

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

TEREZA MARIA PEREIRA GARCIA

**SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS  
ORDINÁRIAS**

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

CAMPO MOURÃO

2012

TEREZA MARIA PEREIRA GARCIA

**SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS  
ORDINÁRIAS**

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Adilandri Mércio Lobeiro

**CAMPO MOURÃO**

**2012**

## **TERMO DE APROVAÇÃO**

Tereza Maria Pereira Garcia

### Solução Numérica de Equações Diferenciais Ordinárias

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

---

Orientador: Prof. Msc. Adilandri M. Lobeiro

---

Prof(a). Msc. Viviane Colucci

---

Prof(a). Msc. Magda Cardoso Montovani

Campo Mourão, 2012

Aos meus pais e principalmente ao meu namorado Fernando que ficaram privados da minha presença e atenção durante os estudos.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus por ter me proporcionado a realização de mais uma etapa da construção do meu conhecimento. A meu pai e Fernando, principalmente à minha mãe, pela paciência e colaboração. Aos professores de especialização pelo conhecimento transmitido. Aos meus colegas de especialização, pela companhia nos estudos e viagem. Especialmente ao meu orientador, professor Adilandri, pela paciência, dedicação e colaboração para realização desse trabalho e a Oilson Alberto Gonzatto Junior por sua importante contribuição nesse trabalho.

“A matemática é o alfabeto com qual Deus criou o universo.”

Galileo Galilei.

## RESUMO

GARCIA, T. M. P.. Solução Numérica de Equações Diferenciais Ordinárias. 114 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2012.

Este trabalho propõe explicitar os métodos numéricos conhecidos como Métodos Lineares de Passo Múltiplo, utilizados para a resolução de Equações Diferenciais Ordinárias, descrevendo seus conceitos e mecanismos de aproximação às coordenadas da solução de um Problema de Valor Inicial onde, a cada iteração, novos valores são obtidos por meio da discretização de um conjunto de pontos em um determinado intervalo. A abordagem dos métodos ocorre com o auxílio do *software Maple 16*, para a implementação computacional dos métodos numéricos estudados e desenvolvidos em teoria. Cada um dos estudos é composto pela discussão teórica seguida da resolução manual em um intervalo dividido em poucas partes, após isso, um código computacional é apresentado e a resolução é feita via *software* com o intervalo de estudo ainda mais fracionado. Ambas as resoluções fazem parte de tabelas e gráficos que são construídos a fim de permitir o entendimento de cada método e a comparação entre os resultados analíticos e as aproximações numéricas.

**Palavras-chave:** Métodos Numéricos, Equações Diferenciais Ordinárias, Solução Numérica, Aproximação

## ABSTRACT

GARCIA, T. M. P.. Numerical Solution of Ordinary Differential Equations. 114 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2012.

This paper proposes explicit numerical methods known as Linear Step Multiple Methods used for solving Ordinary Differential Equations, describing their concepts and mechanisms for coordinated approach to the solution of an Initial Value Problem where each iteration, new values are obtained by discretizing a set of points in a certain range. The methods of approach occurs with the help of software Maple 16 to the computer implementation of numerical methods studied and developed in theory. Each of the studies consists of the theoretical discussion followed by manual resolution in a range divided into a few parts, after that, a computer code is presented and the resolution is done via software with the study interval further fractionated. Both resolutions are part of tables and graphs that are constructed to allow the understanding of each method and the comparison between analytical results and numerical approximations.

**Keywords:** Numerical Methods, Ordinary Differential Equations, Numerical Solution, Approach



## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – CONVERGÊNCIA .....	65
-------------------------------	----

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1	– MÉTODO DE TAYLOR DE 3ª ORDEM COM $H = 0,1$ .....	22
TABELA 2	– MÉTODO DE EULER COM $H = 0,1$ .....	27
TABELA 3	– REGRA DO PONTO MÉDIO COM $H = 0,1$ .....	35
TABELA 4	– MÉTODO DA REGRA DO TRAPÉZIO COM $H = 0,1$ .....	40
TABELA 5	– MÉTODO DE ADAMS-BASHFORTH COM $H = 0,1$ .....	48
TABELA 6	– MÉTODO NÃO CONVERGENTE COM $H = 0,1$ .....	70
TABELA 7	– PAR (ADAMS-BASHFORTH, 1/3 DE SIMPSON) NO MODO $P(EC)E$	76
TABELA 8	– MÉTODO DE EULER MODIFICADO COM $H = 0,1$ .....	87
TABELA 9	– MÉTODO DE EULER MELHORADO COM $H = 0,1$ .....	90
TABELA 10	– MÉTODO DE HEUN COM $H = 0,1$ .....	96
TABELA 11	– MÉTODO DE NYSTROM COM $H = 0,1$ .....	101
TABELA 12	– PAR (ADAMS-BASHFORTH, 1/3 DE SIMPSON) NO MODO $P(EC)$	103
TABELA 13	– MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE ORDEM 4, COM $H = 0,1$ .....	107
TABELA 14	– PAR $PC$ NO MODO $P(EC)E$ .....	111

## LISTA DE SIGLAS

EDOs	Equações Diferenciais Ordinárias
PVI	Problema de Valor Inicial
EDO	Equação Diferencial Ordinária
<i>PC</i>	Previsor Corretor

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>10</b>
1.1	CONCEITOS PRELIMINARES	10
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	12
<b>2</b>	<b>MÉTODO DE TAYLOR</b>	<b>14</b>
<b>3</b>	<b>MÉTODOS LINEARES DE PASSO MÚLTIPLO</b>	<b>25</b>
3.1	OBTIDOS DO DESENVOLVIMENTO DE TAYLOR	25
3.1.1	Método de Euler	26
3.1.2	Método da Regra do Ponto Médio	32
3.2	OBTIDOS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA	36
3.2.1	Método da Regra do Trapézio	37
3.2.2	Método 1/3 de Simpson	41
3.2.3	Método 3/8 de Simpson	42
3.2.4	Método de Adams-Moulton	43
3.2.5	Método de Adams-Bashforth	46
3.3	ORDEM E CONSTANTE DO ERRO	50
3.4	ERRO DE TRUNCAMENTO LOCAL	54
3.5	CONSISTÊNCIA E ESTABILIDADE	56
3.6	CONVERGÊNCIA	65
<b>4</b>	<b>MÉTODOS DO TIPO PREVISOR - CORRETOR</b>	<b>73</b>
<b>5</b>	<b>MÉTODO GERAL EXPLÍCITO DE 1-PASSO</b>	<b>79</b>
5.1	ORDEM	79
5.2	CONSISTÊNCIA	79
5.3	CONVERGÊNCIA	81
5.4	MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA	81
5.4.1	Métodos de Runge-Kutta de ordem 2	82
5.4.2	Métodos de Runge-Kutta de ordem 3	92
5.4.3	Métodos de Runge-Kutta de ordem 4	105
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>113</b>
	REFERÊNCIAS	114

## 1 INTRODUÇÃO

As Equações Diferenciais Ordinárias ( EDOs) são usadas para modelar problemas de ciências e engenharia que envolvam a mudança de alguma variável em relação a outra. A maioria desses problemas requer a solução de um Problema de Valor Inicial ( PVI), isto é, resolver uma Equações Diferenciais Ordinária ( EDO) que satisfaça uma dada condição inicial.

Na maioria das situações da vida real, a Equação Diferencial que modela o problema é muito complicada para ser resolvida com exatidão. Sendo assim, recorre-se a dois procedimentos para aproximar a solução. O primeiro consiste em simplificar a Equação Diferencial de modo a resolvê-la exatamente, e, então usar a solução da equação simplificada para aproximá-la da solução da equação original. O segundo se vale de métodos para aproximar a solução do problema original. Esse procedimento é mais comumente empregado, uma vez que os métodos de aproximação dão resultados mais precisos e uma informação mais realista sobre o erro.

Os métodos apresentados nesse trabalho não produzem uma aproximação contínua da solução do PVI. Mais precisamente, as aproximações são obtidas em alguns pontos específicos espaçados igualmente.

### 1.1 CONCEITOS PRELIMINARES

Antes de iniciar os métodos para aproximar os Problemas de Valor Inicial, necessita-se de algumas definições e resultados da teoria das EDOs.

A equação

$$y' = f(x;y) \tag{1.1.1}$$

é chamada **Equação Diferencial de Primeira Ordem**. Nesta equação,  $f$  é uma função real dada, de duas variáveis reais  $x$  e  $y$ , onde  $y$  depende da variável independente  $x$ .

Resolver a Equação (1.1.1) corresponde em determinar uma função  $y = y(x)$ , diferenciável, com  $x \in [a; b]$  tal que  $y'(x) = f(x; y(x))$ . Qualquer função que satisfaça essa propriedade é uma

solução da Equação Diferencial (1.1.1). Por exemplo, a função  $y(x) = Ce^x$  é, para qualquer valor da constante  $C$ , uma solução da Equação Diferencial  $y' = y$ . Assim, cada Equação Diferencial de Primeira Ordem possui um número infinito de soluções. Contudo, pode-se obter uma solução particular, se junto com a Equação Diferencial for dado o valor de  $y(x)$  em um ponto, por exemplo,  $y(x_0) = y_0$ , a qual é chamada de condição inicial.

A Equação Diferencial juntamente com a condição inicial constituem um **Problema de Valor Inicial**, isto é

$$\begin{cases} y' = f(x; y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.1.2)$$

Deseja-se obter condições que garantam a existência de uma única solução do PVI (1.1.2).

**Definição 1.1** Diz-se que uma função  $f(x; y)$  satisfaz uma **condição de Lipschitz** na variável  $y$  em um conjunto  $D \subset \mathbb{R}^2$  se uma constante  $L > 0$  existe com

$$|f(x; y_1) - f(x; y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad (1.1.3)$$

sempre que  $(x; y_1), (x; y_2) \in D$ . A constante  $L$  é chamada de **constante de Lipschitz** para  $f$ .

**Definição 1.2** Diz-se que um conjunto  $D \subset \mathbb{R}^2$  é convexo se, sempre que  $(x_1; y_1)$  e  $(x_2; y_2)$  pertençam a  $D$ , e  $\lambda$  esteja em  $[0, 1]$ , o ponto  $((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2; (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2)$  também pertença a  $D$ .

Em termos geométricos a Definição (1.2) (BURDEN; FAIRES, 2003) estabelece que um conjunto é convexo sempre que, quando dois pontos pertencem a um conjunto, todo o segmento de reta entre os pontos também pertence ao conjunto. Os conjuntos considerados nesse trabalho são da forma  $D = \{(x; y); a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty\}$  para algumas constantes  $a$  e  $b$ .

**Teorema 1.1** Suponha que  $f(x; y)$  seja definida em um conjunto convexo  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Se existe uma constante  $L > 0$  com

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x; y) \right| \leq L \quad ; \text{ para todo } (x; y) \in D \quad (1.1.4)$$

então  $f$  satisfaz uma condição de Lipschitz em  $D$  na variável  $y$  com a constante  $L$  de Lipschitz.

Como pode-se observar no Teorema (1.2), muitas vezes é de grande interesse determinar se a função envolvida em um PVI satisfaz a condição de Lipschitz em sua segunda variável e

quase sempre é mais fácil aplicar a condição (1.1.4) do que a Definição (1.1). Deve-se ressaltar, no entanto, que o Teorema (1.1) fornece condições apenas suficientes para que uma condição de Lipschitz seja válida.

O Teorema (1.2) é uma versão do Teorema Fundamental da Existência e Singularidade das Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem. A demonstração desse Teorema, pode ser encontrada em (ROTA, 1989).

**Teorema 1.2** *Suponha que  $D = \{(x; y); a \leq x \leq b; -\infty < y < \infty\}$  e que  $f(x; y)$  seja contínua em  $D$ . Se  $f$  satisfaz a condição de Lipschitz em  $D$  na variável  $y$ , então o PVI*

$$y'(x) = f(x; y) \quad , \quad a \leq x \leq b \quad , \quad y(a) = \alpha \quad (1.1.5)$$

*tem uma única solução  $y(x)$  para  $a \leq x \leq b$ .*

Observa-se, que em particular, o Teorema (1.2) garante a existência de uma única solução do PVI (1.1.2).

A grande maioria das equações encontradas na prática não podem ser solucionadas analiticamente. O recurso de que se dispõe é o emprego de métodos numéricos. Para isso, considera-se a sequência de pontos  $\{x_n\}$  definida por

$$x_n = x_0 + nh,$$

onde  $n = 0, 1, \dots, N$ , com  $x_0 = a$ ,  $x_N = b$  e  $N = \frac{b-a}{h}$ . Diz-se que o comprimento do intervalo,  $h$ , é o **tamanho do passo**, os pontos  $x_n$  são os **pontos da malha** e  $N$  é o **número de passos**.

Uma propriedade importante dos métodos computacionais para a solução de (1.1.2) é a **discretização**, isto é, deseja-se obter a solução aproximada do PVI não num intervalo contínuo  $a \leq x \leq b$ , mas sim num conjunto discreto de pontos  $\{x_n; n = 0, 1, \dots, N\}$ .

Denota-se por  $y_n$  uma aproximação para a solução analítica em  $x_n$ , isto é,  $y_n \cong y(x_n)$  e por  $f_n = f(x_n; y_n)$ . O objetivo é então determinar aproximações  $y_n$  da solução verdadeira  $y(x_n)$  nos pontos da malha, sendo a solução numérica uma tabela de valores de pares  $(x_n; y_n)$ .

## 1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

A estrutura dessa monografia está organizada em mais cinco capítulos descritos brevemente abaixo:

- no capítulo 2 apresenta-se o Método de Taylor de ordem  $q$ ;
- no capítulo 3 apresenta-se Métodos Lineares de Passo Múltiplo, obtidos do desenvolvimento da série de Taylor e de integração numérica, bem como a ordem e constante do erro, erro de truncamento local, consistência, estabilidade e convergência;
- no capítulo 4 apresenta-se Métodos do tipo Previsor-Corretor, dados por erro de truncamento local;
- no capítulo 5 apresenta-se Métodos Gerais Explícitos de 1-Passo, onde se verifica a ordem, consistência e convergência. Também apresenta-se os Métodos de Runge-Kutta, de segunda, terceira e quarta ordens.



## 2 MÉTODO DE TAYLOR

Considerando o PVI (1.1.2). A função  $f$  pode ser linear ou não, admitindo-se que  $f$  seja contínua e suficientemente derivável em relação a  $x$  e  $y$ . Seja  $y(x)$  a solução exata de (1.1.2), então  $y(x)$  é a solução exata do PVI. A expansão em série de Taylor (ZILL, 2003) para  $y(x_n + h)$  em torno do ponto  $x_n$ , é dada por:

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \dots + \frac{h^q}{q!}y^{(q)}(x_n) + \frac{h^{q+1}}{(q+1)!}y^{(q+1)}(\xi_n) \quad (2.0.1)$$

onde  $x_n < \xi_n < x_n + h$  e o **erro de truncamento local** é dado por  $e = \frac{h^{q+1}}{(q+1)!}y^{(q+1)}(\xi_n)$ .

As derivadas na expansão (2.0.1) não são conhecidas explicitamente, uma vez que a solução exata  $y(x)$  não é conhecida. Contudo, se  $f$  é suficientemente derivável, elas podem ser obtidas considerando-se a derivada  $y' = f(x; y)$  com respeito a  $x$ , tendo em mente que  $f$  é uma função implícita de  $y$ . Assim sendo, obtém-se para as primeiras derivadas:

$$y' = f(x; y),$$

$$y'' = f' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = f_x + f_y f,$$

$$\begin{aligned} y''' &= f'' = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_x}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \left[ \frac{\partial f_y}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right] f + f_y \left[ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right] & (2.0.2) \\ &= f_{xx} + f_{xy}f + f_{yx}f + f_{yy}f^2 + f_y f_x + f_y^2 f \\ &= f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_x f_y + f_y^2 f. \\ &\vdots \end{aligned}$$

Continuando desta maneira, pode-se expressar qualquer derivada de  $y$  em termos de  $f$  e de suas derivadas parciais. Contudo, a menos que  $f$  seja uma função muito simples, as derivadas de ordem mais elevada tornam-se cada vez mais complexas. Por razões práticas deve-se, então,

limitar o número de termos na expansão (2.0.1), truncando-a após  $(q + 1)$  termos, ou seja,

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hf(x_n; y(x_n)) + \dots + \frac{h^q}{q!} f^{(q-1)}(x_n; y(x_n)) , \quad (2.0.3)$$

esta equação pode ser interpretada como uma relação aproximada entre valores exatos da solução do PVI.

Uma relação exata entre valores aproximados da solução do PVI pode ser obtida substituindo, na equação (2.0.3),  $y(x_n)$  por  $y_n$  e  $f^{(j)}(x_n; y(x_n))$  por  $f_n^{(j)}$  onde  $j = 0, 1, \dots, q - 1$ , obtém-se

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2!} f_n' + \dots + \frac{h^q}{q!} f_n^{(q-1)} , \quad (2.0.4)$$

ou

$$y_{n+1} = y_n + hy_n' + \frac{h^2}{2!} y_n'' + \dots + \frac{h^q}{q!} y_n^{(q)} , \quad (2.0.5)$$

que é chamado **Método de Taylor de ordem q**.

Apresenta-se a seguir um exemplo para melhor entendimento do método.

**Exemplo 2.1** *Aplique o Método de Taylor de ordem 3, para resolver o PVI*

$$\begin{cases} y' = -y + x + 2 \\ y(0) = 2 \end{cases} , \quad (2.0.6)$$

*obtendo uma aproximação de  $y(0,5)$  com  $h = 0,1$ . Resolva também para  $h = 0,05$  e compare os resultados numéricos nos dois tamanhos de passo. Resolva analiticamente o PVI e compare com a solução numérica, obtendo o erro.*

**Solução:** *Com intuito de verificar a precisão da solução numérica calcula-se inicialmente a solução analítica do PVI.*

**Solução Analítica:** *Observa-se que a*

$$\frac{dy}{dx} + y = x + 2 \quad (2.0.7)$$

*é uma EDO Linear de Primeira Ordem onde  $P(x) = 1$  e  $f(x) = x + 2$ . Para obter a solução analítica existe a necessidade de encontrar o fator de integração, o qual é dado*

por

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\int P(x)dx} \\ \Rightarrow \mu(x) &= e^{\int 1dx} \\ \Rightarrow \mu(x) &= e^x\end{aligned}$$

Multiplicando (2.0.7) pelo fator de integração (ZILL; CULLEN, 2001), tem-se

$$\begin{aligned}e^x \left( \frac{dy}{dx} + y \right) &= e^x(x+2) \\ \Rightarrow \frac{d}{dx}(ye^x) &= xe^x + 2e^x \\ \Rightarrow \int \frac{d}{dx}(ye^x) dx &= \int (xe^x + 2e^x) dx \\ \Rightarrow ye^x &= \int xe^x dx + 2e^x + C\end{aligned}$$

Para calcular a integral é necessário aplicar a integração por partes. Considerando

$$\begin{aligned}u &= x \quad \Rightarrow \quad du = 1dx \\ dv &= e^x dx \quad \Rightarrow \quad v = e^x\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}ye^x &= xe^x - \int e^x dx + 2e^x + C \\ \Rightarrow ye^x &= xe^x - e^x + 2e^x + C \\ \Rightarrow y &= \frac{xe^x + e^x + C}{e^x} \\ \Rightarrow y &= x + 1 + Ce^{-x} \\ \Rightarrow y &= Ce^{-x} + x + 1\end{aligned}$$

Para encontrar o valor da constante  $C$  utiliza-se a condição inicial,  $y(0) = 2$ . Como

$$\begin{aligned}y(x) &= Ce^{-x} + x + 1 \\ \Rightarrow y(0) &= Ce^{-0} + 0 + 1 \\ \Rightarrow 2 &= Ce^0 + 1 \\ \Rightarrow 2 &= C1 + 1 \\ \Rightarrow C &= 2 - 1 \\ \Rightarrow C &= 1\end{aligned}$$

portanto a solução analítica do PVI dado é  $y(x) = e^{-x} + x + 1$ .

**Solução Numérica:** Para obter a solução numérica aplica-se o Método de Taylor de ordem 3,

o qual é dado por (2.0.5) com  $q = 3$ , isto é

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}y''_n + \frac{h^3}{6}y'''_n . \quad (2.0.8)$$

Para calcular os valores de  $y_n$ , deve-se avaliar  $f$  e suas derivadas em torno de  $(x_n; y_n)$  no intervalo  $[0; 0,5]$  onde deseja-se obter a solução do PVI.

Ao observar o PVI (2.0.6), tem-se

$$y'(x_n) = f(x_n; y(x_n)) = -y(x_n) + x_n + 2.$$

Segue que  $y'_n = f(x_n; y_n) = -y_n + x_n + 2$  onde  $y'_n \cong y'(x_n)$  e  $f_n(x_n; y_n) \cong f(x_n; y(x_n))$ .

Para aplicar o Método precisa-se obter as derivadas de até terceira ordem.

$$\begin{aligned} y'_n &= f_n \\ &= -y_n + x_n + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''_n &= (y'_n)' \\ &= f_{nx_n} + f_{ny_n}f_n \\ &= 1 + (-1)(-y_n + x_n + 2) \\ &= y_n - x_n - 1 \end{aligned} \quad (2.0.9)$$

$$\begin{aligned} y'''_n &= (y''_n)' \\ &= -1 + (1)(-y_n + x_n + 2) \\ &= -y_n + x_n + 1. \end{aligned}$$

Fazendo  $n = 0$  em (2.0.8), obtém-se

$$y_1 = y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2}y''_0 + \frac{h^3}{6}y'''_0,$$

onde  $y_0 = 2$ ,  $x_0 = 0$  e  $h = 0,1$ . Para obter  $y'_0$ ,  $y''_0$  e  $y'''_0$ , substitui-se  $n = 0$  em (2.0.9). De fato, tem-se

$$\begin{aligned} y'_0 &= -y_0 + x_0 + 2 \\ &= -2 + 0 + 2 \quad , \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_0'' &= y_0 - x_0 - 1 \\ &= 2 - 0 - 1 \quad , \\ &= 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_0''' &= -y_0 + x_0 + 1 \\ &= -2 + 0 + 1 \quad . \\ &= -1 \end{aligned}$$

*Logo,*

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2}y_0'' + \frac{h^3}{6}y_0''' \\ &= 2 + (0,1)(0) + \frac{(0,1)^2}{2}(1) + \frac{(0,1)^3}{6}(-1) \cdot \\ &= 2,00483 \end{aligned}$$

*Fazendo agora  $n = 1$  em (2.0.8), obtém-se*

$$y_2 = y_1 + hy_1' + \frac{h^2}{2}y_1'' + \frac{h^3}{6}y_1''' ,$$

onde  $y_1 = 2,00483$ ,  $x_1 = 0,1$  e  $h = 0,1$ . Para obter  $y_1'$ ,  $y_1''$  e  $y_1'''$ , substitui-se  $n = 1$  em (2.0.9). De fato, tem-se

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + x_1 + 2 \\ &= -2,0048 + 0,1 + 2 \quad , \\ &= 0,0952 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_1'' &= y_1 - x_1 - 1 \\ &= 2,0048 - 0,1 - 1 \quad , \\ &= 0,9048 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_1''' &= -y_1 + x_1 + 1 \\ &= -2,0048 + 0,1 + 1 \quad . \\ &= -0,9048 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + hy'_1 + \frac{h^2}{2}y''_1 + \frac{h^3}{6}y'''_1 \\ &= 2,0048 + (0,1)(0,0952) + \frac{(0,1)^2}{2}(0,9048) + \frac{(0,1)^3}{6}(-0,9048) \cdot \\ &= 2,01869 \end{aligned}$$

Fazendo  $n = 2$  em (2.0.8), obtém-se

$$y_3 = y_2 + hy'_2 + \frac{h^2}{2}y''_2 + \frac{h^3}{6}y'''_2,$$

onde  $y_2 = 2,01869$ ,  $x_2 = 0,2$  e  $h = 0,1$ . Para obter  $y'_2$ ,  $y''_2$  e  $y'''_2$ , substitui-se  $n = 2$  em (2.0.9). De fato, tem-se

$$\begin{aligned} y'_2 &= -y_2 + x_2 + 2 \\ &= -2,0187 + 0,2 + 2, \\ &= 0,1813 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y''_2 &= y_2 - x_2 - 1 \\ &= 2,0187 - 0,2 - 1, \\ &= 0,8187 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y'''_2 &= -y_2 + x_2 + 1 \\ &= -2,0187 + 0,2 + 1 \cdot \\ &= -0,8187 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + hy'_2 + \frac{h^2}{2}y''_2 + \frac{h^3}{6}y'''_2 \\ &= 2,0187 + (0,1)(0,1813) + \frac{(0,1)^2}{2}(0,8187) + \frac{(0,1)^3}{6}(-0,8187) \cdot \\ &= 2,04078 \end{aligned}$$

Substituindo  $n = 3$  em (2.0.8), obtém-se

$$y_4 = y_3 + hy'_3 + \frac{h^2}{2}y''_3 + \frac{h^3}{6}y'''_3,$$

onde  $y_3 = 2,04078$ ,  $x_3 = 0,3$  e  $h = 0,1$ . Para obter  $y'_3$ ,  $y''_3$  e  $y'''_3$ , substitui-se  $n = 3$  em

(2.0.9). De fato, tem-se

$$\begin{aligned} y_3' &= -y_3 + x_3 + 2 \\ &= -2,0408 + 0,3 + 2 , \\ &= 0,2592 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_3'' &= y_3 - x_3 - 1 \\ &= 2,0408 - 0,3 - 1 , \\ &= 0,7408 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_3''' &= -y_3 + x_3 + 1 \\ &= -2,0408 + 0,3 + 1 . \\ &= -0,7408 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_4 &= y_3 + hy_3' + \frac{h^2}{2}y_3'' + \frac{h^3}{6}y_3''' \\ &= 2,0408 + (0,1)(0,2592) + \frac{(0,1)^2}{2}(0,7408) + \frac{(0,1)^3}{6}(-0,7408) \cdot \\ &= 2,07030 \end{aligned}$$

Finalmente, substituindo  $n = 4$  em (2.0.8), obtém-se

$$y_5 = y_4 + hy_4' + \frac{h^2}{2}y_4'' + \frac{h^3}{6}y_4''' ,$$

onde  $y_4 = 2,07030$ ,  $x_4 = 0,4$  e  $h = 0,1$ . Para obter  $y_4'$ ,  $y_4''$  e  $y_4'''$ , substitui-se  $n = 4$  em (2.0.9). De fato, tem-se

$$\begin{aligned} y_4' &= -y_4 + x_4 + 2 \\ &= -2,0703 + 0,4 + 2 , \\ &= 0,3297 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_4'' &= y_4 - x_4 - 1 \\ &= 2,0703 - 0,4 - 1 , \\ &= 0,6703 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_4''' &= -y_4 + x_4 + 1 \\ &= -2,0703 + 0,4 + 1 \cdot \\ &= -0,6703 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_5 &= y_4 + hy_4' + \frac{h^2}{2}y_4'' + \frac{h^3}{6}y_4''' \\ &= 2,0703 + (0,1)(0,3297) + \frac{(0,1)^2}{2}(0,6703) + \frac{(0,1)^3}{6}(-0,6703) \cdot \\ &= 2,10650 \end{aligned}$$

A partir da solução analítica  $y_n(x_n) = e^{-x_n} + x_n + 1$  obtém-se os valores verdadeiros, considerando até a quinta casa decimal,

$$\begin{aligned} y_0(x_0) &= e^{-x_0} + x_0 + 1 \Rightarrow y_0(0,0) = e^{-0,0} + 0,0 + 1 = 2,00000 \\ y_1(x_1) &= e^{-x_1} + x_1 + 1 \Rightarrow y_1(0,1) = e^{-0,1} + 0,1 + 1 = 2,00484 \\ y_2(x_2) &= e^{-x_2} + x_2 + 1 \Rightarrow y_2(0,2) = e^{-0,2} + 0,2 + 1 = 2,01873 \\ y_3(x_3) &= e^{-x_3} + x_3 + 1 \Rightarrow y_3(0,3) = e^{-0,3} + 0,3 + 1 = 2,04082 \cdot \\ y_4(x_4) &= e^{-x_4} + x_4 + 1 \Rightarrow y_4(0,4) = e^{-0,4} + 0,4 + 1 = 2,07032 \\ y_5(x_5) &= e^{-x_5} + x_5 + 1 \Rightarrow y_5(0,5) = e^{-0,5} + 0,5 + 1 = 2,10653 \end{aligned}$$

Através dos cálculos

$$\mathbf{erro\ absoluto} = |\text{valor verdadeiro} - \text{aproximação}| \cdot$$

e

$$\mathbf{erro\ percentual} = \frac{\text{erro absoluto}}{|\text{valor verdadeiro}|} \times 100 \cdot$$

obtem-se a tabela que expressa a comparação entre os valores aproximados  $y_n$  e os valores verdadeiros  $y(x_n)$ , bem como o percentual de erro de aproximação.



**Tabela 1: Método de Taylor de 3ª ordem com  $h = 0,1$** 

$x_n$	$y_n$	Valor verdadeiro	Erro absoluto	Erro Percentual
0,00	2,00000	2,00000	0,00000	0,0000
0,10	2,00483	2,00484	0,00001	0,0005
0,20	2,01869	2,01873	0,00004	0,0020
0,30	2,04078	2,04082	0,00004	0,0020
0,40	2,07030	2,07032	0,00002	0,0010
0,50	2,10650	2,10653	0,00003	0,0014

**Fonte: Autoria Própria**

*De forma análoga, calcula-se a solução com o passo  $h = 0,05$ . No entanto, para uma maior agilidade utiliza-se o software Maple 16.*

*Para implementar o Método de Taylor de Ordem 3, é necessário definir a segunda e terceira derivada, faz-se isso a partir da primeira, que é conhecida. Inicia-se o processo definindo para o software a função  $f$  desejada, optou-se por escolher as letras  $a$  para representar  $x$ ,  $b$  para representar  $y$ .*

```
yLinha := (a, b) -> -b + a + 2;
```

$$yLinha := (a, b) \rightarrow -b + a + 2$$

```
subs(diff(b(a), a) = yLinha(a, b), diff(yLinha(a, b(a)), a));
```

$$b - a - 1$$

```
yDuasLinhas := (a, b) -> b - a - 1
```

$$yDuasLinhas := (a, b) \rightarrow b - a - 1$$

```
subs(diff(b(a), a) = yLinha(a, b), diff(yDuasLinhas(a, b(a)), a));
```

$$-b + a + 1$$

```
yTresLinhas := (a, b) -> -b + a + 1;
```

$$yTresLinhas := (a, b) \rightarrow -b + a + 1$$

Após as definições, implementa-se o Método

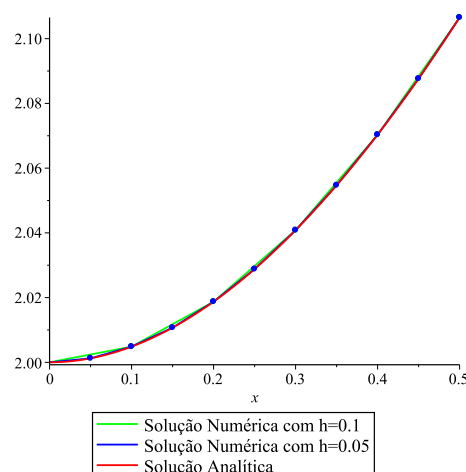
```
Taylor3:=proc(xmin,xmax,N)
local i:
global x,y:
  h:=abs(xmax-xmin)/N;
  for i from 1 to N do
    x[i]:=x[i-1]+h:
    y[i]:=y[i-1]+
      h*yLinha(x[i-1],y[i-1])+
      (h^2/2)*yDuasLinhas(x[i-1],y[i-1])+
      (h^3/6)*yTresLinhas(x[i-1],y[i-1]):
  end do:
end proc:
```

A tabela de resultados para  $h = 0,05$  é da seguinte forma

	“x[n]”	“y[n]”	“Analítica”	“Erro Abs”	“Erro Per”
TabelaErro:=	0.100000000	2.004836928	2.004837418	0.000000490	0.00002444088461
	0.200000000	2.018729866	2.018730753	0.000000887	0.00004393849941
	0.300000000	2.040817017	2.040818221	0.000001204	0.00005899594523
	0.400000000	2.070318592	2.070320046	0.000001454	0.00007023068742
	0.500000000	2.106529014	2.106530660	0.000001646	0.00007813795599

Para melhor entendimento observa-se o gráfico obtido, que apresenta as curvas das soluções numéricas com os passos  $h = 0,1$  e  $h = 0,05$  e da solução analítica.

```
display(
  Numerical,
  Numerica2,
  Analitica,
  Pontos1,
  Pontos2
);
```



Conclui-se que uma aproximação para  $y(0,5)$  com o tamanho do passo  $h = 0,1$  é 2,10650. Já para o passo  $h = 0,05$  a aproximação é de 2.106529014.

Observe que nem sempre se pode aplicar o Método de Taylor de ordem  $q$ , com  $q$  qualquer, como pode ser observado no próximo exemplo.

**Exemplo 2.2** *Dado o PVI*

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

verifique se é possível aplicar o Método de Taylor de ordem 3.

**Solução Numérica:** O Método de Taylor de ordem 3 é dado por (2.0.8). Inicialmente calcula-se as derivadas da  $f$ . Tem-se

$$y' = y^{\frac{1}{3}},$$

e

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d}{dx}(y^{\frac{1}{3}}) \\ &= \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{y}} \end{aligned}$$

Observa-se que a derivada segunda de  $y$  não existe para  $y_0 = 0$ . Assim, não é possível utilizar o Método de Taylor com  $q = 3$ .

Conclui-se, que as desvantagens do Método de Taylor de ordem  $q$  estão em calcular as derivadas da função  $f$  e avaliá-las nos pontos  $(x_n, y_n)$  a cada passo.

### 3 MÉTODOS LINEARES DE PASSO MÚLTIPLO

Nesse capítulo apresenta-se **Métodos Lineares de Passo Múltiplo** ou **Método de k-passos**, para resolver o PVI (1.1.2) (BURDEN; FAIRES, 2003).

**Definição 3.1** *Um método linear de passo múltiplo é definido pela seguinte relação*

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}, \quad (3.0.1)$$

onde  $\alpha_j$  e  $\beta_j$  são constantes arbitrárias independentes de  $n$ , com  $\alpha_k \neq 0$ ,  $h$  o tamanho do passo,  $\alpha_0$  e  $\beta_0$  não ambos nulos.

Seja  $\alpha_k = 1$ , o método (3.0.1) é **explícito** se  $\beta_k = 0$  e **implícito** se  $\beta_k \neq 0$ .

Os Métodos de Passo Múltiplo podem ser obtidos de várias maneiras, segue algumas técnicas de como obter tais métodos.

#### 3.1 OBTIDOS DO DESENVOLVIMENTO DE TAYLOR

Descreve-se aqui como obter Métodos Lineares de Passo Múltiplo para resolver o PVI, baseados no desenvolvimento da solução exata do PVI em série de Taylor. Novamente, a função  $f$  pode ser linear ou não, admitindo que  $f$  seja contínua e suficientemente derivável em relação a  $x$  e  $y$ .

### 3.1.1 Método de Euler

O método mais simples de Passo Múltiplo, ou ainda, **método explícito de 1-passo**, onde  $k = 1$  é obtido considerando  $\alpha_0 = -1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\beta_0 = 1$  e  $\beta_1 = 0$  em (3.0.1). Tem-se,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^1 \alpha_j y_{n+j} &= h \sum_{j=0}^1 \beta_j f_{n+j} \\ \Rightarrow \alpha_0 y_{n+0} + \alpha_1 y_{n+1} &= h(\beta_0 f_{n+0} + \beta_1 f_{n+1}) . \\ \Rightarrow (-1)y_n + (1)y_{n+1} &= h(1f_{n+0} + 0f_{n+1}) \\ \Rightarrow y_{n+1} &= y_n + hf_n \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Esse método é chamado **Método de Euler**. Observa-se que esse é o **Método de Taylor de ordem  $q$**  dado por (2.0.5) com  $q = 1$ .

**Exemplo 3.1** *Aplique o Método de Euler, para resolver o PVI do Exemplo (2.1). Obtendo uma aproximação de  $y(0,5)$  com  $h = 0,1$ . Resolva também para  $h = 0,05$  e compare os resultados numéricos obtidos nos dois tamanhos de passo com a solução analítica do PVI.*

**Solução Numérica:** *Considerando o PVI (2.1) e substituindo  $f(x_n; y_n) = -y_n + x_n + 2$  em (3.1.2), tem-se*

$$y_{n+1} = y_n + h(-y_n + x_n + 2) . \quad (3.1.3)$$

*Fazendo  $n = 0$  em (3.1.3), obtém-se*

$$y_1 = y_0 + h(-y_0 + x_0 + 2) ,$$

*onde  $y_0 = 2$ ,  $x_0 = 0$  e  $h = 0,1$ . Logo*

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h(-y_0 + x_0 + 2) \\ &= 2 + (0,1)(-2 + 0 + 2) \\ &= 2 + (0,1)(0) \\ &= 2 \end{aligned} .$$

*Fazendo  $n = 1$  em (3.1.3), obtém-se*

$$y_2 = y_1 + h(-y_1 + x_1 + 2) ,$$

onde  $y_1 = 2$ ,  $x_1 = 0,1$  e  $h = 0,1$ , daí

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + h(-y_1 + x_1 + 2) \\ &= 2 + (0,1)(-2 + 0,1 + 2) \\ &= 2 + (0,1)(0,1) \\ &= 2,01 \end{aligned}$$

Fazendo  $n = 2$  em (3.1.3), obtém-se

$$y_3 = y_2 + h(-y_2 + x_2 + 2) ,$$

onde  $y_2 = 2,01$ ,  $x_2 = 0,2$  e  $h = 0,1$ . Logo

$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + h(-y_2 + x_2 + 2) \\ &= 2,01 + (0,1)(-2,01 + 0,2 + 2) \\ &= 2,01 + (0,1)(0,19) \\ &= 2,01 + 0,019 \\ &= 2,029 \end{aligned}$$

De forma análoga obtém-se os resultados para  $y_4$  e  $y_5$ . A partir dos cálculos de erro absoluto e erro percentual constrói-se a tabela que expressa a comparação entre os valores aproximados  $y_n$  com os valores verdadeiros  $y(x_n)$ , calculados no Exemplo (2.1).

**Tabela 2: Método de Euler com  $h = 0,1$**

$x_n$	$y_n$	Valor verdadeiro	Erro absoluto	Erro percentual
0,00	2,0000	2,0000	0,0000	0,0000
0,10	2,0000	2,0048	0,0048	0,2394
0,20	2,0100	2,0187	0,0087	0,4310
0,30	2,0290	2,0408	0,0118	0,5782
0,40	2,0561	2,0703	0,0142	0,6859
0,50	2,0905	2,1065	0,0160	0,7595

**Fonte: Autoria Própria**

De forma análoga, calcula-se a solução com o passo  $h = 0,05$ . No entanto, para uma maior agilidade utiliza-se o software Maple 16.

Nas seguintes linhas, podem ser vistos os primeiros comandos utilizados para o cálculo dos

valores, criação das tabelas e plotagem dos gráficos:

- O comando `restart` reinicia todas as variáveis utilizadas pelos servidores do Maple;
- Alguns pacotes são carregados por meio do comando `with(...)`;
- Define-se uma função  $F$ , com a solução analítica;
- Por fim, determina-se os valores iniciais para  $x$  e  $y$ .

```
> restart;
> with(plots, implicitplot):
> with(plots):
> with(DETools):
> yLinha := proc (x, y) options operator, arrow; -y+x+2 end proc:
```

$$yLinha := (x, y) \rightarrow -y + x + 2$$

```
> F:=x->1+x+exp^(-x)
```

$$F := x \rightarrow 1 + x + e^{-x}$$

```
x[0]:=0.
```

$$x_0 := 0.0000$$

```
y[0]:=2.
```

$$y_0 := 2.0000$$

O código seguinte é a implementação computacional do modelo teórico discutido para este método. As variáveis de entrada são, o valor mínimo e máximo do intervalo em  $x$  e o tamanho do passo que será dado durante a resolução,  $h$ . Os valores de  $x$  e  $y$  obtidos são alocados no vetor variável  $x[i]$  e  $y[i]$ .

```
Euler:=proc(xmin,xmax,N)
local i:
global x,y:
h := abs(xmax-xmin)/N;
for i from 1 to N do
x[i] := x[i-1]+h:
y[i] := evalf(y[i-1]+h*yLinha(x[i-1],y[i-1]]):
end do:
end proc:
```

Com o procedimento definido, pode-se utilizá-lo com os valores de entrada,  $x$  inicial,  $x$  final e o número de passos, escolhidos.

```
Euler(0, .5, 5):
```

Com a obtenção dos valores, se desejar criar uma tabela para comparação, quando for possível obter a solução analítica do PVI dado, pode-se criar um procedimento computacional para apresentação organizada destes valores, os códigos adiante apresentam uma ideia para esta implementação onde:

- Inicialmente determina-se a quantidade de linhas e colunas da matriz, neste caso, 6 e 5 respectivamente;
- Após isso, inicia-se a definição, por meio de uma sequência na qual  $i$  varia entre 1 e 5, dos elementos da matriz para isso:
  - A primeira coluna são os valores do domínio, definido pelo comando  $x[i]$ ;
  - A segunda coluna é composta pelos resultados da solução numérica obtida anteriormente, cujos valores são acessados pelo comando  $y[i]$ ;
  - A terceira coluna constitui-se dos valores obtidos por meio da solução analítica, que foi definida como a função  $F$ , anteriormente, para o cálculo, utiliza-se o comando  $F(0.1*i)$ ;
  - A quarta coluna contém os valores para o erro absoluto, obtidos pelo comando  $abs(F(.1*i)-y[i])$ ;
  - Por fim, o erro relativo é exposto na quinta coluna, e calculado por meio do comando  $100*abs((y[i]-F(.1*i))/F(.1*i))$ ;

```
TabelaErro := Matrix(
  N+1, 5, [
    ["x[n]",
     "y[n]",
     "Analítica",
     "Erro Absoluto",
     "Erro Percentual"
    ],
    seq(
      [x[i],
       y[i],
       evalf(F(i*h)),
       evalF(abs(F(i*h)-y[i])),
       evalf(100*abs((F(i*h)-y[i])/F(i*h)))]
      ,
      i = 1 .. N
    )
  );
```

Obtendo como resultado, os seguintes valores

	"x[n]"	"y[n]"	"Analítica"	"Erro Abs"	"Erro Per"
TabelaErro:=	0.100000000	2.000000000	2.004837418	0.004837418	0.2412872962
	0.200000000	2.010000000	2.018730753	0.008730753	0.4324872441
	0.300000000	2.029000000	2.040818221	0.011818221	0.5790922914
	0.400000000	2.056100000	2.070320046	0.014220046	0.6868525486
	0.500000000	2.090490000	2.106530660	0.016040660	0.7614728950

Após isso, define-se agora, um conjunto de comandos para alocar na variável desejada, o gráfico da solução obtida, estes comandos definem um gráfico que consiste da ligação dos pontos obtidos da solução numérica, para isso, utiliza-se o comando `pointplot` com as seguintes opções:



- *Inicialmente define-se uma lista de pontos que é constituída pelos pontos advindos da sequência, com  $i$  variando de 0 a 5, determinada com o comando `seq`, assim, tem-se*
  - $x[i]$ , os valores para  $x$ ;
  - $y[i]$ , os valores para  $y(x)$ .
- *A cor é definida pela opção `color`;*
- *Os pontos são ligados pela ativação da opção `connect`;*
- *A legenda é dada pela opção `legend`.*

```
Numerical := pointplot(
  [
    seq(
      [x[i], y[i]],
      i = 0 .. N
    )
  ],
  color = green,
  connect = true,
  legend = "Solução Numérica com h=0.1"
);
```

*Numerical:=PLOT(...)*

*Pode-se também definir um comando para obter um gráfico constituído somente dos pontos oriundos da solução numérica. Seja o mesmo comando descrito anteriormente, que difere apenas na conexão dos pontos, que não é realizada, e o símbolo que foi atribuído aos pontos com a opção `symbol`.*

```
Pontos1 := pointplot(
  [
    seq(
      [x[i], y[i]],
      i = 1 .. N
    )
  ],
  color = green,
  symbol = solidcircle
);
```

*Pontos1:=PLOT(...)*

*Com os procedimentos e comandos já definidos, o Método de Euler pode ser aplicado para outros valores distintos de  $h$  e/ou intervalos diferentes no eixo  $x$ . A título de exemplo, apresentam-se os comandos utilizados para a criação de uma tabela de resultados obtidos com o cálculo realizado para  $h = 0.05$ , os resultados advindos dos comandos discutidos anteriormente serão visualizados adiante.*

```
Euler(0, .5, 10):
```

```
TabelaErro := ComandoParaCalculoDaTabela;
```

$$TabelaErro := \begin{bmatrix} \text{"x[n]"} & \text{"y[n]"} & \text{"Analítica"} & \text{"Erro Abs"} & \text{"Erro Per"} \\ 0.100000000 & 2.00250000 & 2.004837418 & 0.002337418 & 0.1165889054 \\ 0.200000000 & 2.01450625 & 2.018730753 & 0.004224503 & 0.2092653017 \\ 0.300000000 & 2.035091891 & 2.040818221 & 0.005726330 & 0.2805899095 \\ 0.400000000 & 2.063420431 & 2.070320046 & 0.006899615 & 0.3332632079 \\ 0.500000000 & 2.098736939 & 2.106530660 & 0.007793721 & 0.3699789967 \end{bmatrix}$$

```
Numerica2 := GráficoDaSoluçãoNuméricaEmLinha;
```

*Numerica2:=PLOT(...)*

```
Pontos2 := GráficoDaSoluçãoNuméricaEmPontos;
```

*Pontos2:=PLOT(...)*

*Além disso, para melhor efeito comparativo, plota-se também o gráfico da solução analítica atribuindo-se à variável Analitica o comando plot com as opções:*

- *A função f é definida inicialmente;*
- *A opção x=0..0.5 define o intervalo do domínio que será plotado;*
- *A cor e a legenda são escolhidas pelas opções color e legend.*

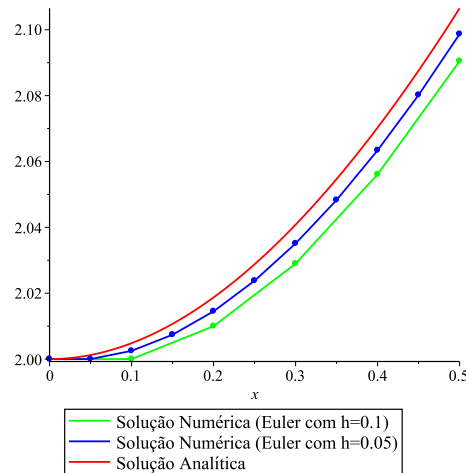
*Observe a seguir o comando atribuído ao software Maple 16*

```
Analitica := plot(
  F(x),
  x = xmin .. xmax,
  color = red,
  legend = "Solução Analítica"
);
```

*Analitica:=PLOT(...)*

*Os gráficos definidos anteriormente, com os comandos já descritos, podem ser apresentados, todos nos mesmos eixos coordenados, por meio do comando display. Apresenta-se a sintaxe do código junto à seu resultado*

```
display(
  Numerica1,
  Numerica2,
  Analitica,
  Pontos1,
  Pontos2
);
```



Conclui-se então, que uma aproximação para  $y(0,5)$  com o tamanho do passo  $h = 0,1$  é 2,0905. Já para o passo  $h = 0,05$  a aproximação é de 2.098736939.

■

Como pode ser observado os resultados obtidos pelo Método de Euler não são de boa qualidade. Em geral, o Método de Euler tem, na verdade, mais importância teórica do que prática. É necessário então estabelecer métodos mais precisos.

### 3.1.2 Método da Regra do Ponto Médio

Considere agora o desenvolvimento de  $y(x_n + h)$  e  $y(x_n - h)$  em série de Taylor em torno do ponto  $x_n$ , isto é:

$$\begin{aligned} y(x_n + h) &= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + \dots, \\ y(x_n - h) &= y(x_n) - hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) - \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + \dots \end{aligned}$$

Calculando  $y(x_n + h) - y(x_n - h)$ , obtém-se

$$y(x_n + h) - y(x_n - h) = 2hy'(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + \dots,$$

Considerando apenas o primeiro termo do lado direito da expansão acima e substituindo  $y(x_n + h)$  por  $y_{n+1}$ ,  $y(x_n - h)$  por  $y_{n-1}$  e  $y'(x_n)$  por  $f_n$ , tem-se

$$y_{n+1} - y_{n-1} = 2hy'_n. \quad (3.1.4)$$

Substituindo  $n$  por  $n + 1$  em (3.1.4), obtém-se

$$y_{n+2} = y_n + 2hy'_{n+1} \quad (3.1.5)$$

que é chamado **Método da Regra do Ponto Médio**. Esse é um **método explícito de 2-passos**, ou seja, como  $k = 2$  considerando  $\alpha_0 = -1$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\beta_0 = 0$ ,  $\beta_1 = 2$  e  $\beta_2 = 0$  em (3.0.1), obtém-se

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^2 \alpha_j y_{n+j} &= h \sum_{j=0}^2 \beta_j f_{n+j} \\ \Rightarrow \alpha_0 y_{n+0} + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_2 y_{n+2} &= h(\beta_0 f_{n+0} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_2 f_{n+2}) \\ \Rightarrow (-1)y_n + (0)y_{n+1} + (1)y_{n+2} &= h[(0)f_{n+0} + (2)f_{n+1} + (0)f_{n+2}] \\ \Rightarrow y_{n+2} &= y_n + 2h(f_{n+1}) \\ \Rightarrow y_{n+2} &= y_n + 2hy'_{n+1} \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Observe que para resolver um PVI usando um método explícito de 2-passos, como é o caso do Método da Regra do Ponto Médio, deve-se ter disponíveis além do valor de  $y_0$ , o valor de  $y_1$ . Assim, o valor de  $y_1$  deve ser obtido de alguma outra forma, por exemplo, usando Método de Taylor de ordem 2, o que pode ser observado no Exemplo (3.2).

**Exemplo 3.2** *Aplique a Regra do Ponto Médio para resolver o PVI do Exemplo (2.1). Para calcular os valores iniciais necessários use o Método de Taylor de ordem 2. Obtenha uma aproximação de  $y(0,5)$  com  $h = 0,1$ . Resolva também para  $h = 0,05$  e compare os resultados numéricos obtidos nos dois tamanhos de passo com a solução exata do PVI.*

**Solução Numérica:** *Deseja-se obter a solução numérica do PVI do Exemplo (2.1) onde  $y_0 = 2$ ,  $x_0 = 0$  e  $y'_n = -y_n + x_n + 2$ , utilizando-se do Método da Regra do Ponto Médio. Para isso, é necessário obter o valor de  $y'_1$ , o qual será calculado após ter obtido o valor de  $y_1$  que será dado por meio do Método de Taylor de ordem 2 que é obtido por (2.0.5), com  $q = 2$ , isto é*

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}y''_n \quad (3.1.7)$$

*Para calcular o valor de  $y_1$  é necessário utilizar os valores de  $y'_0$  e  $y''_0$  que já foram calculados no Exemplo (2.1). Para isso, basta fazer  $n = 0$  em (3.1.7), obtendo*

$$y_1 = y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2}y''_0,$$

e sabendo que  $y_0 = 2$ ,  $y'_0 = 0$ ,  $y''_0 = 1$  e  $h = 0,1$ , tem-se

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2}y''_0 \\ &= 2 + (0,1)(0) + \frac{(0,1)^2}{2}(1) , \\ &= 2 + (0,005) \\ &= 2,0050 \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} y'_1 &= f_1(x_1; y_1) \\ &= -y_1 + x_1 + 2 \\ &= -2,0050 + 0,1 + 2 \\ &= 0,0950 \end{aligned}$$

Agora, substituindo  $n = 0$ ,  $y_0 = 2$ ,  $h = 0,1$  e  $y'_1 = 0,0950$  em (3.1.5), obtém-se

$$\begin{aligned} y_{0+2} &= y_0 + 2hy'_{0+1} \\ y_2 &= y_0 + 2hy'_1 \\ &= 2 + 2(0,1)(0,0950) . \\ &= 2 + 0,0190 \\ &= 2,0190 \end{aligned}$$

Procedendo dessa forma, calcula-se  $y_3$ . De fato

$$\begin{aligned} y'_2 &= f_2(x_2; y_2) \\ &= -y_2 + x_2 + 2 \\ &= -2,0190 + 0,2 + 2 \\ &= 0,1810 \end{aligned}$$

e considerando  $n = 1$ ,  $y_1 = 2,0050$  e  $y'_2 = 0,1810$  em (3.1.5), obtém-se

$$\begin{aligned} y_{1+2} &= y_1 + 2hy'_{1+1} \\ y_3 &= y_1 + 2hy'_2 \\ &= 2,0050 + 2(0,1)(0,1810) . \\ &= 2,0050 + 0,0362 \\ &= 2,0412 \end{aligned}$$

De forma análoga obtém-se os valores para  $y_4$  e  $y_5$ . A partir dos cálculos de erro absoluto e erro percentual obtém-se a tabela que expressa a comparação entre os valores aproximados

$y_n$  com os valores verdadeiros  $y(x_n)$  calculados no Exemplo (2.1).

**Tabela 3: Regra do Ponto Médio com  $h = 0,1$**

$x_n$	$y_n$	Valor verdadeiro	Erro absoluto	Erro percentual
0,00	2,0000	2,0000	0,0000	0,0000
0,10	2,0050	2,0048	0,0002	0,0010
0,20	2,0190	2,0187	0,0003	0,0149
0,30	2,0412	2,0408	0,0004	0,0196
0,40	2,0708	2,0703	0,0005	0,0242
0,50	2,1071	2,1065	0,0006	0,0285

**Fonte: Autoria Própria**

De forma análoga, calcula-se a solução com o passo  $h = 0,05$ . No entanto, para uma maior agilidade utiliza-se o software Maple 16, para isso, um procedimento para o cálculo dos valores utilizando este método foi necessário, como pode ser observado

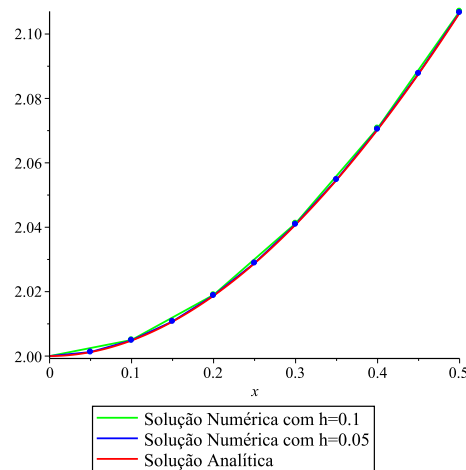
```
PontoMedio:=proc(xmin,xmax,N)
local i:
global x,y:
h:=abs(xmax-xmin)/N;
#===== Taylor de Ordem 2
y[1]:=evalf(y[0]+h*yLinha(x[0],y[0])+h^2/2*y[0]^0):
x[1]:=x[0]+h:
#=====
for i from 2 to N do
x[i]:=x[i-1]+h:
y[i]:=evalf(y[i-2]+2*h*yLinha(x[i-1],y[i-1])):
end do:
end proc:
```

Esse procedimento dá como resultado a seguinte tabela e gráficos, quando  $h = 0.05$  :

	“x[n]”	“y[n]”	“Analítica”	“Erro Abs”	“Erro Per”
TabelaErro:=	0.100000000	2.004875000	2.004837418	0.000037582	0.001874565970
	0.200000000	2.018798750	2.018730753	0.000067997	0.003368304560
	0.300000000	2.040910488	2.040818221	0.000092267	0.004521078803
	0.400000000	2.070431330	2.070320046	0.000111284	0.005375207578
	0.500000000	2.106656486	2.106530660	0.000125826	0.005973138791

Para melhor entendimento observa-se as curvas das soluções numéricas com os passos  $h = 0,1$  e  $h = 0,05$  e da solução analítica.

```
display(
Numerical1,
Numerica2,
Analitica,
Pontos1,
Pontos2
);
```



Conclui-se que uma aproximação para  $y(0,5)$  com o tamanho do passo  $h = 0,1$  é 2,1071. Já para o passo  $h = 0,05$  a aproximação é de 2.106656486.

■

### 3.2 OBTIDOS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Descreve-se aqui como obter métodos lineares de passo múltiplo para resolver o PVI (1.1.2), obtidos a partir de fórmulas de integração numérica.

Integrando a Equações Diferenciais de primeira ordem, do PVI (1.1.2), de  $x_n$  até  $x_{n+k}$ , obtém-se

$$\int_{x_n}^{x_{n+k}} y'(x)dx = \int_{x_n}^{x_{n+k}} f(x; y(x))dx . \quad (3.2.8)$$

Agora, desde que o lado esquerdo de (3.2.8) pode ser integrado exatamente, segue que a solução satisfaz a identidade

$$y(x_{n+k}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+k}} f(x; y(x))dx , \quad (3.2.9)$$

para quaisquer dois pontos  $x_n$  e  $x_{n+k}$  em  $[a; b]$ . Assim, para diferentes valores de  $k$ , após aproximar a integral do lado direito de (3.2.9), obtém-se diferentes Métodos Lineares de Passo Múltiplo.

### 3.2.1 Método da Regra do Trapézio

Fazendo  $k = 1$  em (3.2.9), tem-se

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x; y(x)) dx, \quad (3.2.10)$$

e assim pode-se aplicar a Regra do Trapézio (FREITAS, 2000), dada por

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \cong \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)], \quad (3.2.11)$$

para calcular a integral em (3.2.10), desde que a mesma esteja sendo avaliada entre dois pontos consecutivos. Fazendo isso, segue que

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{h}{2} [f(x_n; y(x_n)) + f(x_{n+1}; y(x_{n+1}))]. \quad (3.2.12)$$

Substituindo  $y(x_n)$  e  $y(x_{n+1})$  por  $y_n$  e  $y_{n+1}$ , respectivamente, na equação (3.2.12), tem-se

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f_n + f_{n+1}], \quad (3.2.13)$$

que é chamado **Método da Regra do Trapézio**. Esse é um **método implícito de 1-passo**, ou seja, como  $k = 1$  considerando  $\alpha_0 = -1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\beta_0 = 1/2$  e  $\beta_1 = 1/2$  em (3.0.1), obtém-se

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^1 \alpha_j y_{n+j} &= h \sum_{j=0}^1 \beta_j f_{n+j} \\ \Rightarrow \alpha_0 y_{n+0} + \alpha_1 y_{n+1} &= h(\beta_0 f_{n+0} + \beta_1 f_{n+1}) \\ \Rightarrow (-1)y_n + (1)y_{n+1} &= h \left( \frac{1}{2} f_{n+0} + \frac{1}{2} f_{n+1} \right) \\ \Rightarrow y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} [f_n + f_{n+1}] \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Observe que, (3.2.13) é uma equação implícita para  $y_{n+1}$ , uma vez que  $y_{n+1}$  aparece como argumento no segundo membro. Se  $f(x; y)$  for uma função não linear, não se tem, em geral condições de resolver (3.2.13) em relação a  $y_{n+1}$  de uma forma exata. Assim métodos implícitos serão usados nos métodos do tipo “Previsor-Corretor” que serão descritos no Capítulo 4.

Visto que no Exemplo (2.1), a função  $f$  é linear, pode-se aplicar o Método da Regra do Trapézio para obter a solução numérica.

**Exemplo 3.3** *Aplice o Método da Regra do Trapézio para resolver o PVI do Exemplo (2.1). Obtenha uma aproximação de  $y(0,5)$  com  $h = 0,1$ . Resolva também para  $h = 0,05$  e compare os resultados numéricos obtidos nos dois tamanhos de passo com a solução analítica do PVI.*



**Solução Numérica:** Deseja-se obter a solução numérica do PVI do Exemplo (2.1) onde  $y_0 = 2$ ,  $x_0 = 0$  e  $y'_n = -y_n + x_n + 2$ , utilizando-se do Método da Regra do Trapézio. Para isso, tem-se

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} [-y_n + x_n + 2 - y_{n+1} + x_{n+1} + 2] \\
 \Rightarrow y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} [-y_{n+1}] + \frac{h}{2} [-y_n + x_n + x_{n+1} + 4] \\
 \Rightarrow y_{n+1} + y_{n+1} \left( \frac{h}{2} \right) &= y_n + \frac{h}{2} [x_n + x_{n+1} - y_n + 4] \\
 \Rightarrow y_{n+1} \left( 1 + \frac{h}{2} \right) &= y_n + \frac{h}{2} [x_n + x_{n+1} - y_n + 4] \\
 \Rightarrow y_{n+1} &= \frac{\left[ y_n + \frac{h}{2} [x_n + x_{n+1} - y_n + 4] \right]}{\left( 1 + \frac{h}{2} \right)} \\
 \Rightarrow y_{n+1} &= \frac{\left[ y_n + \frac{h}{2} [x_n + x_{n+1} - y_n + 4] \right]}{\left( 1 + \frac{h}{2} \right)}
 \end{aligned}$$

Se  $n = 0$ , tem-se

$$y_1 = \frac{\left[ y_0 + \frac{h}{2} [x_0 + x_1 - y_0 + 4] \right]}{\left( 1 + \frac{h}{2} \right)},$$

onde  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0,1$ ,  $y_0 = 2$  e  $h = 0,1$ . Segue que

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{2 + \frac{0,1}{2}(0 + 0,1 - 2 + 4)}{1 + \frac{0,1}{2}} \\ &= \frac{2 + (0,05)(2,1)}{1,05} \\ &= \frac{2,105}{1,05} \\ &= 2,0048 \end{aligned}$$

Agora considerando  $n = 1$ . Segue que

$$y_2 = \frac{\left[ y_1 + \frac{h}{2} [x_1 + x_2 - y_1 + 4] \right]}{\left( 1 + \frac{h}{2} \right)},$$

onde  $x_1 = 0,1$ ,  $x_2 = 0,2$ ,  $y_1 = 2,0048$  e  $h = 0,1$ . Segue que

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{2,0048 + \frac{0,1}{2}(0,1 + 0,2 - 2,0048 + 4)}{1 + \frac{0,1}{2}} \\ &= \frac{2,0048 + (0,05)(2,2952)}{1,05} \\ &= \frac{2,11956}{1,05} \\ &= 2,0186 \end{aligned}$$

Agora considerando  $n = 2$ , tem-se

$$y_3 = \frac{\left[ y_2 + \frac{h}{2} [x_2 + x_3 - y_2 + 4] \right]}{\left( 1 + \frac{h}{2} \right)},$$

onde  $x_2 = 0,2$ ,  $x_3 = 0,3$ ,  $y_2 = 2,0186$  e  $h = 0,1$ , segue que

$$\begin{aligned}
 y_3 &= \frac{2,0186 + \frac{0,1}{2}(0,2 + 0,3 - 2,0186 + 4)}{1 + \frac{0,1}{2}} \\
 &= \frac{2,0186 + (0,05)(2,4814)}{1,05} \\
 &= \frac{2,14267}{1,05} \\
 &= 2,0406
 \end{aligned}$$

De forma análoga obtém-se os valores para  $y_4$  e  $y_5$ . A partir dos cálculos de erro absoluto e erro percentual obtém-se a tabela que expressa a comparação entre os valores aproximados  $y_n$  com os valores verdadeiros  $y(x_n)$  calculados no Exemplo (2.1).

**Tabela 4: Método da Regra do Trapézio com  $h = 0,1$**

$x_n$	$y_n$	Valor verdadeiro	Erro absoluto	Erro percentual
0,00	2,0000	2,0000	0,0000	0,0000
0,10	2,0048	2,0048	0,0000	0,0000
0,20	2,0186	2,0187	0,0001	0,0050
0,30	2,0406	2,0408	0,0002	0,0098
0,40	2,0701	2,0703	0,0002	0,0097
0,50	2,1063	2,1065	0,0002	0,0095

**Fonte: Autoria Própria**

De forma análoga, calcula-se a solução com o passo  $h = 0,05$ . No entanto, para uma maior agilidade utiliza-se o software Maple 16. Segue o procedimento implementado para este exemplo.

```

Trapezio:=proc(xmin,xmax,N)
local i:
global x,y:
h:=abs(xmax-xmin)/N:
for i from 1 to N do
x[i]:=x[i-1]+h:
y[i]:=evalf((y[i-1]+(h/2)*(x[i-1]+x[i]-y[i-1]+4))/(1+h/2)):
end do:
end proc:

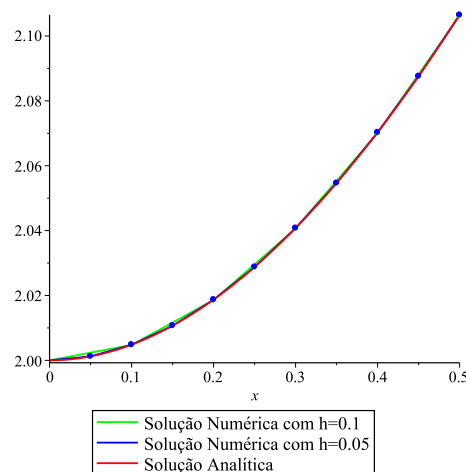
```

A tabela de resultados para  $h = 0,05$  é da seguinte forma

$$TabelaErro := \begin{bmatrix} \text{"x[n]"} & \text{"y[n]"} & \text{"Analítica"} & \text{"Erro Abs"} & \text{"Erro Per"} \\ 0.100000000 & 2.004875000 & 2.004837418 & 0.000037582 & 0.001874565970 \\ 0.200000000 & 2.018798750 & 2.018730753 & 0.000067997 & 0.003368304560 \\ 0.300000000 & 2.040910488 & 2.040818221 & 0.000092267 & 0.004521078803 \\ 0.400000000 & 2.070431330 & 2.070320046 & 0.000111284 & 0.005375207578 \\ 0.500000000 & 2.106656486 & 2.106530660 & 0.000125826 & 0.005973138791 \end{bmatrix}$$

Para melhor entendimento observa-se o gráfico obtido, que apresenta as curvas das soluções numéricas com os passos  $h = 0,1$  e  $h = 0,05$  e da solução analítica.

```
display(
  Numerical1,
  Numerica2,
  Analitica,
  Pontos1,
  Pontos2
);
```



Conclui-se que uma aproximação para  $y(0,5)$  com o tamanho do passo  $h = 0,1$  é 2,1063. Já para o passo  $h = 0,05$  a aproximação é de 2,106656486.

■

### 3.2.2 Método 1/3 de Simpson

Fazendo  $k = 2$  em (3.2.9), obtém-se

$$y(x_{n+2}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+2}} f(x; y(x)) dx,$$

e assim pode-se aplicar a Regra 1/3 de Simpson (FREITAS, 2000), dada por

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \cong \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)], \quad (3.2.15)$$

para calcular a integral na expressão acima desde que a mesma esteja sendo avaliada entre três pontos consecutivos. Fazendo isso, segue que

$$y(x_{n+2}) = y(x_n) + \frac{h}{3} [f(x_n; y(x_n)) + 4f(x_{n+1}; y(x_{n+1})) + f(x_{n+2}; y(x_{n+2}))],$$

e substituindo  $y(x_n)$ ,  $y(x_{n+1})$  e  $y(x_{n+2})$  por  $y_n$ ,  $y_{n+1}$  e  $y_{n+2}$ , respectivamente, e como no caso anterior, obtém-se

$$y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3} [f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2}], \quad (3.2.16)$$

que é um **método implícito de 2-passos** chamado **Método 1/3 de Simpson**. De fato, fazendo  $k = 2$  e considerando  $\alpha_0 = -1$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\beta_0 = 1/3$ ,  $\beta_1 = 4/3$  e  $\beta_2 = 1/3$  em (3.0.1), segue que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^2 \alpha_j y_{n+j} &= h \sum_{j=0}^2 \beta_j f_{n+j} \\ \Rightarrow \alpha_0 y_{n+0} + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_2 y_{n+2} &= h(\beta_0 f_{n+0} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_2 f_{n+2}) \\ \Rightarrow (-1)y_n + (0)y_{n+1} + (1)y_{n+2} &= h \left[ \left(\frac{1}{3}\right) f_{n+0} + \left(\frac{4}{3}\right) f_{n+1} + \left(\frac{1}{3}\right) f_{n+2} \right] \cdot (3.2.17) \\ \Rightarrow y_{n+2} &= y_n + \frac{h}{3} [f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2}] \end{aligned}$$

Observe que para poder aplicar o Método (3.2.16), precisa-se além de utilizar métodos do tipo “Previsor-Corretor”, também obter valores iniciais por métodos de 1-passo.

No Capítulo 4, encontra-se o Exemplo (4.1) para melhor entendimento

### 3.2.3 Método 3/8 de Simpson

Fazendo  $k = 3$  em (3.2.9), obtém-se

$$y(x_{n+3}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+3}} f(x; y(x)) dx,$$

e assim pode-se aplicar a Regra 3/8 de Simpson (FREITAS, 2000), dada por

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \cong \frac{3}{8} h [f(x_0) + 3(f(x_1) + f(x_2)) + f(x_3)] \quad (3.2.18)$$

para calcular a integral na expressão (3.2.18) desde que a mesma esteja sendo avaliada entre quatro pontos consecutivos. Fazendo isso, segue que

$$y(x_{n+3}) = y(x_n) + \frac{3}{8} h [f(x_n; y(x_n)) + 3(f(x_{n+1}; y(x_{n+1})) + f(x_{n+2}; y(x_{n+2}))) + f(x_{n+3}; y(x_{n+3}))],$$

e substituindo  $y(x_n)$ ,  $y(x_{n+1})$ ,  $y(x_{n+2})$  e  $y(x_{n+3})$  por  $y_n$ ,  $y_{n+1}$ ,  $y_{n+2}$  e  $y_{n+3}$ , respectivamente, obtém-se

$$y_{n+3} = y_n + \frac{3}{8}h[f_n + 3(f_{n+1} + f_{n+2}) + f_{n+3}], \quad (3.2.19)$$

que é um **método implícito de 3-passos** chamado **Método 3/8 de Simpson**. De fato, fazendo  $k = 3$  e considerando  $\alpha_0 = -1$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_3 = 1$ ,  $\beta_0 = 3/8$ ,  $\beta_1 = 9/8$ ,  $\beta_2 = 9/8$  e  $\beta_3 = 3/8$  em (3.0.1), segue que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^3 \alpha_j y_{n+j} &= h \sum_{j=0}^3 \beta_j f_{n+j} \\ \alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_2 y_{n+2} + \alpha_3 y_{n+3} &= h(\beta_0 f_{n+0} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_2 f_{n+2} + \beta_3 f_{n+2}) \quad (3.2.20) \\ -y_n + y_{n+3} &= y_n + \frac{3}{8}h[f_n + 3(f_{n+1} + f_{n+2}) + f_{n+3}] \\ y_{n+3} &= y_n + \frac{3}{8}h[f_n + 3(f_{n+1} + f_{n+2}) + f_{n+3}] \end{aligned}$$

Observe que para poder aplicar o Método (3.2.19), precisa-se além de utilizar métodos do tipo “Previsor-Corretor”, também obter valores iniciais por métodos de 1-passo.

### 3.2.4 Método de Adams-Moulton

Seja  $P(x)$  o único polinômio de grau 2 passando pelos pontos

$$(x_n; f_n), (x_{n+1}; f_{n+1}), (x_{n+2}; f_{n+2})$$

Usando a fórmula de Newton-Gregory para o polinômio de interpolação (FREITAS, 2000), dada por

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + (x - x_0) \frac{\Delta^1 f(x_0)}{h} + (x - x_0)(x - x_1) \frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2 2!} \\ &+ \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \frac{\Delta^n f(x_0)}{h^n n!} \end{aligned}$$

obtem-se, para  $n = 2$

$$P_2(x) = f(x_0) + (x - x_0) \frac{\Delta^1 f(x_0)}{h} + (x - x_0)(x - x_1) \frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2 2!},$$

e considerando  $x_0 = x_n$ ,  $x_1 = x_{n+1}$ ,  $f(x_0) = f(x_n) = f_n$  e  $f(x_1) = f(x_{n+1}) = f_{n+1}$ , tem-se

$$P(x) = f_n + (x - x_n) \frac{\Delta f_n}{h} + (x - x_n)(x - x_{n+1}) \frac{\Delta^2 f_n}{h^2 2!}.$$

Agora, desde que os pontos  $x_i$ ,  $i = n, n + 1, n + 2$  são igualmente espaçados de  $h$ , pode-se

fazer a seguinte mudança de variável,  $u = \frac{x - x_n}{h}$ , e assim

$$\begin{aligned}
 P(x) &= f_n + (x - x_n) \frac{\Delta f_n}{h} + (x - x_n)(x - x_{n+1}) \frac{\Delta^2 f_n}{h^2 2!} \\
 \Rightarrow P(x) &= f_n + (x - x_n) \frac{\Delta f_n}{h} + (x - x_n)[x - x_n + x_n - x_{n+1}] \frac{\Delta^2 f_n}{h^2 2!} \\
 \Rightarrow P(x) &= f_n + (x - x_n) \frac{\Delta f_n}{h} + (x - x_n)[(x - x_n) + (x_n - x_{n+1})] \frac{\Delta^2 f_n}{h^2 2!} \\
 \Rightarrow P(x_n + uh) &= f_n + (uh) \frac{\Delta f_n}{h} + (x - x_n)[(uh) + (-h)] \frac{\Delta^2 f_n}{h^2 2!} \\
 \Rightarrow P(x_n + uh) &= f_n + (uh) \frac{\Delta f_n}{h} + (uh)[h(u - 1)] \frac{\Delta^2 f_n}{h^2 2!} \\
 \Rightarrow P(x_n + uh) &= f_n + u \Delta f_n + \frac{u(u - 1)}{2} \Delta^2 f_n
 \end{aligned}$$

Integrando a Equações Diferenciais de primeira ordem, do PVI (1.1.2), de  $x_{n+1}$  até  $x_{n+2}$ ,

$$\begin{aligned}
 \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} y'(x) dx &= \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} f(x; y(x)) dx \\
 \Rightarrow y(x_{n+2}) - y(x_{n+1}) &= \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} f(x; y(x)) dx
 \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

e substituindo  $y(x_{n+2})$  e  $y(x_{n+1})$  por  $y_{n+2}$  e  $y_{n+1}$ , respectivamente, obtém-se

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} f(x; y(x)) dx .$$

Usando o fato que

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} f(x; y(x)) dx \cong \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} P(x) dx ,$$

e fazendo a mudança de variável

$$u = \frac{x - x_n}{h} \Rightarrow x = x_n + uh \Rightarrow dx = h du ,$$

e observando os limites de integração

$$\begin{aligned}
 x = x_{n+1} &\Rightarrow x_{n+1} = x_n + uh \\
 &\Rightarrow x_{n+1} - x_n = uh \\
 &\Rightarrow h = uh \\
 &\Rightarrow u = 1
 \end{aligned} ,$$

e

$$\begin{aligned}
 x = x_{n+2} &\Rightarrow x_{n+2} = x_n + uh \\
 &\Rightarrow x_{n+2} - x_n = uh \\
 &\Rightarrow 2h = uh \\
 &\Rightarrow u = 2
 \end{aligned}$$

obtém-se

$$\begin{aligned}
 y_{n+2} - y_{n+1} &= \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} P(x) dx \\
 &= \int_1^2 P(x_n + uh) h du \\
 &= h \int_1^2 \left[ f_n + u \Delta f_n + \frac{u(u-1)}{2} \Delta^2 f_n \right] du \\
 &= h \left[ f_n u + \frac{u^2}{2} \Delta f_n + \frac{1}{2} \left( \frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} \right) \Delta^2 f_n \right]_1^2 \\
 &= h \left( f_n + \frac{3}{2} \Delta f_n + \frac{15}{36} \Delta^2 f_n \right)
 \end{aligned}$$

Agora, usando as fórmulas

$$\begin{aligned}
 \Delta^0 f(x_k) &= f(x_k), \\
 \Delta^r f(x_k) &= \Delta^{r-1} f(x_k + h) - \Delta^{r-1} f(x_k),
 \end{aligned}$$

onde  $\Delta^r f(x_k)$  é a diferença ordinária de  $f(x)$  de ordem  $r$  em  $x = x_k$ , obtém-se as diferenças ordinárias de ordens 1 e 2 em  $x = x_n$ , que são dadas, respectivamente por

$$\begin{aligned}
 \Delta f_n &= \Delta f(x_n) = \Delta^0 f(x_n + h) - \Delta^0 f(x_n) = f(x_{n+1}) - f(x_n) = f_{n+1} - f_n \\
 \Delta^2 f_n &= \Delta^2 f(x_n) = \Delta^1 f(x_n + h) - \Delta^1 f(x_n) = f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n
 \end{aligned}$$

Assim, substituindo as diferenças ordinárias na expressão acima e agrupando os termos semelhantes, tem-se

$$\begin{aligned}
 y_{n+2} &= y_{n+1} + h \left( f_n + \frac{3}{2} \Delta f_n + \frac{15}{36} \Delta^2 f_n \right) \\
 &= y_{n+1} + h \left[ f_n + \frac{3}{2} (f_{n+1} - f_n) + \frac{15}{36} (f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n) \right] \\
 &= y_{n+1} + \frac{h}{12} [-f_n + 8f_{n+1} + 5f_{n+2}]
 \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

que é um **método implícito de 2-passos** chamado **Método de Adams-Moulton**. De fato, fazendo  $k = 2$  e considerando  $\alpha_0 = 0$ ,  $\alpha_1 = -1$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\beta_0 = -1/12$ ,  $\beta_1 = 8/12$  e  $\beta_2 = 5/12$



em (3.0.1), segue que

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^2 \alpha_j y_{n+j} &= h \sum_{j=0}^2 \beta_j f_{n+j} \\
 \Rightarrow \alpha_0 y_{n+0} + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_2 y_{n+2} &= h(\beta_0 f_{n+0} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_2 f_{n+2}) \\
 \Rightarrow (0)y_n + (-1)y_{n+1} + (1)y_{n+2} &= h \left[ \left( \frac{-1}{12} \right) f_{n+0} + \left( \frac{8}{12} \right) f_{n+1} + \left( \frac{5}{12} \right) f_{n+2} \right] \quad (3.2.23) \\
 \Rightarrow y_{n+2} &= y_{n+1} + \frac{h}{12} [-f_n + 8f_{n+1} + 5f_{n+2}]
 \end{aligned}$$

Observe que para poder aplicar o Método (3.2.22), precisa-se além de utilizar métodos do tipo “Previsor-Corretor”, também obter valores iniciais por métodos de 1-passo.

### 3.2.5 Método de Adams-Bashforth

De maneira semelhante ao método (3.2.23), aproxima-se  $f(x; y(x))$  por um polinômio de interpolação sobre os pontos  $(x_n; f_n)$  e  $(x_{n+1}; f_{n+1})$ . Para isso, usa a fórmula de Newton-Gregory para o polinômio de interpolação (FREITAS, 2000), para  $n = 1$ , obtendo

$$P_1(x) = f(x_0) + (x - x_0) \frac{\Delta^1 f(x_0)}{h},$$

e considerando  $x_0 = x_n$ ,  $f(x_0) = f(x_n) = f_n$ , tem-se

$$P(x) = f_n + (x - x_n) \frac{\Delta f_n}{h}.$$

Agora, desde que os pontos  $x_i$ ,  $i = n, n + 1$  são igualmente espaçados de  $h$ , pode-se fazer a seguinte mudança de variável,  $u = \frac{x - x_n}{h}$ , e assim

$$\begin{aligned}
 P(x) &= f_n + (x - x_n) \frac{\Delta f_n}{h} \\
 \Rightarrow P(x_n + uh) &= f_n + (uh) \frac{\Delta f_n}{h} \\
 \Rightarrow P(x_n + uh) &= f_n + u \Delta f_n
 \end{aligned}$$

Integrando a Equações Diferenciais de primeira ordem, do PVI (1.1.2), de  $x_{n+1}$  até  $x_{n+2}$ , como mostra em (3.2.21) e substituindo  $y(x_{n+2})$  e  $y(x_{n+1})$  por  $y_{n+2}$  e  $y_{n+1}$ , respectivamente, obtém-se

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} f(x; y(x)) dx.$$

Usando o fato que

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} f(x; y(x)) dx \cong \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} P(x) dx$$

e fazendo a mudança de variável

$$u = \frac{x - x_n}{h} \Rightarrow x = x_n + uh \Rightarrow dx = h du$$

e observando os limites de integração, obtém-se

$$\begin{aligned} y_{n+2} - y_{n+1} &= \int_1^2 P(x_n + uh) h du \\ &= h \int_1^2 [f_n + u \Delta f_n] du \\ &= h \left[ f_n u + \frac{u^2}{2} \Delta f_n \right]_1^2 \\ &= h \left( f_n + \frac{3}{2} \Delta f_n \right) \end{aligned}$$

Agora, usando as diferenças ordinárias de ordens 1 em  $x = x_n$  e agrupando os termos semelhantes, tem-se

$$\begin{aligned} y_{n+2} &= y_{n+1} + h \left( f_n + \frac{3}{2} \Delta f_n \right) \\ &= y_{n+1} + h \left[ f_n + \frac{3}{2} (f_{n+1} - f_n) \right] \\ &= y_{n+1} + \frac{h}{2} [-f_n + 3f_{n+1}] \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

que é um **método explícito de 2-passos** chamado **Método de Adams-Bashforth**. De fato, fazendo  $k = 2$  e considerando  $\alpha_0 = 0$ ,  $\alpha_1 = -1$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\beta_0 = -1/2$ ,  $\beta_1 = 3/2$  e  $\beta_2 = 0$  em (3.0.1), segue que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^2 \alpha_j y_{n+j} &= h \sum_{j=0}^2 \beta_j f_{n+j} \\ \Rightarrow \alpha_0 y_{n+0} + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_2 y_{n+2} &= h (\beta_0 f_{n+0} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_2 f_{n+2}) \\ \Rightarrow (0)y_n + (-1)y_{n+1} + (1)y_{n+2} &= h \left[ \left( \frac{-1}{2} \right) f_{n+0} + \left( \frac{3}{2} \right) f_{n+1} + (0) f_{n+2} \right] \\ \Rightarrow y_{n+2} &= y_{n+1} + \frac{h}{2} [-f_n + 3f_{n+1}] \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Como no Método da Regra do Ponto Médio, para aplicar este Método deve-se obter, inicialmente, o valor de  $y_1$  por um método de 1-passo.

**Exemplo 3.4** Aplique o Método de Adams-Bashforth, para resolver o PVI do Exemplo (2.1),

obtendo uma aproximação de  $y(0,5)$  com  $h = 0,1$ . Use o método de Taylor de ordem 2, para obter os valores iniciais necessários. Resolva também para  $h = 0,05$  e compare os resultados numéricos nos dois tamanhos de passo com a solução exata do PVI.

**Solução Numérica:** Para calcular os valores de  $y_n$  é necessário utilizar os valores de  $y(0) = 2$ ,  $y'_0 = 0$ ,  $y_1 = 2,0050$  e  $y'_1 = 0,0952$  que já foram calculadas no Exemplo (3.2). Com isso, fazendo  $n = 0$  em (3.2.24), segue que

$$\begin{aligned} y_{0+2} &= y_{0+1} + \frac{h}{2} [-y'_0 + 3y'_{0+1}] \\ y_2 &= y_1 + \frac{h}{2} [-y'_0 + 3y'_1] \\ &= 2,0050 + \frac{0,1}{2} [-0 + 3(0,0950)] \cdot \\ &= 2,0050 + 0,01425 \\ &= 2,0193 \end{aligned}$$

Considerando  $n = 1$ ,  $y_2 = 2,0193$ ,  $y'_1 = 0,0950$  e  $y'_2 = 0,1810$  em (3.2.24), segue que

$$\begin{aligned} y_{1+2} &= y_{1+1} + \frac{h}{2} [-y'_1 + 3y'_{1+1}] \\ y_3 &= y_2 + \frac{h}{2} [-y'_1 + 3y'_2] \\ &= 2,0193 + \frac{0,1}{2} [-0,0950 + 3(0,1810)] \cdot \\ &= 2,0193 + 0,0224 \\ &= 2,0417 \end{aligned}$$

De forma análoga obtém-se os resultados para  $y_4$  e  $y_5$ . A partir dos cálculos de erro absoluto e erro percentual obtém-se a tabela que expressa a comparação entre os valores aproximados  $y_n$  com os valores verdadeiros  $y(x_n)$ , calculados no Exemplo (2.1).

**Tabela 5: Método de Adams-Bashforth com  $h = 0,1$**

$x_n$	$y_n$	Valor verdadeiro	Erro absoluto	Erro percentual %
0,00	2,0000	2,0000	0,0000	0,0000
0,10	2,0050	2,0048	0,0002	0,0010
0,20	2,0193	2,0187	0,0006	0,0297
0,30	2,0417	2,0408	0,0009	0,0441
0,40	2,0715	2,0703	0,0012	0,0560
0,50	2,1080	2,1065	0,0015	0,0712

**Fonte: Autoria Própria**

De forma análoga, calcula-se a solução com o passo  $h = 0,05$  utilizando-se do *software Maple 16*, para isso, foi necessário implementar um procedimento computacional, como pode ser observado

```

AdamsBashforth:=proc(xmin,xmax,N)
local i:
global x,y:
h := abs(xmax-xmin)/N;
#===== Taylor de Ordem 2
y[1]:= evalf(y[0]+h*yLinha(x[0],y[0])+h^2/2*y[0]^0):
x[1] := x[0]+h:
#=====
for i from 2 to N do
x[i] := x[i-1]+h:
y[i] := evalf(
y[i-1]+
(h/2)*(
-(yLinha(x[i-2],y[i-2]))+
3*yLinha(x[i-1],y[i-1])
)
):
end do:
end proc:

```

A tabela de resultados para  $h = 0,05$  é da seguinte forma

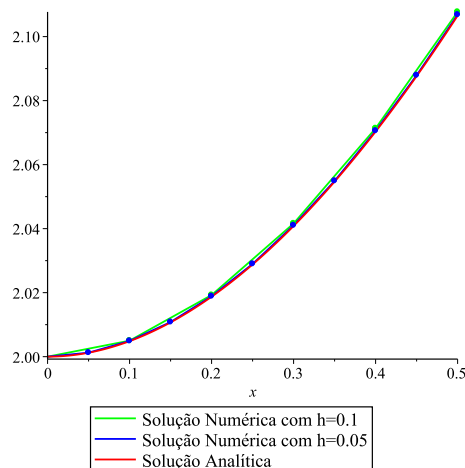
	"x[n]"	"y[n]"	"Analítica"	"Erro Abs"	"Erro Per"
<i>TabelaErro:=</i>	0.1000000000	2.004906250	2.004837418	0.000068832	0.003433295856
	0.2000000000	2.018880722	2.018730753	0.000149969	0.007428875781
	0.3000000000	2.041033287	2.040818221	0.000215066	0.010538224220
	0.4000000000	2.070586470	2.070320046	0.000266424	0.012868734980
	0.5000000000	2.106836726	2.106530660	0.000306066	0.014529387390

Para melhor entendimento observa-se o gráfico obtido, que apresenta as curvas das soluções numéricas com os passos  $h = 0,1$  e  $h = 0,05$  e da solução analítica.

```

display(
Numerical,
Numerica2,
Analitica,
Pontos1,
Pontos2
);

```



Conclui-se que uma aproximação para  $y(0,5)$  com o tamanho do passo  $h = 0,1$  é 2,1080. Já para o passo  $h = 0,05$  a aproximação é de 2.106836726.

Observe que todos os Métodos de Passo Múltiplo obtidos via integração numérica satisfazem

$$\alpha_k = 1, \alpha_j = -1 \text{ e } \alpha_i = 0, i = 0, 1, \dots, j-1, j+1, \dots, k-1.$$

Existem outras maneiras de se obter Métodos Lineares de Passo Múltiplo, entretanto julga-se que os métodos aqui apresentados sugerem ao leitor o que são tais métodos e como podem ser aplicados.

### 3.3 ORDEM E CONSTANTE DO ERRO

Analisa-se aqui a **Ordem** e a **Constante do Erro**, para os Métodos Lineares de Passo Múltiplo definidos por (3.0.1) (NEIDE, 2006).

**Definição 3.2** Define-se o *operador diferença linear*  $L$ , associado ao Método Linear de Passo Múltiplo (3.0.1), por

$$L[y(x);h] = \sum_{j=0}^k [\alpha_j y(x+jh) - h\beta_j y'(x+jh)], \quad (3.3.26)$$

onde  $y(x)$  é uma função arbitrária continuamente diferenciável em  $[a;b]$ .

Expandindo  $y(x+jh)$  e  $y'(x+jh)$  em série de Taylor em torno do ponto  $x$ , desenvolvendo o somatório e agrupando os termos semelhantes, obtém-se

$$L[y(x);h] = C_0 y(x) + C_1 h y'(x) + \dots + C_q h^q y^{(q)}(x) + \dots, \quad (3.3.27)$$

onde

$$\begin{aligned} C_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_k, \\ C_1 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k - (\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_k), \\ &\vdots \\ C_q &= \frac{1}{q!}(\alpha_1 + 2^q \alpha_2 + \dots + k^q \alpha_k) - \frac{1}{(q-1)!}(\beta_1 + 2^{q-1} \beta_2 + \dots + k^{q-1} \beta_k) \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

**Definição 3.3** O operador diferença (3.3.26) e o Método Linear de Passo Múltiplo associado (3.3.27), tem **ordem**  $q$ , se em (3.3.27),  $C_0 = C_1 = \dots = C_q = 0$  e  $C_{q+1} \neq 0$ .  $C_{q+1}$  é chamada de **constante do erro**.

**Exemplo 3.5** *Obtenha a ordem e a constante do erro para os Métodos de Euler, Regra do Trapézio, Regra do Ponto Médio, 1/3 de Simpson, Adams-Moulton, Adams-Bashforth e 3/8 de Simpson.*

**Solução:**

**Método de Euler:** *O Método de Euler dado por (3.1.2) é*

$$y_{n+1} = y_n + hf_n.$$

*Considerou-se em (2.0.5) que  $\alpha_0 = -1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\beta_0 = 1$  e  $\beta_1 = 0$ , assim de (3.3.28), tem-se*

$$\begin{aligned} C_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 &= -1 + 1 &= 0 \\ C_1 &= \alpha_1 - (\beta_0 + \beta_1) &= 1 - (1 + 0) &= 0 \\ C_2 &= \frac{1}{2!}(\alpha_1) - (\beta_1) &= \frac{1}{2}(1) - (0) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

*Logo,  $C_0 = C_1 = 0$  e  $C_2 \neq 0$ . Portanto segue da Definição (3.3) que a ordem do Método de Euler é  $q = 1$  e a constante do erro é  $C_2 = 1/2$ .*

**Método da Regra do Trapézio:** *O Método da Regra do Trapézio dado por (3.2.13) é*

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f_n + f_{n+1}].$$

*Considerou-se em (3.2.14) que  $\alpha_0 = -1$ ,  $\beta_0 = 1/2$ ,  $\alpha_1 = 1$  e  $\beta_1 = 1/2$ , assim de (3.3.28), tem-se*

$$\begin{aligned} C_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 &= -1 + 1 &= 0 \\ C_1 &= \alpha_1 - (\beta_0 + \beta_1) &= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) &= 0 \\ C_2 &= \frac{\alpha_1}{2!} - \beta_1 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} &= 0 \\ C_3 &= \frac{\alpha_1}{3!} - \frac{\beta_1}{(2!)} &= \frac{1}{6} - \frac{1}{4} &= -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

*Logo,  $C_0 = C_1 = C_2 = 0$  e  $C_3 \neq 0$ . Portanto, segue da Definição (3.3), que a ordem do Método da Regra do Trapézio é  $q = 2$  e a constante do erro é  $C_3 = -1/12$ .*

**Método da Regra do Ponto Médio:** *O Método da Regra do Ponto Médio dado por (3.1.5) é*

$$y_{n+2} = y_n + 2hy'_{n+1}.$$

*Considerou-se em (3.1.6) que  $\alpha_0 = -1$ ,  $\beta_0 = 0$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 1$  e  $\beta_2 = 0$  assim de*

(3.3.28), tem-se

$$C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = -1 + 0 + 1 = 0$$

$$C_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) = 0 + (2)(1) - (0 + 2 + 0) = 0$$

$$C_2 = \frac{1}{2!}(\alpha_1 + 4\alpha_2) - \frac{1}{1!}(\beta_1 + 2^1\beta_2) = \frac{1}{2}(0 + 4) - 1(2 + (2)(0)) = 0$$

$$C_3 = \frac{1}{3!}(\alpha_1 + 8\alpha_2) - \frac{1}{2!}(\beta_1 + 2^2\beta_2) = \frac{1}{6}(0 + (8)(1)) - \frac{1}{2}(2 + (4)(0)) = \frac{1}{3}$$

Logo,  $C_0 = C_1 = C_2 = 0$  e  $C_3 \neq 0$ . Portanto, segue da Definição (3.3), que a ordem do Método da Regra do Ponto Médio é  $q = 2$  e a constante do erro é  $C_3 = 1/3$ .

**Método 1/3 de Simpson:** O Método 1/3 de Simpson dado por (3.2.16) é

$$y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3}[f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2}].$$

Considerou-se em (3.2.17) que  $\alpha_0 = -1$ ,  $\beta_0 = 1/3$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_1 = 4/3$ ,  $\alpha_2 = 1$  e  $\beta_2 = 1/3$  assim de (3.3.28), tem-se

$$C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = -1 + 0 + 1 = 0$$

$$C_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) = 0 + (2)(1) - \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$C_2 = \frac{1}{2!}(\alpha_1 + 4\alpha_2) - \frac{1}{1!}(\beta_1 + 2^1\beta_2) = \frac{1}{2}(0 + 4) - \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right) = 0$$

$$C_3 = \frac{1}{3!}(\alpha_1 + 8\alpha_2) - \frac{1}{2!}(\beta_1 + 2^2\beta_2) = \frac{1}{6}(0 + 8) - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right) = 0$$

$$C_4 = \frac{1}{4!}(\alpha_1 + 16\alpha_2) - \frac{1}{3!}(\beta_1 + 2^3\beta_2) = \frac{1}{24}(0 + 16) - \frac{1}{6}\left(\frac{4}{3} + \frac{8}{3}\right) = 0$$

$$C_5 = \frac{1}{5!}(\alpha_1 + 32\alpha_2) - \frac{1}{4!}(\beta_1 + 2^4\beta_2) = \frac{1}{120}(32) - \frac{1}{24}\left(\frac{4}{3} + \frac{16}{3}\right) = -\frac{1}{90}$$

Logo,  $C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$  e  $C_5 \neq 0$ . Portanto, segue da Definição (3.3), que a ordem do Método 1/3 de Simpson é  $q = 4$  e a constante do erro é  $C_5 = -1/90$ .

**Método de Adams-Moulton:** O Método de Adams-Moulton dado por (3.2.22) é

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{12}[-f_n + 8f_{n+1} + 5f_{n+2}].$$

Considerou-se em (3.2.23) que  $\alpha_0 = 0$ ,  $\beta_0 = -\frac{1}{12}$ ,  $\alpha_1 = -1$ ,  $\beta_1 = 8/12$ ,  $\alpha_2 = 1$  e  $\beta_2 =$

5/12 assim de (3.3.28), tem-se

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 - 1 + 1 &= 0 \\
 C_1 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) &= -1 + 2 - \left(-\frac{1}{12} + \frac{8}{12} + \frac{5}{12}\right) &= 0 \\
 C_2 &= \frac{1}{2!}(\alpha_1 + 4\alpha_2) - \frac{1}{1!}(\beta_1 + 2^1\beta_2) &= \frac{1}{2}(-1 + 4) - 1\left(\frac{8}{12} + \frac{10}{12}\right) &= 0 \\
 C_3 &= \frac{1}{3!}(\alpha_1 + 8\alpha_2) - \frac{1}{2!}(\beta_1 + 2^2\beta_2) &= \frac{1}{6}(-1 + 8) - \frac{1}{2}\left(\frac{8}{12} + \frac{20}{12}\right) &= 0 \\
 C_4 &= \frac{1}{4!}(\alpha_1 + 16\alpha_2) - \frac{1}{3!}(\beta_1 + 2^3\beta_2) &= \frac{1}{24}(-1 + 16) - \frac{1}{6}\left(\frac{8}{12} + \frac{40}{12}\right) &= -\frac{1}{24}
 \end{aligned}$$

Logo,  $C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = 0$  e  $C_4 \neq 0$ . Portanto, segue da Definição (3.3), que a ordem do Método de Adams-Moulton é  $q = 3$  e a constante do erro é  $C_4 = -1/24$ .

**Método de Adams-Bashforth** O Método de Adams-Bashforth dado por (3.2.24) é

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2}[-f_n + 3f_{n+1}].$$

Considerou-se em (3.2.25) que  $\alpha_0 = 0$ ,  $\beta_0 = -1/2$ ,  $\alpha_1 = -1$ ,  $\beta_1 = 3/2$ ,  $\alpha_2 = 1$  e  $\beta_2 = 0$  assim de (3.3.28), tem-se

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 - 1 + 1 &= 0 \\
 C_1 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) &= -1 + 2 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 0\right) &= 0 \\
 C_2 &= \frac{1}{2!}(\alpha_1 + 4\alpha_2) - \frac{1}{1!}(\beta_1 + 2^1\beta_2) &= \frac{1}{2}(-1 + 4) - 1\left(\frac{3}{2} + (2)(0)\right) &= 0 \\
 C_3 &= \frac{1}{3!}(\alpha_1 + 8\alpha_2) - \frac{1}{2!}(\beta_1 + 2^2\beta_2) &= \frac{1}{6}(-1 + 8) - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + (4)(0)\right) &= \frac{5}{12}
 \end{aligned}$$

Logo,  $C_0 = C_1 = C_2 = 0$  e  $C_3 \neq 0$ . Portanto, segue da Definição (3.3), que a ordem do Método de Adams-Bashforth é  $q = 2$  e a constante do erro é  $C_3 = 5/12$ .

**Método 3/8 de Simpson:** O Método 3/8 de Simpson dado por (3.2.19) é

$$y_{n+3} = y_n + \frac{3}{8}h[f_n + 3(f_{n+1} + f_{n+2}) + f_{n+3}].$$

Considerou-se em (3.2.20) que  $\alpha_0 = -1$ ,  $\beta_0 = \frac{3}{8}$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_1 = 9/8$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\beta_2 = 9/8$  e



$\alpha_3 = 1, \beta_3 = 3/8$  assim de (3.3.28), tem-se

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= -1 + 0 + 0 + 1 &= 0, \\
 C_1 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3) &= 3 - \left(\frac{24}{8}\right) &= 0 \\
 C_2 &= \frac{1}{2!}(\alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3) - \frac{1}{1!}(\beta_1 + 2^1\beta_2 + 3^1\beta_3) &= \frac{9}{2} - \left(\frac{36}{8}\right) &= 0 \\
 C_3 &= \frac{1}{3!}(\alpha_1 + 8\alpha_2 + 27\alpha_3) - \frac{1}{2!}(\beta_1 + 2^2\beta_2 + 3^2\beta_3) &= \frac{27}{6} - \left(\frac{72}{16}\right) &= 0 \\
 C_4 &= \frac{1}{4!}(\alpha_1 + 16\alpha_2 + 81\alpha_3) - \frac{1}{3!}(\beta_1 + 2^3\beta_2 + 3^3\beta_3) &= \frac{81}{24} - \left(\frac{162}{48}\right) &= 0 \\
 C_5 &= \frac{1}{5!}(\alpha_1 + 32\alpha_2 + 243\alpha_3) - \frac{1}{4!}(\beta_1 + 2^4\beta_2 + 3^4\beta_3) &= \frac{243}{120} - \left(\frac{396}{192}\right) &= -\frac{3}{80}
 \end{aligned}$$

Logo,  $C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$  e  $C_5 \neq 0$ . Portanto, segue da Definição (3.3), que a ordem do Método 3/8 de Simpson é  $q = 4$  e a constante do erro é  $C_5 = -3/80$ .

■

### 3.4 ERRO DE TRUNCAMENTO LOCAL

Agora, pode-se definir formalmente o erro de truncamento local de um Método Linear de Passo Múltiplo (NEIDE, 2006).

**Definição 3.4** Define-se **Erro de Truncamento Local**, em  $x_{n+k}$  do Método Linear de Passo Múltiplo, definido por (3.0.1), por

$$T_{n+k} = L[y(x_n); h] = \sum_{j=0}^k [\alpha_j y(x_{n+j}) - h\beta_j y'(x_{n+j})],$$

onde  $y(x)$  é a solução exata do PVI (1.1.2).

Observe que o erro de truncamento é chamado **local**, pois suponha-se que nenhum erro foi cometido anteriormente, isto é, impõe

$$y_{n+j} = y(x_{n+j}), \quad j = 0, 1, \dots, k-1,$$

e então só considera o erro em  $y_{n+k}$ .

Pode-se mostrar que

$$T_{n+k} = \left[ 1 - \beta_k \frac{\partial f}{\partial y}(x_{n+k}; \xi_{n+k}) \right] (y(x_{n+k}) - y_{n+k}). \quad (3.4.29)$$

onde  $\xi_{n+k} \in (y_{n+k}; y(x_{n+k}))$ .

Supondo que a solução analítica  $y(x)$  tem derivadas contínuas de ordem suficientemente elevadas, então para ambos, métodos implícitos e explícitos, de (3.4.29) pode ser deduzido que

$$y(x_{n+k}) - y_{n+k} = C_{q+1} h^{q+1} y^{(q+1)}(x_n) + O(h^{q+2}),$$

onde  $q$  é a ordem do Método. O termo  $C_{q+1} h^{q+1} y^{(q+1)}(x_n)$  é frequentemente chamado de **Erro de Truncamento Local Principal**.

**Exemplo 3.6** *Determine o erro de truncamento local para os Métodos de Euler, Regra do Trapézio, Regra do Ponto Médio, 1/3 de Simpson, Adams-Moulton, Adams-Bashforth e 3/8 de Simpson.*

**Solução:** *Seja o erro de truncamento local dado por  $C_{q+1} h^{q+1} y^{(q+1)}(\xi)$ , onde  $q$  é a ordem e  $C$  é a constante do erro dos Métodos, calculados no Exemplo (3.5). Com isso o erro de truncamento local, para:*

- *o Método de Euler com  $q = 1$  e  $C_2 = 1/2$  é dado por*

$$\begin{aligned} C_{q+1} h^{q+1} y^{(q+1)}(\xi) &= C_{1+1} h^{1+1} y^{(1+1)}(\xi) \\ &= C_2 h^2 y''(\xi) \\ &= \frac{h^2}{2} y''(\xi) \end{aligned} ,$$

*onde  $x_n < \xi < x_{n+1}$ , isto é, o erro de truncamento local é da  $O(h^2)$ , e este é identicamente nulo se a solução de (1.1.2) é um polinômio de grau não excedendo 1.*

- *o Método da Regra do Trapézio com  $q = 2$  e  $C_3 = -1/12$  é dado por*

$$\begin{aligned} C_{q+1} h^{q+1} y^{(q+1)}(\xi) &= C_{2+1} h^{2+1} y^{(2+1)}(\xi) \\ &= -\frac{h^3}{12} y'''(\xi) \end{aligned} ,$$

*onde  $x_n < \xi < x_{n+1}$ , isto é, o erro de truncamento local é da  $O(h^3)$ , o que representa um aperfeiçoamento sobre o Método de Euler. Observe que o erro de truncamento local é exatamente o erro do Método da Regra do Trapézio, equação (3.2.11), visto que o lado esquerdo da expressão (3.2.8) é calculada exatamente.*

- *o Método da Regra do Ponto Médio com  $q = 2$  e  $C_3 = 1/3$  é dado por*

$$\begin{aligned} C_{q+1} h^{q+1} y^{(q+1)}(\xi) &= C_{2+1} h^{2+1} y^{(2+1)}(\xi) \\ &= \frac{h^3}{3} y'''(\xi) \end{aligned} ,$$

onde  $x_n < \xi < x_{n+1}$ , isto é, o erro de truncamento local é da  $O(h^3)$ .

- o **Método 1/3 de Simpson** com  $q = 4$  e  $C_5 = -1/90$  é dado por

$$\begin{aligned} C_{q+1}h^{q+1}y^{(q+1)}(\xi) &= C_{4+1}h^{4+1}y^{(4+1)}(\xi) \\ &= -\frac{h^5}{90}y^{(5)}(\xi) \end{aligned} ,$$

onde  $x_n < \xi < x_{n+1}$ , isto é, o erro de truncamento local é da  $O(h^5)$ .

- o **Método de Adams-Moulton** com  $q = 3$  e  $C_4 = -1/24$  é dado por

$$\begin{aligned} C_{q+1}h^{q+1}y^{(q+1)}(\xi) &= C_{3+1}h^{3+1}y^{(3+1)}(\xi) \\ &= -\frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi) \end{aligned} ,$$

onde  $x_n < \xi < x_{n+1}$ , isto é, o erro de truncamento local é da  $O(h^4)$ .

- o **Método de Adams-Bashforth** com  $q = 2$  e  $C_3 = 5/12$  é dado por

$$\begin{aligned} C_{q+1}h^{q+1}y^{(q+1)}(\xi) &= C_{2+1}h^{2+1}y^{(2+1)}(\xi) \\ &= \frac{5h^3}{12}y^{(3)}(\xi) \end{aligned} ,$$

onde  $x_n < \xi < x_{n+1}$ , isto é, o erro de truncamento local é da  $O(h^3)$ .

- o **Método 3/8 de Simpson** com  $q = 4$  e  $C_5 = -3/80$  é dado por

$$\begin{aligned} C_{q+1}h^{q+1}y^{(q+1)}(\xi) &= C_{4+1}h^{4+1}y^{(4+1)}(\xi) \\ &= -\frac{3h^5}{80}y^{(5)}(\xi) \end{aligned} ,$$

onde  $x_n < \xi < x_{n+1}$ , isto é, o erro de truncamento local é da  $O(h^5)$ .

■

As propriedades mais importantes dos métodos numéricos para resolver problemas de valor inicial são consistência e estabilidade.

### 3.5 CONSISTÊNCIA E ESTABILIDADE

Descreve-se aqui as propriedades de consistência e estabilidade dos Métodos de  $k$ -passos. Dado o método linear de passo múltiplo (3.0.1), defina-se, inicialmente

$$\rho(\xi) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \xi^j \quad \text{e} \quad \tau(\xi) = \sum_{j=0}^k \beta_j \xi^j ,$$

como sendo o primeiro e segundo polinômio característico, respectivamente (NEIDE, 2006).

**Definição 3.5** Um Método Linear de Passo Múltiplo é **estável** se nenhuma raiz de  $\rho(\xi)$  tem módulo maior do que 1 e toda raiz com módulo 1 é simples.

**Exemplo 3.7** Verifique se os Métodos de Euler, Regra do Trapézio, Regra do Ponto Médio, 1/3 de Simpson, Adams-Moulton, Adams-Bashforth e 3/8 de Simpson são estáveis.

**Solução:**

**Método de Euler:** Para identificar se o Método de Euler é estável basta verificar se alguma raiz de  $\rho(\xi)$  tem módulo maior do que 1 e toda raiz com módulo 1 é simples. Tem-se de (3.1.2) que

$$y_{n+1} = y_n + hf_n$$

onde  $k = 1$ ,  $\alpha_0 = -1$  e  $\alpha_1 = 1$ . Assim

$$\begin{aligned} \rho(\xi) &= \sum_{j=0}^k \alpha_j \xi^j \\ &= \sum_{j=0}^1 \alpha_j \xi^j \\ &= \alpha_0 \xi^0 + \alpha_1 \xi^1 \\ &= -1 \xi^0 + 1 \xi^1 \\ &= \xi - 1 \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} \rho(\xi) &= 0 \\ \Rightarrow \xi - 1 &= 0 \\ \Rightarrow \xi &= 1 \end{aligned}$$

Logo a raiz tem módulo 1 e é simples. Portanto o Método de Euler é estável.

**Método da Regra do Trapézio:** Para identificar se o Método da Regra do Trapézio é estável basta verificar se alguma raiz de  $\rho(\xi)$  tem módulo maior do que 1 e toda raiz com módulo 1 é simples. Tem-se de (3.2.13) que

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f_n + f_{n+1}],$$

onde  $k = 1$ ,  $\alpha_0 = -1$  e  $\alpha_1 = 1$ . Assim

$$\begin{aligned}\rho(\xi) &= \sum_{j=0}^k \alpha_j \xi^j \\ &= \sum_{j=0}^1 \alpha_j \xi^j \\ &= \alpha_0 \xi^0 + \alpha_1 \xi^1 \\ &= -1\xi^0 + 1\xi^1 \\ &= \xi - 1\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}\rho(\xi) &= 0 \\ \Rightarrow \xi - 1 &= 0 \\ \Rightarrow \xi &= 1\end{aligned}$$

Logo a raiz tem módulo 1 e é simples. Portanto o Método da Regra do Trapézio é estável.

**Método da Regra do Ponto Médio** Para identificar se o Método da Regra do Ponto Médio é estável basta verificar se alguma raiz de  $\rho(\xi)$  tem módulo maior do que 1 e toda raiz com módulo 1 é simples. Tem-se de (3.1.5) que

$$y_{n+2} = y_n + 2hy'_{n+1},$$

onde  $k = 2$ ,  $\alpha_0 = -1$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ . Assim

$$\begin{aligned}\rho(\xi) &= \sum_{j=0}^k \alpha_j \xi^j \\ &= \sum_{j=0}^2 \alpha_j \xi^j \\ &= \alpha_0 \xi^0 + \alpha_1 \xi^1 + \alpha_2 \xi^2 \\ &= -1\xi^0 + 0\xi^1 + 1\xi^2 \\ &= \xi^2 - 1\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}\rho(\xi) &= 0 \\ \Rightarrow \xi^2 - 1 &= 0 \\ \Rightarrow \xi^2 &= 1 \\ \Rightarrow \xi &= \pm 1\end{aligned}$$

Logo as raízes têm módulo 1 e são simples. Portanto o Método da Regra do Ponto Médio

é estável.

**Método 1/3 de Simpson:** Para identificar se o Método 1/3 Simpson é estável basta verificar se alguma raiz de  $\rho(\xi)$  tem módulo maior do que 1 e toda raiz com módulo 1 é simples. Tem-se de (3.2.17) que

$$y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3} [f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2}],$$

onde  $k = 2$ ,  $\alpha_0 = -1$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ . Assim

$$\begin{aligned} \rho(\xi) &= \sum_{j=0}^k \alpha_j \xi^j \\ &= \sum_{j=0}^2 \alpha_j \xi^j \\ &= \alpha_0 \xi^0 + \alpha_1 \xi^1 + \alpha_2 \xi^2 \\ &= -1\xi^0 + 0\xi^1 + 1\xi^2 \\ &= \xi^2 - 1 \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} \rho(\xi) &= 0 \\ \Rightarrow \xi^2 - 1 &= 0 \\ \Rightarrow \xi^2 &= 1 \\ \Rightarrow \xi &= \pm 1 \end{aligned}$$

Logo as raízes têm módulo 1 e são simples. Portanto o Método 1/3 de Simpson é estável.

**Método de Adams-Moulton** Para identificar se o Método de Adams-Moulton é estável basta verificar se alguma raiz de  $\rho(\xi)$  tem módulo maior do que 1 e toda raiz com módulo 1 é simples. Tem-se de (3.2.22) que

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{12} [-f_n + 8f_{n+1} + 5f_{n+2}]$$

onde  $k = 2$ ,  $\alpha_0 = 0$ ,  $\alpha_1 = -1$ ,  $\alpha_2 = 1$ . Assim

$$\begin{aligned} \rho(\xi) &= \sum_{j=0}^k \alpha_j \xi^j \\ &= \sum_{j=0}^2 \alpha_j \xi^j \\ &= \alpha_0 \xi^0 + \alpha_1 \xi^1 + \alpha_2 \xi^2 \\ &= 0\xi^0 - 1\xi^1 + 1\xi^2 \\ &= \xi^2 - \xi \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}\rho(\xi) &= 0 \\ \Rightarrow \xi^2 - \xi &= 0 \\ \Rightarrow \xi(\xi - 1) &= 0 \\ \Rightarrow \xi = 0 \quad \text{ou} \quad \xi = 1\end{aligned}$$

Logo as raízes têm módulo 0 e 1, e são simples. Portanto o Método de Adams-Moulton é estável.

**Método de Adams-Bashforth** Para identificar se o Método de Adams-Bashforth é estável basta verificar se alguma raiz de  $\rho(\xi)$  tem módulo maior do que 1 e toda raiz com módulo 1 é simples. Tem-se de (3.2.24) que

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2}[-f_n + 3f_{n+1}]$$

onde  $k = 2$ ,  $\alpha_0 = 0$ ,  $\alpha_1 = -1$ ,  $\alpha_2 = 1$ . Assim

$$\begin{aligned}\rho(\xi) &= \sum_{j=0}^k \alpha_j \xi^j \\ &= \sum_{j=0}^2 \alpha_j \xi^j \\ &= \alpha_0 \xi^0 + \alpha_1 \xi^1 + \alpha_2 \xi^2 \\ &= 0\xi^0 - 1\xi^1 + 1\xi^2 \\ &= \xi^2 - \xi\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}\rho(\xi) &= 0 \\ \Rightarrow \xi^2 - \xi &= 0 \\ \Rightarrow \xi(\xi - 1) &= 0 \\ \Rightarrow \xi = 0 \quad \text{ou} \quad \xi = 1\end{aligned}$$

Logo as raízes têm módulo 0 e 1, e são simples. Portanto o Método de Adams-Bashforth é estável.

**Método 3/8 de Simpson** Para identificar se o Método 3/8 de Simpson é estável basta verificar se alguma raiz de  $\rho(\xi)$  tem módulo maior do que 1 e toda raiz com módulo 1 é simples. Tem-se de (3.2.19) que

$$y_{n+3} = y_n + \frac{3}{8}h[f_n + 3(f_{n+1} + f_{n+2}) + f_{n+3}],$$

onde  $k = 3$ ,  $\alpha_0 = -1$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 0$  e  $\alpha_3 = 1$ . Assim

$$\begin{aligned}\rho(\xi) &= \sum_{j=0}^k \alpha_j \xi^j \\ &= \sum_{j=0}^3 \alpha_j \xi^j \\ &= \alpha_0 \xi^0 + \alpha_1 \xi^1 + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3 \\ &= -1\xi^0 + 0\xi^1 + 0\xi^2 + 1\xi^3 \\ &= \xi^3 - 1\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}\rho(\xi) &= 0 \\ \Rightarrow \xi^3 - 1 &= 0 \\ \Rightarrow \xi^3 &= 1 \\ \Rightarrow \xi = 1 \quad \text{ou} \quad \xi = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \quad \text{ou} \quad \xi = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

Logo as raízes tem módulo 1 e são simples. Portanto o Método 3/8 de Simpson é estável. ■

**Definição 3.6** Um Método Linear de Passo Múltiplo é **consistente** se tem ordem  $q \geq 1$ .

Assim, por (3.3.28), um Método Linear de Passo Múltiplo é consistente se e somente se

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=0}^k \beta_j = \sum_{j=0}^k j\alpha_j \quad (3.5.30)$$

**Exemplo 3.8** Verifique se os Métodos de Euler, Regra do Trapézio, Regra do Ponto Médio, 1/3 de Simpson, Adams-Moulton, Adams-Bashforth e 3/8 de Simpson são consistentes.

**Método de Euler:** Para identificar se o Método de Euler é consistente, basta verificar se tem ordem  $q \geq 1$ . Tem-se de (3.1.2) que

$$y_{n+1} = y_n + hf_n$$

onde  $k = 1$  e  $\alpha_0 = -1$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $\alpha_1 = 1$  e  $\beta_0 = 0$ . Assim de (3.5.30), tem-se

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^1 \alpha_j &= \alpha_0 + \alpha_1 = -1 + 1 = 0, \\ \sum_{j=0}^1 j\alpha_j - \sum_{j=0}^1 \beta_j &= 0\alpha_0 + 1\alpha_1 - (\beta_0 + \beta_1) = 1 - (0 + 1) = 0\end{aligned}$$



Portanto, o Método de Euler é consistente.

**Método da Regra do Trapézio:** Para identificar se o Método da Regra do Trapézio é consistente, basta verificar se tem ordem  $q \geq 1$ . Tem-se de (3.2.13) que

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f_n + f_{n+1}],$$

onde  $k = 1$  e  $\alpha_0 = -1$ ,  $\beta_0 = 1/2$ ,  $\alpha_1 = 1$  e  $\beta_1 = 1/2$ . Assim de (3.5.30), tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^1 \alpha_j &= \alpha_0 + \alpha_1 = -1 + 1 = 0, \\ \sum_{j=0}^1 j\alpha_j - \sum_{j=0}^1 \beta_j &= 0\alpha_0 + 1\alpha_1 - (\beta_0 + \beta_1) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

Portanto, o Método da Regra do Trapézio é consistente.

**Método da Regra do Ponto Médio** Para identificar se o Método da Regra do Ponto Médio é consistente, basta verificar se tem ordem  $q \geq 1$ . Tem-se de (3.1.5) que

$$y_{n+2} = y_n + 2hy'_{n+1},$$

onde  $k = 2$  e  $\alpha_0 = -1$ ,  $\beta_0 = 0$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 1$  e  $\beta_2 = 0$ . Assim de (3.5.30), tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^2 \alpha_j &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = -1 + 0 + 1 = 0, \\ \sum_{j=0}^2 j\alpha_j - \sum_{j=0}^2 \beta_j &= 0\alpha_0 + 1\alpha_1 + 2\alpha_2 - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) = 2 - (0 + 2 + 0) = 0 \end{aligned}$$

Portanto, o Método da Regra do Ponto Médio é consistente.

**Método 1/3 de Simpson:** Para identificar se o Método 1/3 de Simpson é consistente, basta verificar se tem ordem  $q \geq 1$ . Tem-se de (3.2.17) que

$$y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3}[f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2}],$$

onde  $k = 2$  e  $\alpha_0 = -1$ ,  $\beta_0 = 1/3$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_1 = 4/3$ ,  $\alpha_2 = 1$  e  $\beta_2 = 1/3$ . Assim de (3.5.30), tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^2 \alpha_j &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = -1 + 0 + 1 = 0, \\ \sum_{j=0}^2 j\alpha_j - \sum_{j=0}^2 \beta_j &= 0\alpha_0 + 1\alpha_1 + 2\alpha_2 - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) = 2 - \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\right) = 0 \end{aligned}$$

Portanto, o Método 1/3 de Simpson é consistente.

**Método de Adams-Moulton** Para identificar se o Método de Adams-Moulton é consistente, basta verificar se tem ordem  $q \geq 1$ . Tem-se de (3.2.22) que

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{12} [-f_n + 8f_{n+1} + 5f_{n+2}]$$

onde  $k = 2$  e  $\alpha_0 = 0$ ,  $\beta_0 = -1/12$ ,  $\alpha_1 = -1$ ,  $\beta_1 = 8/12$ ,  $\alpha_2 = 1$  e  $\beta_2 = 5/12$ . Assim de (3.5.30), tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^2 \alpha_j &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0 - 1 + 1 = 0, \\ \sum_{j=0}^2 j\alpha_j - \sum_{j=0}^2 \beta_j &= 1\alpha_1 + 2\alpha_2 - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) = 1 - \left(-\frac{1}{12} + \frac{8}{12} + \frac{5}{12}\right) = 0 \end{aligned}$$

Portanto, o Método de Adams-Moulton é consistente.

**Método de Adams-Bashforth** Para identificar se o Método de Adams-Bashforth é consistente, basta verificar se tem ordem  $q \geq 1$ . Tem-se de (3.2.25) que

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2} [-f_n + 3f_{n+1}],$$

onde  $k = 2$  e  $\alpha_0 = 0$ ,  $\beta_0 = -1/2$ ,  $\alpha_1 = -1$ ,  $\beta_1 = 3/2$ ,  $\alpha_2 = 1$  e  $\beta_2 = 0$ . Assim de (3.5.30), tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^2 \alpha_j &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0 - 1 + 1 = 0, \\ \sum_{j=0}^2 j\alpha_j - \sum_{j=0}^2 \beta_j &= 1\alpha_1 + 2\alpha_2 - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) = -1 + 2 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

Portanto, o Método de Adams-Bashforth é consistente.

**Método 3/8 de Simpson** Para identificar se o Método 3/8 de Simpson é consistente, basta verificar se tem ordem  $q \geq 1$ . Tem-se de (3.2.19) que

$$y_{n+3} = y_n + \frac{3}{8}h[f_n + 3(f_{n+1} + f_{n+2}) + f_{n+3}],$$

onde  $k = 3$  e  $\alpha_0 = -1$ ,  $\beta_0 = \frac{3}{8}$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_1 = \frac{9}{8}$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\beta_2 = \frac{9}{8}$ ,  $\alpha_3 = 1$ ,  $\beta_3 = \frac{3}{8}$ . Assim

de (3.5.30), tem-se

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^3 \alpha_j &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -1 + 1 = 0, \\ \sum_{j=0}^3 j\alpha_j - \sum_{j=0}^3 \beta_j &= 1\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = 3 - 3 = 0.\end{aligned}$$

Portanto, o Método 3/8 de Simpson é consistente. ■

**Definição 3.7** Se o erro de truncamento local de um Método de  $k$ -passos é  $C_{q+1}h^{q+1}y^{(q+1)}(x_n)$ , então se diz que o método é **consistente de ordem  $q$** .

**Exemplo 3.9** Verifique a ordem de consistência dos seguintes Métodos: Euler, Regra do Trapézio, Regra do Ponto Médio, 1/3 de Simpson, Adams-Moulton, Adams-Bashforth e 3/8 de Simpson.

**Solução:** Segue do Exemplo (3.5) que:

**Método de Euler:** é consistente de ordem 1, pois  $q = 1$  e  $C_2 = 1/2$ .

**Método da Regra do Trapézio:** é consistente de ordem 2, pois  $q = 2$  e  $C_3 = -1/12$ .

**Método da Regra do Ponto Médio** é consistente de ordem 2, pois  $q = 2$  e  $C_3 = 1/3$ .

**Método 1/3 de Simpson:** é consistente de ordem 4, pois  $q = 4$  e  $C_5 = -1/90$ .

**Método de Adams-Moulton** é consistente de ordem 3, pois  $q = 3$  e  $C_4 = -1/24$ .

**Método de Adams-Bashforth** é consistente de ordem 2, pois  $q = 2$  e  $C_3 = 5/12$ .

**Método 3/8 de Simpson** é consistente de ordem 4, pois  $q = 4$  e  $C_5 = -3/80$ . ■

### 3.6 CONVERGÊNCIA

O resultado mais importante sobre Métodos de Passo Múltiplo é saber se a aplicação de um determinado método será convergente para a solução exata do problema de valor inicial. Seja o PVI (1.1.2), cuja solução exata é  $y(x)$  e seja o Método Linear de Passo Múltiplo (3.0.1).

Por convergência entende-se que os valores encontrados convergem para a solução exata do problema, isto é, que  $y_n \rightarrow y(x_n)$  quando  $h \rightarrow 0$ .

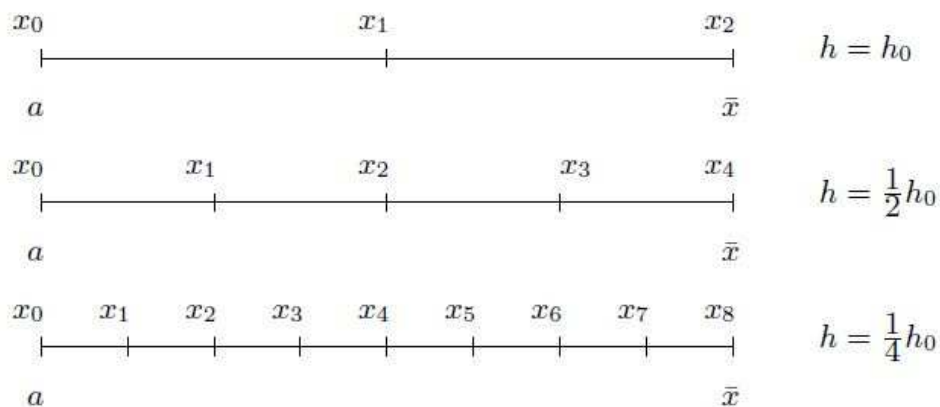
**Definição 3.8** Um Método de Passo Múltiplo é **convergente** se a seguinte afirmação é verdadeira: Seja  $f(x; y)$  satisfazendo as condições do Teorema (1.2). Se  $y(x)$  é solução do PVI (1.1.2), então

$$\lim_{h \rightarrow 0} y_n = y(x_n),$$

$$hn = x - a(\text{fixo})$$

vale para todo  $x \in [a, b]$  e todas as soluções  $y_n$  do Método de Passo Múltiplo tendo valores iniciais  $y_\mu$  satisfazendo  $\lim_{h \rightarrow 0} y_\mu = y_0$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, k - 1$ .

Assim para dar uma ideia de convergência, considere a resolução de um PVI com os seguintes comprimentos de passo:  $h = h_0, 1/2h_0, 1/4h_0$ , e  $\bar{x} - a$  fixo, como mostrado na Figura (1).



**Figura 1: Convergência**

Seja  $y_n(h)$  a notação para o valor de  $y_n$  obtido por um método numérico quando o tamanho do passo é  $h$ . Interessa, por exemplo, o valor de  $y(x)$  quando  $x = \bar{x}$ , Figura (1), tem convergência se a sequência  $y_2(h_0), y_4(1/2h_0), y_8(1/4h_0)$  convergir para o valor de  $y(\bar{x})$ , ou seja,

a verificação da convergência deve ser feita nos pontos da malha. Em geral, considera-se o caso em que  $h$  tende continuamente a zero, isto é, considera-se  $h = 0,1; 0,01; \dots$

Antes de definir as condições que garantem a convergência dos Métodos de  $k$ -passos, analisa-se o seguinte: quando calcular o erro de truncamento local de um Método de  $k$ -passos, intuitivamente, espera-se que tal erro ocorra pela aplicação do Método Linear de Passo Múltiplo num passo simples, ou seja, que o erro ocorra apenas no cálculo de  $y_n$ , pois considera-se na análise do erro que a solução nos pontos anteriores são calculados exatamente. Entretanto, no cálculo de  $y_n$ ,  $n$  passos (aproximadamente) são usados. Portanto se o erro de truncamento local for da  $O(h^{q+1})$ , o erro em  $y_n$  será

$$nO(h^{q+1}) = nhO(h^q) = (x_n - x_0)O(h^q).$$

Assim, se  $h \rightarrow 0$  com  $x_n$  fixo, o **erro global**  $y(x_n) - y_n$  é da  $O(h^q)$ .

**Definição 3.9** Um Método Linear de Passo Múltiplo é **convergente de ordem  $q$** , se o erro

$$y(x_n) - y_n = O(h^q),$$

quando  $h \rightarrow 0$ , com  $x_n$  fixo.

Apresenta-se assim uma ideia intuitiva de que se um método é consistente de ordem  $q$  então ele é convergente de ordem  $q$ . Entretanto, pode-se enunciar o seguinte Teorema, o qual pode ser provado rigorosamente.

**Teorema 3.1** Um Método Linear de Passo Múltiplo é **convergente de ordem  $q$**  se e somente se é estável e consistente de ordem  $q$ .

**Exemplo 3.10** Verifique a convergência dos seguintes Métodos: Euler, Regra do Trapézio, Regra do Ponto Médio, 1/3 de Simpson, Adams-Moulton, Adams-Bashforth e 3/8 de Simpson.

**Solução:** Para verificar se um Método Linear de Passo Múltiplo é convergente de ordem  $q$ , basta verificar se é estável e consistente de ordem  $q$ . Segue dos Exemplos (3.7) e (3.9) que:

**Método de Euler:** é convergente de ordem 1, pois é estável e consistente de ordem 1.

**Método da Regra do Trapézio:** é convergente de ordem 2, pois é estável e consistente de ordem 2.

**Método da Regra do Ponto Médio:** *é convergente de ordem 2, pois é estável e consistente de ordem 2.*

**Método 1/3 de Simpson:** *é convergente de ordem 4, pois é estável e consistente de ordem 4.*

**Método de Adams-Moulton:** *é convergente de ordem 3, pois é estável e consistente de ordem 3.*

**Método de Adams-Bashforth:** *é convergente de ordem 2, pois é estável e consistente de ordem 2.*

**Método 3/8 de Simpson** *é convergente de ordem 4, pois é estável e consistente de ordem 4.*

■

**Exemplo 3.11** *Considere o PVI:*

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (3.6.31)$$

*Verifique que, usando o seguinte Método*

$$y_{n+2} = -3y_n + 4y_{n+1} - 2hy'_n, \quad (3.6.32)$$

*com  $y(0) = 1$ ,  $y_1 = 1,10517$  e  $h = 0,1$ , não se obtém uma boa aproximação da solução analítica do PVI. Analise então as condições de convergência.*

**Solução:** *Com intuito de verificar a aproximação da solução numérica calcula-se inicialmente a solução analítica do PVI.*

**Solução Analítica:** *Observa-se que a*

$$\frac{dy}{dx} = y$$

*é uma EDO separável. Para resolvê-la deve-se considerar dois casos:*

**1º Caso** Para  $y \neq 0$ , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y \\ \Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= 1 \\ \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy &= \int 1 dx \\ \Rightarrow \ln y &= x + C \\ \Rightarrow e^{\ln y} &= e^{x+C} \\ \Rightarrow y(x) &= e^x e^C \\ \Rightarrow y(x) &= C e^x \end{aligned}$$

Para encontrar o valor da constante  $C$  utiliza-se a condição inicial,  $y(0) = 1$ . Como

$$\begin{aligned} y(x) &= C e^x \\ \Rightarrow y(0) &= C e^0 \\ \Rightarrow 1 &= C \cdot 1 \\ \Rightarrow C &= 1 \end{aligned}$$

logo a solução analítica do PVI é  $y(x) = e^x$ .

**2º Caso** Para  $y = 0$ , tem-se, que  $y = 0$  é solução da EDO, no entanto, não satisfaz a condição inicial, ou seja,

$$\begin{aligned} y(x) &= 0 \\ \Rightarrow y(0) &= 0 \\ \Rightarrow 1 &\neq 0 \end{aligned}$$

Portanto a solução analítica do PVI é  $y(x) = e^x$ .

**Solução Numérica:** Para obter a solução numérica do PVI, aplica-se o Método dado por (3.6.32).

Fazendo  $n = 0$  em (3.6.32), tem-se

$$\begin{aligned} y_{0+2} &= -3y_0 + 4y_{0+1} - 2hy'_0 \\ y_2 &= -3y_0 + 4y_1 - 2hy'_0 \end{aligned}$$

Como  $y'_n = y_n$ , segue que

$$\begin{aligned} y'_n &= y_n \\ \Rightarrow y'_0 &= y_0 \\ \Rightarrow y'_0 &= 1 \end{aligned}$$

Agora, substituindo  $y_0 = 1$ ,  $y'_0 = 1$ ,  $y_1 = 1,10517$  e  $h = 0,1$ , obtém-se

$$\begin{aligned} y_2 &= -3y_0 + 4y_1 - 2hy'_0 \\ &= (-3)(1) + (4)(1,10517) - 2(0,1)(1) \cdot \\ &= 1,22068 \end{aligned}$$

Fazendo  $n = 1$  em (3.6.32), tem-se

$$\begin{aligned} y_{1+2} &= -3y_1 + 4y_{1+1} - 2hy'_1 \\ y_3 &= -3y_1 + 4y_2 - 2hy'_1 \end{aligned}$$

Como  $y'_n = y_n$ , segue que

$$\begin{aligned} y'_n &= y_n \\ \Rightarrow y'_1 &= y_1 \cdot \\ \Rightarrow y'_1 &= 1,10517 \end{aligned}$$

Agora, substituindo  $y_1 = 1,10517$ ,  $y'_1 = 1,10517$ ,  $y_2 = 1,22068$  e  $h = 0,1$ , obtém-se

$$\begin{aligned} y_3 &= -3y_1 + 4y_2 - 2hy'_1 \\ &= (-3)(1,10517) + (4)(1,22068) - 2(0,1)(1,10517) \cdot \\ &= 1,34618 \end{aligned}$$

Fazendo  $n = 2$  em (3.6.32), tem-se

$$\begin{aligned} y_{2+2} &= -3y_2 + 4y_{2+1} - 2hy'_2 \\ y_4 &= -3y_2 + 4y_3 - 2hy'_2 \end{aligned}$$

Como  $y'_n = y_n$ , segue que

$$\begin{aligned} y'_n &= y_n \\ \Rightarrow y'_2 &= y_2 \cdot \\ \Rightarrow y'_2 &= 1,22068 \end{aligned}$$

Agora, substituindo  $y_2 = 1,22068$ ,  $y'_2 = 1,22068$ ,  $y_3 = 1,34618$  e  $h = 0,1$ , obtém-se

$$\begin{aligned} y_4 &= -3y_2 + 4y_3 - 2hy'_2 \\ &= (-3)(1,22068) + (4)(1,34618) - 2(0,1)(1,22068) \cdot \\ &= 1,47854 \end{aligned}$$

Analogamente, obtém-se os valores para  $y_5, y_6, y_7, y_8, y_9$  e  $y_{10}$ . A partir da solução analítica



$y_n(x_n) = e^{x_n}$  obtém-se os valores verdadeiros, considerando até a quinta casa decimal

$$\begin{aligned} y_0(x_0) &= e^{x_0} \Rightarrow y_0(0,0) = e^{0,0} = 1,00000 \\ y_1(x_1) &= e^{x_1} \Rightarrow y_1(0,1) = e^{0,1} = 1,10517 \\ y_2(x_2) &= e^{x_2} \Rightarrow y_2(0,2) = e^{0,2} = 1,22140 \\ y_5(x_5) &= e^{x_5} \Rightarrow y_5(0,5) = e^{0,5} = 1,64872 \\ y_7(x_7) &= e^{x_7} \Rightarrow y_7(0,7) = e^{0,7} = 2,01375 \\ y_9(x_9) &= e^{x_9} \Rightarrow y_9(0,9) = e^{0,9} = 2,45960 \\ y_{10}(x_{10}) &= e^{x_{10}} \Rightarrow y_{10}(1,0) = e^{1,0} = 2,71828 \end{aligned}$$

A Tabela (6) expressa a comparação entre alguns valores aproximados  $y_n$  e valores verdadeiros  $y(x_n)$ , bem como o percentual de erro de aproximação.

**Tabela 6: Método não convergente com  $h = 0,1$**

$x_n$	$y_n$	Valor verdadeiro	Erro absoluto	Erro percentual
0,0	1,00000	1,00000	0,00000	0,00000
0,1	1,10517	1,10517	0,00000	0,00000
0,2	1,22068	1,22140	0,00072	0,05895
0,5	1,60638	1,64872	0,04234	2,56805
0,7	1,63634	2,01375	0,37741	18,74165
0,9	-0,74049	2,45960	3,20009	130,10611
1,0	-6,55860	2,71828	9,27688	341,27757

**Fonte: Autoria Própria**

Pelos valores observados na Tabela (6), percebe-se que não se obtém uma boa aproximação numérica da solução analítica do PVI, utilizando o Método dado por (3.6.32). Analisa-se então a convergência do Método. Para isso, escreve-se o (3.6.32) como um Método de Passo Múltiplo.

Fazendo  $k = 2$  em (3.0.1) e considerando  $\alpha_0 = 3$ ,  $\alpha_1 = -4$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\beta_0 = -2$ ,  $\beta_1 = 0$  e

$\beta_2 = 0$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} &= h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j} \\ \sum_{j=0}^2 \alpha_j y_{n+j} &= h \sum_{j=0}^2 \beta_j f_{n+j} , \\ \Rightarrow \alpha_0 y_{n+0} + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_2 y_{n+2} &= h(\beta_0 f_{n+0} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_2 f_{n+2}) \\ \Rightarrow (3)y_n + (-4)y_{n+1} + (1)y_{n+2} &= h((-2)f_{n+0} + (0)f_{n+1} + (0)f_{n+2}) \\ \Rightarrow y_{n+2} &= -3y_n + 4y_{n+1} - 2hf_n \end{aligned}$$

que é o Método (3.6.32).

Substituindo  $\alpha_0 = 3$ ,  $\alpha_1 = -4$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\beta_0 = -2$ ,  $\beta_1 = 0$  e  $\beta_2 = 0$  em (3.3.28), tem-se

$$\begin{aligned} C_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 3 - 4 + 1 = 0, \\ C_1 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 - (\beta_0 + \beta_1) = -4 + (2)(1) - (-2 + 0) = 0, \\ C_2 &= \frac{1}{2!}(\alpha_1 + 2^2\alpha_2) - 1(\beta_1 + 2^1\beta_2) = \frac{1}{2}(-4 + 4) - 1(-2) = 2 \end{aligned}$$

logo,  $C_0 = C_1 = 0$  e  $C_2 \neq 0$ . Portanto segue da Definição (3.3) que a ordem do Método é  $q = 1$  e a constante do erro é  $C_2 = 0$ . Assim de (3.5.30), tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^2 \alpha_j &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 3 - 4 + 1 = 0, \\ \sum_{j=0}^2 j\alpha_j - \sum_{j=0}^2 \beta_j &= 1\alpha_1 + 2\alpha_2 - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) = -4 + 2 - (-2) = 0 \end{aligned}$$

Portanto, o Método é consistente de ordem  $q = 1$ . Por outro lado, ao analisar a estabilidade, tem-se o polinômio característico

$$\begin{aligned} \rho(\xi) &= \sum_{j=0}^k \alpha_j \xi^j \\ &= \sum_{j=0}^2 \alpha_j \xi^j , \\ &= \alpha_0 \xi^0 + \alpha_1 \xi^1 + \alpha_2 \xi^2 \\ &= 3\xi^0 - 4\xi^1 + 1\xi^2 \\ &= \xi^2 - 4\xi + 3 \end{aligned}$$

calculando suas raízes, tem-se

$$\begin{aligned}\rho(\xi) &= 0 \\ \Rightarrow \xi^2 - 4\xi + 3 &= 0 \\ \Rightarrow (\xi - 1)(\xi - 3) &= 0 \\ \Rightarrow \xi = 3 \text{ ou } \xi = 1\end{aligned}$$

Como uma das raízes de  $\rho(\xi)$  tem módulo maior que 1, segue que o Método não é estável. Consequentemente, pela Definição (3.1) o Método não é convergente, o que explica a não aproximação da solução numérica em relação à analítica do PVI.

■

Assim, tanto a consistência como a estabilidade de um Método de  $k$ -passos são importantes para garantir a convergência. Cabe salientar que enquanto a consistência controla o erro local em cada passo a estabilidade controla a forma pela qual o erro se propaga quando o número de passos aumenta. Além disso, quanto maior for a ordem de consistência do método, mais rapidamente obtém-se a solução desejada.

#### 4 MÉTODOS DO TIPO PREVISOR - CORRETOR

Descreve-se aqui como utilizar um Método Linear de Passo Múltiplo implícito, para determinar a solução do PVI (1.1.2).

Para os Métodos de  $k$ -passos implícitos, em cada passo, deve-se resolver para  $y_{n+k}$  a equação

$$y_{n+k} = - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j} + h \beta_k f(x_{n+k}; y_{n+k}), \quad (4.0.1)$$

onde  $y_{n+j}$  e  $f_{n+j}$ ,  $j = 0, 1, \dots, k-1$  são conhecidos. Sendo  $f$  uma função não linear em  $y$ , não se tem, em geral, condições de resolver (4.0.1) em relação a  $y_{n+k}$  de uma forma exata. Entretanto pode ser provado que uma única solução para  $y_{n+k}$  existe e pode ser aproximada pelo método iterativo

$$y_{n+k}^{[s+1]} = - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j} + h \beta_k f(x_{n+k}; y_{n+k}^{[s]}), \quad (4.0.2)$$

onde  $s = 1, 2, \dots$  e mantendo  $x_{n+k}$  fixo,  $y_{n+k}^{[0]}$ , pode ser obtido usando um Método Linear de Passo Múltiplo explícito. Assim

$$y_{n+k}^{[0]} = - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^* y_{n+j} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* f_{n+j}.$$

O método explícito é denominado **Previsor**.

Com esse valor e o método implícito, (4.0.2), o qual é denominado **Corretor**, calcula-se  $y_{n+k}^{[1]}, y_{n+k}^{[2]}, \dots$

Indica-se por

$P$ : aplicação do Previsor,

$E$ : cálculo de  $f(x_{n+k}; y_{n+k}^{[s]})$ ,

$C$ : aplicação do Corretor.

O par Previsor Corretor ( *PC* ) será então aplicado no modo  $P(EC)^mE$ , onde  $m$  é o número de vezes que se calcula  $f$  e se aplica  $C$ . A iteração finaliza quando dois valores sucessivos de  $y$ , obtidos com aplicação de  $C$ , satisfazem a precisão desejada.

Surgem naturalmente, duas questões vinculadas as fórmulas corretoras; a que condições convergirá a fórmula corretora; e quantas iterações serão necessárias para se atingir a precisão desejada. A resposta da segunda questão dependerá de muitos fatores. Contudo, a experiência mostra que somente uma ou duas aplicações da corretora são suficientes, desde que a amplitude do intervalo  $h$  tenha sido selecionada adequadamente. Caso se verifique que uma ou duas correções não são suficientes, será melhor reduzir a amplitude do intervalo  $h$  ao invés de prosseguir a iteração. Assim, na prática, não se usa  $m > 2$ . A resposta à primeira questão está contida no seguinte Teorema.

**Teorema 4.1** *Se  $f(x; y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  forem contínuas em  $x$  e  $y$  no intervalo fechado  $[a, b]$ , e se  $\frac{\partial f}{\partial y}$  não se anular neste intervalo, (4.0.2) convergirá, desde que  $h$  seja escolhido de modo a satisfazer*

$$h < \frac{2}{\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|}.$$

Prova: Pode ser encontrada em (CONTE; BOOR, 1981).

Pode-se agora definir formalmente a aplicação do par *PC*, no modo  $P(EC)^mE$ . Calcular a cada passo

$$y_{n+k}^{[0]} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^* y_{n+j}^{[m]} = h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* f_{n+j}^{[m]},$$

para  $s = 0, 1, \dots, m - 1$ ,

$$\begin{cases} f_{n+k}^{[s]} = f(x_{n+k}; y_{n+k}^{[s]}) \\ y_{n+k}^{[s+1]} = - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j}^{[m]} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j}^{[m]} + h \beta_k f_{n+k}^{[s]}. \end{cases}$$

e finalmente,

$$f_{n+k}^{[m]} = f(x_{n+k}; y_{n+k}^{[m]})$$

**Exemplo 4.1** *Aplique o par *PC*, para resolver o PVI do Exemplo (2.1), onde o previsor é o*

*Método de Adams-Bashforth e o corretor é o Método 1/3 de Simpson,*

$$\begin{aligned} P : y_{n+2} &= y_{n+1} + \frac{h}{2}[-f_n + 3f_{n+1}], \\ C : y_{n+2} &= y_n + \frac{h}{3}[f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2}], \end{aligned} \quad (4.0.3)$$

no modo P(EC)E. Obtenha uma aproximação de  $y(0,5)$  com  $h = 0,1$ . Use o Método de Taylor de ordem 3, para obter os valores iniciais necessários. Resolva também para  $h = 0,05$  e compare os resultados numéricos nos dois tamanhos de passo com a solução exata do PVI.

**Solução:** Considerando que  $y_0 = 2$  e, pelo Exemplo (2.1),  $y_1 = 2,0048$ . Assim, fazendo  $n = 0$  em (4.0.3), obtém-se

$$\begin{aligned} P : y_2^{(0)} &= y_1 + \frac{h}{2}[-f_0 + 3f_1] \\ &= 2,0048 + \frac{0,1}{2}[-0 + 3(0,0952)] , \\ &= 2,0191 \end{aligned}$$

desde que, pelo Exemplo (2.1),  $f_0 = 0$  e  $f_1 = 0,0952$ . Agora,

$$\begin{aligned} E : f_2^{(0)} &= f(x_2; y_2^{(0)}) = f(0,2; 2,0191) \\ &= -2,0191 + 0,2 + 2 \quad . \\ &= 0,1809 \end{aligned}$$

*Portanto*

$$\begin{aligned} C : y_2^{(1)} &= y_0 + \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2^{(0)}] \\ &= 2 + \frac{(0,1)}{3}[0 + 4(0,0952) + 0,1809] \cdot \\ &= 2,0187 \cong y(x_2) = y(0,2) \end{aligned}$$

*Agora*

$$\begin{aligned} E : f_2^{(1)} &= f(x_2; y_2^{(1)}) = f(0,2; 2,0187) \\ &= -2,0187 + 0,2 + 2 \quad . \\ &= 0,1813 \end{aligned}$$

*Finalmente, fazendo  $n = 1$  em (4.0.3), obtém-se*

$$\begin{aligned} P : y_3^{(0)} &= y_2 + \frac{h}{2}[-f_1 + 3f_2] \\ &= 2,0187 + \frac{0,1}{2}[-0,0952 + 3(0,1813)] , \\ &= 2,0411 \end{aligned}$$

desde que  $f_1 = 0,0952$  e  $f_2^{(1)} = 0,1813$ . Agora

$$\begin{aligned} E : f_3^{(0)} &= f(x_3; y_3^{(0)}) = f(0,3; 2,0411) \\ &= -2,0411 + 0,3 + 2 \\ &= 0,2589 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} C : y_3^{(1)} &= y_1 + \frac{h}{3}[f_1 + 4f_2 + f_3^{(0)}] \\ &= 2,0048 + \frac{(0,1)}{3}[0,0952 + 4(0,1813) + 0,2589] \cdot \\ &= 2,0408 \cong y(x_3) = y(0,3) \end{aligned}$$

De forma análoga obtém-se os valores para  $y_4$  e  $y_5$ . A partir dos cálculos de erro absoluto e erro percentual obtém-se a tabela que expressa a comparação entre os valores aproximados  $y_n$  com os valores verdadeiros  $y(x_n)$  calculados no Exemplo (2.1).

**Tabela 7: Par (Adams-Bashforth, 1/3 de Simpson) no modo P(EC)E**

$x_n$	$y_n$	Valor verdadeiro	Erro absoluto	Erro percentual
0,00	2,0000	2,0000	0,0000	0,0000
0,10	2,0048	2,0048	0,0000	0,0000
0,20	2,0187	2,0187	0,0000	0,0000
0,30	2,0408	2,0408	0,0000	0,0000
0,40	2,0702	2,0703	0,0001	0,0048
0,50	2,1064	2,1065	0,0001	0,0047

**Fonte: Autoria Própria**

De forma análoga, calcula-se a solução com o passo  $h = 0,05$ . No entanto, para uma maior agilidade utiliza-se o software Maple 16.

```
PECE_AdamsBashforth13Simpson:=proc(xmin,xmax,N)
local i,P,E,C:
global x,y,TabelaErro:
h := abs(xmax-xmin)/N;
##### Taylor de Ordem 3
yDuasLinhas := (a, b) ->
subs(diff(b(a),a)=yLinha(a,b),diff(yLinha(a,b(a)),a));
yTresLinhas:=(a,b)->
subs(diff(b(a),a)=yLinha(a,b),diff(yDuasLinhas(a,b(a)),a));
y[1] := y[0]+
h*yLinha(x[0],y[0])+
(h^2/2)*yDuasLinhas(x[0],y[0])+
```

```

      (h^3/6)*yTresLinhas(x[0],y[0]):
      x[1] := x[0]+h:
      E := yLinha(x[1],y[1]):
#=====
      for i from 2 to N do
      x[i] := x[i-1]+h:
      P := evalf(
      y[i-1]+
      (h/2)*(
      -yLinha(x[i-2],y[i-2])+
      3*E
      )
      ):
      E := evalf(yLinha(x[i],P)):
      C := evalf(
      y[i-2]+
      (h/3)*(
      yLinha(x[i-2],y[i-2])+
      4*yLinha(x[i-1],y[i-1])+E
      )
      ):
      y[i] := C:
      E := yLinha(x[i],y[i]):
      end do:
end proc:

```

A tabela de resultados para  $h = 0,05$  é da seguinte forma.

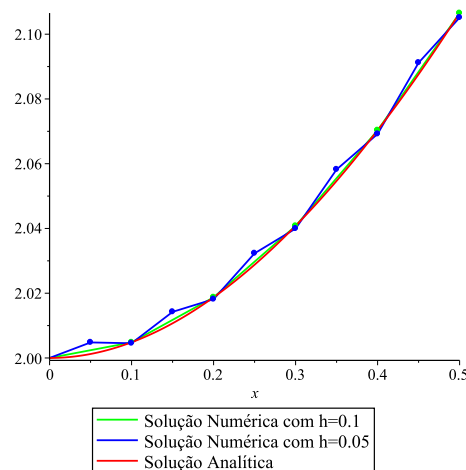
	"x[n]"	"y[n]"	"Analítica"	"Erro Abs"	"Erro Per"
TabelaErro:=	0.100000000	2.004481000	2.004837418	0.000356418	0.01777790043
	0.200000000	2.018089256	2.018730753	0.000641497	0.03177724414
	0.300000000	2.039897284	2.040818221	0.000920937	0.04512587111
	0.400000000	2.069123306	2.070320046	0.001196740	0.05780458931
	0.500000000	2.105059841	2.106530660	0.001470819	0.06982186530

Para melhor entendimento observa-se o gráfico obtido, que apresenta as curvas das soluções numéricas com os passos  $h = 0,1$  e  $h = 0,05$  e da solução analítica.

```

display(
  Numerical1,
  Numerica2,
  Analitica,
  Pontos1,
  Pontos2
);

```





*Conclui-se que uma aproximação para  $y(0,5)$  com o tamanho do passo  $h = 0,1$  é 2,1064. Já para o passo  $h = 0,05$  a aproximação é de 2.105059841.*

■

## 5 MÉTODO GERAL EXPLÍCITO DE 1-PASSO

Muitas vezes deseja-se resolver o PVI (1.1.2) usando um Método de  $k$ -passos;  $k > 1$ . É necessário então obter os valores iniciais necessários, para se utilizar tal método, que seja o mais preciso possível.

Isto pode ser feito por meio do Método de Taylor de ordem  $q$ , se possível, pois nem sempre existem as derivadas de ordem superior de  $f$ , ou então pelos Métodos de Runge-Kutta, descritos neste Capítulo, desde que ambos são métodos explícitos de 1-passo. Os Métodos de Runge-Kutta, assim como o Método de Taylor de ordem  $q$ , também podem ser utilizados para determinar a solução do PVI para  $x \in [a; b]$ .

**Definição 5.1** *Um método geral explícito de 1-passo é definido pela relação*

$$y_{n+1} - y_n = h\phi(x_n; y_n; h). \quad (5.0.1)$$

onde  $\phi$  é uma função que depende de  $x_n, y_n$  e  $h$ .

### 5.1 ORDEM

**Definição 5.2** *O método (5.0.1) é de **ordem**  $q$ , se  $q$  é o maior inteiro tal que*

$$y(x+h) - y(x) - h\phi(x; y(x); h) = O(h^{q+1}), \quad (5.1.2)$$

onde  $y(x)$  é a solução exata do PVI (1.1.2).

### 5.2 CONSISTÊNCIA

**Definição 5.3** *O método (5.0.1) é **consistente** com o PVI (1.1.2) se*

$$\phi(x; y; 0) = f(x; y). \quad (5.2.3)$$

**Exemplo 5.1** Considere o método de Taylor de ordem  $q$ , dado por (2.0.4).

- a) Verifique que (2.0.4) é um método geral explícito de um passo;  
 b) Determine sua ordem, usando (5.1.2);  
 c) Verifique se é consistente, usando (5.2.3).

**Solução:**

- a) Verifique que (2.0.4) é um método geral explícito de 1-passo;

Tem-se por (2.0.4), que

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf_n + \frac{h^2}{2!}f'_n + \dots + \frac{h^q}{q!}f_n^{(q-1)} \\ \Rightarrow y_{n+1} &= y_n + h \left[ f_n + \frac{h}{2!}f'_n + \dots + \frac{h^{q-1}}{q!}f_n^{(q-1)} \right], \\ \Rightarrow y_{n+1} &= y_n + h\phi_T(x_n; y_n; h) \\ \Rightarrow y_{n+1} - y_n &= h\phi_T(x_n; y_n; h) \end{aligned}$$

onde se denota por  $\phi_T(x; y; h)$ , a função  $\phi$  do Método de Taylor calculada no ponto  $(x; y)$ , isto é

$$\phi_T(x; y; h) = f(x; y) + \frac{h}{2!}f'(x; y) + \dots + \frac{h^{q-1}}{q!}f^{(q-1)}(x; y). \quad (5.2.4)$$

Assim (2.0.4) é um método geral explícito de um passo.

- b) Determine sua ordem, usando (5.1.2);

Substituindo (2.0.1) e (5.2.4) em (5.1.2), obtém-se

$$\begin{aligned} &y(x+h) - y(x) - h\phi(x; y; h) \\ &= y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \dots + \frac{h^q}{q!}y^q(x) + O(h^{q+1}) \\ &\quad - y(x) - h \left[ f(x; y) + \frac{h}{2!}f'(x; y) + \dots + \frac{h^{q-1}}{q!}f^{(q-1)}(x; y) \right], \\ &= y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \dots + \frac{h^q}{q!}y^q(x) + O(h^{q+1}) \\ &\quad - y(x) - h \left[ y' + \frac{h}{2!}y'' + \dots + \frac{h^{q-1}}{q!}y^{(q)} \right] \\ &= O(h^{q+1}) \end{aligned}$$

Portanto o Método de Taylor tem ordem  $q$ .

c) Verifique se é consistente, usando (5.2.3). Tem-se

$$\begin{aligned}\phi_T(x; y; h) &= f(x; y) + \frac{h}{2!} f'(x; y) + \dots + \frac{h^{q-1}}{q!} f^{(q-1)}(x; y) \\ \Rightarrow \phi_T(x; y; 0) &= f(x; y) + \frac{0}{2!} f'(x; y) + \dots + \frac{0^{q-1}}{q!} f^{(q-1)}(x; y) \\ \Rightarrow \phi_T(x; y; 0) &= f(x; y)\end{aligned}\tag{5.2.5}$$

e portanto o Método de Taylor que tem ordem  $q$  é consistente com o PVI (1.1.2).

### 5.3 CONVERGÊNCIA

**Teorema 5.1** *Seja  $\phi(x; y; h)$  satisfazendo as condições:*

1.  $\phi(x; y; h)$  é contínua em

$$S = \{(x; y; h) \mid a \leq x \leq b; -\infty < y < \infty; 0 < h \leq h_0, h_0 > 0\}$$

2.  $\phi(x; y; h)$  satisfaz a condição de Lipschitz em relação a  $y$ , isto é

$$|\phi(x; y; h) - \phi(x; y^*; h)| \leq L|y - y^*|,$$

para todos os pontos  $(x; y; h)$  e  $(x; y^*; h)$  em  $S$ .

Então o método (5.0.1) é **convergente** se e somente se é consistente.

Para todos os métodos descritos aqui, as condições do Teorema (5.1) são satisfeitas se  $f(x; y)$  satisfaz as hipóteses do Teorema (1.2). Para tais métodos, consistência é condição necessária e suficiente para garantir convergência.

### 5.4 MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

**Definição 5.4** *O método geral de Runge-Kutta de  $R$  estágios é definido por*

$$y_{n+1} - y_n = h\phi(x_n; y_n; h),$$

onde

$$\begin{aligned}
 \phi(x; y; h) &= \sum_{r=1}^R c_r k_r \\
 k_1 &= f(x; y), \\
 k_r &= f\left(x + a_r h; y + h \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} k_s\right); \quad r = 2, 3, \dots, R, \\
 a_r &= \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs}; \quad r = 2, 3, \dots, R
 \end{aligned} \tag{5.4.6}$$

Para se obter Métodos de Runge-Kutta deve-se determinar as constantes  $c_r$ ,  $a_r$  e  $b_{rs}$  da Definição (5.4). Determina-se estas constantes comparando a expansão da função  $\phi(x; y; h)$ , definida por (5.4.6), em potências de  $h$ , com a função  $\phi_T(x; y; h)$  do Método de Taylor, (5.2.4), no sentido de se obter métodos de determinada ordem. Observa-se a seguir como fazer isso.

#### 5.4.1 Métodos de Runge-Kutta de ordem 2

Considera-se inicialmente obter métodos de Runge-Kutta de 2 estágios. Deve-se tomar então  $R = 2$ , na Definição (5.4). Assim

$$\begin{aligned}
 \phi(x; y; h) &= c_1 k_1 + c_2 k_2, \\
 k_1 &= f(x; y), \\
 k_2 &= f(x + a_2 h; y + h b_{21} k_1), \\
 a_2 &= b_{21}
 \end{aligned}$$

Portanto

$$k_2 = f(x + a_2 h; y + h a_2 f)$$

Desenvolvendo  $k_2$  em série de Taylor em torno do ponto  $(x; y)$ , obtém-se

$$\begin{aligned}
 k_2 &= f(x; y) + (a_2 h) f_x(x; y) + (h a_2 f) f_y(x; y) + \frac{(a_2 h)^2}{2!} f_{xx}(x; y) \\
 &+ (a_2 h)(h a_2 f) f_{xy}(x; y) + \frac{(h a_2 f)^2}{2!} f_{yy}(x; y) + O(h^3)
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 & \phi(x; y; h) \\
 = & c_1 k_1 + c_2 k_2 \\
 = & c_1 f + c_2 \left[ f + (a_2 h) f_x + (a_2 h f) f_y + \frac{(a_2 h)^2}{2!} f_{xx} + (a_2 h)^2 f f_{xy} + \frac{(a_2 h f)^2}{2!} f_{yy} + O(h^3) \right] \\
 = & (c_1 + c_2) f + c_2 a_2 h (f_x + f_y f) + \frac{(a_2 h)^2}{2!} c_2 [f_{xx} + 2f f_{xy} + f_{yy} f^2] + O(h^3),
 \end{aligned}$$

onde agrupando os termos de mesma potência de  $h$  e denotando por

$$F = f_x + f_y f eG = f_{xx} + 2f f_{xy} + f_{yy} f^2, \quad (5.4.7)$$

tem-se

$$\phi(x; y; h) = (c_1 + c_2) f + c_2 a_2 h F + \frac{(a_2 h)^2}{2!} c_2 G + O(h^3). \quad (5.4.8)$$

Agora pode escrever a função  $\phi_T(x; y; h)$ , (5.2.4), como

$$\begin{aligned}
 \phi_T(x; y; h) &= f(x; y) + \frac{h}{2!} f'(x; y) + \frac{h^2}{3!} f''(x; y) + O(h^3) \\
 &= f + \frac{h}{2!} (f_x + f_y f) + \frac{h^2}{3!} (f_{xx} + 2f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_x f_y + f_y^2 f) + O(h^3)
 \end{aligned}$$

Agrupando os termos semelhantes e usando (5.4.7), obtém-se

$$\phi_T(x; y; h) = f + \frac{h}{2} F + \frac{h^2}{3!} [G + f_y F] + O(h^3). \quad (5.4.9)$$

Para determinar um método de 2 estágios e ordem máxima, compara-se (5.4.8) com (5.4.9), com isso

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_2 a_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (5.4.10)$$

Resolvendo esse sistema obtém-se Métodos de Runge-Kutta de ordem 2, pois na Definição (5.4), tem-se  $h\phi(x; y; h)$  e portanto impõe-se igualdade até termos da  $O(h^2)$ . Além disso, como o sistema (5.4.10) possui 2 equações e 3 incógnitas, este possui infinitas soluções e portanto pode-se afirmar que existem infinitos Métodos de Runge-Kutta de 2 estágios e ordem 2.

Observe que para se obter um Método de Runge-Kutta de 2 estágios e ordem 3, é necessário

que além de (5.4.10) tenha-se

$$\begin{aligned} \frac{a_2^2 c_2}{2} G &= \frac{G}{6} + \frac{1}{6} f_y F \\ \Rightarrow \left( \frac{a_2^2 c_2}{2} - \frac{1}{6} \right) G &= \frac{1}{6} f_y F \end{aligned}$$

A igualdade acima só pode ser satisfeita impondo severas condições sobre a função  $f$ , e portanto não existem Métodos de Runge-Kutta de 2 estágios e ordem 3. Com isso, atribuindo um valor para uma das constantes em (5.4.10), obtém-se as outras duas, em função desta. Os Métodos de Runge-Kutta de 2-estágios e ordem 2, mais usados são obtidos tomando

1.  $c_1 = 0$  então  $c_2 = 1$  e  $a_2 = 1/2$ , portanto

$$y_{n+1} = y_n + h k_2, \quad (5.4.11)$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n; y_n), \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h; y_n + \frac{1}{2}h k_1\right), \end{aligned}$$

que é conhecido como **Método de Euler Modificado**. Observe que apesar de  $k_1$  não aparecer explicitamente, ele deve ser calculado a cada passo.

2.  $c_1 = 1/2$  então  $c_2 = 1/2$  e  $a_2 = 1$ , portanto

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \quad (5.4.12)$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n; y_n), \\ k_2 &= f(x_n + h; y_n + h k_1), \end{aligned}$$

que é conhecido como **Método de Euler Melhorado**.

**Exemplo 5.2** *Aplique o Método de Euler Modificado, para resolver o PVI do Exemplo (2.1), obtendo uma aproximação de  $y(0,5)$  com  $h = 0,1$ . Resolva também para  $h = 0,05$  e compare os resultados numéricos nos dois tamanhos de passo com a solução exata do PVI.*

**Solução Numérica:** *O Método de Euler Modificado é dado por (5.4.11), sendo*

$$y_{n+1} = y_n + h k_2,$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n; y_n), \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h; y_n + \frac{1}{2}hk_1\right). \end{aligned}$$

Fazendo  $n = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 2$  e  $h = 0,1$  na equação (5.4.11), obtém-se

$$\begin{aligned} y_{0+1} &= y_0 + hk_2 \\ y_1 &= y_0 + hk_2 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_0; y_0) \\ &= f(0; 2) \\ &= -2 + 0 + 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(x_0 + \frac{1}{2}h; y_0 + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ &= f\left(0 + \frac{1}{2}(0,1); 2 + \frac{1}{2}(0,1)(0)\right) \\ &= f(0,05; 2) \\ &= -2 + 0,05 + 2 \\ &= 0,05 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hk_2 \\ &= 2 + (0,1)(0,05) \\ &= 2 + 0,005 \\ &= 2,005 \end{aligned}$$

Fazendo  $n = 1$ ,  $x_1 = 0,1$ ,  $y_1 = 2,005$  e  $h = 0,1$  na equação (5.4.11), obtém-se

$$\begin{aligned} y_{1+1} &= y_1 + hk_2 \\ y_2 &= y_1 + hk_2 \end{aligned}$$



onde

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_1; y_1) \\
 &= f(0, 1; 2, 005) \\
 &= -2, 005 + 0, 1 + 2 \\
 &= 0, 095
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 k_2 &= f\left(x_1 + \frac{1}{2}h; y_1 + \frac{1}{2}hk_1\right) \\
 &= f\left(0, 1 + \frac{1}{2}(0, 1); 2, 005 + \frac{1}{2}(0, 1)(0, 095)\right) \\
 &= f(0, 15; 2, 00975) \\
 &= -2, 00975 + 0, 15 + 2 \\
 &= 0, 14025
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 y_2 &= y_1 + hk_2 \\
 &= 2, 005 + (0, 1)(0, 14025) \\
 &= 2 + 0, 014025 \\
 &= 2, 0190
 \end{aligned}$$

Fazendo  $n = 2$ ,  $x_2 = 0, 2$ ,  $y_2 = 2, 0190$  e  $h = 0, 1$  na equação (5.4.11), obtém-se

$$\begin{aligned}
 y_{2+1} &= y_2 + hk_2 \\
 y_3 &= y_2 + hk_2
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_2; y_2) \\
 &= f(0, 3; 2, 0190) \\
 &= -2, 0190 + 0, 3 + 2 \\
 &= 0, 1810
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 k_2 &= f\left(x_2 + \frac{1}{2}h; y_2 + \frac{1}{2}hk_1\right) \\
 &= f\left(0,2 + \frac{1}{2}(0,1); 2,0190 + \frac{1}{2}(0,1)(0,1810)\right) \\
 &= f(0,25; 2,02805) \\
 &= -2,02805 + 0,25 + 2 \\
 &= 0,22195
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 y_3 &= y_2 + hk_2 \\
 &= 2,0190 + (0,1)(0,22195) \\
 &= 2,0190 + 0,022195 \\
 &= 2,0412
 \end{aligned}$$

De forma análoga obtém-se os resultados para  $y_4$  e  $y_5$ . A partir dos cálculos de erro absoluto e erro percentual obtém-se a Tabela (8) que expressa a comparação entre os valores aproximados  $y_n$  com os valores verdadeiros  $y(x_n)$ , calculados no Exemplo (2.1).

**Tabela 8: Método de Euler Modificado com  $h = 0,1$**

$x_n$	$y_n$	Valor verdadeiro	Erro absoluto	Erro percentual
0,00	2,0000	2,0000	0,0000	0,0000
0,10	2,0050	2,0048	0,0002	0,0010
0,20	2,0190	2,0187	0,0003	0,0149
0,30	2,0412	2,0408	0,0004	0,0196
0,40	2,0709	2,0703	0,0006	0,0290
0,50	2,1072	2,1065	0,0007	0,0332

**Fonte: Autoria Própria**

De forma análoga, calcula-se a solução com o passo  $h = 0,05$ . No entanto, para uma maior agilidade dos cálculos utilizou-se o software Maple 16, como pode ser observado

```

EulerModificado:=proc(xmin,xmax,N)
local i,k1,k2:
global x,y:
h := abs(xmax-xmin)/N:
for i from 1 to N do
x[i] := x[i-1]+h:

```

```

    k1 := yLinha(x[i-1],y[i-1]):
    k2 := yLinha(x[i-1]+(1/2)*h,y[i-1]+(1/2)*h*k1):
    y[i] := evalf(y[i-1]+h*k2):
  end do:
end proc:

```

A tabela de resultados para  $h = 0,05$  é da seguinte forma

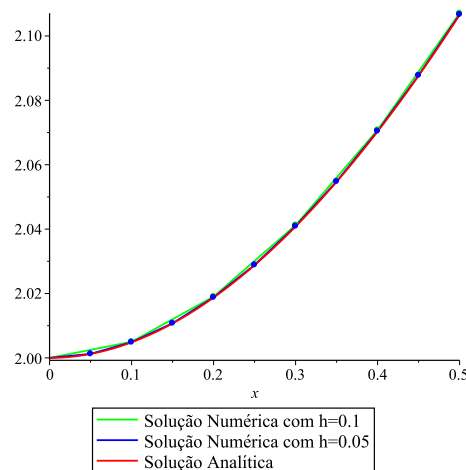
	“x[n]”	“y[n]”	“Analítica”	“Erro Abs”	“Erro Per”
TabelaErro:=	0.100000000	2.004876562	2.004837418	0.000039144	0.001952477525
	0.200000000	2.018801593	2.018730753	0.000070840	0.003509135624
	0.300000000	2.040914371	2.040818221	0.000096150	0.004711345627
	0.400000000	2.070436049	2.070320046	0.000116003	0.005603143351
	0.500000000	2.106661868	2.106530660	0.000131208	0.006228629969

Para melhor entendimento observa-se o gráfico obtido, que apresenta as curvas das soluções numéricas com os passos  $h = 0,1$  e  $h = 0,05$  e da solução analítica.

```

display(
  Numerical1,
  Numerica2,
  Analitica,
  Pontos1,
  Pontos2
);

```



Conclui-se que uma aproximação para  $y(0,5)$  com o tamanho do passo  $h = 0,1$  é 2,1072. Já para o passo  $h = 0,05$  a aproximação é de 2,106661868.

■

**Exemplo 5.3** Aplique o Método de Euler Melhorado, para resolver o PVI do Exemplo (2.1), obtendo uma aproximação de  $y(0,5)$  com  $h = 0,1$ . Resolva também para  $h = 0,05$  e compare os resultados numéricos nos dois tamanhos de passo com a solução analítica do PVI.

**Solução Numérica: O Método de Euler Melhorado**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) ,$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n; y_n), \\ k_2 &= f(x_n + h; y_n + hk_1) . \end{aligned}$$

Fazendo  $n = 1$ ,  $x_1 = 0,1$ ,  $y_1 = 2,005$  e  $h = 0,1$  na equação (5.4.12), obtém-se

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2),$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_1; y_1) \\ &= f(0,1; 2,005) \\ &= -2,005 + 0,1 + 2 , \\ &= 0,095 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} k_2 &= f(x_1 + h; y_1 + hk_1) \\ &= f(0,1 + 0,1; 2,005 + (0,1)(0,095)) \\ &= f(0,2; 2,0145) \\ &= 0,1855 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ &= 2,005 + (0,05)(0,095 + 0,1855) . \\ &= 2,0190 \end{aligned}$$

Fazendo  $n = 2$ ,  $x_2 = 0,2$ ,  $y_2 = 2,0190$  e  $h = 0,1$  na equação (5.4.12), obtém-se

$$\begin{aligned} y_{2+1} &= y_2 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ y_3 &= y_2 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) , \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_2; y_2) \\
 &= f(0,2; 2,0190) \\
 &= -2,0190 + 0,2 + 2 \\
 &= 0,1810
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 k_2 &= f(x_2 + h; y_2 + hk_1) \\
 &= f(0,2 + 0,1; 2,0190 + (0,1)(0,1810)) \\
 &= f(0,3; 2,0371) \\
 &= 0,2629
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 y_3 &= y_2 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\
 &= 2,0190 + (0,05)(0,1810 + 0,2629) \\
 &= 2,0412
 \end{aligned}$$

De forma análoga obtém-se os resultados para  $y_4$  e  $y_5$ . A partir dos cálculos de erro absoluto e erro percentual obtém-se a tabela que expressa a comparação entre os valores aproximados  $y_n$  com os valores verdadeiros  $y(x_n)$ , calculados no Exemplo (2.1).

**Tabela 9: Método de Euler Melhorado com  $h = 0,1$**

$x_n$	$y_n$	Valor verdadeiro	Erro absoluto	Erro percentual
0,00	2,0000	2,0000	0,0000	0,0000
0,10	2,0050	2,0048	0,0002	0,0010
0,20	2,0190	2,0187	0,0003	0,0149
0,30	2,0412	2,0408	0,0004	0,0196
0,40	2,0708	2,0703	0,0005	0,0242
0,50	2,1071	2,1065	0,0006	0,0285

**Fonte: Autoria Própria**

De forma análoga, calcula-se a solução com o passo  $h = 0,05$ . No entanto, para uma maior agilidade dos cálculos utilizou-se o software Maple 16. O procedimento implementado para a resolução deste Método é o que se segue

```

EulerMelhorado:=proc(xmin,xmax,N)
local i,k1,k2:
global x,y,TabelaErro:
h := abs(xmax-xmin)/N;
  for i from 1 to N do
    x[i] := x[i-1]+h:
    k1 := yLinha(x[i-1],y[i-1]):
    k2 := yLinha(x[i-1]+h,y[i-1]+h*k1):
    y[i] := evalf(y[i-1]+(h/2)*(k1+k2)):
  end do:
end proc:

```

A tabela de resultados para  $h = 0,05$  é da seguinte forma

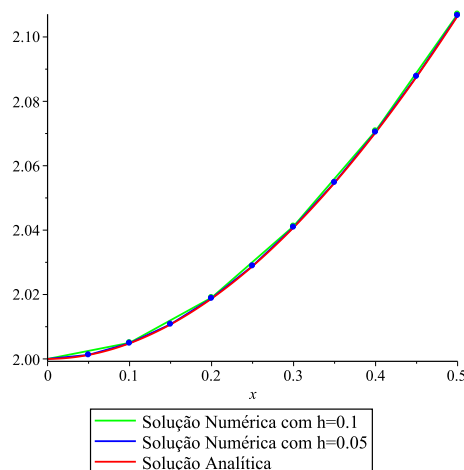
	"x[n]"	"y[n]"	"Analítica"	"Erro Abs"	"Erro Per"
TabelaErro:=	0.100000000	2.004876562	2.004837418	0.000039144	0.001952477525
	0.200000000	2.018801593	2.018730753	0.000070840	0.003509135624
	0.300000000	2.040914370	2.040818221	0.000096149	0.004711296627
	0.400000000	2.070436048	2.070320046	0.000116002	0.005603095049
	0.500000000	2.106661867	2.106530660	0.000131207	0.006228582498

Para melhor entendimento observa-se o gráfico obtido, que apresenta as curvas das soluções numéricas com os passos  $h = 0,1$  e  $h = 0,05$  e da solução analítica.

```

display(
  Numerical1,
  Numerical2,
  Analitica,
  Pontos1,
  Pontos2
);

```



Conclui-se que uma aproximação para  $y(0,5)$  com o tamanho do passo  $h = 0,1$  é 2,1071. Já para o passo  $h = 0,05$  a aproximação é de 2,106661867.

### 5.4.2 Métodos de Runge-Kutta de ordem 3

Se deseja-se obter Métodos de Runge-Kutta de 3 estágios, deve-se além do que já foi feito no capítulo anterior, desenvolver também  $k_3$  em série de Taylor, pois os Métodos de Runge-Kutta de 3 estágios são obtidos a partir de

$$y_{n+1} = y_n + h(c_1k_1 + c_2k_2 + c_3k_3) ,$$

onde,  $k_1$  e  $k_2$  possuem as mesmas expressões do método de 2-estágios e,

$$\begin{aligned} k_3 &= f(x + ha_3; y + hb_{31}k_1 + b_{32}k_2) \\ &= f(x + ha_3; y + h(a_3 - b_{32})k_1 + b_{32}k_2) , \end{aligned}$$

desde que  $a_3 = b_{31} + b_{32}$ . Deve-se então agrupar os termos semelhantes e compará-los com a  $\phi_T(x; y; h)$ . Como pode ser observado no Capítulo anterior, a obtenção de Métodos de Runge-Kutta envolve manipulações mais complexas, e assim serão omitidas. Será dado aqui apenas o sistema obtido quando se compara  $\phi$  com  $\phi_T$  para se obter Métodos de Runge-Kutta de 3 estágios e ordem máxima. Assim

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ c_2a_2 + c_3a_3 = \frac{1}{2} \\ c_3b_{32}a_2 = \frac{1}{6} \\ c_2a_2^2 + c_3a_3^2 = \frac{1}{3} \end{array} \right. \quad (5.4.13)$$

que é um sistema de 4 equações e 6 incógnitas, onde se compara os termos de  $\phi$  e  $\phi_T$  até  $O(h^3)$ . Atribuindo valores a duas das variáveis obtém-se as outras quatro em função destas. Novamente têm-se infinitos Métodos de Runge-Kutta de 3 estágios e ordem 3. Também nesse caso não se consegue métodos de 3 estágios e ordem 4 a menos que se imponha condições sobre a  $f$ .

Os Métodos de Runge-Kutta de 3 estágios e ordem 3, mais populares, são obtidos de (5.4.13), fazendo

1.  $c_1 = 1/4$  e  $c_2 = 0$ .

Assim, da primeira equação, de (5.4.13), obtém-se  $c_3 = 3/4$ . Substituindo-se na segunda

equação segue que  $3/4a_3 = 1/2 \rightarrow a_3 = 2/3$ . Finalmente da última equação, resulta que

$$(0)(a_2^2) + \frac{3}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

que é satisfeita para qualquer valor de  $a_2$ . Escolhendo-se então  $a_2 = 1/3$  obtemos da terceira equação que  $b_{32} = 2/3$ . Portanto

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3), \text{ onde:}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n; y_n), \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{3}h; y_n + \frac{1}{3}hk_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{2}{3}h; y_n + \frac{2}{3}hk_2\right), \end{aligned} \tag{5.4.14}$$

que é conhecido como **Método de Heun**. Novamente, o termo  $k_2$  não parece explicitamente, mas deve ser calculado a cada passo, como pode ser observado no próximo exemplo.

**Exemplo 5.4** *Aplique o Método de Heun, para resolver o PVI do Exemplo (2.1), obtendo uma aproximação de  $y(0,5)$  com  $h = 0,1$ . Resolva também para  $h = 0,05$  e compare os resultados numéricos nos dois tamanhos de passo com a solução analítica do PVI.*

**Solução Numérica:** *O Método de Heun é dado por (5.4.14), sendo*

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3),$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n; y_n), \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{3}h; y_n + \frac{1}{3}hk_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{2}{3}h; y_n + \frac{2}{3}hk_2\right) \end{aligned}$$

Fazendo  $n = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 2$  e  $h = 0,1$  na equação (5.4.14), obtém-se

$$\begin{aligned} y_{0+1} &= y_0 + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3) \\ y_1 &= y_0 + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3), \end{aligned}$$



onde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_0; y_0) \\ &= f(0; 2) \quad , \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(x_0 + \frac{1}{3}h; y_0 + \frac{1}{3}hk_1\right), \\ &= f\left(0 + \frac{1}{3}(0, 1); 2 + \frac{1}{3}(0, 1)(0)\right), \\ &= 0,0333 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} k_3 &= f\left(x_0 + \frac{2}{3}h; y_0 + \frac{2}{3}hk_2\right) \\ &= f\left(0 + \frac{2}{3}(0, 1); 2 + \frac{2}{3}(0, 1)(0,0333)\right) \cdot \\ &= 0,0644 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3) \\ &= 2 + \frac{0,1}{4}(0,0333 + (3)(0,0644)) \cdot \\ &= 2,00483 \end{aligned}$$

Fazendo agora  $n = 1$ ,  $x_1 = 0,1$ ,  $y_1 = 2,00483$  e  $h = 0,1$  na equação (5.4.14), obtém-se

$$\begin{aligned} y_{1+1} &= y_1 + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3) \\ y_2 &= y_1 + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3) \quad , \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_1; y_1) \\ &= f(0,1; 2,00483) \quad , \\ &= 0,09517 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(x_1 + \frac{1}{3}h; y_1 + \frac{1}{3}hk_1\right) \\ &= f\left(0,1 + \frac{1}{3}(0,1); 2,00483 + \frac{1}{3}(0,1)(0,09517)\right), \\ &= 0,12533 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 k_3 &= f\left(x_1 + \frac{2}{3}h; y_1 + \frac{2}{3}hk_2\right) \\
 &= f\left(0, 1 + \frac{2}{3}(0, 1); 2, 00483 + \frac{2}{3}(0, 1)(0, 12533)\right) \cdot \\
 &= 0, 15348
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 y_2 &= y_1 \frac{h}{4} (k_1 + 3k_3) \\
 &= 2, 00483 + \frac{0, 1}{4} (0, 09517 + (3)(0, 15348)) \cdot \\
 &= 2, 01872
 \end{aligned}$$

Fazendo  $n = 2$ ,  $x_2 = 0, 2$ ,  $y_2 = 2, 01872$  e  $h = 0, 1$  na equação (5.4.14), obtém-se

$$\begin{aligned}
 y_{2+1} &= y_2 + \frac{h}{4} (k_1 + 3k_3) \\
 y_3 &= y_2 + \frac{h}{4} (k_1 + 3k_3) \quad ,
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_2; y_2) \\
 &= f(0, 2; 2, 01872) \quad , \\
 &= 0, 18128
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 k_2 &= f\left(x_2 + \frac{1}{3}h; y_2 + \frac{1}{3}hk_1\right) \\
 &= f\left(0, 2 + \frac{1}{3}(0, 1); 2, 01872 + \frac{1}{3}(0, 1)(0, 18128)\right) \cdot \\
 &= 0, 20854
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 k_3 &= f\left(x_2 + \frac{2}{3}h; y_2 + \frac{2}{3}hk_2\right) \\
 &= f\left(0, 2 + \frac{2}{3}(0, 1); 2, 01872 + \frac{2}{3}(0, 1)(0, 20854)\right) \cdot \\
 &= 0, 23405
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 y_3 &= y_2 + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3) \\
 &= 2,01872 + \frac{0,1}{4}(0,18128 + (3)(0,23405)) \cdot \\
 &= 2,04081
 \end{aligned}$$

De forma análoga obtém-se os resultados para  $y_4$  e  $y_5$ . A partir dos cálculos de erro absoluto e erro percentual obtém-se a tabela que expressa a comparação entre os valores aproximados  $y_n$  com os valores verdadeiros  $y(x_n)$ , calculados no Exemplo (2.1).

**Tabela 10: Método de Heun com  $h = 0,1$**

$x_n$	$y_n$	Valor verdadeiro	Erro absoluto	Erro percentual
0,00	2,00000	2,00000	0,00000	0,00000
0,10	2,00483	2,00484	0,00001	0,00050
0,20	2,01872	2,01873	0,00001	0,00050
0,30	2,04081	2,04082	0,00001	0,00049
0,40	2,07031	2,07032	0,00001	0,00048
0,50	2,10652	2,10653	0,00001	0,00047

**Fonte: Autoria Própria**

De forma análoga, calcula-se a solução com o passo  $h = 0,05$ . No entanto, para uma maior agilidade dos cálculos utilizou-se o software Maple 16, como pode ser observado

```

RK3Heun:=proc(xmin,xmax,N)
local i,k1,k2,k3:
global x,y:
h := abs(xmax-xmin)/N;
for i from 1 to N do
x[i] := x[i-1]+h:
k1 := yLinha(x[i-1],y[i-1]):
k2 := yLinha(x[i-1]+(1/3)*h,y[i-1]+(1/3)*h*k1):
k3 := yLinha(x[i-1]+(2/3)*h,y[i-1]+(2/3)*h*k2):
y[i] := evalf(y[i-1]+(h/4)*(k1+3*k3)):
end do:
end proc:

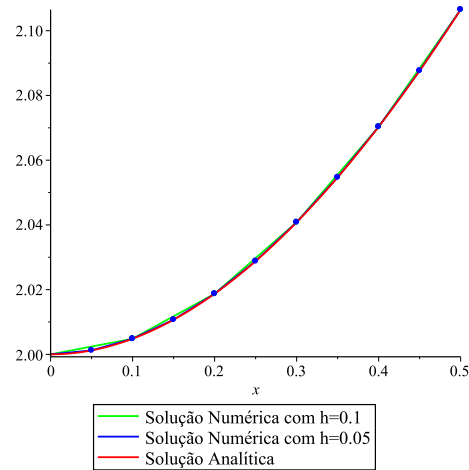
```

A tabela de resultados para  $h = 0,05$  é da seguinte forma

$TabelaErro:=$	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left;">“x[n]”</th> <th style="text-align: left;">“y[n]”</th> <th style="text-align: left;">“Analítica”</th> <th style="text-align: left;">“Erro Abs”</th> <th style="text-align: left;">“Erro Per”</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0.100000000</td> <td>2.004836928</td> <td>2.004837418</td> <td>0.000000490</td> <td>0.00002444088461</td> </tr> <tr> <td>0.200000000</td> <td>2.018729866</td> <td>2.018730753</td> <td>0.000000887</td> <td>0.00004393849941</td> </tr> <tr> <td>0.300000000</td> <td>2.040817016</td> <td>2.040818221</td> <td>0.000001205</td> <td>0.00005904494519</td> </tr> <tr> <td>0.400000000</td> <td>2.070318593</td> <td>2.070320046</td> <td>0.000001453</td> <td>0.00007018238570</td> </tr> <tr> <td>0.500000000</td> <td>2.106529017</td> <td>2.106530660</td> <td>0.000001643</td> <td>0.00007799554173</td> </tr> </tbody> </table>	“x[n]”	“y[n]”	“Analítica”	“Erro Abs”	“Erro Per”	0.100000000	2.004836928	2.004837418	0.000000490	0.00002444088461	0.200000000	2.018729866	2.018730753	0.000000887	0.00004393849941	0.300000000	2.040817016	2.040818221	0.000001205	0.00005904494519	0.400000000	2.070318593	2.070320046	0.000001453	0.00007018238570	0.500000000	2.106529017	2.106530660	0.000001643	0.00007799554173
“x[n]”	“y[n]”	“Analítica”	“Erro Abs”	“Erro Per”																											
0.100000000	2.004836928	2.004837418	0.000000490	0.00002444088461																											
0.200000000	2.018729866	2.018730753	0.000000887	0.00004393849941																											
0.300000000	2.040817016	2.040818221	0.000001205	0.00005904494519																											
0.400000000	2.070318593	2.070320046	0.000001453	0.00007018238570																											
0.500000000	2.106529017	2.106530660	0.000001643	0.00007799554173																											

Para melhor entendimento observa-se o gráfico obtido, que apresenta as curvas das soluções numéricas com os passos  $h = 0,1$  e  $h = 0,05$  e da solução analítica.

```
display(
    Numerica1,
    Numerica2,
    Analitica,
    Pontos1,
    Pontos2
);
```



Conclui-se que uma aproximação para  $y(0,5)$  com o tamanho do passo  $h = 0,1$  é 2,10652. Já para o passo  $h = 0,05$  a aproximação é de 2,106529017.

■

2.  $c_2 = c_3$  e  $a_2 = a_3$ .

Substituindo os valores na segunda e quarta equações, segue que

$$\begin{cases} 2c_3a_3 = \frac{1}{2} \Rightarrow c_3a_3 = \frac{1}{4} \\ 2c_3a_3^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow c_3a_3^2 = \frac{1}{6} \end{cases} \quad (5.4.15)$$

Substituindo em (5.4.15), a primeira equação na segunda resulta que  $a_3 = 2/3 = a_2$ . Assim  $c_3 = 3/8 = c_2$ . Da primeira equação obtém-se  $c_1 = 1 - 2c_3 = 1 - 3/4 \rightarrow c_1 = 1/4$ .

Finalmente, de  $c_3 b_{32} a_2 = 1/6$  segue que  $b_{32} = 2/3$ . Portanto

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4} \left[ k_1 + \frac{3}{2} (k_2 + k_3) \right], \text{ onde:}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n; y_n), \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{2}{3}h; y_n + \frac{2}{3}hk_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{2}{3}h; y_n + \frac{2}{3}hk_2\right). \end{aligned} \tag{5.4.16}$$

que é conhecido como **Método de Nystrom**.

**Exemplo 5.5** Aplique o Método de Nystrom, para resolver o PVI do Exemplo (2.1), obtendo uma aproximação de  $y(0,5)$  com  $h = 0,1$ . Resolva também para  $h = 0,05$  e compare os resultados numéricos nos dois tamanhos de passo com a solução analítica do PVI.

**Solução Numérica:** O Método de Nystrom é dado por (5.4.16), sendo

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4} \left[ k_1 + \frac{3}{2} (k_2 + k_3) \right],$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n; y_n), \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{2}{3}h; y_n + \frac{2}{3}hk_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{2}{3}h; y_n + \frac{2}{3}hk_2\right). \end{aligned}$$

Fazendo  $n = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 2$  e  $h = 0,1$  na equação (5.4.16), obtém-se

$$\begin{aligned} y_{0+1} &= y_0 + \frac{h}{4} \left[ k_1 + \frac{3}{2} (k_2 + k_3) \right] \\ & \\ y_1 &= y_0 + \frac{h}{4} \left[ k_1 + \frac{3}{2} (k_2 + k_3) \right] \end{aligned},$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_0; y_0) \\ &= f(0; 2) \quad , \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 k_2 &= f\left(x_0 + \frac{2}{3}h; y_0 + \frac{2}{3}hk_1\right), \\
 &= f\left(0 + \frac{2}{3}(0,1); 2 + \frac{2}{3}(0,1)(0)\right), \\
 &= 0,06667
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 k_3 &= f\left(x_0 + \frac{2}{3}h; y_0 + \frac{2}{3}hk_2\right) \\
 &= f\left(0 + \frac{2}{3}(0,1); 2 + \frac{2}{3}(0,1)(0,06667)\right) \cdot \\
 &= 0,06223
 \end{aligned}$$

*Portanto*

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y_0 + \frac{h}{4} \left[ k_1 + \frac{3}{2}(k_2 + k_3) \right] \\
 &= 2 + \frac{0,1}{4} \left[ k_1 + \frac{3}{2}(0,6667 + 0,06223) \right] \cdot \\
 &= 2,00483
 \end{aligned}$$

Fazendo agora  $n = 1$ ,  $x_1 = 0,1$ ,  $y_1 = 2,00483$  e  $h = 0,1$  na equação (5.4.16), obtém-se

$$\begin{aligned}
 y_{1+1} &= y_1 + \frac{h}{4} \left[ k_1 + \frac{3}{2}(k_2 + k_3) \right] \\
 & \quad , \\
 y_2 &= y_1 + \frac{h}{4} \left[ k_1 + \frac{3}{2}(k_2 + k_3) \right]
 \end{aligned}$$

*onde*

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_1; y_1) \\
 &= f(0,1; 2,00483), \\
 &= 0,09517
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 k_2 &= f\left(x_1 + \frac{2}{3}h; y_1 + \frac{2}{3}hk_1\right), \\
 &= f\left(0,1 + \frac{2}{3}(0,1); 2,00483 + \frac{1}{3}(0,1)(0,09517)\right), \\
 &= 0,1555
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} k_3 &= f\left(x_1 + \frac{2}{3}h; y_1 + \frac{2}{3}hk_2\right) \\ &= f\left(0, 1 + \frac{2}{3}(0, 1); 2, 00483 + \frac{2}{3}(0, 1)(0, 1555)\right) \cdot \\ &= 0, 1547 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \frac{h}{4} \left[ k_1 + \frac{3}{2}(k_2 + k_3) \right] \\ &= 2, 00483 + \frac{0, 1}{4} \left[ k_1 + \frac{3}{2}(0, 1555 + 0, 1547) \right] \cdot \\ &= 2, 01872 \end{aligned}$$

Fazendo  $n = 2$ ,  $x_2 = 0, 2$ ,  $y_2 = 2, 01872$  e  $h = 0, 1$  na equação (5.4.16), obtém-se

$$\begin{aligned} y_{2+1} &= y_2 + \frac{h}{4} \left[ k_1 + \frac{3}{2}(k_2 + k_3) \right] \\ & \quad , \\ y_3 &= y_2 + \frac{h}{4} \left[ k_1 + \frac{3}{2}(k_2 + k_3) \right] \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_2; y_2) \\ &= f(0, 2; 2, 01872) \cdot \\ &= 0, 18128 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(x_2 + \frac{2}{3}h; y_2 + \frac{2}{3}hk_1\right), \\ &= f\left(0, 2 + \frac{2}{3}(0, 1); 2, 01872 + \frac{1}{3}(0, 1)(0, 18128)\right) \cdot \\ &= 0, 23586 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} k_3 &= f\left(x_2 + \frac{2}{3}h; y_2 + \frac{2}{3}hk_2\right) \\ &= f\left(0, 2 + \frac{2}{3}(0, 1); 2, 01872 + \frac{2}{3}(0, 1)(0, 23586)\right) \cdot \\ &= 0, 232226 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + \frac{h}{4} \left[ k_1 + \frac{3}{2}(k_2 + k_3) \right] \\ &= 2,01872 + \frac{0,1}{4} \left[ k_1 + \frac{3}{2}(0,23586 + 0,232226) \right] \cdot \\ &= 2,04081 \end{aligned}$$

De forma análoga obtém-se os resultados para  $y_4$  e  $y_5$ . A partir dos cálculos de erro absoluto e erro relativo obtém-se a tabela que expressa a comparação entre os valores aproximados  $y_n$  com os valores verdadeiros  $y(x_n)$ , calculados no Exemplo (2.1).

**Tabela 11: Método de Nystrom com  $h = 0,1$**

$x_n$	$y_n$	Valor verdadeiro	Erro absoluto	Erro relativo %
0,00	2,00000	2,00000	0,00000	0,00000
0,10	2,00483	2,00484	0,00001	0,00050
0,20	2,01872	2,01873	0,00001	0,00050
0,30	2,04081	2,04082	0,00001	0,00049
0,40	2,07031	2,07032	0,00001	0,00048
0,50	2,10652	2,10653	0,00001	0,00047

**Fonte: Autoria Própria**

De forma análoga, calcula-se a solução com o passo  $h = 0,05$ . No entanto, para uma maior agilidade dos cálculos utilizou-se o software Maple 16, como pode ser observado

```
Nystrom:=proc(xmin,xmax,N)
local i,k1,k2,k3:
global x,y:
h := abs(xmax-xmin)/N;
for i from 1 to N do
x[i] := x[i-1]+h:
k1 := yLinha(x[i-1],y[i-1]):
k2 := yLinha(x[i-1]+(2/3)*h,y[i-1]+(2/3)*h*k1):
k3 := yLinha(x[i-1]+(2/3)*h,y[i-1]+(2/3)*h*k2):
y[i] := evalf(y[i-1]+(h/4)*(k1+(3/2)*(k2+k3))):
end do:
end proc:
```

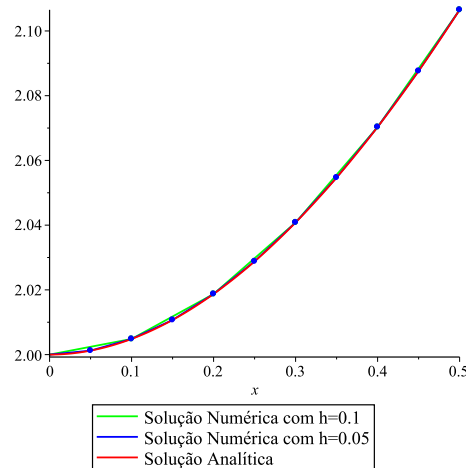
A tabela de resultados para  $h = 0,05$  é da seguinte forma

$$TabelaErro := \begin{bmatrix} \text{"x[n]"} & \text{"y[n]"} & \text{"Analítica"} & \text{"Erro Abs"} & \text{"Erro Per"} \\ 0.100000000 & 2.004836928 & 2.004837418 & 0.000000490 & 0.00002444088461 \\ 0.200000000 & 2.018729866 & 2.018730753 & 0.000000887 & 0.00004393849941 \\ 0.300000000 & 2.040817016 & 2.040818221 & 0.000001205 & 0.00005904494519 \\ 0.400000000 & 2.070318593 & 2.070320046 & 0.000001453 & 0.00007018238570 \\ 0.500000000 & 2.106529017 & 2.106530660 & 0.000001643 & 0.00007799554173 \end{bmatrix}$$



Para melhor entendimento observa-se o gráfico obtido, que apresenta as curvas das soluções numéricas com os passos  $h = 0,1$  e  $h = 0,05$  e da solução analítica.

```
display(
    Numerica1,
    Numerica2,
    Analitica,
    Pontos1,
    Pontos2
);
```



Conclui-se que uma aproximação para  $y(0,5)$  com o tamanho do passo  $h = 0,1$  é 2,10652. Já para o passo  $h = 0,05$  a aproximação é de 2,106529017.

■

**Exemplo 5.6** Aplique o método predictor-corrector dado por (4.0.3), onde o predictor é o Método de Adams-Bashforth e o corrector é o Método 1/3 de Simpson, para resolver o PVI do Exemplo (2.1),

$$P : y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2} [-f_n + 3f_{n+1}],$$

$$C : y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3} [f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2}],$$

no modo P(EC). Obtenha uma aproximação de  $y(0,5)$  com  $h = 0,1$ . Use o Método de Heun, para obter os valores iniciais necessários. Resolva também para  $h = 0,05$  e compare os resultados numéricos nos dois tamanhos de passo com a solução exata do PVI.

**Solução:** Considerando  $y_0 = 2$ ,  $x_2 = 0,2$  e, pelo Exemplo (5.4.14),  $y_1 = 2,00483$ ,  $f_0 = 0$  e

$f_1 = 0,09517$ . Assim, fazendo  $n = 0$  em (4.0.3), obtém-se

$$\begin{aligned} P : y_2^{(0)} &= y_1 + \frac{h}{2}[-f_0 + 3f_1] \\ &= 2,00483 + \frac{0,1}{2}[-0 + 3(0,09517)] , \\ &= 2,01911 \end{aligned}$$

agora,

$$\begin{aligned} E : f_2^{(0)} &= f(x_2; y_2^{(0)}) = f(0,2; 2,01911) \\ &= -2,01911 + 0,2 + 2 \quad . \\ &= 0,18089 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} C : y_2^{(1)} &= y_0 + \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2^{(0)}] \\ &= 2 + \frac{(0,1)}{3}[0 + 4(0,09517) + 0,18089] \cdot \\ &= 2,01872 \end{aligned}$$

De forma análoga obtém-se os valores para  $y_3$ ,  $y_4$  e  $y_5$ . A partir dos cálculos de erro absoluto e erro percentual obtém-se a tabela que expressa a comparação entre os valores aproximados  $y_n$  com os valores verdadeiros  $y(x_n)$  calculados no Exemplo (2.1).

**Tabela 12: Par (Adams-Bashforth, 1/3 de Simpson) no modo P(EC)**

$x_n$	$y_n$	Valor verdadeiro	Erro absoluto	Erro percentual
0,00	2,00000	2,00000	0,00000	0,00000
0,10	2,00483	2,00484	0,00001	0,00050
0,20	2,01872	2,01873	0,00001	0,00050
0,30	2,04080	2,04082	0,00002	0,00098
0,40	2,07030	2,07032	0,00002	0,00097
0,50	2,10651	2,10653	0,00002	0,00095

**Fonte: Autoria Própria**

De forma análoga, calcula-se a solução com o passo  $h = 0,05$ . No entanto, para uma maior agilidade utiliza-se o software Maple 16.

```
PEC_AdamsBashforth13Simpson := proc (xmin, xmax, N)
```

```

local i,P,E,C:
global x,y:
h := abs(xmax-xmin)/N:
#===== Método de Heun
k1 := yLinha(x[0],y[0]):
k2 := yLinha(x[0]+(1/3)*h,y[0]+(1/3)*h*k1):
k3 := yLinha(x[0]+(2/3)*h,y[0]+(2/3)*h*k2):
y[1] := evalf(y[0]+(h/4)*(k1+3*k3)):
x[1] := x[0]+h:
E := evalf(yLinha(x[1],y[1])):
#=====
for i from 2 to N do
x[i] := x[i-1]+h:
P := evalf(
y[i-1]+
(h/2)*(-yLinha(x[i-2],y[i-2])+
3*E)
):
E := evalf(yLinha(x[i],P)):
C := evalf(
y[i-2]+
(h/3)*(yLinha(x[i-2],y[i-2])+
4*yLinha(x[i-1],y[i-1])+E)
):
y[i] := C:
end do:
end proc:

```

A tabela de resultados para  $h = 0,05$  é da seguinte forma

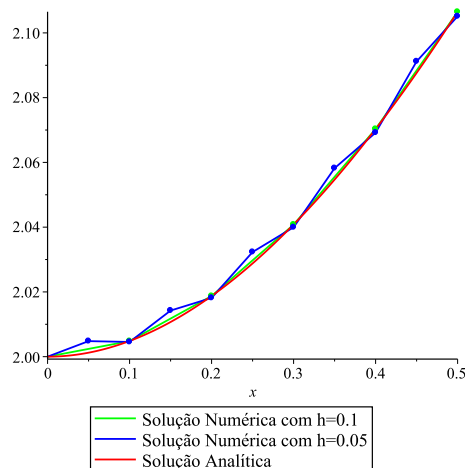
	"x[n]"	"y[n]"	"Analítica"	"Erro Abs"	"Erro Per"
TabelaErro:=	0.100000000	2.004478538	2.004837418	0.000358880	0.01790070341
	0.200000000	2.018078214	2.018730753	0.000652539	0.03232422150
	0.300000000	2.039877300	2.040818221	0.000940921	0.04610508620
	0.400000000	2.069093598	2.070320046	0.001226448	0.05923953653
	0.500000000	2.105019523	2.106530660	0.001511137	0.07173581798

Para melhor entendimento observa-se o gráfico obtido, que apresenta as curvas das soluções numéricas com os passos  $h = 0,1$  e  $h = 0,05$  e da solução analítica.

```

display(
Numerical,
Numerica2,
Analitica,
Pontos1,
Pontos2
);

```



Conclui-se que uma aproximação para  $y(0,5)$  com o tamanho do passo  $h = 0,1$  é 2,10651. Já para o passo  $h = 0,05$  a aproximação é de 2.105019523.

■

### 5.4.3 Métodos de Runge-Kutta de ordem 4

Neste caso, a comparação de  $\phi$  com  $\phi_T$ , para se obter Métodos de Runge-Kutta de 4 estágios e ordem máxima, fornece um sistema de 11 equações e 13 incógnitas. Cada solução desse sistema define um Método de Runge-Kutta com ordem 4. Portanto existem infinitos Métodos de Runge-Kutta de 4 estágios e ordem 4.

O dois métodos mais utilizados de Runge-Kutta de 4 estágios e ordem 4 são dados por

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \frac{h}{6} [k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4], \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6} [k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4], \text{ onde:} \\ k_1 &= f(x_n; y_n), \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h; y_n + \frac{1}{2}hk_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h; y_n + \frac{1}{2}hk_2\right), \\ k_4 &= f(x_n + h; y_n + hk_3) \end{aligned} \quad , \quad (5.4.17)$$

e

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \frac{h}{8} [k_1 + 3(k_2 + k_3) + k_4], \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{8} [k_1 + 3(k_2 + k_3) + k_4] \text{ onde:} \\ k_1 &= f(x_n; y_n), \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{3}h; y_n + \frac{1}{3}hk_1\right), \\ k_3 &= f\left(\left(x_n + \frac{2}{3}h; y_n - \frac{1}{3}hk_1\right) + hk_2\right), \\ k_4 &= f(x_n + h; y_n + hk_1 - hk_2 + hk_3). \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

**Exemplo 5.7** Resolver o PVI do Exemplo (2.1), usando o Método dado por (5.4.17).

**Solução:**

Temos que  $y_0 = 2$ . Fazendo  $n = 0$  em (5.4.17), obtemos:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6} [k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4],$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_0; y_0) \\ &= f(-y_0 + x_0 + 2) \\ &= f(-2 + 0 + 2) \quad , \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(x_0 + \frac{1}{2}h; y_0 + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ &= f\left(0 + \frac{0,1}{2}; 2 + \frac{0,1}{2}(0)\right) \\ &= f(0,05; 2) \quad , \\ &= f(-2 + 0,05 + 2) \\ &= 0,05 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} k_3 &= f\left(x_0 + \frac{1}{2}h; y_0 + \frac{1}{2}hk_2\right) \\ &= f\left(0 + \frac{0,1}{2}; 2 + \frac{0,1}{2}(0,05)\right) \\ &= f(0,05; 2,0025) \quad , \\ &= f(-2,0025 + 0,05 + 2) \\ &= 0,0475 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} k_4 &= f(x_0 + h; y_0 + hk_3) \\ &= f(0 + 0,1; 2 + 0,1(0,0475)) \\ &= f(0,1; 2,0048) \quad , \\ &= f(-2,0048 + 0,1 + 2) \\ &= 0,0952 \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2 + \frac{0,1}{6} [0 + 2(0,05 + 0,0475) + 0,0952] \\ &= 2,00484 \cong y(x_1) = y(0,1). \end{aligned}$$

De forma análoga obtém-se os valores para  $y_2$ ,  $y_3$ ,  $y_4$  e  $y_5$ . A partir dos cálculos de erro

absoluto e erro percentual obtém-se a tabela que expressa a comparação entre os valores aproximados  $y_n$  com os valores verdadeiros  $y(x_n)$  calculados anteriormente.

**Tabela 13: Método de Runge-Kutta de ordem 4, com  $h = 0,1$**

$x_n$	$y_n$	Valor verdadeiro	Erro absoluto	Erro relativo %
0,00	2,00000	2,00000	0,00000	0,00000
0,10	2,00484	2,00484	0,00000	0,00000
0,20	2,01873	2,01873	0,00000	0,00000
0,30	2,04082	2,04082	0,00000	0,00000
0,40	2,07032	2,07032	0,00000	0,00000
0,50	2,10653	2,10653	0,00000	0,00000

**Fonte: Autoria Própria**

De forma análoga, calcula-se a solução com o passo  $h = 0,05$ . No entanto, para uma maior agilidade dos cálculos utilizou-se o software Maple 16, como pode ser observado

```

RK4:=proc(xmin,xmax,N)
local i,k1,k2,k3,k4:
global x,y:
h := abs(xmax-xmin)/N;
for i from 1 to N do
x[i] := x[i-1]+h:
k1 := yLinha(x[i-1],y[i-1]):
k2 := yLinha(x[i-1]+(1/2)*h,y[i-1]+(1/2)*h*k1):
k3 := yLinha(x[i-1]+(1/2)*h,y[i-1]+(1/2)*h*k2):
k4 := yLinha(x[i-1]+h,y[i-1]+h*k3):
y[i] := evalf(y[i-1]+(h/6)*(k1+2*(k2+k3)+k4)):
end do:
end proc:

```

A tabela de resultados para  $h = 0,05$  é da seguinte forma

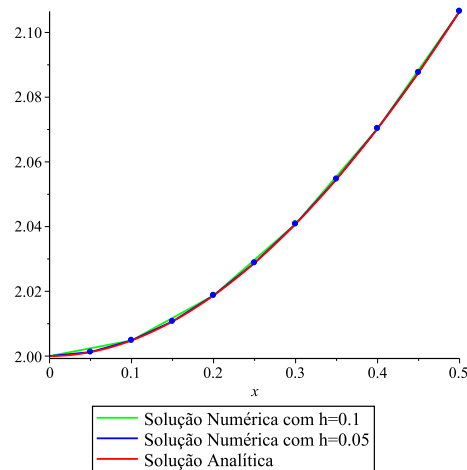
$$TabelaErro := \begin{bmatrix} \text{"x[n]"} & \text{"y[n]"} & \text{"Analítica"} & \text{"Erro Abs"} & \text{"Erro Per"} \\ 0.100000000 & 2.004837423 & 2.004837418 & 0.000000005 & 0.0000002493967818 \\ 0.200000000 & 2.018730762 & 2.018730753 & 0.000000009 & 0.0000004458246840 \\ 0.300000000 & 2.040818233 & 2.040818221 & 0.000000012 & 0.0000005879994542 \\ 0.400000000 & 2.070320061 & 2.070320046 & 0.000000015 & 0.0000007245256611 \\ 0.500000000 & 2.106530677 & 2.106530660 & 0.000000017 & 0.0000008070141262 \end{bmatrix}$$

Para melhor entendimento observa-se o gráfico obtido, que apresenta as curvas das soluções numéricas com os passos  $h = 0,1$  e  $h = 0,05$  e da solução analítica.

```

display(
Numerical1,
Numerica2,
Analitica,
Pontos1,
Pontos2
);

```



Conclui-se que uma aproximação para  $y(0,5)$  com o tamanho do passo  $h = 0,1$  é 2,10653. Já para o passo  $h = 0,05$  a aproximação é de 2.106530677.

■

Pelo que foi visto neste Capítulo a impressão dada é que se pode obter sempre Métodos de Runge-Kutta de  $R$  estágios e ordem  $R$ . Entretanto, (BUTCHER, 1964), provou a não existência de Métodos de Runge-Kutta de 5 estágios e ordem 5. Além disso, provou o seguinte resultado

Seja  $q(R)$  a maior ordem que pode ser obtida por um método de Runge-Kutta de  $R$  estágios. Então

$$\begin{aligned}
 q(R) &= R, R = 1, 2, 3, 4, \\
 q(5) &= 4 \\
 q(6) &= 5 \\
 q(7) &= 6 \\
 q(8) &= 6 \\
 q(9) &= 7 \\
 q(R) &\leq R - 2, R = 10, 11, \dots
 \end{aligned}$$

Na prática os métodos de Runge-Kutta mais utilizados são os de ordem 4.

**Exemplo 5.8** *Mostre que o Método de Euler Melhorado é equivalente a aplicação do Método predictor-corrector, onde o predictor é o Método de Euler e o corrector o Método da Regra do Trapézio, aplicados no modo P(EC)E.*

**Solução:** Seja o par PC dado por

$$\begin{aligned} P : y_{n+1} &= y_n + hy'_n \\ C : y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} [y'_n + y'_{n+1}] \end{aligned} \quad (5.4.19)$$

Seja  $\alpha_0 = -1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\beta_0 = 1$ ,  $\beta_1 = 0$ ,  $k = 1$ ,  $m = 1$  e  $n = 0$ , obtém-se

$$\begin{aligned} y_{n+k}^{[0]} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^* y_{n+j}^{[m]} &= h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* f_{n+j}^{[m]} \\ y_{n+1}^{[0]} + \sum_{j=0}^0 \alpha_j^* y_{n+j}^{[m]} &= h \sum_{j=0}^0 \beta_j^* f_{n+j}^{[m]} \ , \\ y_1^{[0]} + \alpha_0^* y_0^{[1]} &= h \beta_0^* f_0^{[1]} \\ y_1^{[0]} &= y_0^{[1]} + h f_0^{[1]} \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} f_{n+k}^{[s]} &= f(x_{n+k}; y_{n+k}^{[s]}) \\ f_1^{[0]} &= f(x_1; y_1^{[0]}) \ . \\ f_1^{[0]} &= f(x_1; y_0^{[1]} + h f_0^{[1]}) \end{aligned}$$

Fazendo  $\alpha_0 = -1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\beta_0 = \frac{1}{2}$ ,  $\beta_1 = \frac{1}{2}$ ,  $k = 1$ ,  $m = 1$  e  $n = 0$ , obtém-se

$$\begin{aligned} y_{n+k}^{[s+1]} &= - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j}^{[m]} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j}^{[m]} + h \beta_k f_{n+k}^{[s]} \\ y_1^{[1]} &= -\alpha_0 y_0^{[1]} + h \beta_0 f_0^{[1]} + h \beta_1 f_1^{[0]} \ , \\ y_1^{[1]} &= y_0^{[1]} + h \left( \frac{1}{2} f_0^{[1]} + \frac{1}{2} f_1^{[0]} \right) \ , \\ y_1^{[1]} &= y_0^{[1]} + \frac{h}{2} \left( f_0^{[1]} + f_1^{[0]} \right) \end{aligned}$$

substituindo

$$\begin{aligned} y_1^{[1]} &= y_0^{[1]} + \frac{h}{2} \left( f_0^{[1]} + f_1^{[0]} \right) \\ y_1^{[1]} &= y_0^{[1]} + \frac{h}{2} \left( f_0^{[1]} + f(x_1; y_0^{[1]} + h f_0^{[1]}) \right) \ , \\ y_1^{[1]} &= y_0^{[1]} + \frac{h}{2} \left( f_0^{[1]} + f(x_0 + h; y_0^{[1]} + h f_0^{[1]}) \right) \end{aligned}$$

desde que  $x_1 = x_0 + h$ . Considerando agora o Método de Euler Melhorado

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (k_1 + k_2) \ ,$$



onde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n; y_n), \\ k_2 &= f(x_n + h; y_n + hk_1) . \end{aligned}$$

Fazendo  $n = 0$  na equação acima, tem-se

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) ,$$

onde

$$k_1 = f(x_0; y_0)$$

e

$$k_2 = f(x_0 + h; y_0 + hk_1) ,$$

então

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{h}{2}(f(x_0; y_0) + k_2) \\ y_1^{[1]} &= y_0^{[1]} + \frac{h}{2}(f^{[1]}(x_0; y_0) + f^{[1]}(x_0 + h; y_0^{[1]} + hf^{[1]}(x_0; y_0)) . \end{aligned}$$

Para melhor entendimento, segue o exemplo numérico.

Seja o par PC dado por

$$\begin{aligned} P : y_{n+1} &= y_n + hy'_n \\ C : y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} [y'_n + y'_{n+1}] . \end{aligned} \tag{5.4.20}$$

Fazendo  $n = 0$ ,  $x_0 = 0, 1$ ,  $y_0 = 2$ ,  $h = 0, 1$  em (5.4.20), obtém-se

$$\begin{aligned} P : y_1^{(0)} &= y_0 + hy'_0 \\ &= 2 + 0,1(-2 + 0 + 2) , \\ &= 2 \end{aligned}$$

agora,

$$\begin{aligned} E : f_2^{(0)} &= f(x_1; y_1^{(0)}) = f(0, 1; 2) , \\ &= 0,1 \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} C : y_1^{(1)} &= y_0 + \frac{h}{2}(y'_0 + hy'_1^{(0)}) \\ &= 2 + \frac{(0,1)}{2}(0 + 0,1) \cdot \\ &= 2,0050 \end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned} E : f_1^{(1)} &= f(x_1; y_1^{(1)}) = f(0,1; 2,0050) \\ &= -2,005 + 0,1 + 2 \quad . \\ &= 0,095 \end{aligned}$$

De forma análoga obtém-se os valores para  $y_2$ ,  $y_3$ ,  $y_4$  e  $y_5$ . A partir dos cálculos de erro absoluto e erro percentual obtém-se a tabela que expressa a comparação entre os valores aproximados  $y_n$  com os valores verdadeiros  $y(x_n)$  calculados no Exemplo (2.1).

**Tabela 14: Par PC no modo P(EC)E**

$x_n$	$y_n$	Valor verdadeiro	Erro absoluto	Erro percentual
0,00	2,0000	2,0000	0,0000	0,0000
0,10	2,0050	2,0048	0,0002	0,0010
0,20	2,0190	2,0187	0,0003	0,0149
0,30	2,0412	2,0408	0,0004	0,0196
0,40	2,0708	2,0703	0,0005	0,0242
0,50	2,1071	2,1065	0,0006	0,0285

**Fonte: Autoria Própria**

De forma análoga, calcula-se a solução com o passo  $h = 0,05$ . No entanto, para uma maior agilidade utiliza-se o software Maple 16. Segue o Método implementado e seus resultados.

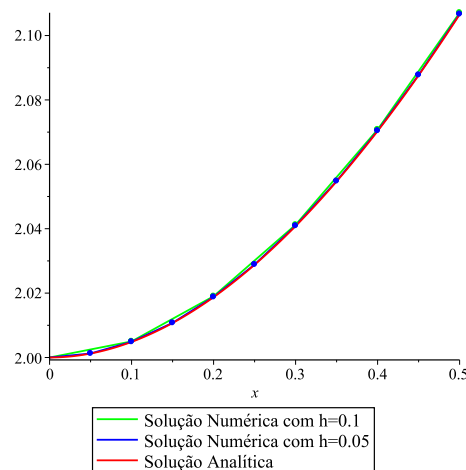
```
PECE_EulerTrapezio:=proc(xmin,xmax,N)
local i,P,E,C;
global x,y,TabelaErro;
h := abs(xmax-xmin)/N;
for i from 1 to N do
x[i] := x[i-1]+h;
P := evalf(y[i-1]+h*yLinha(x[i-1],y[i-1]));
E := yLinha(x[i],P);
C := evalf(y[i-1]+(h/2)*(yLinha(x[i-1],y[i-1])+E));
y[i] := C;
end do;
end proc;
```

A tabela de resultados para  $h = 0,05$  é da seguinte forma

<i>TabelaErro:=</i>	“x[n]”	“y[n]”	“Analítica”	“Erro Abs”	“Erro Per”
	0.100000000	2.004876562	2.004837418	0.000039144	0.001952477525
	0.200000000	2.018801593	2.018730753	0.000070840	0.003509135624
	0.300000000	2.040914371	2.040818221	0.000096150	0.004711345627
	0.400000000	2.070436049	2.070320046	0.000116003	0.005603143351
	0.500000000	2.106661868	2.106530660	0.000131208	0.006228629969

Para melhor entendimento observa-se o gráfico obtido, que apresenta as curvas das soluções numéricas com os passos  $h = 0,1$  e  $h = 0,05$  e da solução analítica.

```
display(
  Numerical1,
  Numerica2,
  Analitica,
  Pontos1,
  Pontos2
);
```



Portanto o Método de Euler Melhorado é equivalente a aplicação do Método predictor-corrector, onde o predictor é o Método de Euler e o corrector o Método da Regra do Trapézio, aplicados no modo  $P(EC)E$ .

■

## 6 CONCLUSÃO

No estudo dos Métodos Lineares de Passo Múltiplo, verificou-se a ordem, consistência, estabilidade e convergência do Método de Euler, Regra do Trapézio, Regra do Ponto Médio, 1/3 de Simpson, Adams-Moulton, Adams-Bashforth, 3/8 de Simpson e Runge-Kutta. Concluindo que embora todos sejam convergentes, os que possuem maior ordem de consistência, convergem mais rapidamente para a solução desejada.

Os métodos descritos neste trabalho obtêm uma boa aproximação da solução analítica do PVI dado, no entanto, a melhor aproximação obtida foi por meio do Método de Runge-Kutta de ordem 4, o qual é mais utilizado.

Um esforço manual extremamente excessivo é necessário para resolver numericamente tais equações, portanto, o auxílio computacional, oriundo do *software Maple 16*, para este estudo foi de grande valia, tanto para o entendimento das soluções quanto para comparação entre os resultados analíticos, numéricos e gráficos.

**REFERÊNCIAS**

- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise Numérica**. 1<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.
- BUTCHER, J. C. **Numerical Methods for Ordinary Differential Equations**. [S.l.: s.n.], 1964.
- CONTE, S. D.; BOOR, d. C. **Elementary Numerical Analysis - An Algorithmic Approach**. [S.l.]: McGraw - Hill International Editions, 1981.
- FREITAS, S. R. **Métodos Numéricos**. 2000. Disponível em: <<http://www.ebah.com.br/content/ABAAABNvQAA/metodos-numericos-sergio-roberto-freitas>>. Acesso em: 6 de abril de 2012.
- NEIDE, M. B. F. **Cálculo Numérico**. 2006. Disponível em: <<http://www.amadeuw.com.br/livro.phpc>>. Acesso em: 2 de abril de 2012.
- ROTA, G. **Ordinary differential equations**. 4<sup>a</sup>. ed. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 1989.
- ZILL, D.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**. 3<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.
- ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. 1<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.