UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ADARA TESTA GOMES

INTRODUÇÃO A TOPOLOGIA FUZZY

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CURITIBA

2019

ADARA TESTA GOMES

INTRODUÇÃO A TOPOLOGIA FUZZY

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito para aprovação na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso.

Orientadora: Patrícia Manholi, Dra.

CURITIBA

2019

Ministério da Educação
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Câmpus Curitiba
Diretoria de Graduação e Educação Profissional
Departamento Acadêmico de Matemática
Coordenação do curso de **Licenciatura em Matemática**

TERMO DE APROVAÇÃO

"Introdução à Topologia Fuzzy"

por

"Adara Testa Gomes"

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 10h do dia 06 de dezembro de 2019 na sala E-303 como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba. O(a) estudante foi arguido pela Banca de Avaliação abaixo assinados. Após deliberação, de acordo com o parágrafo 2º do art. 24 do Regulamento do Trabalho de Conclusão de Curso para os Cursos de Graduação da UTFPR, a Banca de Avaliação considerou o trabalho ____________________ (aprovado ou reprovado).

________________________ Profª Drª Patricia Aparecida Manholi **(Presidente - UTFPR/Curitiba)**	________________________ Prof. Dr. Eduardo Hoefel **(Avaliador 2 – UFPR)**
________________________ Prof. Dr. Christian Manuel Surco Chuno **(Avaliador 3 – UTFPR/Curitiba)**	________________________ Profª Drª Diane Rizzotto Rossetto **(Professor Responsável pelo TCC – UTFPR/Curitiba)**
________________________ Profª Drª Neusa Nogas Tocha **(Coordenação do curso de Licenciatura em Matemática – UTFPR/Curitiba)**	

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso"

RESUMO

GOMES, Adara Testa. INTRODUÇÃO A TOPOLOGIA FUZZY. 36 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2019.

Este trabalho faz um estudo sobre a topologia fuzzy. Ao invés de usar conjuntos ordinários como na topologia geral, os abertos presentes na topologia fuzzy são os conjuntos fuzzy. Para esse estudo, é definido conjuntos fuzzy, ponto fuzzy, imagem e pré-imagem entre esses conjunto, bem como alguns resultados que são consequência dessas definições. A partir disso, são definidos Topologia Fuzzy, vizinhança, base, fecho, interior, ponto aderente, ponto de fronteira e de acumulação. Por fim, é apresentado o conceito de funções fuzzy contínuas, e alguns resultados que diferem da topologia geral, assim é dada uma nova definição para a topologia fuzzy para que essa diferença seja solucionada.

Palavras-chave: Conjuntos fuzzy, teoria fuzzy, topologia fuzzy, espaço topológico fuzzy

ABSTRACT

GOMES, Adara Testa. . 36 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2019.

This term paper is a study on fuzzy topology. Instead of using ordinary sets like ordinary topology, the open ones in fuzzy topology are fuzzy sets. For this study, we define fuzzy sets, fuzzy point, image and pre-image between these sets, as well as some results that are a consequence of these definitions. From these consequences, the definition of Fuzzy Topology is given, as well as neighborhood, base, closure, interior, adherence point, boundary point and accumulation. Finally, the concept of continuous functions, which differs from the ordinary topology, is presented, so a new definition for the fuzzy topology is presented to solve this difference.

Keywords: Fuzzy sets, fuzzy theory, fuzzy topology, fuzzy topological spaces

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Durante a construção da matemática, foi introduzido a ideia de conjuntos e funções, entretanto, para decifrar ou classificar algo da natureza, esses conceitos matemáticos acabavam não sendo suficientes, pois possuem uma estrutura rígida e exata. No mundo físico existem vários conjuntos ou classes de objetos que não possuem critérios de associação precisamente definidos. Para contornar esse problema, em 1965, o matemático Lotfali Askar-Zadeh introduziu a Teoria Fuzzy **[8]**.

O conceito fuzzy pode ser usado e entendido como situações que não possuem conclusões exatas, e sim um grau de incerteza. Um exemplo dado por Zadeh para essas situações, é a classe de animais. Claramente essa classe inclui cães, cavalos, pássaros,como seus membros. No entanto, objetos como estrelas do mar e bactéria, possui um status ambíguo em relação à classe de animais. Se definirmos um conjunto A como sendo o conjunto de todos os números muito pequenos, quais números pertenceriam a esse conjunto? Poderíamos dizer que 10^{-10} está em A, mas o número 10^{-10000} parece pertencer mais ao conjunto A do que o primeiro. Para trabalhar com esse grau de incerteza é que foi definido conjunto fuzzy.

Na ideia básica de conjunto, podemos pensar em uma função com imagem em $\{0,1\}$, na qual $f(x) = 0$ caso x não pertença a um determinado conjunto A, e $f(x) = 1$ caso x pertence a esse conjunto A. Entretanto, como explicitado anteriormente, existem situações em que o grau de pertinência não é exato, e para isso a imagem da função é ampliada para o intervalo fechado $[0,1]$ e quanto mais próximo de 1 o valor da imagem for, mais o elemento pertence ao conjunto, o contrário acontece caso a imagem seja próxima de 0. Os conjuntos que possuem essa última função, são chamados de conjuntos fuzzy, sendo então uma extensão do conceito matemático básico sobre conjuntos fuzzy.

Depois de Zadeh ter definido os conjuntos fuzzy, Chang, 1968, desenvolveu a teoria da topologia fuzzy **[1]**, nessa teoria os conjuntos da topologia geral foram substituídos pelos conjuntos fuzzy. A diferença entre a topologia padrão e a topologia fuzzy, definida por Chang, é que na topologia padrão, as funções constantes são funções contínuas, enquanto que na topologia fuzzy as funções constantes não são funções contínuas. Por esse motivo, Lowen apresenta uma nova definição para a topologia fuzzy, acrescentando então todas as constantes nessa topologia, para que assim, as funções constantes sejam funções contínuas.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: no primeiro capítulo são dadas as definições de conjunto fuzzy e das operações entre esses conjuntos. Já no capítulo dois, é apresentada a definição de topologia fuzzy, dada por Chang, e em seguida os conceitos de base, fecho, interior e os pontos de aderencia, de fronteira e de acumulação, da mesma forma que é feito no estudo da topologia geral. No capítulo 3, é definido função contínua fuzzy. Além disso, é mostrado que as funções constantes não são contínuas, sendo que na topologia geral elas são contínuas. Para contornar esse problema, é apresentada uma nova forma de definição para a topologia fuzzy dada por Lowen.

2 CONJUNTOS FUZZY

Neste capítulo será definido conjunto fuzzy, operações com esses conjuntos e também alguns resultados interessantes.

Definição 2.1. *[8] Um conjunto fuzzy em X é uma função A do conjunto não vazio X no intervalo* $[0,1]$*. A imagem* $A(x)$ *de cada* $x \in X$ *é chamada* ***grau de pertinência*** *de x em A. Denotamos por* I^X *o conjunto de todos os conjuntos fuzzy em X.*

Um conjunto *fuzzy* $A \in I^X$ será dito vazio, quando $A(x) = 0, \forall x \in X$ e será denotado por $A = \overline{0}$, e quando $A(x) = 1, \forall x \in X$, denotamos $A = \overline{1}$. Se A assume apenas valores 1 e 0, A é dito **conjunto crisp**.

Exemplo 2.2. *[3] Seja a função* $A : \mathbb{R} \to [0,1]$ *uma função definida por* $A(x) = |sen(x)|$*. Temos que A é um conjunto fuzzy, em que o domínio* $X = \mathbb{R}$ *e a imagem é o intervalo* $[0,1]$*. Da mesma forma temos o conjunto fuzzy definido por* $B(x) = |cos(x)|$*, onde* $B : \mathbb{R} \to [0,1]$*.*

Exemplo 2.3. *[6] Seja* $P \subset X$ *um conjunto fuzzy com função*

$$P(x) = \begin{cases} \lambda, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$$

onde $0 < \lambda \leq 1$*. O conjunto fuzzy P é chamado de* ***ponto fuzzy*** *que será denotado por* P_y^λ*. Como o suporte de uma função é o menor subconjunto fechado do seu domínio, onde a função não é nula, podemos dizer que* P_y^λ *tem suporte em y, ou seja,* $supp(P_y^\lambda) = \lambda$*.*

2.1 OPERAÇÕES COM OS CONJUNTOS FUZZY

Aqui definiremos a união, interseção e complementar de conjuntos fuzzy, e demonstraremos algumas propriedades bem conhecidas de Teoria de Conjuntos, mas aplicadas aos conjuntos fuzzy.

Sejam A, B conjuntos fuzzy em X, a união, intersecção e o complementar de conjuntos fuzzy são conjuntos fuzzy, definidos da seguinte forma:

- $A \cup B$ por $A \cup B(x) \doteqdot max[A(x), B(x)]$
- $A \cap B$ por $A \cap B(x) \doteqdot min[A(x), B(x)]$
- A^C por $A^C(x) \doteqdot 1 - A(x)$

Note que quando $A \cup B = \overline{0}$, temos que $max[A(x), B(x)] = 0$, isto é $A = \overline{0}$ e $B = \overline{0}$. E quando $A \cap B = \overline{0}$, segue que $min[A(x), B(x)] = \overline{0}$, isto é existe $x \in X$ tal que $A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$. O conjunto fuzzy $A + B$ é definido pela função $(A+B)(x) \doteqdot A(x) + B(x)$, e só é significativa quando $A(x) + B(x) \leq 1, \forall x \in X$. A diferença absoluta entre A e B, denotada por $|A - B|$, é definida por $|A - B|(x) \doteqdot |A(x) - B(x)|$.

Além disso, definimos

i) $A \subset B$ se, e somente se $A(x) < B(x), \forall x \in X$

ii) $A = B$ se, e somente se $A(x) = B(x), \forall x \in X$

Caso $A \subseteq B$ temos que $A(x) \leq B(x)$.

De acordo com Chang **[1]**, a generalização da união e da intersecção de uma família $\{A_j\}_{j \in J}$ a qual A_j são conjuntos fuzzy são definidas pelas seguintes funções, respectivamente:

$$\cup A_j(x) \doteqdot sup[A_j(x)], j \in J, \forall x \in X$$

$$\cap A_j(x) \doteqdot inf[A_j(x)], j \in J, \forall x \in X$$

Exemplo 2.4. *[6] Sejam os conjuntos fuzzy $A, B \in I^X$ definidos da seguinte forma:*

$$A(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 2x - 1, & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4} \\ -4x + 2, & \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Como $A^C(x) = 1 - A(x)$, segue que:

$$A^C(x) = \begin{cases} 1 - 0, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 1 - (2x - 1), & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow A^C(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ -2x + 2, & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Da mesma forma temos que:

$$B^C(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4} \\ 4x-1, & \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

A intersecção e a união de A e B será:

$$A \cup B(x) = max[A(x), B(x)] = \begin{cases} max[0,1], & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4} \\ max[0,-4x+2], & \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ max[2x-1,0], & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4} \\ -4x+2, & \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 2x-1, & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

$$A \cap B(x) = min[A(x), B(x)] = \begin{cases} min[0,1], & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4} \\ min[0,-4x+2], & \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ min[2x-1,0], & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4} \\ 0, & \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Como $A \cap B(x) = 0$ para todo $x \in X$, segue que $A \cap B = \emptyset$

2.1.1 LEIS DE DEMORGAN

As leis de DeMorgan também são válidas para conjuntos *fuzzy*, isto é, dados os conjuntos A, B e $C \in I^X$ segue que:

(1) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

(2) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Com efeito, note que

(1) $1 - max[A(x), B(x)] = min[1 - A(x), 1 - B(x)]$

(2) $1 - min[A(x), B(x)] = max[1 - A(x), 1 - B(x)]$

Sem perda de generalidade, vamos considerar que $max[A(x), B(x)] = A(x)$. Assim, segue que

$$1 - max[A(x), B(x)] = 1 - A(x).$$

Por outro lado, $B(x) \leq A(x) \Rightarrow -A(x) \leq -B(x) \Rightarrow 1 - A(x) \leq 1 - B(x) \Rightarrow 1 - A(x) = min[1 - A(x), 1 - B(x)]$, logo $1 - max[A(x), B(x)] = min[1 - A(x), 1 - B(x)]$. De forma análoga temos que $1 - min[A(x), B(x)] = max[1 - A(x), 1 - B(x)]$.

2.1.2 LEIS DE DISTRIBUTIVIDADE

A distributividade da união e da intersecção também é satisfeita para os conjuntos fuzzy, isto é:

(1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

De fato, temos que

(1) $max[A(x), min[B(x), C(x)]] = min[max[A(x), B(x)], max[A(x), C(x)]]$

(2) $min[A(x), max[B(x), C(x)]] = max[min[A(x), B(x)], min[A(x), C(x)]]$

para verificar as igualdades **(1), (2)** é preciso considerar seis casos: $A(x) < B(x) < C(x)$, $A(x) < C(x) < B(x)$, $B(x) < A(x) < C(x)$, $B(x) < C(x) < A(x)$, $C(x) < A(x) < B(x)$, $C(x) < B(x) < A(x), \forall x \in X$. A igualdade **(1)** para o caso $A(x) < B(x) < C(x)$, é verificada da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
A \cup (B \cap C) &= max[A(x), min[B(x), C(x)] \\
&= max[A(x), B(x)] \\
&= B(x) \\
&= min[B(x), C(x)] \\
&= min[max[A(x), B(x)], max[A(x), C(x)]] = (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned}
$$

Para os outros casos a demonstração é análoga.

2.2 PRODUTO CARTESIANO, IMAGENS E PREIMAGENS

Agora será definido o produto cartesiano entre conjuntos fuzzy. O produto $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ de duas funções $f_1 : X_1 \to Y_1$ e $f_2 : X_2 \to Y_2$ é definida por $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$, para cada $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$. Como os conjuntos fuzzy são funções, também é possível definir o produto cartesiano, entretanto sua definição é dada de forma diferente do produto entre funções convencionais.

Definição 2.5. *[6] O produto cartesiano de dois conjuntos fuzzy, $A \subset I^X$, $B \subset I^Y$, denotado por $A \times B$ em $X \times Y$ será a função $(A \times B)(x, y) = min[A(x), B(y)], \forall (x, y) \in X \times Y$.*

Observe que $A \times B$ é diferente de $A \cap B$, pois $A \cap B$ é definido quando os dois conjuntos fuzzy pertencem a I^X.

Proposição 2.6. *[6]Sejam $A : X \to [0,1]$ e $B : Y \to [0,1]$ conjuntos fuzzy, então $1-(A\times B) = (A^C \times \overline{1}) \cup (\overline{1} \times B^C)$.*

Demonstração. De fato, temos que

$$\begin{aligned} 1-(A\times B) &= 1-min[A(x),B(y)] \\ &= max[1-A(x),1-B(y)] \end{aligned}$$

Note que $1-A(x) = min[1-A(x),\overline{1}(y)] = (A^C \times \overline{1})(x,y)$, então segue que

$$\begin{aligned} max[1-A(x),1-B(y)] &= max[(A^C \times \overline{1})(x,y),(B^C \times \overline{1})(x,y)] \\ &= ((A^C \times \overline{1})(x,y) \cup (\overline{1} \times B^C)(x,y) \\ &= (A^C \times \overline{1}) \cup (\overline{1} \times B^C), \end{aligned}$$

com $(x,y) \in X \times Y$ □

Para mostrar alguns resutados envolvendo o produto cartesiano, é preciso definir função entre esses conjuntos, bem como algumas propriedades.

Definição 2.7. *[6] Sejam $A : X \to [0,1]$, $B : Y \to [0,1]$ conjuntos fuzzy, e seja a função $f : X \to Y$. Então $f(A)$ é um conjunto fuzzy em Y, definido por*

$$f(A)(y) = \begin{cases} sup\{A(x) | x \in f^{-1}(y)\}, & se f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & se f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

e $f^{-1}(B)$ é um conjunto fuzzy em X definido por $f^{-1}(B)(x) \doteqdot B(f(x)), x \in X$

Proposição 2.8. *[1] Sejam $A \in I^X$, $B \in I^Y$ e $f : X \to Y$, então*

(1) $f^{-1}(B^C) = (f^{-1}(B))^C$

(2) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

(3) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

(4) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$*, onde B_1, B_2 são conjuntos fuzzy em Y.*

(5) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$*, onde A_1, A_2 são conjuntos fuzzy em X,*

Demonstração. **(1)** De fato, aplicando a definição **(2.7)**, temos que $f^{-1}(B^C) = B^C(f(x)) = 1 - B(f(x)) = 1 - f^{-1}(B(x)) = (f^{-1}(B))^C$.
(2) Novamente aplicando a definição:

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(B)(y)) &= \begin{cases} sup\{f^{-1}(B)(x) | x \in f^{-1}(y)\} & se f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & se f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \\ &= \begin{cases} sup\{B(f(x)) | x \in f^{-1}(y)\} & se f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & se f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \\ &= \begin{cases} sup\{B(y) | x \in f^{-1}(y)\} & se f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & se f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \\ &\leq B(y) \end{aligned}$$

Logo, $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.
(3) Temos que $f^{-1}(f(A)) = f(A)(f(x))$, e por definição

$$f(A)(f(x)) = \begin{cases} sup\{A(f(x)) | f(x) \in f^{-1}(f(x))\}, \ se \ f^{-1}(f(x)) \neq \emptyset \\ 0, \ se \ f^{-1}(f(x)) = \emptyset \end{cases}$$

Como $f^{-1}(f(x)) \neq \emptyset, \forall x \in X$, segue que

$$f(A)(f(x)) = sup\{A(f(x)) | f(x) \in f^{-1}(f(x))\} \geq A(x)$$

logo, $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
(4) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow B_1(y) \leq B_2(y), \forall y \in Y \Rightarrow B_1(f(x)) \leq B_2(f(x)) \Rightarrow f^{-1}(B_1) \leq f^{-1}(B_2) \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
(5) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow A_1(x) \leq A_2(x), \forall x \in X$, logo $sup\{A_1(z) \mid z \in f^{-1}(y)\} \leq sup\{A_2(z) \mid z \in f^{-1}(y)\} \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$. □

O exemplo a seguir mostra como encontrar a imagem de uma função aplicada à um conjunto fuzzy, bem como a imagem da inversa.

Exemplo 2.9. *[3] Sejam* $X = \{a, b, c\}, Y = \{d, e, f\}, A \in I^X$ *e* $B \in I^Y$ *tais que*

$$A(a) = 0.5, A(b) = 0.3, A(c) = 0.9$$

$$B(d) = 0.2, B(e) = 0.7, B(g) = 0.11$$

Tome $f : X \to Y$ *uma função definida da seguinte forma:*

$$f(a) = d, f(b) = d, f(c) = e$$

então temos que:

i) Visto que $f^{-1}(d) = \{a,b\} \neq \emptyset$*, segue que:*

$$f(A)(d) = sup\{A(x)|x \in f^{-1}(d)\} = sup\{A(a),A(b)\} = \{0.5,0.3\} = 0.5$$

Como $f^{-1}(e) = \{c\} \neq \emptyset$*, segue que:*

$$f(A)(e) = sup\{A(x)|x \in f^{-1}(e)\} = sup\{A(c)\} = 0.9$$

E por fim, como $f^{-1}(g) = \emptyset$*, segue que* $f(A(g)) = 0$*. Logo,* $f(A)(d) = 0.5, f(A)(e) = 0.9$ *e* $f(A)(g) = 0$

ii) Fazendo a inversa, temos que

$$\begin{aligned} f^{-1}(B)(a) &= B(f(a)) = B(d) = 0.2 \\ f^{-1}(B)(b) &= B(f(b)) = B(d) = 0.2 \\ f^{-1}(B)(c) &= B(f(c)) = B(c) = 0.7 \end{aligned}$$

Como consequência da proposição **(2.8)**, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.10. ***[6]*** *Seja* $f : X \to Y$ *uma função invertível e* A_j *uma família de conjuntos fuzzy em* Y*, então:*

i) $f^{-1}(\cup A_j) = \cup f^{-1}(A_j)$

ii) $f^{-1}(\cap A_j) = \cap f^{-1}(A_j)$

Demonstração. i) Aplicando diretamente a definição, segue que

$$\begin{aligned} f^{-1}(\cup A_j) = (\cup A_j)(f(x)) &= sup(A_1(f(x)),A_2(f(x)),\cdots,A_j(f(x)),\cdots) \\ &= sup(f^{-1}(A_1(x)),f^{-1}(A_2(x)),\cdots,f^{-1}(A_j(x)),\cdots) \\ &= \cup f^{-1}(A_j(x)) \end{aligned}$$

A demonstração de *(ii)* segue de forma análoga. □

Proposição 2.11. ***[6]*** *Sejam* $f_j : X_j \to Y_j$ *funções e* A_j *conjuntos fuzzy em* $Y_j, j = 1,2$*. Então* $(f_1 \times f_2)^{-1}(A_1 \times A_2) = f_1^{-1}(A_1) \times f_2^{-1}(A_2)$.

Demonstração. Por (2.7), segue que, para cada $(x_1,x_2) \in X_1 \times X_2$

$$\begin{aligned}
(f_1 \times f_2)^{-1}(A_1 \times A_2)(x_1,x_2) &= (A_1 \times A_2)(f_1(x_1) \times f_2(x_2)) \\
&= min[A_1(f_1(x_1)), A_2(f_2(x_2))] \\
&= min[f_1^{-1}(A_1(x_1)), f_2^{-1}(A_2(x_2)] \\
&= f_1^{-1}(A_1) \times f_2^{-1}(A_2)
\end{aligned}$$

□

Proposição 2.12. *[6] Sejam $g : X \to X \times Y$ e $f : X \to Y$, onde $g(x) = (x, f(x))$. Considerando $A \in I^X$ e $B \in I^Y$, então $g^{-1}(A \times B) = A \cap f^{-1}(B)$.*

Demonstração. Novamente, aplicando a definição (2.7) temos que:

$$\begin{aligned}
g^{-1}(A \times B)(x) &= (A \times B)(g(x)) \\
&= (A \times B)(x, f(x)) \\
&= min[A(x), B(f(x))] \\
&= A(x) \cap B(f(x)) \\
&= (A \cap f^{-1}(B))(x).
\end{aligned}$$

□

3 TOPOLOGIA FUZZY

Com o conceito de conjuntos fuzzy definido por Zadeh, em seu artigo *Fuzzy Sets* **[8]** é possível generalizar vários conceitos de topologia geral, mas aplicados nos conjuntos fuzzy. Essa topologia é chamada de Topologia Fuzzy. A topologia fuzzy aqui considerada será a definida por Chang em seu artigo *Fuzzy Topological Spaces* **[1]**. Observe que essa definição é feita da forma mais natural possível. Antes de definirmos topologia fuzzy, vamos definir a topologia padrão e esta pode ser encontrada em qualquer livro de Topologia Geral.

Definição 3.1 (Topologia Padrão)**.** *Uma topologia no conjunto X é a família τ de subconjuntos de X que satisfazem as seguintes propriedades:*

i) $\emptyset$ *e* $X \in \tau$.

ii) A interseção finita de elementos de τ pertence a τ.

iii) A união arbitrária de elementos de τ pertence a τ.

Definição 3.2 (Topologia Fuzzy)**.** *A família $\delta \subseteq I^X$ de conjuntos fuzzy é chamada de topologia fuzzy em X se satisfaz os seguintes axiomas.*

(i) $\overline{0}, \overline{1} \in \delta$

(ii) $\forall A, B \in \delta$ *tem-se* $A \cap B \in \delta$

(iii) $\forall (A_j)_{j \in J} \in \delta$ *tem-se* $\bigcup_{i=1}^{n} (A_j)_{j \in J} \in \delta$.
O par (X, δ) é chamado de espaço topológico fuzzy.

Pela definição de $A \cap B$ e $A \cup B$, onde A e B são conjuntos fuzzy, temos que os axiomas da definição acima podem ser escritos da seguinte forma:

(i) $\overline{0}, \overline{1} \in \delta$

(ii) $\forall A, B \in \delta$ tem-se $\min[A(x), B(x)] \in \delta$

(iii) $\forall (A_j)_{j\in J} \in \delta$ tem-se $max[A_j]_{j\in J} \in \delta$

O par (X,δ) é chamado de espaço topológico fuzzy.

Vejamos alguns exemplos de topologia fuzzy.

Exemplo 3.3. *[6] Seja $X = \{a,b\}$. Seja A o conjunto fuzzy em X definido por $A(a) = 0.5, A(b) = 0.4$. A família $\delta = \{\overline{0}, \overline{1}, A\}$ é uma topologia fuzzy.*

Para verificar isso, precisamos mostrar que os três axiomas da definição são válidos:

(i) Pela definição de δ, segue que $\overline{0}, \overline{1} \in \delta$.

(ii) É preciso verificar se $min[\overline{0},A], min[\overline{0},\overline{1}], min[A,\overline{1}] \in \delta$.

- $min[\overline{0},A] = \begin{cases} min[\overline{0}(a),A(a)] = min[0,0.5] = 0 = \overline{0}(a) \\ min[\overline{0}(b),A(b)] = min[0,0.4] = 0 = \overline{0}(b) \end{cases} = \overline{0} \in \delta$
- $min[\overline{0},\overline{1}] = \begin{cases} min[\overline{0}(a),\overline{1}(a)] = min[0,1] = 0 = \overline{0}(a) \\ min[\overline{0}(b),\overline{1}(b)] = min[0,1] = 0 = \overline{0}(b) \in \delta \end{cases} = \overline{0} \in \delta$
- $min[A,\overline{1}] = \begin{cases} min[\overline{1}(a),A(a)] = min[1,0.5] = 0.5 = A(a) \\ min[\overline{1}(b),A(b)] = min[1,0.4] = 0.4 = A(b) \end{cases} = A \in \delta$

Logo, podemos concluir que $\forall A,B \in \delta$ segue que $A \cap B \in \delta$, ou seja, $min[A,B] \in \delta$.

(iii) Precisamos verificar se $max[\overline{0},\overline{1}], max[\overline{0},A], max[\overline{1},A], max[\overline{1},\overline{0},A] \in \delta$. De forma análoga, podemos perceber que:

- $max[\overline{1},\overline{0}] = \overline{1} \in \delta$
- $max[\overline{0},A] = A \in \delta$
- $max[\overline{1},A] = \overline{1} \in \delta$
- $max[\overline{1},\overline{0},A] = \overline{1} \in \delta$.

Portanto, temos que, $\forall (A_j)_{j\in J} \in \delta, max[A_j / j \in J] \in \delta$. Assim, é possível concluir que, $\delta = \{\overline{0}, \overline{1}, A\}$ é uma topologia fuzzy.

Exemplo 3.4. *[6] Considerando os conjuntos fuzzy A e B em X definidos conforme o exemplo (2.4), segue que $\delta = \{\overline{0}, A, B, A \cup B, \overline{1}\}$ é uma topologia fuzzy em X. Pois satisfaz os três axiomas da definição.*

(i) $\overline{0}, \overline{1} \in \delta$ *por definição de* δ.

(ii) *É preciso verificar que* $min[\overline{0},A], min[\overline{0},B], min[\overline{0},A\cup B], min[\overline{0},\overline{1}], min[A,B], min[A,A\cup B], min[A,\overline{1}], min[B,A\cup B], min[B,\overline{1}]$ *e* $min[A\cup B,\overline{1}]$ *pertencem a* δ.
De fato,

- $min[\overline{0},A] = min[\overline{0},B] = min[\overline{0},A\cup B] = min[\overline{0},\overline{1}] = min[A,B] = \overline{0} \in \delta$.
- $min[A,\overline{1}] = \begin{cases} min(0,1), & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ min(2x-1,1), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x-,1 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} = A \in \delta.$
  De forma análoga, $min[B,\overline{1}] = B \in \delta$ *e* $min[A\cup B,\overline{1}] = A\cup B \in \delta$.
- *Agora note que, pela propriedade da distributividade de conjuntos fuzzy, temos* $min[A,A\cup B] = max[min(A,A), min(A,B)] = max[A,\overline{0}] = A \in \delta$. *Da mesma forma,* $min[B,A\cup B] = max[min(B,A), min(B,B)] = max[\overline{0},B] = B \in \delta$.

Logo, temos que o segundo axioma da definição é satisfeito.

(iii) *O terceiro axioma é preciso verificar que as uniões arbitrárias entre os conjuntos de* δ *pertencem a* δ*, o que de fato ocorre.*

Logo, segue que δ *é uma topologia fuzzy.*

Da mesma forma que em topologia geral, os elementos de $\delta \subseteq I^X$ são chamados de conjuntos fuzzy **abertos** e um conjunto fuzzy A será dito **fechado** se o seu complementar pertencer a δ, ou seja, se $1-A \in \delta$. E se os conjuntos fuzzy A e B forem abertos, então $A\cup B$ e $A\cap B$ também serão abertos.

Exemplo 3.5. *[3] Seja* $X = \{x,y\}$ *e os conjuntos fuzzy* A, B*, definidos da seguinte forma*

$$A(x) = 0.6\ ,\ A(y) = 0.3$$

$$B(x) = 0.2\ ,\ B(y) = 0.7$$

É fácil notar que

$$\overline{1}\cup A = \overline{1}\ ,\ A\cap\overline{1} = A$$

e

$$\overline{0}\cup A = A\ ,\ \overline{0}\cap A = \overline{0}$$

além disso,

$$A\cap B(x) = 0.2\ ,\ A\cap B(y) = 0.3$$

$$A\cup B(x) = 0.6\ ,\ A\cup B(y) = 0.7$$

$$A^C(x) = 0.4\ ,\ A^C(y) = 0.7$$

$$B^C(x) = 0.8\ ,\ B^C(y) = 0.3$$

$$(A \cup B)^C(x) = 0.4\ ,\ (A \cup B)^C(y) = 0.3$$

$$(A \cap B)^C(x) = 0.8\ ,\ (A \cap B)^C(y) = 0.7$$

Observe que $\delta = \{\overline{0}, \overline{1}, A, B, A \cap B, A \cup B\}$ é uma topologia fuzzy, e $\overline{0}, \overline{1}, A, B, A \cap B, A \cup B$ são os conjuntos fuzzy ***abertos****, A^C e B^C são* ***fechados****. Os conjuntos $\overline{0}$ e $\overline{1}$ são abertos e fechados.*

O seguinte teorema mostra que é possível transformar a topologia padrão em uma topologia fuzzy. Mas antes definiremos função característica de um conjunto.

Definição 3.6. *Seja A um conjunto. A função característica de A será a função*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in A \\ 0, & se\ x \notin A \end{cases}$$

Teorema 3.7. *[3] Seja (X, τ) um espaço topológico padrão. Defina*

$$\delta = \{\chi_A |\ A\ \text{é um aberto em}\ (X, \tau)\}$$

Então, (X, δ) é um espaço topológico fuzzy.
Podemos generalizar, usando $\alpha\chi_A(x)$, onde $\alpha\chi_A(x) = \alpha$ se $x \in A$ e $\alpha\chi_A(x) = 0$ se $x \notin A$, com $\alpha \in (0,1]$.

Demonstração. Vamos demonstrar que (X, δ) satisfaz os três axiomas da definição de topologia fuzzy. Fica claro que $\overline{1} = \chi_X$ e $\overline{0} = \chi_\emptyset$, ou seja, $\overline{1}, \overline{0} \in (X, \delta)$.
Tome $\chi_A, \chi_B \in \delta$. Então A e B são abertos em (X, τ). Assim, $A \cap B$ também é aberto em (X, τ), logo $\chi_{A \cap B} \in \delta$. Mas note que,

$$\begin{aligned} \chi_A(x) \cap \chi_B(x) &= min[\chi_A(x), \chi_B(x)] \\ &= \begin{cases} 1, & x \in A \cap B \\ 0, & x \notin A \cap B \end{cases} \\ &= \chi_{A \cap B}(x) \in \delta. \end{aligned}$$

Logo, se $\chi_A, \chi_B \in \delta$, então $\chi_A \cap \chi_B \in \delta$. De forma análoga, se $\chi_{A_j} \in \delta$, $j \in J$, então $\bigcup_{j \in J} \chi_{A_j} \in \delta$. E assim, (X, δ) é um espaço topológico fuzzy. □

Para transformar uma topologia fuzzy em uma topologia padrão, será necessária a seguinte definição.

Definição 3.8. *[6] Seja A um conjunto fuzzy em X e* $0 \leq \alpha < 1$, *então* $\alpha(A) = \{x \in X | A(x) > \alpha\}$ *é chamado de* α*-level, ou* α*-corte em* X.

A partir dessa definição é possível então enunciar o teorema que converte a topologia fuzzy em topologia padrão.

Teorema 3.9. *[3] Seja* (X, δ) *um espaço topológico fuzzy. Para cada* $\alpha \in [0,1)$ *a família*

$$\iota_\alpha = \{\alpha(A) | A \in \delta\}$$

forma uma topologia padrão em X.

Demonstração. Note que $\alpha(\overline{1}) = \{x \in X | \overline{1}(x) > \alpha\} = X, \forall \alpha \in [0,1)$ e, como $\overline{1} \in \delta$, segue que $\alpha(x) \in \iota_\alpha$ e assim $X \in \iota_\alpha$. Além disso, $\alpha(\overline{0}) = \{x \in X | \overline{0} > \alpha\} = \emptyset$, e como $\overline{0} \in \delta$, então $\alpha(\overline{0}) \in \iota_\alpha$.
Sejam $\alpha(A), \alpha(B) \in \iota_\alpha$, então $A, B \in \delta$ e $A \cap B \in \delta$, logo $\alpha(A \cap B) \in \iota_\alpha$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} \alpha(A \cap B) &= \{x \in X | (A \cap B)(x) > \alpha\} \\ &= \{x \in X | min[A(x), B(x)] > \alpha\} \\ &= \{x \in X | A(x) > \alpha \ e \ B(x) > \alpha\} \\ &= \{x \in X | A(x) > \alpha\} \cap \{x \in X | B(x) > \alpha\} \\ &= \alpha(A) \cap \alpha(B). \end{aligned}$$

Logo, $\alpha(a) \cap \alpha(B) \in \iota_\alpha$.
Seja $\alpha(A_j) \in \iota_\alpha$, para $j \in J$. Então $A_j \in \delta, \forall j \in J$, e assim, $\bigcup_{j \in J} A_j \in \delta$, logo $\alpha(\bigcup_{j \in J} A_j) \in \iota_\alpha$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} \alpha(\bigcup_{j \in J} A_j) &= \{x | \bigcup_{j \in J} A_j > \alpha\} \\ &= \{x | sup[A_j(x), j \in J] > \alpha\} \\ &= \bigcup_{j \in J} \{x | A_j(x) > \alpha\} \\ &= \bigcup_{j \in J} \alpha(A_j) \end{aligned}$$

ou seja, $\bigcup_{j \in J} \alpha(A_j) \in \iota_\alpha$. Assim, a família ι_α forma uma topologia padrão em X. □

Definição 3.10. *[3] Seja* (X, δ) *um espaço topológico fuzzy. Para cada* $\alpha \in [0,1)$, *a topologia* ι_α *é chamada de* ***topologia*** $\alpha - level$ *em X.*

Proposição 3.11. *[3] Seja (X,δ) um espaço topológico fuzzy. Defina para $A \in \delta$,*

$$\iota(A) = \{\alpha(A)|\alpha \in [0,1)\} = \bigcup_{\alpha\in[0,1)} \alpha(A)$$

e, $\iota(\delta) = \{\iota(A)|A \in \delta\}$. Então $(X,\iota(\delta))$ é um espaço topológico padrão em X e $\iota(\delta)$ é uma topologia gerada por $\{\iota_\alpha, \alpha \in [0,1)\}$.

Demonstração. Já que $\iota(\delta)$ é gerada pela família de topologias $\{\iota_\alpha, \alpha \in [0,1)\}$, e a união arbitrária de topologias é uma topologia padrão, então $\iota(\delta)$ é uma topologia padrão e $(X,\iota(\delta))$ é um espaço topológico em X. □

A seguir será definido base, fecho e interior na topologia fuzzy. Tais definições, são dadas de forma intuitiva baseando-se nas definições feitas em topologia geral.

3.1 FECHO E INTERIOR

Definição 3.12. *O fecho $\overline{A}$ e o interior A° de um conjunto fuzzy A pertencente à topologia δ são definidos, respectivamente, por*

$$\overline{A} = inf\{K|A \leq K, K^C \in \delta\}$$
$$A^\circ = sup\{O|O \leq A, O \in \delta\}.$$

Note que A° é o maior fuzzy aberto, tal que $A^\circ \subset A$. De fato, seja $B \in \delta$, com $B \subset A$ e como A° é a união de todos os fuzzy abertos e é interior a A, então por definição temos que $A^\circ \subset B \subset A$, mas como B é fuzzy aberto, então $B \subset A^\circ$. Assim, $B = A^\circ$. Além disso, se A é um fuzzy aberto, então $A \subset A^\circ$, mas por definição $A^\circ \subset A$, e portanto $A = A^\circ$, também temos que, se $A = A^\circ$, então A é fuzzy aberto.

De forma análoga, temos que $\overline{A}$ é o menor fuzzy fechado, tal que $A \subset \overline{A}$. De fato, $\overline{A}$ é fuzzy fechado, pois pelo teorema 3.14 que será demonstrado abaixo $(\overline{A})^C = (A^C)^\circ$ que é fuzzy aberto. Agora, basta tomar um conjunto fuzzy fechado B, de forma que $A \subset B \subset \overline{A}$. Mas, por definição, $\overline{A}$ é a interseção de todos os fuzzy fechados, logo $\overline{A} \subset B$, e portanto $B = \overline{A}$. Um conjunto fuzzy será fuzzy fechado se, e somente se, $A = \overline{A}$. Pois pelo teorema 3.14 $(A^C)^\circ = (\overline{A})^C$. Note que:

$$A \text{ é } fechado \Leftrightarrow A^C \text{ é } aberto \Leftrightarrow A^C = (A^C)^\circ = (\overline{A})^C \Leftrightarrow A^C = (\overline{A})^C \Leftrightarrow A = \overline{A}$$

Exemplo 3.13. *[6] Considerando a topologia $\delta = \{\overline{0}, A, B, A \cup B, \overline{1}\}$, onde os conjuntos fuzzy* *são os definidos no exemplo (2.4), é fácil notar que* $\overline{A} = B^C, \overline{B} = A^C, \overline{A \cup B} = \overline{1}, (A^C)^\circ = B, (B^C)^\circ = A, ((A \cup B)^C)^\circ = \overline{0}$.

Teorema 3.14. *[6]* $A^\circ = (\overline{A^C})^C, \overline{(A^C)} = (A^\circ)^C, \overline{A} = ((A^C)^\circ)^C, (\overline{A})^C = (A^C)^\circ$.

Demonstração. Seja $\{A_j \mid j \in J\}$ família de abertos fuzzy contidos em A, segue que $A^\circ = \cup A_j$. Como $A_j \subset A$, então $A_j^C \subset A^C$ e A_j^C são fechados que contém A, $\forall j \in J$. Logo, $\overline{A^C} = A_J^C$. Daí,

(1) $A^\circ = \cup A_j = \cup (A_j^C)^C = (\cap A_j^C)^C = (\overline{A^C})^C$

(2) $\overline{(A^C)} = \cap (A_j^C) = (\cup A_j)^C = (A^\circ)^C$.

Agora, seja $\{\widetilde{A}_j \mid j \in J\}$ família de fuzzy fechados, tal que $A \subset A_j$. Então $\overline{A} = \cap \widetilde{A}_j$ e $\widetilde{A}_j^C \subset A^C$, assim $(A^C)^\circ = \cup \widetilde{A}_j^C$. Daí,

(3) $\overline{A} = \cap \widetilde{A}_j = \cap (\widetilde{A}_j^C)^C = (\cup \widetilde{A}_j^C)^C = ((A^C)^\circ)^C$.

(4) $(\overline{A})^C = (\cap \widetilde{A}_j)^C = \cup \widetilde{A}_j^C = (A^C)^\circ$.

□

3.2 PONTO *FUZZY*

Nessa seção será definido e demonstrado algumas propriedades sobre ponto fuzzy, para que assim seja possível definir vizinhança, ponto de acumulação, ponto de aderência e ponto de fronteira, seguindo de forma similar o estudo feito na topologia geral.

No exemplo (2.3) vimos que um ponto fuzzy P_y^λ, que é um conjunto fuzzy, é definido da seguinte forma:

$$P_y^\lambda(x) = \begin{cases} \lambda, & se\ x = y \\ 0, & se\ x \neq y \end{cases}$$

onde $0 < \lambda \leq 1$.

Analogamente à definição de conjunto **crisp**, segue a definição de **ponto crisp**:

Definição 3.15. *O conjunto fuzzy com função*

$$P_y^1(x) = \begin{cases} 1, & se\ x = y \\ 0, & se\ x \neq y \end{cases}$$

é chamado de **ponto crisp**. *Para qualquer conjunto fuzzy* $A \in X$, $P_y^1 \subset A \Leftrightarrow A(y) = 1$.

O complementar de P_y^λ, será denotado por $P_y^{1-\lambda}$ ou $(P_y^\lambda)^C$.

Existem duas definições de pertinência entre ponto fuzzy e conjunto fuzzy, são elas:

1) $P_x^\lambda \in A \Leftrightarrow \lambda \leq A(x)$;

2) $P_x^\lambda \in A \Leftrightarrow \lambda < A(x)$ onde $A \in I^X$.

Ao considerar P_x^λ como **elemento** de A, ou seja, pertencente a A, usaremos a definição **(2)**. Pois, caso fosse considerada a primeira definição ($P_x^\lambda \in A \Leftrightarrow \lambda \leq A(x)$) a propriedade (1) abaixo não seria válida, como mostra o exemplo 3.16. E, ao considerar P_x^λ como um subconjunto fuzzy de A, definiremos que $P_x^\lambda \subseteq A$ se, e somente se $\lambda \leq A(x), \forall x \in X$.

Podemos dizer que todo conjunto fuzzy pode ser escrito como a união de todos os pontos fuzzy pertencentes a ele. Para isso, basta considerar que $A(x) = sup\{\lambda | P_x^\lambda$ é ponto fuzzy e $0 < \lambda \leq A(x)\}$, quando $A(x) \neq 0$ para $x \in X$. Com isso, segue que dois conjuntos fuzzy $A, B \in I^X$ serão iguais denotados por $A = B$ se, e somente se, $P_x^\lambda \in A \Leftrightarrow P_x^\lambda \in B$, para todo ponto fuzzy $P_x^\lambda \in X$.

Agora serão mostradas algumas propriedades a respeito de ponto fuzzy.

Seja $\{A_j | j \in J\}$ uma família de conjuntos fuzzy em X, P_x^a e P_y^b pontos fuzzy em X e f uma função de X em Y. Então segue que:

(1) $P_x^a \in \cup\{A_j | j \in J\} \Leftrightarrow \exists j \in J$ tal que $P_x^a \in A_j$.

(2) $P_x^a \in \cap\{A_j | j \in J\} \Rightarrow \forall j \in J, P_x^a \in A_j$.

(3) $P_x^a \in P_y^b \Leftrightarrow x = y$ e $a < b$.

(4) Se $P_x^a \in P_y^b$ e para todo $j \in J$, $P_y^b \in A_j$, então $P_x^a \in \cap\{A_j | j \in J\}$.

(5) Se $P_x^a \in A$, onde $A \in I^X$, então existe $a < b$ tal que $P_y^b \in A$.

(6) $f(P_x^a) = P_{f(x)}^a$.

(7) $f((P_x^a)^C) = (f(P_x^a))^C$.

(8) Se $P_x^a \in A$, então $f(P_x^a) \in f(A)$.

(9) Se $P_x^a \in f^{-1}(B)$, então $P_{f(x)}^a \in B, B \in I^Y$.

(10) Se $P_y^b \in f(A)$, então existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$ e $P_x^a \in A$.

(11) Se $P_y^b \in B$ e $y \in f(X)$, então $\forall x \in f^{-1}(y)$ temos que $P_x^b \in f^{-1}(B)$.

Demonstração. Para facilitar a notação, escreveremos apenas $\{A_j\}$ para representar $\{A_j | j \in J\}$.

(1) $(\Rightarrow)$ $P_x^a \in \bigcup\{A_j\} \Rightarrow a < \cup A_j(x)$. Supondo por absurdo que $\forall j \in J, P_x^a \notin A_j$, então $a \geq A_j(x), \forall j$, assim $a \geq \bigcup A_j(x)$, o que contradiz a hipótese. Logo, $\exists j \in J$ tal que $P_x^a \in A_j$. $(\Leftarrow)$ $P_x^a \in A_j \Rightarrow a < A_j(x) \Rightarrow a < sup\{A_j\} \Rightarrow a < \cup(A_j)(x) \Rightarrow P_x^a \in \cup A_j$.

(2) $P_x^a \in \cap\{A_j\} \Rightarrow a < \cap\{A_j(x)\} = inf\{A_j(x)\} \Rightarrow a < A_j(x), \forall j \in J \Rightarrow P_x^a \in A_j$, para todo j em J.

(3) Trivial, por definição.

(4) Por hipótese, $P_x^a \in P_y^b$ logo $a < b$ e $x = y$. Além disso, temos que $P_y^b \in A_j, \forall j \in J$, logo $b < A_j(y), \forall j \in J$. Então, $a < b < A_j(y)$,e consequentemente $a < A_j(y)$, mas como $x = y$ segue que $a < A_j(x), \forall j \in J$. Assim, $a < inf_{j \in J}\{A_j(x)\} = \cap A_j(x)$. E, portanto, $P_x^a \in \cap\{A_j\}_{j \in J}$

(5) $P_x^a \in A \Rightarrow a < A(x) \Rightarrow a + a < a + A(x) \Rightarrow a < \frac{a+A(x)}{2}$. Da mesma forma, temos que $a + A(x) < A(x) + A(x) \Rightarrow \frac{a+A(x)}{2} < A(x)$. Basta tomar $b = \frac{a+A(x)}{2}$, e portanto, existe b, tal que $a < b$ e $P_x^b \in A$.

(6) Por definição temos que

$$
\begin{aligned}
f(P_x^a)(y) &= \begin{cases} sup\{P_x^a(z) | z \in f^{-1}(y)\}, & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & f^{-1}(x) = \emptyset \end{cases} \\
&= \begin{cases} a, & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & f^{-1}(x) = \emptyset \end{cases} \\
&= \begin{cases} a, & f(x) = y \\ 0, & f(x) \neq y \end{cases} \\
&= P_{f(x)}^a, \forall y \in Y.
\end{aligned}
$$

E portanto, $f(P_x^a) = P_{f(x)}^a$.

(7) Note que, $f((P_x^a)^C) = f(P_x^{1-a}) = P_{f(x)}^{1-a} = (P_{f(x)}^a)^C = (f(P_x^a))^C$.

(8) Como por hipótese, $P_x^a \in A$, e consequentemente $a < A(x)$, segue que Temos que

$$\begin{aligned} f(P_x^a(y) &= \begin{cases} a, & x \in f^{-1}(y) \\ 0, & x \notin f^{-1}(y) \end{cases} \\ &< \begin{cases} A(x), & x \in f^{-1}(y) \\ 0, & x \notin f^{-1}(y) \end{cases} \\ &< \begin{cases} sup\{A(x)\}, & x \in f^{-1}(y) \\ 0, & x \notin f^{-1}(y) \end{cases} \\ &= f(A)(y), \forall y \in Y. \end{aligned}$$

Logo, $f(P_x^a) < f(A)$, e, portanto $f(P_x^a) \in f(A)$.

(9) $P_x^a \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(P_x^a) \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow f(P_x^a) \in B \Rightarrow P_{f(x)}^a \in B$.

(10) $P_y^b \in f(A) \Rightarrow b < f(A)(y) = \begin{cases} sup\{A(x)\}, & x \in f^{-1}(y) e f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$. Como P_y^b é conjunto fuzzy, então $f^{-1}(y) \neq \emptyset$. Logo, $\exists x \in f^{-1}(y) \subset X$ tal que $y = f(x)$. Daí,

$$P_{f(x)}^b \in f(A) \Rightarrow b < f(A)(f(x) = sup\{A(z) | z \in f^{-1}(f(x))\} = A(x) \Rightarrow P_x^b \in A$$

(11) $P_y^b \in B$ e $y \in f(X) \Rightarrow \forall x \in f^{-1}(Y), \exists y \in f(X)$ tal que $f(x) = y \Rightarrow P_{f(x)}^b \in B \Rightarrow b < B(f(x)) = f^{-1}(B(x)) \Rightarrow P_x^b \in f^{-1}(B)$

$\square$

O exemplo abaixo, mostra que se fosse considerado a primeira definição de pertinência $P_x^\lambda \in A \Leftrightarrow \lambda \leq A(x)$ a propriedade **(1)** não é válida.

Exemplo 3.16. *[3] Para $i \in (0, \frac{1}{2})$ é definido $A_i(x) = i$, para todo $x \in X$.
Então, $\bigcup_{i \in (0, \frac{1}{2})} A_i(x) = \frac{1}{2}$. Seja $P_x^\lambda \in X$ e considerando que $P_x^\lambda \in A \Leftrightarrow \lambda \leq A(x)$. Então $P_x^{\frac{1}{2}} \in \bigcup_{i \in (0, \frac{1}{2})} A_i$, e pela proposição $P_x^{\frac{1}{2}} \in A_i(x)$, para algum $i \in (0, \frac{1}{2})$. Mas, como $i \in (0, \frac{1}{2})$, temos que $A_i(x) = i < \frac{1}{2}$, logo, $P_x^{\frac{1}{2}} \notin A_i(x)$. Que é uma contradição.*

Definição 3.17. *Um ponto fuzzy P_x^λ é dito **quase-coincidente** com $A \in I^X$, denotado por $P_x^\lambda qA$ se, e somente se, $\lambda > A^C(x)$, ou seja, $\lambda + A(x) > 1$.*

Temos as seguinte proposição a respeito de ponto quase-coincidente.

Proposição 3.18. *Sejam $f : X \to Y$ uma função, P um ponto fuzzy de X, $A \in I^X$ e $B \in I^Y$, então segue que:*

1. *Se $f(P)qB$, então $Pqf^{-1}(B)$.*

2. *Se PqA, então $f(P)qf(A)$.*

3. *Se $f(P) \in B$, então $P \in f^{-1}(B)$.*

Demonstração. 1. $f(P_x^{\lambda} qB \Rightarrow P_{f(x)}^{\lambda} qB \Rightarrow \lambda + B(f(x)) > 1 \Rightarrow \lambda + f^{-1}(B(x)) > 1 \Rightarrow Pqf^{-1}(B)$.

2. $PqA \Rightarrow f^{-1}(f(P))qA \Rightarrow f(P)q(f^{-1})^{-1}(A)$, ou seja, $f(P)qf(A)$

3. $f(P) \in B \Rightarrow f^{-1}(f(P)) \in f^{-1}(B)$, ou seja, $P \in f^{-1}(B)$.

□

Da mesma forma que foi definido o ponto quase-coincidente, podemos definir conjunto fuzzy quase-coincidente a outro.

Definição 3.19. *Sejam A, B em (X, δ), A é dito **quase-coincidente** com B, denotado por AqB, se, e somente se, existe $x \in X$, tal que $A(x) > B^C(x)$, ou seja, $A(x) + B(x) > 1$.*

Note que se AqB em x, então BqA. De fato, temos que

$$\begin{aligned} A(x) > B^C(x) &\Leftrightarrow A(x) > 1 - B(x) \\ &\Leftrightarrow A(x) + B(x) > 1 \\ &\Leftrightarrow B(x) > 1 - A(x) = A^C(x) \\ &\Leftrightarrow BqA. \end{aligned}$$

Se A não é quase-coincidente com B em x, então $A(x) \leqslant B^C(x)$.

Proposição 3.20. *[6] Dados dois conjuntos fuzzy A, B da topologia fuzzy (X, δ). $A(x) \leqslant B(x)$ se, e somente se, A e B^C não são quase-coincidentes. Em particular, $P_x^{\lambda} \in A$ se, e somente se, P_x^{λ} não é quase-coincidente a A^C.*

Demonstração. Queremos mostrar que $A(x) \leqslant B(x)$ se, e somente se $A(x) \leqslant (B^C(x))^C$. A demonstração é trivial, pois $B(x) = (B^C(x))^C$, então $A(x) \leqslant B(x) \Leftrightarrow A(x) \leqslant (B^C(x))^C \Leftrightarrow A$ e B^C não são quase-coincidentes.
Em particular, $P_x^{\lambda} \in A \Leftrightarrow \lambda \leqslant A(x) \Leftrightarrow \lambda \leqslant (A^C(x))^C \Leftrightarrow P_x^{\lambda}$ não é quase-coincidente a A^C. □

Proposição 3.21. *[6] Seja A_j uma família de conjuntos fuzzy da topologia fuzzy (X, δ). Então um ponto fuzzy P é quase-coincidente a $\cup A_j$ se, e somente se, existir algum $A_i \in \delta$ tal que PqA_i.*

Demonstração. Vamos considerar que $P = P_x^{\lambda}$.

($\Rightarrow$) $P_x^{\lambda} q \cup A_j \Rightarrow \lambda + sup\{A_j(x)\} > 1 \Rightarrow \exists A_i \in \{A_j\}$ tal que $max\{A_j(x)\} = A_i(x)$, logo $\lambda + A_i(x) > 1 \Rightarrow PqA_i$.

($\Leftarrow$) $PqA_i \Rightarrow \lambda + A_i(x) > 1$ mas, note que $\lambda + max\{A_j\} \leq \lambda + A_i(x)$ logo, $\lambda + max\{A_j\} > 1$ e, assim $Pq \cup \{A_j\}$.

□

3.3 BASE

Definição 3.22. *[6] Uma base para o espaço topológico fuzzy (X, δ) é uma subcoleção β de δ tal que cada membro A de δ pode ser escrito como $A = \cup_{j \in J} B_i$, onde cada $B_i \in \beta$.*

Teorema 3.23. *[7] β é base para um espaço topológico fuzzy (X, δ), se, e somente se, $\forall A \in \delta$ e para todo ponto $P_x^{\alpha} \in A$, existir $B \in \beta$ tal que $P_x^{\alpha} \in B \subseteq A$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Supondo que β é base de δ, ou seja, por definição, todo conjunto fuzzy $A \in \delta$ é a união de membros de B. Seja $A \in \delta$ e $P_x^{\alpha} \in A$, então $A \in \delta \Rightarrow A = \cup_{i \in I}\{B_i | B_i \in \beta\} \Rightarrow P_x^{\alpha} \in A = \cup_{i \in I}\{B_i | B_i \in \beta\} \Rightarrow P_x^{\alpha} \in \cup_{i \in I}\{B_i | B_i \in \beta\} \Rightarrow P_x^{\alpha} \in B_X \subseteq A$, para algum B_x.
($\Leftarrow$) Assumindo que para cada $A \in \delta$ e para cada $P_x^{\alpha} \in A, \exists B_x$ tal que $P_x^{\alpha}{}_x \subset A$. Queremos provar que A pode ser escrito como a união de membros de β, para isso, vamos considerar pontos arbitrários $P_x^{\alpha} \in A$. Seja $A \in \delta$, por hipótese $\exists B_x \in \beta$ tal que $P_x^{\alpha} \in B_x \subset A \Rightarrow A \subset \cup_{P_x^{\alpha} \in A} B_x$. Como $B_x \subset A$, para cada $P_x^{\alpha} \in A$, temos que $A = \cup_{P_x^{\alpha} \in A} B$. □

3.4 VIZINHANÇA

Seguindo o estudo de Chang, a definição de vizinhança é dada da seguinte forma:

Definição 3.24. *Um conjunto fuzzy U em (X, δ) é vizinhança de outro conjunto fuzzy A se, e somente se, existir um conjunto aberto fuzzy B tal que, $A \subset B \subset U$.*

Em outras palavras, podemos dizer que um conjunto fuzzy U será vizinhança de A se, e somente se existir B, aberto, tal que $A(x) \leq B(x) \leq U(x), \forall x \in X$.

Note que, diferente da topologia geral, onde a vizinhança é definida em torno de um ponto, Chang define a vizinhança para a topologia fuzzy em torno de um conjunto. Entretando, como visto anteriormente, podemos considerar um conjunto fuzzy como a união de todos os pontos fuzzy nesse conjunto. Logo, de forma análoga podemos definir vizinhança em torno de um ponto fuzzy.

Definição 3.25. *[6] Dado um ponto fuzzy $P_x^\lambda, 0 < \lambda \leq 1$, e um conjunto fuzzy A em (X, δ). A é dito vizinhança de P_x^λ se, e somente se, existir um conjunto fuzzy aberto $B \in \delta$ tal que $P_x \in B \subset A$.*

Além disso,

Definição 3.26. *[6] Um conjunto fuzzy A em (X, δ) é chamado de Q-vizinhança de um ponto P_x^λ se, e somente se, existir $B \in \delta$ tal que PqB e $B \leq A$. A família de todas as Q-vizinhanças de P_x^λ é chamada de sistema de Q-vizinhança de P_x^λ.*

A seguir veremos alguns teoremas a respeito de vizinhança.

Teorema 3.27. *[1] Um conjunto fuzzy é aberto se, e somente se, para cada conjunto fuzzy B contido em A, A é vizinhança de B.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Como $B \subset A$ segue que $B(x) \leq A(x)$, basta tomar o conjunto com função de pertinência definida por $U(x) = \frac{A(x)+B(x)}{2}$, então existe conjunto fuzzy aberto, tal que, $B(x) \leq U(x) \leq A(x)$ ou seja $B \subset U \subset A$, assim A é vizinhança de B.
($\Leftarrow$) Por hipótese $A \subset A$ e A é vizinhança de A, logo existe U aberto de forma que $A \subset U \subset A$, então $U = A$ e A é aberto. $\square$

Teorema 3.28. *[6] Um ponto fuzzy $P \in A^\circ$ se, e somente se, P possui uma vizinhança contida em A.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) De fato, A° é aberto e $P \in A^\circ \subset A \Rightarrow A^\circ$ é vizinhança de P e $A^\circ \subset A$.
($\Leftarrow$) Recíprocamente, $\exists U$ vizinhança de P com $U \subset A \Rightarrow \exists B$ aberto, tal que $P \in B \subset U \subset A \Rightarrow P \in B \subset A$ como A° é a união dos aberto contidos em A, temos $P \in A^\circ$. $\square$

Teorema 3.29. *[6] Um ponto fuzzy $P_x^\lambda \in \overline{A}$ se, e somente se, cada Q-vizinhança de P_x^λ é quase-coincidente com A.*

Demonstração. Se $P_x^\lambda \in \overline{A}$, então, por definição, para cada aberto B, com $B \subset A^C$ temos $P_x^\lambda \notin B$. Note que,

$$P_x^\lambda \notin B \Leftrightarrow P_x^\lambda \in B^C \Leftrightarrow \lambda \leq 1 - B(x) \tag{3.1}$$

ou seja, B não é quase-coincidente com P. Então fazendo a contradição de (3.1), segue que, para todo aberto B quase-coincidente com P_x^λ $(B(x) > 1 - \lambda)$, B não está contido em A^C. E pela proposição (3.20), podemos concluir que B é quase-coincidente com $(A^C)^C = A$. $\square$

3.5 PONTO ADERENTE, DE FRONTEIRA E DE ACUMULAÇÃO

Seguindo os conceitos da topologia geral, iremos agora definir ponto aderente, ponto de fronteira e ponto de acumulação. Novamente todas essas definições são feitas de forma análoga à apresentada em topologia geral.

Definição 3.30. *[6] Um ponto fuzzy P é chamado de* ***ponto fuzzy aderente*** *de um conjunto fuzzy A se, e somente se, toda Q-vizinhança de P for quase-coincidente com A.*

Definição 3.31. *[6] Um ponto fuzzy P é chamado de* ***ponto de fronteira*** *de um conjunto A se, e somente se* $P \in \overline{A} \cap \overline{A^C}$. *A união de todos os pontos fuzzy de fronteira de A é chamado de fronteira de A, denotado por* $b(A)$. *É evidente que* $b(A) = \overline{A} \cap \overline{A^C}$.

Definição 3.32. *[6] Um ponto fuzzy P é* ***ponto de acumulação*** *de um conjunto A se, e somente se, P é ponto aderente de A e toda Q-vizinhança de P e A são quase-coincidentes a algum ponto diferente de* $supp(P)$, *sempre que* $P \in A$.
A união de todos os pontos de acumulação de A é chamada de ***conjunto derivado de A****, denotado por* A^d.

Fica claro que $A^d \subset \overline{A}$.

Teorema 3.33. *[6]*$\overline{A} = A \cup A^d$, *onde* A^d *é o conjunto derivado de A.*

Demonstração. Primeiro vamos demonstrar que $\overline{A} \subset A \cup A^d$.
Se $P_x^\lambda \in \overline{A}$, então pelo teorema (3.29) P é ponto aderente de A, assim, pela definição (3.32) $P_x^\lambda \in A^d$, logo $\overline{A} \subset A \cup A^d$. De forma análoga, se $P_x^\lambda \in A \cup A^d$, então $P_x^\lambda \in \overline{A}$. Logo $\overline{A} = A \cup A^d$. □

Proposição 3.34. *[6] Um conjunto fuzzy A é fechado se, e somente se, A contém todos os pontos de acumulação.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) A é fechado se $\overline{A} = A$, pelo teorema (3.33) segue que $\overline{A} = A \cup A^d$. Ou seja, $A = \overline{A} = A \cup A^d$, logo $A^d \subseteq A$.
($\Leftarrow$) Se A contém todos os pontos de acumulação, então $A^d \subseteq A$ e como $\overline{A} = A \cup A^d$, segue que $\overline{A} = A$, logo A é fechado. □

4 FUNÇÕES CONTÍNUAS FUZZY

Da mesma forma que vários conceitos básicos da topologia geral foram generalizados para espaços topológicos fuzzy, Chang também define as funções contínuas fuzzy. Nesse capítulo será apresentada a definição feita por Chang para tais funções bem como alguns resultados.

Definição 4.1. *[1] Uma função f entre os espaços topológicos fuzzy (X,T) e (Y,U) é uma função contínua fuzzy, denotada por F-contínua se, e somente se, a inversa de cada aberto em Y é um aberto em X.*

Definição 4.2. *[3] A função $f:(X,T)\to(Y,U)$ é dita F-aberta (F-fechada) se a imagem de cada fuzzy aberto (fechado) em X é um fuzzy aberto (fechado) em Y.*

Proposição 4.3. *[6] (a) A identidade $id:(X,\tau)\to(X,\tau)$ é F-contínua.*
(b) A composição de F-contínuas é F-contínua.

Demonstração. (a) Seja $A\in\tau$. A função identidade seja F-contínua se $id^{-1}(A(x))\in\tau,\forall x\in X$. De fato, pela definição (2.7), $id^{-1}(A(x))=A(id(x))=A(x)\in\tau,\forall x\in X$.
(b) Sejam $f:(X,\tau)\to(Y,\gamma)$ e $g:(Y,\gamma)\to(Z,\beta)$ F-contínuas. Queremos mostrar que $g\circ f$ é F-contínua, isto é, $(g\circ f)^{-1}(A)\in\tau$, para $A\in\beta$. Dado $A\in\beta$, pela definição de função (2.7) segue que:

$$(g\circ f)^{-1}(A(z))=(A\circ(g\circ f))(z)=((A\circ g)\circ f)(z)=f^{-1}(A\circ g)(z)=f^{-1}(g^{-1}(A(z)),\forall z\in Z$$

Temos que g é F-contínua, então $g^{-1}(A)\in\gamma$, ou seja, $g^{-1}(A)$ é um aberto em Y, logo $f^{-1}(g^{-1}(A))\in\tau$, pois f é F-contínua. Como $(g\circ f)^{-1}(A)=f^{-1}(g^{-1}(A))\in\tau$, segue que $(g\circ f)^{-1}(A)$ é aberto em X e, portanto, é F-contínua. □

Dadas duas topologias fuzzy sobre X, δ_1 e δ_2, dizemos que δ_2 é **mais fino** que δ_1 ou que δ_1 é **mais denso** que δ_2 se $\delta_1\subset\delta_2$.

A seguir serão apresentados alguns exemplos e resultados a respeito das funções F-contínuas.

Exemplo 4.4. *[3] Sejam (X,τ) e (X,γ), dois espaços topológicos fuzzy, e seja $id_X : (X,\tau) \to (X,\gamma)$, onde id_X é a função identidade $id_X(x) = x$, então τ é mais fino que γ se, e somente se, id_X for F-contínua. De fato, se τ é mais fina que γ, então $\gamma \subseteq \tau$. Seja B um aberto em γ, então $id_X^{-1}(B(x)) = B(x) \in \gamma \subseteq \tau, \forall x \in X$, implicando que $id_X^{-1}(B(x))$ é aberto em τ, logo id_X é F-contínua. Agora, se id_X é F-contínua, então $id_X^{-1}(B) \in \tau$, onde $B \in \gamma$. Mas note que $B = id_X^{-1}(B)$, então $B \in \tau$ e, portanto, $\gamma \subseteq \tau$.*

Exemplo 4.5. *[3] Seja (X,I^X) o espaço topológico fuzzy discreto e (Y,τ) um espaço topológico fuzzy arbitrário. E seja $f : (X,I^X) \to (Y,\tau)$, então f é F-contínua. Para mostrar isso, tome B um aberto em τ. Note que, I^X contém todo os conjuntos fuzzy em X, logo, como $f^{-1}(B)$ pertence a I^X, segue que f é F-contínua.*

Teorema 4.6. *[1] Se X e Y são espaços topológicos fuzzy, e $f : X \to Y$ uma função, então as afirmações abaixo estão relacionadas da seguinte forma: (a) e (b) são equivalentes; (c) e (d) são equivalentes, e (a) implica em (c).*

(a) A função f é F-contínua.

(b) A inversa de todo fuzzy fechado é fechado.

(c) Para cada conjunto fuzzy $A \in X$, a inversa de toda vizinhança de $f(A)$ é vizinhança de A.

(d) Para cada fuzzy A em X e cada vizinhança U de $f(A)$, existe uma vizinhança W de A, tal que $f(W) \subset V$.

Demonstração. De fato,

(a) $\Leftrightarrow$ (b) Seja B um aberto em Y, se f é F-contínua, então por definição $f^{-1}(B)$ é um aberto em X. Como B é aberto, então B^C é fechado, logo pela proposição (2.8), $f^{-1}(B^C) = [f^{-1}(B)]^C, \forall B \in Y$. Note que $f^{-1}(B)$ é um aberto, então $[f^{-1}(B)]^C$ é fechado.

(a) $\Rightarrow$ (c) Sejam f uma F-contínua, $A \in I^X$ e V uma vizinhança de $f(A)$, queremos mostrar que $f^{-1}(V)$ é vizinhança de A. Como V é vizinhança de $f(A)$, existe um aberto W, tal que, $f(A) \subset W \subset V$, assim $f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(W) \subset f^{-1}(V)$. Mas $A \subset f^{-1}(f(A))$ e $f^{-1}(W)$ é aberto (pois W é aberto e f é F-contínua), ou seja, temos $A \subset f^{-1}(W) \subset f^{-1}(V)$. E, portanto $f^{-1}(V)$ é vizinhança de A.

(c) $\Rightarrow$ (d) Seja V vizinhança de $f(A)$, então como por hipótese, $f^{-1}(V)$ é vizinhança de A, existe uma vizinhança W tal que,

$$A \subset W \subset f^{-1}(V) \Rightarrow f(A) \subset f(W) \subset f(f^{-1}(V)) \Rightarrow f(W) \subset V$$

.

(d) $\Rightarrow$ (c) Seja V uma vizinhança de $f(A)$, queremos mostrar que $f^{-1}(V)$ é vizinhança de A. Por hipótese, existe vizinhança W de A tal que $f(W) \subset V$, e pela definição de vizinhança $f(A) \subset f(W) \subset V$. Assim, $f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(f(W)) \subset f^{-1}(V)$, isto é, $A \subset f^{-1}(f(W)) \subset f^{-1}(V)$, o que implica que f^{-1} é vizinhança de A.

□

Proposição 4.7. *[2] Seja (X,τ) um espaço topológico fuzzy. Então toda função constante de (X,τ) em outro espaço topológico fuzzy é F-contínua se, e somente se, τ contém todos os conjuntos fuzzy constantes em X.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Supondo que toda função constante de (X,τ) em qualquer espaço fuzzy é F-contínua, e considerando γ uma topologia fuzzy em $[0,1]$ definida por $\gamma = \{\overline{1}, \overline{0}, id_{[0,1]}\}$. Seja $j \in \mathbb{R}, 0 \leq j \leq 1$. A função constante $f : X \to [0,1]$ definida por $f(x) = k, \forall x \in X$ é F-contínua, por hipótese, então $f^{-1}(id_{[0,1]} \in \tau$. Mas para $x \in X$, segue que $f^{-1}(id_{[0,1]})(x) = id_{[0,1]}(f(x)) = id_{[0,1]}(k) = k$, logo $k \in \tau$.

($\Leftarrow$) Agora, supondo que τ contém todos os conjuntos fuzzy constantes em X, e considerando a função constante $f : (X,\tau) \to (Y,\gamma)$ definido por $f(x) - y_0$. Se $A \in \gamma$, então $\forall x \in X$ temos que $f^{-1}(A(x)) = A(f(x)) = A(y_0)$. E como $A(y_0)$ é constante, segue que, $f^{-1}(A(x))$ é constante e, portanto está em X, ou seja, é aberto em τ. Logo, f é F-contínua. □

Note que em topologia geral, as funções constantes entre os espaços topológicos são contínuas, entretanto na topologia fuzzy, com a definição dada por Chang, para que uma função constante seja contínua é preciso da condição apresentada na proposição (4.7). Por esse motivo, Lowen em seu artigo *Fuzzy Topological Spaces and Fuzzy Compactness* **[4]** sugere uma alteração na definição de topologia fuzzy. A definição recomendada por Lowen é a seguinte:

Definição 4.8. *A família de conjuntos fuzzy $\delta \in I^X$ é uma topologia fuzzy se, e somente se,*

i) $\forall \alpha, \alpha \in \delta$,

ii) $\forall A, B \in \delta \Rightarrow min[A,B] \in \delta$,

iii) $\forall (A_j)_{j \in J} \in \delta$ *segue que* $max(A_j) \in \delta$

Com essa nova definição, fica claro que todas as funções contínuas entre espaços topológicos fuzzy serão F-contínuas, pois as funções contínuas serão abertos para todas as topologias fuzzy, cumprindo então as hipóteses da proposição (4.7). Além disso, a topologia de

Chang é mais densa que a topologia de Lowen e como a topologia de Lowen é uma topologia de Chang, então os resultados encontrados por Chang continuam sendo válidos.

No teorema a seguir, Lowen definiu uma função que transforma a topologia geral em uma topologia fuzzy de Lowen.

Teorema 4.9. *[3] Seja (X,δ) um espaço topológico padrão. A seguinte coleção é um espaço topológico fuzzy (de Lowen)*

$$\omega(\delta)=\{A\in I^X|\alpha(A)\in\delta,\forall\alpha\in[0,1)\}$$

Demonstração. Seja $C\in[0,1]^X$ qualquer conjunto fuzzy constante onde $C(x)=t,x\in X$ e $t\in[0,1]$. Então $\forall\alpha\in[0,1]$, $\alpha(C)=X$ se $t>0$, e $\alpha(C)=\emptyset$ se $t\leq\alpha$. Nos dois casos, $\alpha(C)\in\delta$ e, assim, $C\in\omega(\delta)$. Logo $\omega(\delta)$ contém todos os conjuntos fuzzy constantes.
Sejam $A,B\in\omega(\delta)$, então $\alpha(A),\alpha(B)\in\delta,\forall\alpha[0,1)$. Como $\alpha(A\cap B)=\alpha(A)\cap\alpha(B)\in\delta$, segue que $A\cap B\in\omega(\delta),\forall\alpha\in[0,1)$. E, se $A_j\in\omega(\delta), j\in J$, então $\forall\alpha\in[0,1]$ temos $\alpha(A_j)\in\delta$. Como $\alpha(\bigcup_{j\in J}A_j)=\bigcup_{j\in J}(A_j)\in\delta$, segue que $\bigcup_{j\in J}A_j\in\omega(\delta)$, logo, $(X,\omega(\delta))$ é um espaço topológico fuzzy (de Lowen). □

Note que A é um conjunto fuzzy aberto em $(X,\omega(\delta))$ se, e somente se, todos os $\alpha(A)$ forem abertos em (X,δ).

Definição 4.10. *[3] O espaço topológico fuzzy de Lowen $(X,\omega(\delta))$ de um espaço topológico (X,δ) é chamado de **topologia fuzzy induzida**.*

A conexão de ι definido no teorema **(3.9)** com ω do teorema **(4.9)** é dada por $\iota(\omega(\delta))=\delta$. Para mostrar isso, basta usar a definição de ι e ω, isto é,

$$\omega(\delta)=\{A\in I^X|\alpha(A)\in\delta,\forall\alpha\in[0,1)\}$$

$$\iota(\tau)=\{\alpha(A)|A\in\tau,\alpha\in[0,1)\}$$

então,

$$\begin{aligned}\iota(\omega(\delta)) &= \{\alpha(A)|A\in\omega(\delta),\alpha\in[0,1)\}\\ &= \{\alpha(A)|\alpha(A)\in\delta,\alpha\in[0,1)\}\\ &\subseteq \delta.\end{aligned}$$

Agora vamos mostrar que $\delta\subseteq\iota(\omega(\delta))$.

Seja $A \in \delta$, tal que,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \tag{4.1}$$

e, para todo $\alpha \in [0,1), \alpha = \{x | \chi_A(x) \geq \alpha\} = A$. Logo, se $\forall \alpha \in [0,1), \alpha(\chi_A) = A \in \delta$, então $\chi_A \in \omega(\delta)$, mas pela definição de $\iota(\tau)$, segue que, $\alpha(\chi_A) \in \iota(\omega(\delta))$, logo $A \in \iota(\omega(\delta))$, logo, $\delta \subseteq \iota(\omega(\delta))$, e assim, $\iota(\omega(\delta)) = \delta$.

Entretanto, para uma topologia fuzzy τ em X, $\omega(\iota(\tau))$ pode não ser igual a τ. O exemplo a seguir mostra que $(\iota(\tau)) \neq \tau$.

Exemplo 4.11. *[3] Seja $X = \{a,b\}$ e $\tau = \{\overline{0}, \overline{1}, \{(a, \frac{1}{3}), (b, \frac{1}{2})\}\}$. Temos que*

$$\iota(\tau) = \{\overline{0}, \overline{1}, \{b\}\}$$

e

$$\omega(\iota(\tau)) = \overline{0}, \overline{1}, \{(a,r),(b,s) | r,s \in [0,1], r \leq s\}\}$$

logo, $\omega(\iota(\tau)) \neq \tau$.

Teorema 4.12. *[3] Seja (X,δ) e (Y,φ) dois espaços topológicos, e seja $f : X \to Y$. Para as topologias fuzzy induzidas $\omega(\delta)$ e $\omega(\varphi)$, seguem as seguintes propriedades:*

(1) f é F-contínua se, e somente se, f for contínua.

(2) f é F-aberta se, e somente se, f for aberta.

Demonstração. Vamos mostrar **(1)**.

Se f é F-contínua e seja B um conjunto ordinário aberto em (Y,φ), então B é um conjunto fuzzy aberto em $(Y, \omega(\varphi))$. Então $f^{-1}(B)$ é um conjunto fuzzy aberto em $(X, \omega(\delta))$. Assim, o α-corte de $f^{-1}(B)$ para $\alpha = 0$ é aberto em (X,δ), logo $f^{-1}(B)$ é um conjunto ordinário aberto em (X,δ), logo f é contínua.

($\Leftrightarrow$) Supondo que f é contínua, e seja B um conjunto fuzzy aberto em $(Y, \omega(\varphi))$. Então, todos os cortes $\alpha(B), \alpha \in [0,1)$ são conjuntos ordinários abertos em (Y,φ). Então, por f ser contínua, $\forall \alpha \in [0,1), f^{-1}(\alpha(B))$ é um conjunto ordinário em (X,δ). Agora note que $\forall \alpha \in [0,1)$ e $x \in X$, segue que $x \in f^{-1}(\alpha(B)) \Leftrightarrow f(x) \in \alpha(B) \Leftrightarrow B(f(x)) > \alpha \Leftrightarrow f^{-1}(B)(x) > \alpha \Leftrightarrow x \in \alpha(f^{-1}(B))$, assim $f^{-1}(\alpha(B)) = \alpha(f^{-1}(B))$. Assim, $\alpha(f^{-1}(B))$ é um conjunto ordinário aberto em (X,δ), e $f^{-1}(B)$ é um conjunto fuzzy aberto em $(X, \omega(\delta))$, logo f é F-contínua.

Para demonstrar **(2)**, usaremos que $\alpha(f(A)) = f(\alpha(A))$. Para mostrar isso basta tomar $y \in f(\alpha(A)), \exists x \in \alpha(A)$ tal que $y = f(x)$ e $A(x) > \alpha$, além disso, $sup\{A(z)|z \in f^{-1}(y)\} > \alpha$, assim $f(A)(y) > \alpha$ logo $y \in \alpha(f(A))$. De forma análoga, $y \in \alpha(f(A))$ implica em $y \in f(\alpha(A))$. Logo, $\alpha(f(A)) = f(\alpha(A))$.

($\Rightarrow$) Suponha que f é F-aberto, e seja A um conjunto ordinário em (X,δ), logo, A é um conjunto fuzzy aberto em $(X,\omega(\delta))$. Então, $f(A)$ é um conjunto fuzzy aberto em $(Y,\omega(\varphi))$, assim, o corte de $f(A)$ para $\alpha = 0$ é aberto em (Y,φ). Então, $f(A)$ é um conjunto aberto em (Y,φ), e, portanto f é aberto.

($\Leftarrow$) Suponha que f é uma função aberta e A é um conjunto fuzzy aberto em $(X,\omega(\delta))$. Assim, todos os cortes $\alpha(A), \in [0,1)$ são conjuntos ordinários em (X,δ). Mas f é aberto, então $f(\alpha(A))$ é aberto em $(Y,\varphi), \forall \alpha$. E como $\alpha(f(A)) = f(\alpha(A))$, $\alpha(f(A))$ é aberto em (Y,φ), assim $f(A)$ é um conjunto fuzzy aberto em $(X,\omega(\delta))$, logo f é F-aberto.

□

Proposição 4.13. *[3]*

1. *Se $f : (X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ é F-contínua entre espaços topológicos fuzzy, então $f : (X,\iota(\tau_1)) \to (Y,\iota(\tau_2))$ é contínua.*

2. *Se τ é uma topologia fuzzy gerada por alguma topologia δ em X, então para qualquer espaço topológico fuzzy (Y,ψ) se $f : (X,\tau) \to (Y,\psi)$ é F-contínua, então $f : (X,\delta) \to (Y,\iota(\psi))$ é uma função contínua.*

Demonstração. 1. Seja $\alpha(B) \in \iota(\tau_2)$, com $\alpha \in [0,1), B \in \tau_2$. Como f é F-contínua, segue que $f^{-1}(B) \in \tau_1$, então $\alpha(f^{-1}(B)) \in \iota(\tau_1)$. Como $f^{-1}(\alpha(B)) = \alpha(f^{-1}(B))$, $f^{-1}(\alpha(B)) \in \iota(\tau_1)$ e, portanto, $f : (X,\iota(\tau_1)) \to (Y,\iota(\tau_2))$ é contínua.

2. Como, $\iota(\tau) = \iota(\omega(\delta)) = \delta$, e usando a parte 1 da proposição, a demonstração está completa.

□

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi feito um estudo sobre a Topologia Fuzzy sugerida por Chang, que é uma extensão da topologia geral. Diferente da geral, a Fuzzy considera os abertos como sendo os conjuntos fuzzy definidos por Zadeh em 1965. Tanto Zadeh como Chang, ao criarem suas teorias, fizeram seguindo da forma mais natural a teoria padrão, de conjuntos e da topologia, respectivamente. Além disso, Chang consegue mostrar que é possível transformar uma topologia padrão em uma topologia fuzzy, através da função τ. E no capítulo 4 é apresentada a função ι que tranforma a topologia fuzzy em uma topologia padrão.

O estudo feito por Chang segue a mesma ideia que o estudo da Topologia Geral. Entretanto, no capítulo 4, foi possível observar que ao definir funções contínuas fuzzy, as funções constantes fuzzy não são sempre contínuas. Isto é, existem funções constantes que são Fuzzy contínuas, mas podemos dar exemplos de funções constantes que não são Fuzzy contínuas. Ou seja, a afirmação ”Toda função constante é contínua”não é válida na teoria Fuzzy abordada aqui. Por esse motivo, Lowen apresenta outra definição para topologia fuzzy, considerando assim todas as funções contantes como abertos. Como essa nova definição não contradiz a definição de Chang, todos os resultados apresentados continuam sendo válidos.

REFERÊNCIAS

[1] CHANG. C. L. Fuzzy Topological Spaces. Jornal of Mathematical Analysis and Aplications. vol. 24, p. 182-190, 1968.

[2] DAS. T. Fuzzy Topological Spaces. Thesis (Master of Science in Mathematics). National Institute of Technology, Rourkela, 2013.

[3] EL-DIAFY. S. N. Comparative Study of Fuzzy Topology. Thesis (Master of Mathematics). The Islamic University of Gaza, Gaza, PLE, 2014.

[4] LOWEN, R. Fuzzy Topological Spaces and Fuzzy Compactness. Jornal of Mathematical Analysis and Aplications. vol. 56, p. 621-633, 1976.

[5] MUNKRES. J. R. Topology. 2ed. Massachusetts: Prentice Hall, 2000.

[6] PALANIAPPAN. N. Fuzzy topology. India: Alpha Science, 2002.

[7] R. Srivastava, S. N. Lal and A. K. Srivastava, Fuzzy Hausdor topological spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 81 (1981), 497-506.

[8] ZADEH. L. A. Fuzzy Sets. Information and Control 8, p. 338-353, 1965