UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ALEX ISSAMU MORIYA

OS TEOREMAS DE FUNÇÕES INVERSA E IMPLÍCITA E SUAS APLICAÇÕES

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

CAMPO MOURÃO

2011

ALEX ISSAMU MORIYA

OS TEOREMAS DE FUNÇÕES INVERSA E IMPLÍCITA E SUAS APLICAÇÕES

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Juan Amadeo Soriano Palomino

CAMPO MOURÃO

2011

TERMO DE APROVAÇÃO

Alex Issamu Moriya

Os Teoremas de Funções Inversa e Implícita e suas Aplicações

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de "Especialista em Ciências" – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Adilandri

Prof. Msc. Mércio

Prof. Msc. Lobeiro

Campo Mourão, 2010

A minha esposa Satiko e ao meus pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus.

Minha querida esposa que sempre esteve ao meu lado nos momentos difíceis.

Aos meus pais que sempre me deram força nas horas mais críticas de minha vida.

Ao professor Juan pela paciência e atenção.

Ao professor Adilandri, pela paciência, amizade e competência.

Ao meu amigo Marco Tadeu pela força e pouso.

Aos amigos Odemir Brill, Roney Peterson e Willian Baraviera, pelos dias descontraidos.

Ao Edilson pela atenção, competência e pelos cafes dos Domingos.

“Até onde as leis da matemática se refiram á realidade, elas estão longe de construir algo certo; e, na medida em que constituem algo certo, não se referem á realidade”

(Albert Einstein)

RESUMO

MORIYA, Alex Issamu. Os Teoremas de Funções Inversa e Implícita e suas Aplicações. 60 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2011.

Neste trabalho vamos estudar um dos temas centrais na Teoria da Análise o Teorema da Função Inversa. Em seguida aplicando este teorema demonstraremos o Teorema da Função Implícita. Também apresentaremos algumas aplicações deste teorema que é um resultado central da análise.

Palavras-chave: Função Inversa, Função Implícita

ABSTRACT

MORIYA, Alex Issamu. Title in English. 60 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2011.

In this paper we study one of the central themes in the Analysis Theory Inverse Function Theorem. Then applying this theorem will demonstrate the Implicit Function Theorem. We will also introduce some applications of this theorem is a central result of the analysis.

Keywords: Inverse Function, Implicit Function.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – DERIVADA PARCIAL 15
FIGURA 2 – DERIVADA DIRECIONAL 16
FIGURA 3 – FUNÇÃO DIFERENCIÁVEL 19
FIGURA 4 – FUNÇÃO DIFERENCIÁVEL 21
FIGURA 5 – INVERSA 39

SUMÁRIO

1 DESENVOLVIMENTO 8
2 LIMITES E CONTINUIDADES 9
3 FUNÇÕES CONTINUAS 11
4 CONTINUIDADE UNIFORME 13
5 FUNÇÕES REAIS DE N VARIÁVEIS 14
5.1 DERIVADAS PARCIAIS 14
5.2 DERIVADAS DIRECIONAIS 15
5.3 FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS 17
5.4 VETOR GRADIENTE 25
5.5 REGRAS BÁSICAS DE DERIVAÇÃO 26
5.6 CASO GERAL 27
5.7 A MATRIZ JACOBIANA 29
5.8 REGRA DA CADEIA 30
5.9 O TEOREMA DO VALOR MÉDIO 31
5.10 DERIVADAS PARCIAIS (CASO GERAL) 32
5.11 CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA A DIFERENCIABILIDADE 33
5.12 FUNÇÕES DE CLASSE C^1 35
5.13 PROJEÇÃO ORTOGONAL 37
6 TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA 38
6.1 TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA 39
6.2 MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS UMA APLICAÇÃO DO TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA 46
7 TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA 51
7.1 TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA 53
7.2 APLICAÇÃO DO TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA 56
8 CONCLUSÃO 59
REFERÊNCIAS 60

1 DESENVOLVIMENTO

Para a melhor compreensão vamos realizar uma introdução de Limites e Continuidades, segue daí, Funções Diferenciáveis de n variáveis definida por $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, onde passaremos por definições de funções Gateaux derivável ou derivadas parciais, funções diferenciáveis ou Fréchet-deriváveis dadas por $f : \Omega \to \mathbb{R}$ onde

$$f(x_o + h) = f(x_o) + L(h) + r_{x_o}(h)$$

com L linear e o resto satisfazendo

$$\lim_{h \to 0} \frac{||r_{x_o}(h)||}{||h||},$$

estudaremos a parte de Vetor Gradiente, Regras de Derivação, Caso Geral, Matriz Jacobiana, Regra da Cadeia, Teorema do Valor Médio, Condição de Diferenciabilidade, Função de Classe C^1 e entraremos assunto que é um dos temas principais da Análise Matemática, O Teorema da Função Inversa com a aplicação no Método das Características e O Teorema da Função Implícita outro resultado central da Análise com a aplicação em Multiplicadores de Lagrange. Onde o conteúdo foram das referências, (CIPOLATTI, 2002), (LIMA, 2009a),(LIMA, 2009b), (RUDIN, 1971), (BARTLE, 1983),(GUIDORIZZI, 2000).

2 LIMITES E CONTINUIDADES

Nesta parte tem como objetivo estudar definições de *limite* e *continuidade*, para funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. Neste momento vamos denotar $\| \ \|$ indistintamente as normas euclidianas, isto é, as normas da forma $\| \ \|_2$ de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

Definição 2.1 *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_o \in A'$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Dizemos que b é o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de x_o em A (relativamente às normas euclidianas) se*

$$\textit{para todo } \varepsilon > 0, \textit{ existe } \delta > 0 \textit{ tal que } x \in A \textit{ e } 0 < \|x - x_o\| < \delta \textit{ implique } \|f(x) - b\| < \varepsilon$$

Neste caso denotamos

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = b$$

Como a métrica da bola provém da norma euclidiana, podemos usar a definição acima como notação de bola, isto é,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } x \in A \cap (B_\delta(x_o) \setminus \{x_o\}) \to f(x) \in B_\varepsilon(b).$$

Ou de forma mais concisa

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } x \in f(A \cap (B_\delta(x_o) \setminus \{x_o\})) \subset B_\varepsilon(b)$$

Podemos definir a continuidade em forma da definição de limite:

Definição 2.2 *Se todo ponto $x_o \in A$ é um ponto isolado, então toda aplicação $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua no ponto x_o. Porém, se $x_o \in A'$ então f é contínua no ponto x_o se, e somente se, $\lim_{x \to x_o} f(x) = b$*

Teorema 2.1 *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, onde $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \ldots, m$, $x_o \in A$ e $b \in \mathbb{R}^m$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$. Então*

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = b \iff \lim_{x\to x_o} f_i(x) = b_i,\ \forall\, i = 1,\dots,m$$

.

Demonstração: Suponhamos $\lim\limits_{x\to x_o} f_i(x) = b_i$ e seja $\varepsilon > 0$. Então existem $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m > 0$ tais que $x \in A$ e $0 < \|x - x_o\| < \delta_i$ implica $\|f_i(x) - b_i\| < \dfrac{\varepsilon}{m}$, $\forall\, i = 1,\dots,m$. Se pegarmos a base canônica de $\mathbb{R}^m$ dada por $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, agora pegarmos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$ temos para $x \in A$ e $0 < \|x - x_o\| < \delta$ vem que

$$\begin{array}{rcl} \|f(x) - b\| & = & |f_1(x) - b_1| + |f_2(x) - b_2| + \cdots + |f_m(x) - b_m| \\ & \leq & |f_1(x) - b_1|\|e_1\| + |f_2(x) - b_2|\|e_2\| + \cdots + |f_m(x) - b_m|\|e_m\| \\ & < & \varepsilon\|e_1\| + \frac{\varepsilon}{2}\|e_2\| + \cdots + \frac{\varepsilon}{m}\|e_m\| \end{array}$$

Se pegarmos $\varepsilon = min\{\frac{\varepsilon}{1}, \dots, \frac{\varepsilon}{m}\}$ temos

$$\|f(x) - b\| < \varepsilon$$

Reciprocamente, se $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = b$, para $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in A$ e $0 < \|x - x_o\| < \delta$ então $\|f(x) - b\| < \varepsilon$. Como $|f_i(x) - b_i| \leq \|f(x) - b\|$ para todo $i = 1,\dots,m$ segue o resultado.

■

Teorema 2.2 *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $x_o \in A'$. Então*

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \{x_k\}_k \subset A \textit{ tal que } x_k \to x_o \Rightarrow f(x_k) \to b.$$

Demonstração: Exercício.

Teorema 2.3 *Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_o \in A'$. Se*

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = b hspace0.3cm\ e\ hspace0.3cm \lim_{x\to x_o} g(x) = c,$$

então

$$\begin{array}{rcl} \lim_{x\to x_o} \big(f \pm g\big)(x) & = & b \pm c \\ \lim_{x\to x_o} \big(fg\big)(x) & = & bc \end{array}$$

Além disso, se $c \neq 0$ então

$$\lim_{x\to x_o} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{b}{c}.$$

Demonstração: Exercício.

3 FUNÇÕES CONTINUAS

Definição 3.1 *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $x_o \in A \cup A'$. Dizemos que f é continua em x_o se $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$. Mais precisamente,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \|x - x_o\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_o)\| < \varepsilon$$

.

Podemos ainda escrever a definição acima em notação de bola aberta de raio ε com centro em x_o denotado por $B_\varepsilon(x_o)$, ou seja, podemos dizer que f é continua no ponto x_o se, e somente se,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } f(A \cap B_\delta(x_o)) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(x_o)).$$

Ou de forma mais concisa.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } f(A \cap B_\delta(x_o)) \subset B_\varepsilon(f(x_o)).$$

Observação: Como estamos trabalhando funções de $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ os fatos abaixo é diretamente liga as propriedades de limite:

a) Supor que $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ é continua em $x_o \in A$ se, somente se, para cada $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forem continuas em x_o.

b) Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções continuas no ponto x_o e $\lambda \in \mathbb{R}$, então vem que $f + g$, $f \cdot g$ e λf são continuas no ponto x_o. Se $g(x) \neq 0$, então as funções $\dfrac{f}{g}$ são continuas em x_o.

c) A continuidade da função no ponto x_o independe das normas aqui utilizadas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

Teorema 3.1 *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tais que $f(A) \subset B$. Se $x_o \in A'$, $y_0 \in B \cap B'$, $\lim\limits_{x \to o} f(x) = y_o$ e g é continua em y_o o que implica que $\lim\limits_{x \to o} (g \circ f)(x) = g(y_o)$*

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$. E pela continuidade da g em y_o temos, existe $\eta > 0$ tal que $y \in B \cap B_\eta(y_o) \Rightarrow g(y) \in B_\varepsilon\big(g(y_o)\big)$. Como $\lim\limits_{x \to o} f(x) = y_o$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in \big(B_\delta(x_o) \setminus$

$\{x_o\}\big) \cap A \Rightarrow f(x) \in B_\eta(y_o)$.

Portanto

$$x \in \big(B_\delta(x_o) \setminus \{x_o\}\big) \cap A \Rightarrow y = f(x) \in B_\eta(y_o)$$

e consequentemente

$$g\big(f(x)\big) \in B_\varepsilon\big(g(y_o)\big)$$

.

∎

Teorema 3.2 *Todas as normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.*

Demonstração: Seja $\| \ \|$ uma norma qualquer em $\mathbb{R}^n$ e $\| \ \|_1$ a norma 1 definida por $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \ \Rightarrow \ \|x\| \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \|e_i\| \leq M\|x\|_1,$$

onde $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$ e $M = \max\{\|e_i\|; i = 1, \ldots, n\}$. Seja $K = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_1 = 1\}$ e $f(x) = \|x\|$. Então $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é função contínua (relativamente a noma $\| \ \|_1$) de $\mathbb{R}^n$. Como k é um fechado e limitado, e portanto compacto, segue do corolário anterior que existe $\underline{x} \in K$ tal que $m := f(\underline{x}) = \min f(K)$. Observe que $m > 0$, pois se $0 = m = \|\underline{x}\| \Rightarrow \underline{x} = 0$. Seja x um ponto qualquer de $\mathbb{R}^n$. Então $y = \frac{x}{\|x\|_1} \in K$ e

$$m \leq f(y) = \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|_1} \ \Rightarrow \ m\|x\|_1 \leq \|x\|$$

∎

Definição 3.2 *Quando uma função f é contínua em todos os pontos de seu domínio, dizemos simplesmente que f é função contínua.*

4 CONTINUIDADE UNIFORME

Vimos anteriormente que uma função é contínua quando é contínua em todos os pontos de seu domínio. podemos dizer, portando, que a continuidade é um conceito local. Isso se expressa na definição, pelo fato de que, para cada ε e para cada x, $\delta = \delta(\varepsilon, x)$ depende de épsilon e do ponto x. A definição que introduzimos a seguir expressa um conceito global de continuidade, continuidade uniforme.

Definição 4.1 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}^m$ uma função. Dizemos que f é uniformemente contínua em A se $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in A \|x - y\| < \delta$, então $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.*

Definição 4.2 *Uma função $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é dita Lipschitz-contínua em A se existe $M > 0$ tal que*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|, \qquad \forall x, y \in A$$

Proposição 4.1 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função linear. Então f é Lipschitz-contínua.*

5 FUNÇÕES REAIS DE N VARIÁVEIS

5.1 DERIVADAS PARCIAIS

Quando se estuda funções reais de n variáveis, isto é, definidas em subconjuntos do espaço $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, e se busca para essa função uma noção de derivada que tenha propriedades análogas às da derivada de uma função definida num intervalo, a ideia que se apresenta mais naturalmente é a de "*derivada parcial*", que exploremos agora.

Para efeito de derivação, onde se compara o acréscimo $f(x_o + h) - f(x_o)$ da função f com o acréscimo $h > 0$ dado ao ponto x_o, o domínio mais adequado para uma função é um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ pois, neste caso, dado $x_o \in \Omega$, tem-se ainda $x_o + h \in \Omega$ para todo acréscimo h suficientemente pequeno.

Seja, pois, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função real, definida num subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, a *i-ésima derivada parcial* de f no ponto x_o (onde $1 \leq i \leq n$) é o limite

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x_o + \lambda e_i) - f(x_o)}{\lambda}$$

quando tal limite existe.

No entanto o símbolo pode ser denotado como $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, também como $\dfrac{\partial f}{\partial y_i}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z_i}$, etc. O que importa no símbolo não é o "nome" da variável, x, y ou z, etc. O importante é o índice i que trata-se da função na *i-ésima* variável, seja qual for símbolo utilizado, podendo utilizar da forma $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_o)$.

O caso particular $n = 2$ onde o gráfico da função é uma superfície em $\mathbb{R}^3$; a restrição de f ao segmento de reta que passa por $c = (a, b)$ e é paralela ao eixo das abscissas tem como gráfico a curva plana obtida nessa superfície fazendo y constante, igual a b. Logo $\dfrac{\partial f}{\partial x}(c)$ é a inclinação da reta tangente a essa curva, no ponto $(a, b, f(a, b))$, ao plano paralelo ao eixo x.

Assim a derivada parcial da função real $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, faz com que todas as variáveis se tornem constantes exceto a i-ésima, e aplicando as regras usuais de derivação nesta variável.

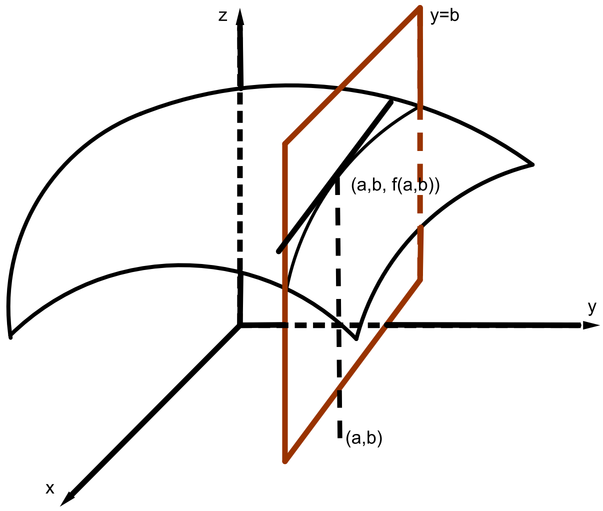

Figura 1: Derivada Parcial
Fonte: GeoGebra

5.2 DERIVADAS DIRECIONAIS

Vendo que as derivadas parciais, desacompanhadas de hipóteses adicionais, apenas fornecem informações sobre a função ao longo de retas paralelas ao eixos, tentamos estender a noção de derivada a outras direções além dessas. Isto nos leva ao importante conceito de *derivada direcional* ou função *Gateaux derivável*.

Definição 5.1 *Sejam $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definida no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $x_o \in \Omega$ e $h \in \mathbb{R}^n$, é dita Gateaux derivável em x_o se f possui derivadas direcionais em x_o em todas as direções de h, por definição, o limite*

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x_o) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x_o - \lambda h) - f(x_o)}{\lambda}$$

quando tal limite existi.

Definição 5.2 *Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita* ***Gateaux derivável*** *em x_o se f possui derivadas direcionais em x_o em todas as direções de u.*

Observação: De forma sutil as funções Gateaux derivável podem parecer, à primeira vista, a generalização natural para a definição de derivada de uma função real de uma variável. Entretanto, a existência das derivadas direcionais não assegura a regularidade de f em torno do ponto x_o, como no caso de uma variável (caso $n = 1$). De fato, contrariamente ao caso unidimensional, uma função que é Gateaux-diferenciável num ponto x_o não necessariamente contínua neste ponto. Por exemplo, consideremos

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{senão} \end{cases}$$

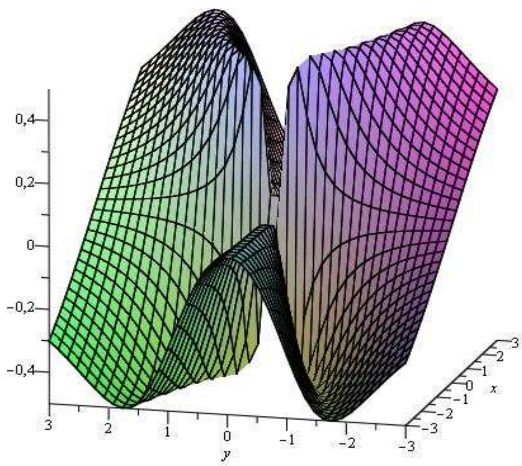

Figura 2: Derivada direcional
Fonte: Maple

Se $h = (h_1, h_2)$ é um vetor unitário qualquer, então aplicando a definição de limite

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial h}(0,0) &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{f((0,0)+\lambda h) - f(0,0)}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\lambda(h_1,h_2))}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \frac{f((\lambda h_1,\lambda h_2))}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda h_1 \lambda^2 h_2^2}{\lambda^2 h_1^2 + \lambda^4 h_2^4} \cdot \frac{1}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda^3 h_1 h_2^2}{\lambda^3 (h_1^2 + \lambda h_2^4)} \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \frac{h_1 h_2^2}{h_1^2 + \lambda h_2^4} \\
&= \frac{h_1 h_2^2}{h_1^2} \\
&= \frac{h_2^2}{h_1}
\end{aligned}$$

segue que

$$\frac{\partial f}{\partial h}(0,0) = \begin{cases} \frac{h_2^2}{h_1} & se \quad h_1 \neq 0 \\ 0 & \text{senão}. \end{cases}$$

Entretanto, f não é contínua em $(0,0)$. De fato, $f(t^2,t) = \frac{1}{2}\ \forall t \neq 0$

5.3 FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS

Consideremos agora funções de domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, imagem $\mathbb{R}$, $\| \ \|$ norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$

Definição 5.3 *Dizemos que f é diferenciável (ou Fréchet-derivável) em $x_o \in \Omega$ se existem funções $L, r_{x_o} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que*

$$f(x_o + h) = f(x_o) + L(h) + r_{x_o}(h), \tag{1}$$

com L linear e r_{x_o} satisfazendo

$$\lim_{h \to 0} \frac{|r_{x_o}(h)|}{\|h\|} = 0 \tag{2}$$

Se $r_{x_o}(h)$ satisfaz (2), dizemos que $r_{x_o}(h)$ é função $0(\|h\|)$. Para simplificarmos a notação, escrevemos simplesmente $r(h)$, deixando de explicitar que r depende de x_o.

Se f é função diferenciável em x_o, então a transformação linear L é denominada diferenciável de f no ponto x_o que é denotada por $f'(x_o)$.

Desigualdade de Young:

Lema 5.1 *Seja p e q tais que $1 < p$, $q < +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, vale a desigualdade*

$$|xy| \leq \frac{x^p}{p} + \frac{x^q}{q}$$

Exemplo 5.1 *Consideremos $f(x,y) = xy$. Se $h = (h_1, h_2)$, então*

$$f(x_o + h_1, y_o + h_2) = x_o y_o + x_o h_2 + y_o h_1 + h_1 h_2$$

Como $L(h) = x_o h_2 + y_o h_1$ é linear e $r(h) = h_1 h_2$ satisfaz $\frac{|r(h)|}{\|h\|} \leq \frac{\|h\|}{2} \to 0$ se $h \to 0$, temos que f é diferenciável em (x_o, y_o) e sua diferencial é $f'(x_o, y_o)(h) = x_o h_2 + y_o h_1$

Exemplo 5.2 *Seja $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um função linear. Então $f(x_o+h) = f(x_o)+f(h)$. Se considerarmos $r(h) = 0$ para todo $h \in \mathbb{R}^n$, onde*

$$
\begin{aligned}
f(x_o+h) &= f(x_o)+L(h)+r(h)\\
f(x_o+h) &= f(x_o)+L(h)+0\\
f(x_o+h) &= f(x_o)+f(h)
\end{aligned}
$$

fica satisfeita com $L(h) = f(h)$, o que nos leva a concluir que f é diferenciável no ponto x_o e $f'(x_o) \equiv f$.

Lema 5.2 *Se f é uma função diferenciável no ponto $x_o \in \Omega$, L_1 e L_2 são diferenciáveis de f, então $L_1 = L_2$.*

Demonstração: De fato, suponhamos que para todo $h \in \mathbb{R}^n$,

$$
\begin{aligned}
f(x_o+h) &= f(x_o)+L_1(h)+r_1(h)\\
f(x_o+h) &= f(x_o)+L_2(h)+r_2(h)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

com L_1 e L_2 lineares e r_1 e r_2 funções $o(\|h\|)$ (funções que tendem a zero). Agora pegamos a primeira igualdade e subtraímos da segunda de (3), onde obtemos,

$$L_1(h)-L_2(h) = r_1(h)-r_2(h).$$

Tomemos agora $h = \lambda e_i$, onde $\lambda \in \mathbb{R}_+$ e e_i é a base canônica de $\mathbb{R}^n$, daí

$$
\begin{aligned}
L_1(\lambda e_i)-L_2(\lambda e_i) &= r_2(\lambda e_i)-r_1(\lambda e_i)\\
\lambda\,[L_1(e_i)-L_2(e_i)] &= r_2(\lambda e_i)-r_1(\lambda e_i)\\
\lambda\,[L_1(e_i)-L_2(e_i)] &\leq r_2(\lambda e_i)+r_1(\lambda e_i)\\
L_1(e_i)-L_2(e_i) &= \tfrac{r_2(\lambda e_i)+r_1(\lambda e_i)}{\lambda}\\
L_1(e_i)-L_2(e_i) &= \tfrac{r_2(\lambda e_i)}{\lambda}+\tfrac{r_1(\lambda e_i)}{\lambda}\\
|L_1(e_i)-L_2(e_i)| &= \left|\tfrac{r_2(\lambda e_i)}{\lambda}+\tfrac{r_1(\lambda e_i)}{\lambda}\right|\\
|L_1(e_i)-L_2(e_i)| &\leq \tfrac{|r_2(\lambda e_i)|}{\lambda}+\tfrac{|r_1(\lambda e_i)|}{\lambda}
\end{aligned}
$$

Fazendo $\lambda \to 0$, vamos obter que $L_1(e_i) = L_2(e_i)$ para $n = 1,\ldots,n$.Portanto $L_1(e_i) \equiv L_2(e_i)$. ■

Exemplo 5.3 *Seja $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por*

$$
f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}} & se \quad (x,y) \neq (0,0)\\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}
$$

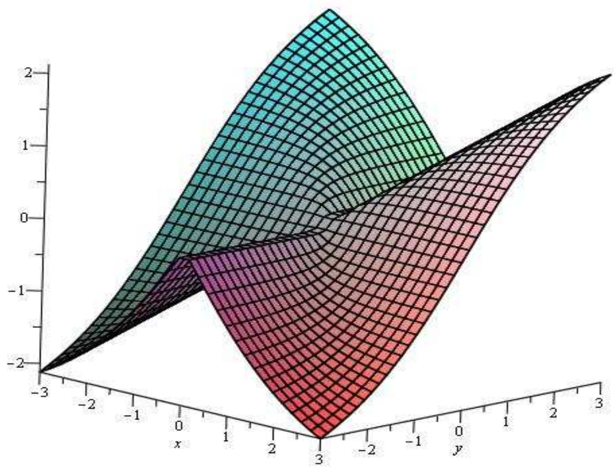

Figura 3: Função Diferenciável
Fonte: Maple

Vamos verificar se f é contínua em $(0,0)$. Dado $\varepsilon > 0$.

$$|f(x,y) - (0,0)| \quad = \quad |f(x,y)| \quad = \quad \left|\frac{|x| \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \quad = \quad \frac{|x| \cdot |y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Utilizando a desigualdade de Young (5.1) temos,

$$\begin{aligned}
\frac{|x| \cdot |y|}{\sqrt{x^2+y^2}} &\leq \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot y^2\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \sqrt{x^2+y^2} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

tomando $\delta = 2\varepsilon$ obtemos,

$$|f(x,y) - (0,0)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} < \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2} \cdot 2\varepsilon = \varepsilon$$

assim $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que $\sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - (0,0)| < \varepsilon$.
$\therefore f$ é contínua em $(0,0)$.
Vamos provar que f é Gateaux-derivável (derivada parcial) em $(0,0)$. De fato, sejam $(x_o, y_o) =$

$(0,0)$ e $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$, por definição, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 0}\frac{f((x_o,y_o)+\lambda v)-f(x_o,y_o)}{\lambda} &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{f((0,0)+\lambda(v_1,v_2))-f(0,0)}{\lambda}\\
&= \lim_{\lambda\to 0}\frac{f((\lambda v_1,\lambda v_2))-0}{\lambda}\\
&= \lim_{\lambda\to 0}\frac{|\lambda v_1|\lambda v_2}{\sqrt{(\lambda v_1)^2+(\lambda h_2)^2}}\cdot\frac{1}{\lambda}\\
&= \lim_{\lambda\to 0}\frac{|\lambda||v_1|\lambda v_2}{|\lambda|\sqrt{v_1^2+v_2^2}\lambda}\\
&= \lim_{\lambda\to 0}\frac{|v_1|v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}\\
&= \frac{|v_1|v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}
\end{aligned}$$

Portanto $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\dfrac{|v_1|v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$. Assim existe $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$, para todo $v\in\mathbb{R}^2$ implica que f e Gateaux-derivável em $(0,0)$. Suponhamos que f é diferenciável em $(0,0)$. Logo existem $f'(0,0)$, $r:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tais que

$$f((0,0)+(h_1,h_2))=f(0,0)+f'(0,0)(h_1,h_2)+r(h_1,h_2)$$

$$f(h_1,h_2)=f(0,0)+f'(0,0)(h_1,h_2)+r(h_1,h_2)$$

satisfazendo

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{|r(h_1,h_2)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0 \tag{4}$$

segue

$$f(h_1,h_2)=\frac{|h_1|h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

e

$$f(h_1,h_2)=0+r(h)$$
$$r(h)=\frac{|h_1|h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

agora substituindo na condição (4), obtemos

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\left|\frac{|h_1|h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right|\cdot\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{|h_1||h_2|}{h_1^2+h_2^2}$$

mas se tomarmos o caminho $h_1 = 0$, teremos

$$\lim_{h_2 \to 0} \frac{0}{h_2} = 0$$

se pegarmos outro caminho $h_1 = h_2$, obteremos

$$\lim_{h_1 \to 0} \frac{|h_1||h_1|}{h_1^2 + h_1^2} = \lim_{h_1 \to 0} \frac{h_1^2}{2h_1^2} = \lim_{h_1 \to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

logo não existe o limite, ou seja,

$$\nexists \lim_{(h_1,h_2) \to (0,0)} \frac{|r(h_1,h_2)|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

Portanto f não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

Exemplo 5.4 *Seja* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a função definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2y|x|x^2}{x^4 + y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

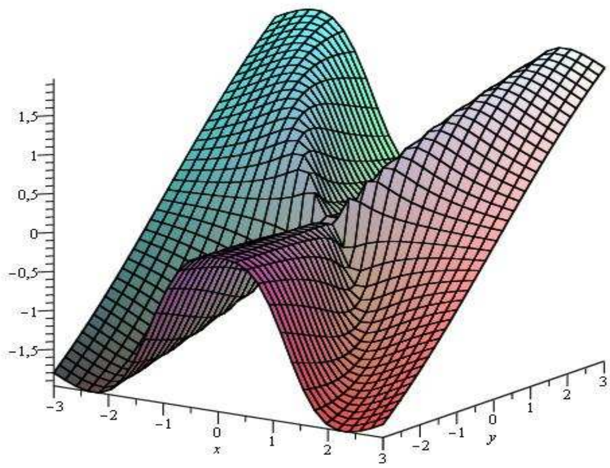

Figura 4: Função Diferenciável
Fonte: Maple

Verificar se f é continua em $(0,0)$. Dado $\varepsilon > 0$

$$|f(x,y) - (0,0)| \quad = \quad |f(x,y)| \quad = \quad \left|\frac{2y|x|x^2}{x^4+y^2}\right| \quad = \quad \frac{2x^2|y||x|}{x^4+y^2}$$

Utilizando a desigualdade de Young (5.1) temos,

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2y|x|}{x^4+y^2} &\leq 2\left(\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}y^2\right)\cdot\frac{1}{x^4+y^2}\cdot|x| \\
&= 2\frac{1}{2}\frac{x^4+y^2}{x^4+y^2}\cdot|x| \\
&= |x| \\
&\leq \sqrt{x^2+y^2}<\delta
\end{aligned}$$

tomando $\delta=\varepsilon$ obtemos,

$$|f(x,y)-(0,0)|\leq\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\varepsilon$$

assim $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que $\sqrt{x^2+y^2}<\delta\Rightarrow|f(x,y)-(0,0)|<\varepsilon\ \therefore\ f$ é contínua em $(0,0)$ Vamos provar que f é Gateaux-derivável (derivada parcial) em $(0,0)$. De fato, sejam $(x_o,y_o)=(0,0)$ e $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$ vetor unitário, por definição, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 0}\frac{f((x_o,y_o)+\lambda v)-f(x_o,y_o)}{\lambda} &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{f((0,0)+\lambda(v_1,v_2))-f(0,0)}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\frac{f((\lambda v_1,\lambda v_2))-0}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\frac{2\lambda v_2|\lambda v_1|(\lambda h_1)^2}{(\lambda v_1)^4+(\lambda v_2)^2}\cdot\frac{1}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\frac{2\lambda^4v_2|v_1|v_1^2}{\lambda^5v_1^4+\lambda^3v_2^2} \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\frac{2v_2|v_1|v_1^2}{v_1^4+\frac{v_2^2}{\lambda}} \\
&= \frac{2v_2|v_1|v_1^2}{v_1^4} \\
&= \frac{2v_2}{v_1}
\end{aligned}$$

Portanto $\dfrac{\partial f}{\partial h}(0,0)=\dfrac{2x^2y|x|}{x^4+y^2}$. Assim existe $\dfrac{\partial f}{\partial h}(0,0)$, para todo $h\in\mathbb{R}^2$ implica que f e Gateaux-derivável em $(0,0)$. Vamos verificar se a função é diferenciável Suponhamos que f é diferenciável em $(0,0)$. Logo existem $f'(0,0)$, $r:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tais que

$$f((0,0)+(h_1,h_2))=f(0,0)+f'(0,0)(h_1,h_2)+r(h_1,h_2)$$

$$f(h_1,h_2)=f(0,0)+f'(0,0)(h_1,h_2)+r(h_1,h_2)$$

satisfazendo

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|r(h_1,h_2)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0 \tag{5}$$

segue

$$f(h_1,h_2) = \frac{|h_1|h_2}{\sqrt{x_1^2+y_2^2}}$$

e

$$f(h_1,h_2) = 0 + r(h)$$

$$r(h) = \frac{|h_1|h_2}{\sqrt{x_1^2+y_2^2}}$$

agora substituindo na condição (5), obtemos

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \left| \frac{|h_1|h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \right| \cdot \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_1||h_2|}{h_1^2+h_2^2}$$

mas se tomarmos o caminho $h_1 = 0$, teremos

$$\lim_{h_2\to 0} \frac{0}{h_2} = 0$$

se pegarmos outro caminho $h_1 = h_2$, obteremos

$$\lim_{h_1\to 0} \frac{|h_1||h_1|}{h_1^2+h_1^2} = \lim_{h_1\to 0} \frac{h_1^2}{2h_1^2} = \lim_{h_1\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

logo não existe o limite, ou seja,

$$\nexists \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|r(h_1,h_2)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

Portanto f não é diferenciável no ponto $(0,0)$. Podemos observar que a existência das derivadas parciais (Gateaux-derivável) não implica que a função seja diferenciável, mesmo que seja continua no ponto.

Proposição 5.1 *Se f é diferenciável em $x_o \in \Omega$, então f é continua em x_o.*

Demonstração: Pela definição da diferenciabilidade temos que $f(x_o+h) = f(x_0) + L(h) + r(h)$, satisfazendo $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$. Portanto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que $\|h\| < \delta_1$ implica em que $\frac{|r(h)|}{\|h\|} < \varepsilon$, tomemos $\varepsilon = 1$, então $\exists \delta_1 > 0$ tal que $\|h\| < \delta_1$ implica

$$\frac{|r(h)|}{\|h\|} < 1.$$

Como $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é linear, segue da Proposição (4.1) que existe $\alpha \geq 0$ tal que $|L(h)| \leq \alpha \|h\|$, para todo $h \in \mathbb{R}^n$. Dado $\varepsilon > 0$ seja $\delta = \min\left\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{1+\alpha}\right\}$. Então se $x \in \Omega$ é tal que $\|x - x_o\| < \delta$, temos

$$|f(x) - f(x_o)| \leq (1+\delta)\|x - x_o\| < \varepsilon$$

$\blacksquare$

5.4 VETOR GRADIENTE

Embora a existência das derivadas parciais de uma função qualquer, não implique na diferenciabilidade da função, mas quando a diferencial existe, é dada pelas derivadas parciais, como veremos a seguir.

Seja uma função e diferenciável $f : \Omega \to \mathbb{R}$, definida no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
Afirmação: Se $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é linear, então existe um $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $L(h) = \langle b; h \rangle$ para todo $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$.
De fato, seja $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$ e $b_i = L(e_i)$. Então,

$$L(h) = L\left(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} h_i L(e_i) = \sum_{i=1}^{n} h_i b_i = \langle b; h \rangle$$

Dizemos que b é a representação matricial de L relativamente à base canônica.
Seja $L = f'(x_o)$ a diferencial de uma função f. Então, $L(h) = \langle b; h \rangle$ para algum $b \in \mathbb{R}^n$ e para todo $h \in \mathbb{R}^n$. Considerando $h = \lambda e_i$ temos da definição de diferenciabilidade

$$f(x_o + \lambda e_i) = f(x_o) + L(e_i) + r(\lambda e_i)$$

satisfazendo $\lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{r(\lambda e_i)}{\lambda} = 0$

$$\frac{f(x_o + \lambda e_i) - f(x_o)}{\lambda} = L(e_i) + \frac{r(\lambda e_i)}{\lambda}$$

fazendo λ tender a zero, obtemos

$$L(e_i) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x_o + \lambda e_i) - f(x_o)}{\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o).$$

O vetor é denotado por

$$\bigtriangledown f(x_o) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_o), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_o)\right)$$

é denominado *vetor gradiente* de f em x_o e é tal que se f é função diferenciável em x_o , então

$$f'(x_o)(h) = \langle \bigtriangledown f(x_o); h \rangle$$

Observe se caso o vetor gradiente exista nada podemos dizer sobre a diferenciabilidade da função, mas caso a f seja diferenciável podemos dizer que o vetor gradiente é a representação matricial de $f'(x_o)$ relativamente a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

5.5 REGRAS BÁSICAS DE DERIVAÇÃO

Proposição 5.2 *Sejam $f,g:\Omega\to\mathbb{R}$ duas funções diferenciáveis em x_o. Então*

a) $f+g$ é diferenciável em x_o e $(f+g)'(x_o)=f'(x_o)+g'(x_o)$;

b) fg é diferenciável em x_o e $(fg)'(x_o)=f(x_o)g'(x_o)+f'(x_o)g(x_o)$

c) se $g(x_o)\neq 0$ então f/g é diferenciável em x_o e $(f/g)'(x_o)=\frac{f(x_o)g'(x_o)-f'(x_o)g(x_o)}{g(x_o)^2}$.

Demonstração: a) Como f,g são diferenciáveis,

$$f(x_o+h)=f(x_o)+L(h)+r_1(h)$$

$$g(x_o+h)=g(x_o)+G(h)+r_2(h)$$

somando f e g

$$f(x_o+h)+g(x_o+h)=f(x_o)+g(x_o)+L(h)+G(h)+r_1(h)+r_2(h)$$

colocando $r(h)=r_1(h)+r_2(h)$

$$f(x_o+h)+g(x_o+h)=f(x_o)+g(x_o)+L(h)+G(h)+r(h)$$

com $L(h)+G(h)$ linear e $\frac{r(h)}{||h||}$ tendendo a zero.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)+g(x_o+h)-(f(x_o)+g(x_o))}{||h||}=L(h)+G(h)$$

denotando $L(h)=f'(x)$ e $G(h)=g'(x)$ vem o resultado acima. ∎

Demostração: b) Multiplicando as funções f,g, obtemos

$$f(x_o+h)g(x_o+h)=(f(x_o)+L(h)+r_1(h))(g(x_o)+G(h)+r_2(h))$$

$$f(x_o+h)g(x_o+h)=f(x_o)g(x_o)+f(x_o)G(h)+g(x_o)L(h)+R(h)$$

onde $R(h)=f(x_o)r_2(h)+L(h)G(h)+L(h)r_1(h)+g(x_o)r_1(h)+r_1(h)G(h)+r_1(h)r_2(h)$ fazendo $h\to 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)g(x_o+h)-f(x_o)g(x_o)}{||h||}=f(x_o)G(h)+g(x_o)L(h)+\lim_{h\to 0}\frac{R(h)}{||h||}$$

como $G(h)=g'(h)$ e $L(h)=f'(h)$ e $f(x_o)g'(x_o)+f'(x_o)g(x_o)$ é linear com $R(h)$ tendendo a zero, temos que

$$(fg)'(x_o)=f(x_o)g'(x_o)+f'(x_o)g(x_o)$$

5.6 CASO GERAL

Antes de definirmos a diferenciabilidade de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, que nos exige fatos básicos da Álgebra Linear, sejam eles.
a) Se $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear, fixadas as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, existe uma matriz $A_{m\times n} = [a_{ij}]$ tal que

$$L(x) = Ax,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Sendo A chamada de a matriz associada à transformação linear L ou de representação matricial de L relativamente as base canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, linha e coluna respectivamente.
Vamos representar a matriz associada a um transformação L por $[L]$.
b) Seja duas transformações lineares $L_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $L_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, definimos a composta da duas transformações $L_2 \circ L_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é dada por

$$[L_2 \circ L_1] = [L_2] \times [L_1]$$

Agora vamos definir o comportamento da função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Definição 5.4 *Uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ é dita Fréchet-derivável no ponto $x_o \in \Omega$ se existem funções $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $r_{x_o} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tais que*

$$f(x_o + h) = f(x_o + L(h) + r_{x_o}(h)) \tag{6}$$

como L é linear e $r_{x_o}(h)$ tende a zero mais rápido, isto é, satisfazendo a condição

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|r_{x_o}(h)\|}{\|h\|} = 0 \tag{7}$$

Por simplicidade de notação escrevemos $r(h)$, deixando de forma implícita a dependência de r em relação ao ponto x_o.
Caso a função f seja diferenciável no ponto x_o, então a transformação linear L é denominada a diferencial de f no ponto x_o ou Fréchet-derivável de f em x_o, vamos de notar de $f'(x_o)$, ou seja, $f'(x_0) = L$.

Lema 5.3 *Uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ é diferenciável no ponto x_o se e somente se cada uma de suas componentes $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto x_o.*

Demonstração: Se cada f_i é diferenciável em x_o, então existem funções L_i e r_i satisfazendo (1) tais que L_i é linear e satisfaça

$$\lim_{h\to 0} \frac{|r_i(h)|}{\|h\|} = 0$$

Sejam $L=(L_1,L_2,\ldots,L_m)$ e $r=(r_1,r_2,\ldots,r_m)$. Então, é claro que $f(x_o+h)=f(x_o)+L(h)+r(h)$ segue do Teorema (3.2) que

$$\frac{\|r(h)\|}{\|h\|}\leq C\frac{\|r(h)\|_1}{\|h\|}=C\sum_{i=1}^{n}\frac{|r_i(h)|}{\|h\|}\to 0 \qquad \text{se} \qquad h\to 0.$$

Reciprocamente, se f é diferenciável em x_o, então existem funções $L=(L_1,L_2,\ldots,L_m)$ linear e $r=(r_1,r_2,\ldots,r_m)$ satisfazendo (6) e (7). Como cada L_i é linear e

$$\frac{|r_i(h)|}{\|h\|}\leq\frac{\|r(h)\|}{\|h\|}$$

temos o resultado. $\blacksquare$

5.7 A MATRIZ JACOBIANA

Se $f=(f_1,f_2,\ldots,f_m):\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ é uma função diferenciável em $x_o\in\Omega$, então sua diferencial (ou sua derivada de Fréchet) $f'(x_o)$ é uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. A matriz associada a $f'(x_o)$ relativamente às bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ é dada por

$$[f'(x_o)]=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_o) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_o) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_o) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_o) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_o) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_o) \end{bmatrix}$$

Observe que as linhas de $[f'(x_o)]$ são formadas pelos gradientes de cada f_i em x_o.
No caso em que $m=n$ a matriz $[f'(x_o)]$ é denominada de *Matriz Jacobiana* de f em x_o. O seu determinante é denominado de *Jacobiano* de f em x_o, que denotamos por

$$J_f(x_o)=\det[f'(x_o)]$$

Observações: Se $J_f(x_o)\neq 0$, então a matriz $[f'(x_o)]$ é inversível. Como $f'(x_o)$ aproxima $f(x)-f(x_o)$ na vizinhança de x_o, seria razoável esperar que f também fosse inversível nas proximidades de x_o. De fato é quase isso, como veremos mais à frente no estudo do Teorema da Função Inversa.

5.8 REGRA DA CADEIA

Teorema 5.1 *(Regra da Cadeia) Sejam Ω subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e A subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$. Suponhamos $f:\Omega\to\mathbb{R}^m$ e $g:A\to\mathbb{R}^k$ duas funções tais que $f(\Omega)\subset A$. Se f é diferenciável no ponto x_o e g é diferenciável em $y_o=f(x_o)$, então $g\circ f$ é diferenciável no ponto x_o e*

$$(g\circ f)'(x_o)=g'(y_o)\circ f'(x_o)$$

Em particular

$$[(g\circ f)'(x_o)]=[g'(y_o)][f'(x_o)].$$

Demonstração: Sejam $L=f'(x_o)$ e $G=g'(y_o)$. Pela definição da diferenciabilidade

$$f(x_o+h)=f(x_o)+L(h)+r_f(h),\ \forall h\in\mathbb{R}^n$$

$$g(y_o+k)=g(y_o)+G(k)+r_g(k),\ \forall k\in\mathbb{R}^m$$

satisfazendo as condições

$$\lim_{h\to 0}\frac{|r_f(h)|}{\|h\|}=0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{k\to 0}\frac{|r_g(k)|}{\|k\|}=0$$

Portanto, podemos escrever

$$g(f(x_o+h))=g(f(x_o))+G(L(h))+r(h),$$

onde $r:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ é definida por $r=G\circ r_f+r_g\circ(L+r_f)$.
Além disso,

$$\frac{\|r(h)\|}{\|h\|}\leq\frac{\|G(r_f(h))\|}{\|h\|}+\frac{\|r_g(L(h)+r_f(h))\|}{\|h\|}.$$

Pelo Lema (5.3), podemos escrever

$$\frac{\|r(h)\|}{\|h\|}\leq\alpha\frac{\|r_f(h)\|}{\|h\|}+\frac{\|r_g(k)\|}{\|k\|}\frac{\|k\|}{\|h\|},$$

onde $k=L(h)+r_f(h)$.
Como $\|k\|\leq\alpha\|h\|+\|r_f(h)\|$, temos

$$\frac{\|r(h)\|}{\|h\|}\leq\frac{\|r_f(h)\|}{\|h\|}+\frac{\|r_g(k)\|}{\|k\|}\left(\alpha+\frac{\|r_f(h)\|}{\|h\|}\right)$$

e concluímos o resultado, visto que $\|k\|\to 0$ quando $\|h\|\to 0$. ■

5.9 O TEOREMA DO VALOR MÉDIO

O Teorema do Valo Médio se estende para o caso de funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ e sua demonstração é consequência direta da Regra da Cadeia, como se vê na prova do resultado a seguir.

Teorema 5.2 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável de x_1 e x_2 dois pontos quaisquer de $\mathbb{R}^n$. Então existe $\bar{x}$ sobre o seguimento de reta que liga x_1 a x_2 tal que*

$$f(x_2) - f(x_1) = \langle \bigtriangledown f(\bar{x}); x_2 - x_1 \rangle$$

Demonstração: Consideremos $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ a parametrização $\gamma(t) = x_1 + t(x_2 - x_1)$ da reta que passa por x_1 e x_2. É fácil ver que γ é função diferenciável e $\gamma'(t_o)(\Delta t) = x_2 - x_1$ para todo $t_o \in \mathbb{R}$. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função real definida pela composição $g(t) = g\big(\gamma(t)\big)$. Pelo Teorema 5.1, g é uma função derivável e $g'(t) = \Big\langle \bigtriangledown f\big(\gamma(t)\big); x_2 - x_1 \Big\rangle$. Pelo Teorema do Valor Médio para funções reais de variável real, $g(1) - g(0) = g'(t_o)$ para algum $t_o \in]0,1[$. Assim denotando por $\bar{x} = \gamma(t_o)$, segue o resultado.

Observação 5.1 *O Teorema do Valor Médio não é valida para funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, se $m > 1$. Em particular, não vale para curvas em $\mathbb{R}^m$.*

5.10 DERIVADAS PARCIAIS (CASO GERAL)

Seja $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ uma função diferenciável em x_o. Então a diferencial $f'(x_o)$ fica determinada pela matriz $[f'(x_o)]$.

Se $x\in\mathbb{R}^n$ com $x=(y,z)$ o domínio definido por $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^l$, assim $x=(y_1,y_2,\ldots,y_k,z_1,z_2,\ldots,z_l)$, então podemos escrever

$$[f'(x_o)]=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x_o) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_k}(x_o) & \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(x_o) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_l}(x_o)\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x_o) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_k}(x_o) & \frac{\partial f_m}{\partial z_1}(x_o) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial z_l}(x_o)\end{bmatrix}$$

Se considerarmos os blocos B e C definidos respectivamente por

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x_o) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_k}(x_o)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x_o) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_k}(x_o)\end{bmatrix},\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(x_o) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_l}(x_o)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial z_1}(x_o) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial z_l}(x_o)\end{bmatrix}$$

então para todo $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^l$, temos

$$f'(x_o)h=Bh_1+Ch_2.$$

As transformações lineares associadas às submatrizes B e C são denominadas parciais de f em relação respectivamente a y e z em x_o e denotamos

$$B=\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_o)\right],\quad C=\left[\frac{\partial f}{\partial z}(x_o)\right]$$

Com esta notação podemos escrever

$$f'(x_o)h=\frac{\partial f}{\partial y}(x_o)h_1+\frac{\partial f}{\partial z}(x_o)h_2$$

Com a notação das derivadas parciais, a Regra da Cadeia toma a seguinte forma

Teorema 5.3 *Seja $f:\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^m$ uma função diferenciáveis em x_o,y_o. Sejam $\varphi:\mathbb{R}^{n_1}\to\mathbb{R}^k$ e $\psi:\mathbb{R}^{n_2}\to\mathbb{R}^l$ funções diferenciáveis tais que $\varphi(u_o)=x_o$ e $\psi(v_o)=y_o$. Então $g:\mathbb{R}^{n_1+n_2}\to\mathbb{R}^m$ definida por $g(u,v)=f(\varphi(u),\psi(v))$ é diferenciável em (u_o,v_o) e*

$$[g'(u_o,v_o)]=\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_o,y_o)\right]\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_o)\right]+\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_o,y_o)\right]\left[\frac{\partial\psi}{\partial v}(v_o)\right].$$

5.11 CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA A DIFERENCIABILIDADE

Para verificarmos se uma função qualquer é diferenciável, devemos recorrer para as definições disponíveis até o momento. Onde é motivado a obter o Teorema que nos fornece condições suficiente para a diferenciabilidade de uma função qualquer.

Teorema 5.4 *Se uma $f:\Omega \to \mathbb{R}$ possui de derivadas parciais em todos os pontos do aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e cada uma delas é contínua no ponto x_o, então f é diferenciável no ponto x_o.*

Demonstração: À guisa de simplicidade, faremos a demonstração no caso $n = 2$; o caso geral segue por argumento análogo.
Seja $h = (h_1, h_2) = h_1e_1 + h_2e_2$, onde $\{e_1, e_2\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Então

$$f(x_o+h) - f(x_o) = f(x_o+h) - f(x_o+h_1e_1) + f(x_o+h_1e_1) - f(x_o) \tag{8}$$

Como a função $g(t) = f(x_o+h_1e_1+te_2)$ é derivável com derivada contínua em torno de $t = 0$, temos do Teorema do Valor Médio para funções reais que $g(h_2) - g(0) = g'(\xi)h_2$. Portanto,

$$f(x_o+h_1e_1+h_2e_2) - f(x_o+h_1e_1) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_o+h_1e_1+\xi_2e_2)h_2,$$

onde $\xi_2 \in]0, h_2[$. Analogamente, a função $t \to f(x_o+te_1)$ é derivável com derivada contínua em torno de $t = 0$. Logo,

$$f(x_o+h_1e_1) - f(x_o) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_o+\xi_1e_1)h_1, \qquad \xi_1 \in]0, h_1[.$$

Portanto,

$$f(x_o+h) - f(x_o) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_o+\xi e_1)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_o+h_1e_1+\xi e_2)h_2.$$

Denotando por

$$r(h) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_o+\xi e_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_o)\right)h_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_o+h_1e_1+\xi e_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_o+h_1e_1)\right)h_2, \tag{9}$$

temos

$$f(x_o+h) = f(x_o) + \langle \nabla f(x_o); h\rangle + r(h).$$

Para concluir que f é diferenciável basta mostrar que $r(h)$ é de ordem $o(\|h\|)$.
Por hipótese, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in B_\delta(x_o)$, então

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o)\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Em particular, se $x,y \in B_\delta(x_o)$, então

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto, se $\|h\| < \delta$, segue de (9)

$$|r(h)| < \frac{\varepsilon}{2|h_1|} + \frac{\varepsilon}{2|h_2|} \leq \varepsilon\|h\|_1$$

e consequentemente,

$$\frac{|r(h)|}{\|h\|_1} < \varepsilon$$

e o resultado segue da equivalência das norma em $\mathbb{R}^n$. ■

5.12 FUNÇÕES DE CLASSE C^1

Se $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ é uma função diferenciável em cada ponto x do seu domínio, então podemos considerar a função linear $f'(x)$, diferencial de f em x. Temos assim a aplicação

$$\begin{array}{rcl} f': & \to & \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m), \\ x & \mapsto & f'(x), \end{array}$$

onde $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ denota o espaço de todas as aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. f' é denominada a função diferencial de f (ou função derivada de Fréchet de f).
Observe que, fixada uma base nos espaços $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, como por exemplo a base canônica, então cada elemento T de $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ pode ser representado por uma matriz $[T]$ de $M_{m\times n}$.

Exemplo 5.5 *Se $f(x,y)=(xy,x^2+y^2)$ então $f':\mathbb{R}^2\to\mathfrak{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ é dada por*

$$[f'(x,y)]=\begin{bmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{bmatrix}$$

Exemplo 5.6 *Se $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ é definida por $f(x)=\|x\|_2^2$, então $f'(x)=2x$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$. Logo $f'\equiv 2I$, onde I denota a função identidade de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$.*

Se $m=1$, então o espaço $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ pode ser identificado com $\mathbb{R}^n$ (ou mais precisamente com $M_{1\times n}$), isto é, $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\cong\mathbb{R}^n$. Neste caso, se $f:\Omega\to\mathbb{R}$ é a função diferenciável, podemos fazer a identificação

$$\begin{array}{rcl} f':\Omega & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & \nabla f(x) \end{array}$$

Definição 5.5 *Dizemos que uma função diferenciável $f:\Omega\to\mathbb{R}^m$ é de classe C^1 (ou continuamente diferenciável) em $x_o\in\Omega$ se f' é função contínua em x_o. Dizemos que f é de classe C^1 em Ω se f' é função contínua em todos os pontos de Ω.*

Como já vimos anteriormente, uma função f pode possuir derivadas parciais e não se diferenciável. De fato, pode nem mesmo ser contínua. Entretanto, se f é uma função convexa e possui derivadas parciais, então ela é necessariamente de classe C^1.

Teorema 5.5 *Seja Ω um aberto convexo de $\mathbb{R}^n$ e $f:\Omega\to\mathbb{R}$ uma função convexa que possui derivadas parciais em todos os pontos de Ω. Então f é de classe C^1.*

Demonstração: Como f é convexa, então

$$f(\lambda y+(1-\lambda)x) \leq \lambda f(y)+(1-\lambda)f(x) \tag{10}$$

para todo $x,y \in \Omega$ e $0 \leq \lambda \leq 1$. Seja K um subconjunto compacto de Ω. Então existe $\delta > 0$ tal que $x+se_i \in \Omega$ para todo $x \in K$, $|s| < \delta$, e $i = 1,\ldots,n$, onde $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Assim, para $y = x+se_i$ obtemos de (10)

$$\frac{f(x+\lambda se_i)-f(x)}{\lambda} \leq f(x+se_i)-f(x).$$

Passando ao limite nesta desigualdade quando $\lambda \to 0^+$ temos que

$$s\nabla f(x)\cdot e_i \leq f(x+se_i)-f(x).$$

Como esta desigualdade também é válida substituindo s por $-s$, segue que se $s \in]0,\delta[$, então

$$\frac{f(x)-f(x-se_i)}{s} \leq \nabla f(x)\cdot e_i \leq \frac{f(x+se_i)-f(x)}{s} \tag{11}$$

para todo $x \in K$ e $i = 1,\ldots,n$.
Se f não é C^1, então existe $\varepsilon > 0$, $x_o \in \Omega$ e uma sequência $\{x_k\}_k \leq 1$ em Ω tal que $x_k \to x_o$ e

$$|\nabla f(x_k)-\nabla f(x_o)| > \varepsilon, \qquad \forall k. \tag{12}$$

Seja $K = \{x_o,x_1,x_2,\ldots,\}$. Se $|s| < \frac{\delta}{2}$ e k é suficientemente grande, então $x_k \pm se_i \in \Omega$ e como f é continua em Ω, segue de (11) que a sequência $\{\nabla f(x_k)\cdot e_i\}$ é limitada, para cada $i = 1,\ldots,n$. Portanto, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que existe $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla f(x_k) \to u$. Portanto, passando ao limite quando $k \to \infty$ em (11), temos, para $s \in]0,\frac{\delta}{2}[$ e $i = 1,\ldots,n$

$$\frac{f(x_o)-f(x_o-se_i)}{s} \leq u\cdot e_i \leq \frac{f(x_o+se_i)-f(x_o)}{s}. \tag{13}$$

Fazendo $s \to 0^+$ em (13) obtemos $\nabla f(x_o) = u$, o que está em contradição com (12). Portanto, $x \to \nabla f(x)$ é contínua em Ω. ■

5.13 PROJEÇÃO ORTOGONAL

A *projeção ortogonal* sobre um convexo fechado C de $\mathbb{R}^n$ definido por

$$\begin{array}{rcl} P_C : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & P_C \end{array}$$

onde $P_C(x)$ é denominado projeção ortogonal de x sobre C que é importante pois na analise convexa e surge com frequência nas aplicações.

Teorema 5.6 *Seja C um conjunto convexo e fechado de $\mathbb{R}^n$ e considere a função $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \left\langle x - \frac{1}{2}P_C(x); P_C(x) \right\rangle, \tag{14}$$

Então f é função de classe C^1 em $\mathbb{R}^n$ e $f' = P_C$.

Demonstração: Sejam x_o e h em $\mathbb{R}^n$. Então podemos escrever

$$f(x_o+h) = f(x_o) + \langle P_C(x_o); h\rangle + r(h),$$

onde

$$r(h) = \frac{1}{2}\|P_C(x_o)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|P_C(x_o+h)\|_2^2 + \langle x_o + h; P_C(x_o+h) - P_C(x_o)\rangle.$$

Como $g(x) = \frac{1}{2}\|x\|_2^2$ é diferenciável com $g'(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, temos do Teorema do Valor Médio,

$$\frac{1}{2}\|P_C(x_o)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|P_C(x_o+h)\|_2^2 = \langle (1-\theta)P_C(x_o) + \theta P_C(x_o+h); P_C(x_o) - P_C(x_o+h)\rangle,$$

para algum $\theta \in]0,1[$. Logo,

$$r(h) = \langle x_o - P_C(x_o); P_C(x_o+h) - P_C(x_o)\rangle - \theta\|P_C(x_o+h) - P_C(x_o)\|_2^2 + \langle h; P_C(x_o+h) - P_C(x_o)\rangle \tag{15}$$

Como as duas primeiras parcelas do lado direito de (15) são negativas, temos

$$r(h) \leq \|h\|_2\|P_C(x_o+h) - P_C(x_o)\|_2 \leq \|h\|_2^2$$

Por outro lado, considerando $v = 1-\theta$, temos

$$\begin{array}{rcl} r(h) & = & \langle vP_C(x_o) + (1-v)P_C(x_o+h); P_C(x_o) - P_C(x_o+h)\rangle + \langle x_o + h; P_C(x_o+h) - P_C(x_o)\rangle \\ & = & \langle x_o + h - P_C(x_o+h); P_C(x_o+h) - P_C(x_o)\rangle + v\|P_C(x_o) - P_C(x_o+h)\|_2^2 \geq 0 \end{array}$$

Portanto, $0 \geq r(h) \geq \|h\|_2^2$ e temos a conclusão. ■

6 TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA

Vamos aqui tratar um dos temas principais da Análise o Teorema da Função Inversa, onde dada uma função linear $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $g(x) = xA$, onde A é a matriz quadrada $n \times n$. Para obtermos a inversa da g basta que $detA \neq 0$ onde $g^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e dada por $g^{-1}(x) = xA^{-1}$. Mas caso a g (ou g^{-1}) seja Fréchet-deriváveis no ponto x_o em $\mathbb{R}^n$, escrevemos $g'(x_o) = A$ (ou $(g')^{-1} = A^{-1}$). Agora vamos pegar um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e uma função $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ que seja Fréchet-derivável no ponto $x_o \in \Omega$, pela definição de diferenciabilidade

$$f(x_o + h) = f(x_o) + A(h) + r(h),$$

onde $A, r(h): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e a condição que A matrix linear e $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{||h||} = 0$, onde

$$f'(x_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h},$$

sendo a função $f': \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que melhor aproxima de $x_o \in \Omega$.
No entanto é sutil pesar que se a função $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $x_o \in \Omega$ e a Matriz Jacobiana dada por $A = [f'(x_o)]$ tal que

$$J_f(x_o) = \det[A] = \det[f'(x_o)] \neq 0,$$

nos leva que a f seja inversível nas proximidades de x_o.
Desta maneira temos que não é verdadeira, mesmo para $n = 1$.
Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \text{ sen } \frac{1}{x} & se \quad x \neq 0, \\ 0 & se \quad x = 0. \end{cases}$$

Derivando a função f em todos os pontos de $\mathbb{R}$ obtemos

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2x \text{ sen } \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & se \quad x \neq 0, \\ \frac{1}{2} & se \quad x = 0. \end{cases}$$

Se f fosse inversível numa vizinhança de $x_o = 0$, então seria necessariamente injetora nessa vizinhança. Como $f'(0) = 1/2$, seria necessariamente crescente na vizinhança do ponto zero. No entanto isto seria impossível porque $f'(x)$ muda de sinal infinita vezes proximo ao ponto zero. Observe que se f' fosse contínua em $x_o = 0$, então $f'(x) > 0$ para x suficientemente

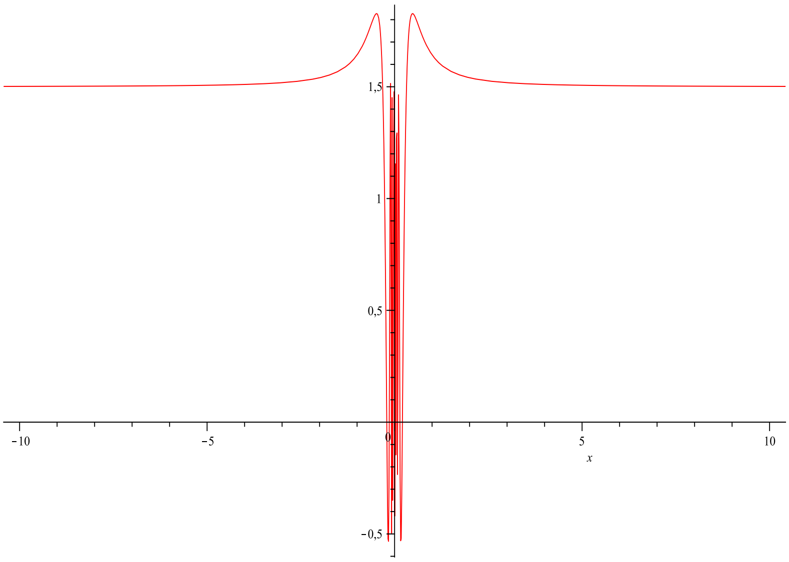

Figura 5: Inversa
Fonte: Maple

próximo de $x_o = 0$ e teríamos o resultado desejado.

6.1 TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA

O Teorema da Função Inversa se aplica para função $f : V \to V$ com $V \subset \mathbb{R}^n$. Vamos utilizar indistintamente a norma $\| \quad \|$ com norma euclidiana $\| \quad \|_2$ de $\mathbb{R}^n$ e a norma induzida $\| \quad \|_{\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)}$.

Teorema 6.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ função de classe C^1 tal que $J_f(x_o) \neq 0$. Então existe $\delta_o > 0$ tal que*

a) *f é injetora em $U = B_{\delta_o}(x_o)$;*

b) *$V = f(U)$ é aberto;*

c) *$f^{-1} : V \to U$ é de classe C^1 e $[(f^{-1})'(f(x_o))] = [f'(x_o)]^{-1}$.*

Demonstração: Faremos a demonstração em quatro etapas.
Etapa 1: Vamos provar que existe um δ_1 tal que f é injetora em $B_{\delta_1}(x_o)$.

Fazendo $f'(x_o) = A$ e $J_f(x_o) \neq 0$, por hipótese A^{-1} está bem definida.
Como f é de classe C^1, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (dependendo de ε e x_o) tal que

$$\|x - x_o\| < \delta \Rightarrow \|f'(x) - A\| < \varepsilon. \tag{16}$$

Como $B_\delta(x_o)$ é aberto, então podemos tomar $x \in B_\delta(x_o)$ e $h \neq 0$ tal que $x + h \in B_\delta(x_o)$.
Afirmo: $f(x+h) \neq f(x)$ se $\delta > 0$.
Com efeito Seja $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ definida por $\varphi(t) = f(x+th) - tAh$. Então φ é de classe C^1 no intervalo aberto]0,1[em virtude do Teorema da Regra da Cadeia obtemos, $\varphi'(t) = f'(x + th)h - Ah$. E pelo Teorema Fundamental do Calculo temos

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)dt,$$

isto é,

$$f(x+h) - Ah - f(x) = \int_0^1 (f'(x+th) - A)h\,dt.$$

Em particular

$$\|f(x+h) - f(x) - Ah\| \leq \int_0^1 \|f'(x+th) - A\|\|h\|dt$$

como $x + th \in B_\delta(x_o)$, $\forall t \in]0,1[$ segue de (16) que

$$\|f(x+h) - f(x) - Ah\| < \int_0^1 \varepsilon\|h\|dt = \varepsilon\|h\| \tag{17}$$

ou seja,

$$\|f(x+h) - f(x) - Ah\| < \varepsilon\|h\| \tag{18}$$

temos $\|h\| = \|A^{-1}Ah\| \leq \|A^{-1}\|\|Ah\|$ segue daí que $\|h\| \leq \|A^{-1}\|\|Ah\|$ e obtemos de (18)

$$\begin{aligned} \|f(x+h) - f(x) - Ah\| &< \varepsilon\|A^{-1}\|\|Ah\| \\ -\|f(x+h) - f(x) - Ah\| &> -\varepsilon\|A^{-1}\|\|Ah\| \end{aligned} \tag{19}$$

usando (19), obtemos

$$\begin{aligned} \|f(x+h) - f(x)\| &= \|f(x+h) - f(x) - Ah + Ah\| \\ &\geq \|Ah\| - \|f(x+h) - f(x) - Ah\| \\ &> \|Ah\| - \varepsilon\|A^{-1}\|\|Ah\| \\ &> \|Ah\| - \varepsilon\|A^{-1}\|\|Ah\| \\ &> (1 - \varepsilon\|A^{-1}\|)\|Ah\| \end{aligned}$$

$$\|f(x+h) - f(x)\| > (1 - \varepsilon\|A^{-1}\|)\|Ah\| \tag{20}$$

Tomando-se $\varepsilon = \frac{1}{2\|A^{-1}\|}$ e $\delta_1 < \delta$ obtemos de (20):

$$\|f(x+h) - f(x)\| > \frac{1}{2}\|Ah\|. \tag{21}$$

Como a matriz A possui inversa, $Ah \neq 0$ $\forall h \neq 0$ onde temos que f é injetiva.

Etapa 2: Vamos provar que existe δ_2 tal que $f\big(B_{\delta_2}(x_o)\big)$ é aberto.
Por hipótese f é de classe C^1, $x \mapsto J_f(x)$ é uma função contínua. Logo, existe $\widetilde{\delta} > 0$ tal que $J_f(x) \neq 0$ $\forall x \in B_{\widetilde{\delta}}(x_o)$.
Considere-se $\delta_2 = \min\{\delta_1, \widetilde{\delta}\}$. Então $J_f(x) \neq 0$ para todo $x \in B_{\delta_2}(x_o)$ e f injetora em $B_\delta(x_o)$.
Provemos que $W = f(B_{\delta_2}(x_o))$ é um conjunto aberto.
Seja $y_1 \in W$. Então pela definição de imagem existe um único $x_1 \in B_{\delta_2}(x_o)$ tal que $f(x_1) = y_1$.
Tome $r > 0$ tal que $\overline{B_r(x_1)} \subset B_{\delta_2}(x_o)$ e considere a fronteira

$$K = \partial B_r(x_1) \quad \text{e} \quad u(x) = \|f(x) - f(x_1)\|.$$

$$\begin{array}{rcl} u : K & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & u(x) = \|f(x) - f(x_1)\| \end{array}$$

onde u é contínua pois, f é contínua e a norma de uma função contínua é contínua.
Como K é compacto e u é função contínua, existe $x^* \in K$ tal que

$$m := \inf\{u(x); x \in K\} = u(x^*).$$

Observe que $x^* \in K \Rightarrow x^* \neq x_1 \Rightarrow f(x^*) \neq f(x_1)$ pela injetividade da f e pela definição de m temos, $m = u(x^*) = \|f(x^*) - f(x_1)\| > 0$,ou seja $m > 0$.
<u>Afirmo:</u> $B_{\frac{m}{2}}(f(x_1)) \subset B_r(x_1) \subset W$.
Com efeito, tome $\bar{y} \in B_{\frac{m}{2}}(f(x_1))$. Isto é, $\|\bar{y} - f(x_1)\| < \frac{m}{2}$. Definindo

$$\begin{array}{rcl} w : \overline{B_r(x_1)} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & w(x) = \|f(x) - \bar{y}\|. \end{array}$$

Como $\overline{B_r(x_1)}$ é compacto, existe $\bar{x} \in \overline{B_r(x_1)}$ tal que

$$w(\bar{x}) = \min\{w(x); x \in \overline{B_r(x_1)}\}.$$

Observe que

$$\begin{array}{rcll} w(\bar{x}) & \leq & w(x_1), & \\ \|f(\bar{x}) - \bar{y}\| & \leq & \|f(x_1) - \bar{y}\| & < \frac{m}{2} \end{array}$$

$$w(\bar{x}) = \|f(\bar{x}) - \bar{y}\| \leq \|f(x_1 - \bar{y})\| < \frac{m}{2}.$$

Observe também que se $x \in K$, então

$$w(x) = \|f(x) - \overline{y}\| \geq \|f(x) - f(x_1)\| - \|f(x_1 - \overline{y})\| \geq m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2}.$$

Portanto $\overline{x} \notin K$, o que implica $\overline{x} \in B_r(x_1)$.
Afirmo: $f(\overline{x}) = \overline{y}$, isto é $\overline{y} \in f(B_r(x_1))$.
Com efeito, se $\overline{x}$ é o ponto de mínimo de $w(x)$ em $\overline{B_r(x_1)}$, então $\overline{x}$ também é ponto de mínimo de $g(x) = \frac{1}{2}\|f(x) - \overline{y}\|^2$. Como $\overline{x}$ é ponto interior, $g'(\overline{x})h = 0$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$, o que implica que $\forall h \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
g(x) &= \tfrac{1}{2}\left\| f(\overline{x}) - \overline{y} \right\|^2 \\
g(x) &= \tfrac{1}{2}\left\langle f(\overline{x}) - \overline{y}; f(\overline{x}) - \overline{y} \right\rangle
\end{aligned}$$

aplicando a diferenciabilidade em g

$$\begin{aligned}
0 = g'(x)h &= \tfrac{1}{2}\left(\left\langle f(\overline{x}) - \overline{y}; f'(\overline{x})h \right\rangle + \left\langle f'(\overline{x}h); f(\overline{x}) - \overline{y} \right\rangle\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\left\langle f(\overline{x}) - \overline{y}; f'(\overline{x})h \right\rangle + \left\langle f(\overline{x}) - \overline{y}; f'(\overline{x})h \right\rangle\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(2\left\langle f(\overline{x}) - \overline{y}; f'(\overline{x})h \right\rangle\right) \\
&= \left\langle f(\overline{x}) - \overline{y}; f'(\overline{x})h \right\rangle \\
&= \left\langle \left[f'(\overline{x})\right]^T (f(\overline{x}) - \overline{y}); h \right\rangle.
\end{aligned}$$

para todo $h \in \mathbb{R}^n$. Então

$$\left[f'(\overline{x})\right]^T (f(\overline{x}) - \overline{y}) = 0.$$

Agora, como

$$\det\left[f'(\overline{x})\right]^T = \det\left[f'(\overline{x})\right] = J_f(x_o) \neq 0$$

segue-se que

$$f(\overline{x}) - \overline{y} = 0,$$

ou ainda, $f(\overline{x}) = \overline{y}$, e a afirmativa está provada.

Etapa 3: Se $U = B_{\delta_2}(x_o)$ e $V = f(U)$, então $f^{-1} : V \to U$ é diferenciável.
Seja $y \in V$ $\big(y = f(x), x \in B_{\delta_2}(x_o)\big)$ e tome $r > 0$ suficientemente pequeno tal que $y + k \in V$ para todo k tal que $\|k\| < r$,

$$\begin{aligned}
h &= f^{-1}(y+k) - x \\
h + x &= f^{-1}(y+k) \\
f(h+x) &= f(f^{-1}(y+k)) \\
f(h+x) &= y + k \\
k &= f(h+x) - y
\end{aligned}$$

$$k = f(h+x) - f(x). \tag{22}$$

Como f é diferenciável em $x \in U$, então:

$$f(x+h) = f(x) + \left[f'(x)\right](h) + r_f(h) \tag{23}$$

satisfazendo a condição

$$\lim_{h \to 0} \frac{||r_f(h)||}{||h||} = 0. \tag{24}$$

De (22) e (23) obtemos que

$$k = \left[f'(x)\right](h) + r_f(h). \tag{25}$$

Já que $x \in U = B_{\delta_2}(x_o)$ então, $J_f(x) \neq 0$ e $f'(x)$ é inversível, consequentemente existe $\left[f'(x)\right]^{-1}$. Assim, seja $B = \left[f'(x)\right]^{-1}$. Multiplicando a matriz B em (25), obtemos

$$\begin{aligned} Bk &= Bf'(x)h + Br_f(h) \\ Bk &= h + Br_f(h) \\ h &= Bk - Br_f(h) \end{aligned}$$

Também $h = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)$.
Portanto,

$$\begin{aligned} f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) &= Bk - Br_f(h) \\ f^{-1}(y+k) &= f^{-1}(y) + Bk - Br_f(h) \end{aligned}$$

Para provar que f^{-1} é diferenciável, basta provar que

$$\lim_{k \to 0} \frac{||Br_f(h)||}{||k||} = 0 \tag{26}$$

De fato, como na Etapa 1 temos:

$$||k|| = ||f(x+h) - f(x)|| \geq \frac{1}{2}||Ah|| \tag{27}$$

Por outro lado como A é inversível temos $h = A^{-1}Ah$, aplicando a norma $||h|| = ||A^{-1}Ah|| \leq ||A^{-1}||\,||Ah||$, daí

$$||Ah|| \geq \frac{||h||}{||A^{-1}||} \tag{28}$$

De (27) e (28) obtemos que

$$||k|| \geq \frac{1}{2}\frac{||h||}{||A^{-1}||} \Leftrightarrow \frac{1}{||k||} \leq \frac{2||A^{-1}||}{||h||}$$

e

$$\begin{aligned}
0 \leq \frac{\|Br_f(h)\|}{\|k\|} &= \|Br_f(h)\|\frac{1}{\|k\|} \\
&\leq \|B\|\|r_f(h)\|\frac{2\|A^{-1}\|}{\|h\|} \\
&= \frac{2\|A^{-1}\|\|B\|\|r_f(h)\|}{\|h\|} \\
0 \leq \frac{\|Br_f(h)\|}{\|k\|} &\leq \frac{2\|A^{-1}\|\|B\|\|r_f(h)\|}{\|h\|}
\end{aligned}$$

Quando $k \to 0$ implica $h \to 0$ o que implica por (24) $\dfrac{2\|A^{-1}\|\|B\|\|r_f(h)\|}{\|h\|}$ tende a zero, assim

$$0 \leq \frac{\|Br_f(h)\|}{\|k\|} \leq 0,$$

como queriamos

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|r_f(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Logo, f^{-1} é diferenciável em $y = f(x) \in V$, por tanto existe

$$\left[f^{-1}\right]'(y) \text{ e } \left[f^{-1}\right]'(y) = \left[f'(x)\right]^{-1} = \left[f'\left(f^{-1}(y)\right)\right]^{-1}$$

para todo $y \in V$.

Etapa 4: $f^{-1} : V \to U$ é de classe C^1.
De fato, $A = f'(x_1)$ e $B = f'(x_2)$. Como f é de classe C^1, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x_2 - x_1\| < \delta \Rightarrow \left\|f'(x_2) - f'(x_1)\right\| < \varepsilon$$

Como f é de classe C^1, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x_2 - x_1\| < \delta \Rightarrow \|B - A\| < \varepsilon$$

Visto que $B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}(A-B)A^{-1}$, obtemos

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \|B^{-1}\|\|A-B\|\|A^{-1}\|$$

Por outro lado, $\forall h \in \mathbb{R}^n$, temos

$$h = A^{-1}Ah,$$

aplicando norma

$$\|h\| = \|A^{-1}Ah\| \leq \|A^{-1}\|\|Ah\| \Leftrightarrow \|Ah\| \geq \frac{\|h\|}{\|A^{-1}\|}, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n. \tag{29}$$

Também temos,

$$\begin{aligned}
\|Bh\| &= \|Ah+Bh-Ah\| \\
&= \|Ah+(B-A)h\| \\
&\geq \|Ah\|-\|(B-A)h\| \\
&\geq \|Ah\|-\|(B-A)\|\|h\| \\
\text{subtituindo (29)} & \\
&\geq \frac{\|h\|}{\|A^{-1}\|}-\|(B-A)\|\|h\|.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|Bh\| \geq \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|}-\|(B-A)\|\right)\|h\|.$$

Observamos que,

$$\begin{aligned}
\|x_2-x_1\|<\delta &\Rightarrow \|B-A\|<\varepsilon \\
&\Rightarrow -\|B-A\|>-\varepsilon \\
&\Rightarrow \frac{1}{\|A^{-1}\|}-\|B-A\|>\frac{1}{\|A^{-1}\|}-\varepsilon \\
&\Rightarrow \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|}-\|B-A\|\right)\|h\| \geq \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|}-\varepsilon\right)\|h\|
\end{aligned}$$

Onde obtemos que,

$$\|x_2-x_1\|<\delta \Rightarrow \|Bh\| \geq \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|}-\varepsilon\right)\|h\|$$

Escolhendo $\varepsilon=\frac{1}{2}\|A^{-1}\| \geq 0$ e o $\delta \leq \delta_2$ correspondente, obtemos

$$\begin{aligned}
\|Bh\| &\geq \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|}-\frac{1}{2}\left\|A^{-1}\right\|\right)\|h\| \\
&\geq \left(\frac{1}{2\|A^{-1}\|}\right)\|h\|
\end{aligned}$$

onde

$$\|Bh\| \geq \frac{1}{2\|A^{-1}\|}\|h\|.$$

Tomando $k=Bh$ temos $B^{-1}k=h$, aplicando norma, obtemos

$$\begin{aligned}
\|B^{-1}k\| &= \|h\| \\
\|B^{-1}k\| &= 2\|A^{-1}\|\|Bh\| \\
\|B^{-1}\|\|k\| &\leq 2\|A^{-1}\|\|k\| \\
\|B^{-1}\| &\leq 2\|A^{-1}\|
\end{aligned}$$

Portanto, se $\|x_1 - x_2\| < \delta$, concluímos

$$\begin{aligned}\|B^{-1} - A^{-1}\| &\leq \|B^{-1}\|\|B - A\|\|A^{-1}\| \\ &\leq 2\|A^{-1}\|\|B - A\|\|A^{-1}\| \\ &= 2\|A^{-1}\|^2\|B - A\| \\ &< 2\|A^{-1}\|^2\|\varepsilon.\end{aligned}$$

Deste modo, obtemos

$$\begin{aligned}\|x_1 - x_2\| < \delta &\Rightarrow \|B^{-1} - A^{-1}\| < 2\|A^{-1}\|^2\|\varepsilon \\ &\Rightarrow \left\|\left[f'(x_2)\right]^{-1} - \left[f'(x_1)\right]^{-1}\right\| < 2\|A^{-1}\|^2\varepsilon\end{aligned}$$

Isso mostra que f^{-1} é de classe C^1.

■

Definição 6.1 *Seja $f : U \rightarrow V$ uma função bijetora. Dizemos que f é um* homeomorfismo *entre U e V se f e f^{-1} são contínuas. Dizemos que f é um* difeomorfismo *entre U e V se f e f^{-1} são diferenciáveis.*

Podemos reescrever o Teorema da Função Inversa utilizando a terminologia da definição acima, que fica:

Teorema 6.2 *Se f é função de classe C^1 e $J_f(x_o) \neq 0$, então existem vizinhanças abertas U e V respectivamente de x_o e $f(x_o)$ tais que f é difeomorfismo de classe C^1 entre U e V.*

6.2 MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS UMA APLICAÇÃO DO TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA

Nesta parte vamos mostrar uma aplicação direta do Teorema da Função Inversa, o Método da Características para a solução de equações a derivadas parciais de primeira ordem, vamos enunciar o problema.

Problema: Seja γ uma curva de $\mathbb{R}^2$ parametrizada por $\gamma : I \rightarrow \Omega$, onde I é um intervalo de $\mathbb{R}$ e Ω um aberto em $\mathbb{R}^2$. Sejam $a, b, c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funções dadas.
Determinar uma função $\varphi(x,y)$ solução da equação

$$a(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial y} = c(x,y), \tag{30}$$

cujos os valores sobre a curva γ são prescritos, isto é, $\varphi(\gamma(\xi)) = \varphi_o(\xi)$ onde $\varphi_o : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada.

Podemos encontrar a solução do problema acima mudando as coordenadas de maneira apropriada, que pode se incluída pelo seguinte argumento: fixado um ponto $\gamma_o = \gamma(s_o) = (x_o, y_o)$ de γ, considere a curva $\Gamma(\xi) = (x(\xi), y(\xi))$ que passa por γ_o, isto é, $\Gamma(0) = \gamma_o$. Definida $z(\xi) = \varphi(x(\xi), y(\xi))$, onde φ é solução de (30). Se Γ é diferenciável, temos pela Regra da Cadeia,

$$\frac{dz}{d\xi} = \left\langle \Gamma'(\xi); \nabla\varphi\big(\Gamma(\xi)\big)\right\rangle = \frac{dx}{d\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{dx}{d\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

pois, note que, ponto fixo é

$$\begin{aligned}
\Gamma(0) &= \gamma_o = \gamma(s_o) = (x_o, y_o) \\
\Gamma(\xi) &= \big(x(\xi), y(\xi)\big) \\
z(\xi) &= \varphi\big(x(\xi), y(\xi)\big) = \varphi\big(\Gamma(\xi)\big) = \big(\varphi\circ\Gamma\big)(\xi)
\end{aligned}$$

agora derivando $\Gamma(\xi)$, obtemos

$$\Gamma'(\xi) = (x'(\xi), y'(\xi)) = \left(\frac{\partial x}{\partial\xi}, \frac{\partial y}{\partial\xi}\right),$$

diferenciando $z(\xi) = \varphi\big(x(\xi), y(\xi)\big) = \varphi\big(\Gamma(\xi)\big)$

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{d\xi} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{d\xi}$$

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{\partial\varphi\big(\Gamma(\xi)\big)}{\partial x}\frac{dx}{d\xi} + \frac{\partial\varphi\big(\Gamma(\xi)\big)}{\partial x}\frac{dx}{d\xi}$$

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{dx}{d\xi}\frac{\partial\varphi\big(\Gamma(\xi)\big)}{\partial x} + \frac{dx}{d\xi}\frac{\partial\varphi\big(\Gamma(\xi)\big)}{\partial y}$$

$$\frac{dz}{d\xi} = \left\langle \left(\frac{dx}{d\xi}, \frac{dx}{d\xi}\right); \left(\frac{\partial\varphi\big(\Gamma(\xi)\big)}{\partial x}, \frac{\partial\varphi\big(\Gamma(\xi)\big)}{\partial y}\right)\right\rangle$$

$$\frac{dz}{d\xi} = \left\langle \Gamma'(\xi); \nabla\varphi\big(\Gamma(\xi)\big)\right\rangle$$

onde

$$\frac{dz}{d\xi} = \left\langle \Gamma'(\xi); \nabla\varphi\big(\Gamma(\xi)\big)\right\rangle = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{d\xi} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{d\xi}$$

Portanto, se Γ satisfaz o sistema de equações diferenciais ordinária

$$\begin{cases}
\dfrac{dx}{d\xi} = a(x,y), \qquad x(0) = x_o, \\
\dfrac{dy}{d\xi} = b(x,y), \qquad y(0) = y_o,
\end{cases} \tag{31}$$

podemos obter a solução φ resolvendo

$$\frac{dz}{d\xi} = c(x,y), \quad z(0) = \varphi_o(s_o).$$

Se repetirmos o argumento anterior para todos os pontos $\gamma(s)$, $s \in I$, obtemos uma família de curvas - as curvas características - sobre as quais o solução φ pode ser determinada.
Antes de analisarmos as condições para as quais o método funciona (e onde entra o Teorema da Função Inversa), vejamos um exemplo cuja solução explícita pode ser calculada.

Exemplo 6.1 *Considere $\gamma(s) = (s, s^2)$. Determinar $\varphi(x,y)$ solução de*

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y} = xy \tag{32}$$

tal que $\varphi(\gamma(s)) = sen\big(x^2\big)$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Solução: Consideremos o sistema (equação características)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\xi} = x, & x(0,s) = s, \\ \dfrac{dy}{d\xi} = y, & y(0,s) = s^2, \\ \dfrac{dz}{d\xi} = xy, & z(0,s) = \text{sen}(s^2) \end{cases} \tag{33}$$

Resolvendo as duas primeiras equações de (33), temos,

$$\frac{dx}{d\xi} = x \Leftrightarrow \frac{dx}{d\xi} - x = 0$$

multiplicando por $e^{-\xi}$, obtemos

$$\frac{dx}{d\xi}e^{-\xi} - xe^{-\xi} = 0$$

então

$$\frac{d}{d\xi}\left[x(\xi,s)e^{-\xi}\right] = 0,$$

integrando de 0 a ξ, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi} \frac{d}{dt}\left[x(t,s)e^{-t}\right] dt &= 0 \\ x(\xi,s)e^{-\xi} &= s \\ x(\xi,s) &= se^{\xi} \end{aligned}$$

de modo análogo, obtemos $y(\xi,s) = s^2e^{\xi}$. Para simplificar a notação, vamos utilizar x no lugar de $x(\xi,s)$ (x depende de ξ e s), de modo análogo para y, segue que

$$\begin{cases} x = se^{\xi}, \\ y = s^2e^{\xi}. \end{cases} \tag{34}$$

Substituindo (34) na terceira equação de (33) e resolvendo, isto é,

$$\frac{dz}{d\xi} = xy$$

temos

$$\frac{dz}{d\xi} = s^3 e^{2\xi}, \tag{35}$$

integrando (35) de 0 a ξ, obtemos

$$\begin{aligned} z(\xi,s) - z(0,s) &= \int_0^{\xi} \left[s^3 e^{2t}\right] dt \\ &= \int_0^{\xi} \left[s^3 e^{2t}\right] dt \\ &= \frac{s^3 e^{2\xi}}{2} - \frac{s^3 e^0}{2} \\ &= \frac{s^3 e^{2\xi}}{2} - \frac{s^3}{2} \\ &= \frac{s^3}{2}\left(e^{2\xi} - 1\right), \end{aligned}$$

como $z(0,s) = \text{sen}\left(s^2\right)$ e substituindo,

$$z(\xi,s) - \text{sen}\left(s^2\right) = \frac{s^3}{2}\left(e^{2\xi} - 1\right)$$

obtemos,

$$z(\xi,s) = \frac{s^3}{2}\left(e^{2\xi} - 1\right) + \text{sen}\left(s^2\right). \tag{36}$$

Mudando as variáveis adequadamente, isto é,

$$x = se^{\xi} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{s} = e^{\xi}, \tag{37}$$

da mesma forma

$$y = s^2 e^{\xi} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{s^2} = e^{\xi}, \tag{38}$$

de (37) e (38), obtemos

$$\frac{x}{s} = \frac{y}{s^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{y}{x} = s, \tag{39}$$

e observe que

$$s = \frac{x}{e^{\xi}}, \tag{40}$$

de (39) e (40), surge

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{e^{\xi}} \qquad \Leftrightarrow \qquad e^{\xi} = \frac{x^2}{y} \qquad \Leftrightarrow \qquad e^{2\xi} = \left(\frac{x^2}{y}\right)^2 \tag{41}$$

Explicitando ξ e s em função de x e y, ou seja, substituindo (39) e (41) em (36) encontramos a solução

$$z = \varphi(x,y) = \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^3 + \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Observação: O exemplo evidencia o ponto-chave do método. De fato, a solução das duas primeiras equações de (33) determine uma mudança de variáveis, isto é uma função

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (\xi,s) & \mapsto & f(\xi,s)=(x,y) \end{array}$$

Se f é inversível, então obtemos a solução por

$$f(\xi,s) = (x,y) \Rightarrow (\xi,s) = f^{-1}(x,y),$$

então

$$\varphi(x,y) = z(\xi,s) = z\big(f^{-1}(x,y)\big) = (z\circ f^{-1})(x,y).$$

Aplicando o Teorema da Função Inversa temos que, se o jacobiano é diferente de zero para todo ponto pertencente a esta curva de $(x,y)\in\gamma\subset\mathbb{R}^2$, teremos que f admite inversa na vizinhança de γ. Levando em consideração os dados do problema, a saber, a curva inicial $\gamma(s) = (x,y) = \big(\gamma_1(s),\gamma_2(s)\big)$ e o campo de vetores $(x,y)\mapsto\big(a(x,y),b(x,y)\big)$, a condição

$$J_f\big(x,y\big) = \begin{vmatrix} \frac{dx}{d\xi} & \frac{dy}{d\xi} \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ \gamma_1'(s) & \gamma_2'(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a(x,y) & b(x,y) \\ \gamma_1'(s) & \gamma_2'(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\big(\gamma(s)\big) & b\big(\gamma(s)\big) \\ \gamma_1'(s) & \gamma_2'(s) \end{vmatrix} \neq 0$$

$$J_f\big(\gamma(s)\big)\neq 0$$

indica que os vetores (a,b) e $\big(\gamma_1'(s),\gamma_2'(s)\big)$ são linearmente independentes. Temos, portanto, uma condição geométrica para que o método forneça solução, a saber, que o campo (a,b) seja transversal à curva γ.

7 TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA

Neste capítulo vamos estudar outro resultado central da Análise, o Teorema da Função Implícita. A motivação de estudar este Teorema é considerando em particular equação da circunferência unitária $x^2+y^2-1=0$. Podemos colocar a variável y de forma explicita como função da variável x:

$$y=\sqrt{1-x^2} \quad \text{ou} \quad y=-\sqrt{1-x^2}$$

Mais precisamente, se $\varphi:[-1,1]\to\mathbb{R}$ é a função definida por $\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}$ (ou $\varphi(x)=-\sqrt{1-x^2}$), então φ está implícita na equação da circunferência.

De modo análogo, a equação $5x^2+5y^2-6xy-8=0$ descreve uma elipse central em $(0,0)$. Embora explicar y em função de x não seja uma tarefa tão imediata, vemos pela figura que existe uma função $\varphi:]a,b[\to\mathbb{R}$ que $y=\varphi(x)$ está implícita na equação da elipse.

O mesmo pode feito para mais variáveis. Por exemplo, no sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-1 &= 0,\\ -x^2+z^2-5 &= 0,\end{cases}$$

a variável z pode ser facilmente expressa como função das outras por

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2} \quad \text{ou} \quad z=\sqrt{5+x^2}$$

Mas o que dizer do sistema

$$\begin{cases} x^3+x^2y^2+xyz^2-4 &= 0,\\ x^2-xyz+y^2z^2-5 &= 0,\end{cases}$$

Os exemplos acima nos remetem à seguinte questão:

Problema: Dada $f : \mathbb{R}^{k+m} \to \mathbb{R}^m$ e $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^{k+m}$ tal que $f(x_o, y_o) = 0$, deseja-se saber se existe $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ aberto e uma função $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ satisfazendo

a) $x_o \in \Omega$ e $\varphi(x_o) = y_o$;

b) $f\big(x, \varphi(x)\big) = 0$, para todo $x \in \Omega$

Se a resposta for afirmativa, dizemos que φ é função implícita para a equação $f(x,y) = 0$ na vizinhança de x_o.

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ com $(n = k+m)$ a função linear dada por $f(z) = Az$ onde A é a matriz $m \times n$. Seja o ponto $z = (x,y) = (x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_m)$, podemos escrever $f(x,y) = Az = Bx + Cy$, onde B e C são submatrizes respectivamente de ordem $m \times k$ e $m \times m$, isto é, $A = [B \;\; C]$ é composta por bloco B e C.

Se C é inversível, podemos explicitar y como função de x pois

$$Bx + Cy = 0 \Rightarrow y = -C^{-1}Bx.$$

Neste caso, se $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ é função linear definida por $\varphi(x) = -C^{-1}Bx$, então φ está implícita na equação $f(x,y) = 0$ na vizinhança de x_o, qualquer que seja x_o.

Observe que neste caso particular, os blocos B e C são as derivadas parciais de f. De fato,

$$B = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)\right] \quad \text{e} \quad C = \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)\right]$$

e

$$\varphi = -\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)\right]^{-1} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)\right] \tag{42}$$

Diretamente pode-se tratar a questão via Teorema da Função Inversa pode ser observada se reescrevermos a equação $f(x,y) = 0$ na seguinte forma. Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ com $n = k+m$ a função linear definida por $g(x,y) = \big(x, f(x,y)\big)$. Então $g(z) = Ax$, onde A é a matriz representada por

$$A = \begin{bmatrix} I_k & O \\ B & C \end{bmatrix},$$

Onde I_k é a matriz identidade de ordem $k \times k$ O uma matriz nula de ordem $k \times m$. Sabemos da Algebra Linear que $\det A = \det C$. Assim, se C é inversível, também é a matriz A e é fácil de verificar que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} I_k & O \\ -C^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$g(x,y) = (x,0) \Leftrightarrow (x,y) = g^{-1}(x,0) = (x, -C^{-1}Bx)$$

temos aqui novamente a solução desejada em (18).

7.1 TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA

Teorema 7.1 *Seja* $f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *uma função de classe* C^1*. Suponha* $f(x_o, y_o) = 0$ *e*

$$\det\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)\right] \neq 0.$$

a) *Então existem uma vizinhança aberta* Ω *de* $x_o \in \mathbb{R}^k$ *e uma função (única)* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *de classe* C^1 *tal que* $y_o = \varphi(x_o)$ *e* $f(x, \varphi(x)) = 0$ *para todo* $x \in \Omega$.

b) *Existe um aberto* U *contendo* (x_o, y_o) *em* $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ *tal que o par* $(x, y) \in U$ *verifica* $f(x, y) = 0$ *se e somente se* $y = \varphi(x)$ *para todo* $x \in \Omega$

Demonstração: Nada perderemos em generalidade supondo que $x_o = 0$ e $y_o = 0$.
Seja $g : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ a função definida por $g(x, y) = \big(x, f(x, y)\big)$. Então g é de classe C^1 e a matriz Jacobiana de g em $z_o = (x_o, y_o) = (0, 0)$ é

$$[g'(0,0)] = \begin{bmatrix} I_k & O \\ \left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right] & \left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right] \end{bmatrix}.$$

Pois se colocarmos

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) = y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\mapsto g(x, y) = \big(x, f(x, y)\big) \end{aligned}$$

onde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ assim $(x, y) = (x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_m)$, aplicando em g obtemos

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \big(g_1(x, y), \ldots, g_k(x, y), g_{k+1}(x, y) \ldots, g_{k+m}(x, y)\big) \\ &= \big(x_1, \ldots, x_k, f_1(x, y), \ldots, f_m(x, y)\big) \end{aligned}$$

onde $g_1(x,y)=x_1,\dots,g_k(x,y)=x_k,g_{k+1}(x,y)=f_1(x,y),\dots,g_{k+m}(x,y)=f_m(x,y)$ derivando g em relação $z_o=(x_o,y_o)=(0,0)$, temos

$$[g'(0,0)]=\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(0,0) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(0,0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k}(0,0) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(0,0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(0,0) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(0,0) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(0,0) & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_k}(0,0) & \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(0,0) & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial y_m}(0,0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(0,0) & \frac{\partial g_k}{\partial x_2}(0,0) & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_k}(0,0) & \frac{\partial g_k}{\partial y_1}(0,0) & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m}(0,0) \\ \frac{\partial g_{k+1}}{\partial x_1}(0,0) & \frac{\partial g_{k+1}}{\partial x_2}(0,0) & \cdots & \frac{\partial g_{k+1}}{\partial x_k}(0,0) & \frac{\partial g_{k+1}}{\partial y_1}(0,0) & \cdots & \frac{\partial g_{k+1}}{\partial y_m}(0,0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_{k+m}}{\partial x_1}(0,0) & \frac{\partial g_{k+m}}{\partial x_2}(0,0) & \cdots & \frac{\partial g_{k+m}}{\partial x_k}(0,0) & \frac{\partial g_{k+m}}{\partial y_1}(0,0) & \cdots & \frac{\partial g_{k+m}}{\partial y_m}(0,0) \end{bmatrix},$$

derivando em relação as variáveis $x_1,x_2,\dots,x_k,y_1,y_2,\dots,y_m$, obtemos

$$[g'(0,0)]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(0,0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(0,0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(0,0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(0,0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_m}(0,0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(0,0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(0,0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(0,0) & \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(0,0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(0,0) \end{bmatrix},$$

de maneira simplificada,

$$[g'(0,0)]=\begin{bmatrix} I_k & O \\ \left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right] & \left[\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right] \end{bmatrix},$$

onde I_k é a matriz identidade de ordem $k\times k$ e O é a matriz nula de ordem $m\times m$. Sabemos da Álgebra Linear que o jacobiano de $[g'(0,0)]$ é dado por

$$J_g(0,0)=\det\begin{bmatrix} I_k & O \\ \left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right] & \left[\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right] \end{bmatrix}=\det\left[\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right]\neq 0$$

então

$$J_g(0,0) \neq 0$$

Segue do Teorema da Função Inversa que existe um aberto U contendo $(0,0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ tal que $V = g(U)$ é um aberto e a restrição de g a U é uma bijeção sobre V. Com inversa continua $h : V \to U$ que pertence à classe $C^1(V)$ e com $h(0,0) = (0,0)$. Ora h tem a forma

$$h(x,z) = \big(h_1(x,z), h_2(x,z)\big), \quad \text{para } (x,z) \in V,$$

onde $h_1 : V \to \mathbb{R}^k$ e $h_2 : V \to \mathbb{R}^m$. Como

$$(x,z) = \big(g \circ h\big)(x,z) = g\big(h(x,z)\big) = g\big(h_1(x,z), h_2(x,z)\big) = \Big(h_1(x,z), f\big(h_1(x,z), h_2(x,z)\big)\Big)$$

temos que:

$$x = h_1(x,z) \quad \text{e} \quad z = f\big(h_1(x,z), h_2(x,z)\big).$$

Logo h toma a forma mais simples

$$h(x,z) = \big(x, h_2(x,z)\big).$$

Ora se $\pi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é definida por $\pi(x,z) = z$ então π é linear e contínua e

$$\big(\pi \circ h\big)(x,z) = \pi\big(h(x,z)\big) = \pi\big(h_1(x,z), h_2(x,z)\big) = h_2(x,z), \quad \text{para} \quad (x,z) \in V$$

ou seja

$$h_2 = \pi \circ h.$$

Portanto, $h_2 \in C^1(V)$ e temos.

$$z = f\big(x, h_2(x,z)\big) \quad \text{para} \quad (x,z) \in V. \tag{43}$$

Seja agora $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^k : (x,0) \in V\}$ tal que Ω é um aberto contendo $0 \in \mathbb{R}^k$ e definamos $\varphi(x) = h_2(x,0)$ para $x \in \Omega$.
Calculando φ e 0, obtemos que

$$\varphi(0) = h_2(0,0) = \big(\pi \circ h\big)(0,0) = \pi\big(h(0,0)\big) = \pi(0,0) = 0$$

Como $\varphi'(x) = h_2'(x,0)$ para $x \in \Omega$, então φ é de classe $C^1(\Omega)$.
De (43) e para $x \in \Omega$ temos que

$$\begin{aligned} 0 &= f\big(x, h_2(x,0)\big) \\ &= f\big(x, \varphi(x)\big) \end{aligned}$$

ou seja, $f\big(x,\varphi(x)\big)=0$, para todo $x\in\Omega$.
Isso mostra a parte **a)** do teorema.

Agora vamos mostrar a parte **b)** do teorema.
De fato,
$(\Rightarrow)$ Seja $(x,y)\in U$ tal que $f(x,y)=0$. Então

$$g(x,y)=\big(x,f(x,y)\big)=(x,0)\in V\text{dado},$$

decorre que $x\in\Omega$. Além disso,

$$(x,y)=\big(h\circ g\big)(x,y)=h\big(g(x,y)\big)=h(x,0)=\big(x,h_2(x,y)\big)=\big(x,\varphi(x)\big)$$

de modo que $y=\varphi(x)$ para todo $x\in\Omega$.
$(\Leftarrow)$ Seja $(x,y)\in U$ tal que $y=\varphi(x)$ para todo $x\in\Omega$. Então

$$f(x,y)=f\big(x,f(x,y)\big).$$

Isso mostra a parte **b)**

Observação: Caso a f é de classe C^p a φ também será de classe C^p.

$\blacksquare$

7.2 APLICAÇÃO DO TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA

Exercício 7.1 *Considere o sistema de equações*

$$\begin{cases} sen(x+y+z) &= z^4 \\ x-y+z &= sen(x^4+y^4+z^4) \end{cases} \tag{44}$$

a) *Prove que existem funções reais e diferenciáveis de $\varphi_1(z)$ e $\varphi_2(z)$ definidos para $|z|$ suficientemente pequeno tais $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0$ e*

$$(x,y,z)=\big(\varphi_1(z),\varphi_2(z),z\big)$$

é solução do sistema (44).

Solução: Consideremos as seguintes funções,

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= \operatorname{sen}(x+y+z)-z^4, \\ f_2(x,y,z) &= x-y+z-\operatorname{sen}(x^4+y^4+z^4), \end{aligned}$$

Seja f definida por

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) = \big(f_1(x,y,z),\, f_2(x,y,z)\big) \\ & & = \big(\operatorname{sen}(x+y+z) - z^4, x-y+z-\operatorname{sen}(x^4+y^4+z^4)\big) \end{array}$$

A função f satisfaz as condições do Teorema da Função Implícita. De fato,

- A função f é de classe C^∞.
- $f(0,0,0) = \big(\operatorname{sen}(0) - 0, 0 - \operatorname{sen}(0)\big) = (0,0)$.
-

$$\begin{array}{rcl} \det\left[\dfrac{\partial f}{\partial(x,y)}(x,y,z)\right] & = & \det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} \\ & = & \det\begin{bmatrix} \cos(x+y+z) & \cos(x+y+z) \\ 1-\cos(x^4+y^4+z^4)4x^3 & -1-\cos(x^4+y^4+z^4)4x^3 \end{bmatrix}, \end{array}$$

aplicando no ponto $(0,0,0)$

$$\det\left[\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(0,0,0)\right] = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2 \neq 0$$

logo, satisfaz as condições do Teorema da Função Implícita.

Portanto, existe um intervalo aberto I contendo o ponto zero e uma função

$$\begin{array}{rcl} \varphi: I \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ z & \to & \varphi(z) = \big(\varphi_1(z), \varphi_2(z)\big). \end{array}$$

Aplicando no ponto $(0,0)$, obtemos

$$\varphi(0) = \big(\varphi_1(0), \varphi_2(0)\big) = (0,0)$$

onde

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0.$$

Além disso, o Teorema da Função Implícita nos fornece a seguinte relação:

$$\begin{array}{rcl} f\big(\varphi(z), z\big) & = & (0,0) \quad \text{se} \quad z \in I \\ f\Big(\big(\varphi_1(z), \varphi_2(z)\big), z\Big) & = & (0,0) \quad \text{se} \quad z \in I \end{array}$$

então

$$(0,0) = \Big(\mathrm{sen}\big(\varphi_1(z)+\varphi_2(z)+z\big)-z^4, \varphi_1(z)-\varphi_2(z)+z-\mathrm{sen}\big(\varphi_1^4(z)+\varphi_2^4(z)+z^4\big)\Big)$$

implica que

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \mathrm{sen}\big(\varphi_1(z)+\varphi_2(z)+z\big)-z^4 \\ 0 & = & \varphi_1(z)-\varphi_2(z)+z-\mathrm{sen}\big(\varphi_1^4(z)+\varphi_2^4(z)+z^4\big), \end{array}$$

daí segue que a solução do sistema na forma implícita é:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{sen}\big(\varphi_1(z)+\varphi_2(z)+z\big) & = & z^4 \\ \varphi_1(z)-\varphi_2(z)+z & = & \mathrm{sen}\big(\varphi_1^4(z)+\varphi_2^4(z)+z^4\big) \end{array} \right.$$

para todo $z \in I$.

8 CONCLUSÃO

O Teorema da Função Inversa é um dos temas principais da Análise Matemática, pois dada uma função qualquer $f : V \to V$ com $V \in \mathbb{R}^n$ existe uma inversa $f^{-1} : V \to V$ se satisfaz as condições do Teorema. Como aplicação do Teorema temos o Método das Características para solução de equações a derivadas parciais de primeira ordem, cujo método com baseia em troca de variáveis, que é possível pela existência da função inversa, a existência da inversa é dada pelo Jacobiano diferente de zero, a f é inversível localmente.

O Teorema da Função Implícita é uma consequência do Teorema da Função Inversa, onde tem objetivo mostrar a solução de um sistema complicado de forma implícita desde que satisfaça as condições do Teorema, e este é a elegância do Teorema, pois mesmo que não saiba a forma explicita é possível mostrar a solução implícita da equação no intervalo aberto.

REFERÊNCIAS

BARTLE, R. G. **Elementos de Análise Real**. 1. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1983.

CIPOLATTI, R. **Calculo Avalçado I**. 1. ed. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2002.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo Volume 3**. 4. ed. São Paulo: Livros Técnicos S.A. e Universidade de São Paulo, 2000.

LIMA, E. L. **Análise Real volume 2, Funções de n Variáveis**. 4. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2009.

LIMA, E. L. **Curso de análise Vol.2**. 11. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2009.

RUDIN, W. **Princípios de Análise Matemática**. 1. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos S.A. e Universidade de Brasilia, 1971.