UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
ESPECIALIZAÇÃO EM EDUCAÇÃO: MÉTODOS E TÉCNICAS DE ENSINO

VIVIANE VANESSA DOHL FEITEN

ESTUDO DO CRESCIMENTO POPULACIONAL A PARTIR DE MODELAGEM MATEMÁTICA: APLICAÇÃO EM DIFERENTES NÍVEIS DE ENSINO

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

MEDIANEIRA
2018

VIVIANE VANESSA DOHL FEITEN

ESTUDO DO CRESCIMENTO POPULACIONAL A PARTIR DE MODELAGEM MATEMÁTICA: APLICAÇÃO EM DIFERENTES NÍVEIS DE ENSINO

Monografia apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Especialista na Pós Graduação em Educação: Métodos e Técnicas de Ensino - Polo UAB do Município de Foz do Iguaçu, Modalidade de Ensino a Distância, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – Câmpus Medianeira.

Orientadora: Profª. Dra. Elizandra Sehn

MEDIANEIRA

2018

TERMO DE APROVAÇÃO

Estudo do crescimento populacional a partir de Modelagem Matemática: aplicação em diferentes níveis de ensino

Por

Viviane Vanessa Dohl Feiten

Esta monografia foi apresentada às 10h do dia 30 de junho de 2018 como requisito parcial para a obtenção do título de Especialista no Curso de Especialização em Educação: Métodos e Técnicas de Ensino - Polo de Foz do Iguaçu, Modalidade de Ensino a Distância, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Medianeira. O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

Profª. Dra. Elizandra Sehn
UTFPR – Câmpus Medianeira
(orientadora)

Prof Dr. Ricardo dos Santos.........
UTFPR – Câmpus Medianeira

Profª. Ma. Eliane Bianchi Wojslaw.......
UTFPR – Câmpus Medianeira

Profª. Ma. Magela Reny Fonticiella.....
UTFPR – Câmpus Medianeira

- O Termo de Aprovação assinado encontra-se na Coordenação do Curso-.

Dedico este trabalho a Deus, meu amparo nos momentos de angústia, à minha família, sempre presente em minha vida e ao meu marido, pessoa maravilhosa que tenho o privilégio de dividir meus dias.

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida, pela misericórdia, pela fortaleza em dias nublados, pela fé e perseverança para vencer os obstáculos.

Aos meus pais, pela orientação, dedicação e incentivo durante toda minha vida.

Ao meu esposo, que não hesitou em me incentivar para que esse trabalho fosse executado da melhor forma possível.

A minha orientadora professora Dra. Elizandra Sehn pelas orientações ao longo do desenvolvimento da pesquisa.

Agradeço aos professores do curso de Especialização em Educação: Métodos e Técnicas de Ensino, professores da UTFPR, Câmpus Medianeira.

Agradeço aos tutores presenciais e a distância que nos auxiliaram no decorrer da pós-graduação.

Enfim, sou grata a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para realização desta monografia.

"O sucesso é ir de fracasso em fracasso sem perder o entusiasmo". (WINSTON CHURCHILL)

RESUMO

FEITEN, Viviane Vanessa Dohl. Estudo do crescimento populacional a partir de Modelagem Matemática: aplicação em diferentes níveis de ensino. 2018. 29f. Monografia (Especialização em Educação: Métodos e Técnicas de Ensino). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Medianeira, 2018.

A multidisciplinariedade é, ou deveria ser, comum nas salas de aulas, pois aborda diversos temas cotidianos junto a um conteúdo específico, dando significado e contextualizando aquela abordagem. Analisando essa necessidade, o objetivo geral deste trabalho foi uma proposta de atividade envolvendo matemática e geografia, criando modelos matemáticos que preveem o aumento populacional com o passar dos anos, baseados em dados populacionais coletados de sites de geografia e estatística. Serão apresentados três modelos matemáticos de população como proposta de atividades para serem aplicados em diferentes níveis de ensino, médio e superior, usando diferentes linguagens matemática. Essa atividade promove a aprendizagem significativa contextualizada e concorda com a proposta multidisciplinar.

Palavras-chave: Tendência educacional. Estimativa. Modelo Matemático.

ABSTRACT

FEITEN, Viviane Vanessa Dohl. Study of the population growth from Mathematical Modeling: application in different levels of education. 2018. 31f. Monograph (Specialization in Education: Teaching Methods and Techniques). Federal Technological University of Paraná, Medianeira, 2018.

Multidisciplinarity is, or ought to be, common in classrooms, because it addresses a number of everyday issues with specific content, giving meaning and contextualizing that approach. Analyzing this need, the general objective of this work is a proposal of activity involving mathematics and geography, creating mathematical models that predict population growth over the years, based on population data collected from geography and statistics sites. Three mathematical models of population will be presented as proposal of activities to be applied in different levels of education, medium and superior, using different mathematical languages. This activity promotes contextualized meaningful learning and agrees with the multidisciplinary approach.

Keywords: Educational trend. Estimation. Mathematical Model.

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Com a inclusão da lógica multidisciplinar nas salas de aula, uma aula de matemática pode estudar o crescimento populacional ao longo dos anos, nesse sentido, nós professores, podemos utilizar uma metodologia alternativa para que os alunos consigam, de certo modo, analisar esse crescimento e até prevê-lo para os próximos anos, utilizando simultaneamente conhecimentos matemáticos e geográficos/sociais, cumprindo com a lógica multidisciplinar.

A Modelagem Matemática, tendência educacional, é a metodologia alternativa encontrada para resolver esse problema, ela pode servir de ferramenta para elaboração de modelos que representem esse aumento/crescimento populacional, como também permite estimar a população em um determinado ano.

Para alcançar o foco matemático é necessário unir conhecimentos diversos que podem fazer ou não parte da cognição do aluno, no caso em que não fizer parte, esse conhecimento prévio é introduzido, dado a oportunidade que foi despertada pela necessidade de se conhecer o conceito, sendo assim, a aprendizagem passa a ser significativa e concreta para o aluno.

Utilizou-se neste trabalho, conhecimentos prévios sobre os modelos populacionais já existentes e conhecidos mundialmente, modelos esses que podem ser estudados em conjunto com demais professores no ambiente escolar. É dado também enfoque no conceito matemático que o modelo está pautado, justificando as afirmações feitas pelos autores do modelo.

A proposta de atividade foi pensada para os alunos de diferentes níveis de ensino, dependendo do método que o professor optar por utilizar.

Neste trabalho tem-se a resolução por meio de três métodos distintos, que envolvem conteúdos também diferentes. Para o modelo de Malthus, o conteúdo predominante/necessário será: função, conceito de função, intepretação de quadros, análise de dados, e outros. Para os demais modelos necessita-se de conhecimentos de Análise Real, vista em cursos de graduação.

Este trabalho traz exemplo de uma aplicação da modelagem matemática na estimação do número de habitantes de Toledo – PR para o ano de 2015 e 2018, baseando-se apenas na população de 2006 a 2014. Será realizada uma estimação para 2015 e duas estimações para 2018, cada uma baseada em um modelo populacional diferente.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 ENSINO DE MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADO AO ENSINO

A modelagem matemática é considerada uma metodologia alternativa que traz para a sala de aula os problemas da vida real e do cotidiano dos alunos para que eles dialoguem com o conhecimento universal, lógico e válido em todos os tempos e lugares da matemática. (BRANDT; BURAK; KLÜBER, 2010).

Nesse sentido, tratar do crescimento populacional vem de encontro com a literatura, pois além de instigar aos alunos para a parte matemática, desempenha um papel importante na sociedade em que vivem.

Assim, considerando o meio social em que o aluno está inserido, o professor pode abstrair para suas aulas o que admitir interessante para que esses alunos se sintam cativados e motivados.

Ao analisar a cidade de Toledo-PR, foi perceptível um vasto crescimento urbano, com os novos loteamentos e a superlotação das escolas. Para confirmar tal percepção pode-se sugerir aos alunos que realizem uma pesquisa e coletem os dados que comprovem ou não suas hipóteses.

Ao sugerir isso, mesmo que sem atentar-se a metodologia, o professor está utilizando-se da Modelagem Matemática, no passo que tange a coleta e interpretação de dados.

Bean (2001, p. 50), acredita que "[...] as situações-problema encontradas na indústria, no setor de saúde e meio ambiente, entre outras, exigem que o profissional crie ou, pelo menos, modifique modelos matemáticos com a finalidade de descrever, entender e resolver os problemas enfrentados".

Ao nos deparar com o crescimento populacional e este ser um problema social, temos a possibilidade de prever utilizando a matemática, e isso em outras palavras pode ser definido como Modelagem Matemática, ou seja, o ato de responder por meio de ferramentas matemáticas.

Biembengut e Hein (2009, p. 24) propõem algumas etapas para um trabalho de Modelagem Matemática escolar, primeiramente os alunos devem "escolher o tema", essa escolha pode partir dos alunos, ou ser levantada pelo professor. Após a escolha do tema é importante que eles "interajam com o tema escolhido" a interação é necessária, pois é nessa etapa que eles vão concretizar qual é o problema a ser resolvido. Feitas as etapas anteriores é a hora de "planejar o trabalho a ser desenvolvido", para que se torne possível definir quais serão os "conteúdos matemáticos" necessários para resolver o problema. E finalmente, porém não menos importante, é imprescindível "validar e estender os trabalhos desenvolvidos".

Para desenvolver o trabalho de modelagem matemática sobre o crescimento populacional, é necessário utilizar os modelos populacionais já existentes como pré requisitos, sendo assim, fez-se uma leitura/entendimento, ou caso necessite, aulas preparatórias para a atividade de modelagem matemática a fim de que os alunos tenham conhecimentos matemáticos prévios e necessários para a conclusão da atividade.

Para os alunos no 1º ano do ensino médio, é interessante que esta atividade seja aplicada no conteúdo de funções exponenciais, inclusive seria uma boa atividade de fixação após definição e exemplificação do referido conceito. Em cursos de matemática é necessário que os alunos tenham cursado a disciplina de Análise Real e/ou tenham noções de sequências, subsequências e suas referidas convergências do Cálculo Vetorial para um estudo mais significativo e aprofundado de um possível modelo matemático.

2.2 MODELOS POPULACIONAIS

Existem três modelos populacionais que foram selecionados para resolução desta atividade, são eles: modelo de Malthus para a primeira série do ensino médio, onde estimaremos a população para 2018, Ford-Walford e Verhulstpara o ensino superior, onde estimaremos a população de 2015, uma vez que admitiremos um erro menor de estimação.

2.2.1 Modelo de Malthus

O modelo de Malthus é baseado no crescimento exponencial da população, onde ela tende a crescer rapidamente com o passar dos anos, sem considerar que um fato interfira nesse crescimento no futuro.

É interessante que se aborde em sala de aula, que o modelo é exatamente uma função exponencial, e que é fácil ver que os dados populacionais possuem esse comportamento. O Modelo de Malthus é bem aceitável na educação básica, pois traz uma estimação aceitável, no entanto, em cursos mais específicos, ele é contestado, pois sabemos que a população não crescerá sempre de forma exponencial e que, se assim o fosse, em um determinado momento, iríamos enfrentar problemas tais como a falta de alimentação e/ou espaço para moradias.

O modelo de Malthus, é dado pela Equação 2.1, no qual P_n = População no ano n; n = ano desejado; α = taxa de crescimento e P_0= População Inicial.

$$P_n = ¿ (2.1)$$

Equação 1:

$$P_n = (\alpha + 1)^n . P_0$$

2.2.2 Modelo de Ford-Walford

O método de Ford-Walford definido por (Sousa e Almeida, 2010) é o método de ajuste de curvas com dados de comportamento assintótico, que implica em considerar que a estabilidade R acontece quando a população de um ano permanecer próxima da população do ano anterior, ou seja, $R_{n+1} \approx R_n$. Esse método trata de sequências e subsequências, por tanto, é necessário que os alunos dominem esses conceitos e por esse motivo é indicado para acadêmicos do ensino superior.

Para obtenção do modelo matemático é necessário admitir $R_{n+1} \approx R_n = R$,e ajustar as sequências utilizando um software computacional simples, como o *Excel*, na ferramenta de ajuste por mínimos quadrados, por exemplo.

2.2.3 Modelo de Verhulst

O modelo de Verhulst, também indicado ao ensino superior pelos mesmos motivos, é um estimador de populações conhecido por considerar um fator de inibição em sua estimação. A Equação de Verhulst pode ser definida de acordo com a Equação 2.

Equação 2:

$$N(t)=N_{0.}\frac{R*\text{¿}}{N_0+(R*-N_0)\cdot e^{rt}}\text{¿}$$

Em que N(t) = População no ano n; N_0 = População inicial; R* = Valor de estabilidade; e^{rt} = taxa de crescimento.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

3.1 TIPO DE PESQUISA

Este trabalho será realizado utilizando o modelo de pesquisa descritiva, que tem como premissa a descrição de características relativas a uma população utilizando-se do estudo, análise, registro e interpretação dos dados coletados.

3.2 INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS

A partir dessa justificativa, serão coletados os dados populacionais, no site do IBGE: "*https://www.ibge.gov.br/index.php*", referentes a cidade de Toledo-PR, que serão analisados e estudados.

A cidade de Toledo fica cerca de 40km de Cascavel, sendo que a última estimativa fornecida pelo IBGE com respeito ao número de habitantes, contabiliza 135.538 habitantes no ano de 2017.

A Figura abaixo representa a cidade de Toledo:

Figura 1 –Cidade de Toledo - PR

Fonte: Brasil, Instituto Brasileiro de Geografia Estatística - IBGE, 2010.

Na Tabela 1, estão apresentados os dados de população de 2006 a 2014 de acordo com IBGE, 2018.

Os dados serão analisados e ajustados de acordo com os modelos populacionais: Malthus, Ford-Walford e Verhulst e em seguida, a partir do modelo obtido, serão realizadas a validações dos dados.

Tabela 1 - População de Toledo-PR de 2006 à 2014

Ano	População
2006	107.034
2007	108.368
2008	115.136
2009	116.774
2010	119.313
2011	120.934
2012	122.502
2013	128.448
2014	130.295

Fonte: Brasil, Instituto Brasileiro de Geografia Estatística - IBGE, 2010.

A criação do modelo populacional visa responder principalmente qual é a população em 2015 e 2018, admitindo que o crescimento se mantenha conforme os anos anteriores.

Não consideramos como dados os anos posteriores a 2014, pois o último censo foi em 2010 e todos os anos posteriores a esse já são estimativas do próprio IBGE e essa sequência de estimativas ocasiona um erro acumulado e em 2018 pode não representar exatamente a população.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 MODELO DE MALTHUS

O Modelo de Malthus é baseado no crescimento exponencial da população, onde ela tende a crescer rapidamente com o passar dos anos, sem considerar que um fato interfira nesse crescimento.

O modelo de Malthus é dado pela Equação 1:

Equação1: $$P_n = (\alpha + 1)^n . P_0$$

Almeja-se investigar neste momento a população toledana em 2018, ou seja, queremos descobrir P_n ,com $n=12$, uma vez que admite-se o critério abaixo para as variáveis auxiliares, conforme apresentado na Tabela 2.

Tabela 2 - Variável Auxiliar.

Ano	Variável Auxiliar
2006	0
2007	1
2008	2
2009	3
2010	4
2011	5
2012	6
2013	7
2014	8
2015	9
2016	10
2017	11
2018	12

Fonte: produzida pela autora

Assim,a Equação 1 pode ser escrita conforme pode-se observar na Equação 3.

Equação 3: $$P_{12} = (\alpha + 1)^{12} \cdot P_0$$
$$P_{12} = (\alpha + 1)^{12} \cdot 107.034$$

Para encontrarmos o valor de alfa, utilizamos a taxa de crescimento dos anos de 2006 à 2014, motivo descrito acima, e encontramos $\alpha = 0{,}024886445$.

Logo,

$$P_{12} = (0{,}024886445 + 1)^{12} \cdot 107.034$$
$$P_{12} = 1{,}3431019852583933828602943825671 \cdot 107.034$$
$$P_{12} \simeq 143.757$$

Equação 4:

Desse modo, concluímos que no ano de 2018, segundo o modelo de Malthus, a população toledana será aproximadamente 143.757 habitantes.

Considerando a continuidade do modelo populacional encontrado, reescrito como $P(x)=(1{,}024886445)^{x-2006}\cdot 107.034$, onde x representa o ano, na qual deseja-se investigar a população.

Tabela 3 - Validação de Malthus.

Ano	População	Pop. Estimada
2006	107.034	107.034
2007	108.368	109.697,70
2008	115.136	112.427,69
2009	116.774	115.225,60
2010	119.313	118.093,16
2011	120.934	121.032,10
2012	122.502	124.044,14
2013	128.448	127.131,16
2014	130.295	130.294
2015	132.077	133.537,58
2016	133.824	136.860
2017	135.538	140.266
2018	--	143.757

Fonte: produzida pela autora

Ao analisar o quadro de validação é possível observar que o modelo matemático é válido e representou a população toledense, pois embora nos anos anteriores existiu uma diferença entre a população real e a estimada, ao considerar o tamanho populacional e o método utilizado pode-se dizer que o modelo atendeu as necessidades.

A partir de dados que revelam a população no período de 2006 a 2014, investiga-se a população toledana, segundo agora, o método de Ford Walford.

A proposta de ensino aqui apresentada é direcionada ao Ensino Médio, dado que a linguagem utilizada envolve potência e taxa de crescimento, conteúdos já vistos por esse público.

4.2 MODELO DE FORD WALFORD

Para isso, analisaremos os dados na Tabela 4:

Tabela 4 – População Toledana 2006 à 2015.

Ano	População
2006	107.034
2007	108.368
2008	115.136
2009	116.774
2010	119.313
2011	120.934
2012	122.502
2013	128.448
2014	130.295
2015	?

Fonte: Instituto Brasileiro de Geografia Estatística (IBGE)(2018)

Realizada a análise prévia, começaremos a realizar os passos sugeridos para a resolução segundo o método de Ford-Walford. Na Tabela abaixo é possível verificar a criação de uma subsequência de $R_{n,}$ chamada de $R_{n+1,}$, porém só utilizaremos os dados até 2014 por consequência do acúmulo de erro nos estimadores e também como estimaremos, com esse modelo, o ano de 2015, conseguiremos validar com o dado real disponibilizado no IBGE e concluir a respeito da robusticidade do método.

Tabela 5 – Parâmetros de Ford Walford

Var. Aux	Ano	R_n(pop)	R_{n+1}
0	2006	107.034	108.368
1	2007	108.368	115.136
2	2008	115.136	116.774
3	2009	116.774	119.313
4	2010	119.313	120.934
5	2011	120.934	122.502
6	2012	122.502	128.448
7	2013	128.448	130.295
8	2014	130.295	-

Fonte: autoria própria.

É fácil ver que a última linha da Tabela 5 não possui um elemento correspondente pelo modo como foi construída. Iniciamos a construção da quarta coluna a partir do segundo elemento da terceira coluna, o que caracterizou a quarta coluna como subsequência da terceira.

Pode-se observar na Figura 2 o gráfico que representa a quarta coluna da Tabela 5 em função da terceira coluna da mesma tabela, no qual a reta representa o ajuste linear entre as duas sequências R_n e R_{n+1}.

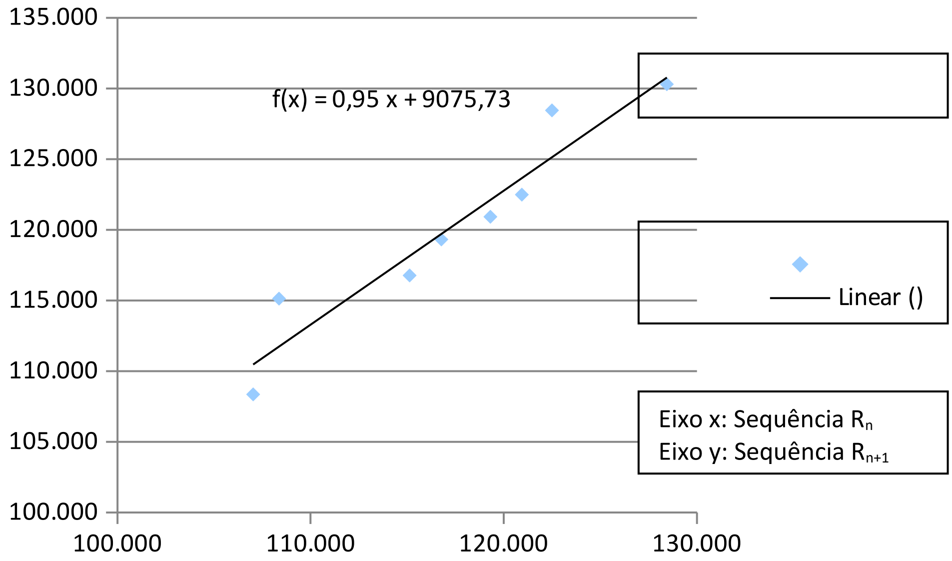

Figura 2 – Mínimos Quadrados: Função Linearizada

Fonte: produzida pela autora

De acordo com a Figura 2 temos que $R_{n+1}=0{,}9474\cdot R_n+9075{,}7$.

O segundo passo do método exige que encontremos R^*,ou seja, o valor de estabilidade ou limitante. Como o valor de estabilidade pode ser considerado o valor máximo que a função anteriormente encontrada alcança, ele pode ser visto como o limite desta mesma função.

Devemos calcular agora o limite da função $R_{n+1}=0{,}9474\cdot R_n+9075{,}7$.

Como $\lim\left(R_n¿+1\right)=\lim R_n¿$pelos teoremas da análise referentes a sequências e subsequências convergentes, temos que Rn=Rn+1, sendo assim, temos que a Equação abaixo é verdadeira:

$R=0{,}9474\cdot R^{¿}+9075{,}7$ .Efetuando as operações necessárias a fim de isolar R*, temos que $R*¿172541{,}82$.

O terceiro passo do método exige a subtração da população do ponto de estabilidade encontrado, então fazendo: R^*-R_n, temos a Tabela 6:

Tabela 6 – Ford Walford - Estimativas

Var. Aux	R_n(Pop.)	R^*- R_n
0	107.034	65.507,82
1	108.368	64.173,82
2	115.136	57.405,82
3	116.774	55.767,82
4	119.313	53.228,82
5	120.934	51.607,82
6	122.502	50.039,82
7	128.448	44.093,82
8	130.295	42.246,82

Fonte: produzida pela autora

Pode-se observar na Figura 3, o gráfico do tipo exponencial que relaciona a diferença evidenciada na Tabela 6 com a variável auxiliar correspondente.

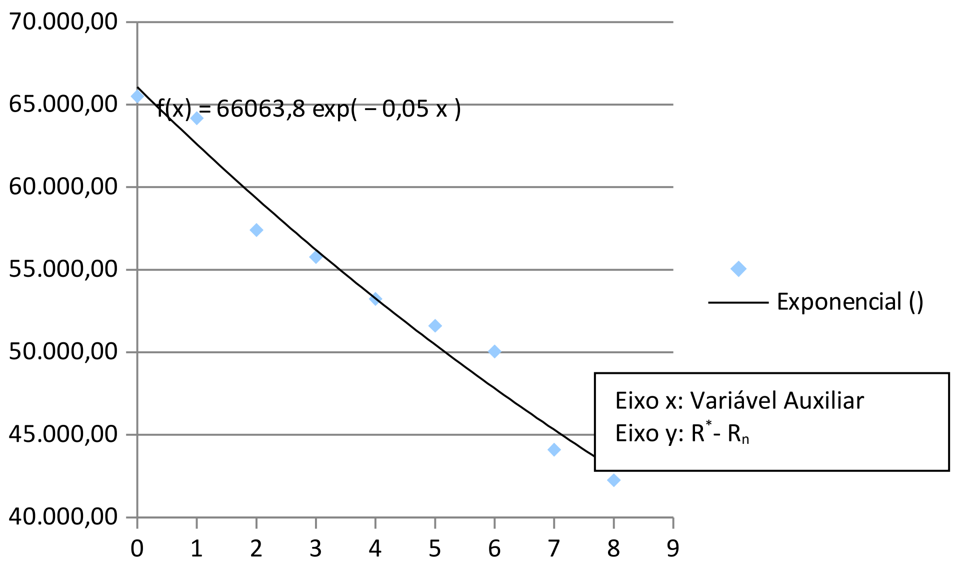

Figura 3 – Ajuste de Dados pela Função Exponencial

Fonte: produzida pela autora

Onde a Equação é identificada como sendo:

$$R^* - (Rn) = 66064\ e^{-0{,}054(\text{var. auxiliar})}$$

Substituindo o valor de estabilidade na função e fazendo as adaptações necessárias chegamos a:

$$R_n = 172.541{,}251 - 66064\ e^{-0{,}054(\text{var. auxiliar})}$$

Para responder ao problema inicial ainda nos resta trocar a variável auxiliar presente na função para uma relação que inclua o ano no qual desejamos investigar a população. Para isso chegamos em

$$\text{Variável Auxiliar} = x - 2006$$

Onde x é o ano.

Logo, nosso modelo final consiste em:

$$R(x) = 172.541{,}251 - 66064\ e^{-0{,}054(x-2006)}$$

Tabela 7 - Validação de Ford Walford

Ano	População	População Estimada
2006	107.034	106.477,25
2007	108.368	109.950.10
2008	115.136	113.240,38
2009	116.774	116.357,70
2010	119.313	119.311,15
2011	120.934	122.109,35
2012	122.502	124.760,44
2013	128.448	127.272,18
2014	130.295	129.651,88
2015	132.077	131.906,48

Fonte: Produzida pela autora

Analisando o quadro de validação é possível observar que o modelo matemático é válido e representou a população toledense com um erro de apenas 170 habitantes aproximadamente.

Podemos observar o crescimento populacional estimado no gráfico abaixo:

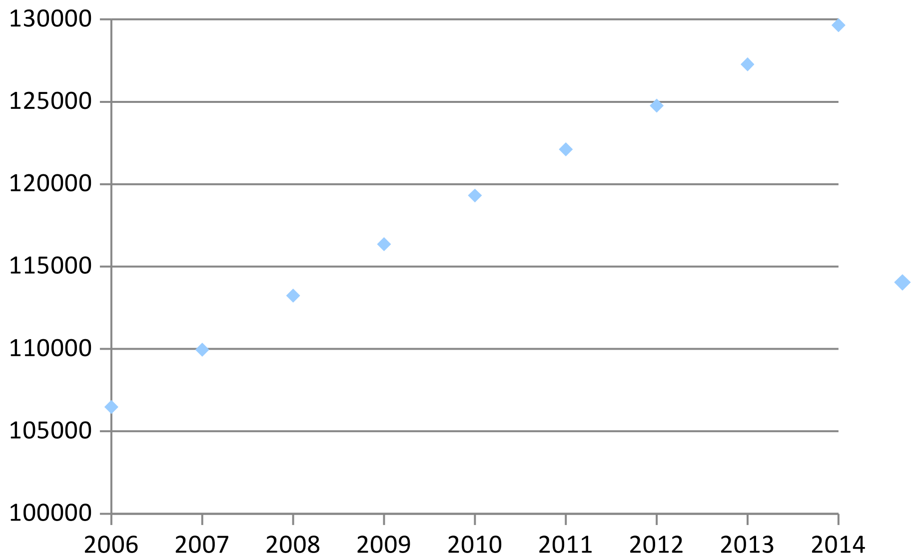

Figura 4 - Validação de Ford Walford

Fonte: Produzida pela autora

A proposta de ensino aqui apresentada é direcionada ao Ensino Superior, dado que a linguagem utilizada envolve sequências e subsequências, conteúdos de cálculo 3 e/ou análise real que são vistos por esse público.

4.3 MODELO DE VERHULST

O modelo de Verhulst é um estimador de populações conhecido por considerar um fator de inibição em sua estimação. A Equação de Verhulst pode ser definida pela Equação 5:

Equação 5:

$$N(t)=N_{0}.\frac{R*¿}{N_0+(R*-N_0)\cdot e^{rt}}¿$$

Iremos utilizar para estimar a população toledana também através deste método para comparar com os demais modelos posteriormente.

Na Equação acima, já é de nosso conhecimento N(t), N_0, e^{rt} e R* (por Ford-Walford), basta encontrarmos r, isolando-o na Equação:

Encontrando r:

$$N(8)=\frac{107.034\cdot 172.541,25}{107.034+(172.541,25-107.034)\cdot e^{r8}}$$

$$130295=\frac{1,846778015\times 10^{10}}{107.034+(65.507,25)\cdot e^{r8}}$$

$$130295\cdot(107.034+(65.507,25)\cdot e^{r8})=1,846778015\times 10^{10}$$

$$(107.034+(65.507,25)\cdot e^{r8})=141.738,21$$

$$(65.507,25)\cdot e^{r8})=34.704,21$$

$$e^{r8}=0,529776627$$

$$r=-0,079412477 \quad .$$

Logo temos como modelo:

$$N(t)=\frac{107.034\cdot 172.541,25}{107.034+(172.541,25-107.034)\cdot e^{(-0,079412477.t)}}$$

Verificaremos agora a população de Toledo em 2015:

$$N(9)=132.776,85$$

Segundo o modelo de Verhulst, a população Toledana em 2015 será de aproximadamente 132.776,85.

Tabela 8 - Validação de Verhulst

Ano	População	População Estimada
2006	107.034	107.034
2007	108.368	110.228,84
2008	115.136	113.354,04
2009	116.774	116.402,32
2010	119.313	119.367,26
2011	120.934	122.243,26
2012	122.502	125.025,64
2013	128.448	127.710,54
2014	130.295	130.295
2015	132.077	132.776,85

Fonte: autoria própria.

Ao analisar o quadro de validação é possível observar que o modelo matemático é válido e representou a população toledense com um erro de apenas

699 habitantes, o que é considerado aceitável quando analisamos a população inteira.

A proposta de ensino aqui apresentada é direcionada ao Ensino Superior, da mesma maneira que o método de Ford Walford, dado que a linguagem utilizada também envolve sequências e subsequências.

5 CONCLUSÃO

Os modelos utilizados foram significativos e suficientes para estimar a população de Toledo em 2015 e 2018, além disso, os pré-requisitos selecionados dependem da intenção do professor, caso seja aplicado em turmas de ensino médio, o modelo de Malthus bem representa e pode ser utilizado como estimador, caso seja utilizado em Cursos de Licenciatura, Ford-Walford e Verhulst podem ser utilizados já que necessitam de conhecimentos de análise matemática, como: sequências, subsequências, convergência e limites, porém deve-se considerar o ano do último censo demográfico e caso esse tenha sido há muito tempo, como foi nosso caso, aconselha-se a não utilizar todas as estimativas dadas a fim de minimizar o erro de estimação acumulado.

A modelagem matemática permite que um mesmo tema seja alvo de estudos nos mais diversos níveis cognitivos, basta uma rigorosa seleção de conteúdos matemáticos que podem ou não ser utilizados para determinado fim.

O professor tem papel fundamental nas primeiras atividades de modelagem matemática, mas pode ir gradativamente colocando as tarefas sob responsabilidade do aluno.

Atualmente sabe-se que em 2015, Toledo contava com 132.077 habitantes e esse número pode confirmar as boas estimações obtidas pelos métodos utilizados, sendo assim podemos concluir que o método de Ford-Walford foi o que mais aproximou deste valor, com um erro de aproximadamente 170 habitantes, o que é considerado pequeno ao considerar a população como um todo.

É importante nas primeiras atividades de modelagem estimar um número que já exista, justamente para que o aluno possa avaliar o resultado e confiar nas técnicas que ele realizou.

Com a aquisição da "prática de modelar" é possível estimar qualquer ano, desde que tenha sido despertado no aluno o censo crítico e a desconfiança das estimações de longa data e também a aceitação de que possam surgir fatores desconhecidos que alterem esse comportamento.

A modelagem matemática pode ser utilizada em diversos níveis de ensino e também pode ser combinada com outras disciplinas além da geografia, basta criatividade e iniciativa do professor para propor.

6 REFERÊNCIAS

BRANDT, Celia Finck; BURAK, Dionísio; KLÜBER, Tiago Emanuel. **Modelagem Matemática uma Perspectiva para a Educação Básica**. Ponta Grossa, Editora UEPG, 2010.

BEAN, D. **O que é modelagem matemática?** In: Educação Matemática em Revista/Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ano 8, n. 9, abr., 2001. p. 49-57.

BIEMBENGUT, M. S. **30 Anos de modelagem matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais**. Alexandria – Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 2, n. 2, p. 7-32, jul. 2009.

BRASIL, IBGE. **Censo Demográfico**. 2010. Disponível em: <www.ibge.gov.br>. Acesso em 20 dez. 2017.

SOUSA, Bárbara Nivalda Palharini Alvim; DE ALMEIDA, Lourdes Maria Werle. **Modelagem Matemática E Pensamento Matemático:** Algumas Relações. Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador-BA. 2010.