UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

VALÉRIA MUNIZ LIMA

SÉRIES DE POTÊNCIAS: ASPECTOS TEÓRICOS E APLICAÇÕES

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

CAMPO MOURÃO

2011

VALÉRIA MUNIZ LIMA

SÉRIES DE POTÊNCIAS: ASPECTOS TEÓRICOS E APLICAÇÕES

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de "Especialista em Ciências" – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Wellington José Corrêa

CAMPO MOURÃO

2011

TERMO DE APROVAÇÃO

Valéria Muniz Lima

Séries de Potências: Aspectos Teóricos e Aplicações

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de "Especialista em Ciências" – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Wellington José Corrêa

Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino

Prof. Msc. Magda Cardoso Montovani

Campo Mourão, 2011

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração do presente trabalho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida e por todas as oportunidades que me proporciona.

À minha família, por ser a base de minha formação e pela compreensão nos momentos de minha ausência.

Ao meu amado Anderson, por todo apoio e incentivo que a mim sempre dedicou. Pelas cobranças e pela compreensão em todos os momentos.

A todos os amigos da Primeira Turma do Curso de Especialização em Matemática da UTFPR - Campus Campo Mourão. Pela colaboração, trocas de experiências, alegria e disposição em estudar. Em especial, à querida amiga Patrícia Valenti, companheira de longa data.

Ao Prof. Msc. Wellington José Corrêa, pelas sugestões que muito contribuíram para a elaboração deste trabalho.

Enfim, a todos os professores do I Curso de Especialização em Matemática, pela competência e brilhantismo com que ministraram todas as aulas.

A todos, minha eterna gratidão.

A noção de infinito, de que é preciso se fazer um mistério em Matemática, resume-se no seguinte princípio: depois de cada número inteiro existe sempre um outro.

(J. Tannery)

RESUMO

LIMA, Valéria Muniz. Séries de Potências: Aspectos Teóricos e Aplicações. 66 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2011.

O presente trabalho visa apresentar uma abordagem didática do tema Séries de Potências, salientando sua importância por meio das demonstrações dos teoremas, da exploração de exemplos e das aplicações do tema na própria Matemática e em outras áreas. Apresentamos uma introdução sobre sequências numéricas e os critérios de convergência de séries para, em seguida, explorar as séries de potências destacando as séries de Taylor e Maclaurin. A principal aplicação que mostraremos é a possibilidade da aproximação de funções por séries de potências, com o objetivo de facilitar a diferenciação e integração e, de maneira geral, a utilização dessas funções.

Palavras-chave: Sequências, Séries Numéricas, Séries de Potências, Séries de Taylor

ABSTRACT

LIMA, Valéria Muniz. Power Series: Theoretical Aspects and Applications. 66 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2011.

This paper presents a didactic approach to the theme Power Series, highlighting its importance through the demonstration of theorems, the exploration of examples and applications of the theme in mathematics itself and in other areas. We present an introduction to numerical sequences and the convergence criterions of series, to then explore the power series focusing on the Taylor and Maclaurin series. The main application is to show the possibility of approximation of functions by power series, with the objective of to facilitate the integration and differentiation and, in general, the use of these functions.

Keywords: Sequences, Numerical Series, Power Series, Taylor Series

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Por muito tempo, a ideia de soma de infinitos termos para se obter um resultado finito foi considerada impossível. Foi a partir dessa ideia que surgiram os chamados *Paradoxos* [1] *de Zenão*, baseados na noção de movimento e na possibilidade de divisão infinita do tempo e do espaço.

Zenão de Eléia (séc.V a.C.), filósofo grego da escola eleática, foi discípulo de Parmênides e destacou-se sobretudo por seus paradoxos acerca do tempo, com os quais pretendeu refutar a noção de movimento por meio do método de redução ao absurdo (JASPIASSU; MARCONDES, 2006).

Entre os paradoxos de Zenão mais conhecidos está o de Aquiles e a tartaruga. O herói grego, Aquiles, ao apostar uma corrida com a tartaruga, resolve dar-lhe uma vantagem, por ser mais ágil e veloz que ela. Porém, no intervalo de tempo em que Aquiles atinge o ponto em que a tartaruga estava, esta já estará mais adiante (mesmo que a distância que os separa seja cada vez menor), e assim sucessivamente. Conclui-se, então, que Aquiles jamais poderá alcançar a tartaruga, por mais veloz que ele seja.

A solução clássica para esse paradoxo envolve a utilização dos conceitos de limite e convergência de séries numéricas. O paradoxo surge ao se considerar a partição infinita do tempo e do espaço, supondo-se intuitivamente que a soma de infinitos intervalos de tempo é infinita. Dessa forma, seria necessário passar um tempo infinito para Aquiles alcançar a tartaruga e, com a divisão infinitesimal do tempo, a cada "instante" seria impossível haver movimento.

Uma variação do anterior, e também importante obra de Zenão, é o paradoxo da dicotomia[2]. Segundo este, uma pessoa estando a uma distância de 10 m, por exemplo, de uma árvore lança na direção desta uma pedra. Mas para que a pedra atinja a árvore é necessário que antes alcance a primeira metade do percurso e, para isso, levará um tempo finito. Estando a 5 m da árvore,

[1](latim: *paradoxum*) Pensamento que, apesar de aparentemente correto, apresenta uma conclusão ou consequência contraditória, ou em oposição a determinadas verdades aceitas (JASPIASSU; MARCONDES, 2006).

[2](grego: *dichotomia*: divisão em dois, bifurcação) Divisão de uma classe de fenômenos em duas partes, cujas diferenças são contraditórias (JASPIASSU; MARCONDES, 2006).

a pedra deverá primeiro percorrer 2,5 m dessa distância, e a 2,5 m da árvore deverá primeiro atingir a metade do percurso que ainda lhe falta. Usando o mesmo raciocínio, poderíamos dizer que a pedra nunca chegaria a sair da mão da pessoa. Mostraremos, na Seção 2, a solução numérica para este problema.

Estes exemplos envolvem a ideia de séries numéricas infinitas, que serão abordadas na Seção 2 e servirão de base para o desenvolvimento dos conceitos relacionados às séries de potências, que constituem o assunto principal a ser abordado.

A principal aplicação que mostraremos é a aproximação de funções por séries de potências, com o objetivo de facilitar a diferenciação e integração dessas funções. Assim, poderemos usar séries de potências para calcular valores de integrais definidas de funções tais como $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ e $\int_0^1 cos\sqrt{x}dx$, para qualquer precisão exigida. Em meio à teoria, apresentamos também, em forma de exemplos, aproximações de números irracionais tais como π e e. Muitas das aplicações são utilizadas em importantes funções que aparecem na Matemática na e Física, entre outras áreas.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

A questão que norteia essa pesquisa é "quais as aplicações das séries de potências, na Matemática e em outras áreas de conhecimento?". Para respondermos esta questão, devemos primeiro elucidar quais são as características das séries de potências que as tornam um tipo especial de série e as vantagens de sua utilização.

1.1.2 Objetivos Específicos

Como objetivos específicos da presente pesquisa destacamos:

1. Apresentar uma abordagem didática do tema Séries de Potências;
2. Identificar as características e propriedades que tornam as séries de potências semelhantes aos polinômios;
3. Diferenciar séries de potências de séries numéricas;
4. Deduzir as fórmulas de Taylor e de Maclaurin para a representação de funções;
5. Apresentar aplicações das séries de potências na Matemática e na Física.

1.2 JUSTIFICATIVA

As séries de potências são muito semelhantes aos polinômios e podem ser tratadas como funções polinomiais. Estas, por sua vez, são de grande importância para a representação de funções mais complexas, por sua simplicidade algébrica, analítica e gráfica. Diante disso, a pesquisa será realizada com ênfase nas aplicações das séries de potências para a diferenciação e integração de funções de variáveis reais. Trata-se de um estudo bastante significativo e que fornece resultados práticos em diversas áreas das ciências aplicadas.

1.3 ESTRUTURA

Elaboramos uma seção preliminar contendo alguns resultados básicos acerca de sequências e séries numéricas que serão utilizados no desenvolvimento do assunto.

Na Seção 3, abordamos aspectos teóricos por meio de definições, exemplos, teoremas e demonstrações. Definimos Séries de Potências e suas condições de convergência. Tratamos da representação de funções a partir de séries de potências, mostrando as possibilidades de derivação e integração das mesmas. Além disso, apresentamos as séries de Taylor e Maclaurin para a representação de funções.

A Seção 4 é destinada às aplicações das séries de potências na aproximação das funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ por polinômios de Taylor e Maclaurin e na resolução de problemas relacionados à Física.

A última seção apresenta as considerações a respeito de todo o trabalho realizado, suas possíveis contribuições e sugestões de continuação da pesquisa.

2 PRELIMINARES

Antes de iniciarmos o desenvolvimento do assunto principal deste trabalho, traremos alguns resultados e demonstrações acerca do estudo de Sequências e Séries Numéricas a fim de auxiliar o leitor na compreensão de conceitos que serão abordados nos capítulos posteriores.

2.1 SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Definição 2.1 *Uma **sequência** ou **sucessão** a_n é uma função que, a cada inteiro positivo n associa um número a_n.*

A notação a_n (a índice n) é usada para indicar o valor que a sequência assume na posição n. Assim, o número a_1 é chamado *primeiro termo*, a_2 é o *segundo termo* e, em geral, a_n é o *n-ésimo termo* ou *termo geral* da sequência (GUIDORIZZI, 1999). Neste estudo, vamos lidar apenas com sequências infinitas, nas quais cada termo a_n terá sempre um sucessor a_{n+1}.

A sequência $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ pode também ser denotada por

$$\{a_n\} \qquad \text{ou} \qquad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Exemplo 2.1 (Notação de sequências numéricas) *Seja a sequência $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Podemos representá-la utilizando a fórmula para o termo geral: $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, ou ainda, escrevendo seus termos: $\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \cdots, \dfrac{n}{n+1}, \cdots\right\}$.*

Definição 2.2 *Uma sequência $\{a_n\}$ tem **limite** L se para qualquer $\varepsilon > 0$ existir um número $N > 0$, tal que se $n > N$, então $|a_n - L| < \varepsilon$. Neste caso, usamos a notação*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L$$

Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ existir, dizemos que a sequência é **convergente**, caso contrário, a sequência é **divergente**.

As sequências podem ser representadas graficamente plotando os pontos (n, a_n) no plano coordenado. Na Figura 1, os termos a_n aproximam-se arbitrariamente de L conforme n aumenta, logo, ambas convergem para L.

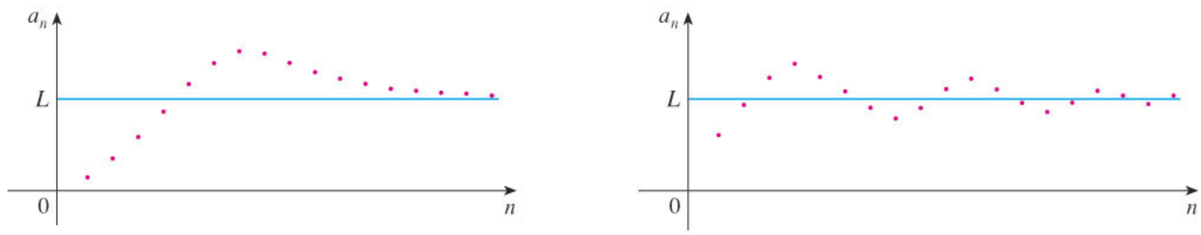


Figura 1: Exemplos gráficos de sequências convergentes

Fonte: (STEWART, 2007)

A inexistência de $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ pode ocorrer em duas situações: quando a sequência oscila ou quando diverge para ∞.

Quando $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ significa que para cada número positivo M existe um inteiro N tal que

$$a_n > M \text{ sempre que } n > N$$

Ou seja, se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, então a sequência é divergente, pois os termos de $\{a_n\}$ tornam-se cada vez maiores. De maneira especial, dizemos que $\{a_n\}$ diverge para ∞.

Numa sequência oscilante, como a representada na Figura 2, conforme n aumenta, os termos se acumulam em dois valores diferentes, no caso -1 e 1. Assim, a sequência não possui limite.

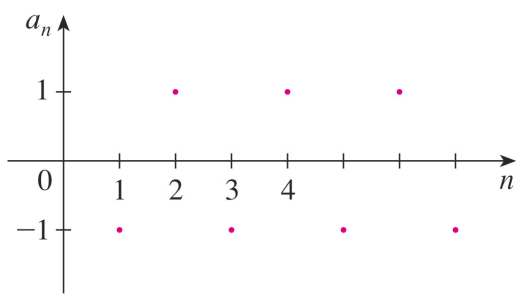


Figura 2: Exemplo gráfico de sequência divergente

Fonte: (STEWART, 2007)

Definição 2.3 *Uma sequência $\{a_n\}$ é dita **crescente** se $a_n \leq a_{n+1}$, para todo n; e **decrescente** se $a_n \geq a_{n+1}$, para todo n.*

*Se uma sequência numérica for crescente ou decrescente ela será ainda chamada **monótona** ou **monotônica**.*

Definição 2.4 *Dizemos que uma sequência $\{a_n\}$ é **limitada inferiormente** se existir um número real m, tal que $a_n \geq m$, para todo natural n. O número m é um **limitante inferior** para $\{a_n\}$.*

*De maneira análoga, uma sequência $\{a_n\}$ é **limitada superiormente** se existir um número real M, tal que $a_n \leq M$, para todo n. O número M é um **limitante superior** para $\{a_n\}$.*

*Uma sequência é **limitada** se, e somente se, for limitada inferiormente e superiormente, ou seja, se existirem m e M reais, de modo que $m \leq a_n \leq M$, para todo n natural.*

Intuitivamente, podemos notar, a partir da Figura 3, que se $\{a_n\}$ for crescente e $a_n \leq M$ para todo n,então os termos são forçados a se aproximar de algum número $L \leq M$.

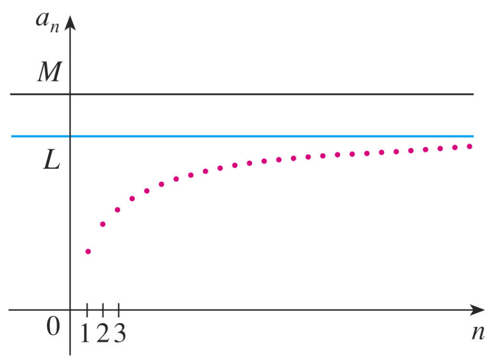


Figura 3: Exemplo de sequência crescente limitada

Fonte: (STEWART, 2007)

Essa ideia é formalizada pelo Axioma do Completamento e o Teorema da Sequência Monotônica dados a seguir.

Axioma 2.1 (Axioma do Completamento) *Todo conjunto não vazio de números reais que tenha um limitante superior, possui um limitante superior mínimo (supremo). Da mesma forma, todo conjunto não vazio de números reais que tenha um limitante inferior, possui um limitante inferior máximo (ínfimo).*

Teorema 2.1 (Teorema da Sequência Monotônica) *Toda sequência monotônica limitada é convergente.*

Demonstração: Suponha que $\{a_n\}$ seja uma sequência crescente. Como $\{a_n\}$ é limitada, existe um limitante superior para a sequência. E pelo Axioma do Completamento, $\{a_n\}$ tem um limitante superior mínimo, que chamaremos L. Dado $\varepsilon > 0, L-\varepsilon$ não poderá ser um limitante superior para a sequência, pois $L-\varepsilon < L$. Assim,para algum inteiro positivo N, tem-se

$$a_N > L-\varepsilon \tag{1}$$

Como $\{a_n\}$ é crescente, se $n \leq N$ então $a_n \leq a_N$. Dessa afirmação e de (1), segue que, para $n \leq N$

$$\begin{aligned} L-\varepsilon < a_N \leq a_n \leq L < L+\varepsilon \\ L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon \\ -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon \\ |a_n - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

Mas, pela Definição 2.2, essa afirmação é a condição para que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Logo, a sequência $\{a_n\}$ é convergente. Do mesmo modo, uma sequência decrescente que é limitada inferiormente é convergente. A demonstração de tal fato é obtida de maneira análoga.

■

2.2 SÉRIES NUMÉRICAS

Da sequência

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

podemos obter uma sequência $\{s_n\}$, por meio da adição de sucessivos termos de $\{a_n\}$:

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots$

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

$\vdots$

Essa nova sequência $\{s_n\}$ é chamada de **série infinita**.

Definição 2.5 *Dada uma sequência numérica $\{a_n\}$, uma expressão da forma*

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

*é chamada de **série infinita** e denotada por*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad ou \qquad \sum a_n$$

*Os números $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ são chamados **termos** da série infinita e os números $s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$ são as **somas parciais** da série.*

Se a sequência das somas parciais $\{s_n\}$ for convergente, ou seja, se $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ existir como um número real, digamos s, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é **convergente** e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

onde o número s é a soma da série.

Mas, se $\{s_n\}$ for divergente, ou seja $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ ou não existir, dizemos que a série é **divergente** e, portanto, não possui soma.

Exemplo 2.2 (Série Geométrica) *Consideremos a série*

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

na qual cada termo é obtido a partir da multiplicação de seu antecessor por uma razão r. Podemos determinar em quais circunstâncias a série converge ou diverge.

Solução: Se $r \neq 1$, temos

$$\begin{aligned} s_n &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \\ rs_n &= ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \end{aligned}$$

Subtraindo rs_n de s_n, obtém-se

$$\begin{aligned} s_n - rs_n &= a - ar^n \\ s_n &= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \end{aligned}$$

Se $-1 < r < 1$, podemos verificar que $r^n \to 0$ quando $n \to \infty$; assim

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

Portanto, quando $|r| < 1$ a série geométrica é convergente e sua soma é dada por $\dfrac{a}{1-r}$.

Se $|r| > 1$, então $r^n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Logo, a série diverge nesse caso.

Considerando agora $|r| = 1$, temos os seguintes casos:

Se $r = 1$, então $s_n = a + a + \cdots + a = na$ cujo limite quando $n \to \infty$ é $\pm\infty$, dependendo do sinal de a. Portanto, a série diverge, nesse caso.

Se $r = -1$, a sequência de somas parciais se alterna entre a e 0, não existindo portanto $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Então, a série também diverge nesse caso.

Resumindo os resultados encontrados, temos que:

A série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \qquad (a \neq 0)$$

é convergente se $|r| < 1$ e, nesse caso, sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

e divergente se $|r| \geq 1$.

$\triangleleft$

Exemplo 2.3 (Paradoxo da Dicotomia) *Para propormos uma solução ao paradoxo da dicotomia, enunciado na introdução deste trabalho, construímos uma série geométrica na qual cada termo é a metade do anterior.*

Solução: Se uma pedra é lançada a uma distância de 10 m de uma árvore e considerando a necessidade de se percorrer primeiro a metade da distância, em seguida a metade da metade que ainda lhe resta para alcançar o objetivo, e assim infinitamente, temos a série

$$\frac{10}{2} + \frac{10}{2^2} + \cdots + \frac{10}{2^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{2^n}$$

com $a = 5$ e $r = \frac{1}{2}$. De acordo com o exemplo anterior, a série dada é convergente e sua soma é

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{5}{1-\frac{1}{2}} = 10$$

O que mostra que, percorrendo infinitas metades, a pedra percorrerá a distância completa para atingir a árvore.

$\triangleleft$

Exemplo 2.4 (Carpete de Sierpinski) *O carpete de Sierpinski*[1] *é um fractal construído pela remoção do subquadrado central de um quadrado de lado 1 dividido em nove subquadrados. A etapa seguinte consiste em remover os subquadrados centrais dos oito quadrados menores que permaneceram, e assim sucessivamente. A Figura 4 apresenta as três primeiras etapas da construção do carpete.*

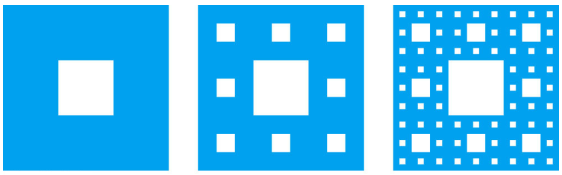


Figura 4: Carpete de Sierpinski

Fonte: (STEWART, 2007)

Podemos mostrar que a soma das áreas dos quadrados removidos é 1, o que implica que o carpete de Sierpinski tem área 0.

Solução: Se a medida dos lados do quadrado original é 1, então, na primeira etapa retira-se um subquadrado de área $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$. Na segunda etapa, a área retirada é $\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 8 = \frac{8}{9^2}$. Na terceira, $\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 8^2 = \frac{8^2}{9^3}$. Repetindo esse processo infinitas vezes, a área retirada do quadrado original pode ser dada pela série geométrica

$$\frac{1}{9} + \frac{8}{9^2} + \frac{8^2}{9^3} + \cdots = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^n$$

cujo primeiro termo é $a = \frac{1}{9}$ e a razão $r = \frac{8}{9}$.

Assim, a soma das áreas retiradas é

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{8}{9}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{9}} = 1$$

[1] Matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969). Fonte: http://ecademy.agnesscott.edu/ lriddle/ifs/siertri/sierbio.htm

ou seja, a área retirada é igual à área do quadrado original. Portanto, o carpete de Sierpinski tem área 0.

$\triangleleft$

Exemplo 2.5 (Série Harmónica) *Podemos mostrar que a série harmônica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

é divergente.

Solução: Observando as somas parciais

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1 \\
s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2} \\
s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{3}{2} \\
s_{16} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{4}{2}
\end{aligned}$$

Podemos verificar que

$$s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$$

Portanto, $s_{2^n} \to \infty$ quando $n \to \infty$ e assim $\{s_n\}$ é divergente. Logo, a série harmônica diverge.[2]

$\triangleleft$

O nome dado à série harmônica é atribuído ao seguinte fato:

> Os termos da série harmônica correspondem aos nós em uma corda vibrando que produzem múltiplos da frequência fundamental. Por exemplo, 1/2 produz o harmônico que é o dobro da frequência fundamental, 1/3 produz uma frequência que é três vezes a frequência fundamental e assim por diante. A frequência fundamental é a nota ou a altura do som mais baixa que ouvimos quando uma corda é tangida (THOMAS, 2003).

[2]O método apresentado para mostrar a divergência da série harmônica deve-se ao estudioso francês Nicole Oresme (1323-1382).

Como ilustração da série harmônica utilizada na música, apresentamos a Figura 5, que mostra as 16 primeiras notas da série iniciada em Do2.

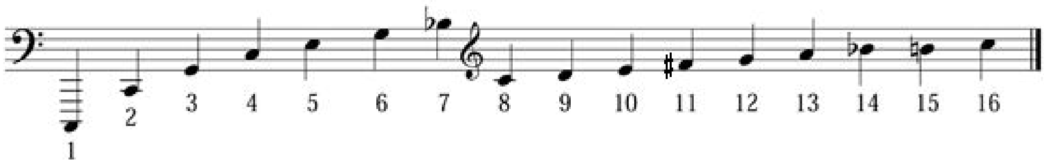


Figura 5: Partitura que representa a Série Harmônica

Fonte: (WIKIPEDIA, 2011)

Exemplo 2.6 (Série Telescópica) [3] *Consideremos a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. *Podemos mostrar que esta série é convergente e determinar sua soma.*

Solução: A n-ésima soma parcial da série é dada por

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Podemos simplificar essa expressão usando a decomposição por frações parciais

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$$

Logo, a série dada é convergente e sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

◁

[3]Trata-se de uma soma que se colapsa em apenas dois termos, devido aos cancelamentos. Por isso, é comparada a um antigo telescópio (STEWART, 2007).

Teorema 2.2 *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *for convergente, então* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demonstração: Seja $\{s_n\}$ a sequência de somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Se tal série é convergente, sabemos que $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ e, também $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$.

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$$

■

É importante notar que a recíproca do Teorema 2.2 não é verdadeira, ou seja, não podemos concluir que se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. É possível uma série divergir mesmo com seu termo geral tendendo a zero.

Mas a contrapositiva do mesmo teorema nos fornece um teste simples para verificar a divergência de uma série.

Teorema 2.3 (Teste do n-ésimo Termo para a Divergência) *Se* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ *ou não existe, então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente.*

A demonstração de tal teorema segue da prova do Teorema 2.2.

Exemplo 2.7 (Teste de Divergência) *A série* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 - n}$ *é divergente, pois*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2 - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = 1 \neq 0$$

2.3 CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA E DIVERGÊNCIA PARA SÉRIES DE TERMOS POSITIVOS

Encontrar a soma exata de uma série é possível em poucos casos, nos quais podemos determinar uma fórmula simples para a enésima soma parcial s_n, como no caso da série geométrica, por exemplo. Os testes a seguir nos permitem verificar se uma série é convergente ou divergente sem encontrar sua soma, mas podendo, em alguns casos, encontrar boas estimativas da mesma.

2.3.1 Teste da Integral

O Teste da Integral faz uso da teoria das integrais impróprias na verificação da convergência ou divergência de uma série de termos positivos (LEITHOLD, 1994).

Teorema 2.4 (Teste da Integral) *Seja $\{a_n\}$ uma sequência de termos positivos. Supomos que exista $f(n) = a_n$, uma função de x, contínua, decrescente e positiva para todo $x \geq N$ (N é um inteiro positivo). Nestas condições, temos:*

1. *Se $\displaystyle\int_N^{+\infty} f(x)dx$ converge, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*
2. *Se $\displaystyle\int_N^{+\infty} f(x)dx$ diverge, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.*

Demonstração: Estabelecemos o teste para o caso de $N = 1$. A prova para o caso de N geral é similar.

De acordo com as condições do teorema, consideramos f uma função decrescente, com $f(n) = a_n$ para todo n. Observando a Figura 6, que representa a situação, vemos que a áreas dos retângulos sombreados correspondem aos valores de f nos extremos direitos de cada intervalo.

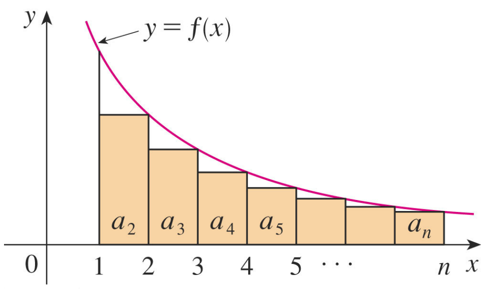


Figura 6: Aproximação da área sob a curva de 1 a n (Por Falta)

Fonte: (STEWART, 2007)

Assim, comparando a área sombreada com a área sob $y = f(x)$, de 1 até n, temos que

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq \int_1^n f(x)dx \tag{2}$$

Do mesmo modo, a Figura 7 mostra que

$$\int_1^n f(x)dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \tag{3}$$

Como $f(x) \geq 0$,

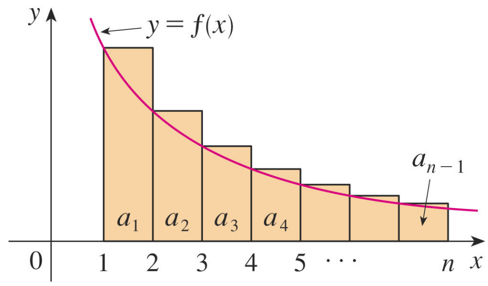


Figura 7: Aproximação da área sob a curva de 1 a n (Por Excesso)

Fonte: (STEWART, 2007)

1. Se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for convergente, então a desigualdade (2) nos fornece

$$\sum_{i=2}^{n} a_i \leq \int_1^{n} f(x)dx \leq \int_1^{\infty} f(x)dx$$

Portanto,

$$s_n = a_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i \leq a_1 + \int_1^{\infty} f(x)dx = M$$

Como $s_n \leq M$ para todo n, a sequência $\{s_n\}$ é limitada superiormente. Além disso, sabemos que

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$$

visto que $a_{n+1} = f(n+1) \geq 0$. Então, $\{s_n\}$ é uma sequência crescente limitada, sendo portanto convergente, de acordo com o Teorema da Sequência Monotônica. Isso significa que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

2. Se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for divergente, então $\int_1^{n} f(x)dx \to \infty$ quando $n \to \infty$, pois $f(x) \geq 0$. Mas a desigualdade (3) fornece

$$\int_1^{n} f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} a_i = s_{n-1}$$

e, dessa forma, $s_{n-1} \to \infty$. Isso implica que $s_n \to \infty$ e assim $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

■

Exemplo 2.8 (Aplicação do Teste da Integral) *Podemos determinar a convergência ou divergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Solução: A função $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ é contínua, positiva e decrescente em $[1, +\infty)$. Assim, o Teste da Integral pode ser aplicado.

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1}x\right]_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(\tan^{-1}b - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Como $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}dx$ é uma integral convergente, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ é convergente.

◁

Exemplo 2.9 (A p-série) *Usando o Teste da Integral, determinaremos para que valores de p a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ *é convergente.*

Solução: Se $p < 0$, então $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p} = \infty$. Se $p = 0$, então $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p} = 1$. Em ambos os casos, a série dada diverge pelo Teste do n-ésimo Termo para a Divergência 2.3.

Se $p > 0$, então a função $f(x) = 1/x^p$ é contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$. Do Exemplo 2.5, sabemos que se $p = 1$, a série diverge. Assim, admitindo que $p \neq 1$, temos

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-p}dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right]\end{aligned}$$

Se $p > 1$, então $p - 1 > 0$; assim, quando $b \to \infty$, $1/b^{p-1} \to 0$. Portanto, se $p > 1$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{p-1}$$

e, nesse caso, a integral converge. Mas, se $p < 1$, então $p - 1 < 0$ e assim, quando $b \to \infty$

$$\frac{1}{b^{p-1}} = b^{1-p} \to \infty$$

e a integral diverge. Aplicando o Teste da Integral e resumindo os resultados encontrados, temos:

A p-série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

◁

Estimativa do Resto para o Teste da Integral

Havendo a possibilidade de usarmos o Teste da Integral para mostrar que uma série é convergente, podemos encontrar uma aproximação para soma s da série. Sabemos que qualquer soma parcial s_n é uma aproximação para s, pois $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Mas, para conhecermos a precisão dessa aproximação, devemos estimar o tamanho do resto (erro cometido ao se utilizar s_n, a soma dos n primeiros termos, como uma aproximação para a soma total):

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

Assumindo que f é decrescente em $[n, \infty)$, partimos da mesma ideia usada no Teste da Integral.

Observando as Figuras 8 e 9, podemos comparar as áreas dos retângulos com a área sob $y = f(x)$, para $x > n$.

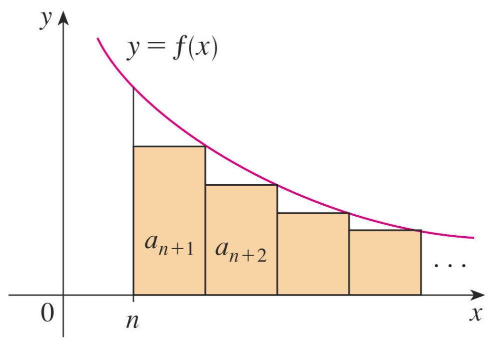


Figura 8: Aproximação da área sob a curva a partir de n **(Por Falta)**

Fonte: (STEWART, 2007)

Na Figura 8, vemos que

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \leq \int_n^\infty f(x)dx$$

Do mesmo modo, a partir da Figura 9, temos

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \geq \int_{n+1}^\infty f(x)dx$$

Combinando esses resultados, obtemos

$$\int_{n+1}^\infty f(x)dx \leq R_n \leq \int_n^\infty f(x)dx$$

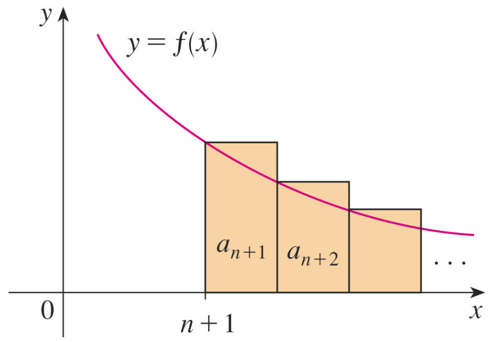


Figura 9: Aproximação da área sob a curva a partir de $n+1$ (Por Excesso)

Fonte: (STEWART, 2007)

Como $R_n = s - s_n$, então

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq s - s_n \leq \int_{n}^{\infty} f(x)dx \tag{4}$$

Adicionando s_n em cada lado das desigualdades em (4), obtemos

$$s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq s \leq \int_{n}^{\infty} f(x)dx + s_n \tag{5}$$

Assim, temos um minorante e um majorante para s. As desigualdades em (5) nos fornece uma aproximação mais precisa para a soma da série do que a soma parcial s_n.

Exemplo 2.10 (Estimativa da soma) *Vamos aproximar a soma da série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ *usando a soma dos dez primeiros termos e estimar o erro envolvido nessa aproximação.*

Solução: Pela soma dos dez primeiros termos da série, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{10^4} \approx 1,0802$$

Sabendo que

$$\int_{n}^{\infty} \frac{1}{x^4}dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{4}{x^3}\right]_n^b = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{4}{b^3} + \frac{4}{n^3}\right] = \frac{4}{n^3}$$

para estimar o erro cometido, usamos

$$R_{10} \leq \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^4}dx = \frac{4}{10^3}$$

Nesse caso, o tamanho do erro cometido em tal aproximação é, no máximo, $0,004$.

Se quisermos ainda determinar a quantidade de termos necessários para garantir que a aproximação tenha precisão de cinco casas decimais, por exemplo, devemos encontrar o valor de n, tal que $R_n < 10^{-5}$.

Como

$$R_n \leq \int_n^\infty \frac{1}{x^4}dx = \frac{4}{n^3}$$

queremos

$$\frac{4}{n^3} < 10^{-5}$$

ou seja,

$$n^3 > 40000 \Rightarrow n > 73,7$$

Logo, seriam necessários no mínimo 74 termos para se garantir uma precisão de cinco casas decimais.

$\triangleleft$

2.3.2 Teste de Comparação

Para aplicarmos o Teste de Comparação devemos utilizar séries cuja convergência ou divergência conhecemos, comparando-as com a série a ser testada.

Teorema 2.5 (Teste de Comparação) *Sejam* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*, séries de termos positivos, tais que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$*, para todo* $n > N$.

Nestas condições,

1. *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *for convergente, então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *será convergente.*
2. *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *for divergente, então* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *será divergente.*

Demonstração: Sejam $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$ e $t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

1. Como ambas a séries contêm termos positivos, as sequências $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ são crescentes. Além disso, $t_n \to t$, assim $T_n \leq t$ para todo n. Como $a_i \leq b_i$, temos $s_n \leq t_n$. Então, $s_n \leq t$ para todo n. Isso significa que $\{s_n\}$ é crescente e limitada superiormente e, portanto, converge pelo teorema da Sequência Monotônica. Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

2. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for divergente, então $s_n \to \infty$ (pois $\{s_n\}$ é crescente). Mas $s_n \leq t_n$, logo, $t_n \to \infty$. Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

■

Exemplo 2.11 (Aplicação do Teste de Comparação) *Vamos determinar se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2+3^n}$ *é convergente ou divergente.*

Solução: Comparando a série dada com a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ cuja razão é $\frac{1}{3}$ e que, portanto, é convergente, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2+3^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$$

Logo, pela parte *1* do Teste de Comparação, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2+3^n}$ é convergente.

$\triangleleft$

2.3.3 Teste de Comparação do Limite

Encontrar a série para comparação nem sempre é possível de forma direta. O teorema a seguir, conhecido como Teste de Comparação do Limite, é consequência do Teorema 2.5 e é usualmente mais fácil de ser aplicado (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007).

Teorema 2.6 (Teste de Comparação do Limite) *Sejam* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *duas séries de termos positivos. Se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

onde $L > 0$ *é finito, então ambas as séries convergem, ou ambas divergem.*

Demonstração: Sejam m e M números positivos tais que $m < L < M$. Como a_n/b_n se aproxima de L conforme n aumenta, existe um inteiro N tal que

$$n > N \Rightarrow m < \frac{a_n}{b_n} < M$$

e assim,

$$n > N \Rightarrow mb_n < a_n < Mb_n$$

Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergir, então $\sum_{n=1}^{\infty} Mb_n$ converge. Assim, pela parte *1* do Teste de Comparação, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge. Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergir, então $\sum_{n=1}^{\infty} mb_n$ também diverge. Dessa forma, pela parte *2* do Teste de Comparação, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

■

Exemplo 2.12 (Aplicação do Teste de Comparação do Limite) *Vamos determinar se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ *converge ou diverge.*

Solução: Tomando

$$a_n = \frac{1}{2^n - 1} \qquad \text{e} \qquad b_n = \frac{1}{2^n}$$

podemos notar que o Teste de Comparação (Teorema 2.5) não seria aplicável a este caso. Pois $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ é convergente (série geométrica com $r = 1/2 < 1$), mas

$$\frac{1}{2^n - 1} > \frac{1}{2^n}$$

Usando então o Teste de Comparação do Limite, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(2^n - 1)}{1/2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = 1 > 0$$

Como esse limite existe e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ é convergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ também é convergente.

◁

2.3.4 Teste da Razão

O Teste da Razão examina a taxa de crescimento (ou decrescimento) de uma série por meio da razão a_{n+1}/a_n. Para uma série geométrica $\sum ar^n$, por exemplo, essa taxa é uma constante $(ar^{n+1})/(ar^n) = r$, e a série converge se, e somente se, sua razão for menor que 1 em valor absoluto. Neste sentido, o Teste da Razão permite estender esse resultado para outros tipos de série (THOMAS, 2003).

Teorema 2.7 (Teste da Razão) *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série com termos positivos e suponha que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

1. *Se* $L < 1$*, então a série converge.*

2. *Se* $L > 1$ *ou* $L = +\infty$*, então a série diverge.*

3. *Se* $L = 1$*, nenhuma conclusão pode ser tirada sobre a convergência ou divergência da série.*

Demonstração:

1. Se $L < 1$, podemos escolher um número r tal que $L < r < 1$.

   Como
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \qquad \text{e} \qquad L < r$$
   então, existe um inteiro N tal que
   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r \qquad \text{sempre que} \qquad n \geq N$$
   ou equivalentemente,
   $$a_{n+1} < a_n r \qquad \text{se} \qquad n \geq N \tag{6}$$
   Fazendo $n = N, N+1, N+2, \cdots$ em (6), obtemos
   $$\begin{aligned} a_{N+1} &< a_N r \\ a_{N+2} &< a_{N+1} r < a_N r^2 \\ a_{N+3} &< a_{N+2} r < a_N r^3 \end{aligned}$$
   De maneira geral,
   $$a_{N+k} < a_N r^k \qquad \text{sempre que} \qquad n \geq N \tag{7}$$
   Vemos, então, que a série
   $$\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k} r^k = a_N r + a_N r^2 + a_N r^3 + \cdots$$
   é convergente, pois é uma série geométrica com $0 < r < 1$. Assim, da desigualdade (7) e

do teste de Comparação, a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k} = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \cdots$$

também é convergente. Segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, pois um número finito de termos não afeta a convergência.

2. Se $a_{n+1}/a_n \to L > 1$ ou $a_{n+1}/a_n \to \infty$, então existe um inteiro N tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \qquad \text{sempre que} \qquad n \geq N$$

Isto significa que $a_{n+1} < a_n$ quando $n \geq N$, e assim,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

Nesse caso, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, pelo Teste de Divergência.

3. Se $L = 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pode convergir ou divergir. Basta tomarmos como exemplo as séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} \to 1$ quando $n \to \infty$.

Para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 1$ quando $n \to \infty$.

No entanto, a primeira série diverge, enquanto a segunda converge.

■

Exemplo 2.13 (Aplicação do Teste da Razão) *Vamos determinar a convergência ou divergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty} n!e^{-n}$, *utilizando o Teste da Razão.*

Solução: Temos

$$a_n = \frac{n!}{e^n} \qquad \text{e} \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{e^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{e^{n+1}} \frac{e^n}{n!} = \frac{(n+1)n!}{en!} = \frac{n+1}{e}$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{e}=+\infty$$

Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} n!e^{-n}$ é divergente.

◁

2.3.5 Teste da Raiz

O Teste da Raiz é uma ferramenta útil para se verificar a convergência de séries de termos não negativos quando lidamos com potências de n

Teorema 2.8 (Teste da Raiz) *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série com $a_n \geq 0$ para todo $n \geq N$ e suponha que*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$$

Então,

1. *Se $L<1$, a série converge.*
2. *Se $L>1$, a série diverge.*
3. *Se $L=1$, o teste é inconcludente.*

Demonstração:

1. Se $L<1$, então, como na demonstração do teste da razão, escolhemos r e N, de modo que $R<1$ e

$$\sqrt[n]{a_n}<r \qquad \text{sempre que} \qquad n\geq N$$

Disso resulta que

$$a_n<r^n \qquad \text{sempre que} \qquad n\geq N$$

Assim, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge por comparação com a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$

2. Se $L>1$, então

$$\sqrt[n]{a_n}>1 \qquad \text{para} \qquad n\geq N$$

desse modo, $a_n > 1$ e o termo geral não converge para zero. Portanto, a série diverge.

3. Para $L = 1$, usamos o exemplo da p-série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p/n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{e^{(p/n)\ln n}}} = \frac{1}{e^0} = 1$$

pois $(1/n)\ln n \to 0$ quando $n \to \infty$. E essa série pode convergir se $p > 1$ ou divergir se $p \leq 1$.

Portanto, o Teste da Raiz não fornece nenhuma informação quando $L = 1$.

■

Exemplo 2.14 (Aplicação do Teste da Raiz) *Testar a convergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^n$

Solução: Neste caso, temos

$$a_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^n \qquad \text{e} \qquad \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

Logo, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = 0 < 1$.

Portanto, pelo Teste da Raiz, a série é convergente.

◁

2.4 SÉRIES ALTERNADAS

Definição 2.6 *Uma série é alternada quando seus termos são alternadamente positivos e negativos.*

As séries alternadas podem ter as seguintes formas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n + \cdots$$

ou

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^n a_n + \cdots$$

2.4.1 Teste da Série Alternada

O Teorema da Série Alternada é também conhecido como Teorema de Leibnitz, por ter sido formulado por ele em 1705 (LEITHOLD, 1994). O teste diz que, se os termos de uma série alternada decrescem em valor absoluto em direção a zero, então a série converge.

Teorema 2.9 (Teste da Série Alternada) *Se a série alternada*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n + \cdots \qquad (a_n > 0)$$

satisfizer as condições:

1. $a_{n+1} \leq a_n$*, para todo* $n \geq N$*, para algum* N *inteiro*
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

então a série é convergente.

Demonstração: Seja $s_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_n$. Então, $s_1 = a_1, s_2 = a_1 - a_2 < s_1, s_3 = s_1 - (a_2 - a_3) < s_1$ e $s_2 < s_3 < s_1$. Raciocinando desse modo, concluímos que

$$s_1 > s_3 > s_5 > s_7 > \cdots > s_6 > s_4 > s_2$$

como ilustrado na Figura 10.

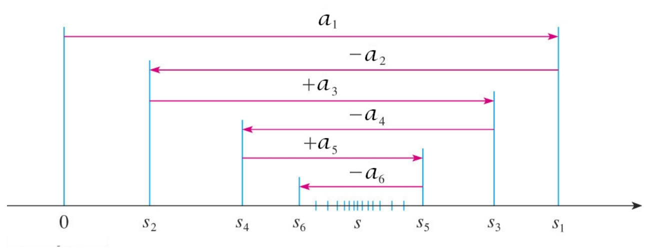


Figura 10: Convergência de Séries Alternadas
Fonte: (STEWART, 2007)

Portanto, as somas parciais impares formam uma sequência limitada, monótona decrescente, enquanto as somas parciais pares formam uma sequência limitada monótona crescente. Pelo Teorema da Sequência Monotônica, ambas as sequências convergem, digamos que

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = S^* \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} s_{2n} = S^{**}$$

Temos ainda que

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = S^* - S^{**}$$

Mas, pela condição 2, para que a série seja convergente, esse limite deve ser 0 e, desse modo, $S^* = S^{**}$. Como as somas parciais pares e ímpares convergem para o mesmo valor, conclui-se que a série alternada é convergente sob as condições do teorema.

∎

Teorema 2.10 (Estimativa do Resto para Série Alternada) *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *for uma série alternada convergente, então*

$$|R_n| = |s - s_n| \leq a_{n+1}$$

Demonstração: Sabemos pela prova do Teste da Série Alternada que s está entre duas somas parciais consecutivas quaisquer s_n e s_{n+1}. Segue que

$$|s - s_n| \leq |s_{n+1} - s_n| = a_{n+1}$$

∎

2.4.2 Convergência Absoluta e Condicional

Definição 2.7 *Dizemos que uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é* ***absolutamente convergente*** *se a série de valores absolutos correspondente,* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, *é convergente.*

Exemplo 2.15 (Convergência Absoluta) *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+2n+1}$ *é absolutamente convergente.*

Solução: Utilizando o Teste de Comparação, temos que a série de valores absolutos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+1}$ é menor que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (que é convergente).

Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+1}$ converge, o que implica na convergência absoluta da série alternada dada no exemplo.

◁

Definição 2.8 *Uma série que é convergente, mas não absolutamente convergente, é denominada* ***condicionalmente convergente****.*

Exemplo 2.16 (Convergência Condicional) *A série* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1+n}{n^2}$ *converge condicionalmente.*

Solução: Pelo Teste da Série Alternada, vemos que a série dada é convergente, pois

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\right)=0$$

Porém, usando a série de valores absolutos e o Teste de Comparação de séries,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\right)$ também é. Logo, a série converge, mas não absolutamente.

$\triangleleft$

3 SÉRIES DE POTÊNCIAS

A principal razão para o desenvolvimento da teoria da seção anterior é a representação de funções como séries de potências, isto é, séries cujos termos contêm potências de uma variável.

Definição 3.1 *Uma **série de potências** é uma série de termos variáveis da forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{1}$$

*na qual x é variável e os termos a_n são constantes chamadas **coeficientes** da série.*

Para cada x fixado, a série (1) é uma série de constantes que podemos testar para a convergência ou divergência. Uma série de potências pode convergir para alguns valores de x e divergir para outros.

Por exemplo, considerando $a_n = 1$ para todo n, a série de potências se torna a série geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

que converge quando $-1 < x < 1$ e diverge quando $|x| \geq 1$ (conforme o Exemplo 2.2).

A expressão $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é comparada a um polinômio, pois trata-se de uma soma de coeficientes multiplicados por potências de x, mas polinômios têm graus finitos e não divergem para nenhum valor de x. De acordo com Thomas (2003, p. 53), assim como uma série de constantes não é uma mera soma, também uma série de potências de x não é um mero polinômio.

Definição 3.2 *De maneira geral, uma expressão da forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots \tag{2}$$

*é uma **série de potências centrada em** $x = a$. O termo $a_n(x-a)^n$ é o **n-ésimo termo** e o número a é o **centro**.*

Quando estabelecemos que $x = 0$ na expressão

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

obtemos a_0 à direita mas $a_0 \cdot 0^0$ à esquerda. Como 0^0 representa uma indeterminação, ocorre uma falha na notação, a qual será desconsiderada.

O mesmo ocorre em $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ quando estabelecemos que $x = a$. Em ambos os casos todos os termos são 0 para $n \geq 1$, assim a série de potências sempre converge para a_0 quando $x = a$. Mas precisamos determinar, de maneira geral, as condições de convergência para esse tipo de série. Para isso, os teoremas a seguir são indispensáveis.

Teorema 3.1 *Se uma série de potências $\sum a_n x^n$ for convergente para $x = x_1$ (com $x_1 \neq 0$), então ela será absolutamente convergente para todos os valores de x para os quais $|x| < |x_1|$.*

Demonstração: Se $\sum a_n x_1^n$ for convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0$. De acordo com a Definição 2.2, tomando $\varepsilon = 1$, existe um inteiro positivo N tal que

$$\text{se } n > N \text{ então } |a_n x_1^n| < 1$$

Assim, para $n > N$ e se $|x| < |x_1|$,temos

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_1^n \frac{x^n}{x_1^n} \right| = |a_n x_1^n| \left| \frac{x}{x_1} \right|^n < \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \tag{3}$$

A série $\sum\limits_{n=N}^{\infty} \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$ é uma série geométrica convergente, com $r = |x/x_1| < 1$. Logo, por (3) e pelo Teste de Comparação, a série $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n x^n|$ também converge. Assim, a série $\sum a_n x^n$ é absolutamente convergente para todos os valores de x tais que $|x| < |x_1|$.

■

Teorema 3.2 *Se uma série de potências $\sum a_n x^n$ for divergente para $x = x_2$ ($x_2 \neq 0$), ela será divergente para todos os valores de x para os quais $|x| > |x_2|$.*

Demonstração: Suponhamos que a série de potências seja convergente para algum número x para o qual $|x| > |x_2|$. Então, pelo Teorema 3.1, a série deve convergir para $x = x_2$, o que contradiz a hipótese. Logo, a série de potências dada é divergente para todos os valores de x tais que $|x| > |x_2|$.

∎

Teorema 3.3 (Estudo da Convergência para Séries de Potências) *Existem apenas três possibilidades para uma série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$*, com relação à convergência.*

1. *A série converge apenas quando* $x = 0$.

2. *A série converge para todo* x.

3. *Existe um número positivo* R *tal que a série converge se* $|x| < R$ *e diverge se* $|x| > R$.

Demonstração: Se fizermos $x = 0$ na série de potências dada, teremos $a_0 + 0 + 0 + \cdots$, que claramente é convergente. Assim, como visto anteriormente, toda série da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge quando $x = 0$. Se esse for o único valor de x para o qual a série converge, então a afirmação *1* é válida.

Suponhamos que a série dada seja convergente para $x = x_1$ ($x_1 \neq 0$). Segue do Teorema 3.1 que a série é absolutamente convergente para todos os valores de x para os quais $|x| < |x_1|$. Se não existir nenhum valor de x para o qual a série dada seja divergente, então a afirmação *2* é válida.

Mas se a série dada for convergente para $x = x_1$, com $x_1 \neq 0$ e, divergente para $x = x_2$, tal que $|x_2| > |x_1|$, do Teorema 3.2 segue que a série é divergente para todos os valores de x tais que $|x| > |x_2|$. Logo, $|x_2|$ é um limitante superior para o conjunto dos valores de $|x|$ para os quais a série é absolutamente convergente. Então, pelo Axioma do Completamento (2.1) esse conjunto de números tem um limitante superior mínimo, que é o número R da afirmação *3*. Isso completa a demonstração de que apenas uma das afirmações é válida.

∎

Assim, de forma geral, podemos determinar as condições de convergência para a série de potências centrada em $x = a$.

Teorema 3.4 (Estudo da Convergência para Séries de Potências centradas em $x = a$**)** *Para uma série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$*, existem apenas três possibilidades com relação à convergência.*

1. *A série converge apenas quando* $x = a$.

2. *A série converge para todo* x.

3. Existe um número positivo R tal que a série converge se $|x-a| < R$ e diverge se $|x-a| > R$.

Demonstração: Fazendo a mudança de variável $u = x - a$, a série de potências se torna $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$, e nesse caso, podemos aplicar o teorema anterior.

No caso *1*, quando $u = 0$, temos $x = a$. No caso *2*, todos os valores de u implicam em todos os valores de x, já que u e a são reais. Por fim, no caso *3*, a convergência para $|u| < R$ acarreta a convergência para $|x - a| < R$ enquanto a divergência para $|u| > R$ implica a divergência para $|x - a| > R$.

■

O número R é o **raio de convergência** e o conjunto de todos os valores de x para os quais a série converge é chamado de **intervalo de convergência** da série de potências.

Considerando o Teorema 3.4, no caso *1*, $R = 0$ e portanto o intervalo de convergência consiste apenas no ponto a. No caso *2*, $R = \infty$, o que nos fornece o intervalo $(-\infty, +\infty)$ para a convergência da série. Se $0 < R < \infty$, a desigualdade $|x - a| < R$, no caso *3*, pode ser reescrita como $a - R < x < a + R$. Em cada extremo do intervalo de convergência, isto é, quando $x = a \pm R$, a série pode ou não convergir. Por isso, a convergência deve ser testada separadamente em cada um desse pontos.

Em geral, o Teste da Razão (e algumas vezes o Teste da Raiz) é usado para determinar o raio de convergência. Para testar a convergência nos extremos do intervalo os testes da Razão e da Raiz não permitem tirar nenhuma conclusão, nesse caso, deve-se usar outros tipos de testes como o de Comparação, o da Integral ou da Série Alternada, por exemplo.

Exemplo 3.1 (Raio e Intervalo de convergência) *Vamos determinar todos os valores de x para os quais a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ *é convergente.*

Solução: Utilizando o Teste da Razão para convergência absoluta, temos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = |x|$$

Para que a série convirja, é necessário que $|x| < 1$. Assim, temos uma série de potências centrada em $x = 0$ com raio de convergência $R = 1$.

Para os valores extremos do intervalo ($x = \pm 1$), a convergência deve ser testada separadamente, e com outro tipo de teste, já que o Teste da razão é inconcludente neste caso.

Se $x = -1$, a série se torna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

que converge, pelo Teste da Série Alternada.

Se $x = 1$, obtemos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$$

que é uma p-série com $p = 1/2 < 1$ e, portanto, é divergente (Exemplo 2.9).

Logo,o intervalo de convergência da série dada é $[-1, 1)$.

$\triangleleft$

3.1 REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES POR SÉRIES DE POTÊNCIAS

Uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ define uma função f cujo domínio é o intervalo de convergência da série (SWOKOWSKI, 1994).

Tomemos como exemplo a série geométrica com $a_n = 1$ e $r = x$. Pelo Exemplo 2.2, a série converge para a soma $\frac{1}{1-x}$, se $|x| < 1$. Isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} \qquad |x| < 1 \tag{4}$$

A Figura 11 apresenta os gráficos de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ e de algumas somas parciais da série (4). Como a soma de uma série é o limite da sequência de somas parciais, temos

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n \to \infty} s_n(x)$$

onde

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

é a n-ésima soma parcial.

Podemos notar que, conforme n aumenta, $s_n(x)$ se torna uma melhor aproximação de $f(x)$ no intervalo $(-1, 1)$. Portanto, a série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ representa a função f, tal que $f(x) = \frac{1}{1-x}$, se $|x| < 1$.

A partir da série (4), podemos obter outras séries de potências cujas somas podem ser determinadas e que representam a função f no intervalo de convergência da série.

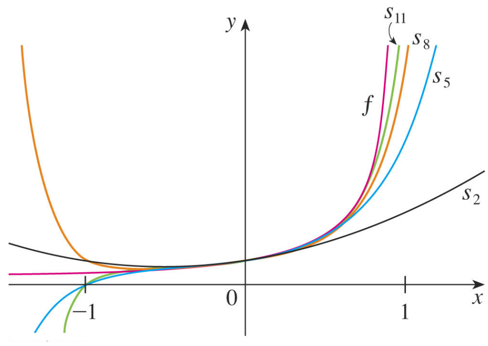


Figura 11: Gráfico de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ e algumas aproximações polinomiais

Fonte: (STEWART, 2007)

Se, em (4), x for substituído por $-x$, teremos

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \frac{1}{1+x} \qquad |x| < 1$$

Se $x = -x^2$ na série (4), teremos

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1+x^2} \qquad |x| < 1 \tag{5}$$

Assim, dizemos que se uma função f é representada por uma série de potências de x, então

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

para todo x no intervalo de convergência da série. A função f possui propriedades análogas às das funções polinomiais (SWOKOWSKI, 1994). Especificamente, trataremos da derivação e integração de tais funções, cujas representações em séries de potências se obtém diferenciando ou integrando cada termo da série $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Teorema 3.5 *Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências cujo raio de convergência é $R > 0$, e seja f definida por*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

para todo x no intervalo de convergência. Então,

1. *f é diferenciável (e portanto contínua) para todo x no intervalo aberto $(-R, R)$ e*

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

2. *f é integrável em todo subintervalo fechado de $(-R,R)$ e*

$$\int_0^x f(t)dt = a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

A prova deste teorema é apresentada no Apêndice B. Resultados análogos valem para funções representadas por séries de potências da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$. As séries obtidas por diferenciação em *1* ou integração em *2* no Teorema 3.5 têm o mesmo raio de convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$. Porém, a convergência nos extremos $x = R$ e $x = -R$ do intervalo pode se modificar, exigindo, nesse caso, investigação especial.

Exemplo 3.2 (Diferenciação de Séries de Potências) *Utilizando a diferenciação termo a termo, podemos mostrar que a série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ representa $f(x) = e^x$ em toda a reta real.*

Solução: Inicialmente, aplicamos o Teste da Razão para verificar a convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| \\
&= |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} \\
&= 0 < 1
\end{aligned}$$

Portanto, a série dada é absolutamente convergente para todos os valores de x.

Denotando por f a função definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{6}$$

o domínio de f será o conjunto de todos os números reais, pois o intervalo de convergência da série é $(-\infty,+\infty)$. Segue da parte *1* do Teorema 3.5 que para todo x real,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Isto é, $f'(x) = f(x)$ para todo x.

Assim, a função f satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = y$$

a qual tem como solução geral $y = Ce^x$. Logo, para alguma constante C, $f(x) = Ce^x$. De (6), $f(0) = 1$, portanto $C = 1$.

Assim, concluímos que

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$\triangleleft$

Exemplo 3.3 (Integração de Séries de Potências) *Vamos encontrar uma representação em série de potências para $f(x) = \tan^{-1} x$.*

Solução: Sabemos que $\tan^{-1} x = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$.

Usando a série de potências encontrada na equação (5), se $|x| < 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\tan^{-1} x = \int \frac{1}{x^2+1} dx &= \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \\
&= \int \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots\right) dx \\
&= C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots
\end{aligned}$$

Para encontrar o valor de C, fazemos $x = 0$ e obtemos $C = \tan^{-1} 0 = 0$. Portanto,

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$\triangleleft$

Embora fique provado que o intervalo de convergência para a série de potências que representa $\tan^{-1} x$ seja $-1 < x < 1$ (pois é o intervalo de convergência da série para $1/(x^2+1)$), ela também converge para $x = \pm 1$ (STEWART, 2007). Podemos notar que quando $x = 1$ a série torna-se

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Esse resultado é conhecido como fórmula de Leibnitz para π.

Exemplo 3.4 *Vamos aproximar o valor da integral $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, com uma precisão de três casas decimais.*

Solução: Vimos no Exemplo 3.2 que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, substituindo x por $-x^2$, temos

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

Aplicando o Teorema 3.5,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{-x^2}dx &= \int_0^1 \left(1-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{3!}+\cdots\right)dx = \left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\cdots\right]_0^1 \\
&= 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\frac{1}{1320}+\cdots \\
&= 1-0,3333+0,1-0,0238+0,0046-0,0007+\cdots
\end{aligned}$$

Essa é uma série alternada com $a_{n+1} < a_n$ em valor absoluto e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Portanto, a série converge, pelo Teorema da Série Alternada. Aplicando o Teorema 2.10, se usarmos os cinco primeiros termos para aproximar a soma, o erro será menor que o valor absoluto do sexto termo. Dos cinco primeiro termos, obtemos

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 0,7475$$

com precisão de três casas decimais.

$\triangleleft$

3.2 SÉRIES DE TAYLOR E DE MACLAURIN

Considerando sucessivas aplicações do Teorema 3.5, dentro de seu intervalo de convergência, uma série de potências representa uma função contínua com derivadas de todas as ordens. Agora, verificaremos que condições são suficientes para que uma função f admita uma representação em série de potências e como encontrar tal representação. Consideremos inicialmente que f seja uma função que possa ser representada por uma série de potências

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots \qquad |x-a| < R$$

com raio de convergência $R > 0$. Aplicando repetidamente a derivação termo a termo dentro do intervalo de convergência, obtemos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots + na_n(x-a)^{n-1} + \cdots \\
f''(x) &= 2a_2 + 2\cdot 3a_3(x-a) + 3\cdot 4a_4(x-a)^2 + \cdots + (n-1)na_n(x-a)^{n-2} + \cdots \\
f'''(x) &= 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4(x-a) + 3\cdot 4\cdot 5a_5(x-a)^2 + \cdots + (n-2)(n-1)na_n(x-a)^{n-3} + \cdots \\
f^{(iv)}(x) &= 2\cdot 3\cdot 4a_4 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a_5(x-a) + \cdots + (n-3)(n-2)(n-1)na_n(x-a)^{n-4} + \cdots
\end{aligned}$$

Substituindo $x = a$ nas equações acima, temos

$$\begin{aligned} f'(a) &= a_1 \\ f''(a) &= 2a_2 \\ f'''(a) &= 3!a_3 \\ f^{(iv)}(a) &= 4!a_4 \end{aligned}$$

e, em geral,

$$f^{(n)}(a) = n!a_n$$

Isso nos revela um padrão para os coeficientes de qualquer série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ que convirja para os valores de f no intervalo de convergência. Portanto, se existir essa série, ela será única e seus coeficientes serão da forma

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Assim, a representação de f em série de potências será

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Definição 3.3 (Série de Taylor) *Seja f uma função com derivadas de todas as ordens em algum intervalo contendo a como um ponto interior. Então, a* ***série de Taylor gerada por f em $x = a$*** *é*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

A série de Taylor recebeu este nome em homenagem ao matemático inglês Brook Taylor (1685-1731), que publicou suas descobertas sobre séries em 1715 no livro *Metodus incrementorum directa et inversa*, embora esse estudo tenha sido realizado anteriormente por outros matemáticos como Newton, Gregory e Bernoulli (STEWART, 2007). Para o caso especial $a = 0$, o qual surge com frequência, a série de Taylor se torna a chamada *Série de Maclaurin*.

Definição 3.4 (Série de Maclaurin) *A série de Taylor gerada por f em $x = 0$ é*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

conhecida como ***série de Maclaurin gerada por f***.

Apesar de ser um caso particular da série de Taylor, a série de Maclaurin recebeu essa denominação em referência ao matemático escocês Colin Maclaurin (1698-1746), que a popularizou em seu livro *Treatise of Fluxions*, publicado em 1742 (STEWART, 2007).

Exemplo 3.5 (Série de Maclaurin) *Mostraremos que o desenvolvimento da função exponencial em série de potências (dado no Exemplo 3.2)*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{7}$$

é a série de Maclaurin para e^x.

Solução: De fato, se $f(x) = e^x$, então $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo x; logo $f^{(n)}(0) = 1$ para todo n. Da Definição 3.4, obtemos a série de Maclaurin para e^x

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

que é a mesma série dada anteriormente.

$\triangleleft$

Nesse sentido, podemos deduzir que a representação de uma função em série de potências é única. Portanto, a série de Taylor para uma função não precisa ser obtida a partir da Definição 3.3, qualquer método que resulte em uma série em $x-a$ será a série de Taylor da função em a.

Exemplo 3.6 (Série de Taylor) *Para encontrar a série de Taylor para e^x em a, podemos escrever $e^x = e^a e^{x-a}$ e usar a série (7) substituindo x por $x-a$. Assim obtemos*

$$e^x = e^a \left[1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} + \cdots \right]$$

Vemos assim que, se uma função admite representação em série de potências, independente do método usado para sua obtenção, a série resultante será sua série de Taylor ou de Maclaurin. Mas ainda precisamos determinar que condições garantem a existência de um desenvolvimento de uma função em série de potências. Isso porque nem sempre uma série convergente representa a função para todos os valores de x no intervalo de convergência.

Exemplo 3.7 *Seja f a função definida por*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \ \text{se } x \neq 0 \\ 0 \ \text{se } x = 0 \end{cases}$$

A série de Maclaurin para f converge para todos os valores de x, mas representa $f(x)$ somente se $x = 0$.

Solução: Para determinarmos a série de Maclaurin para f, calculamos $f'(0)$ usando a definição de derivada.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x^2}}$$

Como $\lim_{x\to 0}(1/x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0} e^{1/x^2} = +\infty$, aplicamos a regra de L'Hôpital. Assim,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{x^2}}{e^{1/x^2}\left(-\frac{2}{x^3}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2e^{1/x^2}} = 0$$

Da mesma forma, obtemos $f^{(n)}(0) = 0$ para todo n. Logo, a série de Maclaurin para a função dada é $0+0+0+\cdots+0+\cdots$, que obviamente converge para 0 para todo x. Contudo, se $x \neq 0$, temos $f(x) = e^{-1/x^2} \neq 0$. Portanto, a série representa a função f apenas se $x = 0$.

$\triangleleft$

Como foi visto na seção anterior, para qualquer série convergente, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

significa que $f(x)$ é o limite da sequência de somas parciais dessa série. No caso da série de Taylor, as somas parciais são

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Este polinômio T_n é chamado de **polinômio de Taylor de ordem** n gerado por f em $x = a$.

Exemplo 3.8 *Para a função exponencial $y = e^x$, o polinômio de Taylor de ordem n em $x = 0$ (ou polinômio de Maclaurin) é: $T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$.*

Observando os polinômios

$$\begin{aligned} T_1(x) &= 1+x \\ T_2(x) &= 1+x+\frac{x^2}{2!} \\ T_3(x) &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!} \end{aligned}$$

na Figura 12, percebe-se que conforme n aumenta, $T_n(x)$ torna-se mais próximo de $y = e^x$.

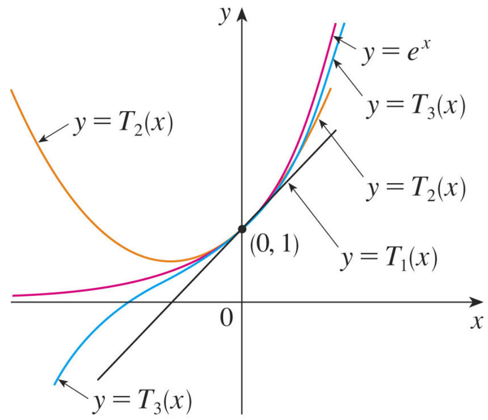


Figura 12: Gráfico de $y = e^x$ e aproximações $T_n(x)$

Fonte: (STEWART, 2007)

Portanto, uma função f pode ser representada por sua série de Taylor se

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

Sendo $R_n(x)$ o **resto** associado à aproximação do valor de uma função $f(x)$ por seu polinômio de Taylor $T_n(x)$, então

$$R_n(x) = |f(x) - T_n(x)|$$

Uma maneira de estimar o **resto** ou **erro** associado a uma aproximação é dada no teorema a seguir.

Teorema 3.6 (Teorema de Taylor) *Se f for uma função derivável até a ordem $n+1$ em um intervalo aberto I contendo a, então para cada x em I existe um número c entre x e a tal que*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

onde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}$$

Se $R_n(x) \to 0$ quando $n \to \infty$ para todo x em I, temos

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty}[f(x) - R_n(x)] = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x)$$

Assim, podemos afirmar que a função f é representada por sua série de Taylor, para todo x no intervalo de convergência. Muitas vezes, ao aplicar o Teorema 3.6, precisamos usar o fato de que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \text{ para todo número real } x \tag{8}$$

Esse resultado segue do Exemplo 3.2, no qual provamos que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge para todo x, assim seu n-ésimo termo tende a zero.

4 APLICAÇÕES DAS SÉRIES DE POTÊNCIAS

Inicialmente, abordaremos as aplicações das séries de potências na resolução de problemas da própria Matemática, como a aproximação das funções seno e cosseno da trigonometria circular e da hiperbólica por polinômios e a integração de funções cujas antiderivadas não são obtidas de maneira analítica.

Em seguida, apresentaremos dois problemas relacionados à Física nos quais a utilização de polinômios de Taylor torna a resolução mais fácil, permitindo uma aproximação satisfatória.

4.1 APROXIMAÇÃO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS BÁSICAS

Usaremos a série de Maclaurin para representar a função $\operatorname{sen} x$ por um polinômio. Para isso, devemos encontrar as derivadas da função em $x = 0$.

$$\begin{array}{lcl} f(x) = \operatorname{sen} x & \Rightarrow & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & \Rightarrow & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\operatorname{sen} x & \Rightarrow & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & \Rightarrow & f'''(0) = -1 \\ f^{(iv)}(x) = \operatorname{sen} x & \Rightarrow & f^{(iv)}(0) = 0 \end{array}$$

Como as derivadas se repetem a cada quatro ordens, podemos determinamos a série de Maclaurin para $\operatorname{sen} x$ como segue:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(iv)}(0)}{4!}x^4 + \cdots \\ \operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (1) \end{aligned}$$

A Figura 13 mostra o gráfico de $y = \operatorname{sen} x$ e os polinômios de Taylor (ou Maclaurin)

$$
\begin{aligned}
T_1(x) &= x \\
T_3(x) &= x - \frac{x^3}{3!} \\
T_5(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}
\end{aligned}
$$

Conforme n aumenta, $T_n(x)$ torna-se melhor aproximação para $\operatorname{sen} x$.

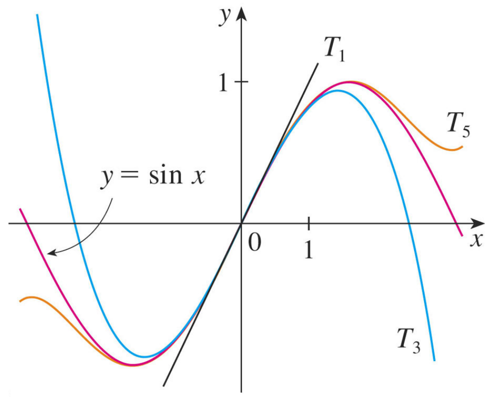


Figura 13: Gráfico de $\operatorname{sen} x$ e polinômios de Maclaurin

Fonte: (STEWART, 2007)

Mostraremos agora que a série encontrada representa a função $\operatorname{sen} x$ para todo x. Como $f^{(n+1)}(x) = \pm \operatorname{sen} x$ ou $\pm \cos x$, sabemos que $|f^{(n+1)}(x)| \leq 1$ para todo x. Assim, da fórmula do resto dada no Teorema 3.6, obtemos

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}|x^{(n+1)}| = \frac{|x^{(n+1)}|}{(n+1)!}$$

Pela equação (8), o lado direito dessa desigualdade se aproxima de 0 quando $n \to \infty$, dessa forma, $|R_n(x) \to 0|$. Assim, concluímos que $\operatorname{sen} x$ é igual à sua soma de Maclaurin para todo x.

Representaremos agora $f(x) = \operatorname{sen} x$ como a soma de sua série de Taylor centrada em $\pi/3$. Para tanto, listamos suas primeiras derivadas:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen} x & &\Rightarrow & f(\tfrac{\pi}{3}) &= \tfrac{\sqrt{3}}{2} \\
f'(x) &= \cos x & &\Rightarrow & f'(\tfrac{\pi}{3}) &= \tfrac{1}{2} \\
f''(x) &= -\operatorname{sen} x & &\Rightarrow & f''(\tfrac{\pi}{3}) &= -\tfrac{\sqrt{3}}{2} \\
f'''(x) &= -\cos x & &\Rightarrow & f'''(\tfrac{\pi}{3}) &= -\tfrac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Observamos que esse padrão se repete indefinidamente. Portanto, a série de Taylor em

$x = \pi/3$ é

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &= f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots \\
\operatorname{sen} x &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2\cdot 2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2\cdot 3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots
\end{aligned}$$

Separando os termos que contêm $\sqrt{3}$, podemos escrever a série na notação de sigma:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{3}}{2(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}$$

A Figura 14 mostra novamente o gráfico de $y = \operatorname{sen} x$, mas agora com a aproximação do polinômio $T_3(x)$.

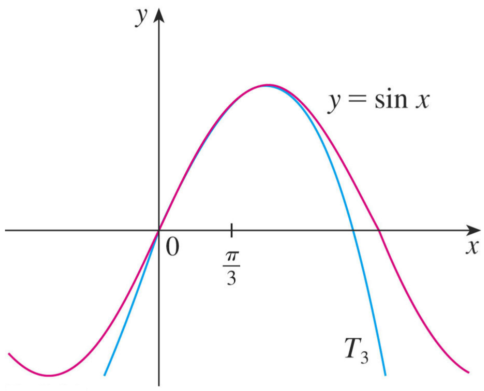


Figura 14: Gráfico de $\operatorname{sen} x$ e polinômio de Taylor

Fonte: (STEWART, 2007)

Obtivemos duas representações em série diferentes para $\operatorname{sen} x$. Observando as figuras 13 e 14, podemos notar que é melhor usarmos a série de Maclaurin para valores de x próximos de 0 e a série de Taylor para valores próximos de $\pi/3$ (STEWART, 2007).

Para encontrarmos a série de Maclaurin para $\cos x$, poderíamos partir da determinação de cada derivada em $x = 0$, como fizemos para a função $\operatorname{sen} x$. Mas, como já obtemos a série de Maclaurin para $\operatorname{sen} x$, é mais fácil diferenciar a série dada na equação (1). Assim,

$$\begin{aligned}
\cos x = \frac{d}{dx}\operatorname{sen} x &= \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \\
&= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \cdots \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (2)
\end{aligned}$$

Como a série de Maclaurin para $\operatorname{sen} x$ converge para todo x, então a série diferenciada para $\cos x$ também converge para todo x.

A partir desses resultados, podemos obter várias séries por substituição, multiplicação ou divisão de termos.

Exemplo 4.1 *Vamos avaliar* $\int_{1/2}^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ *com precisão de cinco casas decimais.*

Solução: Como não podemos encontrar uma antiderivada do integrando em termos de funções elementares, usamos a série de Maclaurin para $\operatorname{sen} x$, observando que

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} x}{x} &= \frac{1}{x} \operatorname{sen} x \\ &= \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \cdots \end{aligned}$$

Usando a integração termo a termo, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx &= \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \frac{x^9}{9 \cdot 9!} - \cdots\right]_{1/2}^{1} \\ &\approx (1 - 0,0555555 + 0,0016667 - 0,0000283 + 0,0000003 - \cdots) \\ &\quad -(0,5 - 0,0069444 + 0,0000521 - 0,0000002 + \cdots) \end{aligned}$$

Ao aplicar cada um dos parâmetros de integração, geramos uma série alternada convergente, com $|a_{n+1}| < |a_n|$. Pelo Teorema 2.10, ao usarmos os quatro primeiros termos da primeira parte, o erro cometido será menor que 0,0000003, e na segunda parte, ao usarmos os três primeiros termos, o erro será menor que 0,0000002. Assim, com uma correção de cinco casas decimais, obtemos

$$\int_{1/2}^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \approx 0,45298$$

◁

Exemplo 4.2 *Calcularemos agora o valor da integral* $\int_{0}^{1} \cos\sqrt{x} dx$ *com três casas decimais de precisão.*

Solução: Basta utilizarmos a substituição de x por $\sqrt{x}$ na equação 2. Assim, obtemos

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}$$

Usando a integração termo a termo,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \cos\sqrt{x}dx &= \left[x - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} - \frac{x^4}{4\cdot 6!} + \cdots\right]_0^1 \\
&\approx 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{72} - \frac{1}{2880} + \cdots \\
&\approx 1 - 0,25 + 0,013888 - 0,000347 + \cdots
\end{aligned}$$

Pela estimativa da série alternada (Teorema 2.10), usando os três primeiros termos da série acima o erro cometido na aproximação será menor que 0,000347. Logo, com precisão de três casas decimais, obtemos

$$\int_0^1 \cos\sqrt{x} \approx 0,764$$

$\triangleleft$

Passamos agora para a representação das funções seno e cosseno da trigonometria hiperbólica. Para isso, usaremos a série obtida no Exemplo 3.2, para a função exponencial e os fatos de que:

$$\begin{aligned}
\text{senh} x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\
\cosh x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})
\end{aligned}$$

Lembrando que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

obtemos a representação de e^{-x} pela substituição de x por $-x$. Assim,

$$e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-x)^n}{n!} + \cdots$$

ou ainda,

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Pela soma dos termos correspondentes das séries de e^x e e^{-x}, obtemos

$$e^x + e^{-x} = 2 + 2\cdot\frac{x^2}{2!} + 2\cdot\frac{x^4}{4!} + \cdots + 2\cdot\frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{3}$$

Sabendo que $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, podemos encontrar uma representação em série de potências para essa função apenas multiplicando cada termo da série obtida em (3). Então,

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

Para encontrar uma série de potências que represente $\operatorname{senh} x$, poderíamos usar o fato de que $\operatorname{senh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ou diferenciar a séries de $\cosh x$. Em qualquer caso, obtemos

$$\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

4.2 APLICAÇÕES À FÍSICA

Na Física, assim como na Matemática e em outras áreas, os polinômios de Taylor são usados frequentemente com o objetivo de simplificar funções obtendo-se boas aproximações para as mesmas. Apresentaremos dois exemplos de utilização da série de Taylor, onde seus dois ou três primeiros termos são suficientes para representar as funções dadas, com uma precisão satisfatória.

4.2.1 O Problema da Curvatura da Terra

Ao planejar uma rodovia através do deserto, o engenheiro deve medir as diferenças nas elevações do terreno e fazer correções devido à curvatura da Terra. A Figura 15 apresenta um esboço para o problema, onde R é o raio da Terra (aproximadamente 6370 km), L é o comprimento da rodovia e C, a correção a ser feita.

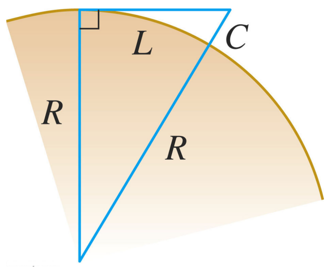


Figura 15: Esquema da curvatura da Terra

Fonte: (STEWART, 2007)

Sabemos que L é o comprimento do arco determinado pelo ângulo θ. E o comprimento de um arco, em radianos, é dado pela medida de seu raio multiplicada pela a medida do ângulo central. Logo,

$$L = R\theta \Rightarrow \theta = \frac{L}{R}$$

Observando as relações trigonométricas dadas na figura, temos:

$$\begin{aligned} \cos\theta = \frac{R}{R+C} \quad &\Rightarrow \quad \sec\theta = \frac{R+C}{R} \\ &\Rightarrow \quad R\sec\theta = R+C \\ &\Rightarrow \quad C = R\sec\theta - R \end{aligned}$$

Dessa forma, determinamos a correção a ser feita, em função do comprimento da rodovia (já que R é constante):

$$C = R\sec\left(\frac{L}{R}\right) - R \tag{4}$$

Usando um polinômio de Taylor, podemos mostrar que

$$C \approx \frac{L^2}{2R} + \frac{5L^4}{24R^3} \tag{5}$$

Antes, precisamos encontrar uma série de potências que represente a função $f(x) = \sec x$. Calculando as derivadas da função no ponto $x = 0$, até a quarta ordem, obtemos:

$$\begin{aligned} &f(x) = \sec x && \Rightarrow \quad f(0) = 1 \\ &f'(x) = \sec x \cdot \tan x && \Rightarrow \quad f'(0) = 0 \\ &f''(x) = \sec x \cdot \tan^2 x + \sec^3 x && \Rightarrow \quad f''(0) = 1 \\ &f'''(x) = \sec x \cdot \tan^3 x + 5\sec^3 x \tan x && \Rightarrow \quad f'''(0) = 0 \\ &f^{(iv)}(x) = \sec x \cdot \tan^4 x + 8\sec^3 x \tan^2 x + 5\sec^5 x && \Rightarrow \quad f^{(iv)}(0) = 5 \end{aligned}$$

Assim, o polinômio de Taylor em $x = 0$ (ou polinômio de Maclaurin) que aproxima a função $f(x) = \sec x$ é:

$$\begin{aligned} \sec x &= f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(iv)}(0)}{4!}x^4 + \cdots \\ \sec x &= 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{5}{4!}x^4 + \cdots \end{aligned}$$

Ao usarmos

$$\sec x \approx T_4(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
C &\approx R\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{L}{R}\right)^2+\frac{5}{24}\left(\frac{L}{R}\right)^4\right]-R \\
&= R+\frac{1}{2}R\cdot\frac{L^2}{R^2}+\frac{5}{24}R\cdot\frac{L^4}{R^4}-R \\
&= \frac{L^2}{2R}+\frac{5L^4}{24R^3}
\end{aligned}
$$

que é a aproximação pretendida em (5).

Para verificarmos a precisão obtida pela aproximação dada em (5), vamos tomar como exemplo uma rodovia que tenha 100 km de extensão, considerando o raio da Terra como 6370 km.

Pela fórmula (4), temos

$$C = R\sec\left(\frac{L}{R}\right) - R = 6370\sec\left(\frac{100}{6370}\right) - 6370 \approx 0,78500996544 \text{ km}$$

E pela aproximação polinomial de (5),

$$C \approx \frac{L^2}{2R}+\frac{5L^4}{24R^3} = \frac{100^2}{2\cdot 6370}+\frac{5\cdot 100^4}{24\cdot 6370^3} \approx 0,78500995736 \text{ km}$$

Assim, usando um polinômio de grau 4, obtemos uma ótima aproximação para a correção a ser feita, pois a diferença entre os dois resultados encontrados é de apenas 0,00000000808 km ou 0,00000808 m.

4.2.2 O Problema da Velocidade da Onda

A velocidade de uma onda de água está relacionada com seu comprimento e a profundidade da água por

$$v^2 = \frac{gL}{2\pi}\tanh\frac{2\pi d}{L}$$

onde:

- v é a velocidade com a qual a onda se move;
- L é o comprimento da onda;
- d é a profundidade da água;
- g é a constante gravitacional.

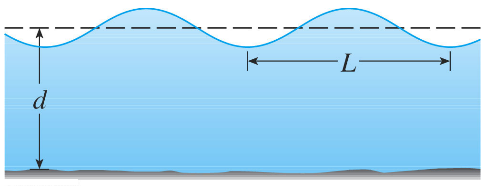


Figura 16: Representação de uma onda de água

Fonte: (STEWART, 2007)

Assim, se a água for profunda, então $2\pi d/L$ é grande. E sabemos que $\tanh x \to 1$ quando $x \to \infty$. Portanto, podemos considerar $\tanh(2\pi d/L) \approx 1$, obtendo uma aproximação para a velocidade da onda em função de seu comprimento:

$$v^2 \approx \frac{gL}{2\pi} \cdot 1 \Leftrightarrow v \approx \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$$

Porém, se a água for rasa, podemos mostrar que a velocidade da onda tende a ser independente de seu comprimento.

Para isso, vamos obter a série de Maclaurin para $\tanh x$, pois nesse caso $2\pi d/L$ é próximo de 0.

Calculando as três primeiras derivadas de $f(x) = \tanh x$ em $x = 0$, temos:

$$\begin{array}{lll}
f(x) = \tanh x & \Rightarrow & f(0) = 0 \\
f'(x) = \operatorname{sech}^2 x & \Rightarrow & f'(0) = 1 \\
f''(x) = -2\operatorname{sech}^2 x \cdot \tanh x & \Rightarrow & f''(0) = 0 \\
f'''(x) = 2\operatorname{sech}^2 x(3\tanh^2 x - 1) & \Rightarrow & f'''(0) = -2
\end{array}$$

Assim, a série de Maclaurin para $f(x) = \tanh x$ é

$$\tanh x = 0 + x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{(-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

Se usarmos o polinômio de Taylor de ordem 3 para aproximar a função, teremos

$$\tanh x \approx x - \frac{1}{3}x^3$$

Pelo primeiro termo do polinômio, obtemos

$$\tanh \frac{2\pi d}{L} \approx \frac{2\pi d}{L} \tag{6}$$

e então

$$v^2 \approx \frac{gL}{2\pi} \cdot \frac{2\pi d}{L} \Leftrightarrow v \approx \sqrt{gd}$$

como queríamos mostrar.

Como $\tanh x$ é uma função ímpar, sua série de Maclaurin é alternada. Portanto, o erro na aproximação feita em (6) usando-se o primeiro termo da série é menor que o segundo termo. Se $L > 20d$, por exemplo, então

$$\frac{1}{3}\left(\frac{2\pi d}{L}\right)^3 < \frac{1}{3}\left(2\pi \cdot \frac{1}{20}\right)^3 = \frac{\pi^3}{3000}$$

Como,

$$\frac{gL}{2\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3000} \approx 0,00164$$

a aproximação $v \approx \sqrt{gd}$ tem precisão de duas casas decimais.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

De acordo com os objetivos fixados na introdução deste trabalho, procuramos apresentar de maneira didática e interessante as características da séries de potências que permitem sua utilização na representação de funções, tornando mais simples a resolução de diversos tipos de problemas.

Apresentamos uma abordagem introdutória a respeito das sequências e séries numéricas, demonstrando todos os teoremas e testes utilizados para a verificação da convergência ou divergência de séries.

Procuramos tornar essa abordagem interessante e motivadora, expondo exemplos da utilização de cada assunto.

Ao lidar com as séries de potências, verificamos que suas características, semelhantes às das funções polinomiais, podem tornar a diferenciação e integração de muitas funções mais práticas.

Salientando a importância do tema, utilizamos as aplicações na Matemática e na Física, mostrando que de maneira simples pode-se obter aproximações bastante satisfatórias para problemas antes considerados complicados.

Esperamos que o presente trabalho possa contribuir para estudos futuros acerca do tema e ressaltamos que muitas aplicações, como a utilização das séries de potências na resolução de equações diferenciais e as contribuições da série binomial poderiam figurar como objetos para esses estudos.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

JASPIASSU, H.; MARCONDES, D. **Dicionário Básico de Filosofia**. 4. ed. Rio de Janeiro: JZE, 2006.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3. ed. São Paulo: HARBRA, 1994.

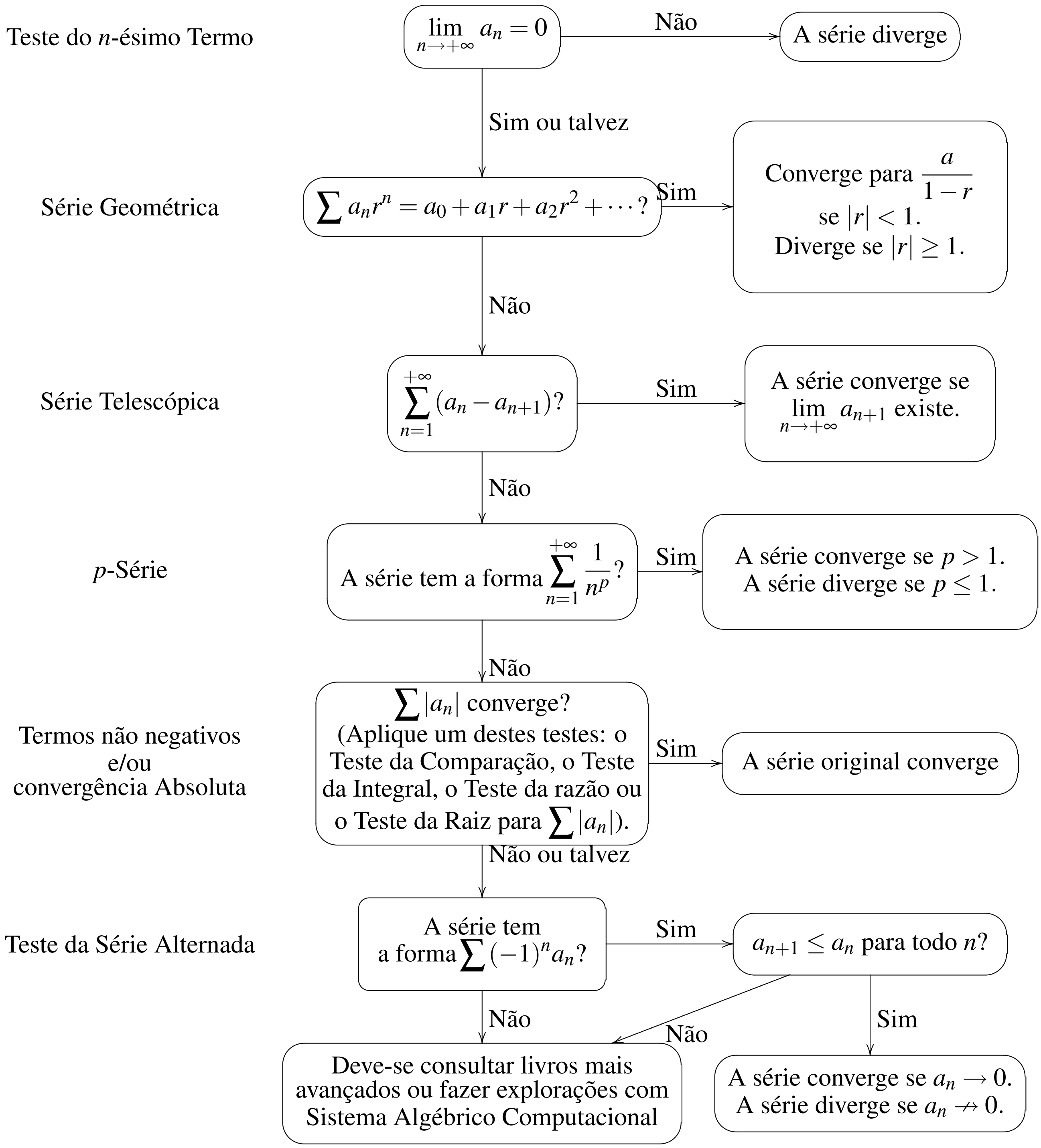
STEWART, J. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Thomsom Learning, 2007.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica**. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1994.

THOMAS, G. B. **Cálculo**. 10. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2003.

WIKIPEDIA. **Série harmônica (música)**. 2011. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Série_harmônica_(música)>. Acesso em: 7 de maio de 2011.

APÊNDICE A – PROCEDIMENTOS PARA A DETERMINAÇÃO DE CONVERGÊNCIA



APÊNDICE B – PROVA DO TEOREMA 3.5

Para provarmos o Teorema 3.5, faremos uso de outros dois resultados que serão apenas enunciados:

Teorema B.1*Se* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *for uma série de potências com um raio de convergência* $R > 0$*, então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ *também terá R como raio de convergência.*

Se aplicarmos B.1 à série $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, obtemos o resultado seguinte:

Teorema B.2*Se o raio de convergência da série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *for* $R > 0$*, então o raio de convergência da série* $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ *também será R.*

Teorema 3.5

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências cujo raio de convergência é $R > 0$, e seja f definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{1}$$

para todo x no intervalo de convergência. Então,

1.f é diferenciável (e portanto contínua) para todo x no intervalo aberto $(-R, R)$ e

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

2.f é integrável em todo subintervalo fechado de $(-R, R)$ e

$$\int_0^x f(t)dt = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Demonstração:

1.Sejam x e a dois números distintos no intervalo $(-R,R)$. A fórmula de Taylor (dada no Teorema 3.6 na Seção 3.2), com $n = 1$ é

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2$$

Dessa fórmula, com $f(x) = x^n$, segue que para todo n inteiro positivo

$$x^n = a^n + na^{n-1}(x-a) + \frac{1}{2}n(n-1)(c)^{n-2}(x-a)^2 \tag{2}$$

onde c está entre a e x. De (1),

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n a^n \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - a_0 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n a^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x^n - a^n) \end{aligned}$$

Dividindo por $x - a$ (já que $x \neq a$) e usando (2), temos

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \frac{1}{x-a}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[na^{n-1}(x-a) + \frac{1}{2}n(n-1)(c)^{n-2}(x-a)^2 \right]$$

Assim,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n a^{n-1} + \frac{1}{2}(x-a)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(c)^{n-2} \tag{3}$$

Como a este em $(-R,R)$, concluímos do Teorema B.1 que $\sum_{n=1}^{\infty} na_n a^{n-1}$ é absolutamente convergente. e como a e x estão em $(-R,R)$, existe algum número $K > 0$ tal que $|a| < K < R$ e $|x| < K < R$. Segue do Teorema B.2 que

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n K^{n-2}$$

é absolutamente convergente. Então, como

$$|n(n-1)a_n(c)^{n-2}| < |n(n-1)a_n K^{n-2}| \tag{4}$$

para todo c entre a e x podemos concluir do Teste de Comparação que

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(c)^{n-2}$$

é absolutamente convergente.

De (3)

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n a^{n-1}\right| \le \left|\frac{1}{2}(x-a)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(c)^{n-2}\right| \tag{5}$$

mas, se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for absolutamente convergente, então

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Aplicando esse resultado ao segundo membro de (5), obtemos

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n a^{n-1}\right| \le \frac{1}{2}|x-a|\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n||(c)|^{n-2}$$

Dessa desigualdade e de (4)

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n a^{n-1}\right| \le \frac{1}{2}|x-a|\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n|K^{n-2} \tag{6}$$

onde $< K < R$. Como a série do segundo membro de (6) é absolutamente convergente, o limite do segundo membro, quando $x \to a$ é zero. Então de (6) e do teorema do confronto de limites,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n a^{n-1}$$
$$\Leftrightarrow f'(a) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n a^{n-1}$$

e como a é qualquer número no intervalo $(-R,R)$, a derivação de séries de potências está provada.

2.Para provarmos a segunda parte do teorema, consideremos a função definida por

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

Como os termos da série de potências que representa $f(x)$ são as derivadas dos termos da série de potências que representa $g(x)$, pelo Teorema B.1,as duas séries têm o mesmo raio de convergência. Pela parte *1*,

$$g'(x) = f(x) \qquad \text{para todo } x \text{ em } (-R,R)$$

Pelo Teorema B.2, segue que $f'(x) = g''(x)$ para todo x em $(-R,R)$. Como f é diferenciável em $(-R,R)$, f é contínua neste intervalo; consequentemente f é contínua em todo subintervalo fechado de $(-R,R)$. Assim, concluímos que, se x está em $(-R,R)$, então

$$\int_0^x f(t)dt = g(x) - g(0) = g(x)$$
$$\Leftrightarrow \int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

■