UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MARCO TADEU GONÇALVES

UM ESTUDO SOBRE A DIFERENCIABILIDADE

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

CAMPO MOURÃO

2011

MARCO TADEU GONÇALVES

UM ESTUDO SOBRE A DIFERENCIABILIDADE

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Wellington José Corrêa

CAMPO MOURÃO

2011

TERMO DE APROVAÇÃO

Marco Tadeu Gonçalves

Um estudo sobre a diferenciabilidade

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de "Especialista em Ciências" – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Wellington José Corrêa

Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino

Prof. Msc. Magda Cardoso Montovani

Campo Mourão, 2011

A memória de meu pai, que do céu se alegra com mais essa conquista. A minha mãe e todos familiares, que sempre me apoiaram e me deram força para vencer as dificuldades e momentos de desânimo.

A minha querida noiva, Larissa, que esteve do meu lado o tempo todo, me incentivando e motivando para conseguir dar mais um passo em minha carreira profissional e pessoal, e também sua família, pelo apoio e carinho.

Dedido também aos meus amigos de curso que proporcionaram momentos de aprendizado e também descontração, tornando mais agradáveis nossas aulas nos fins de semana.

Dedico também, a todos os professores do curso de pós graduação, de maneira especial ao professor Adilandri Mércio Lobeiro e ao meu orientador, professor Wellington José Corrêa, pelos conselhos e encaminhamentos que me permitiram concluir a pesquisa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a meus pais que com amor me ensinaram a ser perseverante, me ensinaram valores que me guiam em todas minhas decisões.

Agradeço a minha noiva, que com amor e carinho me fez ter forças para seguir, mesmo nos momentos em que o cansaço me abatia. Agradeço pelos momentos de compreensão por minha ausência nos fins de semana, em que tinha aula nos sábados e domingos, pelos conselhos e companheirismo. Tabém agradeço a seus pais que sempre me aconselharam e me incentivaram a vencer mais esse desafio.

Agradeço aos amigos de curso , que tornaram as tardes de sábado muito mais agradáveis e descontraídas, amigos que levarei além do curso: Roney, Professor Alex , Tatiane, Cristiane, Brill, Willian e todos os outros, a todos tenho um imenso carinho e desejo sorte na caminhada de agora em diante. Meus agradecimentos também aos professores que com certeza contribuiram muito para mais uma passo que dou na minha formação profissional. Também agradeço ao amigo Marcos Tibério do departamento de informática do colégio Integrado, que me auxiliou quando alguns problemas técnicos do computador me impediam de digitar a monografia. E, por último e com especial carinho e amor, glorifico ao Senhor Deus, por orquestrar todas essas pessoas maravilhosas em minha vida. Agradeço por me dar inteligência, força, perseverança, ânimo e acima de tudo agradeço por estar ao meu lado sempre, abrindo-me portas que mesmo apertadas me levam a lugares cada vez melhores. A Ele toda honra e glória. Amém.

“O entusiasmo é a maior força da alma. Conserva-o e nunca te faltará poder para conseguires o que desejas.”

Napoleão Bonaparte

RESUMO

GONÇALVES, Marco. Um estudo sobre a diferenciabilidade. 60 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2011.

A derivada e as taxas de variação, tem sido objeto de estudo de matemáticos de várias gerações. O conhecimento construído sobre esse tema é fruto da necessidade humana de encontrar formas de traduzir fenômenos da natureza, ou resolver problemas intrínsecos da matemática, em sua infinidade de funções e curvas. A capacidade de interação desse conteúdo matemático com outras áreas do conhecimento, como as ciências biológicas, exatas, naturais e até sociais, fez com que seu desenvolvimento fosse potencializado e sua utilização nessas áreas, onerasse aos matemáticos a missão de construir uma teoria sólida para a derivabilidade e diferenciação, que desse a ela plena confiabilidade.

No trabalho, buscamos formas de abordar o assunto de forma simples, porém não simplificada, ou seja, apesar de buscar uma linguagem mais acessível, com exemplos de exercícios e aplicações, procurou-se um estudo da teoria com demonstrações de alguns teoremas mais importantes, procurando atender ao rigor matemático exigido para tal propósito.

Palavras-chave: Derivadas, Diferenciabilidade, Taxas de variação

ABSTRACT

GONÇALVES, Marco. A study of the differentiability. 60 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2011.

The derivative and the diversification's rate has been the mainly study for several generations of mathematicians. The knowledge built on this theme is inspired by the human needs to find ways of translate natural phenomenons or solve inherent math problems in its functions and curve limitless. The interactions of this math content with other knowledge areas, such as biological sciences, exact and natural sciences even social one modifies its development and its use in these areas burdened to mathematicians the mission to build a consistent theory to the derivability and differentiation which give it full confidence.

In this work we show to approach this theme in a simple way, but not simplified. We find an accessible language, with exercises and application's examples and a theory study with the most important theorem demonstrations to attend the mathematic rigidity claimed for that purpose.

Keywords: Derivative,Differentiability , Rates of change

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 UM POUCO DE HISTÓRIA

É fato que o século XVII foi muito importante para o desenvolvimento da matemática moderna. Inúmeros foram os esforços e vários foram os matemáticos que se dedicaram a aprimorar antigas teorias e inovar na busca de novos conhecimentos. Dentre esses notórios matemáticos destacamos Pierre de Fermat, Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, de forma que os dois últimos são considerados, de maneira independente, os precursores do cálculo diferencial e integral.

Tendo em vista o vasto campo de conhecimento inerente ao cálculo, destacamos de forma especial o cálculo diferencial que, diferente do que se estuda habitualmente, surgiu depois do cálculo integral, resultante de problemas envolvendo tangentes à curvas e sobre questões de valores máximos e mínimos de funções.

Problemas como os citados anteriormente, sobre tangência já haviam sido estudos desde a antiguidade por alguns grandes matemáticos como Euclides (cerca de 300 a.C.) que provou o importande teorema que diz que a reta tangente a um círculo em qualquer ponto P é perpendicular ao raio em P. Arquimedes (287-212 a.C.) também tinha contribuições à respeito de retas tangentes, assim como Apolônio (cerca de 262-190 a.C.) que descreveu métodos, todos um tanto diferentes, para determinar tangentes a parábolas, elipses e hipérboles. Todavia, todos esses problemas tinham um enfoque puramente geométrico o que fez com que seu desenvolvimento tivesse algumas limitações.

No séc. XVII, Descartes e Pierre Fermat, introduzindo as coordenadas cartesianas, tornaram possível transformar problemas geométricos em problemas algébricos e assim, estudar analiticamente funções. Com essa possibilidade, a Matemática ganhou nova força, em grande parte por sua aplicabilidade em outros ramos da ciências, pois além de estudar de forma algébrica as funções, permitiu a confeção de novas curvas com funções definidas por relacões entre variáveis. Fermat então,observando as ideias de Kepler de que incrementos de uma função tornam-se extremamente pequenos nas vizinhanças de um ponto de máximo ou de mínimo,usou do fato para criar um processo para determinar tais pontos, num modelo muito semelhante ao que usamos hoje, ou seja, considerando a inclinação da reta tangente nesse ponto igual a zero. Que na notação usual se torna:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$$

Mesmo tendo essa visão de que a inclinação nula da reta tangente daria pontos extremos de uma função, Fermat ainda não distinguia entre valores de máximo e mínimo da função, apenas considerava essa uma condição suficiente para que houvesse os valores extremos. Estas ideias constituiram o embrião do conceito de derivada e levaram alguns matemáticos a considerar Fermat "o verdadeiro inventor do Cálculo Diferencial" (EVES, 2004). Contudo, Fermat não dispunha de notação apropriada e o conceito de limite não estava ainda claramente definido.

Seguindo os passos de Fermat, outros matemáticos importantíssimos no desenvolvimento do cálculo e, até considerados como os criadores do mesmo, são Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz que por muitos anos travaram um duelo ferrenho pelo mérito da criação do cálculo. Na verdade, o desenvolvimento de suas teorias e suas contribuições foram dadas de forma totalmente independentes. Newton, buscando explicar os fenônemos físicos ligados à mecânica, onde deixou seu maior legado, na óptica entre outros e Leibniz, considerado "o grande gênio universal do século XVII"(EVES, 2004) que aos doze anos de idade já dominava todo o conhecimento corrente de matemática, filosofia, teologia e leis publicado na época, que com grande desenvoltura dava suas contribuições em todas elas, ficando é claro, mais conhecido pela teoria desenvolvida em matemática.

O método dos fluxos de Newton foi de fundamental importância para a ideia de diferenciação. De acordo com a mesma, uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto, associando esse ponto no plano, a abscissa e a ordenada do mesmo passavam a ser consideradas quantidades variáveis, definindo uma taxa de variação em função do tempo. A notação de Newton para essa variação concedida por uma curva y era dada por $\dot{y}$. Newton introduziu também o que ele chamava de *momento de um fluente* que nada mais era que um incremento infinitamente pequeno (tendendo a zero) que sofria o fluente, em um intervalo extremamente pequeno ficando claro então, ser equivalente a ideia de diferenciação. O método dos fluxos de Newton foi aplicado para encontrar pontos de máximo e mínimo, tangentes a curvas, de inflexão entre outros.

Paralelamente no séc.XVII, Leibniz algebriza o Cálculo Infiniesimal, introduzindo os conceitos de variável, constante e parâmetro, bem como a notação que realmente foi adotada para as taxas de variação, $\frac{dy}{dx}$, em que dx era definido como um intervalo finito arbitrário e dy pela proporção $\frac{dy}{dx} = y$. Leibniz deduziu a maioria das regras de diferenciação que aprendemos nos cursos de cálculo, tendo um simbolismo claro e sendo sua notação para o cálculo, muito mais conveniente e flexível que a de Newton.

Com Leibniz e Newton, o Cálculo Diferencial torna-se um instrumento cada vez mais indispensável pela sua aplicabilidade aos mais diversos campos da Ciência. Apesar das diferenças, tanto Newton quanto Leibniz reconheceram até certo ponto a importância do "adversário". Leibniz disse: "Considerando a Matemática desde o início do mundo até a época de Newton, o que ele fez é sem dúvida a melhor metade."(EVES, 2004). Newton, por sua vez, admitiu a capacidade do opositor em uma de suas publicações dizendo que Leibniz possuía um método semelhante ao seu. Infelizmente, mais tarde em uma nova edição retirou o que mencionara de Leibniz.

1.2 MOTIVAÇÃO

A considerar os livros disponíveis sobre o assunto, desde a definição das derivadas até chegarmos ao conceito de diferencial, percebe-se uma diferença na abordagem dada nos livros de cálculo, usado na maioria dos cursos de graduação, e nos livros de análise que visam fundamentalmente trabalhar a teoria provando seus teoremas mais importantes em um enfoque algébrico que nem sempre fica ao alcance do entendimento dos alunos, por ainda não estarem adaptados com esse tipo de abordagem.

Assim, buscaremos no trabalho, um meio termo. Uma forma de captar aquilo que se apresenta nos livros de cálculo e fundamentá-lo com teoremas e suas respectivas demonstrações, considerando que esse fato faça com que seja mais palpável ao leitor, conciliar teoria e prática.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo Geral

Estudar a diferenciabilidade de funções com enfoque algébrico e geométrico apresentando algumas de suas possíveis aplicações.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Fazer um apanhado histórico sobre o surgimento da idéia da derivada destacando os nomes mais importantes no desenvolvimento de suas teorias;
- Definir os principais teoremas no estudo das derivadas;
- Mostrar durante o desenvolvimento algébrico, a interpretação geométrica relativa a derivada, às derivadas parciais e a diferencial;
- Trabalhar a diferenciabilidade em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$;
- Buscar aplicações em diversas áreas da ciência para ilustrar a teoria trabalhada.

1.4 PROBLEMA

De acordo com a teoria que envolve o estudo da diferenciabilidade, como vincular as várias abordagens sobre o tema, de forma que os conceitos se tornem os mais claros possíveis?

1.5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O trabalho se inicia com a pesquisa bibliográfica buscando o embasamento teórico necessário para a realização da pesquisa. A pesquisa bibliográfica, colocando o pesquisador a par de tudo o que foi publicado sobre o assunto, oferece meios de definir e desenvolver sua pesquisa, sem ser, no entanto, repetição daquilo que foi dito ou escrito a respeito do tema, mas algo que propicia um exame sob uma nova abordagem, chegando a conclusões inovadoras (LAKATOS; MARCONI, 2007).

Os livros utilizados fazem parte dos acervos que tratam do cálculo de uma e duas variáveis e também livros de cursos de análise real, que reforçarão a fundamentação teórica. São exemplos de livros estudados:

- Cálculo I (GUIDORIZZI, 2001a)
- Cálculo II (GUIDORIZZI, 2001b)
- Cálculo II (LEITHOLD, 1994)
- Análise Real (LIMA, 2000)
- Análise Real (LIMA, 2009)

Além da pesquisa bibliográfica *softwares* matemáticos auxiliarão na representação gráfica das funções trabalhadas.

1.6 CRONOGRAMA

Pretende-se realizar a pesquisa seguindo as datas descritas a seguir:

ATIVIDADES	AGO 2010	SET 2010	OUT 2010	NOV 2010	DEZ 2010	JAN 2011	FEV 2011	MAR 2011	ABR 2011	MAI 2011	JUN 2011
Escolha do tema	X										
Delimitação do tema da pesquisa e orientação sobre o projeto da monografia	X										
Levantamento bibliográfico sobre os temas abordados	X										
Escrita da introdução do projeto		X									
Elaboração da monografia			X	X	X	X	X	X			
Digitalização da monografia								X	X	X	
Entrega da monografia pronta para correção e análise da banca										X	
Defesa da monografia											X

1.7 PLANO PRELIMINAR

O trabalho, *a priori* será subdividido em 5 capítulos assim descritos:

- **Primeiro capítulo**: Introdução- Nesse capítulo constará a introdução do trabalho, que buscará orientar o leitor quanto aos objetivos da pesquisa e a motivação em sua realização, assim como dar a ideia de como a mesma será desenvolvida, além de fazer um apanhado histórico da criação da derivada citando seus precursores ;

- **Segundo capítulo**: Preliminares- Se faz necessário no estudo da diferenciabilidade, conhecer alguns conceitos e teoremas importantes da derivada. Nesse capítulo abordaremos tais conceitos com exemplos e representações gráficas para auxiliar no entendimento dos capítulos posteriores.

- **Terceiro capítulo**: Diferenciais- Será trabalhada a diferenciação em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$, assim como a diferencial exata.

- **Quarto capítulo**: Aplicações- Como já citado, existem várias aplicações para o conceito de derivadas. Nessa seção, vamos expor algumas delas reforçando sua aplicabilidade em diversas áreas.

- **Quinto capítulo**: Considerações Finais- No quinto e último capítulo, apresentaremos as conclusões parciais sobre a pesquisa, fazendo uma análise se seus objetivos foram alcançados com êxito.

2 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

2.1 RETA TANGENTE E DERIVADA

Podemos afirmar que os problemas mais importantes do cálculo envolvem a determinação da reta tangente em um dado ponto de um curva. Entendamos um pouco melhor esse procedimento e sua justificativa.

Primeiro pensemos na praticidade. É fato ser muito mais fácil manipular uma função afim do tipo $f(x) = ax + b$, que nos fornece como resultado uma reta, do que outras funções cujos gráficos são curvas. Então é plausível afirmar que se pudessemos aproximar qualquer função dada por meio de uma reta, a análise seria facilitada. Ora, então nosso intuito é buscar, caso exista, uma função $g(x) = ax + b$ (equação reduzida da reta) que aproxima uma função f qualquer. Para ilustrar essa situação, atentemo-nos ao exemplo de Cássio Neri (NERI, 2006):

> Consideremos a Terra. Durante muitos milhares de anos, pensou-se que a superfície terrestre era plana. A razão é que o planeta era visto de muito perto. Só quando nos afastamos dele, vemos que na realidade a sua superfície é mais parecida com uma esfera do que com um plano. Diz-se que Aristóteles reparou isto vendo a sombra da Terra sobre a lua durante um eclipse. De certa forma, Aristóteles precisou recorrer a imagem da Terra vista da Lua para poder perceber que ela não era plana. Ora, se a Terra parece (ou parecia) plana, significa que existe um plano que se parece muito com a Terra, certo? Na verdade, sabemos que não é um plano, mas sim vários planos. Para um habitante Tóquio, o plano que mais parece com a Terra não é o mesmo que para nós. Isto nos indica que esta noção de aproximação é local, isto é, dependendo do ponto onde nos colocamos percebemos de modo diferente o objeto simples (reta, plano, etc)que mais parece com o objeto original (curva, esfera, etc).(p.91)

Pensando então em uma curva de uma função qualquer f,se existir o coeficiente a, podemos aproximá-la por uma reta $g(x) = ax + b$ na vizinhança de um ponto qualquer x_0.

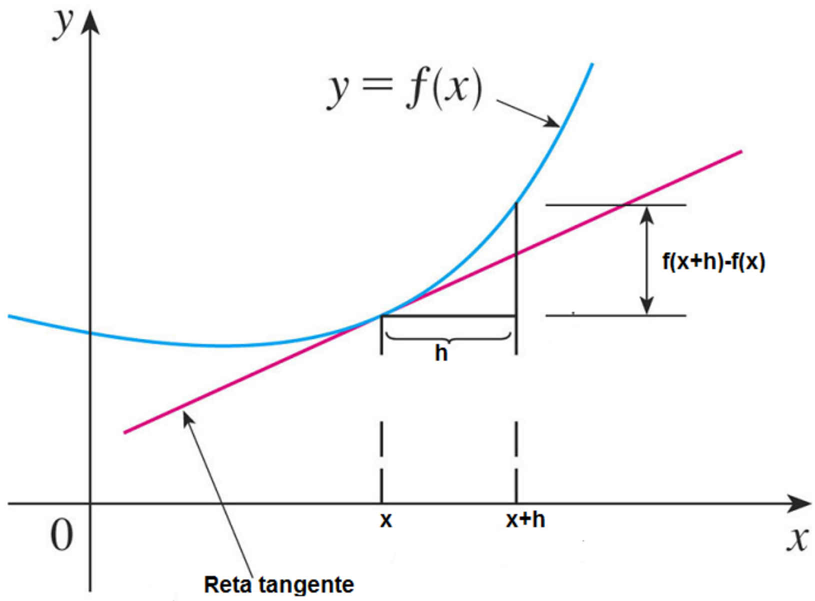


Figura 1: Reta tangente à curva no ponto x

Assim, quando aproximamos a curva de f pela reta tangente $g(x) = ax + b$, temos que admitir as seguintes condições:

1. $g(x_0) = f(x_0)$
2. $\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = 0$

Podemos observar que a primeira condição $(f(x_0) = g(x_0))$nos fornece o resultado que $b = f(x_0)$, uma vez que podemos escrever $g(x)$ da seguinte forma, $g(x) = a(x - x_0) + b$.

Do enunciado em (2) vemos que o erro cometido quando aproximamos f por $g(x)$ se torna cada vez menor quando tomamos um x suficientemente próximo de x_0. Substituindo então a expressão para $g(x)$ na igualdade 2:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = 0$$

obtemos:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - (a(x - x_0))] = f(x_0)$$

o que indica a continuidade de f em x_0.

Definição 2.1 *Seja $f : A \to \mathbb{R}$ e x_0 um ponto qualquer de seu domínio. O limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

quando existe e é finito é chamado de derivada de f no ponto x_0 e pode ser escrito como:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Se a função admitir derivada no ponto x_0 dizemos que ela é diferenciável nesse ponto.

Como vimos na definição acima se o limite dado existir a função será derivável nesse ponto e, em consequência, dizemos que uma função é derivável em um conjunto, quando existe a derivada para todos os pontos desse conjunto. Como consequência da derivabilidade, consideremos o seguinte teorema:

Teorema 2.1 *Se existe a derivada denotada por $f'(x_0)$ então a função é contínua em x_0*

Demonstração. Dizer que existe $f'(x_0)$ é equivalente a existência do limite,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

donde, para provarmos a continuidade basta provar que $\lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0)=0$.

De fato,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.(x-x_0)\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\\ &= 0\end{aligned}$$

prova-se assim, que se a função for diferenciável no ponto x_0 ela é contínua nesse ponto.

A recíproca do teorema 2.1 não é verdadeira, ou seja, a suposição de que uma função é contínua em um ponto x_0 não garante que ela seja diferenciável nesse ponto. Para ilustrar isso consideremos o exemplo a seguir:

Exemplo 2.1 *A função $f(x)=|x|$ não é derivável em $x_0=0$*

Sabemos que a função módulo de x é contínua em todo seu domínio, no entanto vamos verificar que a mesma não é derivável em $x=0$. Da definição (2.1), para que a função seja derivável em um ponto do seu domínio, o limite ali dado deve existir. O que é equivalente a dizer que os limites laterais são iguais quando nos aproximamos, no caso, de $x=0$. Sabemos ainda que:

$$|x|=\begin{cases} x & , \; se \;\; x\geq 0\\ -x & , \; se \;\; x<0\end{cases}$$

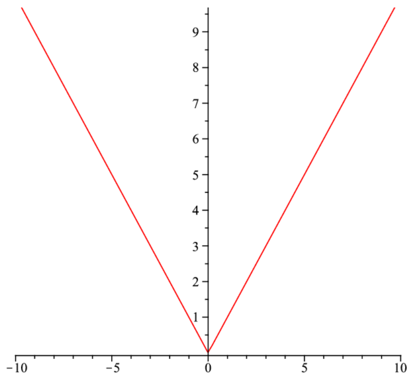


Figura 2: Função Módulo de x

Assim,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1 \text{ e } \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1$$

desta forma, sendo os limites laterais diferentes, podemos dizer que não existe o limite, provando que a função não é diferenciável em $x=0$.

De maneira rotineira, justifica-se a descontinuidade dada pelo exemplo (2.1), ao ver graficamente que a função faz um "bico" no ponto $x=0$.

Vimos, que a função $f(x)=|x|$ não é diferenciável em $x=0$ e vimos na figura acima que o "bico" formado nesse ponto, indica que a curva mudou abruptamente de direção. Em geral, como dito anteriormente, essa "quina" formada pelo gráfico já é uma garantia que f não terá tangente nesse ponto, e portanto não é diferenciável. Se tentarmos calcular os limites laterais, veremos que estes, tem valores diferentes.

O Teorema (2.1) nos conta que se uma função não é contínua em um ponto, não será derivável alí. Assim em toda descontinuidade em f, ela deixa de ser diferenciável. Mas ainda há uma outra possibilidade. Quando a curva de uma função tiver uma reta tangente vertical em $x=a$. Isto é, f é contínua em a mas

$$\lim_{x\to a}|f'(x)|=\infty$$

Isso significa que a reta tangente fica cada vez mais íngreme quando x se aproxima de a. Podemos ver nas figuras abaixo os três possíveis casos de não-diferenciabilidade (STEWART, 2005a).

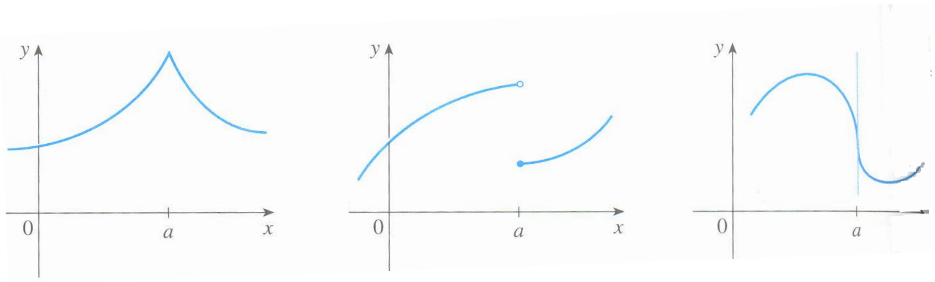


Figura 3: Casos de descontinuidade

2.2 PROPRIEDADES OPERATÓRIAS DA DERIVADA

As propriedades operatórias da derivadas são, na maioria das vezes, consequências imediatas das propriedades de limites. Fato facilmente compreencível, uma vez que a definição da derivada parte do limite de uma função.

Proposição 2.1 *Sejam* $f, g : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *deriváveis em* x_0 *e* $a \in \mathbb{R}$. *Tem-se as seguintes propriedades:*

(i) $f+g$ *é derivável em* x_0 *e* $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;

(ii) cf *é derivável em* x_0 *e* $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$;

(iii) $f-g$ *é derivável em* x_0 *e* $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$;

(iv) fg *é derivável em* x_0 *e* $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;

(v) Se $g(x_0) \neq 0$ *então* f/g *é derivável em* x_0 *e* $(f/g)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0))}{(g(x_0))^2}$

Demonstração de (i):

Utilizando as propriedades de limite (ver apêndice A) podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
(f+g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} \\
(f+g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} \\
(f+g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
(f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0) \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Demonstração de(ii):

Novamente utilizando as propriedades de limite, chegamos à prova de (ii), veja:

$$
\begin{aligned}
(cf)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{(cf)(x)-(cf)(x_0)}{x-x_0} \\
(cf)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{cf(x)-cf(x_0)}{x-x_0} \\
(cf)'(x_0) &= c\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\
(cf)'(x_0) &= cf'(x_0) \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

A demonstração de (iii) é análoga à (i)

Demonstração de (iv)

$$
\begin{aligned}
(fg)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{(f)(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)+g(x)f(x_0)-g(x)f(x_0)}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{(f(x)-f(x_0))g(x)+(g(x)-g(x_0))f(x_0)}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+\lim_{x\to x_0} \frac{(g(x)-g(x_0))f(x_0)}{x-x_0} \\
&= f'(x_0)g(x)+f(x)g'(x_0) \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Demonstração de (v)

$$
\begin{aligned}
(f/g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{(f/g)(x) - (f/g)(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x_0) - g(x)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x_0) - g(x)g(x_0) + g(x_0)f(x_0) - g(x_0)f(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x_0) \right) \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left(f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0) \right) \\
&= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

2.3 INTEPRETAÇÃO DA DERIVADA COMO TAXA DE VARIAÇÃO

Ao definirmos a derivada, utilizamos normalmente a ideia de que esta, é a inclinação da reta tangente ao gráfico em um determinado ponto x_0. Isso significa que se usássemos uma lupa com poder de aproximação muito grande e olhássemos para a curva do gráfico no ponto $(x_0, f(x_0))$, ao redor desse ponto o gráfico ficaria muito parecido com uma reta. Veja exemplo:

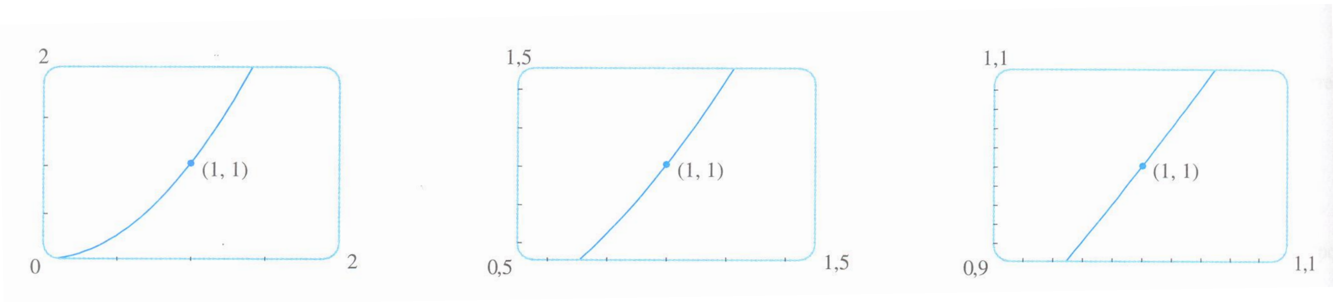


Figura 4: Aproximação pela reta tangente

Com a ideia de que em uma região próxima ao ponto de uma curva teremos uma reta, consideramos então pequenas variações (acréscimos) nas variáveis e podemos estudar vários fenômenos que envolvem tal variação por meio da derivada. Essa interpretação da derivada como uma taxa de variação é bastante utilizada por exemplo na física, no estudo da velocidade instantânea. Em geral, supomos que y é uma quantidade que depende de outra quantidade x, ou seja, $y = f(x)$. Se x variar de x_1 *para* x_2 , então a variação nessa variável pode ser chamada de incremento de x.

Existe muito interesse das ciências em geral, no estudo das taxas de variação. Além da velocidade instantânea de uma partícula, ou seja, a taxa de variação do deslocamento em relação ao tempo, há também um interesse dos físicos por outras taxas de variação, como por exemplo, a taxa de variação do trabalho em relação ao tempo (potência). Quem estuda reações químicas se interessa pela taxa de variação da concentração de um reagente em relação ao tempo, conhecida como *taxa de reação*. Uma siderúrgica se interessa pela taxa de variação do custo de produção de x toneladas de aço por dia, e estuda então o *custo marginal*. Um biólogo estuda a taxa de variação de uma determinada bactéria em função do tempo, e assim percebemos que não só na área das exatas são estudadas as taxas de variações, podemos encontrá-las nas ciências naturais ou mesmo nas ciências sociais. Por tal importância continuaremos estudando posteriormente as taxas de variações, ou acréscimos, também para funções de mais variáveis.

2.4 DERIVADAS PARCIAIS

Quando tratamos da derivação de funções com mais de uma variável, o caso requer que reduzamos a situação para o caso unidimensional, tratando a dada função de n variáveis como uma função que aborda uma variável de cada vez, considerando as outras como sendo constantes. Esse pensamento nos leva ao conceito de derivada parcial. Para ilustrar a situação consideremos o exemplo encontrado em (STEWART, 2005b):

Em um dia quente, a umidade influencia na sensação de calor, uma vez que quando a mesma está muito alta a sensação de calor é maior, ao passo que se o dia está muito seco, temos a impressão que o dia está um pouco mais fresco. O Serviço Nacional de Meteorologia americano criou um índice de calor para descrever os efeitos combinados de temperatura e umidade. Esse índice de calor (I) é uma variável que depende de dois fatores: a umidade relativa do ar (H) e a temperatura real (T). Assim I é uma função de T e H, e podemos escrever I=f(T,H). Observe a tabela com valores de I, extraída de uma tabela compilada pelo Serviço Nacional de Meteorologia. Observando a primeira coluna que indica uma unidade relativa de 70% ou seja $H = 70\%$, iremos considerar o índice de calor como dependente de uma única variável para H fixo. Assim, admitamos por exemplo, $g(T) = f(T,70)$, desta forma $g(T)$ descreve como o índice I de calor aumenta de acordo com a temperatura T para uma umidade de 70%. Se tomarmos a derivada de g quando $T = 96^{o}F$ esta será a taxa de variação de I com relação a T

UMIDADE RELATIVA (%)

TEMPERATURA REAL (ºF)

$T \backslash H$	50	55	60	65	70	75	80	85	90
90	96	98	100	103	106	109	112	115	119
92	100	103	105	108	112	115	119	123	128
94	104	107	111	114	118	122	127	132	137
96	109	113	116	121	125	130	135	141	146
98	114	118	123	127	133	138	144	150	157
100	119	124	129	135	141	147	154	161	168

quando $T = 96^oF$. Em linguagem matemática:

$$g'(96) = \lim_{h\to 0} \frac{g(96+h)-g(96)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(96+h,70)-f(96,70)}{h}$$

Utilizando os valores da tabela, podemos aproximar os valores acima tomando por exemplo h=2 e h=-2. Assim:

$$g'(96) = \lim_{h\to 0} \frac{g(98)-g(96)}{2} = \lim_{h\to 0} \frac{f(98,70)-f(96,70)}{2} = \frac{133-125}{2} = 4$$
$$g'(96) = \lim_{h\to 0} \frac{g(94)-g(96)}{-2} = \lim_{h\to 0} \frac{f(94,70)-f(96,70)}{-2} = \frac{118-125}{-2} = 3,5$$

Tomando a média dos dois valores, podemos dizer que a derivada g'(96) é aproximadamente 3,75. Isso significa que quando a temperatura real é de 96^oF e a umidade do ar de 70%, o índice de calor aumenta a sensação da temperatura em 3,5ºF para cada grau que a temperatura real aumenta.

Pensando de forma análoga, olhemos agora para a linha da tabela que corresponde a uma temperatura fixa de 96 ºF, os números da linha correspondem aos valores da função $y(H) = f(96,H)$, que descrevem como o índice de calor aumenta com o aumento de umidade relativa H quando a temperatura real é de $T = 96^oF$. A derivada dessa função quando $H = 70\%$ é a taxa de variação de I com relação a $H = 70\%$.

$$y'(70) = \lim_{h\to 0} \frac{y(70+h)-y(70)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(96,70+h)-f(96,70)}{h}$$

De acordo com a tabela podemos tomar, h=5 e -5, obtendo:

$$y'(70) = \lim_{h\to 0} \frac{y(75)-y(70)}{5} = \lim_{h\to 0} f(96,75)-f(96,70)5 = \frac{130-125}{5} = 1$$
$$y'(70) = \lim_{h\to 0} \frac{y(65)-y(70)}{-5} = \lim_{h\to 0} f(96,65)-f(96,70)-5 = \frac{121-125}{-5} = 0,8$$

Tomando novamente a média dos valores obtemos um estimativa para $y'(70) = 0,9$. Isto significa que quando a temperatura é de 96ºF e a umidade relativa é de 70%, o índice de calor aumenta em certa de $0,9^{o}F$ para cada ponto percentual que a umidade relativa aumenta.

De acordo com o que foi exposto podemos definir as derivadas parciais da seguinte forma:

Definição 2.2 *Seja f uma função de duas variáveis, x e y. A derivada parcial de f em relação a x é aquela função, denotada por $\frac{\partial f}{\partial x}$, tal que seus valores funcionais em qualquer ponto (x,y) no domínio de f sejam dados por:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

Se o limite existir.

Da mesma forma, a derivada parcial em relação a y denotada por $\frac{\partial f}{\partial y}$ é tal que seus valores funcionais em qualquer ponto (x,y) no domínio de f são dados por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k}$$

Com essa notação para derivadas parciais podemos escrever as razões de variação do índice de calor I com relação à temperatura real T e umidade relativa H quanto T=96ºF e H=70% da seguinte forma:

$$f_T = (96,70) \approx 3,75 f_H(96,70) \approx 0,9$$

Existem ainda outras formas de se representar as derivadas parciais. Além da que utilizamos para a derivada parcial em relação a x $\frac{\partial f}{\partial x}$ que aliás, não pode ser entendida como a razão dos diferencias, temos: f_1, $D_1 f$ ou ainda f_x. Resumindo, a maioria dos textos matemáticos que tratam das derivadas parciais, irão trazer alguma das notações a seguir para as derivadas parciais em relação a x e y. Se $z = f(x,y)$ temos:

$$f_x(x,y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$
$$f_y(x,y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Com as considerações feitas, podemos seguir os seguintes passos para calcular as derivadas parciais de uma função do tipo $z = f(x,y)$: Para achar $\frac{\partial f}{\partial x}$ olhamos y como constante e diferenciamos $f(x,y)$ em relação a x. De forma análoga, para encontrar $\frac{\partial f}{\partial x}$ deixamos x como constante e derivamos $f(x,y)$ em relação a y.

Exemplo 2.2 *Se $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, determine $f_x(2,1)$ e $f_y(2,1)$*

Solução:

Mantendo y constante obtemos a derivada parcial em relação a x dada por:

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^3 \Rightarrow f_x(2,1) = 3.2^2 + 2.1.1^3 = 16$$

Procedendo da mesma forma, deixando x constante obtemos a derivada parcial em relação a y:

$$f_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4y \Rightarrow f_y(2,1) = 3.2^2.1^2 - 4.1 = 8$$

2.4.1 Interpretação Geométrica

Para apresentar uma interpretação geométrica das derivadas parciais, devemos nos lembrar que uma equação $z = f(x,y)$ representa uma superfície S. Se $f(a,b) = c$, então o ponto $P(a,b,c)$ pertence a S. Fixando $y = b$, analisamos à curva C_1 na qual o plano vertical $y = b$ intercepta S. Da mesma forma, o plano vertical $x = a$ intecepta S na curva C_2. As curvas C_1 e C_2 passam pelo ponto P. Observe a figura: Notemos que a curva C_1 é o gráfico da função $g(x) = f(x,b)$,

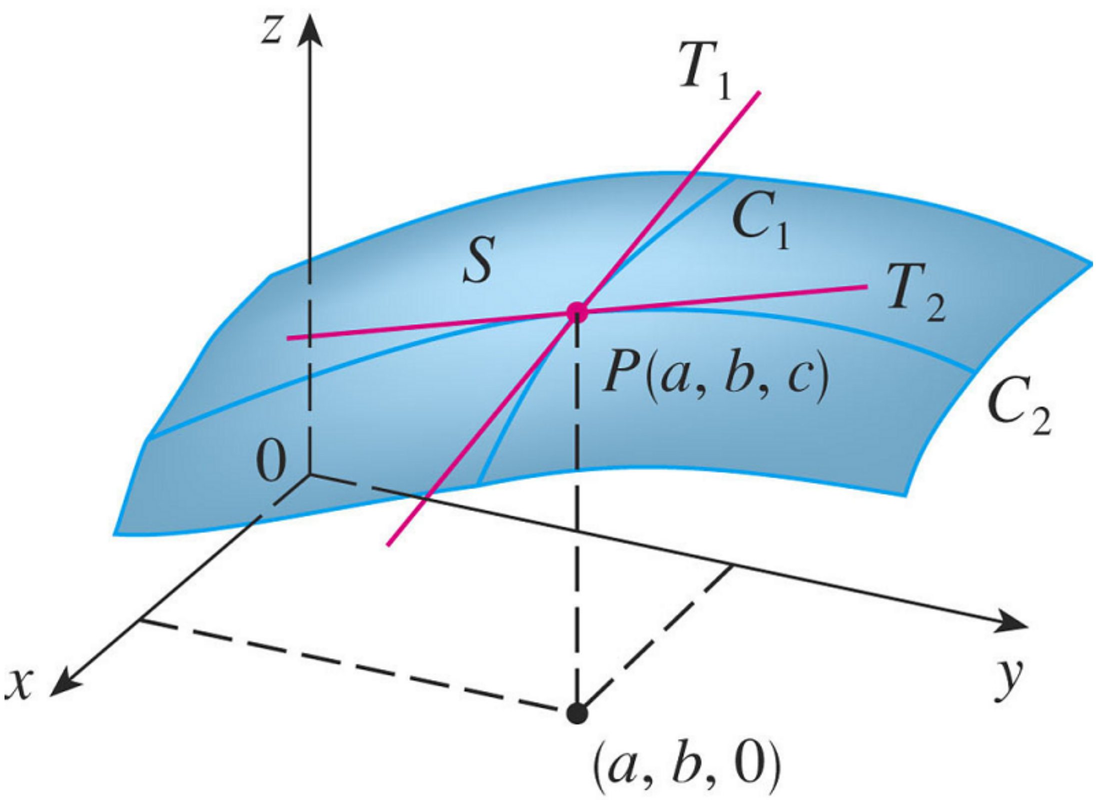


Figura 5: Derivadas Parciais

de forma que a inclinação da reta tangente T_1 no ponto P é $g'(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x}$. A curva C_2 é o gráfico da função $h(x) = f(a,y)$, que tem no ponto P uma reta tangente T_2 que a derivada da função em relação a y no ponto P, ou seja $h'(b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

As derivadas parciais então, podem ser interpretadas geometricamente como as inclinações das retas tangentes em $P(a,b,c)$ aos traços C_1 e C_2 de S nos planos $y = b$ e $x = a$.

O conceito de derivada parcial pode ser estendido para funções de n variáveis. Vejamos a definição:

Definição 2.3 *Seja $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ um ponto em $\mathbb{R}^n$ e seja f uma função de n variáveis $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Então a derivada parcial de f em relação a x_k é a função, denotada por $D_k f$, tal que seu valor funcional em qualquer ponto P do domínio de f seja dado por*

$$D_k f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1},x_k+h,x_{k+1},\ldots,x_n) - f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{h}$$

Se o limite existir.

Exemplo 2.3 *Dada $f(x,y,z) = x^2y + yz^2 + z^3$ Determine as derivadas parciais em relação a $x, y,$ e z para um ponto qualquer (x,y,z).*

Se mantivermos y e z constantes, iremos encontrar a derivada parcial em relação a x. Assim:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy$$

Mantendo x e z constantes, temos a derivada parcial em relação a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + z^2$$

e por último mantendo x e y constantes obteremos a derivada parcial em relação a z:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y) = 2yz + 3z^2$$

3 DIFERENCIABILIDADE

Ao considerarmos uma função $f(x)$ de uma variável, podemos definir a diferenciabilidade da mesma baseados nos incrementos Δy que a função recebe para cada ponto em que ela é derivável. Onde $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Sabemos que em tais pontos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1}$$

Isso significa que para $|\Delta x|$ suficientemente pequeno, sabendo que $f'(x) \approx \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, tem-se que:

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x. \tag{2}$$

O segundo membro da equação em (2) é conhecido como diferencial de y e denotado por dy.

Analisemos na figura a seguir o que acontece quando fazemos um incremento Δy na função:

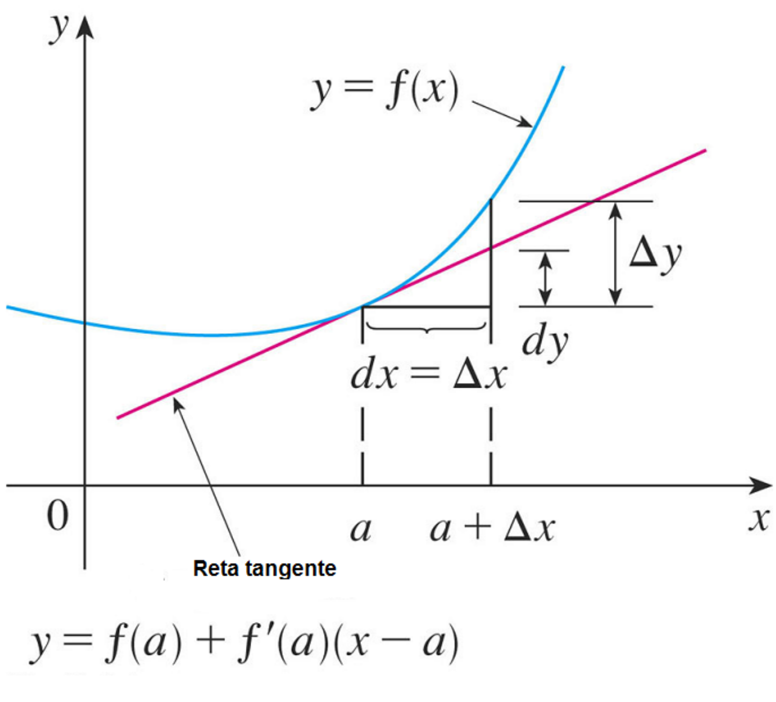


Figura 6: Incrementos dados na função

A figura mostra as relações entre o incremento Δy e o diferencial dy: Vemos que Δy representa a variação de altura com relação à curva $y = f(x)$ e dy nos dá a variação de altura da reta tangente quando x varia da quantidade $dx = \Delta x$. A diferença $\Delta y - dy$ nos dá o erro cometido pela aproximação da diferencial.

Se tomarmos a equação (2) e dividí-la por dx Obtemos:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \text{ se } dx \neq 0 \tag{3}$$

Essa relação representa a derivada como um quociente entre duas diferenciais, diferente de pensarmos apenas na notação de derivada $\frac{dy}{dx}$.

3.1 DIFERENCIABILIDADE PARA DUAS VARIÁVEIS

Vamos agora, estender para funções de duas variáveis reais o conceito de diferenciabilidade a partir da definição dada para funções de uma única variável.

Vimos que uma função $f(x)$ é diferenciável ou derivável,(ao se tratar de uma única variável estes termos são equivalentes)quando o limite dado em (1) existir e for finito. No entanto essa forma de representação não torna possível sua extensão para funções de duas ou mais variáveis, pois Δx será um par ordenado, o que faz com que a razão incremental não tenha sentido. Desta forma devemos encontrar uma forma similar de representação da razão incremental que seja passível de generalização:

Supondo $f(x)$ diferenciável em x_0, existe um número real $a = f'(x_0)$ tal que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = a$$

De onde obtemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - a\Delta x}{\Delta x} = 0$$

e esse resultado é igual a zero quando $\Delta x \to 0$ tanto pela direita quanto pela esquerda, assim podemos escrever:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - a\Delta x}{|\Delta x|} = 0$$

Portanto a forma que equivale a dada em (1) que é passível de generalização é dada por:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - a\Delta x}{|\Delta x|} = 0 \tag{4}$$

Com a possibilidade de extensão para funções com mais de uma variável, tomemos uma outra notação mais utilizada, em que, $\Delta x = h$ e $\Delta y = k$ são os incrementos nas variáveis x e y respectivamente, temos:

Definição 3.1 *Sejam $f : A \to \mathbb{R}$, sendo A um conjunto aberto do $\mathbb{R}^2$, e $(x_0, y_0) \in A$. Dizemos que f é diferenciável em (x_0, y_0) se e somente se existirem reais a e b tais que*

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - ak}{\|(h,k)\|} = 0$$

Teorema 3.1 *Se f for diferenciável em (x_0, y_0) então f será contínua em (x_0, y_0).*

Dem:

Sendo $f(x, y)$ diferenciável em (x_0, y_0), da definição (3.1), existem reais a e b tais que

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

onde $E(h,k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - ak$, pode ser interpretado como o erro cometido pela aproximação feita em relação ao incremento realizado e pode ser escrito como a função:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + ah + ak + E(h,k) \tag{5}$$

Aplicando o limite em (5) e tendo em vista que:

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} (ah + bk) = 0$$

e

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} E(h,k) = \lim_{(h,k) \to (0,0)} \|(h,k)\| \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

encontramos que

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0)$$

provando que a função é contínua no ponto (x_0, y_0) ■

Quando temos uma função que é diferenciável em um ponto qualquer do domínio (x_0, y_0) existe a garantia de que esta função admite derivadas parciais nesse ponto e a transformação linear

$$L(h,k)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k$$

é a única tranformação que tem a seguinte propriedade:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k}{\|(h,k)\|}=0 \qquad (6)$$

Teorema 3.2 *Seja $f:A\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, A aberto, e seja $(x_0,y_0)\in A$. Se f for diferenciável em (x_0,y_0), então f admitirá derivadas parciais neste ponto.*

Demonstração

Se a função é diferenciável em (x_0,y_0), existem reais a e b tais que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|}=0 \qquad (7)$$

segue de (7)

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{E(h,0)}{\|(h,0)\|}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)-ah}{|h|}=0$$

De onde obtemos

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)-ah}{h}=0$$

e, portanto,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=a=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

Desta forma vemos que a constante a necessária para a diferenciabilidade de uma função em um ponto de seu domínio, é a derivada parcial da função em relação à variável x.

Da mesma forma tomemos o limite:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{E(0,k)}{\|(0,k)\|}=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)-bk}{|k|}=0$$

De forma análoga ao desenvolvimento anterior para obtermos a constante a, encontramos que $b=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

Com isso, do teorema (3.1) as constantes a e b as quais dependem a diferenciabilidade em um ponto são dadas por:

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ e } b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

e estas, serão as os únicos números reais, os quais fazem com que o limite em (3.1) seja igual a zero. Disso decorre o corolário a seguir:

Corolário 3.1 *Seja $f(x,y)$ uma função definida em um conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ e seja $(x_0, y_0) \in A$. Tem-se f é diferenciável em $(x_0, y_0) \Leftrightarrow$*

$$\begin{cases} a) \quad f \quad \text{admite derivadas parciais em } (x_0, y_0) \\ b) \quad \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0 \\ E(h,k) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k \end{cases}$$

De acordo com o corolário (3.1), para provar que uma função é diferenciável em um ponto (x_0, y_0), temos que mostrar que existem as derivadas parciais nesse ponto e que o limite em (6) é realmente igual a zero.

Cabem ainda algumas considerações sobre o corolário (3.1):

1. Se uma das derivadas parciais não existir em um ponto qualquer do domínio, a função não é diferenciável nesse ponto;

2. Se ambas as derivadas parciais existirem, porém o limite não ser igual a zero, a função também não será diferenciável no ponto;

3. Se a função não for contínua no ponto (x_0, y_0), automaticamente não será diferenciável nesse ponto.

Dizemos então , que uma função f é *diferenciável* em um conjunto $A \subset D_f$ se a função for diferenciável em todo ponto de A.

Exemplo 3.1 *Prove que $f(x,y) = x^2y$ é uma função diferenciável.*

Solução:

Como vimos, para mostrar que a função é diferenciável, basta mostrar que existem as derivadas parciais e que o limite (6) é igual a zero.

A função é contínua em todo $\mathbb{R}^2$. As derivadas parciais são dadas por :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2xy \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x^2 \end{cases}$$ Como vemos as derivadas parciais existem para todo ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Verifiquemos agora, o limite:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k}{\|(h,k)\|} =$$
$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(x+h)^2(y+k) - x^2y - 2xyh - x^2k}{\|(h,k)\|}$$
$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{2xhk + h^2y + h^2k}{\|(h,k)\|}$$
$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left(2xk\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} + hy\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} + hk\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)$$

Como para $(h,k) \neq (0,0)$, $\dfrac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1$, podemos dizer que a mesma é limitada por 1, e sabemos também que o produto de uma função que tem limite igual a zero por uma outra limitada é igual a zero (ver apêndice), chegamos ao seguinte resultado:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left(2xk\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} + hy\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} + hk\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) = 0$$

Portanto a função $f(x,y) = x^2y$ é uma função diferenciável. ■

Exemplo 3.2 *A função* $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4} & se(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se(x,y) = (0,0) \end{cases}$ *não é diferenciável em* $(0,0)$

Solução:

Vamos primeiramente verificar se a função é contínua em $(0,0)$, pois caso contrário, já vimos que a descontinuidade implicará a não diferenciabilidade.

Para verificar a continuidade tomemos o limite da função tendendo ao ponto $(0,0)$ por dois caminhos:

Seja C_1 um caminho que tende ao ponto $(0,0)$ pela parábola $x = y^2$. Assim temos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{2y^4}{y^4+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{2y^4}{2y^4} = 1$$

Tomemos agora um caminho C_2 que tende ao ponto $(0,0)$ por $y = 0$. Vejamos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

Foi possível perceber que tomando o limite por dois caminhos diferentes o resultado não é o mesmo, o que indica que o limite não existe. Ou ainda, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(0,0) \neq f(0,0) = 0$

Desta forma afirmamos que a função não é contínua nesse ponto, não sendo então, diferenciável no mesmo. $\blacksquare$

Exemplo 3.3 *Provemos que a função* $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & se(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se(x,y) = (0,0) \end{cases}$ *não é diferenciável no ponto* (x_0,y_0).

Solução:

Primeiramente, notemos que a função é contínua no ponto $(0,0)$. Observe:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\frac{x^2}{x^2+y^2} = 0. \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

Como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$, portanto limitada, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Temos então que a a função é contínua no ponto $(0,0)$, pois $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(0,0) = f(0,0) = 0$.

Verifiquemos agora se as derivadas parciais existem no ponto $(0,0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0 \end{aligned}$$

Como vemos as derivadas parciais existem no ponto. Basta agora verificar se o limite em (6) existe e é finito:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k}{\|(h,k)\|}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-1h-0k}{\sqrt{h^2+k^2}}\\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\dfrac{h^3}{h^2+k^2}-0-h}{\sqrt{h^2+k^2}}\\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\dfrac{h^3-h^3-hk^2}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}\\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\dfrac{h^3}{h^2+k^2}-0-h}{\sqrt{h^2+k^2}}\\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\dfrac{h^3-h^3-hk^2}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}\\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}
\end{aligned}
$$

Para $h=k=t$, temos:

$$\lim_{t\to 0}\frac{-t^3}{2t^2\sqrt{2t^2}} = \lim_{t\to 0}\frac{-t}{2\sqrt{2}|t|}$$

Esse limite não existe, pois os limites laterais são diferentes. Desta forma concluímos que $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k}{\|(h,k)\|}$ também não existe.

Desta forma, observamos que a função é contínua, as derivadas parciais existem, porém, o limite (6) não é igual a zero. Logo a função não é derivável em $(0,0)$ ■

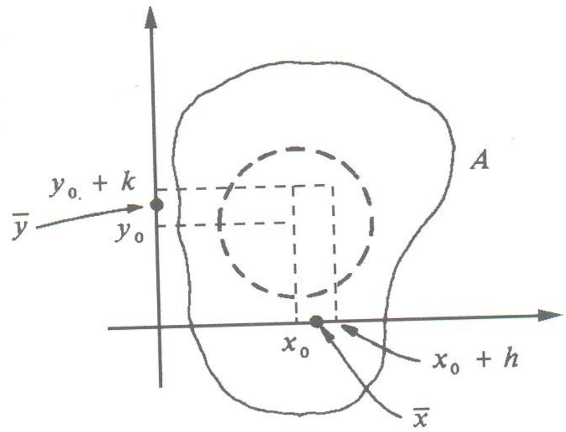
3.2 CONDIÇÃO SUFICIENTE PARA A DIFERENCIABILIDADE EM UM PONTO

Em alguns casos, verificar pela definição, que uma função é ou não diferenciável em um conjunto aberto do $\mathbb{R}^2$, se torna uma missão laboriosa. Pensando nisso, demonstraremos um teorema que garante que a continuidade das derivadas parciais em um conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ garante que o mesmo será diferenciável em todos os pontos de seu domínio.

Teorema 3.3 *Seja a função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, em que A é um conjunto aberto, e $(x_0,y_0) \in A$. Se as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existirem em A e forem contínuas no ponto (x_0,y_0), então a função f será diferenciável neste ponto.*

Demonstração:

Como foi dito no teorema, o conjunto A é aberto. Logo existe uma bola aberta B com centro no ponto (x_0, y_0) de forma que $B \subset A$. Consideremos os incrementos em x e y denotados por h e k tais que $(x_0 + h, y_0 + k) \in B$. Observe o desenho que mostra essa situação:



Tomemos $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$, somando e subtraindo $f(x_0, y_o + k)$ obtemos:

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \underbrace{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_o+k)}_{I} + \underbrace{f(x_0, y_o+k) - f(x_0, y_0)}_{II} \quad (8)$$

Fazendo $G(x) = f(x, y_0 + k)$ pelo Teorema do Valor Médio, existe um $\bar{x}$ entre x_0 e $x_0 + h$ (ver figura), tal que:

$$(I) = G(x_0 + h) - G(x_0) = G'(\bar{x})h = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0 + k)h$$

De forma Análoga, existe um $\bar{y}$ entre y_0 e $y_0 + k$ tal que

$$(II) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y})k$$

Desta forma, substituindo as identidades acima em (8) temos:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0 + k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y})k$$

Subtraindo $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$ em ambos os membros da igualdade obtemos:

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},y_0+k)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\bar{y})k-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=$$
$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},y_0+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right]h+\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\bar{y})-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right]k$$

Aplicando o módulo na expressão acima e dividindo pela norma de (h,k), chegamos a:

$$\left|\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\|(h,k)\|}\right|=$$
$$\left|\frac{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},y_0+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right]h+\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\bar{y})-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right]k}{\|(h,k)\|}\right|$$
$$\Rightarrow\left|\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\|(h,k)\|}\right|\leq$$
$$\underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},y_0+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|}_{III}\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}+\underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\bar{y})-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right|}_{IV}\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Temos por hipótese que as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em (x_0,y_0). Assim, passando o limite na expressão acima notamos que (III) e (IV) tendem a zero quando $(h,k)\longrightarrow(0,0)$ e ainda sabemos que $\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}\leq 1$ e, da mesma forma $\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\leq 1$, portanto limitadas. Assim obtemos:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}h-\frac{\partial f}{\partial y}k}{\|(h,k)\|}=0$$

Donde concluímos que a função é diferenciável em (x_0,y_0)

OBSERVAÇÃO

Seja $f(x,y)$ uma função. Dizemos que f é de classe C_1 em um conjunto aberto A, se as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ forem contínuas em A.
Disso e do teorema (3.3), segue o corolário:

Corolário 3.2 *Seja $f:A\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, A um conjunto aberto do $\mathbb{R}^2$. Se f for de classe C_1 em A, então a função será diferenciável em A.*

Exemplo 3.4 *Mostre que a função $f(x,y)=sen(x^2+y^2)$ é diferenciável em todo $\mathbb{R}^2$*

De fato,
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2xcos(x^2+y^2) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2ycos(x^2+y^2) \end{cases}$$ Notemos que as derivadas parciais são contínuas em todo $\mathbb{R}^2$.
Portanto é diferenciável em todo plano. ■

O teorema e corolário anteriores nos contam que se uma função admite derivadas parciais em um ponto (x_0,y_0) ela será diferenciável nesse ponto. No entanto, a recíproca não é verdadeira. Existem funções que são diferenciáveis em um ponto, porém as derivadas parciais não existem nesse ponto.

Exemplo 3.5 *Use o teorema (3.3) para provar que a função $f(x,y) = x^3+3xy-5y^3$ é diferenciável em toda parte.*

Solução:
Pelo teorema, devemos observar se as derivadas parciais existem para todos os pontos (no caso) do $\mathbb{R}^2$:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 3x^2+3y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 3x-15y^2 \end{cases}$$

Vemos que ambas as derivadas são contínuas em todo ponto $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. Portanto a função é diferenciável em toda parte. ■
No exemplo (3.5) a função era uma função polinomial, e em toda função polinomial temos a garantia que ela é contínua $\forall (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$

Exemplo 3.6 *Seja* $\begin{cases} (x^2+y^2)sen\frac{1}{x^2+y^2} & se(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se(x,y) = (0,0) \end{cases}$

i) Encontre as derivadas parciais;

ii) Mostre que as derivadas parciais não são contínuas no ponto (x_0,y_0);

iii) Prove que a função é diferenciável em qualquer ponto.

$i)$ Para encontrar as derivadas parciais, temos que fazê-lo em duas partes: No ponto $(0,0)$ e para um ponto (x,y) qualquer, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2sen\frac{1}{x^2}}{x},$$

ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} x\,sen\frac{1}{x^2} = 0$$

Da mesma forma:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{y^2 sen\frac{1}{y^2}}{x} = \lim_{y\to 0} y\,sen\frac{1}{y^2} = 0$$

Desta forma obtemos o seguinte resultado para a derivada da função:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x \quad sen\frac{1}{x^2+y^2} - \quad \frac{2x}{x^2+y^2} \quad cos\frac{1}{x^2+y^2} & se(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y \quad sen\frac{1}{x^2+y^2} - \quad \frac{2x}{x^2+y^2} \quad cos\frac{1}{x^2+y^2} & se(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$ii)$ Tomemos o limite das derivadas parciais em pontos em que $x = y$, consideremos para efeito de cálculo, $x = y = t$. Assim obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(t,t) &= \lim_{t\to 0} 2t\,sen\frac{1}{t^2+t^2} - \frac{2t}{t^2+t^2}cos\frac{1}{t^2+t^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(t,t) &= \lim_{t\to 0} 2t\,sen\frac{1}{2t^2} - \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}cos\frac{1}{2t^2} \end{aligned}$$

Portanto $\frac{\partial f}{\partial x}$ não existe, uma vez que $\lim_{t\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(t,t) \neq \frac{\partial f}{\partial x}(t,t) = 0$ De forma análoga, encontramos que $\frac{\partial f}{\partial y}$ também não existe.

$iii)$ Bom, como a função é dada em sentenças, precisamos considerar duas possibilidades, $(x,y) = (0,0)$ e $(x,y) \neq (0,0)$ Se $(x,y) = (0,0)$ temos:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k}{\|(h,k)\|}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(h^2+k^2)sen\frac{1}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \underbrace{\lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2}}_{a}\ \underbrace{\lim_{(h,k)\to(0,0)} sen\frac{1}{h^2+k^2}}_{b}$$

Note que o limite em (a) é igual a zero e em (b) temos uma função limitada. Portanto

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k}{\|(h,k)\|}=0$$

Para um ponto $(x,y)\neq(0,0)$ do $\mathbb{R}^2$, não teremos problema, pois as derivadas parciais são contínuas.

Desta forma, observamos que mesmo não tendo as derivadas parciais contínuas em todo ponto $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ obtemos que a função dada é diferenciável em todo plano.

Exemplo 3.7 *Determine o conjunto dos pontos em que a função abaixo é diferenciável*

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & se(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Primeiramente, vamos verificar a continuidade das derivadas parciais para os pontos do $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y(x^2+y^2)-xy2x}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)} & se(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$e$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & se\,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se\,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Observando as derivadas parciais já percebemos que estas serão contínuas para todo ponto do plano diferente de $(0,0)$. Portanto em todos os outros a função é diferenciável. Vamos então verificar a diferenciabilidade no ponto $(0,0)$ verificando se o limite (6) é realmente igual a 0:

$$\begin{aligned} & \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k}{\|(h,k)\|} \\ = & \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)h-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\|(h,k)\|} \\ = & \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ = & \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} \end{aligned}$$

Para $h = k = t$ obtemos o seguinte resultado:

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2}{2t^2\sqrt{2t^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{2\sqrt{2}|t|}$$

Podemos observar que a função não é diferenciável no ponto $(0,0)$, uma vez que o limite vai para o infinito.
Concluímos desta forma que o conjunto $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ é o conjunto de todos os pontos em que a função é diferenciável.

3.3 PLANO TANGENTE E RETA NORMAL

Como comentado anteriormente, se uma função $f(x,y)$ é diferenciável em um ponto (x_0,y_0) de seu domínio, temos:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k}{\|(h,k)\|} = 0$$

Fazendo na equação acima, $x_0 + h = x$ e $y_0 + k = y$ chegamos a

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_),y_0)\|}$$

De acordo com o exposto acima podemos aproximar o valor de $f(x,y)$ fazendo:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0$$

De onde tiramos pela aproximação que:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Chamando o segundo membro da equação acima de $T(x,y)$ e o erro cometido por essa aproximação de $E(x,y)$, podemos dizer que:

$$f(x,y) = T(x,y) + E(x,y)$$

onde

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{E(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0 \tag{9}$$

O que se expõe em (9) é que $T(x,y)$ é a única função afim que aproxima $f(x,y)$ com $E(x,y)$ que tende a zero mais rapidamente que $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|$, quando $(x,y)\to(x_0,y_0)$.

Com base no que definimos anteriormente se a função for diferenciável no ponto (x_0,y_0), fazemos a seguinte definição:

Definição 3.2 *Seja f diferenciável no ponto (x_0,y_0). O plano*

$$z-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}f(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

denomina-se ***plano tangente*** *ao gráfico de f no ponto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.*

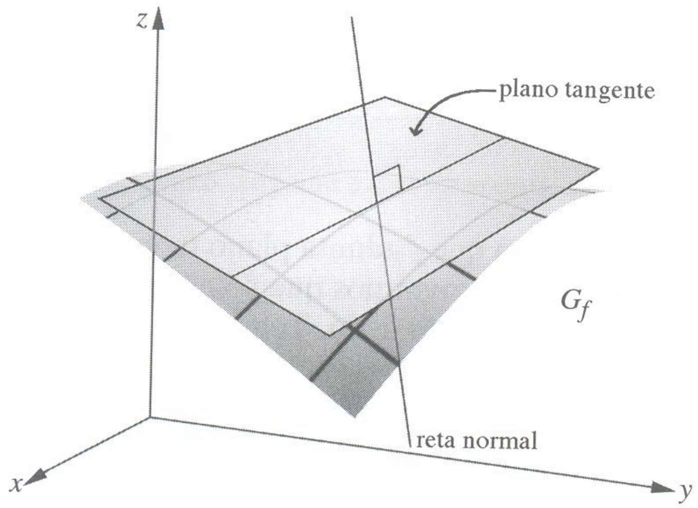


Figura 7: Plano Tangente

Observe que só definimos o plano tangente em $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ se a função for diferenciável nesse ponto. Se a função não for diferenciável em (x_0,y_0), mas admitir derivadas parciais nesse ponto, então o plano em (3.2) exitirá, mas não será um plano tangente à superfície. Em notação de produto escalar, o plano definido em (3.2) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),-1\right).[(x,y,z)-(x_0,y_0,f(x_0,y_0))]=0$$

Segue então que no ponto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ o plano tangente é perpendicular à direção do vetor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),-1\right). \tag{10}$$

A reta que passa pelo ponto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ e é paralela ao vetor (10) denomina-se *reta* *normal* ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. A equação desta reta é

$$(x,y,z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0) + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.8 *Seja $f(x,y) = 3x^2y - x$. Determine as equações do plano tangente e da reta normal do ponto $(1, 2, f(1,2))$.*

Solução: Note que

$$\begin{cases} f(1,2) &= & 5 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= & 6xy - 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= & 3x^2 \end{cases}$$

Como a equação do plano tangente, com $(x_0, y_0) = (1, 2)$ é dado por:

$$z - f(1,2) = \frac{\partial f}{\partial x} f(1,2)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)(y-2)$$

Temos que a equação da reta tangente nesse caso é:

$$z - 5 = 11(x-1) + 3(y-2)$$

Para a reta normal temos:

$$(x,y,z) = (1, 2, f(1,2) + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \frac{\partial f}{\partial y}(1,2), -1\right)$$

ou seja,

$$(x,y,z) = (1,2,5) + \lambda\,(11, 3, -1))$$

Exemplo 3.9 *Seja* $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & se\,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se\,(x,y) = (0,0) \end{cases}$. *Mostre que o gráfico de f não admite plano tangente em $(0, 0, f(0,0))$.*

Solução:
De acordo com a definição (3.2) para que a função admita um plano tangente em um ponto, a função deve ser diferenciável nesse ponto. Se provarmos então que a função não é diferenciável em $(0,0)$ seguirá que a mesma não admitirá plano tangente nesse ponto.

Vamos primeiramente encontrar as derivadas parciais no ponto $(0,0)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) & = & \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x^2} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) & = & \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0}{y^2} = 0 \end{cases}$$

Para verificar a diferenciabilidade, tomemos o limite (6), analisando se seu resultado é realmente igual a zero:

$$\begin{aligned} & \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k}{\|(h,k)\|} \\ = & \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)h-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\|(h,k)\|} \\ = & \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} \end{aligned}$$

Tomando o limite com $(h,k)\to(0,0)$ por dois caminhos diferentes encontramos:

Seja C_1 o caminho que faz o ponto tender a zero por $h=0$. Se assim for temos que

$$\lim_{k\to 0} \frac{0.k^2}{(k^2)\sqrt{k^2}} = 0$$

Por outro lado tomemos o caminho C_2 que faz tender a zero pela reta $h=t$. Assim teríamos:

$$\lim_{k\to 0} \frac{k^3}{2k^2\sqrt{2k^2}} = \lim_{k\to 0^+} \frac{k^3}{2k^3\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Nota-se então que o limite não existe, pois tomando-o por dois caminhos diferentes os resultados não foram iguais. Logo a função não é diferenciável no ponto $(0,0)$ não admitindo plano tangente no mesmo. ∎

3.4 DIFERENCIAL

Para uma função de duas variáveis, $z=f(x,y)$, definimos os diferenciais denotados por d_x *e* d_y como variáveis independentes; ou seja, podem ter qualquer valor. O diferencial obtido em z denotado por d_z é chamado de diferencial total. Observe graficamente os acréscimos em uma função de duas variáveis:

Consideremos uma função $f(x,y)$ diferenciável em um ponto x_0,y_0 e a transformação linear $L:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

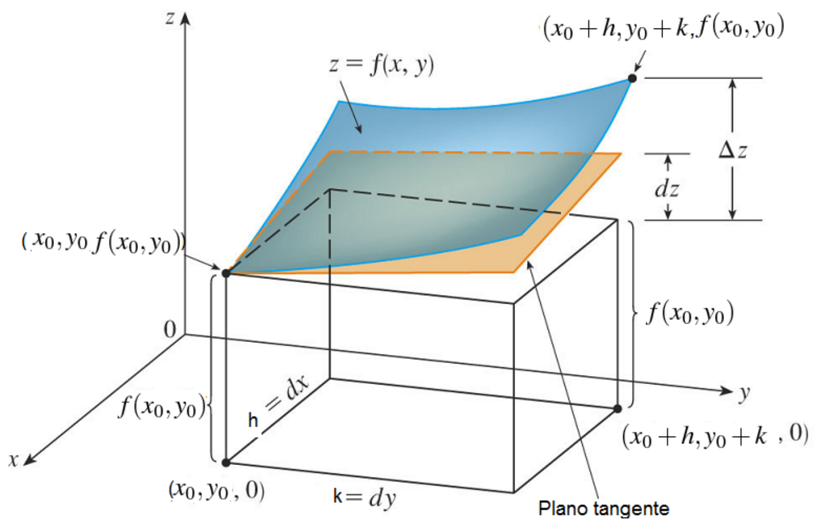


Figura 8: Diferencial em $\mathbb{R}^2$

$$L(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k \tag{11}$$

Afirmamos, pelo visto anteriormente que $L(h,k)$ é a única transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ que aproxima o acréscimo

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)$$

com erro $E(h,k)$ tendendo a zero mais rapidamente que $\|(h,k)\|$, fazendo com que possamos afirmar que

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k}_{L(h,k)} + E(h,k)$$

Com

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

Desta forma, dizemos que a transformação linear L dada em (11) é chamada de *diferencial de f em* (x_0,y_0).

Seja $T(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$. Sabemos que o gráfico de T é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $((x_0,y_0), f(x_0,y_0))$. Fazendo $x = x_0 + h$ e $y = y_0 + k$ Obtemos:

$$\begin{aligned}
T(x,y) &= f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\\
T(x_0+h,y_0+k) &= f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x_0+h-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y_0+k-y_0)\\
T(x_0+h,y_0+k) &= f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k\\
T(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0) &= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k}_{L(h,k)}
\end{aligned}$$

Assim, podemos interpretar a tranformação $L(h,k)$ como sendo a variação que sofre o plano T, quando se passa do ponto (x_0,y_0), ao ponto (x_0+h,y_0+k)

Por outro lado, $f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$ é a variação da função f quando esta passa do ponto x_0,y_0 para o ponto (x_0+h,y_0+k), o que nos permite escrever:

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)\cong\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k$$

e essa aproximação fica cada vez melhor à medida que os módulos de $h\,e\,k$ ficam cada vez menores.

Muitas vezes, nos referimos a $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k$ como a diferencial de f no ponto (x_0,y_0) relativo aos acréscimos $h\,e\,k$. Assim se tivermos uma função $z=f(x,y)$ dizemos que a diferencial da função para um ponto (x,y) qualquer é denotada por dz e descrita da seguinte forma:

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy \tag{12}$$

Utiliza-se o símbolo Δz para representar a variação em f quando se passa do ponto (x,y) para $(x+dx,y+dy)$, ou seja:

$$\Delta z=f(x+dx,y+dy)-f(x,y)$$

Assim, como a aproximação vai ficando cada vez melhor ao diminuirmos os módulos de $dx\ e\ dy$ podemos dizer que $\Delta z\cong dz$

Exemplo 3.10 *Seja* $z=x^2y$

a) Calcule a diferencial

b) Utilizando a diferencial, calcule um valor aproximado para a variação Δz em em z, quando se passa de $x = 1$ e $y = 2$ para $x = 1,02$ e $y = 2,01$

c) Calcule o erro cometido na aproximação acima.

Resolução

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2$

assim $dz = 2xydx + x^2dy$

b) $\Delta z \cong dz$ ou $\Delta z \cong 2xydx + x^2dy$, fazendo $x = 1$, $y = 2$, $dx = 0,02$, $dy = 0,01$ resulta que $\Delta z \cong 0,09$

c) $\Delta z = (x+dx)^2 + (y+dy) - x^2y = (1,02)^2(1,01) - 2 = 0,091204$ (valor exato). O erro cometido na avaliação acima é de 0,001204.

4 APLICAÇÕES

Visto um pouco da teoria sobre a diferenciabilidade,vamos agora por meio de exemplos práticos, estudar algumas aplicações que utilizam tais conceitos. O estudo sobre as taxas de variação, se fazem presentes em diversas situações. Na maioria das vezes utilizam-se equações com essas taxas, equações estas chamadas de “Equações diferencias”. No nosso caso atentemomos às taxas dadas por acréscimos nas variáveis em estudo.

Ao estudarmos tais acréscimos vimos que podemos aproximar o valor da variação por meio da equação diferencial exata:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy$$

E essa representação pode ser ainda estendida para funções de mais variáveis, basta apenas considerar os acréscimos dados para cada uma delas. Matematicamente podemos escrever a equação diferencial para n variáveis como segue:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\cdots,x_n)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,\cdots,x_n)dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,\cdots,x_n)dx_n$$

Em que $(x_1,\cdots,x_n)$ é um ponto do domínio da função e $dx_1 \cdots dx_n$ são os acréscimos feitos em cada uma da variáveis.

Com tais considerações, vamos agora aos exemplos, retirados basicamente de três livros: (GUIDORIZZI, 2001b), (LEITHOLD, 1994), (STEWART, 2005b).

Para facilitar a compreensão, veremos separadamente as aplicações para cada área.

4.1 APLICAÇÕES EM CÁLCULOS NUMÉRICOS

Vejamos alguns exemplos de aplicação da diferencial para operações numéricas. O intuito de utilizar os acréscimos é evidentemente facilitar cálculos que aparentemente são de difícil resolução.

Exemplo 4.1 *Utilizando as diferenciais, calcule o valor aproximado de* $(1,01)^{2,03}$ *(GUIDORIZZI, 2001b)*

Para utilizarmos as diferenciais, vamos primeiro definir uma função f que dependa de dois valores, um deles é a base e o outro o expoente. Assim a função f pode ser escrita como:

$$f(x,y) = x^y$$

Para o nosso caso, como o intuito é calcular $(1,01)^{2,03}$, podemos considerar o ponto $(1,2)$ do domínio da função e um acréscimo de 0,01 para a variável x e um acréscimo de $0,03$ na variável y, e representaremos por: $dx = 0,01\, e\, dy = 0,03$.Vejamos que em:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy$$

dz representa o acréscimo aproximado quando passamos do ponto $(1,2)$ para o ponto $(1,01;2,03)$ desta forma, podemos calcular $f(1,01;2,03)$ fazendo $f(1,2)+dz$.
Como $f(1,2) = 1^2 = 1$, basta calcularmos dz:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= yx^{y-1} &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) &= 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x^y\, lnx &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) &= 0 \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy \\ dz &= 2.0,01 + 0.0,03 \\ dz &= 0,02 \end{aligned}$$

Portanto,
$(1,01)^{2,03} \cong 1 + 0,02 = 1,02$

Exemplo 4.2 *Utilizando diferenciais, calcule o valor aproximado de* $\sqrt{(0,01)^2 + (3,02)^2 + (3,97)^2}$ *(GUIDORIZZI, 2001b)*

Nesse exemplo, vemos que é apropriado considerarmos um função de três variáveis, pois a raiz quadrada contém três valores. Assim podemos tomar a função $w = f(x,y,z)$ representada por:

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

e centremos ainda no ponto $(0,3,4)$ por ser próximo dos valores da expressão. Assim o valor da expressão $\sqrt{(0,01)^2 + (3,02)^2 + (3,97)^2}$ pode ser aproximado por $f(x,y,z) + dw$, onde dw

é a diferencial da função quando a mesma passa de $(0,3,4)$ para $(0,01;3,02;3,97)$. Antes de iniciar o cálculo vejamos que $dx = 0,01$, $dy = 0,02\, e\, dz = -0,03$ e ainda:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) & = & \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & = & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \rightarrow & \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,3,4) & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) & = & \frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & = & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \rightarrow & \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,3,4) & = & \frac{3}{5} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) & = & \frac{1}{2}\frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & = & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \rightarrow & \dfrac{\partial f}{\partial z}(0,3,4) & = & \frac{4}{5} \end{cases}$$

Calculando a diferencial temos:

$$\begin{aligned} dw &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)dz \\ dw &= 0.0,01 + \frac{3}{5}.0,02 + \frac{4}{5}.(-0,03) \\ dw &= -\frac{3}{250} \end{aligned}$$

Tendo em vista que $f(0,3,4) = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ vemos que:

$$\sqrt{(0,01)^2 + (3,02)^2 + (3,97)^2} \cong 5 - \frac{3}{250} \cong 4,988$$

4.2 APLICAÇÕES ENVOLVENDO GEOMETRIA

Na geometria trabalhamos com diferentes relações à respeito de variações. Relações de área, volume entre outras. Vejamos alguns desses exemplos que podem ser trabalhados usando a diferencial. Vale ressaltar que em todas as funções tomadas o leitor deve subtender que estas são diferenciáveis no domínio em que o acréscimo é feito, o que permite “enfrentarmos” a situação por meio das diferenciais.

Exemplo 4.3 *Um dos dos catetos de um triângulo retângulo é $x = 3$ e o outro, $y = 4$. Calcule um valor aproximado para a variação Δz na hipotenusa z, quando x aumenta $0,01\,cm$ e y decresce $0,1\,cm$.*
(GUIDORIZZI, 2001b)

Como sabemos todo triângulo retângulo obedece ao teorema de Pitágoras: $hip^2 = cat^2 + cat^2$. Com isso podemos definir a função que nos dá a medida da hipotenusa em função dos catetos x e y como segue:

$$z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

As variações dadas nos indicam que $dx = 0,01$ e $dy = 0,1$. Calculando as derivadas parciais em relação á x e y, obtemos: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(3,4) = \frac{3}{5} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(3,4) = \frac{4}{5} \end{cases}$

Donde obtemos:

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy \\ dz &= \frac{3}{5}.0,01 + \frac{4}{5}.(-0,1) \\ dz &= -0,074cm \end{aligned}$$

Vimos então que com a variação feita nos catetos a medida da hipotenusa diminui $0,074\,cm$

Exemplo 4.4 *A altura de um cone é $h = 20cm$ e o raio da base é $r = 12cm$. Calcule um valor aproximado para a variação ΔV no volume quando h aumenta $2\,mm$ e r decresce $1\,mm$ (GUIDORIZZI, 2001b)*

Definimos a função que nos dá o volume em função do raio e da altura do cone da seguinte forma:

$$v(h,r) = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

A altura e raio do cone eram respectivamente $20\,e\,12\,cm$ e as variações nos indicam que $dh = 0,2\,cm$ e $dr = -0,1\,cm$. A variação sofrida no volume com os acréscimos apresentados pode ser aproximada por dz. Calculemos então as derivadas parciais:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial h}(h,r) = \dfrac{\pi r^2}{3} \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial h}(20,12) = 48\pi cm^3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial r}(h,r) = \dfrac{2\pi rh}{3} \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial r}(20,12) = 160\pi cm^3 \end{cases}$$

Assim o acréscimo aproximado no volume é calculado como:

$$\begin{aligned} dv &= \frac{\partial f}{\partial h}(h,r)dh + \frac{\partial f}{\partial r}(h,r)dr \\ dv &= 48\pi.0,2 + 160\pi.(-0,1) \\ dv &= -6,4\pi cm^3 \end{aligned}$$

Portanto vemos que com as variações no raio e na altura do cone seu volume diminuiu $6,4\,\pi cm^3$. Um detalhe importante é que se quisermos verificar o quão próximo o número encontrado está do real, basta calcular o volume com o raio antigo e o volume com as alterações no raio e altura e então fazer a diferença entre os valores.

Exemplo 4.5 *Uma caixa de forma cilíndrica é feita com um material de espessura 0,03m. As medidas internas são: altura $2m$ e raio da base $1m$. A caixa é sem tampa. Calcule um valor*

aproximado para o volume do material utilizado na caixa.
(GUIDORIZZI, 2001b)

O volume do material consta do acréscimo no raio e na altura do cilindro. Sendo tal acréscimo igual a $0,03m$ podemos afirmar que $dr = dh = 0,03m$.
A função que fornece o volume de um cilindro em função do raio (r) e da altura (h) é dada por:

$$V(r,h) = \pi r^2.h$$

Desta forma, como o raio e a altura do cilindro são respectivamente iguais a $1m\,e\,2m$ vamos calcular a diferencial no ponto $(1,2)$. Calculemos então as derivadas parciais em relação a $r\,e\,h$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial r}(r,h) & = & 2\pi rh & \rightarrow & \frac{\partial f}{\partial r}(1,2) & = & 4\pi \\ \frac{\partial f}{\partial h}(r,h) & = & \pi r^2 & \rightarrow & \frac{\partial f}{\partial r}(1,2) & = & \pi \end{cases}$$

Calculando dV obteremos o volume aproximado de material usado:

$$\begin{aligned} dv &= \frac{\partial f}{\partial r}(r,h)dr + \frac{\partial f}{\partial h}(r,h)dh \\ dv &= 4\pi.0,03 + \pi.0,03 \\ dv &= 0,15\pi cm^3 \end{aligned}$$

Exemplo 4.6 *Um recipiente fechado na forma de um sólido retangular deve ter um comprimento interno de 8m, uma largura interna de 5m, uma altura de 4 m e uma espessura de 4cm. Use diferenciais para aproximar a quantidade de material necessário para construir o recipiente.*
(LEITHOLD, 1994)

O Volume nesse caso pode ser definido como o acréscimo dado pela espessura do recipiente que no caso é de 4 cm ou 0,04m. Com tal espessura, é fácil verificar que o acréscimo em todas as dimensões da caixa será de 0,08m. Logo chamando de c o comprimento, l a largura e h a altura temos que $dc = dl = dh = 0,08m$.

O volume da sólido é dado por:

$$V(c,l,h) = c.l.h$$

Donde obtemos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial c}(c,l,h) & = & lh & \rightarrow & \dfrac{\partial f}{\partial c}(8,5,4) & = & 20 \\ \dfrac{\partial f}{\partial l}(c,l,h) & = & ch & \rightarrow & \dfrac{\partial f}{\partial l}(8,5,4) & = & 32 \\ \dfrac{\partial f}{\partial h}(c,l,h) & = & cl & \rightarrow & \dfrac{\partial f}{\partial h}(8,5,4) & = & 40 \end{cases}$$

Por diferenciais temos então que o volume aproximado de material é:

$$\begin{aligned} dv &= \frac{\partial f}{\partial c}(c,l,h)dc + \frac{\partial f}{\partial l}(c,l,h)dl + \frac{\partial f}{\partial h}(c,l,h)dh \\ dv &= 20.0,08 + 32.0,08 + 40.0,08 \\ dv &= 7,36m^3 \end{aligned}$$

4.3 EXEMPLOS NA FÍSICA

Na física, são vários os exemplos que podemos citar envolvendo taxas de variação. Nem sempre a tarefa de modelar tais situações é uma tarefa fácil, na maioria das vezes tal trabalho só é possível tomando mão de toda teoria sobre equações diferenciais. Em casos particulares em que as taxas de variação estão bem definidas na forma de acréscimos, podemos utilizar, como feito nos exemplos dados anteriormente, a diferencial da função. Aproximando o efeito sofrido pela mesma de acordo com o acréscimo dado em cada variável.

Separamos então alguns exemplos para analisarmos.

Exemplo 4.7 *A energia consumida num resistor elétrico é dada por* $P = \dfrac{V^2}{R} watts$*. Se* $V = 100 volts$ *e* $R = 10 ohms$*, calcule um valor aproximado para a variação* ΔP *em P, quando V decresce 0,2 volt e R aumenta 0,01 ohms.*
(LEITHOLD, 1994)

As medidas fixas dadas no exemplo nos fornecem, em função de V e R o ponto do domínio $(100,10)$. As variações nas variáveis V e R nos indicam que $dv = -0,2volt\, e\, dr = 0,01\, ohms$. Para encontrar o valor aproximado da variação sofrida pelo consumo de energia no resistor, tomemos a diferencial da função no ponto citado com seus respectivos acréscimos. Calculemos primeiramente as derivadas parciais:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial V}(V,R) & = & \dfrac{2V}{R} & \rightarrow & \dfrac{\partial f}{\partial V}(100,10) & = & \dfrac{2.100}{10} & = & 20 \\ \dfrac{\partial f}{\partial R}(V,R) & = & (-\dfrac{V^2}{R^2}) & \rightarrow & \dfrac{\partial f}{\partial R}(100,10) & = & -\dfrac{100^2}{10^2} & = & -100 \end{cases}$$

Calculando a diferencial obtemos:

$$\begin{aligned} dP &= \frac{\partial f}{\partial V}(V,R)dV + \frac{\partial f}{\partial R}(V,R)dR \\ dv &= 20.(-0,2) - 100.0,01 \\ dv &= -5\,watts \end{aligned}$$

Notamos então, que com as variações em V e R, o consumo de energia do resistor caiu 5 watts.

Exemplo 4.8 *A gravidade específica s é dada pela fórmula*

$$s = \frac{A}{A-W}$$

onde A é o número de quilogramas no peso do objeto no ar e W é o número de quilogramas no peso do objeto na água. Se o peso de um objeto no ar é de 20 quilogramas com erro possível de 0,01 quilogramas e seu peso na água é de 12 quilogramas, com um ero possível de 0,02 quilogramas, ache, aproximadamente, o erro máximo possível no cálculo de s a partir dessas medidas. Ache também o erro máximo relativo possível.
(LEITHOLD, 1994)

O erro máximo em s pode ser estimado pela diferencial da função no ponto em que A=20 e W=12. Temos no exercício que as variações em A e W são: $dA = 0,01kg\ e\ dW = 0,02kg$. O cálculo é então análogo aos feitos nos exercícios anteriores. No entanto vimos que além do erro máximo é pedido o erro relativo. O erro relativo é encotrado se dividirmos o erro pelo valor real dado por: $s(20,12) = \dfrac{20}{8} = 2,5$.

Inicialmente, calculemos as derivadas parciais no ponto $(20,12)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial A}(A,W) = -\dfrac{W}{(A-W)^2} \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial A}(20,12) = -\dfrac{12}{8^2} = -\frac{3}{16} \\ \dfrac{\partial f}{\partial W}(A,W) = (\dfrac{A}{(A-W)^2}) \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial R}(100,10) = \dfrac{20}{8^2} = \frac{5}{16} \end{cases}$$

Calculando a diferencial obtemos:

$$\begin{aligned} ds &= \frac{\partial f}{\partial A}(A,W)dA + \frac{\partial f}{\partial W}(A,W)dW \\ dv &= -\frac{3}{16}.0.01 + \frac{5}{16}.0,02 \\ dv &= \frac{7}{1600}watts \end{aligned}$$

Esse valor é então o erro máximo que pode sofrer a variável *s* com os acréscimos dados.

O erro relativo é dado por:

$$e_{relativo} = \frac{\frac{7}{1600}}{2,5} = 0,00175$$

Dizemos então que o erro percentual relativo é de $0,175\%$

Exemplo 4.9 *A pressão, o volume e a temperatura de um mol de um gás ideal estão relacionados pela equação $PV = 8,31T$, onde P é medida em quilopascals, V em litros e T em kelvins. Utilize diferenciais para determinar a variação aproximada da pressão se o volume aumenta de $12L$ para $12,3L$ e a temperatura diminui de $310K$ para $305K$.*
(STEWART, 2005b)

Solução:
Como buscamos a variação da pressão, pordemos expressar a fórmula acima deixando a pressão dependende da temperatura T e do volume V. Fazendo isso obtemos a função:

$$P = \frac{8,31T}{V}$$

A variação em V foi de $0,3L$, ou seja $dV = 0,3$. Já a temperatura diminuiu 5K, logo $dK = -5k$. Para utilizar as diferenciais para determinar a variação da pressão com o acréscimo em V e o decréscimo em T, vamos primeiramente calcular as derivadas parciais no ponto (12,310):

$$\left\{\begin{array}{lllllll} \frac{\partial f}{\partial V}(V,T) & = & -\frac{8,31T}{V^2} & \rightarrow & \frac{\partial f}{\partial V}(12,310) & = & -\frac{8,31.310}{12^2} & = & -0,259 \\ \frac{\partial f}{\partial T}(V,T) & = & \frac{8,31}{V} & \rightarrow & \frac{\partial f}{\partial R}(12,310) & = & \frac{8,31}{12} & = & 0,6925 \end{array}\right.$$

Calculando a diferencial temos o seguinte resultado:

$$\begin{array}{lll} dP & = & \frac{\partial f}{\partial V}(V,T)dV + \frac{\partial f}{\partial T}(V,T)dT \\ dv & = & -0,259.0,3 + 0,6925.(-5) \\ dv & = & -3,54 quilopascal \end{array}$$

Exemplo 4.10 *Se R é a resistência equivalente de três resistências conectadas em paralelo, com valores R_1, R_2, e R_3, então*

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Se as resistências medem em ohms $R_1 = 25\Omega$,$R_2 = 40\Omega$ e $R_3 = 50\Omega$ com precisão de 0,5% em cada uma, estime o erro máximo no cálculo da resitência equivalente de R (STEWART, 2005b)

Para encontrar o diferencial para a resitência equivalente, vamos escrevê-la como função das três resitências conectadas em paralelo.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R} &= \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} \\
\frac{1}{R} &= \frac{R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2}{R_1R_2R_3} \\
R &= \frac{R_1R_2R_3}{(R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2)}
\end{aligned}$$

Calculando as derivadas parciais em relação às variábeis R_1; R_2, e R_3 obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial R_1} &= \frac{R_2R_3(R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2)-R_1R_2R_3(R_2+R_3)}{(R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2)^2} \\
\frac{\partial f}{\partial R_1} &= \frac{R_2R_3(R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2-R_1R_3-R_1R_2)}{(R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2)^2} \\
\frac{\partial f}{\partial R_1} &= \frac{(R_2R_3)^2}{(R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2)^2} \\
\frac{\partial f}{\partial R_1} &= \left(\frac{R_2R_3}{R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2}\right)^2
\end{aligned}$$

De forma análoga, encontramos:

$$\frac{\partial f}{\partial R_2} = \left(\frac{R_1R_3}{R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2}\right)^2$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial R_3} = \left(\frac{R_1R_2}{R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2}\right)^2$$

As derivadas parciais no ponto $(25,40,50)$ em relação à R_1 , $R_2\, e\, R_3$ são respectivamente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial R_1}(25,40,50) &= \left(\frac{50.40}{40.50.+25.50+25.40}\right)^2 = 0,22145 \\
\frac{\partial f}{\partial R_2}(25,40,50) &= \left(\frac{25.50}{40.50.+25.50+25.40}\right)^2 = 0,0865 \\
\frac{\partial f}{\partial R_3}(25,40,50) &= \left(\frac{25.40}{40.50.+25.50+25.40}\right)^2 = 0,05536
\end{aligned}$$

Para aproximar o erro máximo da resistência equivalente, utilizamos a diferencial dR dada por:

$$dR = \frac{\partial f}{\partial R_1}(R_1,R_2,R_3)dR_1 + \frac{\partial f}{\partial R_2}(R_1,R_2,R_3)dR_2 + \frac{\partial f}{\partial R_3}(R_1,R_2,R_3)dR_3$$

De onde obtemos:

$$\begin{aligned} dR &= 0,22145.0,005 + 0,0865.0,005 + 0,05536.0,005 \\ dR &= 0,0018\Omega \end{aligned}$$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É possível perceber no desenvolvimento da teoria sobre as derivadas, que de forma independente vários matemáticos de diferentes épocas fizeram suas considerações sobre o tema ao estudarem grandezas variáveis em diferentes campos da ciência.

Newton e Leibniz são os matemáticos que mais se dedicaram no aperfeiçoamento da teoria sobre a derivada, sendo considerados por muitos, como os criadores do cálculo. No entanto, ambos tiveram seus estudos subsidiados por resultados encontrados por Pierre de Fermat, responsável por algebrizar o cálculo. O fato da derivabilidade tratar de taxas de variação, fez com que o tema fosse muito bem aceito por outras ciências, permitindo que sua expansão fosse potencializada e disseminada por várias áreas.

Ao estudarmos a diferenciabiliadade para funções de uma variável, percebemos sua importância ao nos ser permitido o estudo da função de uma curva qualquer, aproximando tal função, em um determinado ponto, por meio de uma reta, denominada reta tangente. Aliás, dizemos que em $\mathbb{R}$ a derivada nada mais é do que a inclinação da reta tangente ao ponto. Com tal funcionalidade, ou seja, por simplificar o estudo da curva utilizando uma reta, problemas de difícil análise passaram a ser simplificados pelo estudo da derivada. No caso em que as funções dadas dependem de duas variáveis, a diferenciabilidade nos permite, tomando as derivadas parciais para cada variável, encontrar os eixos que são base para um plano tangente à superfície em um dado ponto do domínio.

No presente trabalho, buscamos a abordagem da teoria sobre diferenciabilidade, de uma forma esclarecedora e que propiciasse, mesmo ao leitor menos engajado no assunto, uma visão motivadora sobre o tema, sem perder no entando, o rigor matemático exigido para tal propósito. Os teoremas trabalhados, podem ser encontrados na maioria dos livros que tratam do assunto. Procuramos em cada um deles, detalhar os passos das demonstrações apresentadas e exemplos que enriquecem os teoremas dados.

Ao interpretarmos a derivada como uma taxa de variação, evidenciamos sua aplicabilidade em diversos campos da ciência: o físico pode utilizar as derivadas para definir a velocidade no movimento retilíneo; o biólogo usa a derivada no estudo da taxa de crescimento de bactérias; o químico analisa a variação em uma determinada reação química; o economista estuda conceitos marginais tais como a receita marginal ou custo marginal e assim por diante. No capítulo 4, utilizamos as diferenciais para alguns exemplos práticos em diferentes áreas, buscando reforçar a teoria estudada. Em tais exemplos, utilizamos equações diferenciais que nos permitiram fazer uma análise consistente e simplificada da situação e que assim, ratificaram os objetivos do trabalho.

APÊNDICE A – PROPRIEDADES DE LIMITE

Sejam f , $g : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$. Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \ \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$, temos:

$$
\begin{array}{ll}
i) & \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l + m; \\
ii) & \lim\limits_{x \to x_0} (cf(x)) = cl; \\
iii) & \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = l - m; \\
iv) & \lim\limits_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = lm; \\
v) & Se\, m \neq 0 \text{ então } \lim\limits_{x \to x_0} (\dfrac{f(x)}{g(x)}) = \dfrac{l}{m}.
\end{array}
$$

Das propriedades acima decorrem um resultado importante que vamos utilizar no trabalho, que trata do produto entre os limites de uma função limitada por outra que tem limite nulo. Enunciamos primeiramente o lema:

Lema A.1 *Se uma sequência de pontos (a_n) converge para 0 e a sequência (b_n) é limitada, temos que $a_n b_n \to 0$*

Demonstração:
De fato, como (b_n) é limitada, $\exists c > 0$ tal que $|b_n| \leq c, \forall n \subset \mathbb{N}$. Como a_n é convergente e $\lim a_n = 0$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n| < \frac{\varepsilon}{c}$.
Assim,
$n > n_0 \Rightarrow |a_n b_n| = |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{c}.c = \varepsilon.$
Portanto, $a_n b_n \to 0$ ■

Teorema A.1 *Se $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ e g é limitada numa vizinhança de a, tem-se $\lim\limits_{x \to a} f(x).g(x) = 0$*

Demonstração:

Se tomarmos as funções $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, temos que para qualquer sequência de pontos $x_n \in A - a$, com $\lim\limits_{x \to a} x_n$, existe uma vizinhança V de a e uma constante c tal que $|g(x)| \leq c$ para todos

$x \in V$, então como $x_n \in V$, para n suficientemente grande, a sequência $g(x_n)$ é limitada. Assim, do lema anterior podemos afirmar que $\lim f(x_n)g(x_n) = 0$ pois $\lim f(x_n) = 0$. $\blacksquare$

REFERÊNCIAS

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. [S.l.]: UNICAMP, 2004.

GUIDORIZZI hamilton luiz. **Um Curso de Cálculo volume 1**. [S.l.]: LTC, 2001.

GUIDORIZZI hamilton luiz. **Um Curso de Cálculo volume 2**. [S.l.]: LTC, 2001.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. de A. **Fundamentos da Metodologia Científica**. [S.l.]: Atlas, 2007.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica volume 2**. [S.l.]: HARBRA, 1994.

LIMA, E. lages. **Curso de Análise volume 1**. [S.l.]: impa, 2000.

LIMA, E. lages. **análise real volume 1, funções de uma variável**. [S.l.]: Impa, 2009.

NERI, C. **Curso de Análise Real**. 6 2006.

STEWART, J. **Cálculo vol. 1**. [S.l.]: Thompson, 2005.

STEWART, J. **Cálculo vol. 2**. [S.l.]: Thompson, 2005.