UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EDILZA MARTINS DA SILVA

CONCEITOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E SUAS APLICAÇÕES NA BIOMATEMÁTICA

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

CAMPO MOURÃO

2013

EDILZA MARTINS DA SILVA

CONCEITOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E SUAS APLICAÇÕES NA BIOMATEMÁTICA

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

Orientadora: Sara Coelho da Silva

CAMPO MOURÃO

2013

TERMO DE APROVAÇÃO

Edilza Martins da Silva

Conceitos de Cálculo Diferencial e suas aplicações na Biomatemática

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de "Especialista em Ciências" – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Sara Coelho da Silva

Prof. Msc.Viviane Colucci Boromelo

Prof. Msc. Wellington Jose Correa

Campo Mourão, 2013

Dedico esse trabalho primeiramente a Deus

E a minha família, principalmente aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pois sem Ele nada seria possível.

Agradeço aos meus pais, Noé e Quitéria, que são as pessoas mais importante da minha vida e por estarem ao meu lado em todos os momentos.

Agradeço as minhas irmãs pelo incentivo e por sempre estarem dispostas a me ajudar .

A minha orientadora Ms. Sara, pela paciência nas orientações e pela amizade.

Agradeço aos amigos de viagem pelo companheirismo de todos os sábados em busca do conhecimento, pela ajuda mutua no entendimento dos conteúdos, fortalecendo assim, ainda mais as nossas amizades.

Agradeço em especial meu irmão Everaldo, que estava comigo nessa busca do conhecimento, onde muitas vezes estudamos juntos, facilitando a compreensão dos conteúdos.

Agradeço a todos os professores do Programa da Pós-Graduação em Matemática e a todos os amigos e colegas do curso pela amizade e pelo companheirismo durante essa caminhada.

“Dai-me um ponto de apoio que eu moverei o mundo”
(Arquimedes)

RESUMO

SILVA, Edilza Martins. Conceitos de Cálculo Diferencial e suas aplicações na Biomatemática. 58 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2013.

Neste trabalho abordamos os principais conceitos do Cálculo Diferencial fazendo uso da História da Matemática, da Modelagem Matemática e das Novas Tecnologias. Inicialmente apresentamos o problema da tangente e da taxa de variação instantânea como responsáveis pelo desencadeamento da evolução do Cálculo Diferencial. Desta forma, a derivada é apresentada dentro de um contexto histórico e portanto mais humanizado. Na seção 3.3 são analisados os principais resultados e técnicas do Cálculo Diferencial fazendo uso de definições e de demonstrações de proposições e teoremas. Para aplicação do Cálculo Diferencial fizemos uso da Biomatemática na resolução de problemas que relacionam conceitos do cálculo diferencial com a área da saúde e biologia apontados nas subseções 3.5.1, 3.6.1,3.7.1 e 3.8.1. Já as Novas Tecnologias foram utilizadas na análise gráfica dos modelos matemáticos abordados.

Palavras-chave: História da Matemática, Cálculo Diferencial, Modelos da Biomatemática, Educação Superior.

ABSTRACT

SILVA, Edilza Martins. Title in English. 58 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2013.

In this paper we discuss the main concepts of differential calculus by making use of the history of mathematics, mathematical modeling and new technologies. Initially we present the tangent problem and instant change as responsible for triggering the development of differential calculus. In this way, the derivative is presented within a historical context and therefore more humanized. In section 3.3 are analyzed the main results and techniques of differential calculus using definitions and demonstrations of propositions and theorems. For the purposes of differential calculus made use of Biomathematics to solve problems that relate to concepts of differential calculus with healthcare and biology singled out in subsections 3.5.1, 3.6.1, 3.7.1 and 3.8.1. The new technologies were used in the graphic analysis of mathematical models.

Keywords: The history of mathematics, differential calculus, models of Biomathematics, higher education.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Há uma carência bibliográfica de livros de cálculo diferencial direcionados para as áreas de Medicina e Biologia, que relacionam a teoria com a prática, o que dificulta a preparação e apresentação de aulas de cálculo aplicadas à realidade dos alunos destas áreas.

O professor de cálculo diferencial se depara com turmas iniciantes, muitas das vezes com deficiências matemáticas, com uma ementa extensa a ser cumprida num único período e falta de motivação dos alunos, por não visualizarem a aplicabilidade da disciplina em sua área.

Esta realidade tem tornado a disciplina de Cálculo uma das disciplinas de mais difícil compreensão e consequentemente possui altos índices de reprovação dos acadêmicos de matemática e/ou áreas afins.

Outro fator que distancia esta disciplina dos alunos é apresentação desta sem uso de sua história e de sua evolução durante séculos através da contribuição de vários matemáticos.

Preocupados com esta situação buscamos apresentar neste trabalho uma metodologia diferenciada para apresentação de alguns dos conceitos do cálculo diferencial fazendo uso da História da Matemática, da Biomatemática e das Tecnologias.

2 CONCEITOS SOBRE DERIVADA NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Segundo Machado (2012, p. 02), a palavra cálculo em latim significava “pedrinha” e estava associado ao processo de contagem realizado pelos pastores da Antiguidade no controle dos rebanhos.

Boyer (1992, p. 01), menciona que calcular no passado significava fazer contas por meio de seixos. Em 1650 a.c, haviam registros de cálculo em Papiros egípcios e tábulas cuneiformes babilônicas sobre problemas de mensuração retilínea e curvilínea, os egípcios calculavam corretamente o volume de pirâmide quadrada e área de circulo, isso não seria possível sem o conhecimento do cálculo.

O Cálculo se divide em duas áreas fundamentais: o Cálculo Integral e o Cálculo Diferencial. Para Simmons (1987, p. 69) o estudo do Cálculo se resume ao estudo da tangente e do cálculo de áreas,como mostra no gráfico abaixo.

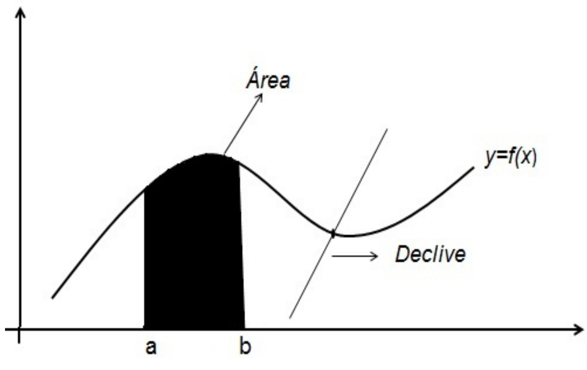

Figura 1: Essência do Cálculo.

Fonte: Adaptado (SIMMONS, 1987)

De acordo com Eves (2011, p. 417), o desenvolvimento histórico do Cálculo originou-se em ordem contrária ao estudado nos cursos básicos dos dias atuais,ou seja, primeiramente surgiu o Cálculo Integral e depois o Cálculo Diferencial.

Em relação ao processo do Cálculo Diferencial, Campos (2007, p. 46), menciona que os primeiros problemas surgiram na época dos gregos antigos, estando ligado ao da reta tangente que intercepta uma curva em um único ponto. Para Simmons (1987, p. 70) “O problema básico do Cálculo Diferencial é o problema das tangentes: calcular o coeficiente angular da reta tangente do gráfico num ponto dado P”.

Eves (2011, p. 428), afirma que o Cálculo Diferencial está relacionado ao problema de tangentes de uma curva e a determinação do máximo e mínimo de uma função.

Eron (2006), relata que alguns matemáticos gregos utilizavam noções de derivada em seus cálculos, como Euclides que em 300 $a.C$ provou que a reta tangente a um círculo em qualquer ponto P é perpendicular ao raio P. Já Arquimedes $(287-212\ a.C)$, possuía um método para encontrar a tangente à sua espiral e Apolônio $(262-190\ a.C)$ descreveu métodos para encontrar tangentes a parábola, a elipses e a hipérboles.

Segundo Campos (2007, p. 47) após os gregos, se interessarem pelo estudos da tangente a uma curva, só surge novamente o interesse no século $XVII$, estando entre os precursores Pierre Fermat, Isaac Newton e Gottfriend Wilhelm Leibniz. Ocorrendo assim, grandes descobertas na área da matemática, principalmente no Cálculo Diferencial e no Cálculo Integral.

2.1 FERMAT

De acordo com Boyer (1992, p. 37), Pierre de Fermat nasceu em agosto de 1601, em Becurmont de Lomagne na França. Eves (2011, p. 390), menciona que há um conflito entre a data de nascimento e morte de Fermat, costuma-se escrever então (1601? – 1665). Filho de Dominique de Fermat, um mercador de couro e Clarice de Long, filha de uma família de juristas. Estudou em sua cidade natal, recebendo inicialmente sua educação em casa, frequentou a Universidade de Toulouse, no sul da França. Casou-se com Louise de Long, prima de sua mãe e teve cinco filhos. Dedicou-se o seu tempo de lazer para estudar matemática, já que não era matemático profissional, sendo formado em advogacia. Mas foi considerado como o “príncipe dos amadores” de todos os tempos.

Eves (2011, p. 390), relata que Fermat publicou muito pouco durante sua vida, mas manteve correspondência científica com vários matemáticos de seu tempo, exercendo grande influência sobre eles, com suas ideias e descobertas matemáticas, enriquecendo assim vários ramos da matemática. Sendo considerado o maior matemático francês do século $XVII$.

Figura 2: Pierre de Fermat

Fonte: Adaptado (EVES, 2011)

Simmons (1987), relata que Fermat recebeu uma carta do padre Marsenne de Paris, que convidou-o a compartilhar suas descobertas com os matemáticos parisienses. Se Fermat ficou surpreso ao receber a carta, Marsenne ficou ainda mais surpreso, com a quantidade de cartas que ele e outros membros do círculo receberam de Fermat com ideias, descobertas e descrição de alguns métodos matemáticos, recebendo por vários anos, estando essas cartas escrita em latins e passadas de pessoa a pessoa no grupo do padre Marsenne.

O autor menciona ainda que o Cálculo Diferencial, considerado como a matemática para determinar valores extremo, o máximo e mínimo de uma função e reta tangente a curva, foi desenvolvido por Fermat em 1629. Séculos depois em 1934, Newton afirma em uma carta que as suas ideias sobre Cálculo vieram da maneira como Fermat traçava as retas tangentes. Logo, o criador do Cálculo Diferencial foi Fermat e não Newton e Leibniz como é de costume considerar, pois estes nasceram mais de uma década depois da criação do Cálculo Deferencial.

Fermat foi o primeiro a chegar ao conceito moderno sobre reta tangente de uma curva em um ponto P, como mostra a figura 3.

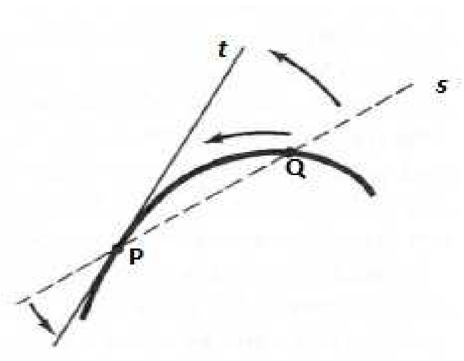

Figura 3: Tangente como posição-limite da reta secante

Fonte: Adaptado (SIMMONS, 1987)

Para encontrar a reta tangente ele considerou um segundo ponto Q, próximo do ponto P, sobre a curva e desenhou uma reta secante PQ, considerou-se a tangente do ponto P, como a posição-limite da reta secante PQ. Sendo assim, possível calcular a exata declividade da tangente.

Ele também define um método para encontrar os valores de máximo e mínimos de uma função polinomial $y = f(x)$.

> Ele comparava o valor $f(x)$ num ponto x com o valor $f(x+E)$ num ponto $x+E$ como a figura 4.

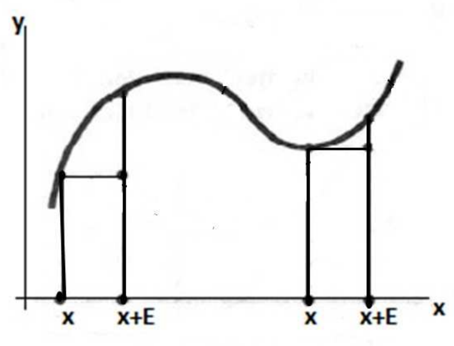

Figura 4: Valor máximos e mínimos de uma função polinomial.

Fonte: Adaptado (SIMMONS, 1987)

> Para a maioria dos x, a diferença entre esse valores, $f(x+E) - f(x)$, não era pequena comparada com E, mas Fermat observou que, no topo ou na base de uma curva, essa diferença era muito menor que E. Essa ideia deu-lhe a equação aproximada
>
> $$\frac{f(x+E) - f(x)}{E} \cong 0$$

> o que torna-se mais e mais aproximadamente correta quando o intervalo E se toma cada vez menor. Com isto em mente, ele a seguir, fez $E=0$ para obter a equação
> $$\left[\frac{f(x+E)-f(x)}{E}\right]_{E=0}=0$$
> De acordo com Fermat, essa equação é exatamente correta nos pontos de máximo e de mínimo sobre a curva, e resolvendo-as obtém-se os valores de x que correspondem a esse pontos. (SIMMONS, 1987, p. 697)

Esse método desenvolvido por Fermat equivale ao método utilizado nos textos elementares de Cálculo nos dias atuais:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$$

Relata Campos (2007, p. 48) que Fermat faltava com clareza nas suas resoluções, mas isso não diminuiu sua genialidade, pois suas ideias ajudaram a resolver muitos problemas referente ao Cálculo. Sendo considerado o mais importante matemático do meado do século $XVII$.

2.2 ISAAC NEWTON

Eves (2011, p. 436), menciona que Isaac Newton $(1642-1727)$ dedicou-se ao estudo do Cálculo Diferencial.

Nasceu na aldeia Woolsthorpe no norte da Inglaterra, filho de agricultor, que deveria seguir a mesma atividade do pai. Mas desde criança revelou grande habilidades para desenvolver miniaturas mecânicas engenhosas.

Figura 5: Isaac Newton
Fonte: (EVES, 2011)

Segundo Boyer (1974, p. 287), Newton inicialmente foi educado pela avó e frequentava a escola da vizinhança, ingressou na vida acadêmica em 1661, pela influência de seu tio materno, que era formado na universidade em Cambridge. Tendo, como principal interesse ao ingressar na universidade dedicar-se a química. Mas acabou-se interessando pela matemática quando leu o livros relacionado a matemática como o *Elementos* de Euclides e depois de outros matemáticos com Galileu, Fermat e Descartes e teve aulas com Isaac Barrow, tornando assim seu sucessor. Em 1665 Newton começou a pensar sobre taxa de variação ou fluxo, de quantidade variáveis continuamente ou fluentes, tendo as primeiras ideias sobre Cálculo Diferencial.

De acordo com Simmons (1987), na sua vida acadêmica em Cambridge, não se destacou como acadêmico. Mas uma epidemia de peste fez com que as universidades fechassem em (1665 – 1666), ele retornasse para casa no interior ficando 2 anos de solidão rústica. Neste período realizou várias descobertas matemáticas entre elas o Cálculo Diferencial, sendo por ele chamado de Método do Fluxo.

Foi neste período, na sua cidade natal, que Newton desenvolveu o seu cálculo, "até o ponto em que era possível achar a tangente a uma curva num de seus pontos" (EVES, 2011, p. 436). Em 1669, ao retornar a Cambridge tornou-se professor na universidade com a renuncia de Isaac Barrow. Em relação ao Cálculo Diferencial Newton denominava a quantidade variável como fluente e a sua taxa de variação de fluxo do fluente, se fosse a ordenada era representada por y e a taxa de variação por $\dot{y}$, a taxa de variação de $\dot{y}$ por $\ddot{y}$ assim sucessivamente, equivalendo a notação moderna de dy/dt, utilizado para derivada.

Boyer (1974), demonstra o primeiro pronunciamento oficial da explicação de Newton sobre o Cálculo Diferencial, "$(\cdots)$ designado por a o momento de A e por b o momento de B, Newton prova que o momento de AB é $aB+bA$, que o momento de A^n é naA^n e que o momento de $1/A$ é $-a/(A^2)$." (BOYER, 1974, p. 292).

Sendo essas equivalentes à Regra do Produto e da Potência utilizadas nos dias atuais no Cálculo Diferencial.

Segundo Boyer (1974), a primeira exposição impressa sobre cálculo que Newton realizou foi em 1687 em *Philosophiae naturalis principia matematica*, sendo o mais admirado tratado científico.

De acordo com Pires (2004, p. 46), os manuscritos *Methodus Differencialis* e *De Analysi per Equaciones Numero Termimorum* foram publicados em 1771, sendo dois resumos sobre o tratamento e aplicação de séries ao cálculo diferencial. Tendo sido comunicado anteriormente em 1668 – 1669 a Isaac Barrow e a Collins e também a Leibniz em 1676 por cartas.

Newton não foi o primeiro a perceber a relação entre a diferenciação e integração, hoje estabelecida como teorema fundamental do cálculo. Mas, ao percebe-lá consolidou esses elementos.

Segundo Eves (2011, p. 441), Newton “pode alçar-se aos ombros de gigantes”, pois dedicava até 18 à 19 horas por dias estudando livros de matemáticos da época realizando diversas descobertas. Podendo assim através deles realizar novos métodos para a matemática, como o Cálculo Diferencial e considerado o maior gênio de todos os tempos.

2.3 LEIBNIZ

De acordo com Eves (2011, p. 442), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), contribuiu também para a descoberta do Cálculo Diferencial. Nasceu em Leipzig na Alemanha, ainda criança aprendeu latim e grego por conta própria, aos doze anos de idade dominava todo o conhecimento corrente de matemática, filosofia, teologia e leis públicas.

Figura 6: Gottfried Wilhelm Leibniz
Fonte: (EVES, 2011)

De acordo com Pires (2004, p. 75), aos quinze anos de idades Leibniz ingressou na Universidade da sua cidade natal, onde adquiriu o grau de Bacharel em Direito e recebeu o grau de doutor aos vinte anos de idade.

Campos (2007), menciona que seus escritos sobre cálculo recaíram em três grupos: seus manuscritos, que eram escritos diariamente, quando estava em Paris; os artigos publicados na revista *Acta Eruditorum*, na década de 1680 e 1690; e um manuscrito *History and Origin of the Differential Calculus* em 1774.

O autor relata também que Leibniz em 1673, candidatou-se a membro do Royal Society em Londres, onde apresentou a sua máquina de calcular ainda incompleta e conheceu vários cientistas ingleses famosos, como Hook e Boyle, recebendo críticas em relação a sua máquina de calcular. Mas mesmo assim foi aceito como membro.

Já no período de 1673 a 1677 em Paris, Leibniz aprofundou seus conhecimentos matemáticos através de estudos feitos por Pascal, Fabri, James Gregori, Descartes dentre outros. Estes estudos foram fundamentais para o desenvolvimento de seu trabalho. Neste período, ele começou a desenvolver uma notação adequada para o Cálculo Diferencial que tornaria então universal.

De acordo com Boyer (1974), Leibniz fixou a notação para diferenciação em dx e dy tornando uma linguagem universal.

Boyer (1992, p. 45), menciona que Leibniz ao ler os estudos realizados por Pascal percebeu que a tangente ou inclinação da reta de uma curva dada, podia ser encontrada pela razão formada entre as diferenças das ordenadas e das abscissas de dois pontos vizinhos da curva, quando essas diferenças se tornassem muito pequenas realizando assim sua primeira descoberta sobre o Cálculo Diferencial.

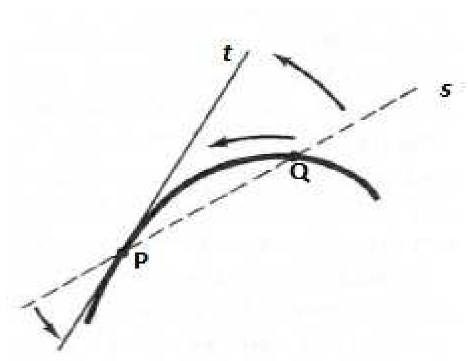

Figura 7: Inclinação da Reta.
Fonte: Adaptado (SIMMONS, 1987)

Boyer (1974), menciona que a primeira exposição do Cálculo Diferencial foi publicada por Leibniz em 1684, na revista *Acta Eruditorum* com o título de *Nova methodus pro maximis et minim, item que tangentibus, qua nec irrationales quatitates moratur*, ou seja um novo método para máximos e mínimos e também para tangente que não é obstruído por quantidade irracionais.

A descoberta de Newton antecede a de Leibniz em dez anos, mas a descoberta de Leibniz ocorreu independente de Newton. Sendo então, injustamente acusado de plágio pelos membros de Royal Society da Inglaterra.

Campos (2007, p. 58), menciona que a tradição atribuiu a Newton e Leibniz a invenção do Cálculo, pois cada um independentemente contribuiu para os conceitos do Cálculo Diferencial e do Cálculo Integral que conhecemos nos dias atuais.

2.4 CAUCHY

Segundo Eves (2011), Augustin Louis Cauchy $(1789 - 1857)$ nasceu em Paris, recebeu a primeira educação de seu pai. Estudou na Escola Técnica, onde mais tarde tornaria professor. Ele decidiu abandonar a engenharia civil para dedicar-se a ciência pura, mas especificamente a matemática pura e aplicada, suas obras reuni-se em vários livros e 789 artigos, mas ele foi criticado em relação a qualidade de suas obras, por serem produções extensas e sua redação apressada. Mas foi considerado o mais importante analista da primeira metade do século XIX.

Figura 8: Augustin Louis Cauchy
Fonte: (EVES, 2011)

Boyer (1974, p. 379), menciona que Cauchy publicava suas obras assim que conseguia qualquer resultado naquilo que estava pesquisando, alguns destas obras são: *Cours d'analise de École Polytechnique*(1821), *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (1823) e *Leçons sur le calcul differentiel* (1829), fornecendo ao Cálculo a característica que tem hoje.

Eves (2011, p. 531), afirma que se deve a Cauchy a abordagem do Cálculo apresentado nos textos universitários atuais, como os conceitos de limite, continuidade. Cauchy estabeleceu o limite como base para o estudo do Cálculo Diferencial tendo $y = (fx)$ em relação a x com o limite de $\Delta x \longrightarrow 0$, da razão

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ou seja, a moderna definição da derivada.

3 DERIVADA

3.1 A TANGENTE E INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA DERIVADA

De acordo com Swokowski (1994, p. 114), uma reta tangente *t* é definida na geometria, como uma reta que toca uma curva em apenas um ponto, como é o exemplo de um círculo, que a reta tangente intercepta em um ponto *P*, conforme a figura 9.

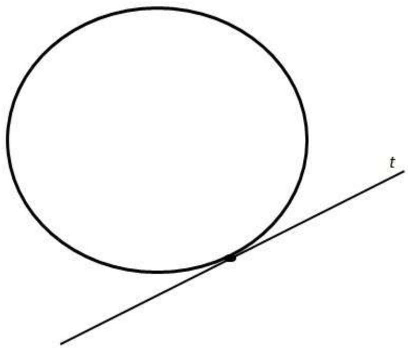

Figura 9: Reta tangente ao Circulo
Fonte:Adaptado (STEWART, 1994)

Mas não podemos estender essa definição para qualquer função, pois uma reta pode tangenciar uma curva em outro ponto, como mostra a figura 10.

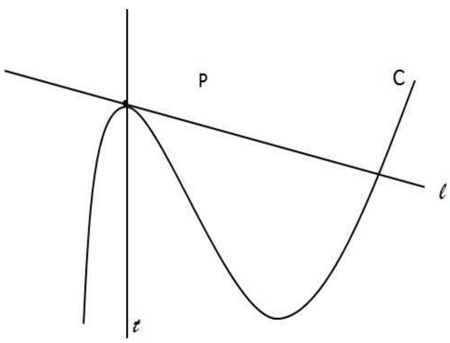

Figura 10: Reta tangente a uma curva.
Fonte: Adaptado (STEWART, 1994)

Stewart (1994, p. 149), demonstra como determinar a tangente de um ponto $P(a, f(a))$ a uma curva C, tendo uma equação $y = f(x)$. Para isso, consideramos inicialmente outro ponto $Q(x, f(x))$, tendo $x \neq a$ e calculamos a inclinação da reta secante PQ :

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ou seja,inclinação da reta que passa pelos dois pontos de uma curva, como a figura 11.

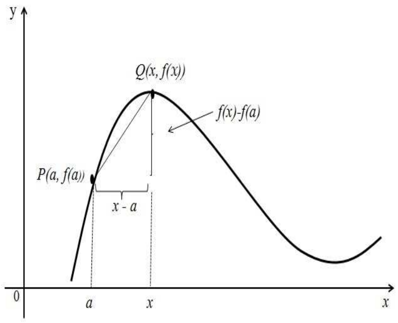

Figura 11: Inclinação da reta secante.

Fonte: Adaptado (STEWART, 1994)

Ao aproximarmos o ponto Q do ponto P ao longo da curva C, fazemos x tender a a. Sendo m_{PQ} um número m, então definimos a tangente da reta t como a reta que passa por P e tem inclinação m. Isto é, a reta tangente é a posição-limite da reta secante PQ como mostra a figura 12.

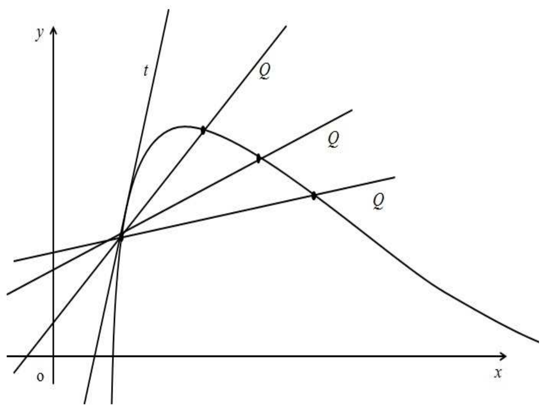

Figura 12: Reta tangente posição-limite da reta secante.

Fonte: Adaptado (STEWART, 1994)

Stewart (1994, p. 150), descreve matematicamente este processo para determinar a inclinação da reta tangente, considerando $h = x - a$.

A inclinação da reta secante de PQ é descrita por :

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

como demonstra a figura 13, com $h > 0$ e Q estando a direita de P.

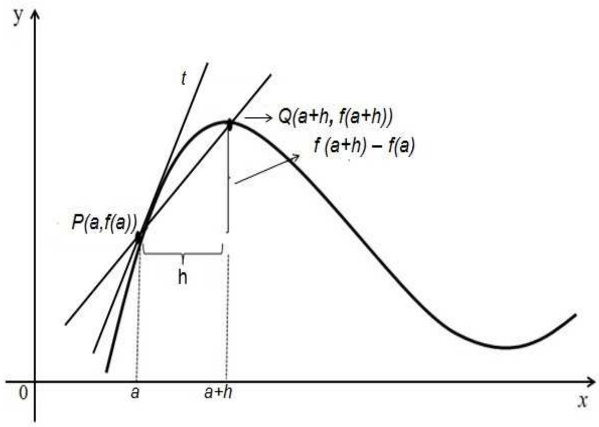

Figura 13: Inclinação da reta tangente.

Fonte: Adaptado (STEWART, 1994)

Quando x tende a a, h tende a 0, pois $h = x - a$, assim a expressão para a inclinação da reta tangente é dada por:

$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

desde que o limite exista.

Este coeficiente angular é chamado de derivada da função f no ponto a e é denotado por $f'(a)$.

Se o limite não existir, então o coeficiente angular da tangente da reta t não é definido.

Mas o limite existir, f é dita *diferenciável* no ponto a. E se f for diferenciável em todos os pontos de seu domínio ela é dita simplesmente uma função diferenciável.

3.2 A DERIVADA COMO TAXA DE VARIAÇÃO

Stewart (1994) define também as taxas de variação, sendo elas a taxa média e a taxa instantânea. Para taxa média considera-se uma função $y = f(x)$ sendo y uma quantidade dependente de x o incremento de x, é a variação $\Delta x = x_2 - x_1$, tendo variação correspondente de y, $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$. Denomina-se taxa média de variação de y em relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$, ou inclinação da reta secante PQ, o seguinte quociente da diferença:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Para a taxa média de variação em intervalos cada vez menores, como demonstra a figura 14.

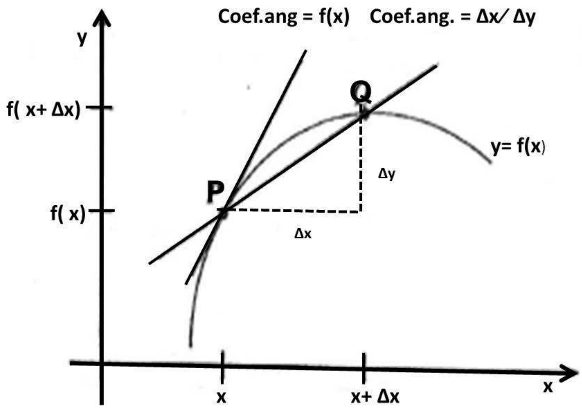

Figura 14: Coeficiente Angular.

Fonte: Adaptado (SWOKOWSKI, 1994)

Fazemos o incremento Δx = x_2 - x_1 tender a 0, calculamos o limite das taxas média de variação:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Esta expressão é denominada de taxa de variação instantânea de y em relação a x em $x = x_1$ ou seja, inclinação da tangente à curva $y = f(x)$ em um ponto P.

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

Concluímos ainda que, a taxa média é a inclinação da reta secante e a taxa de variação instantânea é a inclinação da reta tangente. Essa taxa instantânea é chamada de derivada.

Mais ainda, se $f'(x_1) > 0$ a taxa instantânea é positiva, ou seja, o coeficiente angular da reta tangente é positivo em x_1 e portanto, f é crescente no intervalo $(x_1, x_1 + h)$, para $h \to 0$.

Do mesmo modo, se $f'(x_1) < 0$ a taxa instantânea é negativa, ou seja, o coeficiente angular da reta tangente é negativo em x_1 e portanto, f é decrescente no intervalo $(x_1, x_1 + h)$, para $h \to 0$.

Hoffmann e Bradley (2000), menciona que para calcular a variação percentual, tendo Δx uma pequena variação de x, a variação percentual correspondente da função $f(x)$ é dada por : Variação percentual de $f = 100\dfrac{\Delta f}{f(x)} \approx 100\dfrac{f'(x)\Delta x}{f(x)}$.

3.2.1 Situações envolvendo Taxa de Variação

Segundo Swokowski (1994, p. 120), existem muitas aplicações que exigem o cálculo da taxa de variação média e instantânea.

Como por exemplo na biologia, em que um biólogo pode interessar-se sobre a taxa à qual as bactérias desenvolvem-se ou reduzem-se em uma determinada cultura.

Apresentaremos a seguir algumas situações gerais que utilizam o cálculo de taxa de variação.

Situação 1: Considere a função $N(t)$ que representa o número de bactérias em uma colônia no instante t então

$$\frac{N(t_0 + h) - N(t_0)}{h}$$

representa a taxa média da variação do número de bactérias durante o intervalo de tempo $[t_0, t_0 + h]$ e

$$\lim_{h \to 0} \frac{N(t_0 + h) - N(t_0)}{h} = N'(t_0)$$

a taxa instantânea de variação do número de bactérias no instante $t = t_0$.

Situação 2: Considere que a função $C(t)$ representa a concentração de álcool no sangue t horas depois que uma pessoa beber uma lata de cerveja então

$$\frac{C(t_0 + h) - C(t_0)}{h}$$

representa a taxa média de concentração de álcool no sangue durante o intervalo de tempo $[t_0, t_0 + h]$ e

$$\lim_{h \to 0} \frac{C(t_0 + h) - C(t_0)}{h} = C'(t_0)$$

é taxa instantânea de variação da concentração de álcool no sangue de uma pessoa no instante $t = t_0$.

Situação 3: Consideremos que uma função $V(t)$ representa o volume em (cm^3) de um tumor durante t meses e que neste período x mg de um medicamento experimental são injetados no paciente causando uma variação no volume do tumor:

$$\frac{V(t_0+h)-V(t_0)}{h}$$

Esta expressão representa a taxa média da variação do volume em (cm^3) do tumor, quando o tempo varia de t_0 (instante inicial de aplicação do medicamento) para t_0+h e,

$$\lim_{h\to 0}\frac{V(t_0+h)-V(t_0)}{h} = V\,'(t_0)$$

é a taxa instantânea de variação do volume (em cm^3) de um tumor, no instante t_0 quando x_0 mg de um medicamento experimental são injetados no paciente.

Situação 4: Um estudo realizado em um paciente submetido a um cateterismo revelou que o diâmetro da aorta era aproximadamente D milímetros (mm) quando a pressão aórtica era p (mm de mercúrio), onde

$$D(p) = -0,0009p^2 + 0,13p + 17,81$$

para $50 \leq p \leq 120$.

A taxa média de variação do diâmetro D da aorta quando p varia de $p = 60$ para $p = 61$ é obtida da seguinte maneira:

Considerando $\begin{cases} t_0 = 60 \\ t_0 + h = 61, \\ h = 1 \end{cases}$ temos:

$$D = \frac{D(t_0+h)-D(t_0)}{h} = \frac{D(61)-D(60)}{1} = 22,39 - 22,37 = 0,0211$$

Portanto, a taxa de variação da aorta é de 0,0211 diâmetro/mm mercúrio.

Para taxa de variação instantânea, necessitamos de métodos de cálculo que nos darão as técnicas para diferenciação.

3.3 TÉCNICAS DE DIFERENCIAÇÃO

Nesta seção apresentaremos as propriedades de diferenciação fundamentais do Cálculo Diferencial.

De acordo Leithold (1994) o processo de cálculo da derivada de uma função pela aplicação do limite é geralmente lento, para facilitar este cálculo existem algumas técnicas.

Propriedade 3.1 *Se c for uma constante se $f(x) = c$ para todo x_1 então $f'(x) = 0$.*

Prova

Sendo

$f(x) = c$ e $f(x+h) = c$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = f'(x) = 0$$

Logo a derivada de uma constante é zero.

Propriedade 3.2 *Se n for um número inteiro positivo e se $f(x) = x^n$ então $f'(x) = nx^{n-1}$*

Prova:

$f(x) = x^n$

$f(x+h) = (x+h)^n$

Temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Para resolver $(x+h)^n$ utilizaremos o Teorema Binomial:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\left[(x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \cdots + nx(h)^{n-1} + (h)^n\right] - x^n}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \cdots + nx(h)^{n-1} + (h)^n}{h}$$

Dividindo o numerador e o denominador por h, obtemos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \cdots + nx(h)^{n-2} + (h)^{n-1}\right]$$

Logo teremos

$f'(x) = nx^{n-1}$, sendo esta denominada de derivada da função polinomial ou regra da potência.

Propriedade 3.3 *Se c uma constante e g a função definida por $g(x) = cf(x)$ então, se $f'(x)$ existir, $g'(x) = cf'(x)$*

Prova:

Temos

$$\begin{cases} g(x) = cf(x) \\ g(x+h) = cf(x+h) \end{cases}$$

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

então

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h}$$

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} c \cdot \left[\frac{f(x+h) - cf(x)}{h} \right]$$

$$g'(x) = c \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$g'(x) = cf'(x)$$

Se combinarmos as propriedades 3.2 e 3.3 obteremos:

$f(x) = cx^n$, onde n é um número inteiro positivo e c uma constante, então

$f'(x) = cx^{n-1}$

Propriedade 3.4 *Se a função f e g forem diferenciáveis e $F(x) = f(x) + g(x)$ então $F'(x) = f'(x) + g'(x)$*

Prova:

Seja

$F(x) = f(x) + g(x)$

$F(x+h) = f(x+h) + g(x+h)$

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) + g(x+h) - [f(x) + g(x)]}{h} \right]$$

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \right]$$

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} \right]$$

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$F'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Sendo assim, a derivada da soma de duas funções é a soma de suas derivadas, se elas existirem e denomina-se Regra da Soma.

A Regra da Soma pode-se estender para a soma de qualquer número de funções diferenciáveis,por exemplo, $(f+g+h)' = [(f+g)+h]' = f' + g' + h'$.

Propriedade 3.5 *Se a função f e g forem diferenciáveis e $F(x) = f(x) - g(x)$ então $F'(x) = f'(x) - g'(x)$*

Prova:

Seja $F(x) = f(x) - g(x)$

$F(x+h) = f(x+h) - g(x+h)$

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - g(x+h) - [f(x) - g(x)]}{h} \right]$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-g(x+h)-f(x)+g(x)}{h}\right]$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$F'(x) = f'(x) - g'(x)$$

Portanto, a derivada da diferença de duas funções é a diferença de suas derivadas, se elas existirem e denomina-se Regra da Diferença. Podendo ser estendida para qualquer número de funções diferenciáveis, $(f-g-h)' = [(f-g)-h]' = f' - g' - h'$.

Teorema 3.1 *Se uma função f é diferenciável em x_1, então f é contínua em x_1.*

Prova:

$$\lim_{h\to 0} f(x_1+h) - f(x_1)$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}\right)h$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}.\lim_{h\to 0} h$$

$$f'(x_1)\cdot 0 = 0$$

Portanto, $\lim_{h\to 0} f(x_1+h) - f(x_1) = 0$ ou seja, $\lim_{h\to 0} f(x_1+h) = f(x_1)$

Propriedade 3.6 *Se a função f e g forem diferenciáveis e F for uma função definida por $F(x) = f(x)g(x)$ então $F'(x) = f(x).g'(x) + f'(x).g(x)$.*

Prova:

Tendo

$$F(x) = f(x)g(x)$$

$$F(x+h) = f(x+h)g(x+h)$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}\right]$$

Se $f(x+h)g(x)$ for somado e subtraído ao numerador, então

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \left[f(x+h)\frac{g(x+h) - f(x)}{h}\right] + \lim_{h\to 0} \left[g(x)\ \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} f(x+h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Como f é derivável em x, pelo Teorema 3.1 f é contínua em x_1,

Portanto,temos:

$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ e $\lim_{h\to 0} g(x) = g(x)$,

$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$ + e $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$

Resultando

$F'(x) = f(x).g'(x) + f'(x).g(x)$

Ou seja, a derivada do produto de duas funções deriváveis é a primeira função vezes a derivada da segunda função, mais a segunda função vezes a derivada da primeira função.

Propriedade 3.7 *Se as funções f e g forem diferenciáveis e se F for a função definida por $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ com $g(x) \neq 0$ então*

$$F'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

.

Prova:

$$\begin{cases} F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \\ F(x+h) = \dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} \end{cases}$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$

Subtraindo e somando $g(x)f(x)$ ao numerador do último quociente, obtemos

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x)(x+h) - g(x)f(x) + g(x)f(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x)[f(x+h) - f(x)] - f(x)[g(x+h) - g(x)]}{hg(x+h)g(x)}$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x)\left[\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] - f(x)\left[\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]}{g(x+h)g(x)}$$

$$F'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

3.4 TAXA DE VARIAÇÃO RELATIVA E PERCENTUAL

Segundo Hoffmann e Bradley (2000) a utilização da taxa de variação instantânea de uma grandeza Q não é tão importante quanto a taxa de variação Relativa sendo esta definida através da expressão:

Variação Relativa$= \dfrac{\text{Variação de Q}}{\text{Valor do Q}}$

A taxa de variação de uma grandeza $Q(x)$ é medida pela derivada $Q'(x)$ e podemos expressar como:

Taxa de Variação$= \dfrac{Q'(x)}{Q(x)}$

A taxa de variação percentual de $Q(x)$ seria expressa por: $\dfrac{100Q\,'(x)}{Q(x)}$

3.5 APLICAÇÃO DO CÁLCULO DIFERENCIAL NA BIOMATEMÁTICA

3.5.1 Biomatemática e os Modelos

(WEYNE, 2012) define a Biomatemática como o estudo de saúde que utiliza modelos matemáticos para ajudar a interpretar os fatos observados. Mais precisamente, a Biomatemática utiliza os conceitos de Matemática aplicados à Biologia. Sendo uma disciplina das áreas da saúde como a Medicina, Biologia dentre outras, que utiliza simultaneamente Ciência Biomédica e Matemática.

No entanto, (JAFELICE, 2012) ressalta que a Biomatemática já passou desta face inicial, quando limitava a ser subsidiária de outras ciências, passando a ter autonomia própria como uma área com extensão própria onde diversas outras interagem entre si.

De acordo com (WEYNE, 2012) a Biomatemática tem proporcionado um vasto campo de pesquisa fora do meio acadêmico. Havendo grande aceitação pelos profissionais da saúde, especialmente pelos médicos que utilizam os Modelos Matemáticos aumentando assim, a eficiência dos tratamentos dos pacientes.

Os Modelos Matemáticos constituem paradigmas simplificados de um fato real, composto de uma parte abstrata (modelo) e uma parte concreta (o fato real). Mais especificamente, como sendo um modelo da realidade. Para matematizar um modelo matemático não é apenas traduzir a situação para a linguagem matemática, mas sim desvelar possíveis estruturas matemáticas contidas na situação. Em relação à aplicação aos Modelos Matemáticos na área da Medicina, o campo mais explorado é a epidemiológica, que pode auxiliar na interpretação, prevenção, orientar na coleta dos dados e no controle de uma epidemia.

Apresentamos a seguir alguns modelos da Biomatemática relacionados com o Cálculo Diferencial, mais especificamente com taxa de variação instantânea e as técnicas de diferenciação

1. **Volume de um Tumor**

   Um tumor canceroso é modelado por uma esfera com $R\ cm$ de raio. Num exame médico, o tamanho deste tumor é estimado medindo-se o diâmetro do tumor e usando a expressão $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ para calcular o volume.

   Usando o Cálculo Diferencial, podemos utilizar a derivada para determinar a taxa de variação do volume $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ do tumor de diâmetro $2R$:

$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow V\,' = \frac{12}{3}\pi R^2 = 4\pi R^2$

Para $R = 0,75cm$ temos:

$V' = 4\pi R^2$

$V' = 4\pi(0,75)^2$

$V' = 2,25\pi cm^3$

Logo a taxa de variação do volume do tumor é $2,25\pi cm^3$, para $R = 0,75cm$. Isto nos dá a previsão de aumento do tumor em $2,25\pi cm^3$ a partir do raio de $R = 0,75cm$.

Por outro lado, se o diâmetro medido é $2,5$ cm com um erro máximo de 1%, podemos determinar a precisão do volume medido, da seguinte maneira:

O volume de uma esfera de diâmetro $x = 2R$ é dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi x^3$$

Assim, o volume calculado usando o diâmetro de $x = 2,5$ cm, é
$V = \dfrac{1}{6}\pi(2,5)^3 \approx 8,181$ cm^3
O erro cometido ao calcular o volume usando um diâmetro de $x = 2,5$ cm quando o diâmetro real é $2,5+\Delta x$ é

$$E = V(2,5+\Delta x) - V(2,5) \approx V'(2,5)\Delta x \tag{3.5.1}$$

O erro máximo da medida do diâmetro é 2%, o que significa que o erro pode ser, no máximo de $0,02(2,5) = 0,05$ para mais ou para menos. Assim, o erro máximo na medida do diâmetro é $\Delta x = \pm 0,05$ e o erro máximo correspondente no cálculo do volume é $\Delta V \approx [V'(2,5)](\pm 0,05)$.
Portanto, para $V = \dfrac{1}{6}\pi x^3$ temos:

$$V\,'(x) = \frac{1}{6}\pi(3x^2) = \frac{1}{2}\pi(x^2)$$

e para $x = 2,5$ resulta,

$$V\,'(2,5) = \frac{1}{2}\pi(2,5)^2 \approx 9,817$$

Substituindo $V\,'(2,5)$ na equação 3.5.1 que descreve o erro máximo do volume temos:

$$E = (9,817)(\pm 0,05) \approx \pm 0,491$$

Assim, o erro ao calcular o volume correspondente a $8,181\ cm^3$ é $0,491\ cm^3$, o que significa que o volume real V está no intervalo de $7,690 \leq a \leq 8,672$.

2. **Crescimento de uma Célula**

Uma certa célula tem forma esférica. Se as expressões $S = 4\pi r^2$ e $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ são usadas para calcular a superfície e o volume da célula, respectivamente, estime os efeitos sobre S e V de um aumento de 1% no raio r da célula.

Resolução:

Para o cálculo da superfície da célula temos

$$\begin{cases} S = 4\pi r^2 \\ S' = 8\pi r \\ \Delta x = 0,01 \end{cases}$$

Substituindo em

$$\Delta S = S'(x_0)\Delta x$$

$$\Delta S = (8\pi r)0,01$$

$$\Delta S = 0,08\pi r\ cm^2$$

Para o cálculo do volume da célula temos:

$$\begin{cases} V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \\ V' = 4\pi r^2 \\ \Delta x = 0,01 \end{cases}$$

Substituindo

$$\Delta V = V'(x_0)\Delta x$$

$$\Delta V = (4\pi r^2)0,01$$

$$\Delta V = 0,04\pi r^2\ cm^3$$

Portanto, a área da superfície da célula é de $0,08\pi r\ cm^2$ e seu volume de $0,04\pi r^2\ cm^3$.

3. **Cateterismo**

Um estudo realizado em um paciente submetido a um cateterismo revelou que o diâmetro da aorta era aproximadamente D milímetros (mm) quando a pressão aórtica era p (mm de mercúrio), onde

$$D(p) = -0,0009p^2 + 0,13p + 17,81$$

para $50 \leq p \leq 120$.

A taxa média de variação do diâmetro D da aorta quando p varia de $p = 60$ para $p = 61$ é obtida da seguinte maneira:

Considerando $\begin{cases} t_0 = 60 \\ t_0 + h = 61, \\ h = 1 \end{cases}$ temos:

$$D = \frac{D(t_0 + h) - D(t_0)}{h} = \frac{D(61) - D(60)}{1} = 22,39 - 22,37 = 0,0211$$

Portanto, a taxa de variação da aorta é de 0,0211 diâmetro/*mm* mercúrio.

Usando os métodos do cálculo para determinar a taxa instantânea de variação do diâmetro D com a pressão aórtica p para $p = 60$. O diâmetro está aumentando ou diminuindo quando $p = 60$?

Resolução:

A derivada da função $D(p) = -0,0009p^2 + 0,13p + 17,81$ é dada por :

$D'(p) = -0,0018p + 0,13$

Logo, para $p = 60$ temos:

$D'(60) = -0,0018(60) + 0,13 = 0,022mm$

Portanto a taxa instantânea de variação para $p = 60$ será de 0,022 *mm* de mercúrio indicando assim que há um aumento do diâmetro.

Para que valor de p a taxa instantânea de variação de $D(p)$ é igual a 0 ? Qual é o significado físico deste valor da pressão?

Resolução:

Fazendo $D'(p) = 0$ temos:

$$D'(p) = -0,0018p + 0,13$$

ou seja,

$$-0,0018p + 0,13 = 0$$

$$p = \frac{0,13}{0,0018} = 72,22$$

Portanto, se a pressão é 72,22 *mm* de mercúrio, o diâmetro da aorta não está aumentando e nem diminuindo.

Observe que para $\begin{cases} p < 72,22, & D'(p) > 0 \\ p > 72,22, & D'(p) < 0 \end{cases}$

Portanto para $p = 72,22$, $D'(72) = -0,2596$, sendo o maior diâmetro da aorta, como a $D'(p) < 0$ o diâmetro diminuirá.

Construindo o gráfico de $D(t)$ e $D'(t)$ observamos claramente o fenômeno descrito.

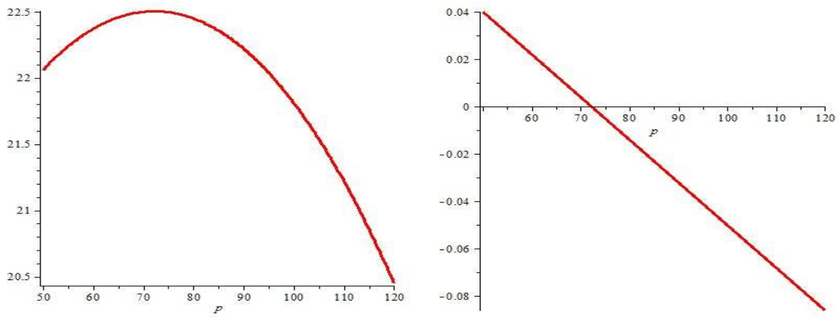

Figura 15: Gráfico da Função e da Derivada da Função.

4. **Disseminação de uma epidemia**

Uma pesquisa mostra que t dias após uma epidemia começar o número de pessoas infectadas $N(t) = 10t^3 + 5t + \sqrt{t}$, para $0 \leq t \leq 20$. Como mostra o gráfico abaixo.

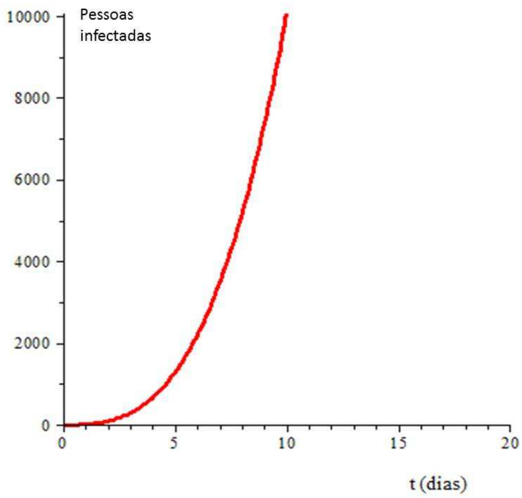

Figura 16: Gráfico da epidemia.

Para determinarmos com que taxa o número de pessoas infectadas está aumentando no nono dia, façamos:

Tendo a derivada da função $N(t) = 10t^3 + 5t + \sqrt{t}$ é dada por:

$N'(t) = 30t^2 + 5 + \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$

Para $t = 9$ dias após o início da epidemia teremos:

$N'(9) = 30(9)^2 + 5 + \frac{1}{2}(9)^{-\frac{1}{2}}$

$$N'(9) \cong 2435,16$$

A interpretação gráfica indicará o resultado anterior.

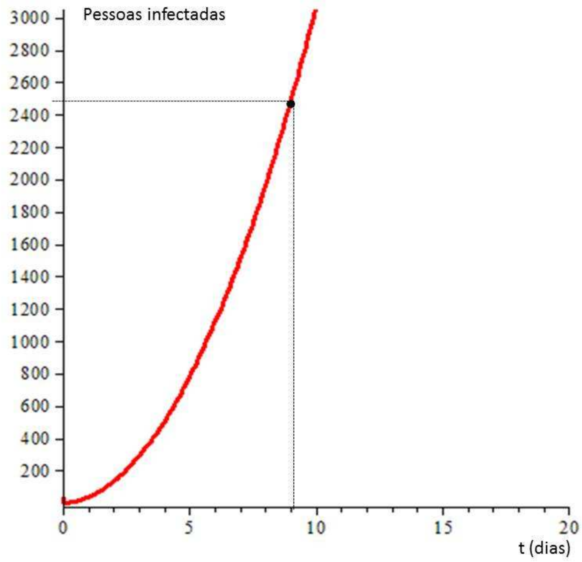

Figura 17: Taxa de pessoa infectadas.

Logo $\cong 2435,16$ teremos pessoas infectadas a partir do nono dia.

5. **Disseminação de uma doença**

Uma doença está se disseminando de tal forma que após t semanas o número de pessoas infectadas é modelada pela função $N(t) = (5175 - t^3)(t - 8)$ para $0 \leq t \leq 8$.

A taxa da disseminação da doença após t semanas é a derivada da função que calculamos utilizando a regra do produto:

Sendo $\begin{cases} g(t) = 5175 - t^3 \\ g'(t) = -3t^2 \end{cases}$ e $\begin{cases} f(t) = t - 8 \\ f'(t) = 1 \end{cases}$

$$N'(t) = f(t).g'(t) + f'(t).g(t)$$

$$N'(t) = (t-8)(-3t^2) + 1(5175 - t^3)$$

$$N'(t) = -4t^3 + 24t^2 + 5175$$

Para previsão da taxa de disseminação após 3 semanas, procedemos da seguinte maneira:

Logo para $t = 3$ temos

$N'(3) == -4(3)^3 + 24(3)^2 + 5175$

$N'(3) = 5283$

Portanto, a partir de 3 semanas teremos uma taxa de 5283 pessoas infectadas por semana. Isto nos dá uma previsão que na próxima semana haverá mais 5283 pessoas infectadas.

6. **Epidemia de AIDS**

Na fase inicial, mais especificamente no período de 1984 a 1990, a epidemia de AIDS foi modelada pela função cúbica.

$$C(t) = -170,36t^3 + 1707,5t^2 + 4404,8$$

para $0 \leq t \leq 6$, onde C é o número de casos registrados t anos após o ano-base de 1984.

Representando graficamente este modelo obtemos a figura abaixo:

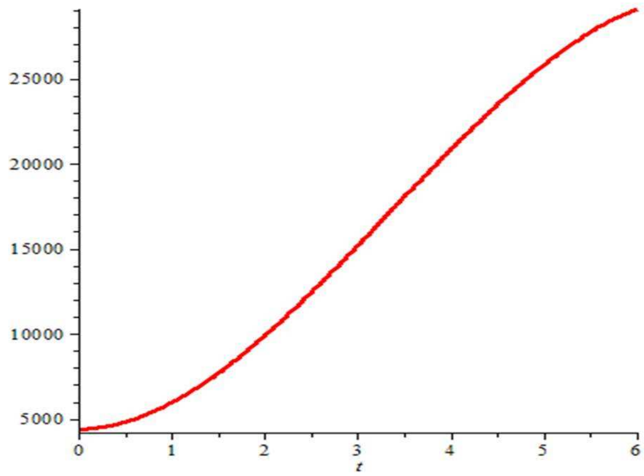

Figura 18: Números de infectados com a AIDS no período de 1984 a 1990

.

A derivada $C'(t)$ é dada por $C'(t) = -511,08t^2 + 3415t$ e indica a taxa de variação instantânea.

Utilizando a derivada da função que modela a epidemia de AIDS, podemos obter a previsão de números de caso de AIDS a partir de t anos, para $0 \leq t \leq 6$.

Por exemplo, a taxa de variação para $t = 0,5$ é dada por $C'(0,5) = 1579,73$, indicando que a partir dos primeiros 06 meses de 1984, a previsão é um aumento de $1579,73$ casos. Já para os anos de 1986 e 1987 temos as seguintes previsões de $C'(2) = 4785,68$ e $C'(3) = 5645,28$.

Para os 03 próximos anos, podemos observar que está taxa diminui, mas ainda há aumento no número de casos $C'(4) = 5482,72$, $C'(5) = 4298$ e $C'(6) = 2091,12$.

A interpretação gráfica da função C'(t) indicará o comportamento já analisado

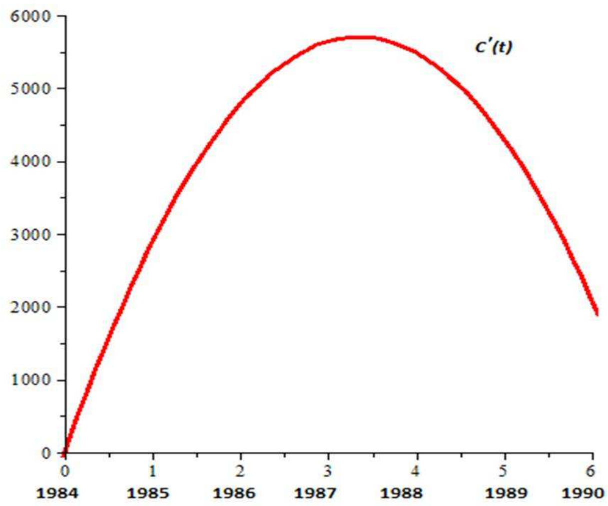

Figura 19: Taxa de Variação Instantânea C '(t)

.

Podemos calcular a taxa percentual de cada ano, como por exemplo, do ano de 1990.

Taxa percentual $= 100\dfrac{C'(t)}{C(t)} = \dfrac{C'(6)}{C(6)} = \dfrac{209100}{86142} = 2\%$

Logo, no ano de 1990 a taxa percentual é de 2%.

7. **Introdução de uma toxina em uma colônia de bactérias**

Um biólogo modela o efeito da introdução de uma toxina em uma colônia de bactérias através da função

$$P(t) = \frac{t+1}{t^2+t+4}$$

onde P é a população da colônia (em milhões) t horas após a toxina ser introduzida,como demonstra o gráfico da figura 20.

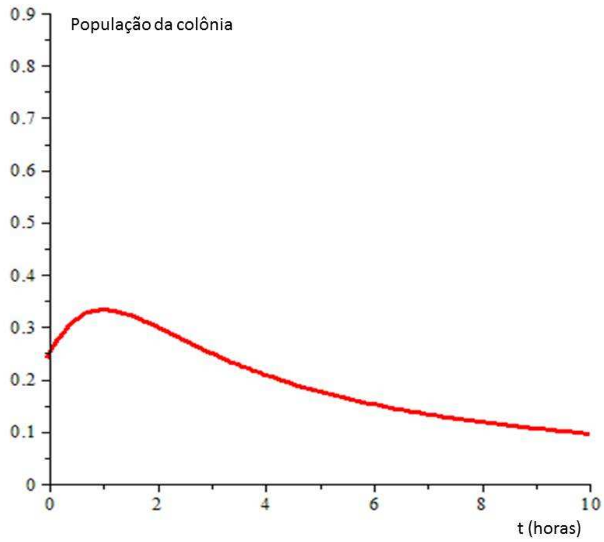

Figura 20: Toxina em uma colônia de bactérias

.

(a) Com que taxa a população está variando no momento em que a toxina é introduzida? A população está aumentando ou diminuindo nesta ocasião?

Resolução:

A taxa de variação da população com o tempo é a derivada da função que calculamos através da regra do quociente:

Sendo $\begin{cases} g(t) = t^2 + t + 4 \\ g'(t) = 2t + 1 \end{cases}$ $\quad e \quad$ $\begin{cases} f(t) = t + 1 \\ f'(t) = 1 \end{cases}$

$$P'(t) = \frac{g(t)f'(t) - f(t)g'(t)}{[g(t)]^2}$$

$$P'(t) = \frac{(t^2+t+4)(1) - (t+1)(t^2+t+4)}{(t^2+t+4)^2}$$

$$P'(t) = \frac{-t^2 - 2t + 3}{(t^2+t+4)^2}$$

A toxina é introduzida em $t = 0$, neste instante a taxa de variação da população é:

$$P'(0) = \frac{3}{(4)^2} = \frac{3}{16} = 0,1875$$

Sendo assim, a população inicialmente está variando a uma taxa de $0,1875$ milhões de bactérias e a população está aumentando, pois $P'(0) > 0$

(b) Em que instante a população começa a diminuir? De quanto a população aumenta antes de começar a diminuir?

Para que a população diminua, é preciso que $P'(t) < 0$. Analisando a função com $P'(t)$ observamos $P'(t) = \dfrac{N(t)}{D(t)}$ com $D(t) > 0$. Como o numerador de $P'(t)$ pode ser fatorado temos: $-t^2 - 2t + 3 = -(t^2 - 2 + 3) = -(t-1)(t+3)$.

Logo, basta estudarmos o numerador de $P'(t)$, sendo este $N(t) = -t^2 - 2 + 3$ para analisar o crescimento ou aumento como podemos escrever:

$$P'(t) = \frac{-(t-1)(t+3)}{(t^2+t+4)^2}$$

Sendo o denominador $D(t) = (t^2+t+4)^2$ e o fator $(t+3)$positivos para qualquer valor de $t \geq 0$, podemos escrever:

$$\begin{cases} P'(t) > 0, \text{ se } 0 \leq t < 1 \\ P'(t) = 0, \text{ se } t = 1 \\ P'(t) < 0, \text{ se } t > 1 \end{cases}$$

Logo, a população começa a diminuir após 1 hora.

Como,

$$\begin{cases} P(1) = \dfrac{1}{3} \\ P(0) = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$P(1) - P(0) = \frac{1}{12} = 0,083$$

Sendo $0,083$ o aumento da colônia antes de começar a diminuir.

3.6 REGRA DA CADEIA

De acordo com Hoffmann e Bradley (2000), em situações práticas da vida real, a taxa de variação de uma grandeza pode ser expressa em termos de outras taxas, como uma composição de funções. O teorema abaixo nos dá condições de calcular a taxa de variação para uma função composta $f \circ g$, tal que $g(x)$ pertence ao domínio de f, para todo x do domínio de g.

Teorema 3.2 *Se a função g for derivável em x e a função f for derivável em $g(x)$, então a* *função composta $f \circ g$ é diferenciável e sua derivada é dada por:*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

.

Prova

Seja x_1 qualquer número do domínio de g seja derivável em x_1 e f seja derivável em $g(x_1)$. Sendo a função F definida por:

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t) - f(g(x_1))}{t - g(x_1)} & \text{se t} \neq g(x_1) \\ f'(g(x_1)) & \text{se t} = g(x_1) \end{cases} \tag{3.6.2}$$

Então,

$$\lim_{t \to g(x_1)} \frac{f(t) - f(g(x_1))}{t - g(x_1)}$$

Da função $f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ se o limite existir, teremos a função do segundo membro da fórmula acima é $f'(g(x))$.

Logo

$$\lim_{t \to g(x_1)} F(t) = f'(g(x)) \tag{3.6.3}$$

Mas da equação 3.6.2,

$$f'(g(x)) = F(g(x))$$

Substituindo essa igualdade na equação 3.6.4, obtemos

$$\lim_{t \to g(x_1)} F(t) = F(g(x))$$

Portanto, F é contínua em $g(x_1)$.

Além disso, de 3.6.2

$$F(t) = \frac{f(t) - f(g(x_1))}{t - g(x_1)} \quad \text{se t} \neq g(x_1)$$

Multiplicando ambos os lados dessa equação por $t - g(x)$, obtemos

$$f(t) - f(g(x_1)) = F(t)[t - g(x_1)] \quad \text{se t} \neq g(x_1) \tag{3.6.4}$$

Observe que a equação 3.6.4 é verdadeira, mesmo para $t = g(x_1)$, pois o primeiro membro é $f(g(x_1)) - f(g(x_1)) = 0$ e o segundo membro é $F(g(x_1))[g(x_1) - g(x_1)] = 0$
Logo, a restrição em 3.6.4 não é necessária e escrevemos:

$$f(t) - f(g(x_1)) = F(t)[t - g(x_1)] \tag{3.6.5}$$

Seja uma função h definida como a função composta $f \circ g$, ou seja

$$h(x) = f(g(x)) \tag{3.6.6}$$

Então da função $f'(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ se o limite existir,

$h'(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} \dfrac{h(x) - h(x_1)}{x - x_1}$
Substituindo em 3.6.6 no segundo membro desse igualdade, obtemos:

$$h'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(g(x)) - f(g(x_1))}{x - x_1} \tag{3.6.7}$$

se o limite existir.
Seja $t = g(x)$ em 3.6.5 então para todo x no domínio de g, tal que $g(x)$ esteja no domínio de f,

$f(g(x)) - f(g(x_1)) = F(g(x))[g(x) - g(x_1)]$ e substituindo em 3.6.7 temos

$h'(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} \dfrac{F(g(x))[g(x) - g(x_1)]}{x - x_1}$, desde que o limite existir.

Portanto,

$$h'(x_1) = \lim_{x \to x_1} F(g(x)) \lim_{x \to x_1} \frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} \tag{3.6.8}$$

Como F é contínua em $g(x_1)$, têm-se

$$\lim_{x \to x_1} F(g(x)) = F(g(x_1)) \tag{3.6.9}$$

Mas de 3.6.2 temos:

$F(g(x_1)) = f'(g(x_1))$

Substituindo na equação 3.6.9, obtemos

$$\lim_{x \to x_1} F(g(x)) = f'(g(x_1)) \tag{3.6.10}$$

E como g é derivável em x_1, temos $\lim_{x \to x_1} \frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} = g'(x_1)$

Substituindo 3.6.10 e o resultado acima na equação em 3.6.8 e trocando $h'(x_1)$ por $(f \circ g)'(x)$ temos:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x_1))g'(x_1)$$

ou, na notação de Leibniz,se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \tag{3.6.11}$$

Exemplo 3.1 *Diferencie* $F(x) = \sqrt{x^2+1}$

Sendo F uma função composta e se tomarmos $y = f(u) = \sqrt{u}$ e $u = g(x) = x^2 + 1$, então podemos escrever $y = F(x) = f(g(x))$ isto é $F = (f \circ g)$.

Resolução 1:

$$\begin{cases} f(u) = \sqrt{u} \\ f'(u) = \frac{1}{2}u^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} g(x) = x^2 + 1 \\ g\,(x)' = 2x \end{cases}$$

Temos

$$F'(x) = f'(g(x))g'$$

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Resolução 2**:**

Se tomarmos $u = x^2 + 1$ e $y = \sqrt{u}$ e utilizando a equação:

$$F'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Quando utilizamos esta equação, $\dfrac{dy}{dx}$ refere-se à derivada de y quando y é tida como uma função de x (chamada de derivada de y em relação a x), e ao utilizar $\dfrac{dy}{du}$ refere-se à derivada de y quando y é considerada com uma função de u (chamada de derivada de y em relação a u), assim podemos considerar como uma função de x $(y = \sqrt{x^2+1})$ e a função de u $(y = \sqrt{u})$, então

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = F\,'(x)\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \\ \dfrac{dy}{du} = f\,'(u) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \end{cases}$$

$$F\,'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

$$F\,'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

3.6.1 Aplicação da Regra da Cadeia na Biomatemática

1. **Crescimento de um mamífero**

   As observações mostram que o comprimento L em milímetros (mm), do focinho à ponta de cauda de um tigre siberiano pode ser estimado usando a função $L = 0,25W^{2,6}$, onde W é o peso do tigre em quilogramas (kg). Além disso, quando o tigre tem menos de 6 meses de idade, seu peso (kg) pode ser estimado em termos de sua idade A em dias pela função $W = 3 + 0,21A$.

   (a) Qual é a taxa de variação do comprimento de um tigre siberiano em relação ao peso quando está pesando 60 kg?

   Resolução:

   Sendo:

   $$\begin{cases} L = 0,25W^{2,6} \text{ comprimento do tigre siberiano} \\ W \text{o peso do tigre siberiano} \end{cases}$$

   Temos

   $L = 0,25W^{2,6}$

$L' = 0,65W^{1,6}$

para $W = 60$

$L' = 0,65(60)^{1,6} \cong 454,94\ \ mm\,kg$

Logo a taxa de variação do comprimento de um tigre siberiano em relação ao peso é de $\cong 454,94\ \ mm\,kg$.

(b) Qual é o comprimento de um tigre siberiano quando tem 100 dias de idade? Qual é a taxa de variação do comprimento com o tempo nesta idade?

Resolução:

Sendo:

$$\begin{cases} L = 0,25W^{2,6} \text{ comprimento do tigre siberiano} \\ W = 3 + 0,21A \ \text{ peso em relação a idade(dias) do tigre siberiano} \\ A = \text{dias de idade do tigre siberiano} \end{cases}$$

Temos

$W = 3 + 0,21A$

para $A = 100$ dias

$W = 3 + 0,21(100) = 24\ \ kg$

para $W = 24$

$L = 0,25W^{2,6}\ L = 0,25(24)^{2,6} = 969\ \ mm$

O comprimento do tigre quando tem 100 é de $969\ \ mm$.

Utilizando a Regra da Cadeia para calcular a taxa de variação do comprimento com o tempo nesta idade, sendo de 100 dias.

Temos

$$\frac{dL}{dA} = \frac{dL}{dW}\frac{dW}{dA} = 0,65W^{1,6} \times 0,21$$

Tendo $A = 100$ e $w = 24$

$$\frac{dL}{dA} = 0,65W^{1,6} \times 0,21$$

$$\frac{dL}{dA} = 0,65(24)^{1,6} \times 0,21 \cong 22,05$$

A taxa de variação do comprimento com o tempo de 100 dias de idade é de $\cong 22,05\ \ mm\ \ por\ \ dia$.

2. **Crescimento de insetos**

O crescimento de certos insetos varia com a temperatura, suponha que uma certa espécie de inseto cresce de tal forma que o volume de uma espécie pode ser modelado pela função:

$$V(T) = 0,41(-0,01T^2 + 0,4T + 3,52) \;\; cm^3$$

onde a temperatura está em $^\circ C$ e a massa em gramas pode ser modelada pela função

$$m(V) = \frac{0,39V}{1+0,09V}$$

(a) Determine a taxa de variação do volume do inseto com relação a temperatura.

Resolução:

Para

$$V(T) = 0,41(-0,01T^2 + 0,4T + 3,52)$$

$$V(T) = -0,0041T^2 + 0,164T + 14432$$

Logo

$$V'(T) = -0,0082T^2 + 0,164$$

(b) Determine a taxa de variação da massa do inseto com relação ao volume.

Resolução:

Para calcular a taxa de variação da massa do inseto com relação ao volume utiliza-se a Regra do Quociente.

$$\begin{cases} g(v) = 1+0,09V \\ g'(v) = 0,09 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} f(v) = 0,39V \\ f'(v) = 0,39 \end{cases}$$

$$F'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$M'(x) = \frac{[(1+0,09V)0,39] - [(0,39V)(0,09)]}{(1+0,09V)^2}$$

$$M''(x) = \frac{0,39}{(1+0,09V)^2}$$

(c) Se $T = 10^\circ C$, qual é o volume do inseto? A que taxa a massa do inseto está variando com relação a temperatura se $T = 10^\circ C$?

Resolução:

Sendo $T = 10$ temos

$$V(T) = 0,41(-0,01T^2 + 0,4T + 3,52)$$
$$V(10) = 0,41(-0,01(10)^2 + 0,4(10) + 3,52)$$
$$V(10) = 0,41(-1 + 4 + 3,52)$$
$$V(10) = 2,673$$

O volume do inseto a uma temperatura de $10°C$ é de $2,673 \ \ cm^3$.

Utilizando a Regra da Cadeia para calcular com que taxa a massa do inseto está variando com a temperatura $T = 10°C$ teremos:

$$\frac{dM}{dT} = \frac{dM}{dV}\frac{dV}{dT}$$
$$\frac{dM}{dT} = \frac{0,39}{(1+0,09V)^2}(-0,0082T^2 + 0,164)$$
$$\frac{dM}{dT} = \frac{0,39}{(1+0,09(2,673)^2}(-0,0082(10)^2 + 0,164) \approx 0,020 \ \ g\backslash°C$$

A taxa está varia de $\cong 0,020 \ \ g\backslash°C$.

3.7 DERIVAÇÃO IMPLÍCITA E TAXAS RELACIONADAS

De acordo com Hoffmann e Bradley (2000), existem equações da forma $y = f(x)$, nas quais a variável dependente y é definida explicitamente por uma expressão que envolve a variável x, estando na forma explícita. Como por exemplo, as funções:

$$y = x^2 + 3x + 1 \qquad \text{e} \qquad y = \frac{x^3+1}{2x-3}$$

Mas existem equações nas quais a variável y não é definida explicitamente em termos da variável independente x assim, por exemplo:

$$x^2y^3 - 6 = 5y^3 + x \qquad \text{e} \qquad x^2y + 2y^3 = 3x + 2y$$

As equações deste tipo define y implicitamente como função de x e que a função e y encontra-se na forma implícita.

Exemplo 3.2 *Considere a equação* $3x^4y^2 - 7xy^3 = 4 - 8y$, *encontre* $\frac{dy}{dx}$.

Resolução:

Derivando ambos os membros da equação, sendo y uma função derivável em x e aplicando as técnicas de derivação necessárias como: a derivada do produto, da potência e regra da cadeia, obtemos:

$$3x^4y^2 - 7xy^3 = 4 - 8y$$
$$12x^3y^2 + 3x^4\left(2y\frac{dy}{dx}\right) - 7y^3 - 7x\left(3y^2\frac{dy}{dx}\right) = 0 - 8\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx}(6x^4y - 21xy^2 + 8) = 7y^3 - 12x^3y^2 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{7y^3 - 12x^3y^2}{6x^4y - 21xy^2 + 8}$$

Esta equação define y como pelo menos uma função derivável de x. Mas existem equações em x e y que não implica na existência de nenhuma função com valores reais, como é o caso da equação $x^2 + y^2 + 4 = 0$. Além disso, existem equações em x e y que possa estar satisfeita por várias funções, algumas das quais são deriváveis e outras não são.

Exemplo 3.3 *Se* $x^2 + y^2 = 9$, *ache* $\dfrac{dy}{dx}$ *e as duas funções definida pela equação.*

Resolução :

Diferenciando ambos os lados da equação temos

$$\frac{dy}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{dy}{dx}(9)$$
$$\frac{dy}{dx}(x^2) + \frac{dy}{dx}y^2 = 0$$
$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Resolvendo a equação para y, obteremos $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$, logo as duas funções são $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ e $g(x) = -\sqrt{9 - x^2}$.

Hoffmann e Bradley (2000) trata das taxas relacionadas, envolvidas em problemas práticos do dia-dia, usando variáveis x e y relacionadas por uma equação e como funções de uma terceira variável, $x(t)$ e $y(t)$, onde t na maioria das vezes representa o tempo. Neste caso, utiliza-se a derivação implícita para calcular $\dfrac{dx}{dt}$ e $\dfrac{dy}{dt}$, sendo estas derivadas chamadas de taxas relacionadas, pois $\dfrac{dy}{dt}$ pode ser escrita em função de $\dfrac{dx}{dt}$.

Exemplo 3.4 *Vazamento de petróleo*

Uma tempestade no mar danificou uma plataforma de petróleo, produzindo um vazamento de $60m^3\backslash min$ que resultou numa mancha de forma circular com 25 centímetros de espessura.

$a)$ Qual é a taxa de aumento do raio da mancha quando o raio é 70 metros?

$b)$ Suponha que o defeito seja consertado de tal forma que o vazamento pare instantaneamente. Se o raio da mancha estava aumentando à taxa de $0,2m^3\backslash min$ quando o vazamento parou, qual foi o volume de petróleo derramado?

Resolução :

A mancha do vazamento do petróleo , pode ser representado como um cilindro de raio r e espessura $h = 0,25\ m$. O volume deste cilindro é

$$V = \pi r^2 h = 0,25\pi r^2 m^3$$

Derivando implicitamente a equação em relação ao tempo t obtemos:

$$\frac{dV}{dt} = 0,25\left(2r\frac{dr}{dt}\right) = 0,5\pi r\frac{dr}{dt}$$

Sendo $\dfrac{dV}{dt} = 60$ para qualquer valor de t, obtemos a relação

$$60 = 0,5\pi r\frac{dr}{dt}$$

$a)$ Estamos interessados em calcular $\dfrac{dr}{dt}$ para $r = 70$, substituindo r por seu valor na equação

$$60 = 0,5\pi r\frac{dr}{dt}$$

$$60 = 0,5\pi(70)\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{60}{(0,5)\pi(70)} \approx 0,55$$

Logo, quando o raio é 70 metros , está aumentando à taxa de $0,55m\backslash min$.

$b)$ Podemos calcular o volume de petróleo derramado se conhecermos a raio da mancha no instante em que o vazamento parou.

Como nesse instante $\dfrac{dr}{dt} = 0,2$ temos

$$60 = 0,5\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$60 = 0,5\pi r(0,2)$$

Sendo o raio

$$r = \frac{60}{0,5\pi(0,2)} \approx 191$$

Assim, o volume de petróleo derramado é

$$V = 0,25\pi(191)^2 \approx 28652m^3$$

3.7.1 Derivação Implícita e Taxas Relacionadas na Biomatemática

1. **Crescimento de um tumor**

   Um tumor é modelado por uma esfera de raio R. Se o raio do tumor é atualmente seu raio é $0,54cm$ e está aumentando à uma taxa de $0,13cm$ por mês, qual é a taxa correspondente de aumento do volume $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$?

   Resolução:

   O tumor é modelado como uma esfera de raio R

   Tendo à taxa do aumento de $\dfrac{dr}{dt} = 0,13$ e raio $0,54$, para à taxa correspondente de aumento do volume temos:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi 3R^2 \frac{dR}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi 3(0,54)^2(0,13)$$

$$\frac{dV}{dt} = 0,476\ cm^3 \text{por mês}$$

   Logo, a taxa de aumento do volume do tumor é de $0,476\ cm^3$por mês.

2. **Artéria obstruída**

Um pequeno balão esférico é introduzido em uma artéria obstruída e inflado à razão de $0,002\pi\ mm^3\backslash min$. Qual é a taxa de aumento do raio do balão quando o raio é $0,005mm$?

Resolução:

Para calcular a taxa de aumento do raio do balão, primeiramente utilizamos a derivada implícita:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi\left(3R^2\frac{dR}{dt}\right)$$

$$0,002\pi = \frac{4}{3}\pi\left(3(0,005)^2\right)\frac{dV}{dt}$$

$$0,002\pi = 0,0001\pi\frac{dV}{dt} \Rightarrow 20\ mm\backslash min$$

Tendo, a taxa de aumento do balão esférico é de $20\ mm\backslash min$.

3. **Metabolismo basal**

O metabolismo basal é o calor produzido por um animal em repouso por unidade de tempo. As observações indicam que o metabolismo basal de um animal de sangue quente com w quilogramas (kg) de massa é dado por

$$M = 70\mathrm{w}^{3/4}\ quilocalorias\ por\ dia$$

$a)$ Determine a taxa de variação do metabolismo basal de uma onça de $80kg$ que está ganhando massa à taxa de $0,8kg$ por dia.

Resolução:

Para calcular a taxa de variação utiliza-se a derivada implícita temos

$$\begin{cases} w = 80kg \\ \dfrac{dW}{dt} = 0,8kg \end{cases}$$

$$M = 70w^{3/4}$$

$$\frac{dM}{dt} = 52,5w^{-1/4}\frac{dW}{dt}$$

$$\frac{dM}{dt} = 52,5(80)^{-1/4}(0,8) \Rightarrow 14,04$$

Logo, a taxa de variação da onça que está ganhando massa é de $14,04kg\backslash dia$

$b)$ Determine a taxa de variação do metabolismo basal de um avestruz de $50kg$ que está perdendo massa à taxa de $0,5kg$ por dia.

Resolução:

Utilizando a derivada implícita temos:

$$\begin{cases} w = 50kg \\ \dfrac{dW}{dt} = 0,5kg \end{cases}$$

$$M = 70w^{3/4}$$

$$\frac{dM}{dt} = 52,5w^{-1/4}\frac{dW}{dt}$$

$$\frac{dM}{dt} = 52,5(50)^{-1/4}(0,5) \Rightarrow -9,87$$

O avestruz está perdendo massa de $9,87kg$ por dia.

4. **Medicina Infantil**

Os pediatras usam a equação $S = 0,2029w^{0,425}$ para estimar a área da superfície $S(em\, m^2)$ de uma criança de 1 metro de altura que pesa w kg. Uma certa criança pesa 30 kg e está ganhando peso à taxa de $0,13$ kg por semana sem que sua altura aumente. Qual é a taxa de variação da área da superfície da criança?

Resolução:

Utilizando a derivada implícita para calcular a variação da área da superfície temos

$$\begin{cases} w = 30kg \\ \dfrac{dw}{dt} = 0,13kg \end{cases}$$

$$S = 0,2029w^{0,425}$$

$$\frac{dS}{dt} = 0,086w^{-0,575}\frac{dw}{dt}$$

$$\frac{dS}{dt} = 0,086(30)^{-0,575}(0,13) \Rightarrow 0,00158$$

A área da superfície é de $9,87kg$ por semana.

3.8 A DERIVADA SEGUNDA

Conforme Stewart (1994), uma função f for diferenciável, então a sua derivada f' é também uma função podendo ser denotada por $(f')' = f''$, sendo esta nova função denominada de derivada segunda de f. Utiliza-se também a notação de uma derivada segunda como: $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$ ou $f''(x) = D^2 f(x)$.

Hoffmann e Bradley (2000), menciona que a derivada comum, $f'(x)$ é denominada de derivada primeira e que não há novas regras para calcular a derivada segunda de uma função basta apenas derivar a função e deriva-lá novamente.

Stewart (1994), ressalta que a derivada segunda pode ser interpretada como uma taxa de variação da taxa de variação.

Um bom exemplo está na Física quando define-se sobre a posição de um objeto que se move em uma linha reta. Sendo a função $s = s(t)$ a posição do objeto no instante t, a derivada primeira de $s(t)$ nós dá a velocidade $v(t)$ em função do tempo; e a aceleração $a(t)$, sendo esta a taxa de variação instantânea da velocidade em relação ao tempo é a derivada segunda $a(t) = v'(t) = s''(t)$ ou, na notação de Leibniz $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$.

Ou seja,

$$\begin{cases} S(t) = \text{posição de um objeto que se move em uma linha reta} \\ V(t) = \dfrac{ds}{dt} \\ a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2} \end{cases}$$

3.8.1 Derivada Segunda na Biomatemática

1. **Dosagem de um medicamento**

   Um modelo biológico sugere que a reação do organismo humano a uma dose de um medicamento pode ser modelada por uma função da forma

$$F = \frac{1}{3}(KM^2 - M^3)$$

onde K é uma constante positiva e M é a quantidade de medicamente presente no sangue. A derivada $S = \dfrac{dF}{dM}$ pode ser considerada uma medida da sensibilidade do organismo ao medicamento.

(a) Determine a sensibilidade de S.

Resolução:

Sendo

$$F = \frac{1}{3}(KM^2 - M^3)$$

temos:

$S = \dfrac{dF}{dM} = \dfrac{1}{3}(2KM - 3M^2) \Rightarrow \dfrac{dF}{dM} = \dfrac{2KM}{3} - M^2$

Portanto, a derivada da função $\dfrac{2KM}{3} - M^2$ indica a sensibilidade do organismo ao medicamento.

(b) Calcule e interprete fisicamente esta derivada segunda.

Resolução:

$F = \dfrac{1}{3}(KM^2 - M^3)$ e $\dfrac{dF}{dM} = \dfrac{2KM}{3} - M^2$. Então,

derivada segunda $\dfrac{d^2F}{dM^2} = \dfrac{2K}{3} - 2M$, representa a taxa de variação da sensibilidade em relação a quantidade de medicamento presente no sangue.

2. **Farmacologia**

Um analgésico é oral é administrado a um paciente; t horas depois, a concentração do medicamento na sangue do paciente é dada por:

$$C(t) = \frac{2t}{3t^2 + 16}$$

(a) Qual a taxa $R(t)$ com a qual a concentração do medicamento no sangue do paciente está variando t horas depois que é administrado? Qual é a taxa com a qual $R(t)$ está variando?

Resolução:

A taxa de concentração do medicamento no sangue do paciente é

$R(t) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{2t}{3t^2 + 16}\right)$

Utilizando a regra do quociente para derivar a função temos:

$$\begin{cases} f = 2t \\ \dfrac{d}{dt} f(t) = 2 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} g(t) = 3t^2 + 16 \\ \dfrac{d}{dt} g(t) = 6t \end{cases}$$

$$R(t) = \frac{d}{dt}\,C(t) = \frac{g(t)\dfrac{d}{dt}f(t) - f(t)\dfrac{d}{dt}g(t)}{[g(t)]^2}$$

$$R(t) = \frac{d}{dt}\,C(t) = \frac{(3t^2+16)2 - (2t)(3t^2+16)}{(3t^2+16)^2}$$

$$R(t) = \frac{d}{dt}\,C(t) = \frac{-6t^2+32}{(3t^2+16)^2}$$

A taxa com a qual $R(t)$ está variando é a derivada segunda da equação de concentração do medicamento no sangue do paciente, sendo:

$$\frac{d^2}{dt^2}\,R(t) = \frac{d}{dt}\,R(t) = \frac{-6t^2+32}{(3t^2+16)^2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\,R(t) = \frac{d}{dt}\,R(t) = \frac{-6t^2+32}{(9t^4+96t^2+256)}$$

Utilizando a regra do quociente para calcular temos:

$$\begin{cases} f(t) = -6t^2 + 32 \\ \dfrac{d}{dt}\; f(t) = -12t \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} g(t) = 9t^4 + 96t^2 + 256 \\ \dfrac{d}{dt}\; g(t) = 36t^3 + 192t \end{cases}$$

$$\frac{d^2}{d^2t}\,C(t) = \frac{d}{dt}\,R(t) = \frac{g(t)\dfrac{d}{dt}f(t) - f(t)\dfrac{d}{dt}g(t)}{[g(t)]^2}$$

$$\frac{d^2}{d^2t}\,C(t) = \frac{[(9t^4+96t^2+256)(-12t)] - [(-6t^2+32)(36t^3+192t)]}{(9t^4+96t^2+256)^2}$$

$$\frac{d^2}{d^2t}\,C(t) = \frac{(-108t^5 - 1152t^3 - 3072t) - (-216t^5 - 1152t^3 + 1152t^3 + 6144t)}{(9t^4+96t^2+256)^2}$$

$$\frac{d^2}{d^2t}\,C(t) = \frac{(-108t^5 - 1152t^3 - 3072t) + 216t^5 + 1152t^3 - 1152t^3 - 6144t)}{(9t^4+96t^2+256)^2}$$

$$\frac{d^2}{d^2t}\,C(t) = \frac{108t^5 - 1152t^3 + 3072t}{(9t^4+96t^2+256)^2}$$

(b) Qual é a taxa de variação da concentração do medicamento 1 hora depois que é administrado? A concentração está aumentando ou diminuindo neste instante?

Tendo $t = 1$ hora

$$R(1) = \frac{d}{dt}\,C(1) = \frac{-6(1)^2+32}{(3(1)^2+16)^2} = 0,08$$

A concentração em $t = 1$ hora é de $0,08$ e está aumentando.

(c) Em que instante a concentração do medicamento começa a diminuir?

A partir do ponto máximo da taxa da concentração de $R(t) = \dfrac{d}{dt}\,C(t) = \dfrac{-6t^2+32}{(3t^2+16)^2}$

Temos $\dfrac{d}{dt}\,C(t) = 0$

$\dfrac{-6t^2+32}{(3t^2+16)^2} = 0$

$-6t^2+32 = 0 \quad t = \frac{4}{3}\sqrt{3} \cong 2,3$

A concentração começa a diminuir no instante $2,3$ horas.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho fizemos uso de algumas ferramentas de apoio para o ensino de Cálculo Diferencial: a História da Matemática, a Modelagem Matemática e as Novas Tecnologias.

Nas aulas de Cálculo Diferencial é de suma importância apresentar suas origens. Mesmo que de forma sucinta, o professor deve apresentar cronologicamente o desenvolvimento desta disciplina, apontando os problemas e as indagações da época, as notações utilizadas e os principais colaboradores para sua evolução. Desta forma, humaniza-se a disciplina deixando-a mais próxima dos alunos.

Já os modelos apresentados neste trabalho buscaram evidenciar a biomatemática como ferramenta motivacional para as aulas de Cálculo Diferencial, além de sua importância no desenvolvimento de áreas como Medicina e Biologia. Estes modelos apontam possibilidades do tratamento do Cálculo Diferencial de forma contextualizada.

No entanto deve-se ressaltar o importante papel do professor como condutor de ações que induzirão o aluno à aquisição de novos conhecimentos. Através de indagações e situações o professor apontará a necessidade de novas definições e técnicas matemáticas. Desta maneira, ao invés de apresentar mais uma fórmula abstrata, apresenta-se um modelo matemático que evidencia a necessidade de uma nova técnica ou definição matemática.

Alguns dos resultados que se obtêm ao fazer o uso desta metodologia são a motivação e o desenvolvimento do aluno ao resolver problemas específicos de sua área. Outro aspecto importante é ressaltar que além do enriquecimento teórico encadeado pela motivação, o aluno torna-se apto para aplicar conhecimentos matemáticos em sua futura atuação profissional.

Destaca-se também outra ferramenta de apoio no tratamento das informações matemáticas: a tecnologia e os softwares matemáticos. Neste trabalho fizemos uso do software Maple 16 que tem aplicativos próprios para visualização gráfica e cálculos computacionais: como a aplicação de uma função a um ponto dado, o cálculo de limite, derivada, etc. O professor pode sugerir a utilização de um software no desenvolvimento de modelos matemáticos contextualizados.

Embora não tenhamos abordado todos os tópicos do Cálculo Diferencial, como a derivada de função exponencial ou trigonométrica, a expectativa que se têm é motivar demais profissionais da educação matemática que lecionam em cursos da área da saúde e biologia a fazerem uso da biomatemática, das tecnologias e da história matemática como ferramentas de ensino, objetivando a formação construtiva que torna os alunos capazes de formular e resolver modelos específicos de sua área.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgar Bucher, 1974. 300 p.

BOYER, C. B. **História da Matemática para uso em sala de aula CÁLCULO**. São Paulo: Atual, 1992. 93 p.

CAMPOS, R. P. A abordagem do teorema fundamental do cálculo em livros didáticos e os registro de representação semiótica. p. 206, 2007.

ERON. **Cálculo Deferencial e Integral**. Salvador - Bahia, 2006.

EVES, H. **Introdução a História da Matemática**. Campinas - São Paulo: Unicamp, 2011. 848 p.

HOFFMANN, L. D.; BRADLEY, G. L. **Cálculo um curso moderno e suas aplicações**. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2000.

JAFELICE, R. S. da M. **O status da Biomatemática no Brasil**. Uberlândia - Minas Gerias, 2012.

LEITHOLD, L. **O Cálculo - Geometria Analítica**. 3. ed. São Paulo: HARBRA, 1994.

MACHADO, P. A. P. A abordagem para a disciplina de cálculo a. **1º Encontro Nacional**, 2012.

PIRES, J. A. L. **Cálculo Diferencial**. Dissertação (Tese de Mestrado em Ensino da Matemática) — Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, junho 2004.

SIMMONS, G. F. **CÁLCULO com Geometria Analítica**. São Paulo: MCGraw- Hill, 1987. 829 p.

STEWART, J. **Cálculo**. 3. ed. São Paulo: Harpa, 1994. 355 p.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica**. 2. ed. São Paulo: Mayron Books, 1994.

WEYNE, G. R. de S. **Obstáculos Epistemológicos para a inclusão derivadas de disciplinas matemáticas nos currículos de medicina**. Dissertação (Tese de Doutorado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.