente posteriormente que passaram a representar símbolos em operações aritméticas.

Porém, de acordo com (BOYER, 1996), ao passo em que pensamos em parâmetros e incógnitas como números, Descartes pensava neles como segmentos. Em vez de considerar, por exemplo, x^2 e x^3 , como área e volume , os interpretavam como segmentos.

De acordo com (BOYER, 1996), Descartes podia escrever uma expressão $a^2b^2 - b$, porque como ele dizia: “deve-se considerar a quantidade a^2b^2 dividida uma vez pela unidade (isto é, o segmento unitário), e a quantidade b multiplicada duas vezes pela unidade”. Com essa forma de pensamento Descartes tornou sua álgebra mais flexível, ao ponto de lermos xx como “x ao quadrado”, sem jamais vermos um quadrado.

Para resolver a seguinte equação $z^2 = az + b^2$, Descartes procede do seguinte modo:

Tracemos um segmento de reta LM de comprimento b e em L levante um segmento NL igual a/2 e perpendicular a LM. Com centro em N contruímos um circulo de raio a/2 e traçamos a reta por M e N, que cortará o circulo em O e P. Então z = OM é o segmento desejado.

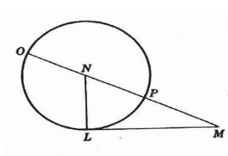

Figura 16: Resolução geométrica de Descartes

Fonte: (BOYER, 1996)

A introdução dos números indo-arábicos como expoente de uma dada base, foi obra de Descartes por volta de 1637. Mas foi a contribuição de outros matemáticos que tornaram viável a utilização dos números indo-arábicos por Descartes. Por volta de 1552 o matemático Bombelli escreveu a solução de um problema da seguinte forma:

$$4 \cdot p \cdot R \cdot q \cdot \left\lfloor 24 \cdot m \cdot \overset{1}{\breve{2}}0, \right\rfloor \text{ Eguale à } \overset{1}{\breve{2}}.$$

Em notação moderna seria:

$$4 + \sqrt{24 - 20x} = 2x$$

Comparando a equação de Bombelli com a forma atual teremos que: “Eguage à” significa “igual” , “p” representa “mais”, “m” equivale a “menos”, o símbolo “R.q” significa “raiz quadrada”, os dois símbolos angulares significam os parênteses; para escrever potencias inteiras positivas de uma variável x, era escrita o expoente num pequeno arco circular sobre o numeral.

O método de Bombelli teve uma vida curta, pois só era possível escrever equação com uma variável.

4.2 ÁLGEBRA MODERNA

A álgebra existente no início do século XIX era considerada simplesmente como uma aritmética simbólica, onde em vez de trabalhar com números específicos, como fazemos na aritmética, em álgebra era empregado letras que representavam esses números.

Segundo (EVES, 2004), foi por volta de 1830 na Inglaterra que surgiu os primeiros vislumbres de uma visão moderna da álgebra com os trabalhos de Georg Peacock, um ex-aluno e professor da Universidade de Cambridge. Foi ele que introduziu uma distinção entre o que ele considerava álgebra aritmética e álgebra simbólica. A primeira ele considerava como sendo o estudo resultante de uso dos símbolos para denotar os números decimais positivos, juntamente com os símbolos operatórios, aos quais podem-se sujeitar esses números. Nesse tipo de álgebra certas operações são limitadas por sua aplicabilidade. Numa subtração $a-b$, por exemplo, devemos ter $a > b$. Já na álgebra simbólica as operações da álgebra aritmética são adotadas mas sem suas restrições. Por exemplo a subtração na álgebra simbólica difere da mesma operação na álgebra aritmética pelo fato que na primeira ela tem sentido.

No início do século XIX parecia ser impossível ter uma álgebra diferente da álgebra da aritmética, onde por exemplo existisse uma álgebra que fosse consistente sem a verificação da lei comutativa da multiplicação. E onde a multiplicação de um elemento $a \times b$ fosse diferente de $b \times a$.

Na história da matemática a transição de uma época para outra tinha uma certa continuidade, e não foi diferente na transição para o mundo moderno. Essa mudança contou com vários homens, sendo que a figura central é um francês que atendia pelo nome de François Viéte (1540-1603) e que não foi matemático por vocação, praticava a matemática somente em seu tempo livre como um lazer.

Foi ele o primeiro a introduzir letras como coeficientes genéricos, utilizando vogais para representar uma quantidade desconhecida, ou indeterminada, e uma consoante para uma grandeza ou número conhecido. Mas apesar de utilizar símbolos modernos a maioria de sua álgebra é sincopada e sem simbolismo, utiliza muito de palavras e abreviações.

Por meio de suas contribuições ele conseguiu chegar próximo das idéias modernas para a álgebra, de acordo com (BOYER, 1996), se Viéte tivesse utilizado todo simbolismo já existente em seus dias ele poderia ter escrito todas as equações quadráticas, na forma $BA^2 + CA + D = 0$ onde A é a incógnita e B, C, D são parâmetros. Ele percebeu alguma relação entre as raízes e o coeficiente, mas teve dificuldades por não aceitar as raízes e coeficientes negativos, isso o impediu de obter a generalidade tão procurada por ele.

De acordo com (BAUMGART, 1992), o francês Albert Girard (1590-1650) foi quem enfocou os números negativos e imaginários, ele usava-os para resolver problemas geométricos e sugeriu que, aceitando-se números imaginários como raiz, poderia afirmar que uma equação admite tantas raízes quanto é o seu grau. Enunciou as relações entre raízes e coeficientes de uma equação polinomial e sugeriu que as raízes imaginárias são úteis para tornar essas relações gerais. Por exemplo para a equação $x^4 - 4x + 3 = 0$, ele obteve as raízes 1, 1, $-1 + \sqrt{-2}$ e $-1 - \sqrt{-2}$, que aqui estão apresentados em notação moderna.

René Descartes (Francês, 1596-1650) deu grande contribuição para a aceitação dos números negativos por meio da representação geométrica em 1637 e é a ele que se devem os termo "imaginário" e "real" para os números complexos, em 1777 o matemático suiço Euler introduziu a letra i para $\sqrt{-1}$, Augustin Loius Cauchy (Francês, 1789-1875) contribuiu com os termos "conjugado" e "módulo" e Gauss (Alemão, 1777-1855) introduziu o termo "complexo".

De acordo com (BAUMGART, 1992), os fundamentos da moderna formulação estrutural da álgebra, iniciada por Viéte, esperaram cerca de dois séculos para que Galois (Francês, 1811-1832) introduzissem a idéia de grupo.

4.2.1 Sugestão didática

O professor pode apresentar aos alunos a importância e a descoberta das notações e símbolos matemáticos, de forma ao aluno perceber que os símbolos que utilizam na matemática, também tem sua história e seu desenvolvimento, e que surgiram para facilitar a notação e o entendimento.

Em (RICIEIRI, 2011) encontra-se uma tabela, que traz o desenvolvimento simbólico das equações por alguns matemáticos, em várias obras escritas durante séculos.

AUTOR	HOJE NOTAÇÃO ONTEM	REFERÊNCIA
Girolamo Cardano 1545	$5x^3 + 4x^2 = 9$ 5 cubus p̄ 4 quadratus aequalis 9	Ars Magna 1545
Rafael Bombelli 1572	$4x^3 + 5x^2 = 9$ $\overset{3}{4}$. p . $\overset{2}{5}$ equale à 9	Algebra 1572
Simon Stevin 1585	$3x^3 + 2x = 4$ 3③ + 2① egales 4	L'Arithmetique 1634
François Viète 1590	$5x^3 + 7x^2 + 3x + 2 = 19$ 5C + 7Q + 3N + 2 aequatur 19 C = Cubus , Q = Quadratus , N = Numerus	Opera Mathematica 1646
Albert Girard 1629	$5x^3 + 7x^2 + 3x + 2 = 19$ 5(3) + 7(2) + 3(1) + 2 = 19	Inventio Nouvele en L'Algebra 1629
Thomas Harriot 1631	$6x^3 - 2x^2 = 25$ 6 . xxx - 2 . xx ═══ + 25	Artis Analyticar Praxis 1631
Pierre Hérigone 1634	$5x^3 + 2x^2 - 3x = 29$ 5X3 + 2X2 ~ 3X 2/2 29	Cursus Mathematicus 1634
René Descartes 1637	$x^3 + x = 10$ $x^3 + x \propto 10$	La Geometrie 1637
John Wallis 1693	$x^3 + 2x = 12$ $x^3 + 2x = 12$	Opera 1703

Figura 17: Tabela de desenvolvimento da equação

Juntamente com os alunos, o professor, poderia montar uma exposição dos símbolos ao longo o tempo, onde seria apresentada a evolução deles. Assim, ficaria evidente que a notação utilizada hoje é muito mais simplificada e de fácil compreensão, mas foram necessários vários séculos e a contribuição de alguns matemáticos para atingir esse aprefeiçoamento.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como nossa pesquisa foi somente bibliográfica, baseada em obras de autores clássicos da história da matemática e artigos de educadores matemáticos, sentimos necessidade de conhecermos a opinião de professores quanto a utilização da História da Matemática como Metodologia de Ensino.

Para tanto, elaboramos o questionário apresentado abaixo:

Pesquisa de metodologia alternativa

1. Os conteúdos de Matemática na educação básica, em particular, os conteúdos de Álgebra de 7º, 8º e 9º anos, podem se tornar mais interessantes, reais e humanizados quando apresentados juntamente com tópicos de história da matemática. Você concorda ou discorda desta metodologia?

   ( )*concordo* ( )*discordo*

2. Se você concorda com essa metodologia, aponte as principais dificuldades enfrentadas no dia-a-dia do professor para colocá-la em prática.

   ( ) falta de embasamento histórico

   ( ) dificuldades na realização de um trabalho interdisciplinar

   ( ) cumprimento do programa anual

   ( ) os "moldes" do plano pedagógico da escola

   ( ) outras:

3. Indique algumas possibilidades que você acredita serem válidas para facilitar o uso da metodologia "Matemática x História":

   ( ) cursos específicos de História da Matemática para capacitação dos professores;

   ( ) aquisição, pela escola, de um acervo bibliográfico sobre o assunto;

( ) implantação na proposta pedagógica, de um projeto de trabalho interdisciplinar envolvendo história da matemática e outras disciplinas;

( ) outras:

Desta pesquisa participaram 16 professores (11 da Educação Básica e 5 da Educação Superior), que foram unânimes quanto ao uso da História da Matemática como Metodologia de Ensino. No que se refere a dificuldade de se trabalhar a história da matemática em sala de aula, obtivemos os seguintes resultados:

- 68% dos professores apontaram a falta de embasamento histórico como principal dificuldade enfrentada pelo docente em sala de aula para a aplicação dessa metodologia;

- 31% dos professores apontaram o cumprimento do programa anual e a difícil realização de uma trabalho interdisciplinar.

Como possibilidade válida para facilitar o uso da metodologia ”Matemática x História”obtivemos os seguintes resultados:

- 56% do professores indicaram a necessidade de cursos específicos de História da Matemática para a capacitação dos professores;

- 50% dos professores acreditam que a aquisição, pela escola, de um acervo bibliogáfico sobre o assunto ajudaria o professor a trabalhar com essa metodologia;

- 37% dos professores apostam em uma implantação na proposta da pedagógica, de um projeto de trabalho interdisciplinar envolvendo história da matemática e outras disciplinas.

Alguns professores enriqueram ainda mais a pesquisa apresentando outros tópicos que dificultam o trabalho do professor com esta metodologia, como:

Professor 1: “Falta de interesse por parte de alguns professores”;

Professor 2: “As licenciaturas em geral não trabalham de forma adequada os conteúdos. Em geral cabe, unicamente a disciplina de história da matemática, com suas poucas aulas, a tarefa de embasar historicamente. Ma minha opinião, esta disciplina também trabalha de forma equivocada pois procura mostrar apenas um pouco sobre os filósofos e matemáticos, dando maior ênfase no sujeito (filósofo). Desta forma, a origem dos conteúdos, a forma com que a matemática se desenvolveu, continua sendo trabalhada como algo “divino”, dando a impressão que já nasceu pronta e exatamente na ordem em que são trabalhadas na escola”.

Houve também contribuição dos professores que apontaram outras possibilidades para facilitar o uso de metodologia:

Professor 1: “Interesse do próprio professor em estar utilizando esse metodologia em sala de aula, visto que muitos livros didáticos trazem em seu conteúdo tópicos sobre história da Matemática que acabam passando, muitas vezes, nem sendo lidos em sala”;

Professor 2: “Propostas novas só tem resultados com capacitação de professores. Um projeto que peça aos professores que trabalhem a história da matemática sem que os mesmos sejam capacitados pode levar a um quadro ainda mais alarmante que o atual, pois os professores podem não conseguir nem trabalhar a historia e deixar de trabalhar conteúdos também, similar aos PCNs, em que o professor não soube trabalhar as propostas”;

Professor 3: “Grupos de Estudo pelos professores para estudar a tendência metodológica Uso da História no Ensino da Matemática, e não apenas saber de fatos históricos isoladamente”.

Portanto, a partir das referências bibliográficas e desta pesquisa com os professores podemos tecer algumas considerações:

Trabalhar com a história da matemática pode não ser uma tarefa fácil. Para o professor trabalhá-la, ele deve conhecê-la muito bem, pois deverá saber transformar as informações bibliográficas em atividades que leve o aluno a um encontro com o conhecimento matemático.

A evolução da álgebra, em particular, ocorreu devido à necessidade humana, portanto as aulas “matemática x história” mostram aos alunos o desenvolvimento humano desta área no decorrer do tempo. Desta maneira ficará visível que a Álgebra não é um amontoado de fórmulas prontas, mas sim uma área da matemática desenvolvida por vários matemáticos durante séculos, que enfrentaram muitas dificuldades, assim como os alunos encontram hoje.

Se o professor levar o aluno a vivenciar os passos percorridos pelos matemáticos nas descobertas matemáticas e deixá-los descobrir a solução para problemas sem utilizar fórmulas, eles se sentirão parte da história. E também irão perceber que na descoberta também há dificuldades, como as que são encontradas por eles para entender o conteúdo.

O conhecimento da história da matemática é importante para todos os professores de matemática, pois mesmo para os que não forem trabalhá-la diretamente em sala de aula, conhecer a origem dos conceitos matemáticos pode auxiliá-los na didática da aula.

Vale destacar que a história da matemática deve ser utilizada como uma metodologia de ensino, e como qualquer outra, seu uso deve ocorrer em momento propício e de forma correta. Mais ainda, esta metodologia sugerida em nosso trabalho não resolve todos os problemas da disciplina de matemática, é somente apontada como mais um recurso para auxiliar o professor em sala de aula.

REFERÊNCIAS

ARAGAO, M. J. **História da Matemática**. Rio de Janeiro: Interciência, 2009.

BAUMGART, J. K. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula**. São Paulo: Atual, 1992.

BIANCHI. **Uma reflexão sobre a presença da história da matemática nos livros didáticos**. 2006. Disponível em: <http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/brc/33004137031P7/2006/bianchi_miz_me_rcla.pdf>. Acesso em: 19 de maio de 2011.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

ESCOLA KIDS. **Enigmas Matemáticos**. 2011. Disponível em: <http://www.escolakids.com/enigmas_matematicos.htm>. Acesso em: 01 de junho de 2011.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. São Paulo: Editora Unicamp, 2004.

GUELLI, O. **Contando a história da Matemática: Equação o idioma da álgebra**. 11. ed. São Paulo: Ática, 2000.

RICIEIRI. **Desenvolvimento simbólico das equações**. 2011. Disponível em: <http://www.prandiano.com.br/html/fr_arq.htm>. Acesso em: 19 de maio de 2011.

RICIERI, A. P. **Assim nasceu o imaginário: Origens dos Números Complexos**. São Paulo: Prandiano, 1993.