UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

SIMONE VENTURI

TRANSFORMADA $\mathcal{Z}$

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2016

SIMONE VENTURI

TRANSFORMADA $\mathcal{Z}$

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre em Matemática”.

Orientador: Prof. Dr. Roy Wilhelm Probst

CURITIBA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

V469t Venturi, Simone
2016 Transformada Z / Simone Venturi.-- 2016.
126 f.: il.; 30 cm

Texto em português, com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2016.
Bibliografia: f. 122-123.

1. Transformada Z. 2. Equações de diferenças. 3. Computação - Matemática. 4. Modelos matemáticos. 5. Material didático. 6. Prática de ensino. 7. Professores de matemática – Formação. 8. Matemática - Estudo e ensino. 9. Matemática – Dissertações. I. Probst, Roy Wilhelm, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD: Ed. 22 – 510

Biblioteca Central da UTFPR, Câmpus Curitiba

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação-Câmpus Curitiba
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Título da Dissertação No. 030

"Transformada Z"

por

Simone Venturi

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 14h do dia 01 de abril de 2016. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. Roy Wilhelm Probst, Dr.
(Presidente - UTFPR/Curitiba)

Prof. Cristiano Torezzan, Dr.
(UNICAMP/Limeira)

Prof. Andrés David Báez Sánchez, Dr.
(UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:

Prof. Márcio Rostirolla Adames, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR"

AGRADECIMENTOS

- Agradeço a Deus pela minha existência e pela sabedoria para sempre seguir em frente.
- Aos meus pais Arlindo e Maria Inês que me mostraram a importância dos estudos e do conhecimento, por proporcionarem mais esta etapa em minha vida, pelas palavras de conforto, pelo amor e confiança em meus esforços.
- À minha irmã Juliana pela paciência em ouvir meus desabafos, muitas vezes com frustrações nos estudos e na vida.
- A todos os meus familiares que contribuíram para que eu me tornasse a pessoa forte que sou hoje.
- Ao meu noivo Guilherme pela incansável ajuda em meus estudos, por reconhecer meu esforço, pelo cuidado e compreensão em dias de tensão e preocupação.
- À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.
- À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.
- Aos professores do PROFMAT-UTFPR pela dedicação, contribuição e pelo incentivo em alcançar nosso objetivo.
- Ao meu orientador pela observação de meu potencial neste mestrado, pelo convite à escrever esta dissertação, e pelo apoio nos estudos.
- Aos meus colegas de mestrado da turma de 2014 PROFMAT-UTFPR por tornarem as aulas dinâmicas e descontraídas, em especial à Cristiane, Debora, José Luiz e Kurt pelas horas de divertidas conversas e longos estudos.

RESUMO

VENTURI, Simone. TRANSFORMADA $\mathcal{Z}$. 126 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2016.

Nesse trabalho utiliza-se a transformada $\mathcal{Z}$ como método de resolução de equações de diferenças, visando modelos matemáticos discretos, com o principal objetivo desenvolver um material didático, em língua portuguesa, tendo em vista que grande parte das referências encontradas estão em língua inglesa. A abordagem da transformada $\mathcal{Z}$ tem como etapas: definição da transformada $\mathcal{Z}$ unilateral, condição de existência, propriedades, transformada $\mathcal{Z}$ inversa, incluindo demonstrações, exemplos e exercícios propostos. O material proposto serve como base para o estudo da matemática discreta, direcionado a professores e alunos na disciplina de cálculo em cursos de engenharia, no estudo de processamento de sinais e sistemas de controle de dados amostrados; aos professores do ensino básico como curiosidade e extensão dos estudos da matemática discreta; e às demais áreas que exploram a matemática discreta tais como engenharia, economia e computação.

Palavras-chave: Transformada $\mathcal{Z}$; equações de diferenças; matemática discreta.

ABSTRACT

VENTURI, Simone. $\mathcal{Z}$ TRANSFORM. 126 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2016.

In this work the $\mathcal{Z}$-transform is used to solve difference equations, aiming discrete mathematical models, with the main objective to develop a courseware in Portuguese, since most of the references are in English. The $\mathcal{Z}$ transformation approach has the following steps: definition of the unilateral $\mathcal{Z}$-transform, existence condition, properties and inverse $\mathcal{Z}$-transform, including demonstrations, examples and proposed exercises. The proposed material can be used to study discrete mathematics, by teachers and students in calculus classes for engineering courses, such as signal processing and sampled-data control systems; by High School teachers as a curiosity and further study of discrete math; and other related areas such as as Engineering, Economics and Computing.

Keywords: $\mathcal{Z}$ transform; difference equations; discrete mathematics.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A resolução de equações de diferenças através da transformada $\mathcal{Z}$ será estudada visando uma fundamentação teórica desta transformada. Tem-se como objetivo expor o método como uma forma diferenciada na resolução de equações de diferenças aplicadas em problemas da educação básica da Matemática que utilizem do raciocínio recursivo. O estudo tem sua importância tendo em vista que o tema é brevemente visto no ensino básico, muitas vezes somente no estudo de progressões.

As recorrências (ou equações de diferenças) mostram-se como uma ferramenta para auxiliar as resoluções de problemas nas quais o raciocínio recursivo se faz presente, pois além de tornar mais simples a resolução de alguns problemas matemáticos, também pode-se encontrar soluções gerais para os mesmos.

"Uma equação é de natureza recursiva quando é definida em função dela mesma aplicada a valores anteriores. Várias sequências são determinadas por meio de uma equação de diferenças, isto é, pode-se determinar qualquer um de seus termos a partir do(s) termo(s) precedente(s)"(PINHEIRO; LAZZARIN, 2015).

A seguir alguns exemplos simples de sequências e operações definidas por equações de diferenças:

- A sequência $x_n = \{2, 4, 10, 28, \ldots\}$ pode ser definida recursivamente como uma equação de diferenças dada por $x_{n+1} = 3x_n - 2$, para $n \in \mathbb{N}$ com termo inicial $x_0 = 2$.
- A relação $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, para $n \in \mathbb{N}$ com termos iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$ gera a Sequência de Fibonacci dada por $x_n = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 \ldots\}$.
- A progressão geométrica dada por $x_{n+1} = a.x_n$, onde $a \in \mathbb{R}$ é uma constante também conhecida como razão da progressão. Assim, admitindo $x_0 = 1$ tem-se a sequência $x_n = \{1, a, a^2, a^3, a^4, \ldots\}$.
- O fatorial de um número natural $n!$, onde $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2.1$, definido como uma equação de diferenças dada por $x_n = nx_{n-1}$ com $x_0 = 1$, ou seja,

$0! = 1$, para $n \in \mathbb{N}$. Tal equação fornece a sequência $x_n = \{0!, 1!, 2!, 3!, 4!, \ldots\} = \{1, 1, 2, 6, 24, \ldots\}$.

- A equação de diferenças $x_{n+1} = 3 + x_n$ também conhecida como progressão aritmética de razão 3 e primeiro termo $a_1 = 0$, gera a sequência $\{0, 3, 6, 9, \ldots\}$.

Uma equação de diferenças pode no entanto não definir a sequência de forma única. Por exemplo na equação de diferenças $x_{n+1} = 3 + x_n$ a solução é satisfeita não apenas para os múltiplos de 3, mas por todas as Progressões Aritméticas de razão 3. Assim, para que a sequência (solução) fique determinada, o conhecimento do(s) primeiro(s) termo(s) se faz necessário.

Assim, as equações de diferenças têm como solução seqüências de números geradas de modo recursivo, através do uso de regras que relacionam um número com seus antecessores. As equações de diferenças são usadas para a construção de um modelo matemático em que o tempo ou dados variam discretamente.

A utilização do raciocínio recursivo, pouco usado no ensino básico, se faz importante, tendo em vista que, segundo Pinheiro e Lazzarin (2015):

> Essa prática promove algo que necessita-se muito em nossas escolas: a utilização da criatividade e da experimentação na construção de soluções. Além disso, valoriza o trabalho do professor de matemática que deixa de ser mero transmissor para ser orientador na construção de modelos que podem ser criados em conjunto com seus alunos (PINHEIRO; LAZZARIN, 2015).

Contudo, deve-se notar que as equações de diferenças também aparecem no âmbito da engenharia, economia, computação, entre outros. Especificamente, tais equações estão presentes em problemas para a análise de sistemas em tempo discreto.

Conforme Jesus e Silva (2006), por ser corriqueiro na computação e na matemática,

> É fundamental saber trabalhar com equações matemáticas provenientes de recorrências, e enfatizam: muitos algoritmos são baseados em relações recorrentes e problemas combinatórios considerados difíceis à primeira vista, podem ser resolvidos mais facilmente quando escritos na forma de relações de recorrência (JESUS; SILVA, 2006).

O objetivo deste estudo é expor a importância e a resolução das equações de diferenças em problemas que utilizem diversas áreas da matemática discreta como sequências e progressões, probabilidade, matemática financeira, crescimento de bactérias, padrões geométricos, os quais podem ser estudados no ensino básico.

Segundo Grove (1991) “o impacto do computador digital, a transmissão de dados digitalizados com maior precisão do que os dados contínuos e o uso de tempo compartilhado na comunicação têm contribuído para o interesse na teoria de dados discretos”(GROVE, 1991).

Assim, a influência dos computadores e o desenvolvimento de campos da matemática discreta são dois fatores que têm levado algumas entidades ligadas ao ensino a se interessar pela inclusão de temas que utilizem a matemática discreta na escola.

Segundo Jurkiewicz e Leventhal (2002), em um artigo intitulado Oficina de Matemática Discreta no Ensino, informam que alguns países já estão preocupados com o ensino da matemática discreta. Os autores alertam que:

> A National Science Fundation dos Estados Unidos patrocina um programa de desenvolvimento curricular de Matemática Discreta enquanto o Ministério da Educação da França propõe explicitamente a introdução do ensino de Teoria dos Grafos em certas vertentes do Ensino Médio (JURKIEWICZ; LEVENTHAL, 2002).

Essa falta do estudo da matemática discreta no ensino básico é também descrita nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio :

> A maior parte dos conteúdos de Matemática do ensino médio está vinculada a modelos matemáticos de natureza contínua. No entanto, no decorrer do século XX, novas necessidades tecnológicas advindas da introdução dos computadores – que têm uma Matemática Discreta no seu funcionamento – provocaram um grande desenvolvimento dos modelos matemáticos discretos (BÁSICA, 2006).

Assim, com o apoio da tecnologia de computadores, a matemática discreta possui aplicações para quase todas as áreas de estudo.

> Há muitas aplicações para a ciência da computação e para a transmissão de dados, assim como aplicações para diversas áreas como química, botânica, zoologia, linguística, geografia, negócios e internet. Modelar com matemática discreta é uma ferramenta extremamente importante na solução de problemas, a qual os estudantes têm a oportunidade de desenvolver através da construção de seus prórpios modelos (ROSEN, 2010).

A matemática discreta se mostra presente em diversas áreas de estudo, como também pode ser identificada em muitos conteúdos dentro da matemática.

> [...] cursos superiores de matemática que se baseiam no conteúdo estudado pela matemática discreta incluindo lógica, teoria dos conjuntos, teoria dos números, álgebra linear, álgebra abstrata, análise combinatória, teoria dos grafos e teoria da probabilidade (a parte discreta de cada tópico) (ROSEN, 2010).

Vistas as aplicações e importância da matemática discreta em diversas áreas do conhecimento, o presente estudo busca produzir um material sobre a transformada $\mathcal{Z}$ como método de resolução de equações de diferenças, que possa fornecer ferramentas para professores da educação básica até estudantes de cursos superiores, bem como, estimular esses leitores a aprofundar-se e prosseguir com o estudo do tema.

> A transformada $\mathcal{Z}$ atribuida a resolução de equações de diferenças é um tema fundamental para consolidação de algumas habilidades como construir significados para os números naturais, inteiros, racionais, reais e complexos, de maneira sistematizada, facilitando assim o processo de ensino-aprendizagem (JÚNIOR, 2013).

O principal foco deste material é fornecer ferramentas para que o aluno amplie seus conhecimentos da matemática discreta apoiado nas equações de diferenças, tornando a busca por novos conhecimentos como parte integrante de seu papel, dominando o conceito de equações de diferenças e o método de transformada $\mathcal{Z}$ como caminho para sua resolução.

É importante destacar as diferenças e semelhanças entre equações diferenciais e equações de diferenças, entendendo previamente o conceito de matemática discreta e contínua, para que se possa compreender o uso da transformada $\mathcal{Z}$.

> Equações de diferenças são semelhantes a equações diferenciais. O funcionamento de um sistema de tempo contínuo é descrito ou modelado por um conjunto de equações diferenciais. Por outro lado, um sistema de tempo discreto é descrita por um conjunto de equações de diferenças. O método de transformar dados em análise de sistemas de tempo contínuo é a transformação de Laplace. De um modo semelhante, a transformação utilizada na análise de sistemas em tempo discreto é a transformada $\mathcal{Z}$ (ATTAR, 2005).

Para Scheinerman (2006) essa diferença é ilustrada da seguinte maneira:

> A Matemática Contínua corresponde aos relógios analógicos [...] do ponto de vista de um relógio analógico, entre 12:02 pm e 12:03 pm há um número infinito de diferentes tempos possíveis, na medida em que o ponteiro dos segundos percorre o mostrador [...].
> A Matemática Discreta é comparada a um relógio digital, em que há apenas um número finito possível de tempos diferentes entre 12:02 pm

> e 12:03 pm. Um relógio digital não reconhece fração de segundos [...] a transição de um tempo para o próximo é bem definida e sem ambiguidade. (SCHEINERMAN, 2006).

Ainda tem-se como comparação entre a transformada contínua (Laplace) e discreta (transformada $\mathcal{Z}$) as seguintes concepções, segundo Hsu (1995):

> A transformada $\mathcal{Z}$ é introduzida para representar sinais de tempo discreto (ou sequências) no domínio z, onde z é uma variável complexa. A transformada de Laplace converte equações diferenciais em equações algébricas (muitas vezes presente na modelagem de fenômenos mecânicos e elétricos). De um modo semelhante, a transformada $\mathcal{Z}$ converte equações de diferenças em equações algébricas, simplificando assim a análise de sistemas discretos no tempo (presente em um princípio de controle, progressões e sucessões) (HSU, 1995).

Este material tem como objetivo introduzir o conceito da transformada $\mathcal{Z}$ como um método de resolução para equações de diferenças.

1.1 MOTIVAÇÃO

As principais motivações para o presente estudo são:

- Trabalhar com tópicos presentes no ensino básico, como as recorrências estudadas em progressões aritméticas e geométricas, incentivando que o aluno faça conjecturas e generalizações de sequências de forma recursiva;
- Aprofundar os estudos dos métodos de resolução de recorrências, tema visto na disciplina de Matemática Discreta (MA12) do curso de mestrado profissional (PROFMAT);
- Apresentar a transformada $\mathcal{Z}$ como método de resolução de equações de diferenças, visto somente em alguns tópicos de Cálculo em cursos de engenharia;
- Obter um material, focando a transformada $\mathcal{Z}$, que seja rico em detalhes, contendo propriedades e demonstrações, na língua portuguesa, já que grande parte da bibliografia encontrada sobre o tema está escrita na língua inglesa.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo geral do presente material é compreender a transformada $\mathcal{Z}$ e utilizá-la como método de resolução de equações de diferenças, em problemas contextualizados aplicáveis ao ensino básico e em problemas de engenharias, no estudo de análise de controle e sinais, e em geral à problemas de natureza recursiva.

E como objetivos específicos tem-se:

- Utilizar o pensamento recursivo para modelar problemas matemáticos;
- Diferenciar a matemática discreta da contínua dentro de suas aplicações;
- Compreender a transformada $\mathcal{Z}$ na sua definição e propriedades;
- Entender a tabela de transformadas como uma construção através das propriedades da transformada $\mathcal{Z}$;
- Aplicar a transformada $\mathcal{Z}$ inversa como prova de uma conjectura;
- Perceber a inserção de diversos temas da matemática em problemas de natureza recursiva;
- Desenvolver o método da transformada $\mathcal{Z}$ para a resolução de equações de diferenças.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Observa-se nessa introdução a diferença entre matemática discreta e contínua, inserindo exemplos de progressões e sequências, além da diferenciação na resolução de equações diferenciais e equações de diferenças.

No segundo capítulo deste material tem-se a definição da transformada $\mathcal{Z}$ unilateral e sua condição de existência através da região de convergência, juntamente com as propriedades de linearidade, diferenciação, similaridade, translação, convolução, valor inicial e valor final. Ainda nesse capítulo tem-se vários exemplos de cada propriedade citada e exercícios propostos. Com a utilização das propriedades da transformada $\mathcal{Z}$ será contruída, no final desse capítulo, uma lista de transformadas elementares conhecidas.

É explorada no terceiro capítulo a transformada $\mathcal{Z}$ inversa, aplicada à transformada $\mathcal{Z}$ encontrada previamente, a qual finaliza a resolução de uma equação de diferenças, encontrando uma equação somente em termos de n, sendo n um número natural. Ainda nesse capítulo serão abordados três métodos da transformada $\mathcal{Z}$ inversa: frações parciais, série de potências e resíduos; cada método é acompanhado de exemplos. Ao final do capítulo tem-se exercícios propostos para esta seção.

No quarto capítulo, o qual é o foco deste material, apresenta a resolução de equações de diferenças através da transformada $\mathcal{Z}$, tendo além de exemplos somente algébricos, modelos que utilizam o raciocínio recursivo aplicáveis ao ensino básico. Tais modelos incluem modelos como torre de Hanói, números de Fibonacci, padrões geométricos, problemas de matemática financeira, probabilidade, entre outros.

Os exemplos e notações expostos ao longo do trabalho têm como base principalmente as referências Attar (2005), Elaydi (2005), Poularikas (2000) e Sertöz (2004).

2 TRANSFORMADA $\mathcal{Z}$

Segundo Poularikas (2000) "a transformada $\mathcal{Z}$ é um poderoso método para resolver equações de diferenças e, em geral, para representar sistemas discretos"(POULARIKAS, 2000).

As características essenciais da transformada $\mathcal{Z}$ na matemática estiveram presentes no início dos anos 1730, quando De Moivre introduziu o conceito mais geral de funções geradoras para a teoria da probabilidade, segundo Elaydi (2005).

Por meio de sua utilização, pode-se converter uma equação de diferenças descrita por funções exponenciais, trigonométricas, constante, hiperbólica, entre outras, em uma função algébrica de uma variável complexa z.

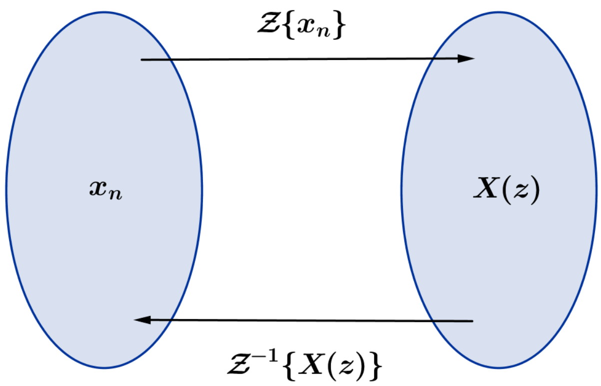

Figura 1: Diagrama da Transformada $\mathcal{Z}$ e sua Inversa

Segundo Attar (2005), as transformadas na matemática são consideradas poderosas ferramentas, tendo como vantagens:

> Transformar equações de diferenças ou equações diferenciais em equações algébricas, tornando-as de fácil resolução; As operações de convolução envolvidas no domínio do tempo é reduzida a uma operação de multiplicação, no domínio da transformada; As condições iniciais são diretamente incorporadas no processo de solução e não têm que ser incorporadas separadamente; A representação de um sistema em termos das localizações de pólos e zeros da função de transferência do sistema no

> plano complexo; As características do estado transiente e estável de um sistema discreto podem ser obtidos através da análise dos pólos e zeros do sistema.(ATTAR, 2005)

A transformada $\mathcal{Z}$ define como construir uma função a partir de uma sequência. Assim cada sequência é transformada numa função; isso permitirá transformar equações de diferenças em equações algébricas que, em alguns casos, podem ser resolvidas facilmente.

Sendo z uma variável complexa, a transformada $\mathcal{Z}$ de um termo da equação de diferenças pode não existir para todos os valores de z. Região de convergência é o nome dado para a região do plano complexo para a qual a transformada $\mathcal{Z}$ existe. Tal região é importante para a determinação da transformada $\mathcal{Z}$ inversa, a qual terá uma análise mais detalhada na subseção 2.2.

Uma equação de diferenças pode ser transformada em uma equação algébrica em z (onde z é uma variável complexa) através da transformada $\mathcal{Z}$, denotada por $\mathcal{Z}\{x_n\}$. E em seguida, a transformação inversa da presente solução em z proporciona a solução para a equação de diferenças com a utilização da transformada $\mathcal{Z}$ inversa denotada por $\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$ seguido de algumas técnicas ou diretamente pela lista de transformadas $\mathcal{Z}$ elementares.

Neste capítulo tem-se primeiramente a definição de transformada $\mathcal{Z}$ unilateral e uma breve discussão da região de convergência como condição para sua existência. Em seguida, alguns exemplos para ilustrar a construção da transformada $\mathcal{Z}$ de várias funções comumente utilizadas.

2.1 DEFINIÇÃO DA TRANSFORMADA $\mathcal{Z}$ UNILATERAL

A transformada $\mathcal{Z}$ é um operador que converte uma sequência x_n em uma função $X(z)$, onde z é uma variável complexa.

A transformada $\mathcal{Z}$ de uma sequência x_n é definida por:

$$\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} \tag{1}$$

definida para todo $n \in \mathbb{Z}$.

É importante ressaltar que $X(z)$ existe apenas para regiões do plano complexo em que o somatório (1) converge.

A definição acima é chamada de transformada $\mathcal{Z}$ Bilateral, pois se aplica à sequências x_n bilaterais, onde $n \in \mathbb{Z}$.

Tem-se em (1) a definição da transformada $\mathcal{Z}$, porém neste material a transformada será aplicada somente em sequências unilaterais. Define-se então a transformada $\mathcal{Z}$ Unilateral para sequências unilaterais, ou seja, para sequências do tipo:

$$x_n = \{\ldots, 0, 0, 0, x_0, x_1, x_2, \ldots\} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$$

com $x_n = 0$ para todo $n < 0$.

A transformada $\mathcal{Z}$ Unilateral de x_n é definida como:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x_n\} &= X(z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \\ &= x_0 + \frac{x_1}{z} + \frac{x_2}{z^2} + \frac{x_3}{z^3} + \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

definida para todo $n \in \mathbb{N}$.

A transformada unilateral, definida para todo $n \geq 0$, difere da transformada bilateral em que o somatório é analisado sobre valores não negativos de n em x_n ou em que $x_n = 0$ para $n < 0$. Em particular, para qualquer sequência em que $x_n = 0$ para $n < 0$, as transformadas unilateral e bilateral serão idênticas (OPPENHEIM; WILLSKY, 1997).

Para Oppenheim e Willsky (1997) “a transformada $\mathcal{Z}$ unilateral é particularmente útil na análise de sistemas especificados por equações de diferenças lineares, dadas as condições iniciais”(OPPENHEIM; WILLSKY, 1997).

Uma sequência x_n admite a transformada $\mathcal{Z}$ unilateral se a série (2) é convergente para pelo menos um complexo z. Tem-se mais detalhes na subseção 2.2.

A seguir alguns exemplos simples de sequências e suas transformadas.

Exemplo 2.1. Seja y_n a sequência $\{2, 4, 6, 4, 2, 0, 0, 0, \ldots\}$, onde $y_n = 0$ para $n > 4$, $n \in \mathbb{N}$.

A transformda de y_n, detonada por $\mathcal{Z}\{y_n\} = Y(z)$, é tal que:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n} \\ &= 2+\frac{4}{z}+\frac{6}{z^2}+\frac{4}{z^3}+\frac{2}{z^4}+\frac{0}{z^5}+\frac{0}{z^6}+\ldots \\ &= 2+\frac{4}{z}+\frac{6}{z^2}+\frac{4}{z^3}+\frac{2}{z^4}, \end{aligned}$$

definida para todo $z \neq 0$, onde z é uma variável complexa (região de convergência).

Exemplo 2.2. Seja a equação de diferenças dada por

$$\delta(n-k) = \begin{cases} 1, \text{ se } n = k \\ 0, \text{ se } n \neq k, \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{N}$.

Calculando $\mathcal{Z}\{\delta(n-k)\}$ tem-se:

$$\mathcal{Z}\{\delta(n-k)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n-k) z^{-n} = z^{-k}.$$

Assim, $\mathcal{Z}\{\delta(n-k)\} = z^{-k}$.

Exemplo 2.3. Como um caso particular da sequência delta, para $k = 0$ tem-se:

$$x_n = \begin{cases} 1, \text{ se } n = 0 \\ 0, \text{ se } n \neq 0. \end{cases}$$

Tal relação gera a sequência $x_n = \{1, 0, 0, 0, 0, \ldots\}$, cuja transformada $\mathcal{Z}\{x_n\}$ é dada por:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \\ &= 1+\frac{0}{z}+\frac{0}{z^2}+\frac{0}{z^3}+\ldots \\ &= 1, \end{aligned}$$

definida para todo z complexo (região de convergência).

Assim, $\mathcal{Z}\{x_n\} = 1$.

Exemplo 2.4. Considere a sequência de Heaviside dada por:

$$H(n-k) = \begin{cases} 0, \text{ se } n < k \\ 1, \text{ se } n \geq k, \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{N}$.

Calculando a transformada $\mathcal{Z}$ da sequência dada:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{H(n-k)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} H(n-k)z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} H(n-k)z^{-n} + \sum_{n=k}^{\infty} H(n-k)z^{-n} \\ &= 0 + \frac{1}{z^k} + \frac{1}{z^{k+1}} + \frac{1}{z^{k+2}} + \ldots \end{aligned}$$

gerando uma progressão geométrica (PG) de primeiro termo $\dfrac{1}{z^k}$ e razão $\dfrac{1}{z}$.

Logo, pela fórmula da soma dos termos de uma PG:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{H(n-k)\} &= \frac{\frac{1}{z^k}}{1-\frac{1}{z}} \\ &= \frac{z}{z^k(z-1)}, \end{aligned}$$

definida para $|z| > 1$ (região de convergência).

Exemplo 2.5. Considere

$$f_n = \begin{cases} 0, \text{ se } n < 0 \\ 1, \text{ se } n \geq 0 \end{cases}$$

o que gera a sequência $f_n = \{1, 1, 1, 1, \ldots\}$, e sua transformada $\mathcal{Z}\{f_n\}$ é dada por:

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \\
&= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots
\end{aligned}
$$

gerando uma progressão geométrica (PG) de primeiro termo 1 e razão $\dfrac{1}{z}$.

Logo, pela fórmula da soma dos termos de uma PG:

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\
&= \frac{z}{z-1},
\end{aligned}
$$

definida para $|z| > 1$ (região de convergência).

Portanto, $\mathcal{Z}\{f_n\} = \dfrac{z}{z-1}$.

Este exemplo recai em um caso particular da sequência de Heaviside, onde $k = 0$.

Exemplo 2.6. Considere a relação $y_n = a$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$, a qual gera a sequência

$y_n = \{a, a, a, a, \ldots\}$.

A transformada $\mathcal{Z}\{y_n\}$ é explicitada como:

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n} \\
&= a + \frac{a}{z} + \frac{a}{z^2} + \frac{a}{z^3} + \ldots
\end{aligned}
$$

a qual corresponde a uma PG de primeiro termo a e razão $r = \dfrac{1}{z}$.

Calculando a soma da PG:

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{a}{1-\dfrac{1}{z}} \\
&= \frac{az}{z-1},
\end{aligned}
$$

definida para $|z| > 1$ (região de convergência).

Assim, $\mathcal{Z}\{y_n\} = \dfrac{az}{z-1}$.

Exemplo 2.7. Seja $f_n = a^n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$ uma constante. Tal relação tem como solução a sequência $\{1, a, a^2, a^3, \ldots\}$.

A transformada $\mathcal{Z}\{f_n\}$ é dada por:

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \\
&= 1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \frac{a^3}{z^3} + \ldots \\
&= 1 + \frac{a}{z} + \left(\frac{a}{z}\right)^2 + \left(\frac{a}{z}\right)^3 + \ldots
\end{aligned}
$$

a qual corresponde a uma PG de primeiro termo igual a 1 e razão $r = \dfrac{a}{z}$.

Calculando a soma da PG:

$$F(z) = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a},$$

definida para $|z| > |a|$ (região de convergência).

Assim, a transformada $\mathcal{Z}\{f_n\} = \dfrac{z}{z-a}$.

Nota-se que nos exemplos acima foi definida a condição de existência das transformadas conforme a região de convergência associada a cada transformada. Na próxima subseção tem-se exemplos indicando a região de convergência e o modo para encontrá-la.

2.2 REGIÃO DE CONVERGÊNCIA

Nesta seção se apresenta um aprofundamento no conceito de região de convergência (RDC) como condição de existência da transformada $\mathcal{Z}$.

A transfomada $\mathcal{Z}$ pode não existir para todos os valores de z. Logo a RDC será a região do plano complexo para a qual a transformada $\mathcal{Z}$ existe e converge.

Uma sequência x_n admite a transformada $\mathcal{Z}$ se a série (2) é convergente para pelo menos um complexo z. A convergência da série de potências depende da distância $|z|$ no plano complexo. Se a distância for suficientemente aproximada a zero, a série converge, e quanto maior for a distância mais lenta será a convergência, até que a partir de uma certa distância a série diverge. O valor máximo da distância $|z|$ para o qual a série converge, é o chamado raio de convergência R.

Para ilustrar a RDC associada à transformada $\mathcal{Z}$ tem-se primeiramente um exemplo de soma dos primeiros termos de uma progressão geométrica (com razão pertencente aos números reais), implicando à uma soma infinita, quando a quantidade de termos tendem ao infinito. Em seguida uma generalização do caso para razão pertencente aos números complexos.

Considerando os n primeiros termos de uma progressão geométrica (PG), dado primeiro termo $a \in \mathbb{R}$ e razão $r \in \mathbb{R}$, a soma dos n primeiros termos da PG é dada por:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1}.$$

Multiplicando por r em ambos os lados da igualdade

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ... + ar^n$$

e subtraindo $S_n - rS_n$

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} - (ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ... + ar^n) \\ &= a - ar^n, \end{aligned}$$

isto é,

$$S_n(1-r) = a(1-r^n)$$

e assim

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r},$$

se $r \neq 1$.

Porém, o objetivo é notar o que ocorre com a série S_n quando n tende ao infinito.

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

quando $|r| < 1$ $(r \in \mathbb{R})$, pois:

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{, se } |r| < 1 \\ \infty & \text{, se } |r| > 1. \end{cases}$$

Conclui-se que a soma de uma progressão geométrica, dado primeiro termo $a \in \mathbb{R}$ e razão $r \in \mathbb{R}$, converge quando $|r| < 1$.

O mesmo raciocínio é válido se r pertence ao conjunto dos números complexos, com a diferença que agora $|r| < 1$ significa uma região do plano complexo ao invés de um intervalo real. Assim a RDC para $X(z) = \mathcal{Z}\{x_n\}$, onde R é o raio de convergência, será representada por $|R| < 1$, conforme Figura 2.

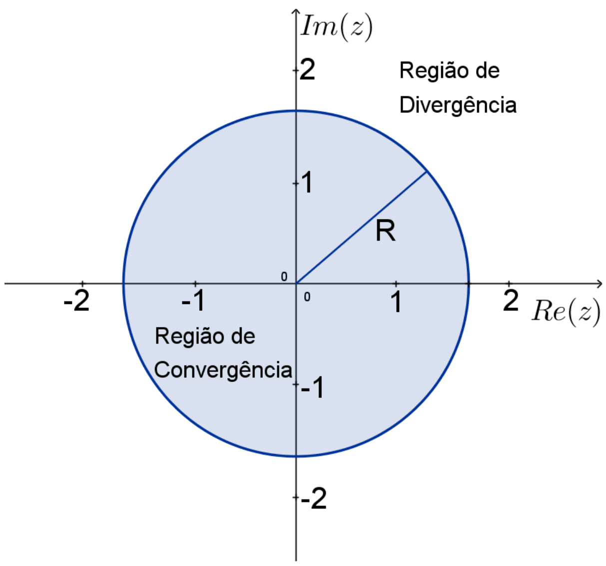

Figura 2: Região de convergência e divergência para $|R| < 1$.

Utilizando o conceito de convergência para progressões geométricas visto anteriormente, será encontrada a região de convergência de alguns exemplos da transformada $\mathcal{Z}$.

Exemplo 2.8. Para $x_n = a^n$, $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$ tem-se $\mathcal{Z}\{x_n\} = \mathcal{Z}\{a^n\} = X(z)$.

Utilizando a definição da transformada $\mathcal{Z}$:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \\ &= 1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \frac{a^3}{z^3} + \ldots \end{aligned}$$

onde $X(z)$ é dado por uma PG de primeiro termo igual a 1 e razão $r = \dfrac{a}{z}$. Logo,

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{1-\dfrac{a}{z}} \\ &= \frac{z}{z-a}. \end{aligned}$$

Daí a região de convergência de $X(z)$ é dada por $|r| = \left|\dfrac{a}{z}\right| < 1$, ou seja, $|z| > |a|$, onde $R = |a|$ é o raio de convergência, conforme Figura 3.

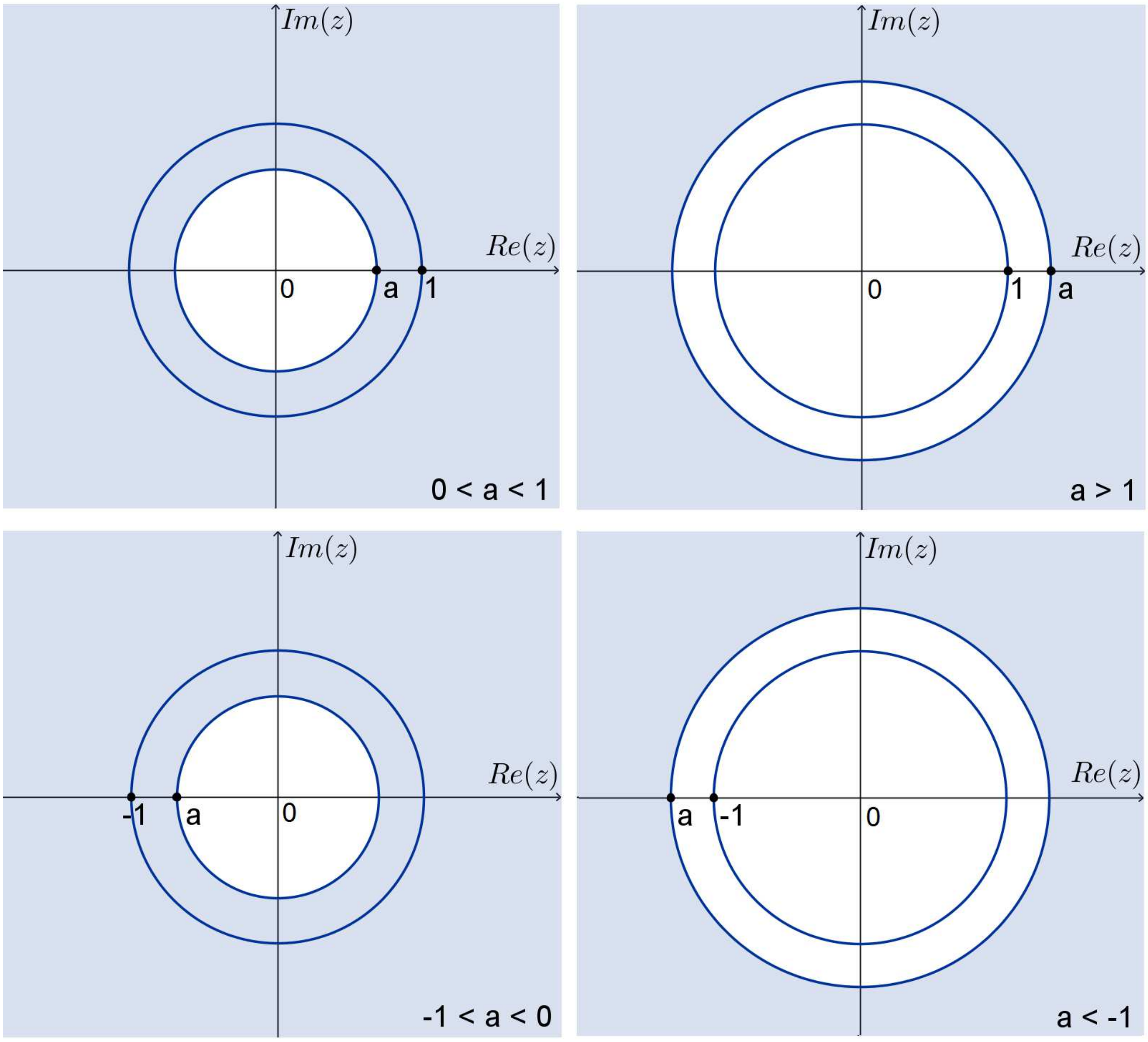

Figura 3: RDC da forma $|z| > |a|$.

Exemplo 2.9. Para $x_n = e^{an}$, $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$ tem-se $\mathcal{Z}\{x_n\} = \mathcal{Z}\{e^{an}\} = X(z)$.

Utilizando a definição de transformada $\mathcal{Z}$ e a fórmula da soma de uma PG:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{an} z^{-n} \\ &= 1 + \frac{e^a}{z} + \left(\frac{e^a}{z}\right)^2 + \left(\frac{e^a}{z}\right)^3 + \ldots \\ &= \frac{1}{1 - \dfrac{e^a}{z}} = \frac{z}{z - e^a}. \end{aligned}$$

Tem-se uma PG de razão $r = \dfrac{e^a}{z}$, cuja RDC é dada por $\left|\dfrac{e^a}{z}\right| < 1$, isto é, $|z| > e^a$, onde $R = e^a$ é o raio de convergência. As regiões de convergência e divergência podem ser vistas na Figura 4.

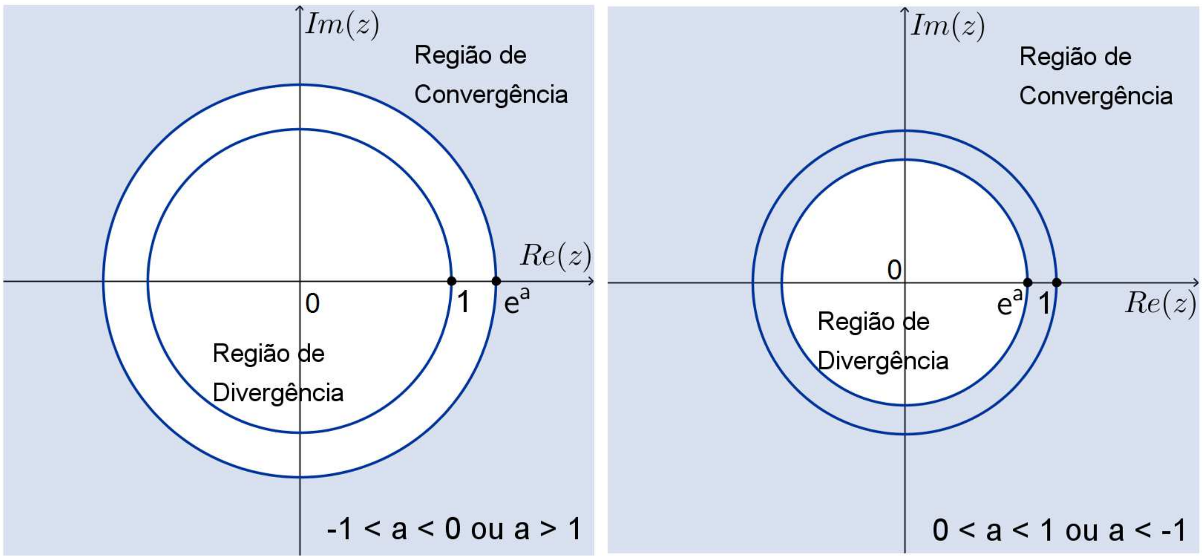

Figura 4: Região de convergência e divergência para $R = e^a$.

Ainda no exemplo 2.9 tem-se que a transformada $\mathcal{Z}\{e^{an}\} = \dfrac{z}{z - e^a}$ também é válida para a complexo.

Em sequências mais complicadas, para encontrar os valores de z para os quais a série converge, usa-se o teste da razão ou o teste da raíz. Nos próximos exemplos resolvidos nesta seção, o desenvolvimento de tais testes serão apresentados sem as respectivas demonstrações, que podem ser obtidos nas referências (GUIDORIZZI, 2002; KAPLAN, 2003; THOMAS et al., 2012).

Teorema 2.10. *Teste da Razão*

Seja a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *com* $a_n > 0$ *para todo natural* n. *Suponhamos que* $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *exista, finito ou infinito. Nestas condições, tem-se:*

(a) se $L < 1$, *a série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *será convergente.*

(b) se $L > 1$ *ou* $L = \infty$, *a série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *será divergente.*

(c) se $L = 1$, *o critério nada revela.*

Teorema 2.11. *Teste da Raíz*

Seja a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *com* $a_n > 0$ *para todo natural* n. *Suponhamos que* $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *exista, finito ou infinito. Então*

(a) se $L < 1$, *a série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

(b) se $L > 1$ *ou* $L = \infty$, *a série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *será divergente.*

(c) se $L = 1$, *o critério nada revela.*

Para que as séries sejam convergentes deve-se ter $|z| > R$, onde R é o raio de convergência para a série $\{x_n\}$. Portanto a série irá convergir absolutamente para todos os pontos do plano complexo que estão fora do círculo de raio R, e é centrado na origem. Assim, se $R = 0$ então a transformada $\mathcal{Z}$ de x_n converge em toda região do plano, exceto na origem. Se $R = \infty$, então a transformada $\mathcal{Z}$ de x_n diverge para toda região.

Logo, as sequências x_n cuja transformada $\mathcal{Z}$ diverge para toda região do plano não admitem a transformada $\mathcal{Z}$ inversa.

Exemplo 2.12. Seja $x_n = a^n$, e como visto anteriormente no exemplo 2.8, $\mathcal{Z}\{x_n\} = \mathcal{Z}\{a^n\} = \frac{z}{z-a}$.

Pode-se verificar que sua RDC é dada por $|z| > |a|$, já que a^n corresponde a uma PG de razão $\frac{a}{z}$. E pelo teste da raíz a série $X(z) = \mathcal{Z}\{x_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$ é convergente pois:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a^n||z^{-n}|} = \lim_{n\to\infty} |a||z^{-1}| = |a||z^{-1}| < 1.$$

Exemplo 2.13. Seja $y_n = a^n \cos(n\theta)$.

Para a série $Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n}$ convergir, pelo teste da raíz, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n \cos(n\theta) z^{-n}} < 1$.

De fato,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a^n \cos(n\theta)||z^{-n}|} = \lim_{n\to\infty} |a||z^{-1}| < 1,$$

pois $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\cos(n\theta)} = 1$.

Para encontrar a RDC deve-se verificar o que ocorre com a série $Y(z)$ quando n tende ao infinito. Nota-se que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \left|\frac{a}{z}\right| < 1 \\ \infty & , \text{ se } \left|\frac{a}{z}\right| > 1. \end{cases}$$

Ou seja, para $\frac{|a|}{|z|} < 1$ a série $Y(z)$ converge. Assim, tem-se a RDC $|z| > |a|$, onde o raio de convergência de $Y(z)$ é $R = |a|$, conforme Figura 5.

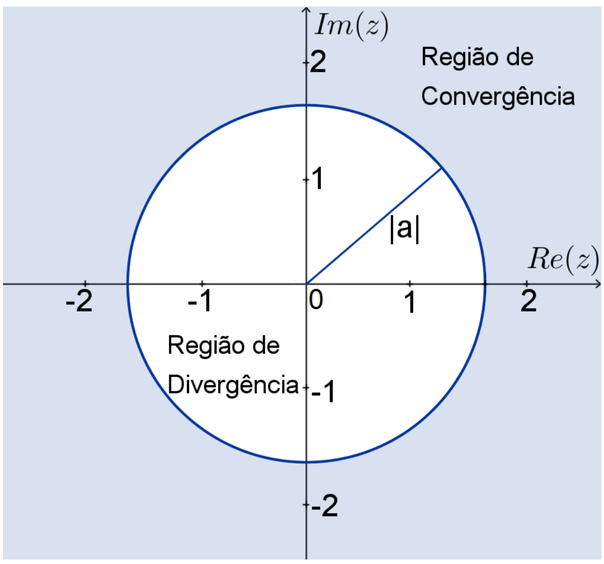

Figura 5: Região de convergência e divergência para $R = |a|$.

2.3 PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA $\mathcal{Z}$

A transformada $\mathcal{Z}$ possui um número de propriedades que a torna um instrumento extremamente útil no estudo de equações que variam discretamente. A seguir, tem-se algumas propriedades básicas da transformada $\mathcal{Z}$, seguidas de suas demonstrações e exemplos.

Para demonstrar cada propriedade da transformada $\mathcal{Z}$, vale lembrar, além da definição em (2):

$$\mathcal{Z}\{x_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n},$$

da transformada de $\mathcal{Z}\{x_n\}$, onde $x_n = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, conforme exemplo 2.5:

$$\mathcal{Z}\{1\} = \frac{z}{z-1},$$

e da transformada de $\mathcal{Z}\{x_n\}$, onde $x_n = a^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, conforme exemplo 2.7:

$$\mathcal{Z}\{a^n\} = \frac{z}{z-a}.$$

2.3.1 LINEARIDADE

Teorema 2.14. *Sejam a e b números complexos dados, x_n e y_n sequências, e $X(z)$ a transformada $\mathcal{Z}$ de x_n, $Y(z)$ a transformada $\mathcal{Z}$ de y_n, com os raios de convergência R_1 e R_2, respectivamente. Se as transformadas $\mathcal{Z}\{x_n\}$ e $\mathcal{Z}\{y_n\}$ existem, então também existe a transformada*
$\mathcal{Z}\{ax_n + by_n\} = aX(z) + bY(z)$, sendo a RDC dada por $|z| > max\{R_1, R_2\}$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{ax_n + by_n\} &= \sum_{n=0}^{\infty} (ax_n + by_n)\, z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} ax_n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} by_n z^{-n}
\end{aligned}$$

$$= a\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} + b\sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n}$$

$$= aX(z) + bY(z)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.15. Seja $y_n = \operatorname{sen}(\theta n)$, para $n \in \mathbb{N}$ e $\theta \in \mathbb{R}$, a transformada $\mathcal{Z}\{\operatorname{sen}(\theta n)\}$ pode ser encontrada utilizando a propridade de Linearidade.

E lembrando, pela fórmula de Euler, que

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

e,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

E sua transformada $\mathcal{Z}$ explicitada como:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{\operatorname{sen}(\theta n)\} &= \mathcal{Z}\left\{\frac{e^{i\theta n} - e^{-i\theta n}}{2i}\right\} \\ &= \frac{1}{2i}(\mathcal{Z}\{e^{i\theta n}\} - \mathcal{Z}\{e^{-i\theta n}\}) \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{z-e^{i\theta}} - \frac{z}{z-e^{-i\theta}}\right) \\ &= \frac{z(z-e^{-i\theta}) - z(z-e^{i\theta})}{(z-e^{i\theta})(z-e^{-i\theta})2i} \\ &= \frac{z(z-e^{-i\theta} - z + e^{i\theta})}{2i(z-e^{i\theta})(z-e^{-i\theta})} \end{aligned} \tag{3}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{z(-e^{-i\theta}+e^{i\theta})}{2i(z-e^{i\theta})(z-e^{-i\theta})}\\
&= \frac{z\,\mathrm{sen}\,\theta}{(z-e^{i\theta})(z-e^{-i\theta})}\\
&= \frac{z\,\mathrm{sen}\,\theta}{z^2-ze^{-i\theta}-ze^{i\theta}+1}\\
&= \frac{z\,\mathrm{sen}\,\theta}{z^2-z(e^{-i\theta}+e^{i\theta})+1}\\
&= \frac{z\,\mathrm{sen}\,\theta}{z^2-2z\cos\theta+1}.
\end{aligned}
$$

Assim, $\dfrac{z\,\mathrm{sen}\,\theta}{z^2-2z\cos\theta+1}$ é a transformada $\mathcal{Z}\{y_n\}$.

Observando o exemplo 2.9, para $x_n = e^{an}$ a RDC é dada por $|z| > |e^a|$. E, de modo semelhante, neste caso a RDC de $\mathcal{Z}\{y_n\}$ é dada por:

$$
\begin{aligned}
|z| &> |e^{i\theta}|\\
&= |\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta|\\
&= \sqrt{\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\,\theta}\\
&= \sqrt{1}\\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Portanto, para $\mathcal{Z}\{\mathrm{sen}\,(\theta n)\}$ a RDC é dada por $|z|>1$.

Exemplo 2.16. Seja $f_n = \mathrm{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$, para $n \in \mathbb{N}$, o que gera a sequência $f_n = \{0,1,0,-1,0,1,0,-1,\ldots\}$.

Pode-se encontrar $\mathcal{Z}\{f_n\}$ através da definição (2):

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \frac{0}{z^0}+\frac{1}{z^1}+\frac{0}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\frac{0}{z^4}+\ldots\\
&= \frac{1}{z}-\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^5}-\frac{1}{z^7}+\ldots.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Tem-se então em (4) uma PG de primeiro termo $a = \dfrac{1}{z}$ e razão $r = -\dfrac{1}{z^2}$.

Utilizando a fórmula da soma de uma PG:

$$F(z) = \frac{\frac{1}{z}}{1 - \left(-\frac{1}{z^2}\right)} = \frac{z}{z^2+1}.$$

Logo, $\mathcal{Z}\left\{\text{sen}\,\dfrac{n\pi}{2}\right\} = \dfrac{z}{z^2+1}$, e a RDC é dada por $|z| > 1$ conforme exemplo 2.15, onde $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Pode-se também verificar a transformada substituindo $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ na solução encontrada em (3):

$$\mathcal{Z}\left\{\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\} = \frac{z\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}}{z^2 - 2z\cos\frac{\pi}{2} + 1} = \frac{z}{z^2+1}.$$

2.3.2 DIFERENCIAÇÃO

Teorema 2.17. *Se a transformada $X(z) = \mathcal{Z}\{x_n\}$ existe para $|z| > R$ então a transformada $\mathcal{Z}\{nx_n\}$ também existe para $|z| > R$ e tem-se:*

$$\mathcal{Z}\{nx_n\} = -z\frac{d}{dz}X(z).$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}X(z) &= \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} x_n z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} -nx_n z^{-n-1} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} nx_n z^{-n-1}
\end{aligned}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} n x_n \frac{z^{-n}}{z}$$

$$= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} n x_n z^{-n}$$

$$= -\frac{1}{z}\mathcal{Z}\{n x_n\}.$$

Daí,

$$\frac{d}{dz}X(z) = -\frac{1}{z}\mathcal{Z}\{n x_n\}.$$

Ou seja,

$$\mathcal{Z}\{n x_n\} = -z\frac{d}{dz}X(z).$$

De modo geral:

$$\mathcal{Z}\{n^k x_n\} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^k \mathcal{Z}\{x_n\}.$$

Exemplo 2.18. Seja $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, a sequência dada por $x_n = \{0,1,2,3,4,5,\ldots\}$ cuja transformada $\mathcal{Z}\{x_n\}$, utilizando a propriedade de diferenciação, é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{n\} &= \mathcal{Z}\{n.1\} \\ &= -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{1\} \\ &= -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) \\ &= -z\left[\frac{(z-1)-z}{(z-1)^2}\right] \\ &= \frac{-z(z-1)+z^2}{(z-1)^2} \\ &= \frac{z}{(z-1)^2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Assim $\mathcal{Z}\{n\} = \dfrac{z}{(z-1)^2}$, com RDC $|z| > 1$.

Exemplo 2.19. Seja $y_n = n^2$ então a transformada $\mathcal{Z}\{n^2\}$, utilizando a propriedade de diferenciação, é dada por:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{n^2\} &= \mathcal{Z}\{n.n\} \\
&= -z\frac{d}{dz}(\mathcal{Z}\{n\}) \\
&= -z\frac{d}{dz}\frac{z}{(z-1)^2} \\
&= -z\left(\frac{(z-1)^2-2z(z-1)}{(z-1)^4}\right) \\
&= \frac{z(z^2-1)}{(z-1)^4} \\
&= \frac{z(z+1)(z-1)}{(z-1)^4} \\
&= \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}.
\end{aligned}
$$

Logo, tem-se que $\mathcal{Z}\{n^2\} = \dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$, com RDC $|z| > 1$.

Exemplo 2.20. Seja $f_n = na^n$, para $a \in \mathbb{R}$. A transformada $\mathcal{Z}\{f_n\}$ pode ser encontrada utilizando a propriedade de diferenciação.

Lembrando que $\mathcal{Z}\{a^n\} = \dfrac{z}{z-a}$, a transformada $\mathcal{Z}\{na^n\}$ é dada por:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{na^n\} &= -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{a^n\} \\
&= -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-a}\right) \\
&= \frac{az}{(z-a)^2}.
\end{aligned}
$$

Portanto $\mathcal{Z}\{na^n\} = \dfrac{az}{(z-a)^2}$, com RDC $|z| > |a|$.

2.3.3 SIMILARIDADE

Teorema 2.21. *Seja $a \neq 0$ uma constante complexa, $X(z)$ a transformada $\mathcal{Z}$ de x_n e R seu raio de convergência. Tem-se que $\mathcal{Z}\{a^n x_n\} = X\left(\dfrac{z}{a}\right)$, com $|z| > |a|R$.*

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{a^n x_n\} &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n x_n z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{z^{-n}}{a^{-n}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x_n \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{a}\right).
\end{aligned}
$$

Sendo R o raio de convergência de $\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z)$ logo a RDC de $X(z)$ é $|z| > R$. Assim, a RDC de $X\left(\frac{z}{a}\right)$ é dada por $\left|\frac{z}{a}\right| > R$ ou ainda $|z| > |a|R$.

Exemplo 2.22. Seja $\mathcal{Z}\{na^n\}$ a transformada $\mathcal{Z}$ de na^n.

Lembrando que $\mathcal{Z}\{n\} = \dfrac{z}{(z-1)^2}$, e utilizando a propriedade de similaridade:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{na^n\} &= \frac{\dfrac{z}{a}}{\left(\dfrac{z}{a} - 1\right)^2} \\
&= \frac{\dfrac{z}{a}}{\left(\dfrac{z-a}{a}\right)^2} \\
&= \frac{z}{a} \frac{a^2}{(z-a)^2} \\
&= \frac{az}{(z-a)^2}.
\end{aligned}
$$

Portanto $\mathcal{Z}\{na^n\} = \dfrac{az}{(z-a)^2}$, com RDC $|z| > |a|$, conforme exemplo 2.20 visto na propriedade de diferenciação.

Exemplo 2.23. Seja $\mathcal{Z}\{e^{\alpha n}\}$ a transformada $\mathcal{Z}$ de $e^{\alpha n}$.

Lembrando que $\mathcal{Z}\{1\} = \dfrac{z}{z-1}$ e utilizando a propriedade de similaridade:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{e^{\alpha n}\} &= \mathcal{Z}\{(e^{\alpha})^n\} \\
&= \frac{\frac{z}{e^{\alpha}}}{\frac{z}{e^{\alpha}}-1} \\
&= \frac{\frac{z}{e^{\alpha}}}{\frac{z-e^{\alpha}}{e^{\alpha}}} \\
&= \frac{z}{z-e^{\alpha}}.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Logo $\mathcal{Z}\{e^{\alpha n}\} = \dfrac{z}{z-e^{\alpha}}$, com RDC $|z| > e^{\alpha}$, conforme exemplo 2.9.

Exemplo 2.24. A transformada $\mathcal{Z}\{2^n(n^2-n)\}$ pode ser resolvida utilizando as propriedades de linearidade e similaridade.

Calculando inicialmente $\mathcal{Z}\{n^2-n\}$ tem-se que:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{n^2-n\} &= \mathcal{Z}\{n^2\} - \mathcal{Z}\{n\} \\
&= \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} - \frac{z}{(z-1)^2} \\
&= \frac{2z}{(z-1)^3}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{2^n(n^2-n)\} &= \frac{2\frac{z}{2}}{\left(\frac{z}{2}-1\right)^3} \\
&= \frac{8z}{(z-2)^3}.
\end{aligned}
$$

Assim, $\mathcal{Z}\{2^n(n^2-n)\} = \dfrac{8z}{(z-2)^3}$, definida para $|z| > 2$.

2.3.4 TRANSLAÇÃO

Suponha a sequência $f_n = n+1$, $n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, dada por $f_n = \{1,2,3,4,5,\ldots\}$ a qual pode ser observada na Figura 6.

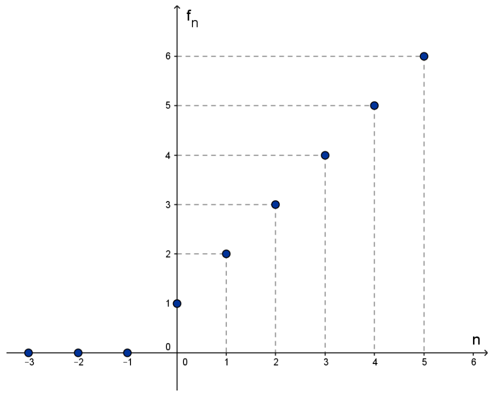

Figura 6: Sequência $f_n = n+1$.

Quando tal sequência é deslocada (ou transladada) para a direita tem-se f_{n-1} dada por

$$f_{n-1} = \{0,1,2,3,4,\ldots\}$$

observada na Figura 7.

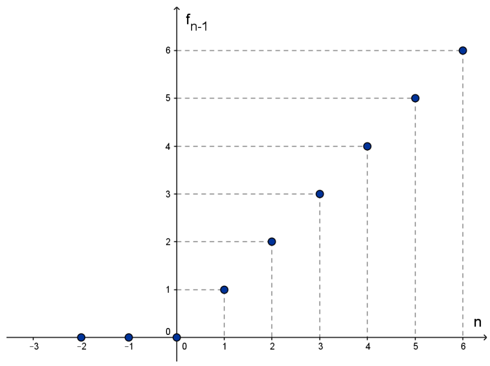

Figura 7: f_{n-1} como uma translação para direita de f_n.

E ainda quando deslocada novamente para a direita tem-se f_{n-2} dada por

$$f_{n-2} = \{0,0,1,2,3,\ldots\}$$

observada na Figura 8.

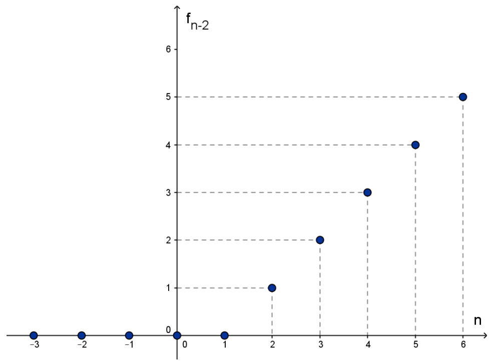

Figura 8: f_{n-2} como uma translação para direita de f_n.

Quando estes deslocamentos ocorrem, os valores iguais a zero da sequência se dão pois nas sequências unilaterais $f_n = 0$ para todo $n < 0$.

E segundo a definição em (2), as transformadas das sequências f_n, f_{n-1} e f_{n-2} são dadas por:

$$\mathcal{Z}\{f_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = 1 + \frac{2}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \frac{5}{z^4} + \ldots;$$

$$\mathcal{Z}\{f_{n-1}\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n-1} z^{-n} = 0 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{4}{z^4} + \ldots;$$

$$\mathcal{Z}\{f_{n-2}\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n-2} z^{-n} = 0 + \frac{0}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3} + \frac{3}{z^4} + \ldots.$$

Denotando $\mathcal{Z}\{f_n\} = F(z)$, pode-se relacionar as transformadas obtidas da seguinte maneira:

$$\mathcal{Z}\{f_{n-1}\} = z^{-1}\mathcal{Z}\{f_n\} = z^{-1}F(z)$$

e

$$\mathcal{Z}\{f_{n-2}\} = z^{-2}\mathcal{Z}\{f_n\} = z^{-2}F(z),$$

conjecturando que $\mathcal{Z}\{f_{n-k}\} = z^{-k}F(z)$.

Voltando para a sequência f_n e observando agora seu deslocamento (ou translação) para a esquerda, tem-se que a sequência f_{n+1} é dada por $f_{n+1} = \{2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$, observada na Figura 9.

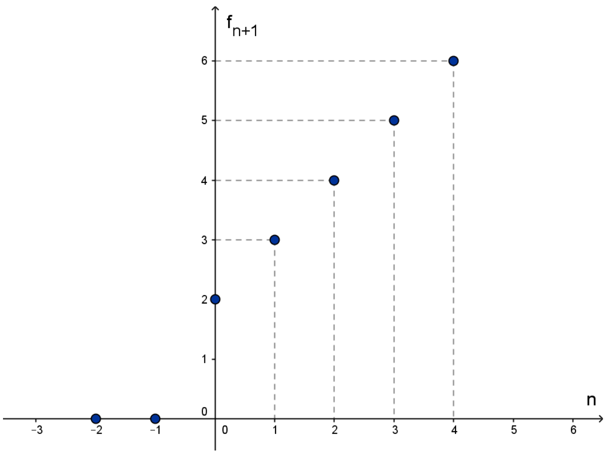

Figura 9: f_{n+1} como uma translação para esquerda de f_n.

E transladando f_n novamente para a esquerda tem-se a sequência f_{n+2} dada por $f_{n+2} = \{3,4,5,6,7,\ldots\}$, observada na Figura 10.

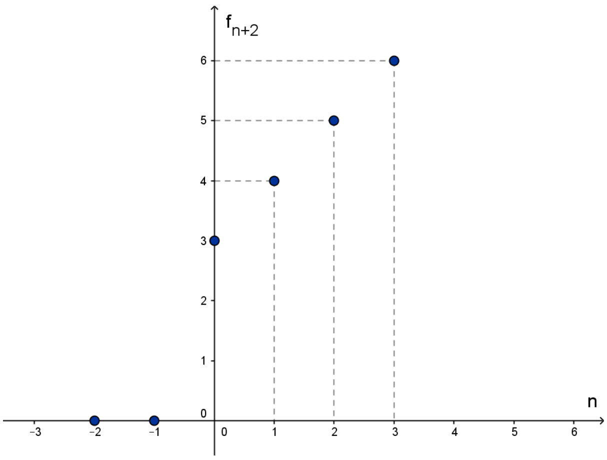

Figura 10: f_{n+2} como uma translação para esquerda de f_n.

Como as sequências são unilaterais, observa-se que os primeiros valores deslocados da sequência são iguais a 0.

E segundo a definição em (2), as transformadas das sequências f_n, f_{n+1} e f_{n+2} são dadas por:

$$\mathcal{Z}\{f_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = 1 + \frac{2}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \frac{5}{z^4} + \ldots;$$

$$\mathcal{Z}\{f_n + 1\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = 2 + \frac{3}{z} + \frac{4}{z^2} + \frac{5}{z^3} + \frac{6}{z^4} + \ldots;$$

$$\mathcal{Z}\{f_n+2\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = 3 + \frac{4}{z} + \frac{5}{z^2} + \frac{6}{z^3} + \frac{7}{z^4} + \ldots.$$

E como feito anteriormente, chamando $\mathcal{Z}\{f_n\} = F(z)$, pode-se comparar as transformadas obtidas da seguinte maneira:

$$\mathcal{Z}\{f_{n+1}\} = z[F(z) - f_0 z^0]$$

e

$$\mathcal{Z}\{f_{n+2}\} = z^2[F(z) - f_0 z^0 - f_1 z^{-1}].$$

Tem-se uma conjectura para $\mathcal{Z}\{f_{n+k}\}$ dada por

$$\mathcal{Z}\{f_{n+k}\} = z^k[F(z) - (f_0 z^0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \ldots + f_{k-1} z^{-(k-1)})].$$

As conjecturas obtidas das translações aplicadas às sequências serão enunciadas e demonstradas a seguir.

Teorema 2.25. *Seja $X(z)$ a transformada $\mathcal{Z}$ de x_n, com raio de convergência R. Se a transformada $\mathcal{Z}\{x_n\}$ existe então:*

(i) Translação para Direita

$\mathcal{Z}\{x_{n-k}\} = z^{-k}X(z)$, *para* $|z| > R$, $n \geq k$, *onde* $n \in \mathbb{N}$ *e* $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Translação para Esquerda

$\mathcal{Z}\{x_{n+k}\} = z^k[X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{-n}]$, *para* $|z| > R$, $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração:
(i) Para $n \in [0, \infty[$, $n \in \mathbb{Z}$ tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x_n\} = X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \\ &= \sum_{n=-k}^{\infty} x_n z^{-n} - \sum_{n=-k}^{-1} x_n z^{-n}. \end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de índice em $n = m - k$ no primeiro somatório:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{m-k=-k}^{\infty} x_{m-k} z^{-(m-k)} - \sum_{n=-k}^{-1} x_n z^{-n} \\ &= z^k \sum_{m=0}^{\infty} x_{m-k} z^{-m} - \sum_{n=-k}^{-1} x_n z^{-n}. \end{aligned}$$

Como $x_n = 0$ para todo $n < 0$ o somatório $\sum\limits_{n=-k}^{-1} x_n z^{-n}$ se anula, e então:

$$\mathcal{Z}\{x_n\} = z^k \sum_{m=0}^{\infty} x_{m-k} z^{-m} = z^k \mathcal{Z}\{x_{m-k}\}.$$

Portanto:

$$\mathcal{Z}\{x_{n-k}\} = \mathcal{Z}\{x_n\} z^{-k} = X(z) z^{-k}.$$

(ii) Para $k \in \mathbb{Z}$ tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x_n\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{-n} + \sum_{n=k}^{\infty} x_n z^{-n}. \end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de índice em $n = m + k$ no segundo somatório:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x_n\} &= \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{-n} + \sum_{m+k=k}^{\infty} x_{m+k} z^{-(m+k)} \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{-n} + z^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} x_{m+k} z^{-m} \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{-n} + z^{-k} \mathcal{Z}\{x_{m+k}\}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{Z}\{x_n\} = \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{-n} + z^{-k} \mathcal{Z}\{x_{n+k}\}.$$

Ou seja,

$$\mathcal{Z}\{x_{n+k}\} = z^k \left(\mathcal{Z}\{x_n\} - \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{-n} \right).$$

Exemplo 2.26. Seja x_n uma sequência dada por $x_n = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\} = 2^n$, quer-se encontrar a transformada de x_{n-2} e x_{n+1}.

Tem-se $\mathcal{Z}\{x_n\} = \mathcal{Z}\{2^n\} = X(z) = 1z^0 + 2z^{-1} + 4z^{-2} + 8z^{-3} + 16z^{-4} + \ldots$ e pela propriedade de similaridade:

$$X(z) = \frac{\frac{z}{2}}{\frac{z}{2} - 1} = \frac{z}{z-2}.$$

E lembrando que:

$$\mathcal{Z}\{x_{n-k}\} = z^{-k} X(z)$$

e

$$\mathcal{Z}\{x_{n+k}\} = z^k X(z) - \sum_{r=0}^{k-1} x_r z^{k-r}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x_{n-2}\} &= z^{-2} X(z) \\ &= z^{-2} \frac{z}{z-2} \\ &= \frac{1}{z(z-2)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x_{n+1}\} &= z^1 X(z) - x_0 z^1 \\ &= z \frac{z}{z-2} - 1z \\ &= \frac{2z}{z-2}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.27. Seja $y_n = e^{\alpha n}$, $y_0 = 1$ e $y_1 = e^{\alpha}$, tal que, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{Z}\{e^{\alpha n}\} = Y(z) = \frac{z}{z - e^{\alpha}}.$$

Pode-se encontrar a transformada de $y_{n+2} = e^{\alpha(n+2)}$ utilizando a propriedade de translação, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{y_{n+2}\} &= \mathcal{Z}\{e^{\alpha(n+2)}\} \\
&= z^2 Y(z) - \sum_{r=0}^{2-1} y_r z^{2-r} \\
&= z^2 \frac{z}{z - e^{\alpha}} - y_0 z^2 - y_1 z \\
&= z^2 \frac{z}{z - e^{\alpha}} - z^2 - e^{\alpha} z \\
&= \frac{e^{2\alpha} z}{z - e^{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Ou ainda, encontrar a transformada de $y_{n-2} = e^{\alpha(n-2)}$ utilizando a propriedade de translação:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{y_{n-2}\} &= \mathcal{Z}\{e^{\alpha(n-2)}\} \\
&= z^{-2} Y(z) \\
&= z^{-2} \frac{z}{z - e^{\alpha}} \\
&= \frac{1}{z(z - e^{\alpha})}.
\end{aligned}$$

2.3.5 CONVOLUÇÃO

A convolução de duas sequências x_n e y_n é dada por (VICH, 1987):

$$x_n * y_n = \sum_{k=0}^{n} x_{n-k} y_k = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}.$$

A seguinte propriedade mostra que a transformada da convolução é o produto das transformadas.

Teorema 2.28. *Sejam $\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z)$ e $\mathcal{Z}\{y_n\} = Y(z)$. Se existem as transformadas $\mathcal{Z}$ de x_n e y_n e seus raios de convergência são, respectivamente, R_1 e R_2, para $|z| > R_1$ e $|z| > R_2$, então existe a transformada $\mathcal{Z}\{x_n * y_n\}$ para $|z| > max\{R_1, R_2\}$ tal que:*

$$\mathcal{Z}\{x_n * y_n\} = X(z)Y(z).$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{x_n * y_n\} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}\right] z^{-n} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x_k \sum_{n=k}^{\infty} y_{n-k} z^{-n}.
\end{aligned}$$

Tomando $n - k = r$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{x_n * y_n\} &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \sum_{r=0}^{\infty} y_r z^{-r} \\
&= X(z)Y(z).
\end{aligned}$$

Segundo Attar (2005) esta é a propriedade mais importante da transformada $\mathcal{Z}$, afirmando que “a convolução no domínio do tempo corresponde a multiplicação pontual no plano z. Isto tem uma implicação na concepção de filtros recursivos e não recursivos entre outras aplicações”(ATTAR, 2005).

Exemplo 2.29. Seja $F(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)^3}$. Quer-se encontrar f_n tal que $\mathcal{Z}\{f_n\} = \dfrac{z^2}{(z-1)^3}$, utilizando a propriedade de convolução.

Como visto anteriormente nos exemplos 2.5 e 2.18, tem-se que:

$$\mathcal{Z}\{1\} = \frac{z}{z-1}$$

e

$$\mathcal{Z}\{n\} = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \frac{z^2}{(z-1)^3} \\
&= \frac{z}{z-1}.\frac{z}{(z-1)^2} \\
&= \mathcal{Z}\{1\}\mathcal{Z}\{n\}.
\end{aligned}
$$

Logo, pela propriedade de convolução, $\mathcal{Z}\{1*n\} = \mathcal{Z}\{1\}\mathcal{Z}\{n\} = \dfrac{z^2}{(z-1)^3}$.

Utilizando a definição de convolução,

$$
\begin{aligned}
1*n &= \sum_{k=0}^{n} 1.k \\
&= \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\mathcal{Z}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\} = \frac{z^2}{(z-1)^3}.
$$

Exemplo 2.30. Seja $Y(z) = \dfrac{az^2}{(z-1)(z-a)}$. Quer-se encontrar y_n tal que $\mathcal{Z}\{y_n\} = \dfrac{az^2}{(z-1)(z-a)}$.

Como visto anteriormente nos exemplos 2.6 e 2.7, tem-se que:

$$
\mathcal{Z}\{a\} = \frac{az}{z-1}
$$

e

$$
\mathcal{Z}\{a^n\} = \frac{z}{(z-a)}.
$$

Daí,

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{az^2}{(z-1)(z-a)} \\ &= \frac{az}{z-1}.\frac{z}{z-a} \\ &= \mathcal{Z}\{a\}\mathcal{Z}\{a^n\}. \end{aligned}$$

Logo, pela propriedade de convolução, $\mathcal{Z}\{a * a^n\} = \mathcal{Z}\{a\}\mathcal{Z}\{a^n\} = Y(z)$.

Utilizando a definição de convolução,

$$\begin{aligned} a * a^n &= \sum_{k=0}^{n} a.a^k \\ &= a\sum_{k=0}^{n} a^k \\ &= a\left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{a(1-a^{n+1})}{1-a}\right\} = \frac{az^2}{(z-1)(z-a)}.$$

2.3.6 VALOR INICIAL

Teorema 2.31. *Se a transformada $\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z)$ existe para $|z| > R$ então:*

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = x_0 = \lim_{n\to 0} x_n.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \lim_{z\to\infty} X(z) &= \lim_{z\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \\ &= \lim_{z\to\infty}\left(x_0 + \frac{x_1}{z} + \frac{x_2}{z^2} + \frac{x_3}{z^3} + \ldots\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{z\to\infty} x_0 + \lim_{z\to\infty}\frac{x_1}{z} + \lim_{z\to\infty}\frac{x_2}{z^2} + \lim_{z\to\infty}\frac{x_3}{z^3} + \ldots \\
&= x_0 + 0 + 0 + 0 + \ldots \\
&= x_0 \\
&= \lim_{n\to 0} x_n.
\end{aligned}
$$

Exemplo 2.32. Seja $f_n = 1$ uma sequência dada por $f_n = \{1,1,1,1,\ldots\}$. Como visto no exemplo 2.5, sua transformada é dada por:

$$F(z) = \frac{z}{z-1}.$$

E pela propriedade do Valor Inicial pode-se verificar que o primeiro termo da sequência é dado por:

$$f_0 = \lim_{z\to\infty}\frac{z}{z-1} = 1$$

ou,

$$f_0 = \lim_{n\to 0} f_n = \lim_{n\to 0} 1 = 1.$$

Exemplo 2.33. Seja $x_n = n$ uma sequência, vista no exemplo 2.18, cuja transformada é dada por $X(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$.

Pode-se verificar, pela propriedade do Valor Inicial, que seu termo inicial é dado por:

$$x_0 = \lim_{z\to\infty}\frac{z}{(z-1)^2} = 0$$

ou,

$$x_0 = \lim_{n\to 0} x_n = \lim_{n\to 0} n = 0.$$

Exemplo 2.34. Seja $f_n = e^{\alpha n}$ e sua transformada é dada por $\mathcal{Z}\{e^{\alpha n}\} = F(z) = \dfrac{z}{z-e^{\alpha}}$, como visto no exemplo 2.23.

Pela propriedade do Valor Inicial pode-se verificar o termo inicial:

$$f_0 = \lim_{z\to\infty} F(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{z - e^{\alpha}} = 1$$

ou,

$$f_0 = \lim_{n\to 0} f_n = \lim_{n\to 0} e^{\alpha n} = 1.$$

2.3.7 VALOR FINAL

Teorema 2.35. *Se a transformada* $\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z)$ *existe para* $|z| > R$*, e se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *existe, então:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z).$$

Demonstração:

$$\mathcal{Z}\{x_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = X(z).$$

Pela propriedade Translação para Esquerda vista anteriormente:

$$\mathcal{Z}\{x_{n+1}\} = zX(z) - zx_0.$$

E pela propriedade de Linearidade:

$$\mathcal{Z}\{x_{n+1} - x_n\} = zX(z) - zx_0 - X(z).$$

Assim, aplicando o conceito de limite em ambas as partes da igualdade:

$$\lim_{z\to 1}[\mathcal{Z}\{x_{n+1} - x_n\}] = \lim_{z\to 1}[zX(z) - zx_0 - X(z)].$$

$$\lim_{z\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)z^{-n} = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z) - \lim_{z\to 1} zx_0.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} - x_n = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z) - x_0.$$

$$(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) + \ldots = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z) - x_0.$$

$$-x_0 + \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z) - x_0.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z).$$

Logo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{z\to 1}(z-1)X(z)$, o que conclui a prova.

Exemplo 2.36. Seja $f_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ e sua transformada dada por $F(z) = \dfrac{z}{z - \dfrac{1}{2}}$.

Pela propriedade do valor final pode-se verificar que:

$$\lim_{z \to 1} (z-1) \frac{z}{z - \frac{1}{2}} = 0 = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

ou seja, o valor final da sequência tende a ser 0.

Encontra-se no Apêndice A um resumo das propriedades vistas anteriormente. E com base nessas propriedades e exemplos abordados anteriormente tem-se alguns pares de transformadas mais frequentes - incluíndo generalizações - no Apêndice B.

2.4 EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

A seguir exemplos da aplicação da transformada $\mathcal{Z}$ utilizando sua definição e propriedades. O objetivo é converter uma expressão com variável n (n natural) para uma expressão algébrica com variável z (z complexo) utilizando a transformada $\mathcal{Z}$.

Exemplo 2.37. Seja $x_n = (n-1)a^{n-2}$, $a \in \mathbb{R}$, calcule $\mathcal{Z}\{(n-1)a^{n-2}\}$.

Resolução:

Manipulando a expressão em n:

$$\mathcal{Z}\{(n-1)a^{n-2}\} = \mathcal{Z}\{na^{n-2} - a^{n-2}\} = \mathcal{Z}\{a^{-2}(na^n - a^n)\}.$$

Pela propriedade de Linearidade,

$$\mathcal{Z}\{(n-1)a^{n-2}\} = a^{-2}(\mathcal{Z}\{na^n\} - \mathcal{Z}\{a^n\}).$$

Pela propriedade de Similaridade,

$$\mathcal{Z}\{a^n\} = \mathcal{Z}\{a^n.1\} = \frac{\dfrac{z}{a}}{\dfrac{z}{a} - 1} = \frac{z}{z-a}.$$

Pela propriedade de Diferenciação,

$$\mathcal{Z}\{na^n\} = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-a}\right) = -z\left(\frac{z-a-z}{(z-a)^2}\right) = \frac{az}{(z-a)^2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{(n-1)a^{n-2}\} &= a^{-2}(\mathcal{Z}\{na^n\} - \mathcal{Z}\{a^n\}) \\
&= a^{-2}\left(\frac{az}{(z-a)^2} - \frac{z}{z-a}\right) \\
&= \frac{az - z(z-a)}{a^2(z-a)^2} \\
&= \frac{az - z^2 + az}{a^2(z-a)^2} \\
&= \frac{2az - z^2}{a^2(z-a)^2}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{Z}\{(n-1)a^{n-2}\} = \dfrac{2az - z^2}{a^2(z-a)^2}$.

Exemplo 2.38. Seja $y_n = a^n \operatorname{sen}\theta n$, $\theta \in \mathbb{R}$, calcule $\mathcal{Z}\{a^n \operatorname{sen}\theta n\}$.

Resolução:

Como visto anteriormente na propriedade de Linearidade,

$$\mathcal{Z}\{\operatorname{sen}\theta n\} = \frac{z \operatorname{sen}\theta}{z^2 - 2z\cos\theta + 1}.$$

Pela propriedade Similaridade,

$$\mathcal{Z}\{a^n \operatorname{sen}\theta n\} = \frac{\frac{z}{a}\operatorname{sen}\theta}{(\frac{z}{a})^2 - 2\frac{z}{a}\cos\theta + 1}.$$

Multiplicando por a^2,

$$\mathcal{Z}\{a^n \operatorname{sen}\theta n\} = \frac{az \operatorname{sen}\theta}{z^2 - 2az\cos\theta + a^2}.$$

Exemplo 2.39. Calcule $\mathcal{Z}\{f_n\}$ onde $f_n = \cosh(\beta n)$.

Resolução:

Lembrando que $\cosh\beta = \dfrac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}$, daí, $\mathcal{Z}\left\{\cosh\beta n\right\} = \mathcal{Z}\left\{\dfrac{e^{\beta n}+e^{-\beta n}}{2}\right\}$.

Pela propriedade de Linearidade,

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{e^{\beta n}+e^{-\beta n}}{2}\right\} = \frac{1}{2}(\mathcal{Z}\{e^{\beta n}\}+\mathcal{Z}\{e^{-\beta n}\}).$$

Observando $\mathcal{Z}\{e^{\beta n}\}$ e utilizando a definição em (2):

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{e^{\beta n}\} &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta n} z^{-n} \\ &= 1+\frac{e^{\beta}}{z}+\frac{e^{2\beta}}{z^2}+\frac{e^{3\beta}}{z^3}+\ldots.\end{aligned}$$

Ou seja, tem-se uma PG de primeiro termo $a = 1$ e razão $r = \dfrac{e^{\beta}}{z}$, cuja soma é dada por:

$$\mathcal{Z}\{e^{\beta n}\} = \frac{1}{1-\dfrac{e^{\beta}}{z}} = \frac{z}{z-e^{\beta}}, |z| > e^{\beta}.$$

E do mesmo modo para $\mathcal{Z}\{e^{-\beta n}\}$ tem-se:

$$\mathcal{Z}\{e^{-\beta n}\} = \frac{z}{z-e^{-\beta}}, |z| > e^{-\beta}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{\cosh\beta n\} &= \frac{1}{2}(\mathcal{Z}\{e^{\beta n}\}+\mathcal{Z}\{e^{-\beta n}\}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{\beta}}+\frac{z}{z-e^{-\beta}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{z(z-e^{-\beta})+z(z-e^{\beta})}{(z-e^{\beta})(z-e^{-\beta})}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{z^2 - z\left(\dfrac{e^{-\beta}+e^{\beta}}{2}\right)}{z^2 - 2z\left(\dfrac{e^{-\beta}+e^{\beta}}{2}\right)+1}$$

$$= \frac{z^2 - z\cosh\beta}{z^2 - 2z\cosh\beta + 1}.$$

Portanto $\mathcal{Z}\{\cosh\beta n\} = \dfrac{z^2 - z\cosh\beta}{z^2 - 2z\cosh\beta+1}$, $|z| > \max\{e^{\beta}, e^{-\beta}\}$.

Exemplo 2.40. Calcule $\mathcal{Z}\{y_n - 4y_{n-1}\}$.

Resolução:

Pela propriedade de Linearidade,

$$\mathcal{Z}\{y_n - 4y_{n-1}\} = \mathcal{Z}\{y_n\} - 4\mathcal{Z}\{y_{n-1}\}.$$

Pela definição e propriedade de Translação para Direita,

$$\mathcal{Z}\{y_n\} - 4\mathcal{Z}\{y_{n-1}\} = Y(z) - 4z^{-1}X(z) = X(z)[1 - 4z^{-1}].$$

Portanto,

$$\mathcal{Z}\{y_n - 4y_{n-1}\} = X(z)[1 - 4z^{-1}].$$

Exemplo 2.41. Calcule $\mathcal{Z}\{e^{-2(n-2)}x_{n-2}\}$.

Resolução:

Pela propriedade de Linearidade,

$$\mathcal{Z}\{e^{-2(n-2)}x_{n-2}\} = e^4\mathcal{Z}\{e^{-2n}x_{n-2}\}.$$

Pela propriedade de Translação para Direita,

$$\mathcal{Z}\{x_{n-2}\} = z^{-2}X(z).$$

Chamando $z^{-2}X(z) = A(z)$ e pela propriedade de Similaridade,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{e^{-2n}x_{n-2}\} &= A\left(\frac{z}{e^{-2}}\right)\\
&= A(ze^2)\\
&= (ze^2)^{-2}X(ze^2)\\
&= \frac{X(ze^2)}{z^2e^4}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{e^{-2(n-2)}x_{n-2}\} &= e^4\mathcal{Z}\{e^{-2n}x_{n-2}\}\\
&= e^4\frac{X(ze^2)}{z^2e^4}\\
&= \frac{X(ze^2)}{z^2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{Z}\{e^{-2(n-2)}x_{n-2}\} = \frac{X(ze^2)}{z^2}.$$

Exemplo 2.42. Calcule $\mathcal{Z}\{3(n-1)f_{n-1}\}$.

Resolução:

Pela propriedade de Linearidade,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{3(n-1)f_{n-1}\} &= 3\mathcal{Z}\{(n-1)f_{n-1}\}\\
&= 3(\mathcal{Z}\{nf_{n-1}\} - \mathcal{Z}\{f_{n-1}\}).
\end{aligned}$$

Pela propriedade de Translação para Direita,

$$\mathcal{Z}\{f_{n-1}\} = z^{-1}F(z).$$

Pela propriedade de Diferenciação,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{nf_{n-1}\} &= -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{f_{n-1}\} \\
&= -z\frac{d}{dz}[z^{-1}F(z)] \\
&= -z\left[-\frac{F(z)}{z^2}+\frac{1}{z}\frac{d}{dz}F(z)\right] \\
&= \frac{F(z)}{z}-\frac{d}{dz}F(z).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{3(n-1)f_{n-1}\} &= 3(\mathcal{Z}\{nf_{n-1}\}-\mathcal{Z}\{f_{n-1}\}) \\
&= 3\left(\frac{F(z)}{z}-\frac{d}{dz}F(z)-\frac{F(z)}{z}\right) \\
&= 3\frac{d}{dz}F(z).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{Z}\{3(n-1)f_{n-1}\} = 3\frac{d}{dz}F(z).$$

Exemplo 2.43. Calcule $\mathcal{Z}\{a^{n+2}x_{n+1}\}$, $x_0 = 1$, $a \in \mathbb{R}$.

Resolução:

Pela propriedade de Linearidade,

$$\mathcal{Z}\{a^{n+2}x_{n+1}\} = a^2\mathcal{Z}\{a^n x_{n+1}\}.$$

Pela propriedade de Translação para Esquerda,

$$\mathcal{Z}\{x_{n+1}\} = zX(z) - \sum_{r=0}^{1-1} x_r z^{1-r} = zX(z) - x_0 z^1.$$

Chamando $A(z) = zX(z) - x_0 z^1$ e pela propriedade de Similaridade,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{a^n x_{n+1}\} &= A\left(\frac{z}{a}\right) \\
&= \frac{z}{a}X\left(\frac{z}{a}\right) - \frac{z}{a}x_0 \\
&= \frac{z}{a}\left[X\left(\frac{z}{a}\right) - x_0\right].
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{a^{n+2} x_{n+1}\} &= a^2\mathcal{Z}\{a^n x_{n+1}\} \\
&= a^2\left\{\frac{z}{a}\left[X\left(\frac{z}{a}\right) - x_0\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

Substituíndo $x_0 = 1$ e simplificando,

$$
\mathcal{Z}\{a^{n+2} x_{n+1}\} = az\left[X\left(\frac{z}{a}\right) - 1\right].
$$

Exemplo 2.44. Calcule $\mathcal{Z}\{2n - y_n + 3e^{-n}\}$.

Resolução:

Pela propriedade de Linearidade,

$$
\mathcal{Z}\{2n - y_n + 3e^{-n}\} = 2\mathcal{Z}\{n\} - \mathcal{Z}\{y_n\} + 3\mathcal{Z}\{e^{-n}\}.
$$

Pela propriedade de Diferenciação,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{n\} &= \mathcal{Z}\{n.1\} \\
&= -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) \\
&= \frac{z}{(z-1)^2}.
\end{aligned}
$$

Seja $\mathcal{Z}\{1\} = \dfrac{z}{z-1} = A(z)$ e pela propriedade de Similaridade,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{e^{-n}\} &= A\left(\frac{z}{e^{-1}}\right)\\ &= A(ze)\\ &= \frac{ze}{ze-1}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{2n-y_n+3e^{-n}\} &= 2\mathcal{Z}\{n\}-\mathcal{Z}\{y_n\}+3\mathcal{Z}\{e^{-n}\}\\ &= 2\frac{z}{(z-1)^2}-Y(z)+3\frac{ze}{ze-1}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{Z}\{2n-y_n+3e^{-n}\}=\frac{2z}{(z-1)^2}-Y(z)+\frac{3ze}{ze-1}.$$

2.5 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

A seguir exercícios propostos em relação à definição e propriedades da Transformada $\mathcal{Z}$, e região de convergência. Pode-se utilizar a lista de transformadas elementares, Apêndice B, como auxílio.

1. Seja $y_n=\left(-\frac{2}{3}\right)^n$. Calcule $\mathcal{Z}\{y_n\}=Y(z)$ e encontre a Região de Convergência.

   Resposta: $\mathcal{Z}\{y_n\}=\dfrac{z}{z+\frac{2}{3}}$ e RDC em $|z|>\dfrac{2}{3}$.

2. Seja $\{x_n\}$ uma sequência definida por $x_n=ne^{-4n}$, determine:

   (a) $\mathcal{Z}\{ne^{-4n}\}$;

   (b) A RDC de $X(z)=\mathcal{Z}\{x_n\}$.

   Respostas: (a) $X(z)=\dfrac{e^4z}{(e^4z-1)^2}$; (b) RDC em $|z|>|e^{-4}|$.

3. Seja $\{f_n\}$ uma sequência definida por $f_n=1-(-5)^n$, determine:

   (a) $\mathcal{Z}\{1-(-5)^n\}$;

(b) A RDC de $F(z) = \mathcal{Z}\{f_n\}$.

Respostas: (a) $\mathcal{Z}\{f_n\} = \dfrac{6z}{(z-1)(z+5)}$; (b) RDC em $|z| > 1$.

4. Mostrar que:

   (a) $\mathcal{Z}\{\cos(\beta n)\} = \dfrac{z(z-\cos\beta)}{z^2 - 2z\cos\beta + 1}$, $|z| > 1$.

   (b) $\mathcal{Z}\{\text{senh}(\alpha n)\} = \dfrac{z\text{senh}\alpha}{z^2 - 2z\cosh\alpha + 1}$, $|z| > \max\{e^{\alpha}, e^{-\alpha}\}$.

   Dica: Utilizar a fórmula de Euler.

5. Sendo $x_n = 2 + 3e^{-2n}$ calcule $X(z) = \mathcal{Z}\{2 + 3e^{-2n}\}$. Em seguida encontre a RDC de $X(z)$ e represente geometricamente.

   Respostas: $\mathcal{Z}\{x_n\} = z\left(\dfrac{3e^2}{e^2 z - 1} + \dfrac{2}{z-1}\right)$; RDC em $|z| > 1$.

6. Seja $y_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$, determine:

   (a) $Y(z) = \mathcal{Z}\left\{\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\right\}$;

   (b) Represente algebricamente e geometricamente a região de convergência de $Y(z)$.

   Respostas: (a) $\mathcal{Z}\{y_n\} = \dfrac{z^2}{z^2+1}$; (b) RDC em $|z| > 1$.

7. Calcule as transformadas a seguir, identificando a RDC.

   (a) $\mathcal{Z}\{e^{-an}\text{sen }(\alpha n)\}$.

   Respostas: $\dfrac{e^{-a}z^{-1}\text{sen }\alpha}{1 - 2e^{-a}z^{-1}\cos\alpha + e^{-2a}z^{-2}}$; RDC em $|z| > |e^{-a}|$.

   (b) $\mathcal{Z}\{3^n\text{sen }(2n)\}$.

   Respostas: $\dfrac{3z\text{sen }2}{z^2 - 6z\cos 2 + 9}$; RDC em $|z| > 3$.

8. Calcular:

   (a) $\mathcal{Z}\{2e^{-n} + 3e^{-0,5n}\}$.

   Resposta: $\dfrac{3\sqrt{e}z}{\sqrt{e}z - 1} + \dfrac{2ez}{ez-1}$.

   (b) $\mathcal{Z}\{5(0,8)^n - 4(1,1)^n\}$.

   Resposta: $\dfrac{5z(10z-23)}{50z^2 - 95z + 44}$.

   (c) $\mathcal{Z}\{n\text{sen}(2n)\}$.

   Resposta: $\dfrac{z(z^2-1)\text{sen }2}{(z^2 - 2z\cos 2 + 1)^2}$.

(d) $\mathcal{Z}\{2^n(n^2-n)\}$.
Resposta: $\dfrac{8z}{(z-2)^3}$.

(e) $\mathcal{Z}\{2n-3(n-1)x_{n-1}\}$.
Resposta: $\dfrac{2z}{(z-1)^2}+3\dfrac{d}{dz}X(z)$.

3 TRANSFORMADA $\mathcal{Z}$ INVERSA

A transformada $\mathcal{Z}$ inversa é definida pela expressão $\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = x_n$ e existe quando a série $\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z)$ é convergente. A transformada $\mathcal{Z}^{-1}$ pode ser obtida através da lista de transformadas elementares conhecidas, Apêndice B. Nesse caso, a transformada $\mathcal{Z}$ deve estar de maneira imediatamente reconhecível na tabela. Porém, é bastante frequente a função em questão não aparecer disponível nas tabelas de transformada $\mathcal{Z}$, neste caso, pode-se utilizar alguns métodos para escrever $X(z)$ em termos de funções simples de z para as quais a transformada $\mathcal{Z}$ inversa é conhecida.

A seguir três métodos para obter a transformada $\mathcal{Z}$ Inversa:

- Série de Potências
- Frações Parcias
- Resíduos

3.1 MÉTODO DE SÉRIE DE POTÊNCIAS

Neste método, obtém-se a transformada $\mathcal{Z}$ inversa com uma simples expansão de $X(z)$ em séries de potências infinitas em z^{-1} na RDC. Assim, $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}$ para $|z| > R$.

Se $X(z)$ está na forma de uma fração racional $X(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$, onde $g(z)$ e $h(z)$ são polinômios em z, basta dividir $g(z)$ por $h(z)$ para obter a série de potências de $X(z)$ em z^{-1}.

“Entretanto, neste método é difícil encontrar uma fórmula fechada para a expansão da série $X(z)$, mas quando é possível fazê-lo este método funciona bem”(SERTÖZ, 2004).

Exemplo 3.1. Seja $X(z) = \dfrac{z(z+1)}{(z-1)^2}$. Quer-se encontrar a transformada inversa $\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$.

Dividindo o polinômio z^2+z por z^2-2z+1 sucessivas vezes:

$$\begin{array}{ll}
z^2+z & \underline{|z^2-2z+1 \qquad\qquad} \\
\underline{-z^2+2z-1} & 1+3z^{-1}+5z^{-2}+7z^{-3}+\ldots \\
\quad 3z-1 & \\
\quad \underline{-3z+6-3z^{-1}} & \\
\qquad 5-3z^{-1} & \\
\qquad \underline{-5+10z^{-1}-5z^{-2}} & \\
\qquad\quad 7z^{-1}-5z^{-2} & \\
\qquad\quad \underline{-7z^{-1}+14z^{-2}-7z^{-3}} & \\
\qquad\qquad\quad 9z^{-2}-7z^{-3} &
\end{array}$$

Logo tem-se como quociente da divisão a série $X(z)=1+3z^{-1}+5z^{-2}+7z^{-3}+\ldots$, a qual sugere uma sequência de termos $\{1,3,5,7,\ldots\}$.

Pode-se notar que os termos em $\{1,3,5,7,\ldots\}$ são ímpares, isto é, pode-se conjecturar uma expressão para x_n dada por $x_n=2n+1$.

Para mostrar que $x_n=2n+1$ é a expressão correta, basta provar que

$$\mathcal{Z}\{2n+1\}=X(z)=\frac{z(z+1)}{(z-1)^2}.$$

De fato, $\mathcal{Z}\{2n+1\}=2\mathcal{Z}\{n\}+\mathcal{Z}\{1\}$ pela propriedade de linearidade e observando os itens 1 e 5 na lista de transformadas:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{2n+1\} &= 2\mathcal{Z}\{n\}+\mathcal{Z}\{1\} \\
&= \frac{2z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1} \\
&= \frac{z(z+1)}{(z-1)^2} \\
&= X(z).
\end{aligned}$$

Logo, $x_n = 2n+1$ é uma sequência tal que $\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z)$.

Exemplo 3.2. Quer-se encontrar uma expressão para x_n em função de n para a qual $\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z) = \dfrac{e^{-a}z}{(z-e^{-a})^2}$.

Dividindo o polinômio $e^{-a}z$ por $z^2 - 2ze^{-a} + e^{-2a}$:

$$
\begin{array}{l|l}
e^{-a}z & z^2 - 2e^{-a}z + e^{-2a} \\ \cline{2-2}
\underline{-e^{-a}z + 2e^{-2a} - e^{-3a}z^{-1}} & e^{-a}z^{-1} + 2e^{-2a}z^{-2} + 3e^{-3a}z^{-3} + 4e^{-4a}z^{-4} + \ldots \\
\qquad 2e^{-2a} - e^{-3a}z^{-1} & \\
\qquad \underline{-2e^{-2a} + 4e^{-3a}z^{-1} - 2e^{-4a}z^{-2}} & \\
\qquad\qquad 3e^{-3a}z^{-1} - 2e^{-4a}z^{-2} & \\
\qquad\qquad \underline{-3e^{-3a}z^{-1} + 6e^{-4a}z^{-2} - 3e^{-5a}z^{-3}} & \\
\qquad\qquad\qquad 4e^{-4a}z^{-2} - 3e^{-5a}z^{-3} & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-4e^{-4a}z^{-2} + 8e^{-5a}z^{-3} - 4e^{-6a}z^{-4}} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 5e^{-5a}z^{-3} - 4e^{-6a}z^{-4} &
\end{array}
$$

Logo tem-se como quociente da divisão a série dada por

$$X(z) = e^{-a}z^{-1} + 2e^{-2a}z^{-2} + 3e^{-3a}z^{-3} + 4e^{-4a}z^{-4} + \ldots.$$

Observando os termos da sequência $\{e^{-a}, 2e^{-2a}, 3e^{-3a}, ...\}$ pode-se conjecturar $x_n = ne^{-an}$.

Basta agora mostrar que $\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z)$, ou seja, $\mathcal{Z}\{ne^{-an}\} = \dfrac{e^{-a}z}{(z-e^{-a})^2}$.

De fato, observando o item 4 na lista de transformadas:

$$\mathcal{Z}\{e^{-an}\} = \frac{z}{z-e^{-a}}.$$

E pela propriedade de Diferenciação:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{ne^{-an}\} &= -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{e^{-an}\} \\
&= -z\frac{d}{dz}\frac{z}{z-e^{-a}} \\
&= \frac{e^{-a}z}{(z-e^{-a})^2}.
\end{aligned}$$

Logo $x_n = ne^{-an}$ é a expressão procurada que define $X(z)$ dado.

3.2 MÉTODO DE FRAÇÕES PARCIAIS

Neste método, segundo Sertöz (2004), decompõe-se $X(z)$ em frações parciais e, em seguida, reconhece-se as partes na lista de transformadas $\mathcal{Z}$ elementares (SERTÖZ, 2004).

Observa-se que há casos nos quais, para encontrar a solução, obtém-se a forma de fração parcial de $\dfrac{X(z)}{z}$, e depois multiplica-se ambos os lados por z, encontrando o par de transformadas na lista de transformadas necessário para $X(z)$. Isto ocorre pois as transformadas mais comuns possuem z em seu numerador. Em outros casos, aplica-se diretamente a decomposição em frações parciais para $X(z)$ e encontrando diretamente na lista os pares de transformadas.

Nos problemas envolvendo equações de diferenças, a transformada $\mathcal{Z}$ de x_n pode apresentar-se do seguinte modo: $X(z) = \dfrac{A(z)}{B(z)}$, onde $A(z)$ e $B(z)$ são polinômios em z. Na expansão de $X(z)$ em frações parciais é importante que o grau do polinômio $A(z)$ seja menor que o grau do polinômio $B(z)$. Se não for esse o caso, o numerador $A(z)$ deve ser dividido pelo denominador $B(z)$ para resultar um polinômio em z mais um resto (uma relação de polinômios em z cujo numerador é de menor grau que o denominador).

O desenvolvimento detalhado da decomposição em frações parciais pode ser encontrado em diversos livros de cálculo, como nas bibliografias (GUIDORIZZI, 2001; FLEMMING; GONCALVES, 2007; STEWART, 2013).

A seguir tem-se exemplos que abordam os casos onde será necessária a divisão de $X(z)$ por z, e os casos em que não se faz necessário tal passo.

Exemplo 3.3. Seja $X(z) = \dfrac{z^2}{(z-a)(z-b)}$ onde o polinômio do denominador possui duas raízes a e b reais distintas. Aplicando a decomposição em frações parciais em $\dfrac{X(z)}{z}$:

$$\begin{aligned}
\frac{X(z)}{z} &= \frac{z}{(z-a)(z-b)} \\
&= \frac{\alpha}{z-a} + \frac{\beta}{z-b} \\
&= \frac{\alpha(z-b)+\beta(z-a)}{(z-a)(z-b)} \\
&= \frac{(\alpha+\beta)z-(b\alpha+a\beta)}{(z-a)(z-b)}.
\end{aligned}$$

Pela igualdade dos polinômios em z nos numeradores, $z = (\alpha+\beta)z-(b\alpha+a\beta)$, tem-se o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ -(b\alpha+a\beta) = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $\alpha = \dfrac{-a}{b-a}$ e $\beta = \dfrac{b}{b-a}$.

Assim, $\dfrac{X(z)}{z} = \dfrac{\frac{-a}{b-a}}{z-a} + \dfrac{\frac{b}{b-a}}{z-b}$.

E portanto, $X(z) = \left(\dfrac{-a}{b-a}\right)\left(\dfrac{z}{z-a}\right) + \left(\dfrac{b}{b-a}\right)\left(\dfrac{z}{z-b}\right)$.

Analisando o item 2 na lista de transformadas:

$\mathcal{Z}\{a^n\} = \dfrac{z}{z-a}$ e $\mathcal{Z}\{b^n\} = \dfrac{z}{z-b}$.

Logo,

$$\begin{aligned}
x_n &= \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\left(\frac{-a}{b-a}\right)\left(\frac{z}{z-a}\right) + \left(\frac{b}{b-a}\right)\left(\frac{z}{z-b}\right)\right\} \\
&= \frac{-a}{b-a}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-a}\right\} + \frac{b}{b-a}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-b}\right\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{-a}{b-a}a^n + \frac{b}{b-a}b^n$$

$$= \frac{-a^{n+1}+b^{n+1}}{b-a}.$$

Portanto, $x_n = \dfrac{-a^{n+1}+b^{n+1}}{b-a}$.

Exemplo 3.4. Seja $X(z) = \dfrac{z^2}{(z+5)^2}$ onde o polinômio do denominador possui duas raízes reais repetidas. Aplicando a decomposição em frações parciais em $\dfrac{X(z)}{z}$:

$$\begin{aligned}
\frac{X(z)}{z} &= \frac{z}{(z+5)^2} \\
&= \frac{A}{z+5} + \frac{B}{(z+5)^2} \\
&= \frac{A(z+5)+B}{(z+5)^2} \\
&= \frac{Az+5A+B}{(z+5)^2}.
\end{aligned}$$

Pela igualdade dos polinômios em z nos numeradores, $z = Az+5A+B$ e tem-se o sistema linear:

$$\begin{cases} A = 1 \\ 5A+B = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $A = 1$ e $B = -5$.

Assim, $\dfrac{X(z)}{z} = \dfrac{1}{z+5} - \dfrac{5}{(z+5)^2}$.

E portanto, $X(z) = \dfrac{z}{z+5} - \dfrac{5z}{(z+5)^2}$.

Analisando os itens 2 e 9 na lista de transformadas:

$\mathcal{Z}\{(-5)^n\} = \dfrac{z}{z+5}$ e $\mathcal{Z}\{n(-5)^n\} = -\dfrac{5z}{(z+5)^2}$.

Logo,

$$\begin{aligned}
x_n &= \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z+5} - \frac{5z}{(z+5)^2}\right\} \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z+5}\right\} - \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{5z}{(z+5)^2}\right\} \\
&= (-5)^n + n(-5)^n.
\end{aligned}$$

Portanto, $x_n = (-5)^n(1+n)$.

Exemplo 3.5. Neste exemplo o polinômio do denominador de $X(z)$ possui duas raízes reais de multiplicidade 1 e 2, e será aplicada a decomposição em frações parciais em $\dfrac{X(z)}{z}$.

Quer-se determinar a transformada inversa $\mathcal{Z}^{-1}$ de $X(z) = \dfrac{z}{(z-3)(z-2)^2}$.

Seja,

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{z(z-3)(z-2)^2} = \frac{1}{(z-3)(z-2)^2}.$$

Usando a decomposição em frações parciais:

$$\begin{aligned}
\frac{X(z)}{z} &= \frac{1}{(z-3)(z-2)^2} \\
&= \frac{A}{z-3} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{(z-2)^2} \\
&= \frac{A(z-2)^2 + B(z-2)(z-3) + C(z-3)}{(z-3)(z-2)^2} \\
&= \frac{(A+B)z + (-4A-5B+C)z^2 + (4A+6B-3C)}{(z-3)(z-2)^2}.
\end{aligned}$$

Pela igualdade dos polinômios em z nos numeradores, $1 = (A+B)z + (-4A-5B+C)z^2 + (4A+6B-3C)$, tem-se o sistema linear:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -4A-5B+C=0 \\ 4A+6B-3C=1 \end{cases}$$

cuja solução é $A=1$, $B=-1$ e $C=-1$.

Assim,

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} - \frac{1}{(z-2)^2}.$$

E portanto

$$X(z) = \frac{z}{z-3} - \frac{z}{z-2} - \frac{z}{(z-2)^2}.$$

Analisando os itens 2 e 9 na lista de transformadas:

$\mathcal{Z}\{2^n\} = \dfrac{z}{z-2}$, $\mathcal{Z}\{3^n\} = \dfrac{z}{z-3}$ e $\mathcal{Z}\{n2^n\} = \dfrac{2z}{(z-2)^2}$.

Logo,

$$\begin{aligned} x_n &= \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-3} - \frac{z}{z-2} - \frac{2z}{2(z-2)^2}\right\} \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-3}\right\} - \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-2}\right\} - \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{2z}{2(z-2)^2}\right\} \\ &= 3^n - 2^n - \frac{n2^n}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, $x_n = 3^n - 2^n\dfrac{2+n}{2}$.

Exemplo 3.6. Neste exemplo o polinômio do denominador tem raízes reais e distintas, e será aplicada a decomposição em frações parciais diretamente em $X(z)$.

Quer-se determinar a transformada inversa $\mathcal{Z}^{-1}$ de $X(z) = \dfrac{z+3}{(z+1)(z+2)}$.

Usando a decomposição em frações parciais:

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z+3}{(z+1)(z+2)} \\ &= \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2} \\ &= \frac{A(z+2)+B(z+1)}{(z+1)(z+2)} \\ &= \frac{(A+B)z+(2A+B)}{(z+1)(z+2)}. \end{aligned}$$

Pela igualdade dos polinômios em z nos numeradores, tem-se o sistema linear:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B=3 \end{cases}$$

cuja solução é $A=2$ e $B=-1$.

Assim, $X(z) = \dfrac{2}{z+1} - \dfrac{1}{z+2}$.

Analisando o item 3 na lista de transformadas:

$\mathcal{Z}\{(-1)^{n-1}\} = \dfrac{1}{z+1}$ e $\mathcal{Z}\{(-2)^{n-1}\} = \dfrac{1}{z+2}$.

Logo,

$$\begin{aligned} x_n &= \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{2}{z+1} - \frac{1}{z+2}\right\} \\ &= 2\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z+1}\right\} - \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z+2}\right\} \\ &= 2(-1)^{n-1} - (-2)^{n-1}. \end{aligned}$$

Portanto, $x_n = 2(-1)^{n-1} - (-2)^{n-1}$.

A vantagem de utilizar a expansão em frações parciais é que muitas vezes os termos individuais de $X(z)$, que resultam dessa expansão, são funções de z muito simples; em consequência, não será necessário recorrer à lista de transformadas, tendo de memória alguns pares simples de transformada $\mathcal{Z}$. Pode-se observar, entretanto, que na aplicação da técnica de expansão em frações parciais para a obtenção da transformada $\mathcal{Z}$ inversa de $X(z) = \dfrac{A(z)}{B(z)}$, as raízes do polinômio do denominador $B(z)$ devem ser obtidas previamente. Ou seja, esse método não se aplica enquanto o polinômio do denominador não estiver fatorado.

3.3 MÉTODO DOS RESÍDUOS

Os resultados de análise complexa utilizados nesta seção para o desenvolvimento do método serão apresentados sem as respectivas demonstrações, que podem ser obtidas nas referências (BROWN; CHURCHILL, 2009; KAPLAN, 2003).

Definição 3.7. *Pólo*

Seja $F(z) = \dfrac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \dfrac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad a_{-m} \neq 0.$

Então z_0 *é chamado de pólo de ordem* m *da função* F*.*

Assim, $(z-z_0)^m F(z)$ tem limite finito e diferente de zero quando $z \to z_0$.

E de modo mais simples pode-se encontrar os pólos de uma função $F(z)$ analisando a(s) raíz(es) do denominador de $F(z)$ (pólo) e o grau de multiplicidade da(s) raíz(es) (ordem do pólo).

Exemplo 3.8. A função $F(z) = \dfrac{z+2}{z(z+3)^2}$ tem um pólo de primeira ordem (também chamado de pólo simples) em $z = 0$ e um pólo de segunda ordem em $z = -3$.

Definição 3.9. *Resíduo*

O coeficiente a_{-1} *é chamado de resíduo de* F *em* z_0*, e denotado* $\underset{z=z_0}{Res} F(z)$*.*

Os resíduos podem ser calculados de forma simples. No caso de um pólo simples z_0:

$$F(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots$$

logo

$$(z-z_0)F(z) = a_{-1} + a_0(z-z_0) + a_1(z-z_0)^2 + \ldots$$

e portanto o resíduo é dado por

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} F(z) = \lim_{z\to z_0}[(z-z_0)F(z)].$$

Seja agora z_0 um pólo duplo:

$$F(z) = \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$$

logo

$$(z-z_0)^2 F(z) = a_{-2} + a_{-1}(z-z_0) + a_0(z-z_0)^2 + \dots$$

e

$$\frac{d}{dz}[(z-z_0)^2 F(z)] = a_{-1} + 2a_0(z-z_0) + 3a_1(z-z_0)^2 + \dots$$

e portanto o resíduo é dado por

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} F(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{d}{dz}[(z-z_0)^2 F(z)].$$

Generalizando, se z_0 é pólo de ordem m de uma função F, então:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} F(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m F(z)].$$

Exemplo 3.10. A função

$$F(z) = \frac{z^2}{(z+3)(z-1)^2}$$

tem um pólo simples em $z=-3$ e um pólo duplo em $z=1$:

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=-3} F(z) &= \lim_{z\to -3}[(z+3)F(z)] \\
&= \lim_{z\to -3} \frac{z^2}{(z-1)^2} \\
&= \frac{9}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=1} F(z) &= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}[(z-1)^2F(z)] \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{z+3}\right] \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{(z+3)2z-z^2}{(z+3)^2} = \frac{7}{16}.
\end{aligned}$$

Teorema 3.11. *Série de Laurent*

Se $F(z)$ é analítica em $r < |z-z_0| < R$, então

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{F(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

e C é qualquer curva simples fechada que separe $|z-z_0| = r$ de $|z-z_0| = R$.

Pela definição da transformada $\mathcal{Z}$:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}.$$

Multiplicando ambos os lados da equação por z^{n-1}, tem-se:

$$\begin{aligned}
z^{n-1}F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{n-k-1} \\
&= f_0z^{n-1}+f_1z^{n-2}+\ldots+f_nz^{-1}+f_{n+1}z^{-2}+\ldots,
\end{aligned}$$

a qual é a expansão da série de Laurent de $z^{n-1}F(z)$ em torno de $z_0 = 0$. Como f_n é o coeficiente de z^{-1}, pelo teorema da série de Laurent, tem-se:

$$f_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C z^{n-1}F(z)dz.$$

O próximo teorema mostra como utilizar resíduos para calcular esta integral de linha.

Teorema 3.12. *Teorema do Resíduo*

Se C é um caminho fechado tal que $F(z)$ é analítica sobre C e no seu interior exceto nos pontos $z_1,\ldots,z_k$, então

$$\oint_C F(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \underset{z=z_j}{Res}\, F(z).$$

Pelo teorema do resíduo define-se o método dos resíduos, para resolução da transformada $\mathcal{Z}$ inversa, da seguinte maneira:

$$f_n = \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} z^{n-1}F(z),$$

onde $z_1,\ldots,z_k$ são os pólos de $z^{n-1}F(z)$.

Faz-se o somatório dos resíduos para todo $n \in \mathbb{N}$ quando para cada valor de n tem-se os mesmos pólos em $z^{n-1}F(z)$. Caso contrário, os resíduos devem ser calculados separadamente para cada valor de n nos quais os pólos se repetem.

Exemplo 3.13. Seja $F(z) = \dfrac{z-1}{z-2}$. Para determinar a transformada inversa de $F(z)$ pelo método dos resíduos multiplica-se primeiramente $F(z)$ por z^{n-1}:

$$z^{n-1}F(z) = \frac{z^{n-1}(z-1)}{z-2},$$

que tem um pólo simples em $z=2$ quando $n \geq 1$ e dois pólos simples em $z=0$ e $z=2$ quando $n=0$. Assim, os casos $n=0$ e $n \geq 1$ precisam ser considerados separadamente:

$$\begin{aligned}
f_0 &= \operatorname*{Res}_{z=0} z^{-1}F(z) + \operatorname*{Res}_{z=2} z^{-1}F(z) \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{z(z-1)}{z(z-2)} + \lim_{z\to 2} \frac{(z-2)(z-1)}{z(z-2)} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_n &= \operatorname*{Res}_{z=2} z^{n-1}F(z) \\
&= \lim_{z\to 2} \frac{(z-2)z^{n-1}(z-1)}{(z-2)} \\
&= 2^{n-1}, \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = f_n = \begin{cases} 1, \text{ para } n=0 \\ 2^{n-1}, \text{ para } n \geq 1, \end{cases}$$

gerando a sequência $f_n = \{1, 1, 2, 4, 8, \ldots\}$.

Exemplo 3.14. Sendo a e b números reais distintos, para determinar a transformada inversa de

$$X(z) = \frac{z}{(z-a)(z-b)}$$

considera-se

$$z^{n-1}X(z) = \frac{z^n}{(z-a)(z-b)},$$

que tem dois pólos simples em $z=a$ e $z=b$ para $n \geq 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
x_n &= \operatorname*{Res}_{z=a} z^{n-1}X(z) + \operatorname*{Res}_{z=b} z^{n-1}X(z) \\
&= \lim_{z\to a}[(z-a)z^{n-1}X(z)] + \lim_{z\to b}[(z-b)z^{n-1}X(z)] \\
&= \lim_{z\to a} \frac{z^n}{z-b} + \lim_{z\to b} \frac{z^n}{z-a} \\
&= \frac{a^n}{a-b} + \frac{b^n}{b-a} \\
&= \frac{-a^n}{b-a} + \frac{b^n}{b-a}.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = x_n = \dfrac{-a^n + b^n}{b-a}$, para $n \geq 0$.

Exemplo 3.15. Para determinar a transformada inversa de

$$X(z) = \frac{z}{z-1}$$

considera-se

$$z^{n-1}X(z) = \frac{z^n}{z-1},$$

que tem um pólo simples em $z = 1$ para $n \geq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} x_n &= \operatorname*{Res}_{z=1} z^{n-1}X(z) \\ &= \lim_{z\to 1}[(z-1)z^{n-1}X(z)] \\ &= \lim_{z\to 1} z^n \\ &= 1. \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = x_n = 1$, para $n \geq 0$.

Exemplo 3.16. Para determinar a transformada inversa de

$$F(z) = \frac{z^2}{(z+3)^2}$$

tem-se

$$z^{n-1}F(z) = \frac{z^{n+1}}{(z+3)^2},$$

que tem um pólo de segunda ordem em $z = -3$. Assim,

$$\begin{aligned} f_n &= \operatorname*{Res}_{z=-3} z^{n-1}F(z) \\ &= \lim_{z\to -3} \frac{d}{dz}[(z+3)^2 z^{n-1}F(z)] \\ &= \lim_{z\to -3} \frac{d}{dz}[z^{n+1}] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{z\to -3}(n+1)z^n \\
&= (n+1)(-3)^n.
\end{aligned}
$$

Logo, $\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = f_n = (n+1)(-3)^n$, para $n \geq 0$.

Exemplo 3.17. Para determinar a transformada inversa de

$$Y(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$$

tem-se

$$z^{n-1}Y(z) = \frac{z^{n-1}}{(z+1)(z+2)},$$

que tem um pólo simples em $z = 0$ quando $n = 0$, mas não para $n \geq 1$. Assim, os casos $n = 0$ e $n \geq 1$ precisam ser considerados separadamente:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \operatorname*{Res}_{z=0} z^{-1}Y(z) + \operatorname*{Res}_{z=-1} z^{-1}Y(z) + \operatorname*{Res}_{z=-2} z^{-1}Y(z) \\
&= \lim_{z\to 0}\frac{z}{z(z+1)(z+2)} + \lim_{z\to -1}\frac{z+1}{z(z+1)(z+2)} + \lim_{z\to -2}\frac{z+2}{z(z+1)(z+2)} \\
&= \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_n &= \operatorname*{Res}_{z=-1} z^{n-1}Y(z) + \operatorname*{Res}_{z=-2} z^{n-1}Y(z) \\
&= \lim_{z\to -1}\frac{(z+1)z^{n-1}}{(z+1)(z+2)} + \lim_{z\to -2}\frac{(z+2)z^{n-1}}{(z+1)(z+2)} \\
&= (-1)^{n-1} - (-2)^{n-1}, \quad n \geq 1.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = y_n = \begin{cases} 0, \text{ para } n = 0 \\ (-1)^{n-1} - (-2)^{n-1}, \text{ para } n > 0. \end{cases}$$

Exemplo 3.18. Sendo a e b números reais distintos, para determinar a transformada inversa de

$$Y(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$$

tem-se

$$z^{n-1}Y(z) = \frac{z^{n-1}}{(z-a)(z-b)},$$

que tem um pólo simples em $z = 0$ quando $n = 0$, mas não para $n \geq 1$. Assim, os casos $n = 0$ e $n \geq 1$ precisam ser considerados separadamente:

$$\begin{aligned} y_0 &= \operatorname*{Res}_{z=0} z^{-1}Y(z) + \operatorname*{Res}_{z=a} z^{-1}Y(z) + \operatorname*{Res}_{z=b} z^{-1}Y(z) \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{z}{z(z-a)(z-b)} + \lim_{z\to a} \frac{z-a}{z(z-a)(z-b)} + \lim_{z\to b} \frac{z-b}{z(z-a)(z-b)} \\ &= \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)} + \frac{1}{b(b-a)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_n &= \operatorname*{Res}_{z=a} z^{n-1}Y(z) + \operatorname*{Res}_{z=b} z^{n-1}Y(z) \\ &= \lim_{z\to a} \frac{(z-a)z^{n-1}}{(z-a)(z-b)} + \lim_{z\to b} \frac{(z-b)z^{n-1}}{(z-a)(z-b)} \\ &= \frac{a^{n-1}}{a-b} + \frac{b^{n-1}}{b-a}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = y_n = \begin{cases} 0, \text{ para } n = 0 \\ \dfrac{-a^{n-1} + b^{n-1}}{b-a}, \text{ para } n > 0. \end{cases}$$

3.4 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Utilize o método de Série de Potências para calcular $\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$ tal que:

   (a) $X(z) = \dfrac{2z}{z^2+z+1}$.
   Resposta: $x_n = \dfrac{4\text{sen}\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{\sqrt{3}} = \{0,2,-2,0,2,-2,\ldots\}$.

   (b) $X(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$.
   Resposta: $x_n = \text{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) = \{0,1,0,-1,0,1,\ldots\}$.

2. Utilize o método de Frações Parciais para calcular $\mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$ tal que:

   (a) $Y(z) = \dfrac{2z^3}{(z-2)^3}$.
   Resposta: $y_n = (n^2+3n+2)2^n$.

   (b) $Y(z) = \dfrac{z}{(z-3)^2}$.
   Resposta: $y_n = n(3^{n-1})$.

3. Encontre os pólos de $F(z)$ e suas ordens. Utilize o método dos Resíduos para calcular $\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}$ tal que:

   (a) $F(z) = \dfrac{z(z-1)}{(z+1)(z+2)}$.
   Resposta: Dois pólos simples em $z=-1$ e $z=-2$; $f_n = -2(-1)^n + 3(-2)^n$.

   (b) $F(z) = \dfrac{z-2}{(z-1)(z+3)}$.
   Resposta: Dois pólos simples em $z=1$ e -3; $f_n = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{4}(-3)^{n-1}$.

   (c) $F(z) = \dfrac{2z^2-z}{(z+1)^2(z-2)}$.
   Resposta: Um pólo de segunda ordem em $z=-1$ e um pólo simples em $=2$; $f_n = \dfrac{-(-1)^n+2^n-3(-1)^n n}{3}$.

4. Calcule $\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$ de $X(z) = z(e^{\frac{1}{z}}-1)$ com o método que julgar mais adequado.
   Resposta: $x_n = \dfrac{1}{(n+1)!}$.

5. Calcule $\mathcal{Z}^{-1}\{x_n\}$ em cada caso.

   (a) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{6z^2-10z+2}{z^2-3z+2}\right\}$.
   Resposta: $x_n = 3\times 2^n + 2$.

(b) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z}{z^2-2z+4}\right\}$.

Resposta: $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{3}} 2^n \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$.

(c) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{10z(z+5)}{(z-1)(z-2)(z+3)}\right\}$.

Resposta: $x_n = (-3)^n + 14 \times 2^n - 15$.

(d) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{4z}{3z^2-2z-1}\right\}$.

Resposta: $x_n = 1 - (-3)^{-n}$.

(e) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z^2+2z}{(z+3)(z-4)}\right\}$.

Resposta: $x_n = \dfrac{(-3)^n + 3 \times 2^{2n+1}}{7}$.

(f) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z^2}{z^2+1}\right\}$.

Resposta: $x_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

(g) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z^2}{z^2-z+1}\right\}$.

Resposta: $x_n = \dfrac{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{3}\pi(n+1)\right)}{\sqrt{3}}$.

(h) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z}{z^2-4z+1}\right\}$.

Resposta: $x_n = \dfrac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$.

4 RESOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS

Uma importante aplicação da transformada $\mathcal{Z}$ é a resolução de equações de diferenças, também conhecidas como relações de recorrência ou equações de recorrência.

> Estas equações surgem na modelagem matemática de sistemas discretos gerais e na simulação de sistemas analógicos por processamento digital. Aparecem também na modelagem de filtro digital, momentos de flexão, crescimento populacional, caderneta de poupança, computação, sistema de dados amostrados, entre outros (GROVE, 1991).

Definição 4.1. *Uma equação de diferenças é uma relação que associa termos de uma ou mais sequências discretas. A solução de uma equação de diferenças é um conjunto de números que satisfazem a equação. E a solulçao geral de uma queação de diferenças é uma equação algébrica em n o qual representa a posição do n-ésimo termo na sequência.*

O termo “equação de diferenças” refere-se a um tipo específico de relação de recorrência, embora, frequentemente, seja usado como sinônimo das equações de recorrência. E a relação de recorrência é uma técnica matemática que permite definir sequências, conjuntos, operações ou até mesmo algoritmos partindo de problemas particulares para problemas genéricos. Ou seja, por intermédio de uma regra pode-se calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s).

Segundo Sertöz (2004), para resolver uma equação de diferenças usando a transformada $\mathcal{Z}$, “aplica-se a transformada $\mathcal{Z}$ de ambos os lados da equação obtendo uma equação algébrica em $X(z)$ com variável z complexa. A partir desta equação em $X(z)$ toma-se a transformada $\mathcal{Z}$ inversa para encontrar x_n em termos de n, variável pertence ao conjunto dos números naturais”(SERTÖZ, 2004).

Nesta seção encontram-se exercícios com a resolução completa das equações de diferenças utilizando a transformada $\mathcal{Z}$, sua definição, propriedades e transformada $\mathcal{Z}$ inversa. Os Apêndices A e B são utilizados como auxílio.

Exemplo 4.2. Considere a seguinte equação de diferenças

$$\begin{cases} y_{n+1} = 2y_n \\ y_0 = 1. \end{cases}$$

A sequência $\{1,2,4,8,\ldots\}$ é uma solução e pode-se conjecturar que $y_n = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$.

De fato, dada a equação de diferenças $y_{n+1} = 2y_n$, e aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os lados da igualdade:

$$\mathcal{Z}\{y_{n+1}\} = \mathcal{Z}\{2y_n\}.$$

Utilizando a propriedade da Translação no lado esquerdo da igualdade, Linearidade no lado direito e a notação $\mathcal{Z}\{y_n\} = Y(z)$, tem-se:

$$z[Y(z) - y_0] = 2Y(z).$$

Substituindo $y_0 = 1$:

$$z[Y(z) - 1] = 2Y(z).$$

Isolando $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{z}{z-2}.$$

Observando o item 2 na lista de transformadas:

$$\mathcal{Z}\{2^n\} = \frac{z}{z-2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} y_n &= \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-2}\right\} \\ &= 2^n. \end{aligned}$$

Logo, $y_n = 2^n$ é a solução geral.

Exemplo 4.3. Seja a equação de diferenças

$$\begin{cases} y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 0 \\ y_0 = 1,\ y_1 = 4, \end{cases}$$

cuja solução é dada pela sequência $y_n = \{1, 4, 12, 32, 80, \ldots\}$.

Na equação de diferenças $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 0$, aplica-se a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os lados da igualdade:

$$\mathcal{Z}\{y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n\} = \mathcal{Z}\{0\}.$$

Como $\mathcal{Z}\{0\} = 0$, utilizando a propriedade da Linearidade e Translação no lado esquerdo da igualdade, tem-se:

$$z^2\left[Y(z) - y_0 - \frac{y_1}{z}\right] - 4z[Y(z) - y_0] + 4Y(z) = 0.$$

Substituindo $y_0 = 1$ e $y_1 = 4$:

$$z^2Y(z) - z^2 - 4z - 4zY(z) + 4z + 4Y(z) = 0.$$

Isolando $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-2)^2}.$$

Como não sabe-se calcular a transformada inversa de $Y(z)$, será necessário obter uma expressão mais simples com o auxílio da decomposição em frações parciais. Porém, será mais útil dividir $Y(z)$ por z antes de calcular as frações parciais, pois as transfomadas mais comuns possuem z no numerador. Assim:

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{z} &= \frac{z}{(z-2)^2} \\ &= \frac{A}{z-2} + \frac{B}{(z-2)^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A(z-2)+B}{(z-2)^2} \\
&= \frac{Az-2A+B}{(z-2)^2}.
\end{aligned}
$$

Pela igualdade dos polinômios em z nos numeradores, tem-se o sistema linear:

$$
\begin{cases}
A = 1 \\
-2A + B = 0
\end{cases}
$$

cuja solução é $A = 1$ e $B = 2$. Assim,

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{z-2} + \frac{2}{(z-2)^2}$$

e portanto

$$Y(z) = \frac{z}{z-2} + \frac{2z}{(z-2)^2}.$$

Observando os itens 2 e 9 na lista de transformadas:

$$\mathcal{Z}\{2^n\} = \frac{z}{z-2}$$

e

$$\mathcal{Z}\{n2^n\} = \frac{2z}{(z-2)^2}.$$

Sabe-se então calcular a transformada inversa de $Y(z)$, que é a solução procurada y_n:

$$
\begin{aligned}
y_n &= \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-2} + \frac{2z}{(z-2)^2}\right\}
\end{aligned}
$$

$$= \quad 2^n + n2^n$$

$$= \quad 2^n(n+1).$$

Logo, $y_n = 2^n(n+1)$ é a fórmula que gera a sequência $y_n = \{1, 4, 12, 32, 80, \ldots\}$.

Exemplo 4.4. Considere a equação de diferenças

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + n \\ a_0 = 0. \end{cases}$$

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os lados da equação:

$$\mathcal{Z}\{a_{n+1}\} = \mathcal{Z}\{a_n + n\}.$$

Utilizando a propriedade de Linearidade:

$$\mathcal{Z}\{a_{n+1}\} = \mathcal{Z}\{a_n\} + \mathcal{Z}\{n\}.$$

Pela propriedade de Translação ao lado esquerdo e Diferenciação ao lado direito:

$$zA(z) - za_0 = A(z) + \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Substituindo $a_0 = 0$:

$$zA(z) = A(z) + \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Isolando $A(z)$:

$$A(z) = \frac{z}{(z-1)^3}.$$

Pelo método de série de potências, encontra-se a série de potências negativas de z que define $A(z)$, dividindo o monômio do numerador pelo polinômio do denominador de $A(z)$:

Ou seja, dividindo z por $z^3 - 3z^2 + 3z - 1$:

$$
\begin{array}{ll}
z & \left| z^3-3z^2+3z-1 \right. \\
\cline{2-2}
\underline{-z+3-3z^{-1}+z^{-2}} & z^{-2}+3z^{-3}+6z^{-4}+10z^{-5}+\ldots \\
\quad 3-3z^{-1}+z^{-2} & \\
\quad \underline{-3+9z^{-1}-9z^{-2}+3z^{-3}} & \\
\qquad 6z^{-1}-8z^{-2}+3z^{-3} & \\
\qquad \underline{-6z^{-1}+18z^{-2}-18z^{-3}+6z^{-4}} & \\
\qquad\quad 10z^{-2}-15z^{-3}+6z^{-4} & \\
\qquad\quad \underline{-10z^{-2}+30z^{-3}-30z^{-4}+10z^{-5}} & \\
\qquad\qquad 15z^{-3}-24z^{-4}+10z^{-5} &
\end{array}
$$

o que gera a série de potências negativas de z dada por:

$$A(z) = 0z^0 + 0z^{-1} + 1z^{-2} + 3z^{-3} + 6z^{-4} + 10z^{-5} + 15z^{-6} + \ldots.$$

Fornecendo a sequência $a_n = (0,0,1,3,6,10,15,\ldots)$, $n \geq 0$.

Voltando ao exemplo 2.24 observa-se que $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{2z}{(z-1)^3}\right\} = n^2 - n$. Logo, se neste exemplo $A(z) = \dfrac{z}{(z-1)^3}$, pode-se conjecturar que

$a_n = \mathcal{Z}^{-1}\{A(z)\} = \dfrac{n^2-n}{2}$.

Para provar que a expressão em a_n está correta, basta mostrar que:

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{n(n-1)}{2}\right\} = A(z).$$

De fato, observando os itens 5 e 6 na lista de transformadas:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{\frac{n(n-1)}{2}\right\} &= \frac{1}{2}\mathcal{Z}\{n^2-n\} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\mathcal{Z}\{n^2\} - \mathcal{Z}\{n\}\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left[\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} - \frac{z}{(z-1)^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{z(z+1)-z(z-1)}{(z-1)^3}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2z}{(z-1)^3}\right] \\
&= \frac{z}{(z-1)^3} \\
&= A(z).
\end{aligned}
$$

Portanto, $a_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$ é a solução da equação de diferenças.

Exemplo 4.5. Considere a equação de diferenças dada por

$$
\begin{cases}
y_{n+2}+3y_{n+1}+2y_n = 3^n \\
y_0 = 1,\ y_1 = 0.
\end{cases}
$$

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os lados da equação de diferenças:

$$\mathcal{Z}\{y_{n+2}+3y_{n+1}+2y_n\} = \mathcal{Z}\{3^n\},$$

e pela propriedade de Linearidade:

$$\mathcal{Z}\{y_{n+2}\}+3\mathcal{Z}\{y_{n+1}\}+2\mathcal{Z}\{y_n\} = \mathcal{Z}\{3^n\}.$$

Utilizando a propriedade de Translação do lado esquerdo e Similaridade do lado direito da igualdade:

$$z^2Y(z) - \sum_{r=0}^{2-1} y_r z^{2-r} + 3\left(zY(z) - \sum_{r=0}^{1-1} y_r z^{1-r}\right) + 2Y(z) = \frac{z}{z-3}.$$

$$z^2Y(z) - y_0z^2 - y_1z + 3(zY(z) - y_0z) + 2Y(z) = \frac{z}{z-3}.$$

Substituindo $y_0 = 1$ e $y_1 = 0$:

$$z^2Y(z) - 1z^2 - 0z + 3zY(z) - 3z + 2Y(z) = \frac{z}{z-3}.$$

Isolando $Y(z)$:

$$Y(z)(z^2+3z+2) = \frac{z}{z-3}+z^2+3z.$$

$$Y(z) = \left(\frac{z}{z-3}+z^2+3z\right)\left(\frac{1}{z^2+3z+2}\right).$$

$$Y(z) = \frac{z(z^2-8)}{(z-3)(z+1)(z+2)}.$$

Aplicando a decomposição em frações parciais em $\dfrac{Y(z)}{z}$:

$$\begin{aligned}
\frac{Y(z)}{z} &= \frac{z^2-8}{(z-3)(z+1)(z+2)} \\
&= \frac{A}{z-3}+\frac{B}{z+1}+\frac{C}{z+2} \\
&= \frac{A(z+1)(z+2)+B(z-3)(z+2)+C(z-3)(z+1)}{(z-3)(z+1)(z+2)} \\
&= \frac{(A+B+C)z^2+(3A-B-2C)z+(2A-6B-3C)}{(z-3)(z+1)(z+2)}.
\end{aligned}$$

Pela igualdade dos polinômios em z nos numeradores, tem-se o sistema linear:

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ 3A-B-2C=0 \\ 2A-6B-3C=-8 \end{cases}$$

cuja solução é $A=\dfrac{1}{20}$, $B=\dfrac{7}{4}$ e $C=-\dfrac{4}{5}$.

Portanto,

$$Y(z) = \frac{1}{20}\left(\frac{z}{z-3}\right)+\frac{7}{4}\left(\frac{z}{z+1}\right)-\frac{4}{5}\left(\frac{z}{z+2}\right).$$

E observando o item 2 na lista de transformadas:

$$\begin{aligned}
y_n &= \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{20}\left(\frac{z}{z-3}\right)+\frac{7}{4}\left(\frac{z}{z+1}\right)-\frac{4}{5}\left(\frac{z}{z+2}\right)\right\} \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{20}\left(\frac{z}{z-3}\right)\right\}+\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{7}{4}\left(\frac{z}{z+1}\right)\right\}-\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{4}{5}\left(\frac{z}{z+2}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{20}(3)^n+\frac{7}{4}(-1)^n-\frac{4}{5}(-2)^n.
\end{aligned}$$

Logo, $y_n = \frac{1}{20}(3)^n+\frac{7}{4}(-1)^n-\frac{4}{5}(-2)^n$ é a solução.

Exemplo 4.6. Considere a equação de diferenças dada por

$$\begin{cases} x_{n+2}-4x_{n+1}+4x_n = 2^n \\ x_0 = 1,\ x_1 = -1. \end{cases}$$

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os lados da equação de diferenças:

$$\mathcal{Z}\{x_{n+2}-4x_{n+1}+4x_n\} = \mathcal{Z}\{2^n\}.$$

Pela propriedade de Linearidade:

$$\mathcal{Z}\{x_{n+2}\}-4\mathcal{Z}\{x_{n+1}\}+4\mathcal{Z}\{x_n\} = \mathcal{Z}\{2^n\}.$$

Utilizando a propriedade de Translação do lado esquerdo e Similaridade do lado direito:

$$z^2X(z)-\sum_{r=0}^{2-1}x_r z^{2-r}-4\left(zX(z)-\sum_{r=0}^{1-1}x_r z^{1-r}\right)+4X(z) = \frac{z}{z-2}.$$

$$z^2X(z)-x_0z^2-x_1z-4zX(z)+4x_0z+4X(z) = \frac{z}{z-2}.$$

Substituindo $x_0 = 1$ e $x_1 = -1$:

$$z^2X(z)-1z^2+1z-4zX(z)+4z+4X(z) = \frac{z}{z-2}.$$

Isolando $X(z)$:

$$X(z)(z^2-4z+4)=\frac{z}{z-2}+z^2-5z.$$
$$X(z)=\frac{z^3+11z-7z}{(z-2)^3}.$$

Utilizando o método dos resíduos, e multiplicando $X(z)$ por z^{n-1}:

$$X(z)z^{n-1}=\frac{z^{n-1}z(z^2-7z+11)}{(z-2)^3}=\frac{z^n(z^2-7z+11)}{(z-2)^3}$$

o qual possui um pólo de terceira ordem em $z=2$.

Calculando x_n:

$$\begin{aligned}
x_n &= \operatorname*{Res}_{z=2} z^{n-1}X(z)\\
&= \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 2}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{(z-2)^3z^n(z^2-7z+11)}{(z-2)^3}\right]\\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 2}\frac{d^2}{dz^2}[z^n(z^2-7z+11)]\\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}[nz^{n-1}(z^2-7z+11)+z^n(2z-7)]\\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 2}\{z^{n-2}[(n-1)(11n-7nz+nz^2-7z+2z^2)+(-7nz+2nz^2-7z+4z^2)]\}\\
&= \frac{1}{2}2^{n-2}[(n-1)(n-6)+(-6n+2)]\\
&= 2^{n-3}(n^2-13n+8).
\end{aligned}$$

Logo a solução procurada é dada por $x_n=2^{n-3}(n^2-13n+8)$.

Exemplo 4.7. Considere a equação de diferenças

$$y_n-4y_{n-1}+3y_{n-2}=2^n,$$

cujas condições iniciais são dadas por $y_n=0$ para $n<0$.

Para determinar a solução da equação de diferenças, aplica-se a transformada $\mathcal{Z}$

em ambos os lados da igualdade:

$$\mathcal{Z}\{y_n - 4y_{n-1} + 3y_{n-2}\} = \mathcal{Z}\{2^n\}.$$

Utilizando a propriedade de Linearidade:

$$\mathcal{Z}\{y_n\} - 4\mathcal{Z}\{y_{n-1}\} + 3\mathcal{Z}\{y_{n-2}\} = \mathcal{Z}\{2^n\}.$$

E pela propriedade de Translação com deslocamento à direita:

$$Y(z) - 4z^{-1}Y(z) + 3z^{-2}Y(z) = \frac{z}{z-2}.$$

Isolando $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{z^3}{(z-1)(z-2)(z-3)}.$$

Utilizando o método dos Resíduos, e multiplicando $Y(z)$ por z^{n-1}:

$$\begin{aligned} Y(z)z^{n-1} &= \frac{z^3 z^{n-1}}{(z-1)(z-2)(z-3)} \\ &= \frac{z^{n+2}}{(z-1)(z-2)(z-3)}. \end{aligned}$$

Tem-se então três pólos simples, $z=1$, $z=2$ e $z=3$. E calculando os resíduos:

$$\begin{aligned} y_n &= \operatorname*{Res}_{z=1} z^{n-1}Y(z) + \operatorname*{Res}_{z=2} z^{n-1}Y(z) + \operatorname*{Res}_{z=3} z^{n-1}Y(z) \\ &= \lim_{z\to 1}[(z-1)Y(z)z^{n-1}] + \lim_{z\to 2}[(z-2)Y(z)z^{n-1}] + \lim_{z\to 3}[(z-3)Y(z)z^{n-1}] \\ &= \lim_{z\to 1}\frac{z^{n+2}}{(z-2)(z-3)} + \lim_{z\to 2}\frac{z^{n+2}}{(z-1)(z-3)} + \lim_{z\to 3}\frac{z^{n+2}}{(z-1)(z-2)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2^{n+2}}{-1} + \frac{3^{n+2}}{2}. \end{aligned}$$

Logo, $y_n = \frac{1}{2} - 4.2^n + \frac{9}{2}.3^n$.

Exemplo 4.8. Seja a equação de diferenças $y_{n+2} - 4y_n = 2^n$ tendo condições iniciais dadas por $y_0 = 0$ e $y_1 = 1$.

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os lados da equação de diferenças:

$$z^2\left[Y(z) - y_0 - \frac{y_1}{z}\right] - 4Y(z) = \frac{z}{z-2}.$$

Substituindo $y_0 = 0$ e $y_1 = 1$:

$$z^2Y(z) - z - 4Y(z) = \frac{z}{z-2}.$$

Isolando $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{z(z-1)}{(z-2)^2(z+2)}.$$

Calculando a decomposição em frações parciais:

$$\begin{aligned}
\frac{Y(z)}{z} &= \frac{z-1}{(z-2)^2(z+2)} \\
&= \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{(z-2)^2} \\
&= \frac{-\frac{3}{16}}{z+2} + \frac{\frac{3}{16}}{z-2} + \frac{\frac{1}{4}}{(z-2)^2}
\end{aligned}$$

e portanto

$$Y(z) = -\frac{3}{16}\left(\frac{z}{z+2}\right) + \frac{3}{16}\left(\frac{z}{z-2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{z}{(z-2)^2}\right).$$

Observando os itens 2 e 9 na lista de transformadas, a solução procurada y_n é a transformada inversa de $Y(z)$:

$$\begin{aligned}
y_n &= \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left\{-\frac{3}{16}\left(\frac{z}{z+2}\right) + \frac{3}{16}\left(\frac{z}{z-2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{z}{(z-2)^2}\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{3}{16}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z+2}\right\}+\frac{3}{16}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-2}\right\}+\frac{1}{8}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{2z}{(z-2)^2}\right\}$$

$$= \left(-\frac{3}{16}\right)(-2)^n+\left(\frac{3}{16}\right)2^n+\left(\frac{1}{8}\right)n2^n.$$

Logo, a solução é $y_n = -\frac{3}{16}(-2)^n+\frac{3}{16}2^n+\frac{1}{8}n2^n$.

Exemplo 4.9. Dada a equação de diferenças $x_{n+2}+3x_{n+1}+2x_n = 0$, onde $x_0 = 1$ e $x_1 = -4$, e utilizando a transformada $\mathcal{Z}$ para sua resolução:

$$\mathcal{Z}\{x_{n+2}+3x_{n+1}+2x_n\} = \mathcal{Z}\{0\}.$$

Utilizando a propriedade de Linearidade:

$$\mathcal{Z}\{x_{n+2}\}+3\mathcal{Z}\{x_{n+1}\}+2\mathcal{Z}\{x_n\} = \mathcal{Z}\{0\}.$$

E pela propriedade de Translação:

$$z^2X(z)-\sum_{r=0}^{2-1}x_rz^{2-r}+3(zX(z)-\sum_{r=0}^{1-1}x_rz^{1-r})+2X(z) = 0.$$
$$z^2X(z)-x_0z^2-x_1z+3zX(z)-3x_0z+2X(z) = 0.$$

Substituindo $x_0 = 1$ e $x_1 = -4$:

$$z^2X(z)-1.z^2-(-4).z+3zX(z)-3.1z+2X(z) = 0.$$

Isolando $X(z)$:

$$X(z)[z^2+3z+2]-z^2+4z-3z = 0.$$
$$X(z)[z^2+3z+2] = z^2-z.$$
$$X(z) = \frac{z^2-z}{z^2+3z+2}.$$
$$X(z) = \frac{z(z-1)}{(z+1)(z+2)}.$$

Utilizando o método dos Resíduos, e multiplicando $X(z)$ por z^{n-1}:

$$
\begin{aligned}
X(z)z^{n-1} &= \frac{z(z-1)z^{n-1}}{(z+1)(z+2)} \\
&= \frac{z^n(z-1)}{(z+1)(z+2)}.
\end{aligned}
$$

Tem-se então dois pólos, $z=-1$ e $z=-2$, ambos de primeira ordem. E calculando os resíduos:

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=-1} z^{n-1}X(z) &= \lim_{z\to -1}[(z+1)X(z)z^{n-1}] \\
&= \lim_{z\to -1} \frac{z^n(z-1)}{z+2} \qquad (7)\\
&= -2(-1)^n
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=-2} z^{n-1}X(z) &= \lim_{z\to -2}[(z+2)X(z)z^{n-1}] \\
&= \lim_{z\to -1} \frac{z^n(z-1)}{z+1} \qquad (8)\\
&= 3(-2)^n.
\end{aligned}
$$

Assim x_n é dado pela soma dos resultados em (7) e (8).

Logo, $x_n = -2(-1)^n + 3(-2)^n$ é a solução.

Exemplo 4.10. Números de Fibonacci Dada a equação de diferenças

$$
\begin{cases}
f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \\
f_0 = 0,\ f_1 = 1,
\end{cases}
$$

na qual a sequência $f_n = \{0,1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots\}$ é uma solução.

Começando por 0 e 1, cada termo subsequente corresponde a soma dos dois anteriores.

Para obter uma fórmula explícita para o n-ésimo número de Fibonacci a partir da equação

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n,$$

aplica-se a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os lados da igualdade:

$$\mathcal{Z}\{f_{n+2}\} = \mathcal{Z}\{f_{n+1} + f_n\}.$$

Utilizando a propriedade da Translação e da Linearidade:

$$z^2\left[F(z) - f_0 - \frac{f_1}{z}\right] = z[F(z) - f_0] + F(z).$$

Substituindo $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$:

$$z^2F(z) - z = zF(z) + F(z).$$

Isolando $F(z)$:

$$F(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1}.$$

O polinômio no denominador possui duas raízes reais em:

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

logo pode ser escrito como:

$$z^2 - z - 1 = \left[z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]\left[z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right].$$

Calculando a decomposição em frações parciais de $F(z)$ dividido por z, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{F(z)}{z} &= \frac{1}{z^2 - z - 1} \\
&= \frac{A}{z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{B}{z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}
\end{aligned}$$

e portanto

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{z}{z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{z}{z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right].$$

Observando o item 2 na lista de transformadas, a solução procurada f_n é a transformada inversa de $F(z)$:

$$\begin{aligned} f_n &= \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{z}{z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{z}{z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right]\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n. \end{aligned} \tag{9}$$

Pode-se reescrever a solução utilizando o número de ouro, pois uma das raízes de $z^2 - z - 1$ é o próprio número de ouro

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

e a outra raíz é

$$1 - \varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Assim,

$$f_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

é a fórmula procurada para o n-ésimo número de Fibonacci.

Exemplo 4.11. Considere a equação de diferenças

$$\begin{cases} (n+1)x_{n+1} - nx_n = n+1 \\ x_0 = 0. \end{cases}$$

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os lados da igualdade:

$$\mathcal{Z}\{(n+1)x_{n+1} - nx_n\} = \mathcal{Z}\{n+1\}.$$

Pela propriedade de Linearidade:

$$\mathcal{Z}\{nx_{n+1}\} + \mathcal{Z}\{x_{n+1}\} - \mathcal{Z}\{nx_n\} = \mathcal{Z}\{n\} + \mathcal{Z}\{1\}.$$

Pela propriedade de Translação, $\mathcal{Z}\{x_{n+1}\}$ é dada por:

$$\mathcal{Z}\{x_{n+1}\} = zX(z) - x_0 z.$$

E substituindo $x_0 = 0$:

$$\mathcal{Z}\{x_{n+1}\} = zX(z) - 0z = zX(z).$$

Pela propriedade de Diferenciação:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{nx_{n+1}\} &= -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{x_{n+1}\} \\
&= -z\frac{d}{dz}zX(z) \\
&= -z\left[X(z) + z\frac{d}{dz}X(z)\right] \\
&= -zX(z) - z^2\frac{d}{dz}X(z).
\end{aligned}$$

Para $\mathcal{Z}\{nx_n\}$, pela propriedade de Diferenciação:

$$\mathcal{Z}\{nx_n\} = -z\frac{d}{dz}X(z).$$

E observando os itens 1 e 5 na lista de transformadas:

$$\mathcal{Z}\{n\} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

e,

$$\mathcal{Z}\{1\} = \frac{z}{z-1}.$$

Agrupando as informações obtidas:

$$\mathcal{Z}\{nx_{n+1}\} + \mathcal{Z}\{x_{n+1}\} - \mathcal{Z}\{nx_n\} = \mathcal{Z}\{n\} + \mathcal{Z}\{1\}.$$
$$-zX(z) - z^2\frac{d}{dz}X(z) + zX(z) + z\frac{d}{dz}X(z) = \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1}.$$

Isolando $X(z)$:

$$\frac{d}{dz}X(z)(-z^2+z) = \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1}.$$
$$\frac{d}{dz}X(z) = \frac{z+z(z-1)}{(z-1)^2(-z^2+z)}.$$
$$\frac{d}{dz}X(z) = \frac{z^2}{-z(z-1)^3}.$$
$$\frac{d}{dz}X(z) = \frac{-z}{(z-1)^3}.$$

Integrando em ambos os lados:

$$\int \frac{d}{dz}X(z)dz = \int \frac{-z}{(z-1)^3}dz.$$

$$X(z) = \int \frac{-z}{(z-1)^3}dz.$$

E utilizando frações parciais em $\dfrac{-z}{(z-1)^3}$:

$$\begin{aligned}
\frac{-z}{(z-1)^3} &= \frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{(z-1)^3} \\
&= \frac{A(z-1)^2 + B(z-1) + C}{(z-1)^3} \\
&= \frac{Az^2 + (-2A+B)z + (A-B+C)}{(z-1)^3}.
\end{aligned}$$

Assim, $A = 0$ e $B = C = -1$, daí:

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \int \frac{-z}{(z-1)^3}dz \\
&= \int \frac{0}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)^3}dz \\
&= -1\int \frac{1}{(z-1)^2}dz - 1\int \frac{1}{(z-1)^3}dz.
\end{aligned}
$$

Substituindo $u = z-1$, e observando que $du = 1dz$:

$$
\begin{aligned}
X(z) &= -1\int \frac{1}{u^2}du - 1\int \frac{1}{u^3}du \\
&= -1\frac{1}{-u} - 1\frac{1}{-2u^2} + C \\
&= \frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2} + C \\
&= \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-1)^2} + C \\
&= \frac{2z-1}{2(z-1)^2} + C.
\end{aligned}
$$

Logo, $X(z) = \dfrac{2z-1}{2(z-1)^2} + C$.

Porém $C = 0$, pois $\lim_{z\to\infty} X(z) = x_0 = 0$, pela propriedade do valor inicial.

Portanto, $X(z) = \dfrac{2z-1}{2(z-1)^2}$.

Utilizando o método dos Resíduos, e multiplicando $X(z)$ por z^{n-1}:

$$
X(z)z^{n-1} = \frac{(2z-1)z^{n-1}}{2(z-1)^2}.
$$

Para $n = 0$ tem-se um pólo de segunda ordem em $z = 1$ e um pólo de primeira ordem em $z = 0$.

Logo, calculando x_n para $n = 0$:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \operatorname*{Res}_{z=1} z^{-1}X(z) + \operatorname*{Res}_{z=0} z^{-1}X(z) \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}[(z-1)^2 z^{-1}X(z)] + \lim_{z\to 0}[(z-0)z^{-1}X(z)] \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\frac{2z-1}{2z} + \lim_{z\to 0}\frac{2z-1}{2(z-1)^2} \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{1}{2z^2} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Para $n > 0$ tem-se um pólo de segunda ordem em $z = 1$.

Logo, calculando x_n para $n > 0$:

$$
\begin{aligned}
x_n &= \operatorname*{Res}_{z=1} z^{n-1}X(z) \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}[(z-1)^2 z^{n-1}X(z)] \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}[\tfrac{(2z-1)z^{n-1}}{2}] \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{z^{n-1}}{2}[2n + (1-n)z^{-1}] \\
&= \frac{n+1}{2}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
x_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ \dfrac{n+1}{2}, & \text{se } n > 0. \end{cases}
$$

Alternativamente, na equação de diferenças

$$\begin{cases} (n+1)x_{n+1} - nx_n = n+1 \\ x_0 = 0, \end{cases}$$

pode-se substituir $y_n = nx_n$, logo:

$$\begin{cases} y_{n+1} - y_n = n+1 \\ y_0 = 0. \end{cases}$$

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ e utilizando as propriedades de Linearidade, Translação e os itens 1 e 5:

$$\mathcal{Z}\{y_{n+1}\} - \mathcal{Z}\{y_n\} = \mathcal{Z}\{n+1\}$$

e,

$$zY(z) - y_0 z - Y(z) = \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1}.$$

Substituindo $y_0 = 0$ e isolando $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-1)^3}.$$

Utilizando o método dos resíduos, e multiplicando $Y(z)$ por z^{n-1}:

$$Y(z)z^{n-1} = \frac{z^2 z^{n-1}}{(z-1)^3} = \frac{z^{n+1}}{(z-1)^3}$$

o qual possui um pólo de terceira ordem em $z = 1$.

Calculando y_n:

$$\begin{aligned} y_n &= \operatorname*{Res}_{z=1} z^{n-1}Y(z) \\ &= \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \to 1} \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{(z-1)^3 z^{n+1}}{(z-1)^3} \right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}[z^{n+1}] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}[(n+1)z^n] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1} n(n+1)z^{n-1} \\
&= \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}
$$

Logo, $y_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ para $n > 0$. E voltando em $y_n = nx_n$ tem-se que $x_n = \dfrac{n+1}{2}$ para $n > 0$.

4.1 PROBLEMAS ENVOLVENDO EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS

Problemas de matemática financeira, probabilidade, crescimento de bactérias e geométricos serão vistos nesta seção.

Exemplo 4.12. Orçamento familiar

Verifique qual a situação orçamentária de uma família, depois de um ano, que tem R\$1.000,00 na poupança, um salário fixo de R\$3.000,00 e gasta 80% da renda mensal, poupando o que não gasta.

Resolução:

Considerando $n = 0$ o período (mensal) inicial (ou mês zero) e s_n a situação financeira da família no mês n.

Logo, para o mês zero, antes de receber o salário e haver gastos, o montante da família é de R\$1.000,00. Ou seja, $s_0 = 1000$.

Após 1 mês, tem-se o montante da poupança mais o salário fixo, porém com o gasto de 80% do mesmo. Logo, $s_1 = 0,2(s_0 + 3000)$.

Para o 2º mês, o montante será representado pelo montante do mês anterior mais o salário, porém com o gasto de 80% do mesmo. Assim, $s_2 = 0,2(s_1 + 3000)$.

Pode-se, recursivamente, dizer que o montante da família para o n-ésimo mês é dado pela equação de diferenças

$$\begin{cases} s_{n+1} = 0,2(s_n + 3000) \\ s_0 = 1000 \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os lados da equação:

$$\mathcal{Z}\{s_{n+1}\} = \mathcal{Z}\{0,2(s_n + 3000)\}.$$

Pela propriedade de Linearidade:

$$\mathcal{Z}\{s_{n+1}\} = 0,2\mathcal{Z}\{s_n\} + 600\mathcal{Z}\{1\}.$$

Utilizando a propriedade de Translação e o item 1 na lista de transformadas:

$$zS(z) - s_0 z = 0,2S(z) + \frac{600z}{z-1}.$$

Substituindo $s_0 = 1000$ e isolando $S(z)$:

$$S(z) = \frac{z(1000z - 400)}{(z - 0,2)(z-1)}.$$

Para encontrar a transformada inversa de $S(z)$, pelo método dos resíduos:

$$z^{n-1}S(z) = \frac{z^n(1000z - 400)}{(z - 0,2)(z-1)}$$

tem-se dois pólos simples em $z = 0,2$ e $z = 1$.

Assim,

$$\begin{aligned} s_n &= \operatorname*{Res}_{z=0,2} z^{n-1}S(z) + \operatorname*{Res}_{z=1} z^{n-1}S(z) \\ &= \lim_{z\to 0,2} \frac{z^n(1000z-400)}{z-1} + \lim_{z\to 1} \frac{z^n(1000z-400)}{z-0,2} \\ &= (0,2)^n \times 250 + 1^n \times 750 \\ &= 250(0,2)^n + 750 \end{aligned} \tag{10}$$

é a solução da equação de diferenças.

E para responder à questão, basta substituir $n = 12$ na solução em (10):

$$s_{12} = 250(0,2)^{12} + 750 = 750,000001024.$$

Portanto, a situação financeira da família após um ano é de aproximadamente R\$750,00.

Exemplo 4.13. Crescimento de bactérias

Suponha que o número de bactérias em uma colônia triplique a cada hora.

(a) Encontre uma equação de diferenças para o número de bactérias depois que se passaram n horas.

(b) Se 100 bactérias são usadas para iniciar uma nova colônia, quantas bactérias haverá na colônia em 10 horas?

Resolução:

Considerando b_n o número de bactérias em n horas, pode-se observar o comportamento das bactérias nas primeiras horas da seguinte maneira:

- Em $n = 0$ (hora zero) tem-se o número inicial de bactérias b_0;
- Na 1ª hora tem-se que o número de bactérias b_1 é dado por $b_1 = 3b_0$;
- Na 2ª hora o número de bactérias é dado por $b_2 = 3b_1$;
- Na 3ª hora tem-se $b_3 = 3b_2$.

Recursivamente, em n horas o número de bactérias é dado por $b_{n+1} = 3b_n$, o que responde o item **(a)**.

Para o item **(b)** basta resolver a equação de diferenças encontrada.

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos o lados da equação:

$$\mathcal{Z}\{b_{n+1}\} = \mathcal{Z}\{3b_n\}.$$

Pela propriedade de Translação e Linearidade:

$$zB(z) - b_0 z = 3B(z).$$

Isolando $B(z)$:

$$B(z) = \frac{b_0 z}{z-3}.$$

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ inversa em ambos os lados:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{B(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{b_0 z}{z-3}\right\}.$$

E pelo item 2 na lista de transformadas:

$$b_n = b_0 3^n. \tag{11}$$

Para concluir o item **(b)** basta substituir $b_0 = 100$ e $n = 10$ na equação (11):

$$b_{10} = 100 \times 3^{10} = 100 \times 59049 = 5904900.$$

Portanto haverá 5.904.900 bactérias em 10 horas.

Exemplo 4.14. Probabilidade

Dois jogadores disputam uma série de partidas. Cada partida é iniciada por quem venceu a partida anterior. Em cada partida, quem a iniciou tem probabilidade $0,6$ de ganhá-la e probabilidade $0,4$ de perdê-la. Se o jogador A iniciou a primeira partida, qual é a probabilidade do jogador B ganhar a n-ésima partida?

Resolução:

Analisando as $(n+1)$ partidas realizadas e considerando x_n a probabilidade do jogador B ganhar a n-ésima partida, para que o jogador B ganhe a $(n+1)$-ésima partida tem-se duas possibilidades:

- O jogador B ganha a n-ésima partida (com probabilidade x_n) e ganha a seguinte (com probabilidade condicional $0,6$), com probabilidade igual a $0,6x_n$;
- O jogador B perde a n-ésima partida (com probabilidade $1 - x_n$) e ganha a seguinte (com probabilidade condicional $0,4$), com probabilidade igual a $0,4(1 - x_n)$.

Portanto, a probabilidade x_{n+1} de vitória na $(n+1)$-ésima partida é dada por $x_{n+1} = 0,6x_n + 0,4(1-x_n)$, ou seja, $x_{n+1} = 0,2x_n + 0,4$, com $x_1 = 0,4$, pois o jogador B não inicia a primeira partida.

Obtendo a equação de diferenças $x_{n+1} = 0,2x_n + 0,4$, com $x_0 = 0$ e $x_1 = 0,4$, e utilizando a transformada $\mathcal{Z}$ pode-se encontrar x_n que dependa somente de n.

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os lados da equação de diferenças:

$$\mathcal{Z}\{x_{n+1}\} = \mathcal{Z}\{0,2x_n + 0,4\}.$$

Pela propriedade de Linearidade:

$$\mathcal{Z}\{x_{n+1}\} = \mathcal{Z}\{0,2x_n\} + \mathcal{Z}\{0,4\}.$$

Utilizando a definição de transformada $\mathcal{Z}$ e a propriedade de Translação:

$$zX(z) - \sum_{n=0}^{1-1} x_n z^{1-n} = 0,2X(z) + 0,4\frac{z}{z-1}.$$

$$zX(z) = 0,2X(z) + 0,4\frac{z}{z-1}.$$

E isolando $X(z)$:

$$X(z) = \frac{0,4z}{(z-1)(z-0,2)}.$$

Multiplicando $X(z)$ por z^{n-1} para aplicar o método dos resíduos:

$$X(z)z^{n-1} = \frac{0,4z^n}{(z-1)(z-0,2)}$$

o qual possui dois pólos simples em $z = 1$ e $z = 0,2$.

Assim,

$$\begin{aligned} x_n &= \operatorname*{Res}_{z=1} z^{n-1}X(z) + \operatorname*{Res}_{z=0,2} z^{n-1}X(z) \\ &= \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{0,4z^n}{(z-1)(z-0,2)}\right] + \lim_{z\to 0,2}\left[(z-0,2)\frac{0,4z^n}{(z-1)(z-0,2)}\right] \end{aligned}$$

$$= \lim_{z\to 1}\left[\frac{0,4z^n}{(z-0,2)}\right]+\lim_{z\to 0,2}\left[\frac{0,4z^n}{(z-1)}\right]$$

$$= \frac{0,4(1)^n}{1-0,2}+\frac{0,4(0,2)^n}{0,2-1}$$

$$= \frac{0,4}{0,8}+\frac{0,4(0,2)^n}{-0,8}$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(0,2)^n.$$

Logo $x_n = \frac{1}{2}[1-(0,2)^n]$ é a solução.

Portanto, a probabilidade do jogador B ganhar a n-ésima partida é de $x_n = \frac{1}{2}[1-(0,2)^n]$, ou seja, quando n tende ao infinito, a probabilidade x_n tende a 50%.

Exemplo 4.15. Torre de Hanoi (texto adaptado de Morgado e Carvalho (2014))

A Torre de Hanói é um quebra-cabeças com uma base, na qual são fixadas três hastes. Em uma destas hastes são encaixados um certo número de discos, de diâmetros diferentes, de modo que um disco sempre repousa sobre outro de diâmetro maior, conforme figura (11). Qual é o número mínimo de movimentos para transferir todos os discos para outra haste, respeitando sempre a restrição de que um disco nunca seja colocado sobre um disco de diâmetro menor, e movendo um disco por vez?

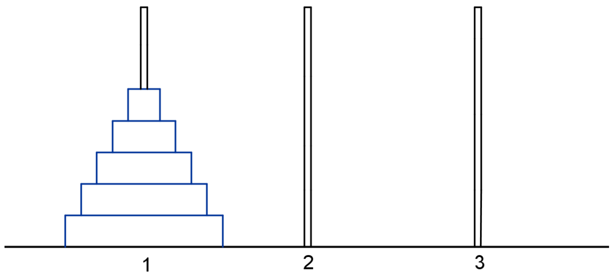

Figura 11: A Torre de Hanói com 5 discos.

A idéia fundamental é de que um problema com n discos ($n > 1$) pode ser reduzido a um problema com $n-1$ discos. Isto é, sabendo transferir $n-1$ discos de uma haste para outra, sabe-se também transferir n discos. De fato, para transferir n discos da haste 1 para a haste 3, será necessário, em algum momento, transferir o disco de maior diâmetro da haste 1 para a haste 3. A única forma em que isto pode ser feito é pela prévia remoção dos $n-1$ discos superiores para a haste 2. Observe que, nesta transferência, tudo se passa como se apenas estes $n-1$ discos estivessem presentes: como o n-ésimo disco é maior que todos os demais, ele não impõe qualquer restrição no processo. Após a passagem do maior disco para a haste 3, resta apenas transferir os $n-1$ discos da haste 2 para a 3 (novamente, tudo se passa como se o maior disco não estivesse lá).

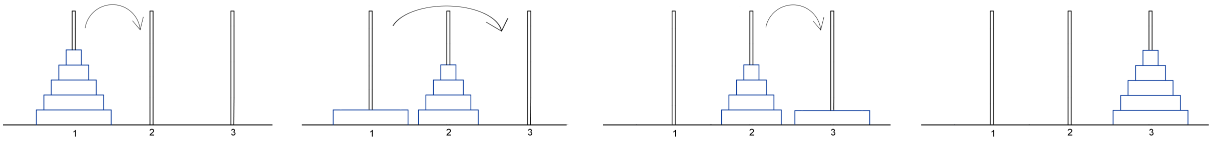

Figura 12: Passando de n para $n-1$.

Designando x_n o número mínimo de movimentos para transferir n discos de uma haste para outra, tem-se $x_n = x_{n-1}+1+x_{n-1}$, ou seja, $x_n = 2x_{n-1}+1$, para todo $n > 1$. Equivalentemente, $x_{n+1} = 2x_n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Em resumo tem-se que a solução para a Torre de Hanói com n discos, ou seja, o número mínimo para mover todos os discos, se dá pela resolução da equação de diferenças dada por $x_{n+1} = 2x_n + 1$, com $x_0 = 0$.

Resolução:

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ na equação $x_{n+1} = 2x_n + 1$:

$$\mathcal{Z}\{x_{n+1}\} = \mathcal{Z}\{2x_n + 1\}.$$

Utilizando as propriedades de Linearidade, Translação e pelo item 1 na lista de transformadas:

$$z(X(z) - x_0) = 2X(z) + \frac{z}{z-1}.$$

Substituindo $x_0 = 0$ e isolando $X(z)$:

$$zX(z) = 2X(z) + \frac{z}{z-1}.$$

$$X(z)(z-2) = \frac{z}{z-1}.$$

$$X(z) = \frac{z}{(z-2)(z-1)}.$$

Dividindo $X(z)$ por z e aplicando o método de frações parciais:

$$\begin{aligned}
\frac{X(z)}{z} &= \frac{1}{(z-2)(z-1)} \\
&= \frac{A}{z-2}+\frac{B}{z-1} \\
&= \frac{A(z-1)+B(z-2)}{(z-2)(z-1)} \\
&= \frac{(A+B)z+(-A-2B)}{(z-2)(z-1)}.
\end{aligned}$$

Pela igualdade dos polinômios em z nos numeradores, tem-se o sistema linear:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A-2B=1 \end{cases}$$

cuja solução é $A=1$ e $B=-1$.

Assim, $X(z)=\dfrac{z}{z-2}-\dfrac{z}{z-1}$.

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ inversa e analisando o item 2 na lista de transformadas:

$$\begin{aligned}
x_n &= \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-2}-\frac{z}{z-1}\right\} \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-2}\right\}-\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\right\} \\
&= 2^n-1^n.
\end{aligned}$$

Logo, $x_n=2^n-1$ é a quantidade de movimentos necessários para mover n discos.

Esse jogo foi idealizado e publicado pelo matemático francês Edouard Lucas, em 1883, que, para dar mais sabor à sua criação, inventou a seguinte lenda: Na origem do tempo, num templo Hindu, situado no centro do universo, o deus Brama supostamente havia criado uma torre com 64 discos perfurados de ouro puro ao redor de uma de três colunas de diamante e ordenou a um grupo de sacerdotes que movessem os discos de uma coluna para outra, fazendo um movimento por segundo, respeitando as suas instruções.

As regras eram simples: apenas um disco poderia ser movido por vez e nunca um disco maior deveria ficar por cima de um disco menor. Segundo a lenda, quando todos os 64 discos fossem transferidos para uma outra coluna, o templo iria desmoronar e o mundo desapareceria. Deste modo, depois de $2^{64}-1$ segundos todos os discos teriam sido movidos. Por sorte, essa quantidade de tempo é de aproximadamente 42 vezes a idade do universo. Não é claro se Lucas inventou essa lenda ou foi inspirado por ele.

Exemplo 4.16. Matemática financeira

Uma pessoa deposita R$1.000,00 em uma poupança que rende 9% de juros compostos por ano.

(a) Encontre uma equação de diferenças para a quantia na poupança ao final de n anos.

(b) Encontre uma fórmula explícita para a quantia na poupança ao final de n anos.

(c) Quanto haverá na poupança depois de 100 anos?

Resolução:

Seja p_n o valor da poupança no período n em anos.

Para resolver o item **(a)** observa-se o que ocorre com a poupança nos primeiros anos:

- No ano 0 tem-se na poupança o valor de R$1.000,00, ou seja, $p_0 = 1000$;
- No ano 1 o valor da poupança se dá com o valor anterior e aplicando os juros em cima do valor do ano anterior, ou seja, $p_1 = p_0 + 0,09p_0$;
- No ano 2 o valor da poupança recai na soma do valor anterior mais 9% desse valor, ou seja, $p_2 = p_1 + 0,09p_1$.

Recursivamente, pode-se generalizar que no ano n o valor da poupança se dá por $p_{n+1} = 1,09p_n$.

Para resolver o item **(b)** pode-se aplicar a transformada $\mathcal{Z}$ na equação de diferenças dada por:

$$\begin{cases} p_{n+1} = 1,09p_n \\ p_0 = 1000. \end{cases}$$

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os lados da equação:

$$\mathcal{Z}\{p_{n+1}\} = \mathcal{Z}\{1,09p_n\}.$$

Usando a propriedade de Similaridade:

$$\mathcal{Z}\{p_{n+1}\} = 1,09\mathcal{Z}\{p_n\}.$$

Aplicando a propriedade de Translação à esquerda da igualdade:

$$zP(z) - p_0 z = 1,09P(z).$$

Isolando $P(z)$:

$$P(z) = \frac{p_0 z}{z - 1,09}.$$

Substituindo $p_0 = 1000$:

$$P(z) = 1000\frac{z}{z - 1,09}.$$

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ inversa e observando o item 2 na lista de transformadas:

$$\begin{aligned}
p_n &= \mathcal{Z}^{-1}\{P(z)\} \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left\{1000\frac{z}{z-1,09}\right\} \\
&= 1000\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-1,09}\right\} \\
&= 1000(1,09)^n.
\end{aligned} \tag{12}$$

Logo a quantia na poupança é dada por $p_n = 1000(1,09)^n$, onde n é o número de anos.

Para responder o item **(c)** basta substituir $n = 100$ na equação (12):

$$p_{100} = 1000(1,09)^{100} \approx 1000 \times 5529,04079 = 5.529.040,79.$$

Ou seja, após 100 anos haverá R$5.529.040,79 na poupança.

Exemplo 4.17. Pizza de Steiner

Qual é o maior número de regiões em que se pode dividir o plano com n cortes retos?

Resolução:

Pensando no plano como se fosse uma grande pizza e os cortes retos como se fossem retas pertencentes a este plano, determina-se o número máximo de regiões em que n retas podem dividir o plano.

Considerando y_n a quantidade máxima de regiões que n retas dividem o plano observa-se que se não há nenhuma reta então tem-se somente uma região (a pizza inteira), ou seja, $y_0 = 1$. Traçando-se uma reta no plano tem-se duas regiões, ou seja, $y_1 = 2$. Traçando-se mais uma reta no plano de modo a obter-se a quantidade máxima de regiões, tem-se que esta corta a primeira reta já existente em apenas um ponto, gerando assim duas novas regiões, ou seja, $y_2 = y_1 + 2 = 4$. Faz-se o traçado de mais uma reta de tal maneira que esta produza o máximo de regiões possíveis, assim esta nova reta corta as duas retas já existentes em um ponto cada gerando três novas regiões, ou seja, $y_3 = y_2 + 3 = 7$.

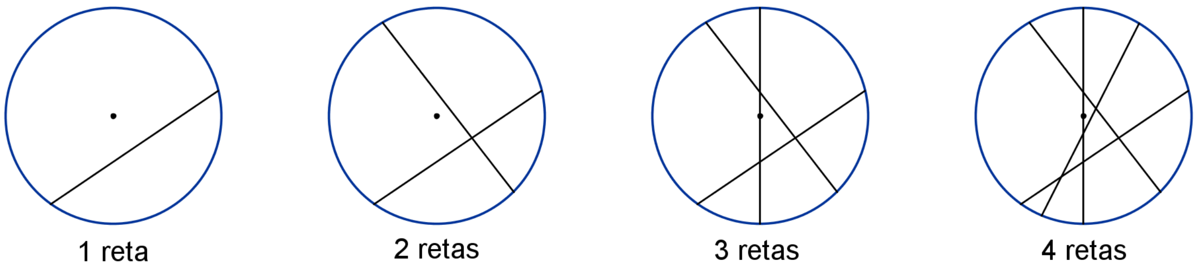

Figura 13: Retas cortando a pizza.

Continuando o processo e fazendo a análise para $n+1$ retas, se em um plano tem-se n retas gerando y_n regiões, respeitando as condições impostas pela questão, então traçando a reta $n+1$ de modo que esta produza uma quantidade máxima de regiões, tem-se que a reta $n+1$ corta as n retas em n pontos, gerando assim $n+1$ novas regiões, isto é, $y_{n+1} = y_n + (n+1)$, com $y_0 = 1$.

Resolvendo a equação de diferenças aplicando a transformada $\mathcal{Z}$:

$$\mathcal{Z}\{y_{n+1}\} = \mathcal{Z}\{y_n + (n+1)\}.$$

Tabela 1: Relação entre nº de retas e regiões.

nº de cortes	nº de regiões	regiões acrescentadas
1	2	-
2	4	2
3	7	3
4	11	4

Pelas propriedades de Linearidade e Translação:

$$\mathcal{Z}\{y_{n+1}\} = \mathcal{Z}\{y_n\} + \mathcal{Z}\{n\} + \mathcal{Z}\{1\}.$$

$$z(Y(z) - y_0) = Y(z) + \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1}.$$

Substituindo $y_0 = 1$ e isolando $Y(z)$:

$$zY(z) - z = Y(z) + \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1}.$$

$$Y(z) = \frac{z(z^2 - z + 1)}{(z-1)^3}.$$

Pelo método dos Resíduos, multiplica-se $Y(z)$ por z^{n-1}:

$$Y(z)z^{n-1} = \frac{z^n(z^2 - z + 1)}{(z-1)^3}.$$

Tem-se em $Y(z)$ um pólo em $z = 1$ de ordem 3. E calculando os resíduos:

$$\begin{aligned}
y_n &= \operatorname*{Res}_{z=1} z^{n-1}Y(z) \\
&= \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z\to 1} \frac{d^2}{d^2z} \left[(z-1)^3 Y(z) z^{n-1}\right] \\
&= \frac{1}{2} \lim_{z\to 1} \frac{d^2}{d^2z} \left[z^n(z^2 - z + 1)\right] \\
&= \frac{1}{2} \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz} \left[nz^{n-1}(z^2 - z + 1) + z^n(2z - 1)\right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left[n(n-1)z^{n-2}(z^2-z+1)+2nz^{n-1}(2z-1)+2z^n\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[n(n-1)+2n+2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(n^2+n+2\right).$$

Daí, $y_n = \dfrac{n^2+n+2}{2}$.

Logo o número máximo de regiões em que o plano pode ser dividido com n cortes retos e dado por $y_n = \dfrac{n^2+n+2}{2}$.

Este problema foi proposto pelo geômetra alemão Jakob Steiner(1796-1863) e resolvido pelo mesmo em 1826.

Exemplo 4.18. Castelo de cartas

A figura a seguir mostra castelos de cartas de 1, 2 e 3 andares. Para montar esses castelos, foram usadas 2, 7 e 15 cartas, respectivamente. Quantas cartas serão necessárias para montar um castelo de 5 andares? E um castelo de n andares?

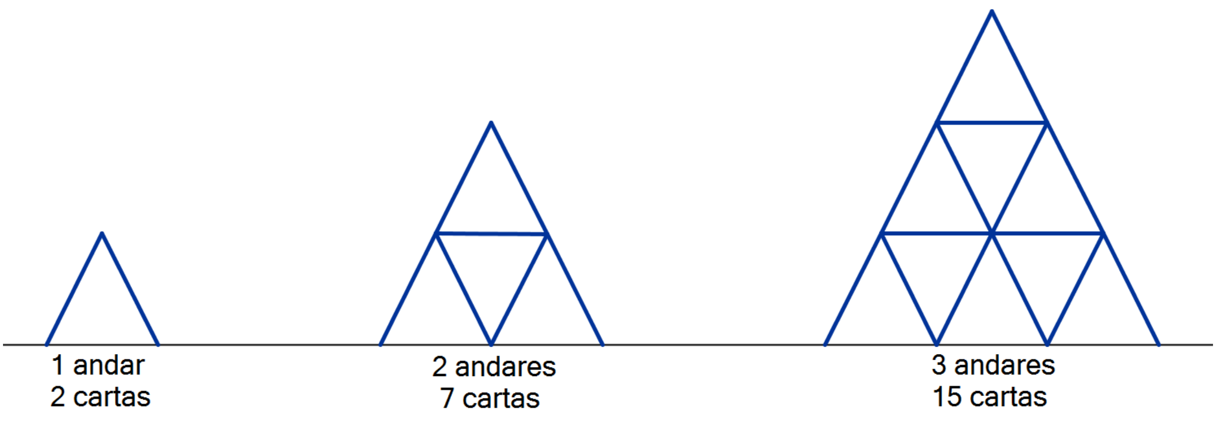

Figura 14: Castelo de cartas de 1, 2 e 3 andares.

Resolução:

Inicialmente tem-se que o número de cartas para $n = 1$ andar é dado por $x_1 = 2$.

Para construir $n = 2$ andares são necessárias: a quantidade anterior ($x_1 = 2$); mais $n = 2$ triângulos (sem base), ou seja, $2n = 2.2 = 4$ cartas; mais $n-1 = 2-1 = 1$ cartas na posição horizontal que significam o número de andares menos 1. Logo, $x_2 = x_1 + 2n + (n-1) = x_1 + 3n - 1 = 2 + 3.2 - 1 = 7$, para $n = 2$.

Para construir $n = 3$ andares são necessárias: a quantidade anterior ($x_2 = 7$); mais $n = 3$ triângulos (sem base), ou seja, $2n = 2.3 = 6$ cartas; mais $n-1 = 3-1 = 1$ cartas na posição horizontal que significam o número de andares menos 1. Logo, $x_3 = x_2+2n+(n-1) = x_2+3n-1 = 7+3.3-1 = 15$, para $n = 3$.

Logo, a quantidade de cartas utilizadas para construir n andares é dada pela relação $x_n = x_{n-1}+(3n-1)$, com $n \geq 2$.

Para responder o item **(a)** pode-se descrever termo a termo até o valor de x_5 ser encontrado, da seguinte maneira:

Tem-se que $x_1 = 2$, $x_2 = 7$ e $x_3 = 15$. Utilizando a recorrência dada por $x_n = x_{n-1}+(3n-1)$ para encontrar o valor de x_4 e em seguida de x_5.

Para $n = 4$ tem-se $x_4 = x_{4-1}+(3\times 4-1) = x_3+12-1 = x_3+11 = 15+11 = 26$.

Para $n = 5$ tem-se $x_5 = x_{5-1}+(3\times 5-1) = x_4+15-1 = x_4+14 = 26+14 = 40$.

Conclui-se que para construir um castelo de 5 andares são necessárias 40 cartas.

Para responder o item (b) nota-se que utilizando a transformada $\mathcal{Z}$ é possível calcular o número de cartas x_n em função dos andares n, segundo a equação de diferenças:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n+(3n+2) \\ x_0 = 0,\ x_1 = 2. \end{cases}$$

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os lados da igualdade:

$$\mathcal{Z}\{x_{n+1}\} = \mathcal{Z}\{x_n+(3n+2)\}.$$

E pelas propriedades de Linearidade e Translação:

$$z\left[X(z)-\sum_{r=0}^{1-1} x_r z^{-r}\right] = X(z)+3\frac{z}{(z-1)^2}+2\frac{z}{z-1}.$$

$$z[X(z)-x_0] = X(z)+3\frac{z}{(z-1)^2}+2\frac{z}{z-1}.$$

$$X(z)[z-1] = \frac{3z}{(z-1)^2}+\frac{2z}{z-1}.$$

$$X(z) = \frac{z(2z+1)}{(z-1)^3}.$$

Multiplicando $X(z)$ por z^{n-1} para aplicar o método dos resíduos:

$$X(z)z^{n-1} = \frac{z^n(2z+1)}{(z-1)^3}$$

o qual possui um pólo $z = 1$ de ordem 3.

Assim,

$$\begin{aligned}
x_n &= \operatorname*{Res}_{z=1} z^{n-1}X(z) \\
&= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}(z-1)^3 z^{n-1}X(z) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}z^n(2z+1) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}[z^n(2z+2)+nz^{n-1}] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}[(2n^2+2n)z^{n-1}+(n^2-n)z^{n-2}] \\
&= \frac{1}{2}(3n^2+n).
\end{aligned}$$

Daí,

$$x_n = \frac{1}{2}(3n^2+n) \tag{13}$$

o que responde o item **(b)**.

Pode-se também comprovar o resultado encontrado no item **(a)** utilizando a equação (13), bastando substituir $n = 5$:

$$x_5 = \frac{1}{2}(3\times 5^2+5) = 40.$$

As Olimpíadas Brasileiras de Matemática (OBM) costumam, em suas provas, colocar algumas questões que envolvem recorrências. Este exemplo do castelo de cartas pode ser encontrado na questão 1 da XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática, 2ª Fase – Nível 1.

Exemplo 4.19. Financiamento de veículos

Considere um financiamento de um carro no valor de R\$32.000,00 que deve ser pago em 4 anos, com parcelas fixas mensais de R$1.100,00. Determine:

(a) Qual o juros mensal pago?

(b) Se o juros mensal fosse o mesmo da poupança[1] de $0,63\%$, quanto deveria pagar por mês para quitar a dívida em 4 anos?

(c) Quanto se deve dar de entrada para termos uma parcela fixa de R$600,00, um juros igual ao da poupança e terminar a dívida em 4 anos?

Resolução:

Considere que d_0 seja a dívida inicial. Assim, a dívida d_n, depois de transcorridos n meses da compra, é dada pela dívida corrigida do mês anterior menos a parcela paga no mês, ou seja:

$$\begin{aligned} d_n &= d_{n-1} + i d_{n-1} - P \\ &= (1+i) d_{n-1} - P \\ &= a d_{n-1} + b \end{aligned}$$

com $a = 1+i$ e $b = -P$, sendo que i é a taxa de juros mensal do financiamento, e P o valor da parcela.

Observe que, $a > 1$, pois $i > 0$. Assim, $d_{n+1} = a d_n + b$ é uma equação de diferenças cuja solução geral será encontrada através da transformada $\mathcal{Z}$.

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os lados da igualdade:

$$\mathcal{Z}\{d_{n+1}\} = \mathcal{Z}\{a d_n + b\}.$$

E utilizando a definição de transformada $\mathcal{Z}$ e a propriedade de Translação:

$$z\left[D(z) - \sum_{r=0}^{1-1} d_r z^{-r}\right] = aD(z) + \frac{bz}{z-1}.$$

$$z\left[D(z) - d_0 z^0\right] = aD(z) + \frac{bz}{z-1}.$$

[1]No presente ano de 2015 a taxa média da poupança é de $0,63\%$ por mês, conforme dados obtidos no site do Portal Brasil em (BRASIL; ABECIP,)

$$D(z) = \frac{z(zd_0 + b - d_0)}{(z-1)(z-a)}.$$

Dividindo $D(z)$ por z e aplicando a decomposição em frações parciais:

$$\begin{aligned}\frac{D(z)}{z} &= \frac{zd_0 + b - d_0}{(z-1)(z-a)}\\ &= \frac{R}{z-1} + \frac{S}{z-a}\\ &= \frac{R(z-a) + S(z-1)}{(z-1)(z-a)}.\end{aligned}$$

Obtendo assim o sistema:

$$\begin{cases} R + S = d_0 \\ -aR - S = b - d_0 \end{cases}$$

cuja solução é $R = \dfrac{b}{1-a}$ e $S = d_0 - \dfrac{b}{1-a}$.

Substituindo R e S tem-se a equação em z dada por:

$D(z) = \dfrac{b}{1-a}\dfrac{z}{z-1} + \left(d_0 - \dfrac{b}{1-a}\right)\dfrac{z}{z-a}$.

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ inversa e observando os itens 1 e 2 na lista de transformadas:

$$\begin{aligned} d_n &= \mathcal{Z}^{-1}\{D(z)\}\\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{b}{1-a}\frac{z}{z-1} + \left(d_0 - \frac{b}{1-a}\right)\frac{z}{z-a}\right\}\\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{b}{1-a}\frac{z}{z-1}\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\left(d_0 - \frac{b}{1-a}\right)\frac{z}{z-a}\right\}\\ &= \frac{b}{1-a} + \left(d_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n.\end{aligned}$$

Substituindo a e b:

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{-P}{1-(1+i)} + \left[d_0 + \frac{P}{1-(1+i)}\right](1+i)^n \\ &= \frac{P}{i} + + \left[d_0 - \frac{P}{i}\right](1+i)^n \qquad (14) \\ &= d_0(1+i)^n - P\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$d_n = d_0(1+i)^n - P\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right).$$

Para $n = 48$, $d_{48} = 0$, $d_0 = 32000,00$, $P = 1100,00$ e substituindo na equação acima:

$$d_{48} = 0 = 32000(1+i)^{48} - 1100\left(\frac{(1+i)^{48} - 1}{i}\right).$$

$$32i = 1,1\left(\frac{(1+i)^{48} - 1}{(1+i)^{48}}\right).$$

E efetuando os cálculos tem-se $i \approx 2,26\%$ ao mês, o que responde o item **(a)**.

Para o item **(b)** tome a taxa $i = 0,63\%$, período de financiamento de 48 meses, dívida inicial $d_0 = 48$ e dívida final $d_{48} = 0$.

Agora basta substituir os valores na equação (14) e isolar P:

$$d_{48} = 32000(1+0,0063)^{48} - P\left(\frac{(1+0,0063)^{48} - 1}{0,0063}\right).$$

Isolando P e fazendo os devidos cálculos tem-se $P \approx 774,62$.

Logo considerando o juros mensal do financiamento igual ao da poupança, a prestação fixa do financiamento a ser paga seria de R$774,62.

Exemplo 4.20. Tabuleiro de dominós

Determine o número máximo de modos de cobrir um tabuleiro $2 \times (n-1)$, $n > 1$, com dominós 2×1 iguais.

Resolução:

Primeiramente varia-se n verificando o número máximo de maneiras para se dispor os dominós nos tabuleiros $2\times(n-1)$.

Admitindo a dimensão do tabuleiro em $2\times(n-1)$, $n\in\mathbb{N}$, $n>1$ e x_n o número de maneiras para se dispor os dominós:

Para $n=2$, num tabuleiro $2\times(n-1)=2\times1$ tem-se 1 maneira de colocar um dominó 2×1, conforme Figura 15. Assim, $x_n=x_2=1$.

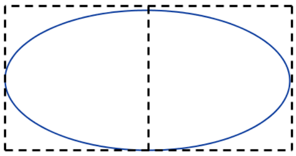

Figura 15: Um dominó em um tabuleiro 2×1.

Para $n=3$, num tabuleiro $2\times(n-1)=2\times2$ tem-se 2 maneiras de colocar dois dominós 2×1: dois deitados ou dois em pé. Assim, $x_n=x_3=2$, conforme Figura 16.

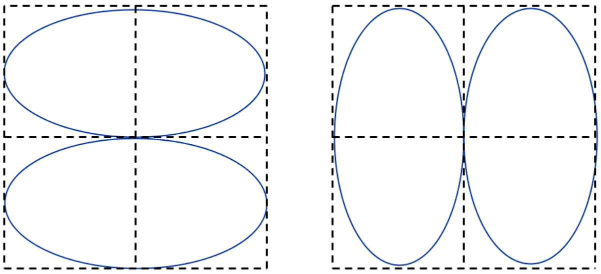

Figura 16: Dois dominós em um tabuleiro 2×2.

Para $n=4$, num tabuleiro $2\times(n-1)=2\times3$ tem-se 3 maneiras de colocar três dominós 2×1: três deitados; dois em pé e um deitado abaixo; ou dois em pé e um deitado acima. Assim, $x_n=x_4=3$, conforme Figura 17.

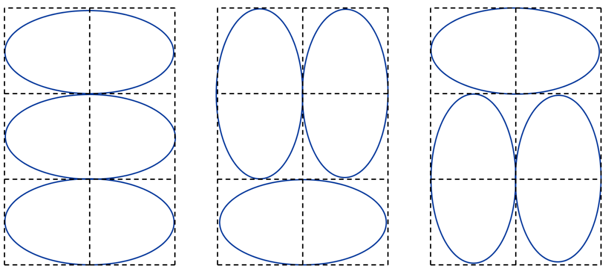

Figura 17: Três dominós em um tabuleiro 2×3.

Para $n=5$, num tabuleiro $2\times(n-1)=2\times4$ tem-se 5 maneiras de colocar quatro dominós 2×1: quatro deitados; um deitado acima, outro deitado abaixo e dois em pé ao centro; dois em pé acima e dois deitados abaixo; dois em pé abaixo e dois deitados acima; ou quatro em pé. Assim, $x_n = x_5 = 5$, conforme Figura 18.

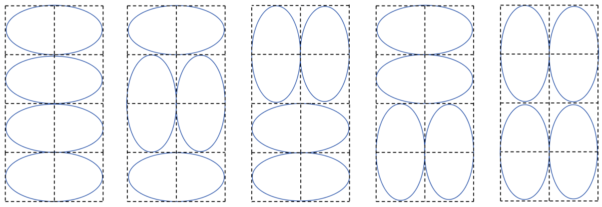

Figura 18: Quatro dominós em um tabuleiro 2×4.

E assim, continuando a distribuição dos dominós para tabuleiros maiores, verifica-se que a quantidade máxima de maneiras para distribuir os dominós é dada pela sequência $\{x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots\} = \{1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\}$.

Portanto, admitindo $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$, pode-se dizer que o número máximo de maneiras para cobrir os tabuleiros se dá pela equação de diferenças:

$$\begin{cases} x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \\ x_0 = 0, x_1 = 1, \end{cases}$$

onde $2 \times (n-1)$ é a dimensão do tabuleiro, $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$, e x_n o número máximo de maneiras para cobrir o tabuleiro.

A resolução da equação se refere ao exemplo 4.10, cuja solução é dada por:

$$f_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}},$$

onde $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Mostrando assim o número máximo x_n de modos para cobrir um tabuleiro $2 \times (n-1)$ com dominós 2×1 iguais.

4.2 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nesta seção tem-se uma lista de exercícios envolvendo as Equações de Diferenças. Propõe-se a utilização da Transformada $\mathcal{Z}$ como método de resolução.

1. Usando Transformada $\mathcal{Z}$, solucione a equação de diferenças $x_{n+1} + 2x_n = (-1)^n$, tendo condição inicial dada por $x_0 = -2$. Em seguida escreva os três primeiros

termos da sequência.

Resposta: $x_n = (-1)^n - 3(-2)^n = \{-2, 5, -11, \ldots\}$.

2. Usando Transformada $\mathcal{Z}$, solucione a equação de diferenças $2y_{n+2} - 3y_{n+1} + y_n = 0$, tendo condições iniciais dadas por $y_0 = 2$ e $y_1 = -1$.

   Resposta: $y_n = \dfrac{-2^{n+2} + 6}{2^n}$.

3. Solucione a equação de diferenças dada por:

$$\begin{cases} x_{n+2} + 5x_{n+1} + 6x_n = 3 \\ x_0 = -2,\ x_1 = 1. \end{cases}$$

   Resposta: $x_n = \dfrac{1}{4} - 6(-2)^n + \dfrac{15}{4}(-3)^n$.

4. Utilize a Transformada $\mathcal{Z}$ para solucionar:

$$\begin{cases} a_{n+1} - a_n = n^2 \\ a_0 = 0. \end{cases}$$

   Resposta: $a_n = \dfrac{n}{6}(2n^2 - 3n + 1)$.

5. Usando Transformada $\mathcal{Z}$, solucione a equação de diferenças $8x_{n+2} + 6x_{n+1} + x_n = 5$, tendo condições iniciais dadas por $x_0 = 0$ e $x_1 = -1$.

   Resposta: $x_n = \dfrac{2^{-2n}(17(-2)^n - 18(-1)^n + 2^{2n}}{3}$.

6. Solucione a equação de diferenças dada por $2y_{n+3} - 3y_{n+2} + y_n = 0$, tendo condições iniciais dadas por $y_0 = 0$ e $y_1 = 1$.

   Resposta: $y_n = -\dfrac{8}{3}\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n + \dfrac{8}{3} - 3n$.

7. Utilize a Transformada $\mathcal{Z}$ para solucionar:

$$\begin{cases} a_{n+2} + 9a_n = 13(2)^{n-2} \\ a_0 = 1,\ a_1 = 2. \end{cases}$$

   Resposta: $a_n = \dfrac{1}{8}[(3+2i)(-3i)^n + (3-2i)(3i)^n + (-i)^n i^n 2^{n+1}]$.

8. Encontre a transformada $\mathcal{Z}$ de $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$, com $x_0 = A$ e $x_1 = B$. Em seguida encontre a solução para a equação de diferenças.

Resposta: $x_n = A + (B - A)n$.

9. Usando Transformada $\mathcal{Z}$, solucione a equação de diferenças $y_{n+2} - \sqrt{3}y_{n+1} + y_n = 0$, tendo condições iniciais dadas por $y_0 = 1$ e $y_1 = \sqrt{3}$.
Resposta: $y_n = \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{6}\right)$.

10. Solucione a equação de diferenças dada por:

$$\begin{cases} (n+2)y_{n+1} - 3y_n = n^2 + 2 \\ y_0 = 1,\ y_1 = 0. \end{cases}$$

Resposta: $y_n = \frac{7}{4}(-1)^n - \frac{4}{5}(-2)^n + \frac{1}{20}3^n$.

11. Resolva as equações de diferenças utilizando a transformada $\mathcal{Z}$ e suas propriedades.

    (a) $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 3n$, dadas condições iniciais: $x_0 = 0$ e $x_1 = 2$.
    Resposta: $x_n = \frac{1}{2}(6n - 3n^2 + n^3)$.

    (b) $(n+1)a_{n+1} + na_n = 2n - 3$, dada condição inicial: $a_1 = 1$.
    Resposta: $a_n = \frac{n - 2(-1)^n - 2}{n}$.

12. Suponha que a população mundial em 2002 era de 6,2 bilhões e cresce com uma taxa de 1,3% ao ano.

    (a) Encontre uma equação de diferenças para a população mundial n anos depois de 2002.

    (b) Encontre uma fórmula explícita para a população muncial n anos depois de 2002.

    (c) Qual a estimativa da população mundial em 2022?

    Respostas:

    (a) $x_{n+1} = 1,013x_n$, $x_0 = 6,2$, onde n é a quantidade de anos e x_n a população em bilhões.

    (b) $x_n = 6,2(1,013)^n$.

    (c) $x_{20} = 8,02$ bilhões.

13. Um modelo para o número de lagostas capturadas por ano baseia-se na hipótese de que o número de lagostas pescadas em um ano é a média do número da pesca dos dois anos anteriores.

(a) Encontre uma equação de diferenças para L_n, em que L_n é o número de lagostas capturadas em n anos, seguindo a hipótese para este modelo.

(b) Resolva a relação de recorrência em (a) e encontre L_n sabendo que $L_0 = 100.000$ e $L_1 = 300.000$.

Respostas:

(a) $L_n = \frac{1}{2}(L_{n-1} + L_{n-2})$, $n > 0$.

(b) $L_n = \dfrac{1400000}{3} - \dfrac{800000\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{3}$.

14. (Questão 01 - AV1MA12, PROFMAT 2013) Paulo economizou durante muitos anos e tem, hoje, R$500.000,00 aplicados em um investimento que rende juros de 1% ao mês. A partir do próximo mês, ele pretende fazer uma retirada mensal de R$1.000,00.

    (a) Seja s_n o saldo que resta da aplicação, após fazer a n-ésima retirada. Exprima s_{n+1} em termos de s_n. Dê também a condição inicial da recorrência obtida.

    (b) Obtenha uma expressão para s_n em função de n.

    (c) Qual é a retirada mensal máxima que Paulo pode fazer de modo que o saldo da aplicação nunca se torne negativo?

    Respostas:

    (a) $s_{n+1} = 1{,}01 s_n - 1000$, com $s_0 = 500000$.

    (b) $s_n = 400000 \times 1{,}01n + 100000$.

    (c) A maior retirada possível é o rendimento mensal, igual a $0{,}01 \times 500000 = 5000$.

15. (Questão 09 - Nível 2 - 1ª Fase, OBMEP 2012) Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforo, seguindo o padrão indicado na figura (19). Um desses triângulos foi construído com 135 palitos de fósforo. Quantos palitos formam o lado desse triângulo?

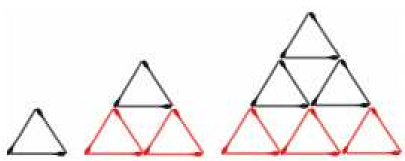

Figura 19: Triângulos com palitos.

Resposta: $n = 9$ palitos.

5 CONCLUSÃO

Durante a pesquisa da transformada $\mathcal{Z}$ como método de resolução de equações de diferenças nota-se no referencial teórico que a utilização de progressões se faz necessária. Sua aplicação em modelos matemáticos propostos ao ensino básico, como a torre de Hanói e números de Fibonacci foi uma motivação para este estudo. As aplicações podem envolver diversas áreas da matemática como geometria, probabilidade, matemática financeira, entre outros temas que abrangem a matemática discreta.

Alcança-se com este trabalho o propósito de desenvolver um material em português sobre a transformada $\mathcal{Z}$. Leva-se em consideração que as referências em inglês encontradas apresentam informações limitadas em exemplos e demonstrações.

Além do objetivo geral, inserção do tema no ensino básico, vê-se a importância nas aplicações em outras áreas além da matemática como engenharia, economia, computação, tornando a exposição de propriedades e demonstrações da transformada $\mathcal{Z}$ essencial para seu aprendizado. Sobretudo, a apresentação das tabelas de propriedades e pares de transformadas se faz necessária para que o método de resolução se torne operacionalmente ágil e eficaz.

A compilação de diversos exemplos, a cada passo da construção da pesquisa, torna-se essencial para a compreensão do tema. Além disso, os exercícios propostos, mediante diversos níveis de complexidade, são uma das principais ferramentas para a fixação e aplicação dos conteúdos estudados. Para o estudo da transformada $\mathcal{Z}$ pode-se explorar primeiramente modelos mais simples: a matemática financeira e progressões, pois além de serem aplicações mais visíveis no cotidiano, são conteúdos vistos no ensino básico. E, após o estudo das definições e demonstrações, explorar aplicações em engenharia, computação, economia, conforme a área a ser focada.

Como expansão do presente estudo, pode-se incluir a definição da transformada de Laplace, transformada de Fourier, para abranger a relação algébrica entre essas e a transformada $\mathcal{Z}$. Pode-se também tratar da transformada $\mathcal{Z}$ bilateral, apesar de semelhante à unilateral, tem algumas propriedades e definição diferentes e com isso envolver um maior número de problemas e exercícios. Pode-se ampliar este trabalho com a elaboração de um material direcionado à disciplina de Cálculo nas engenharias, onde a transformada $\mathcal{Z}$ pode ser apresentada de uma forma mais ampla de modo a abordar as propriedades e demonstrações.

Finalmente, pode-se citar como dificuldade a assimilação do LaTeX. Esta é uma linguagem padrão no meio acadêmico com a finalidade de encorajar os usuários a não se preocuparem com a aparência de seus documentos, mas se concentrar em obter o conteúdo certo, facilitando assim a escrita de textos científicos. Tal objetivo se torna desafiador, tendo em vista que o aprendizado da linguagem é um processo lento e gradual. Por contrapartida, tem-se uma ampla literatura na internet em manuais, fóruns e ajuda sobre o LaTeX. Acredita-se que tais obstáculos foram superados e que a continuidade do aprendizado em LaTeX é de grande valia para o desenvolvimento de outros textos na linguagem proposta.

REFERÊNCIAS

ATTAR, R. A. E. **Lectures Notes on Z-Transform**. 1. ed. Alexandria: Alexandria University, 2005. (Mathematical Series 1).

BÁSICA, S. de E. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 01 de outubro de 2015.

BRASIL, P.; ABECIP. **Caderneta de Poupança - Índice Mensais**. Disponível em: <http://www.portalbrasil.net/poupanca_mensal.htm>. Acesso em: 01 de outubro de 2015.

BROWN, J. W.; CHURCHILL, R. V. **Complex Variables and Applications**. 8. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 2009.

ELAYDI, S. **An Introduction to Difference Equations**. 3. ed. [S.l.]: Springer, 2005. (Undergraduate texts in mathematics).

FLEMMING, D. M.; GONCALVES, M. B. **Cálculo A: funções, limite, derivação, integração**. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2007.

GROVE, A. C. **An Introduction to the Laplace Transform and the Z Transform**. [S.l.]: Prentice-Hall, 1991.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo 1**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2001.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo 4**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2002.

HSU, H. P. **Theory and Problems of Signals and Systems**. Tokio: McGraw-Hill, 1995. (Schaum´s Outline Series).

JESUS, E. A. de; SILVA, E. F. S. e. **Relações de Recorrência**. Belo Horizonte: Monografia (Jornadas de Iniciação Científica), 2006. Disponível em: <http://www.impa.br/opencms/pt/eventos/downloads/jornadas_2006/trabalhos/jornadas_elisa_ de_jesus.pdf>. Acesso em: 08 de outubro de 2015.

JÚNIOR, R. P. M. V. **Recorrências Lineares Aplicadas ao Ensino da Matemática na Educação Básica**. Teresina: Dissertação (Mestrado Profmat), Universidade Federal do Piauí, 2013. Disponível em: <http://www.seduc.pi.gov.br/arquivos/1840618242.dissertacao_raimundo_pio.pdf>. Acesso em: 12 de setembro de 2015.

JURKIEWICZ, S.; LEVENTHAL, G. Oficinas de matemática discreta no ensino médio. **IV Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências**, p. 1–3, 2002. Disponível em:

<http://fep.if.usp.br/~profis/arquivos/ivenpec/Arquivos/Painel/PNL199.pdf>. Acesso em: 12 de outubro de 2015.

KAPLAN, W. **Advanced Calculus**. 5. ed. Boston, MA: Addison Wesley Higher Mathematics, 2003. 390–392 p.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014. (Coleção PROFMAT).

OPPENHEIM, A. V.; WILLSKY, A. **Signals ans Systems**. [S.l.]: Prentice-Hall, 1997. (Signal processing series).

PINHEIRO, T. A.; LAZZARIN, J. R. Recorrência matemática na obmep. **Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM**, v. 37, n. Ed. Especial PROFMAT, p. 36–46, 2015. Disponível em: <http://cascavel.ufsm.br/revistas/ojs-2.2.2/index.php/cienciaenatura/article/viewFile/14415/pdf>. Acesso em: 12 de outubro de 2015.

POULARIKAS, A. D. **The Transforms and Applications**. 2. ed. Boca Raton: CRC Press LLC, 2000. (Electrical Engineering Handbook).

ROSEN, K. H. **Matemática Discreta e Suas Aplicações**. 6. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2010.

SCHEINERMAN, E. R. **Matemática Discreta: uma introdução**. 1. ed. São Paulo: Tradução técnica Alfredo Alves de Farias, Thomson Learning Edições, 2006.

SERTÖZ, A. S. **Lecture Notes on Laplace and Z-transforms**. Ankara: [s.n.], 2004.

STEWART, J. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. **Cálculo**. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

VICH, R. **Z Transform Theory and Applications**. Praga: Springer, 1987.

APÊNDICE A – PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA $\mathcal{Z}$

Operação	$x_n,\ n \geq 0$	$\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z)$
Linearidade (Adição)	$x_n + y_n$	$X(z) + Y(z)$
Linearidade (Multiplicação)	ax_n	$aX(z),\ a \in \mathbb{R}$
Diferenciação	nx_n	$-z\dfrac{d}{dz}X(z)$
Similaridade	$a^n x_n$	$X\left(\dfrac{z}{a}\right),\ a \in \mathbb{R}$
Translação para Direita	x_{n-k}	$z^{-k}X(z),\ k \in \mathbb{N}$
Translação para Esquerda	x_{n+k}	$z^k X(z) - \displaystyle\sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{k-n},\ k \in \mathbb{N}$
Convolução	$x_n * y_n$	$X(z)Y(z)$
Valor Inicial	x_0	$\lim\limits_{z \to \infty} X(z)$
Valor Final	$\lim\limits_{n \to \infty} x_n$	$\lim\limits_{z \to 1}(z-1)X(z)$

APÊNDICE B – LISTA DE TRANSFORMADAS $\mathcal{Z}$

Número	$x_n,\ n \geq 0$	$X(z) = \mathcal{Z}\{x_n\}$	RDC
1	1	$\dfrac{z}{z-1}$	$\|z\| > 1$
2	a^n	$\dfrac{z}{z-a}$	$\|z\| > \|a\|$
3	a^{n-1}	$\dfrac{1}{z-a}$	$\|z\| > \|a\|$
4	e^{an}	$\dfrac{z}{z-e^a}$	$\|z\| > \|e^a\|$
5	n	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$	$\|z\| > 1$
6	n^2	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\|z\| > 1$
7	n^3	$\dfrac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$	$\|z\| > 1$
8	n^k	$(-1)^k\left(z\dfrac{d}{dz}\right)^k\left(\dfrac{z}{z-1}\right)$	$\|z\| > 1$
9	na^n	$\dfrac{az}{(z-a)^2}$	$\|z\| > \|a\|$
10	n^2a^n	$\dfrac{az(z+a)}{(z-a)^3}$	$\|z\| > \|a\|$
11	n^3a^n	$\dfrac{az(z^2+4az+a^2)}{(z-a)^4}$	$\|z\| > \|a\|$
12	n^ka^n	$(-1)^k\left(z\dfrac{d}{dz}\right)^k\left(\dfrac{z}{z-a}\right)$	$\|z\| > \|a\|$
13	$\operatorname{sen} n\omega$	$\dfrac{z\operatorname{sen}\omega}{z^2-2z\cos\omega+1}$	$\|z\| > 1$
14	$\cos n\omega$	$\dfrac{z(z-\cos\omega)}{z^2-2z\cos\omega+1}$	$\|z\| > 1$
15	$\operatorname{senh} n\omega$	$\dfrac{z\operatorname{senh}\omega}{z^2-2z\cosh\omega+1}$	$\|z\| > max\{e^{\omega}, e^{-\omega}\}$

Número	$x_n,\, n \geq 0$	$X(z) = \mathcal{Z}\{x_n\}$	RDC
16	$\cosh n\omega$	$\dfrac{z(z-\cosh\omega)}{z^2-2z\cosh\omega+1}$	$\lvert z\rvert > max\{e^{\omega}, e^{-\omega}\}$
17	$\lvert a\rvert^n \operatorname{sen}\omega n$	$\dfrac{z\lvert a\rvert \operatorname{sen}\omega}{z^2-2z\lvert a\rvert\cos\omega+\lvert a\rvert^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
18	$\lvert a\rvert^n \cos\omega n$	$\dfrac{z(z-\lvert a\rvert \operatorname{sen}\omega)}{z^2-2z\lvert a\rvert\cos\omega+\lvert a\rvert^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$