

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ADRIÉLI ALINE DUARTE

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MODELADOS PELA LEI DO  
RESFRIAMENTO DE NEWTON

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO  
2019

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ADRIÉLI ALINE DUARTE

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MODELADOS PELA LEI DO  
RESFRIAMENTO DE NEWTON

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Toledo, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Jocelaine Cargnelutti

Coorientador: Prof. Dr. Vanderlei Galina

TOLEDO

2019

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

O Trabalho de Conclusão de Curso intitulado "Resolução de problemas modelados pela lei do resfriamento de Newton" foi considerado **APROVADO** de acordo com a ata nº \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_\_

Fizeram parte da banca examinadora os professores:

Professora Orientadora Dra. Jocelaine Cargnelutti

Professor Coorientador Dr. Vanderlei Galina

Professor Me. Loreci Zanardini

Professora Ma. Karen Carrilho da Silva Lira

TOLEDO

2019

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por sempre iluminar minha jornada, concebendo-me saúde, perseverança, determinação e força para encarar os desafios que a vida nos impõe.

A minha família, ela que é minha base de sustentação, o alicerce que me ampara e impulsiona a jamais desistir e a traçar o meu caminho, com humildade e força. Em especial, meu pai, Adonias Duarte, e minha mãe, Cleonice de Oliveira, que não mediram esforços para me apoiar em todos os momentos. Não consigo imaginar como seria essa jornada sem tê-los ao meu lado incondicionalmente.

À minha professora orientadora Jocelaine Cargnelutti, que acreditou em mim enquanto orientanda desde o Projeto de Iniciação Científica Voluntária. Ela que não mediu esforços para que a cada nova correção, eu pudesse dar o melhor de mim, a fim de produzirmos um trabalho de qualidade. Agradeço pelas experiências e conhecimentos compartilhados que foram cruciais nessa reta do final do curso, na certeza que tenho grande admiração por sua pessoa, a qual me inspirarei para seguir em busca dos meus objetivos.

Ao meu coorientador Vanderlei Galina, por prestar todo apoio a pesquisa e realizar contribuições visando a qualidade do trabalho.

Agradeço ao professor Willian Francisco de Araújo, pessoa na qual também carrego grande admiração, ele que foi meu orientador no início da graduação ao me apresentar a Iniciação Científica, como uma oportunidade de novas experiências e conhecimentos. E em nome dele, agradeço todos os docentes do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, profissionais qualificados e preocupados com seus alunos, demonstrando grande companheirismo durante a graduação.

Faço um agradecimento especial a minha parceira de graduação que levarei para a vida, Adriana Livi, com quem compartilhei cada um dos momentos proporcionados ao longo do curso.

A todos meus amigos e pessoas de bem que sempre estiveram na torcida por mim.

## RESUMO

Este trabalho apresenta resultados de um estudo preliminar referente ao modelo da lei do resfriamento de Newton, desenvolvido, inicialmente, no Projeto Iniciação Científica, na Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Toledo. A princípio, fez-se o estudo das equações diferenciais de primeira ordem, em especial, as equações separáveis. Na sequência, o trabalho focou-se na teoria relativa a lei do resfriamento de Newton, tanto no modelo, quanto em suas possíveis aplicações, para então, definidos os estudos de caso, realizar os experimentos, quando possível, para posterior comparação de resultados, utilizando a solução analítica, por meio do método de separação de variáveis. Nesse sentido, o objetivo deste trabalho é estudar, compreender e aplicar a lei do resfriamento de Newton em problemas reais, permitindo a comparação entre a solução analítica e os dados experimentais. Frente aos resultados obtidos, é notável a importância das equações diferenciais ordinárias e sua ampla aplicabilidade em diversos fenômenos que nos cercam.

**Palavras-chave:** Equações Diferenciais Ordinárias. Lei do resfriamento de Newton. Modelagem Matemática. Coleta de dados e resolução analítica.

## ABSTRACT

This work presents results of a preliminary study referring to the Newton's law of cooling model, initially developed in the Scientific Initiation Project, at the Federal Technological University of Paraná, Campus Toledo. At first, the study of first order differential equations was made, in particular, separable equations. In the sequence, the work focused on the theory related to Newton's cooling law, both in the model and in its possible applications, for then, defining the case studies, carrying out the experiments, when possible, for later comparison of results, using the analytical solution, using the variable separation method. In this sense, the objective of this work is to study, understand and apply Newton's law of cooling in real problems, allowing the comparison between the analytical solution and the experimental data. In view of the results obtained, the importance of ordinary differential equations and their wide applicability in various phenomena that surround us is remarkable.

**Keywords:** Ordinary Differential Equations. Newton's law of cooling. Mathematical Modeling. Data collection and analytical resolution.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Termômetro infravermelho . . . . .	31
Figura 2 – Cafeteira italiana . . . . .	31
Figura 3 – Dados experimentais relativos a variação da temperatura do café no decorrer do tempo. . . . .	32
Figura 4 – Gráfico dos dados experimentais e da solução analítica . . . . .	35
Figura 5 – Erro Relativo. . . . .	36
Figura 6 – Erlenmeyer e termopar. . . . .	38
Figura 7 – Lamparinas. . . . .	38
Figura 8 – Dilatômetro Linear. . . . .	38
Figura 9 – Dilatômetro Linear . . . . .	39
Figura 10 – Dados experimentais relativos a variação da temperatura da barra no decorrer do tempo. . . . .	41
Figura 11 – Gráfico com os dados experimentais e a solução obtida por meio do modelo . . . . .	44
Figura 12 – Erros analisados no modelo. . . . .	45
Figura 13 – Comparativo entre hora da morte e hora estimada . . . . .	51

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Dados experimentais da temperatura do café. . . . .	32
Tabela 2 – Relação entre a temperatura obtida pelo experimento ( $T_e$ ) e a temperatura obtida pelo modelo ( $T_m$ ). . . . .	34
Tabela 3 – Dados experimentais da temperatura da barra de metal. . . . .	40
Tabela 4 – Relação entre a temperatura obtida por meio do experimento ( $T_e$ ) e a temperatura obtida de forma analítica ( $T_m$ ) . . . . .	43
Tabela 5 – Casos com a hora da morte conhecida . . . . .	50
Tabela 6 – Outros casos com a hora da morte conhecida . . . . .	52



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>OBJETIVOS</b>	<b>12</b>
2.1	OBJETIVO GERAL	12
2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	12
<b>3</b>	<b>JUSTIFICATIVA</b>	<b>13</b>
<b>4</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>14</b>
4.1	BREVE HISTÓRIA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	14
4.2	ALGUMAS APLICAÇÕES DAS EDOs	15
4.3	MODELAGEM MATEMÁTICA	18
<b>5</b>	<b>EQUAÇÕES DIFERENCIAIS</b>	<b>20</b>
5.1	DEFINIÇÃO E CLASSIFICAÇÃO DAS EDOs	20
5.2	SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	22
5.2.1	EDOs de Primeira Ordem Lineares	23
5.2.2	Variáveis Separáveis	24
5.2.3	Equações exatas	25
5.2.4	Fator de Integração	26
5.3	LEI DO RESFRIAMENTO DE NEWTON	27
<b>6</b>	<b>ESTUDOS DE CASO</b>	<b>30</b>
6.1	RESFRIAMENTO DE UMA XÍCARA DE CAFÉ	30
6.1.1	Características do Problema	30
6.1.2	Resultados e Discussões	31
6.2	RESFRIAMENTO DE UMA BARRA DE METAL	36
6.2.1	Características do Problema	36
6.2.2	Resultados e Discussões	39
6.3	DETERMINAÇÃO DO INSTANTE DA MORTE	45
6.3.1	Características do Problema	45
6.3.2	Resultados e Discussões	46
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>54</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>55</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta a modelagem, a coleta de dados e a resolução analítica de alguns problemas que envolvem equações diferenciais ordinárias (EDO's), governados pela lei do Resfriamento de Newton. Em particular, abordou-se um problema envolvendo o resfriamento de uma xícara de café, resfriamento de uma barra de metal e a determinação do instante da morte. Dos três estudos de caso abordados, nos dois primeiros foram realizados experimentos em laboratório, permitindo a comparação entre os dados experimentais e analíticos.

Um dos grandes questionamentos que permeiam o campo matemático se referem a aplicabilidade de seus conteúdos, onde segundo Boyce e DiPrima (1998), para maioria dos estudantes as possíveis aplicações em outros campos é o que motiva seus estudos. Muitas equações que governam os aspectos comportamentais do mundo físico, são relações que envolvem a taxa segundo a qual as coisas acontecem. Considerando a linguagem matemática, as relações são equações e as taxas são derivadas. Logo, equações contendo derivadas são equações diferenciais. Nesse sentido, as equações diferenciais constituem uma área com vasta variedade de aplicações em tantas outras ciências, como na física, na biologia, na economia, dentre outras.

As equações diferenciais constituem um ramo muito importante da matemática, nesse sentido, Stewart (2006) coloca que as equações diferenciais venham a ser a aplicação mais importante do cálculo, sendo por meio delas, que pesquisadores modelam algum fenômeno em estudo.

Importantes fenômenos são modelados pelas equações diferenciais. Por exemplo, na Biologia é observado o crescimento ou decréscimo de populações de bactérias, na física é possível modelar a medida de estabilidade de uma substância radioativa, também chamada de meia-vida, a taxa de resfriamento de um corpo em relação a temperatura do meio ambiente, por meio da Lei do Resfriamento de Newton, problemas de mistura, circuitos elétricos, e diversas outras aplicações em que as equações diferenciais se fazem presentes (ZILL; CULLEN, 2001).

Ao definir o tipo de método de resolução, leva-se em consideração o método mais adequado para o problema em evidência, ponderando suas vantagens e limitações. Quando possível, utiliza-se o método analítico, onde por meio da equação diferencial que descreve o problema em estudo é possível determinar a solução do mesmo, com base nas ferramentas do cálculo, como é o caso dos problemas em estudo nesse trabalho. Todavia, como cita Fortuna (2000), há poucos problemas em que suas soluções foram determinadas analiticamente. Para exemplificar tal fato, há os problemas modelados por

equações diferenciais parciais não lineares, como é o caso das equações de Navier-Stokes, e a teoria matemática dessa classe de equações ainda não está suficientemente desenvolvida para permitir a obtenção de soluções analíticas.

Complementando as análises teóricas tem-se também as técnicas experimentais. Elas podem ser obtidas quando for possível construir um modelo reduzido que possui as mesmas características do evento real. Os dados experimentais ajudam no processo de validação de modelos numéricos e fornecem uma previsão do evento. Para aplicar esta técnica é necessário que ocorra a viabilidade financeira e que reproduza, de maneira fiel, o evento real (YULISTIYANTO, 1997).

Com o surgimento do computador, uma nova alternativa surgiu e possibilitou a simulação de problemas por meio de métodos numéricos. Os métodos numéricos apresentam-se como ferramentas poderosas, ajudando a fornecer uma previsão do comportamento de problemas reais, complementando as análises teóricas e as técnicas experimentais (GALINA et al., 2016; GALINA et al., 2017; CARGNELUTTI et al., 2017b; CARGNELUTTI et al., 2017a).

Sabe-se que problemas reais de engenharia normalmente requerem o tratamento computacional, pois muitas vezes, é o procedimento mais prático ou mesmo o único, devido a sua complexidade na obtenção de dados sobre seu comportamento (FORTUNA, 2000).

Conforme Pescador e Oliveira (2016), pode-se apresentar soluções numéricas dos problemas reais de engenharia. Para casos específicos de equações diferenciais existem métodos clássicos que podem ser implementados e que retomam excelentes soluções.

Segundo Diacu (2004) o objetivo de um método numérico para uma equação diferencial é obter uma coleção de pontos  $(t_0, x_0), (t_1, x_1), \dots, (t_n, x_n)$  que rastreie uma curva que estima uma porção finita do gráfico da verdadeira solução passando pelo ponto  $(t_0, x_0)$ . Quanto mais pontos obtivermos e mais próximos eles estiverem da curva real, melhor é a aproximação, porém é preciso observar os critérios de estabilidade do método numérico.

Os estudos apresentados ao longo deste trabalho são embasados pela lei de resfriamento de Newton, responsável por descrever a taxa segundo a qual a temperatura de um corpo varia, sendo que esta é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio a qual o corpo está inserido. Para tanto, a modelagem da equação é realizada de acordo com as singularidades e características do corpo envolvido em cada um dos problemas a serem estudados (BARIVIERA et al., 2017). O modelo desenvolvido por Newton, trata-se de uma equação diferencial ordinária, isto é, há apenas uma variável independente, que nos estudos de caso, essa variável é o tempo.

No capítulo 6, intitulado Estudos de Caso, são apresentados os três problemas estudados. O primeiro refere-se ao resfriamento de uma xícara de café, admitindo que a

temperatura da mesma segue a lei de resfriamento de Newton, é possível verificar em que instante o café atingirá a temperatura para que seja consumido.

Na sequência verifica-se o tempo de resfriamento de uma barra de metal, realizando a comparação entre os dados experimentais e os dados determinados pelo modelo. O experimento é baseado no monitoramento do resfriamento de uma barra de metal e coleta de dados, para na sequência modelar o sistema de acordo com suas peculiaridades.

Por fim, o último problema estudado faz uso da lei do resfriamento de Newton para determinar o instante da morte. Esse problema configura uma aplicação na criminalística, em que peritos precisam indicar a hora do óbito do acontecimento em questão. Contudo, há condições específicas que influenciam no resultado, por exemplo, se o indivíduo estava com febre, logo, o procedimento usado em um indivíduo em condições normais não se aplicará nessa situação.

## 2 OBJETIVOS

### 2.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo deste trabalho é buscar problemas modelados pela lei do Resfriamento de Newton, estudá-los e resolvê-los utilizando técnicas de resolução analítica de equações diferenciais ordinárias e, quando possível, realizar a coleta de dados, permitindo a comparação dos resultados.

### 2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Fazer um estudo preliminar sobre a teoria relativa às equações diferenciais ordinárias de primeira ordem;
- Definir os problemas modelados pela Lei do Resfriamento de Newton que serão estudados;
- Estudar cada um dos problemas escolhidos;
- Analisar e aplicar as técnicas de resolução de equações diferenciais ordinárias adequadas para cada problema;
- Obter os dados experimentais dos estudos de caso, quando possível, e compará-los com os dados obtidos por meio da solução analítica;
- Elaboração de artigos científicos.

### 3 JUSTIFICATIVA

A matemática aplicada possibilita diversas linhas de pesquisa. Dentre elas, pode-se citar, problemas governados pelas equações diferenciais ordinárias.

As equações diferenciais ordinárias, apresentam grande aplicabilidade em vários contextos. Em particular, a lei do resfriamento de Newton permite, de modo simples, modelar problemas reais e fornecer previsão de resultados. Tal lei, descreve problemas reais de pequena e grande complexidade, como o resfriamento de uma xícara de café e de um bolo, até o resfriamento de um cadáver, de modo que, passando por algumas adaptações o modelo matemático fornece resultados coerentes com a situação analisada.

Portanto, o estudo as equações diferenciais, permite compreender os eventos ao nosso redor. Além disso, estreita-se a distância entre o teórico e a prática, permitindo que o aluno desenvolva habilidades de raciocínio e pesquisa científica.

## 4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo será apresentada uma breve história sobre as equações diferenciais, algumas aplicações e resultados interessantes sobre a modelagem de problemas envolvendo equações diferenciais ordinárias.

### 4.1 BREVE HISTÓRIA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

As equações diferenciais ordinárias (EDOs) são estudadas desde o século XV por Isaac Newton, introduzindo o cálculo diferencial e integral, e mais tarde no século XVII por Leibniz (ZILL, 2003). As mesmas constituem uma ferramenta indispensável tanto para a matemática aplicada, quanto para a pura, sendo desenvolvida e aprimorada ao longo dos tempos por vários matemáticos importantes, cujas contribuições foram necessárias para desenvolver muitas ideias fundamentais (SILVA, 2014).

Segundo Boyce e DiPrima (1998), o desenvolvimento e aperfeiçoamento das equações diferenciais estão profundamente ligados ao desenvolvimento da matemática como um todo e não podem ser separados dele. Para tais feitos, destacam-se algumas das principais tendências históricas e os matemáticos que tiveram maior destaque nessa área, devido suas valiosas contribuições.

As equações diferenciais começaram com o estudo do cálculo por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) durante o século XVII. Newton era muito sensível as críticas e começou a publicar seus resultados a partir de 1687. Embora tenha atuado relativamente pouco na área de equações diferenciais, seu desenvolvimento do cálculo e a elucidação dos princípios básicos da mecânica forneceram a base da aplicação das equações diferenciais no século XVII, especialmente por Euler (BOYCE; DIPRIMA, 1998). Newton classificou as equações diferenciais de primeira ordem de acordo com as formas,

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad (4.1)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(y), \quad (4.2)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (4.3)$$

Newton desenvolveu um método para resolver a equação (4.3), no caso em que  $f(x, y)$  é um polinômio em  $x$  e  $y$ , usando séries infinitas (BOYCE; DIPRIMA, 1998).

Leibniz nasceu em Leipzig e era basicamente um autodidata em matemática, já que seu interesse no assunto desenvolveu-se quando tinha vinte e poucos anos. Leibniz chegou

aos resultados fundamentais do cálculo de forma independente, embora um pouco depois de Newton, mas foi o primeiro a publicá-los, em 1684. Leibniz compreendia o poder de uma boa notação matemática, a notação para derivada  $dy/dx$  e o símbolo de integral são devidos a ele. Além disso, descobriu o método de separação de variáveis, a redução de equações homogêneas a equações separáveis, ambos em 1691, e também o procedimento para resolver equações lineares de primeira ordem em 1694. Como embaixador e conselheiro de diversas famílias reais alemãs, viajava muito e mantinha uma extensa correspondência com outros matemáticos, especialmente com os irmãos Bernoulli. Por meio dessa correspondência, muitos problemas de equações diferenciais foram resolvidos (BOYCE; DIPRIMA, 1998).

Os irmãos Jakob (1654 - 1705) e Johann (1667 - 1748) Bernoulli, de Basel, fizeram muito sobre o desenvolvimento de métodos para resolver equações diferenciais e para ampliar o campo de suas aplicações. Com a ajuda do cálculo, resolveram diversos problemas em mecânica formulando-os como equações diferenciais. Daniel Bernoulli (1700 - 1782), filho de Johann, tinha seus interesses voltados, principalmente, em equações diferenciais e suas aplicações (BOYCE; DIPRIMA, 1998).

O maior matemático do século XVIII, Leonhard Euler (1707-1783), foi aluno de Johann Bernoulli. Euler foi o matemático mais prolífico de todos os tempos, seus interesses incluíam todas as áreas da matemática e muitos campos de aplicação. Euler, identificou a condição para que equações diferenciais de primeira ordem sejam exatas, desenvolveu a teoria de fatores integrantes e encontrou a solução geral para equações lineares homogêneas com coeficientes constantes, estendendo-o para equações não-homogêneas. Além disso, propôs outros procedimentos para resolução das equações diferenciais, como séries de potências e a resolução numérica (BOYCE; DIPRIMA, 1998).

No final do século XVIII, muitos métodos elementares para resolver equações diferenciais ordinárias já tinham sido descobertos, assim, as inúmeras equações diferenciais que resistiram aos métodos analíticos levaram à investigação de métodos de aproximação numérica. Nos últimos 50 anos, o desenvolvimento de computadores cada vez mais poderosos e versáteis aumentou muito a gama de problemas que podem ser investigados, de maneira efetiva, por métodos numéricos. Apesar dos contínuos estudos ao longo dos tempos, as equações diferenciais constituem uma fonte fértil de problemas fascinantes e importantes ainda não resolvidos (BOYCE; DIPRIMA, 1998).

## 4.2 ALGUMAS APLICAÇÕES DAS EDOS

Modelos matemáticos são desenvolvidos para descreverem o comportamento de fenômenos existentes ao nosso redor, além de auxiliarem na compreensão dos mesmos. Frequentemente estes modelos constituem uma equação que possui derivadas de uma função desconhecida, ou seja, constitui uma equação diferencial. Essas equações permitem que se façam algumas previsões sobre o comportamento do sistema de circunstâncias



diversas (BOYCE; DIPRIMA, 1998).

Nesse sentido, as equações diferenciais amparadas em ferramentas do cálculo, formam uma área com ampla variedade de aplicações em diversas outras ciências, como na física, na biologia, nas sociais e econômicas. Assim, uma equação diferencial que descreve algum processo físico é chamada, muitas vezes, de modelo matemático do processo (BOYCE; DIPRIMA, 1998).

Na biologia, por exemplo, observa-se que a taxa de crescimento de certas bactérias é proporcional ao número de bactérias presentes no dado instante, e nessa situação verifica-se o crescimento ou decréscimo de uma população. Tal fenômeno pode ser representado pelo problema de valor inicial,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= kx, \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde  $k$  é uma constante de proporcionalidade.

Vale ressaltar que a eficácia desse cálculo não é válido para populações humanas, onde há variáveis características do objeto de estudo, como movimentos de emigração e imigração que não são considerados nesses cálculos.

Mediante a equação (4.4), é possível representar outros fenômenos, como a medida de estabilidade de uma substância radioativa, chamada de meia-vida, que representa o tempo gasto para metade dos átomos de uma quantidade inicial  $A_0$  se desintegrar ou se transformar em átomos de outro elemento (ZILL; CULLEN, 2001).

No artigo intitulado, "Determinação do instante de morte, falsificação de obras de arte e outros problemas curiosos", o autor, Gomes et al. (2017), apresenta problemas interessantes relacionados a aplicabilidade das equações diferenciais. Um dos problemas apresenta uma situação policial fictícia, muito comum ao meio criminalista, onde um indivíduo é encontrado morto e cabe aos legistas determinarem o instante de sua morte, por meio da temperatura de seu corpo. Gomes et al. (2017) faz uso da teoria matemática, apresentando os cálculos e determinando o momento da morte do indivíduo.

Outro problema que vale o destaque refere-se a falsificação de obras de arte. Gomes et al. (2017) faz um apanhado histórico de grandes falsários do meio artístico e, posteriormente, apresenta o estudo de Rutherford e sua equipe, por meio do qual, cientistas conseguiram medir substâncias específicas nas tintas utilizadas nas pinturas. Tal medição possibilitou estimar a idade das obras e, conseqüentemente, a autoria dos quadros. Matematicamente, a datação das obras pode ser expressa por uma equação diferencial, pois Rutherford provou que a radioatividade de uma substância é diretamente proporcional ao seu número de átomos, caracterizando o que é chamado de meia-vida radiotiva, já citada

anteriormente. A resolução da equação que modela o sistema se dá pelo método do fator integrante.

Segobia, Susin e Cargnelutti (2013) realizaram um estudo da lei de resfriamento de Newton aplicada em blocos cerâmicos, onde construíram uma espécie de "mini-paredes", buscando uma aproximação da situação real. Construiu-se um bloco aparente e outro revestido com um centímetro de argamassa em suas faces, tal que ambos ficaram na estufa por trinta minutos. Com posse de dados experimentais, foi possível então modelar a equação que caracterizava o resfriamento dos blocos, considerando suas particularidades.

No trabalho, "Aplicações das equações diferenciais na modelagem matemática da dilatação/contração térmica de cabos da rede elétrica", de Miotto, Cargnelutti e Machado (2013), o problema em estudo necessita de estudos tanto na área da Física, quanto da Matemática, verificando que grandes variações na temperatura causam dilatações e contrações nos fios da rede elétrica. Os dados do problema não foram obtidos experimentalmente, mas sim, na Companhia Paranaense de Energia (COPEL), onde tiveram informações pertinentes para melhor compreender o corpo em estudo. Na sequência os autores elaboraram o problema, para fazerem uso dos conceitos matemáticos referentes a EDOs.

Segundo Zill e Cullen (2001), a descrição matemática de um corpo caindo verticalmente sob influência da gravidade leva a uma equação diferencial de segunda ordem. A solução de tal equação fornece a posição do corpo em relação ao solo.

Asante (2013) em sua tese de mestrado intitulada "Application of newton's law of cooling case study: Estimation of time of death in murder", também realiza uma abordagem referente ao uso da lei de resfriamento de Newton na investigação criminal, determinando o momento da morte de um indivíduo. Tais estudos, serão retomados detalhadamente mais adiante.

Analisando o desenvolvimento dos problemas, observa-se que para obter uma equação diferencial que corresponde uma aplicação, é necessário o conhecimento adequado sobre a natureza do problema, bem como as variáveis abrangidas, as suposições aplicadas afim da simplificação, além das leis e princípios da física aplicados, esse processo é demonstrado por meio da modelagem matemática (PESCADOR; OLIVEIRA, 2016).

Nessa perspectiva, os problemas de pesquisa concentram-se na modelagem de uma equação diferencial ordinária, apoiada em dados provenientes de experimentos, de modo que, a mesma descreva o problema com baixos índices de erro. Para tal é necessário todo um estudo e compreensão do problema abordado, afim de verificar a autenticidade dos resultados obtidos com o comportamento real do sistema.

### 4.3 MODELAGEM MATEMÁTICA

Conforme Boyce e DiPrima (1998), equações diferenciais são de interesse para estudiosos de áreas além da Matemática, devido a possibilidade de serem utilizadas para a investigação de variados problemas nas ciências físicas, biológicas e sociais, permitindo, na maioria das vezes, realizar previsões a respeito do comportamento de processos naturais em diversas circunstâncias. Considerando a investigação científica, a modelagem matemática e a experimentação desempenham papel complementar e são criticamente importantes. Modelos matemáticos são validados comparando suas previsões, ou seja, cálculos, com os resultados experimentais, soluções analíticas ou com outros modelos existentes. Contudo, análises matemáticas podem direcionar a exploração experimental de maneira promissora, e ainda, indicar quais dados experimentais serão mais úteis.

De modo geral, modelos matemáticos possuem o formato de uma equação diferencial, isto é, uma equação com uma função desconhecida e suas derivadas. Logo, tais modelos são frequentemente usados, pois ao se analisar problemas reais, consideram-se suas mudanças e por meio delas prevê-se o comportamento futuro embasando-se na variação dos valores no momento presente (STEWART, 2006).

Nesse sentido, modelar exige conhecimentos interdisciplinares, que excedem os limites dos conhecimentos matemáticos. Segundo Bariviera et al. (2017) estudar uma equação diferencial ou, mais especificamente, obter a sua solução, permite que o sistema em questão seja avaliado de forma a prever seu comportamento a longo prazo. Aliada a modelagem matemática, obtém-se uma descrição aproximada e simplificada do processo real, podendo ser utilizada como uma estimativa quase que exata do comportamento futuro do evento em estudo.

O mesmo é posto por Boyce e DiPrima (1998), ao dizer que equações matemáticas são, na sua maioria, descrições aproximadas do processo real. Nesse sentido, pode-se considerar que equações matemáticas descrevem exatamente a operação de um modelo físico simplificado, modelo este que foi construído de modo a incorporar as características mais importantes do processo real, preservando suas peculiaridades. O autor destaca ainda, que ao modelar um sistema, ocorre que o processo matemático alcançado ser um tanto difícil, exigindo manipulações matemáticas que facilitem sua resolução, por exemplo, uma equação não-linear pode ser aproximada por uma linear, contudo, qualquer aproximação desse tipo também deve ser examinada do ponto de vista físico, para se ter certeza de que o problema matemático ainda reflete as características essenciais do processo físico que está sendo investigado.

Boyce e DiPrima (1998) conclui que a interação entre a compreensão do fenômeno físico e o conhecimento das técnicas matemáticas e suas limitações são características da matemática aplicada, sendo indispensável para a construção bem-sucedida de modelos

matemáticos úteis e processos físicos complexos.

No próximo capítulo serão apresentados os elementos essenciais para a elaboração do trabalho. Serão abordadas definições e propriedades sobre as equações diferenciais e os métodos de resolução analítica. Além disso, tem-se a apresentação da teoria relativa a Lei do Resfriamento de Newton e os estudos de caso que serão avaliados.

## 5 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

As equações diferenciais ordinárias (EDOs) constituem uma ferramenta indispensável tanto para a matemática aplicada, quanto para a pura, sendo desenvolvida e aprimorada ao longo dos tempos por vários matemáticos importantes, cujas contribuições foram necessárias para desenvolver muitas ideias fundamentais (SILVA, 2014).

Nesta seção será apresentada a classificação das equações diferenciais e os métodos de resolução das EDOs envolvidas.

### 5.1 DEFINIÇÃO E CLASSIFICAÇÃO DAS EDOS

Segundo Zill e Cullen (2001), uma equação diferencial é definida da seguinte forma:

**Definição 5.1 (Equação diferencial)** *Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de **equação diferencial**.*

As equações diferenciais podem ser classificadas quanto ao tipo, a ordem ou a linearidade. A classificação quanto ao tipo, segundo Boyce e DiPrima (1998), baseia-se em descobrir se a função conhecida depende de uma única variável independente ou de diversas variáveis independentes.

**Definição 5.2** *Se uma equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável dependente, ela é chamada de **equação diferencial ordinária (EDO)**(ZILL; CULLEN, 2001) .*

São exemplos de equações diferenciais ordinárias,

#### Exemplo 5.3

$$\frac{dy}{dt} - 5y = 1. \quad (5.1)$$

#### Exemplo 5.4

$$(y - x)dx + 4xdy = 0. \quad (5.2)$$

**Definição 5.5** *Uma equação que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é chamada de **equação diferencial parcial**.*

**Exemplo 5.6**

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (5.3)$$

**Exemplo 5.7**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}. \quad (5.4)$$

A ordem da derivada de maior ordem em uma equação diferencial é, por definição, a **ordem da equação** (ZILL; CULLEN, 2001).

**Exemplo 5.8** *A EDO a seguir, é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem (ou de ordem dois).*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x. \quad (5.5)$$

A equação

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (5.6)$$

é uma equação diferencial parcial de quarta ordem.

Os estudos apresentados na sequência se limitarão às equações diferenciais ordinárias, devido ao foco da pesquisa. Desse modo, uma equação diferencial ordinária de  $n$ -ésima ordem tem a seguinte forma geral,

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0. \quad (5.7)$$

Conforme Zill e Cullen (2001), as equações diferenciais são classificadas também, quanto a sua linearidade. Uma equação diferencial como (5.28) é dita **linear** se  $F$  é uma função linear das variáveis  $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ . De maneira análoga, a definição é aplicada nas equações diferenciais parciais. Desse modo, uma equação diferencial ordinária linear geral de ordem  $n$  pode ser escrita na forma,

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \quad (5.8)$$

Analisando a equação (5.8) podem ser observadas duas propriedades que a caracteriza:

- i) A variável dependente  $y$  e todas as suas derivadas são do primeiro grau, isto é, a potência de cada termo envolvendo  $y$  é 1.

ii) Cada coeficiente depende apenas da variável independente  $x$ .

Uma equação que não é linear é chamada de **não-linear**.

Destaca-se que a teoria matemática e os métodos utilizados para resolver equações diferenciais lineares são um tanto desenvolvidos, enquanto que a teoria para equações não-lineares é mais complexa e têm soluções muito mais variadas do que as equações lineares. Assim sendo, problemas considerados significativos são modelados por equações diferenciais lineares ou equações que podem ser aproximadas a equações lineares, tal processo é chamado de linearização e demonstra-se muito útil e eficaz principalmente para abordar equações não-lineares, já que há diversos fenômenos físicos representados por tais equações (BOYCE; DIPRIMA, 1998).

## 5.2 SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

**Definição 5.9** *Qualquer função  $f$  definida em algum intervalo  $I$ , que, quando substituída na equação diferencial, reduz a equação a uma identidade, é chamada de **solução** para a equação no intervalo.*

Na definição 5.9, o intervalo  $I$  pode representar um intervalo aberto  $(a, b)$ , um intervalo fechado  $[a, b]$ , um intervalo infinito  $(0, \infty)$ .

Uma solução para uma equação diferencial ordinária

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (5.9)$$

é uma função  $f$  que possui pelo menos  $n$  derivadas e satisfaz a equação, isto é

$$F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0, \quad (5.10)$$

para todo  $x$  no intervalo  $I$ .

Uma solução para uma equação diferencial que é identicamente nula em um intervalo  $I$  é em geral referida como **solução trivial**. Salienta-se que nem toda equação diferencial possui uma solução (ZILL; CULLEN, 2001).

Um problema que envolve uma equação diferencial sujeita à uma condição inicial  $y(x_0) = y_0$ , em que  $x_0$  é um número no intervalo  $I$  e  $y_0$  é um número real, é chamado de **problema de valor inicial**.

Ao se considerar um problema de valor inicial, antes de tudo, deve-se verificar se uma solução existe e, quando existe, se é a única solução para o problema, além disso, verifica-se o comportamento da solução obtida.

Apresenta-se o Teorema 5.10, esse que descreve as condições para a existência e a unicidade da solução de um equação diferencial de primeira ordem, conforme Guidorizzi (1988).

**Teorema 5.10 (Existência e unicidade para uma equação diferencial de 1ª ordem )**

Seja  $\Omega$  um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^2$  e seja  $f(x, y)$  definida em  $\Omega$ . Suponhamos que  $f$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sejam contínuas em  $\Omega$ . Seja  $(x_0, y_0)$  um ponto qualquer de  $\Omega$ . Nestas condições, a equação

$$y' = f(x, y) \quad (5.11)$$

admite uma solução  $y = y(x), x \in I$ , que satisfaz a condição inicial

$$y(x_0) = y_0, \quad (5.12)$$

onde  $I$  é um intervalo aberto contendo  $x_0$ .

Além disso, se  $y = \varphi_1(x)$  e  $y = \varphi_2(x)$  forem soluções da equação (5.11), definidas em intervalos abertos  $I_1$  e  $I_2$  contendo  $x_0$ , tais que

$$\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0), \quad (5.13)$$

então, para todo  $x \in I_1 \cap I_2$ ,

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x). \quad (5.14)$$

Devido a foco do trabalho não será apresentada a demonstração do Teorema 5.10, mas a mesma pode ser consultada no Livro Um curso de cálculo, de Hamilton Luiz Guidorizzi, vol. 4, de 1988, no apêndice 10, página 1613.

Neste trabalho, aborda-se apenas equações diferenciais de primeira ordem. Deste modo, o trabalho seguirá apresentando os tipos de EDOs e formas de resolução analítica apenas para as equações de interesse, ou seja, somente as EDO lineares de primeira ordem e os métodos de separação de variáveis e fatores integrantes.

### 5.2.1 EDOs de Primeira Ordem Lineares

Anteriormente, apresentou-se a forma geral de uma equação diferencial linear, dada pela equação (5.8). Porém, quando  $n = 1$  obtém-se uma equação linear de primeira ordem (ZILL; CULLEN, 2001).



**Definição 5.11 (Equação linear)** *Uma equação diferencial da forma*

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \quad (5.15)$$

*é chamada de equação linear de primeira ordem (ZILL; CULLEN, 2001).*

### 5.2.2 Variáveis Separáveis

Segundo Simmons e Krantz (2008), as equações separáveis constituem a primeira classe geral de equações com a propriedade que:

- i) pode-se imediatamente reconhecer os membros desta classe de equações;
- ii) tem-se um método simples e direto para (em princípio) resolver tais equações.

Desse modo, uma equação diferencial ordinária de primeira ordem é separável se for possível, por manipulações algébricas elementares, reescrever a equação de modo que todas as variáveis dependentes (usualmente variável  $y$ ) estejam de um lado e todas as variáveis independentes (usualmente a variável  $x$ ), do outro (SIMMONS; KRANTZ, 2008).

Assim, com base em Zill e Cullen (2001), apresenta-se a definição de uma equação separável procedida de sua solução.

**Definição 5.12 (Equação separável)** *Uma equação diferencial da forma*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}, h(y) \neq 0, \quad (5.16)$$

*é chamada **separável** ou tem **variáveis separáveis**.*

A equação (5.16) pode ser escrita como

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x). \quad (5.17)$$

Caso  $h(y) = 1$ , a equação (5.17) se reduz a

$$\frac{dy}{dx} = g(x). \quad (5.18)$$

Mas se  $y = f(x)$ , a solução da equação (5.17) é dada por,

$$h(f(x))f'(x) = g(x), \quad (5.19)$$

logo,

$$\int h(f(x))f'(x)dx = \int g(x)dx + c. \quad (5.20)$$

Mas  $dy = f'(x)dx$ , assim (5.20) é o mesmo que

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c. \quad (5.21)$$

A equação (5.21) indica como deve-se prosseguir na resolução de equações diferenciais separáveis, ou seja, basta integrar ambos os lados de

$$h(y)dy = g(x)dx. \quad (5.22)$$

Destaca-se que não há necessidade de usar duas constantes no processo de integração de uma equação separável, pois  $c$  é totalmente arbitrária (ZILL; CULLEN, 2001).

### 5.2.3 Equações exatas

**Definição 5.13** *Equação Exata* Uma expressão diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy \quad (5.23)$$

é uma **diferencial exata** em uma região  $R$  do plano  $xy$  se ela corresponde à diferencial total de alguma função  $f(x, y)$ . Uma equação diferencial da forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (5.24)$$

é chamada de uma **equação exata** se a expressão do lado esquerdo é uma diferencial exata.

Para identificar se expressão (5.23) é uma diferencial exata aplica-se um teste que é dado pelo Teorema a seguir (ZILL; CULLEN, 2001).

**Teorema 5.14 (Critério para uma Diferencial Exata)** *Sejam  $M(x, y)$  e  $N(x, y)$  funções contínuas com derivadas parciais contínuas em uma região  $R$  definida por  $a < x < b$ ,  $c < y < d$ . Então, uma condição necessária e suficiente para que*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy \quad (5.25)$$

seja uma diferencial exata é

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (5.26)$$

#### 5.2.4 Fator de Integração

Em determinadas situações, é possível converter uma equação diferencial não exata em uma equação exata multiplicando-a por uma função  $\mu(x, y)$  chamada *fator de integração*. Porém, a equação exata resultante

$$\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0 \quad (5.27)$$

pode não ser equivalente à original no sentido de que a solução para uma é também a solução para a outra. Assim, a multiplicação pelo fator de integração pode ocasionar perdas ou ganhos de soluções (ZILL; CULLEN, 2001).

Observa-se que a equação (6.9) pode ser dividida por  $a_1(x)$ , obtendo uma forma mais útil de uma equação linear, dada por,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x). \quad (5.28)$$

Supondo que a equação (5.28) admite uma solução, procura-se uma solução em um intervalo  $I$  no qual as funções  $P(x)$  e  $f(x)$  são contínuas.

Usando diferenciais, escreve-se a equação (5.28) como

$$dy + [P(x)y - f(x)]dx = 0. \quad (5.29)$$

Conforme Zill e Cullen (2001), equações lineares possuem a propriedade por meio da qual pode-se encontrar um função  $\mu(x)$  em que

$$\mu(x)dy + \mu(x)[P(x)y - f(x)]dx = 0 \quad (5.30)$$

é uma equação diferencial exata. Pelo Teorema 5.14 o lado esquerdo da equação (5.30) é uma diferencial exata se

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(x) = \frac{\partial}{\partial y}\mu(x)[P(x)y - f(x)] \quad (5.31)$$

ou

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu P(x). \quad (5.32)$$

Logo, a equação (5.32) é uma equação separável em que pode-se determinar o termo  $\mu(x)$ . Assim, tem-se,

$$\frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx, \quad (5.33)$$

$$\ln|\mu| = \int P(x)dx, \quad (5.34)$$

Desse modo,

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}. \quad (5.35)$$

Nota-se que  $\mu(x)$  é positiva para todo  $x$ , retomando a equação (5.30), tem-se

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)f(x). \quad (5.36)$$

Portanto,

$$\mu(x)y = \int \mu(x)P(x)dx + c, \quad (5.37)$$

onde  $c$  é uma constante arbitrária.

### 5.3 LEI DO RESFRIAMENTO DE NEWTON

Newton, quanto tinha quase 60 anos, publicou anonimamente um artigo intitulado "Scala Graduum Caloris", em 1701, em que descreve um método para medir temperaturas de até 1000°C, algo impossível aos termômetros da época. O método estava baseado no que hoje é conhecido como a Lei do Resfriamento de Newton, em que a taxa de diminuição da temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperaturas entre o corpo e o ambiente (BARIVIERA et al., 2017).

Segundo Silva (2014), um corpo com temperatura  $T$  que não possui nenhuma fonte de calor em seu interior, quando deixado em um meio ambiente, tende a uma temperatura ( $T_a$ ) do meio que o cerca. Desse modo, se a temperatura  $T$  do corpo é menor que a temperatura ambiente  $T_a$ , este corpo se aquecerá e, caso contrário, se resfriará. A temperatura do corpo é uma função contínua do tempo,  $T(t)$ .

Para formular a equação diferencial que descreve o problema, Figueiredo e Neves (2000) apresentam as seguintes hipóteses,

- A temperatura  $T$  é a mesma em todo corpo e depende apenas do tempo  $t$ ;

- A temperatura  $T_a$  do meio ambiente é constante com o tempo e é a mesma em todo o meio ambiente;
- O fluxo de calor através das paredes do corpo é proporcional à diferença entre as temperaturas do corpo e do meio ambiente.

Assumindo a veracidade de tais hipóteses, modela-se a equação diferencial, conforme Zill e Cullen (2001),

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a), \quad (5.38)$$

em que  $k$  é uma constante de proporcionalidade que depende do material do corpo, da massa e da superfície exposta ao ambiente (SILVA, 2014). Como, por hipótese, o corpo está esfriando, deve-se ter  $T > T_a$ , logo  $k > 0$ .

Tanto as características do corpo, quanto do meio em que ele está imerso são fundamentais no processo de modelagem. Por exemplo, mais serão lentos os processos de resfriamento ou aquecimento, se o objeto estiver em contato com o ar, este que é um bom isolante térmico, ao invés de estar imerso na água (SILVA, 2014). Assim sendo, a constante de proporcionalidade  $k$  depende de diversos fatores específicos de cada sistema analisado.

Observando a equação (5.38), tem-se uma equação diferencial de 1ª ordem e 1º grau de variáveis separáveis, que pode ser escrita como,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a), \quad (5.39)$$

$$\frac{dT}{(T - T_a)} = -kdt, \quad T \neq T_a. \quad (5.40)$$

Integrando ambos os lados da equação (5.40), segue que,

$$\int \frac{dT}{(T - T_a)} = - \int kdt, \quad (5.41)$$

$$\ln(T - T_a) = -kt + C_1, \quad (5.42)$$

tal que  $C_1$  é uma constante. Assim, aplicando a função exponencial em ambos os lados da equação (5.42) para obter a temperatura  $T$ , segue que,

$$T - T_a = e^{-kt+C_1}, \quad (5.43)$$

$$T - T_a = e^{-kt}e^{C_1}. \quad (5.44)$$

Considerando que  $e^{C_1} = C$ , obtém-se a solução geral da equação diferencial (5.38),

$$T(t) = T_a + Ce^{-kt}. \quad (5.45)$$

A condição inicial para a temperatura  $T(0) = T_0$  será utilizada para obter a constante de integração em (5.45), tem-se,

$$T(0) = T_a + Ce^{-k \cdot 0}, \quad (5.46)$$

$$T(0) = T_a + C, \quad (5.47)$$

$$C = T(0) - T_a. \quad (5.48)$$

Ao substituir (5.48) na equação (5.45), obtém-se a solução do problema, de modo que, a temperatura de um corpo em qualquer instante é dada pela função,

$$T(t) = T_a + (T(0) - T_a)e^{-kt}. \quad (5.49)$$

Com valores iniciais, a partir da equação (5.38), é possível determinar a equação diferencial ordinária que governa o resfriamento de um corpo, em um problema específico.

## 6 ESTUDOS DE CASO

### 6.1 RESFRIAMENTO DE UMA XÍCARA DE CAFÉ

#### 6.1.1 Características do Problema

Nesta aplicação admite-se que a temperatura de uma xícara de café comporta-se conforme a Lei de Resfriamento de Newton, considerando as características do estudo de caso, verifica-se em qual momento o café atingirá a temperatura adequada para o consumo, e não, a temperatura ambiente.

Antes de consumir o café, aguarda-se um pouco até que o mesmo esfrie até uma temperatura considerada agradável ao paladar. Contudo, caso o café esfrie até a temperatura ambiente ele se torna praticamente impróprio para o consumo. Considerando o comportamento de tal fenômeno, Issac Newton garante que a taxa de resfriamento de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio ao qual ele está inserido (ZILL; CULLEN, 2001).

Para modelar a equação que descreve o resfriamento da xícara de café, primeiramente faz-se o experimento para coleta de dados e, posteriormente, a resolução analítica para comparação de soluções.

Para a realização do experimento foram produzidos aproximadamente 100 ml de café, utilizando a cafeteira italiana, essa que é feita de alumínio e produz o café por meio da pressão do vapor. Após o café estar pronto, mensurou-se a temperatura em intervalos de tempo específicos, objetivando a organização da Tabela 1 de dados experimentais. As informações da Tabela 1 possibilitaram a definição da constante  $k$  de resfriamento e por meio dos conceitos matemáticos das equações diferenciais ordinárias, estimar o tempo de resfriamento até o momento em que a temperatura do café possibilitasse seu consumo.

Utilizaram-se os seguintes materiais:

- Termômetro Digital Infravermelho com mira laser;
- Xícara de café;
- Cafeteira italiana;
- Fogão;
- Cronômetro.

Nas Figuras 6.1.1 e 2 são apresentados alguns dos materiais utilizados, sendo eles o termômetro e a cafeteira, respectivamente.



Figura 1 – Termômetro infravermelho

Fonte: Autores (2018).



Figura 2 – Cafeteira italiana

Fonte: Autores (2018).

### 6.1.2 Resultados e Discussões

De acordo com Pescador e Oliveira (2016), admitiu-se que a temperatura agradável para consumir o café é de  $65,5^{\circ}\text{C}$ . Assim, realizou-se a mensuração da temperatura do café até o instante em que se atingiu tal temperatura. Os dados do experimento podem ser observados na Tabela 1.



Tabela 1 – Dados experimentais da temperatura do café.

Tempo (minutos)	Temperatura (°C) do café
0	83,2
1	81,3
2	79,0
3	76,1
4	73,5
5	70,6
6	69,7
7	66,2
8	64,9

Fonte: Autores (2018).

Na Figura 3, observa-se que a variação da temperatura ocorreu de modo gradativo, sem grandes oscilações, sendo que, no instante em que a mesma atingiu a temperatura apropriada para o consumo, encerraram-se as medições.

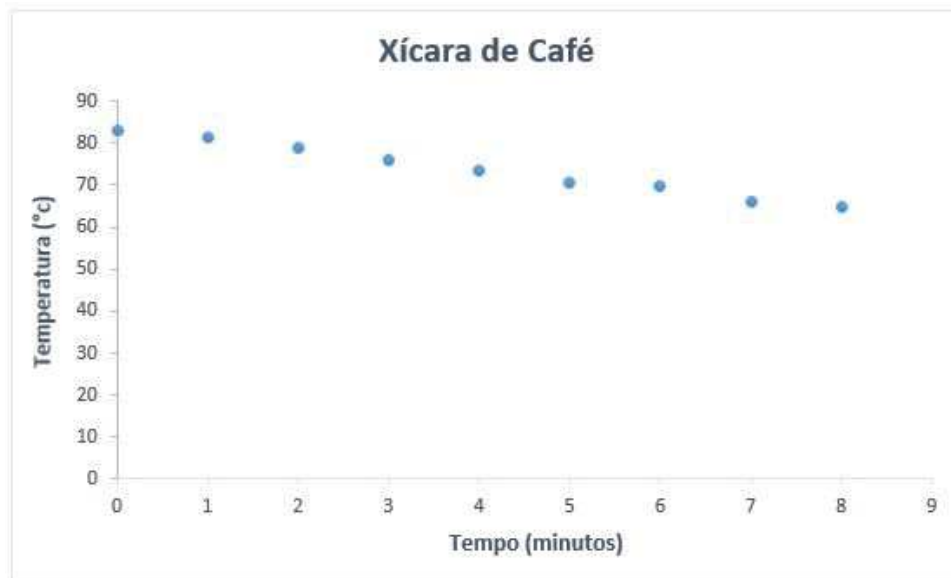


Figura 3 – Dados experimentais relativos a variação da temperatura do café no decorrer do tempo.

Fonte: Autores (2018).

Para modelar a EDO que descreve o problema, faz-se uso dos dados numéricos dispostos na Tabela 1, utilizando a temperatura ambiente, temperatura inicial do café e um valor de contorno, escolhendo a condição obtida no instante  $t = 1$ .

No momento em que o café ficou pronto a temperatura ambiente ( $T_a$ ) era de  $29^\circ\text{C}$ . Logo, modelando a EDO (5.38), tem-se,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 29), \quad (6.1)$$

$$\frac{dT}{(T - 29)} = -k dt, \quad (6.2)$$

$$\int \frac{dT}{(T - 29)} = \int -k dt, \quad (6.3)$$

$$\ln|T - 29| = -kt + C_1, \text{ com } C_1 \in \mathbb{R}. \quad (6.4)$$

Logo, a equação que define o sistema em estudo é dada por,

$$T(t) = 29 + Ce^{(-kt)}, \text{ onde } C = e^{C_1}. \quad (6.5)$$

Para determinar os valores de  $C$  e  $k$ , utiliza-se valores obtidos no experimento. Desse modo, conforme 1, para  $T(0) = 83,2$ , obtém-se o valor de  $C$ . Substituindo a condição em (6.5), tem-se,

$$83,2 = 29 + Ce^{(-k0)}, \quad (6.6)$$

$$83,2 - 29 = C, \quad (6.7)$$

$$C = 54,2. \quad (6.8)$$

Reescrevendo a equação (6.5),

$$T(t) = 29 + 54,2e^{(-kt)}. \quad (6.9)$$

A constante de proporcionalidade  $k$  é obtida utilizando  $T(1) = 81,3$ . Substituindo em (6.9) tem-se,

$$81,3 = 29 + 54,2e^{-k}, \quad (6.10)$$

$$52,3 = 54,2e^{-k}, \quad (6.11)$$

$$\frac{52,3}{54,2} = e^{-k}, \quad (6.12)$$

$$\ln|0,964944649| = -k, \quad (6.13)$$

$$k = 0,035684537. \quad (6.14)$$

Estipulados os valores de  $C$  e  $k$ , define-se a equação final que modela o resfriamento da xícara de café,

$$T(t) = 29 + 54,2e^{-0,035684537t}. \quad (6.15)$$

Por meio da equação (6.15) é possível verificar o instante em que o café atingirá a temperatura apropriada para o consumo. Conforme Pescador e Oliveira (2016), admiti-se a temperatura de 65,5°C como agradável para consumir-se o café. Assim,

$$65,5 = 29 + 54,2e^{-0,035684537t}, \quad (6.16)$$

$$\frac{65,5 - 29}{54,2} = e^{-0,035684537t}, \quad (6.17)$$

$$0,673431734 = e^{-0,035684537t}, \quad (6.18)$$

$$\ln|0,673431734| = -0,035684537t, \quad (6.19)$$

$$-0,395368647 = -0,035684537t, \quad (6.20)$$

$$\frac{-0,395368647}{-0,035684537} = t, \quad (6.21)$$

$$t = 11,07955101. \quad (6.22)$$

Portanto, o café poderá ser consumido aproximadamente 11 minutos após o seu preparo. Contudo, analisando a Tabela 1, verifica-se que tal temperatura estaria no intervalo de 7 a 8 minutos, frente a isso, apresenta-se a Tabela 2 com a temperatura experimental e analítica.

Tabela 2 – Relação entre a temperatura obtida pelo experimento ( $T_e$ ) e a temperatura obtida pelo modelo ( $T_m$ ).

Tempo (minutos)	Temperatura obtida pelo experimento (°C)	Temperatura obtida pelo modelo (°C)	Erro relativo (%) $\frac{ T_m - T_e }{T_m}$
0	83,2	83,2	0,000%
1	81,3	81,3	0,000%
2	79,0	79,5	0,660%
3	76,1	77,7	2,000%
4	73,5	75,9	3,100%
5	70,6	74,3	4,900%
6	69,7	72,7	4,100%
7	66,2	71,2	7,000%
8	64,9	69,7	6,800%

Fonte: Autores (2019).

Além da Tabela 2, apresenta-se a Figura 4 onde pode-se observar o comportamento das curvas, e conseqüentemente a disparidade dos dados obtidos experimental e analiticamente. A curva em vermelho representa a solução analítica, essa que é descrita por uma função exponencial, a qual tende a temperatura de consumo do café, isto é, 65,5°C. Os pontos em verde representam os dados experimentais, em que foram plotados

os pontos de acordo com os dados coletados. Ao se analisar os pontos em destaque, esses que referem-se aos dados, é possível verificar que inicialmente as temperaturas em ambos os métodos apresentam valores muito próximos, vindo a distanciar-se com o passar do tempo.

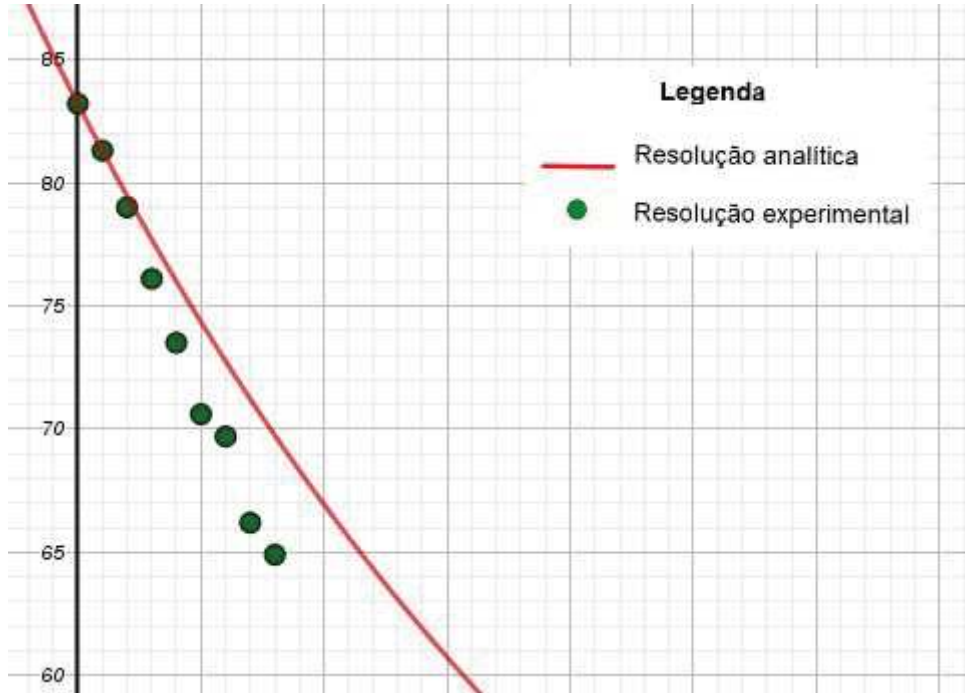


Figura 4 – Gráfico dos dados experimentais e da solução analítica

Fonte: Autores (2019).

Analisando a Tabela 2, examina-se que as temperaturas apresentam maior dispersidade a partir do instante 3 minutos, distanciando-se gradativamente. Tal fato, pode ser verificado na Tabela 2, em que o maior erro relativo é no instante 7, com um erro de 0,070, isto é, 7%, contudo o aumento passou a ser mais significativo já no instante 3, conforme já citado.

Por mais que tentou-se amenizar ao máximo possíveis erros, "esse esforço nunca será plenamente alcançado, pois normalmente não se conhece o valor verdadeiro de uma grandeza, o que torna essa definição difícil de ser explicada" (PEREIRA; BARBOZA, 2018). Na Figura 5, são expostos os erros encontrados no estudo por meio de um gráfico.

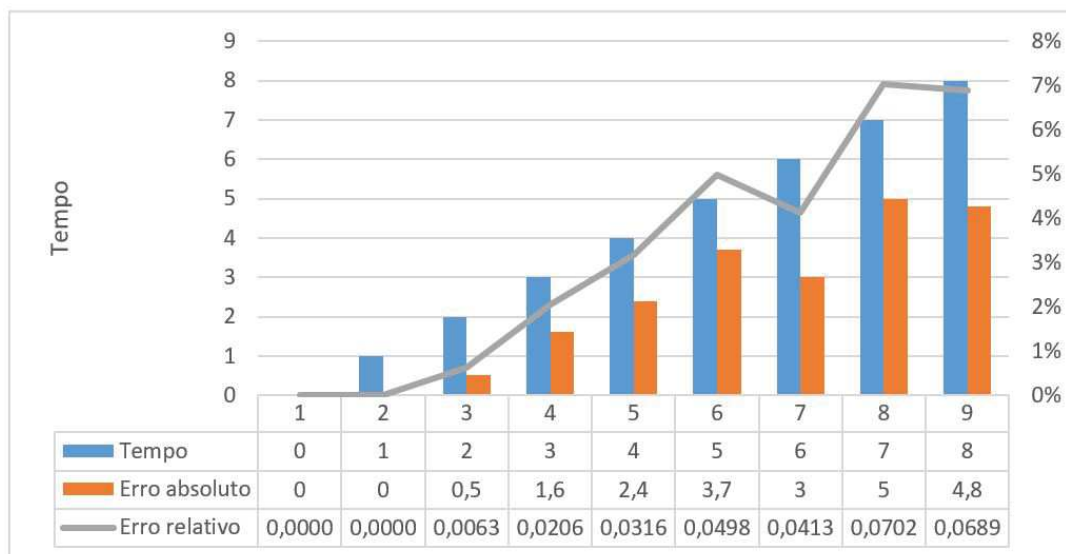


Figura 5 – Erro Relativo.

Fonte: Autores(2019).

Assim sendo, existe variação nos dados experimentais com os dados obtidos por meio da aplicação teórica, contudo, de acordo com os princípios físicos observa-se que não se pode ter valores exatos, isso se deve principalmente por haver grandezas físicas envolvidas, as medidas não são exatas. Isso ocorre, pois ao realizar experimentos há a influência de diversos fatores, tais como, a sofisticação do equipamento em uso, a habilidade do manuseador do equipamentos, e ainda os princípios básicos que regem tanto o instrumento, quanto o fenômeno em estudo, e não menos importante o conhecimento do valor ou medida real de grandeza, para verificar de fato, a veracidade dos medições coletadas. Desse modo, segundo PEREIRA et al. (2016) as únicas grandezas que têm seus valores verdadeiros conhecidos exatamente são aquelas que não dependem de dados experimentais para serem determinadas. Logo, ao se realizar atividades experimentais, o erro é passível de ocorrer.

Conforme Pereira e Barboza (2018) os erros analisados podem ser gerados pelo sistema de medidas, interação sensorial-meio, perturbação do meio ou erros conceituais, como ao passar do tempo os mesmos aumentaram, pode-se concluir que houve a interação com o meio, ou seja, a troca de calor com o meio influenciou nos resultados obtidos.

## 6.2 RESFRIAMENTO DE UMA BARRA DE METAL

### 6.2.1 Características do Problema

Nesta seção, a lei do resfriamento de Newton é utilizada na verificação do resfriamento de uma barra de metal por meio da solução analítica e experimental. O metal utilizado no experimento é o alumínio.

Frente as peculiaridades do corpo em estudo e conceitos alheios ao campo matemático, Siqueira, Freitas e Ribeiro (2010) definem condução como sendo a transferência de energia de uma partícula mais energética para outra menos energética devido as interações que elas estabelecem entre si. Logo, a condutividade térmica é a capacidade que um material possui de transmitir calor. Conforme Freire (2005), o calor é o fenômeno no qual uma energia é transferida de um corpo para o outro devido a diferença de temperatura entre eles.

Neste estudo de caso, o experimento é baseado no monitoramento da temperatura de uma barra de metal, que é aquecida pelo vapor da água que passará por seu interior e na sequência exposto ao ambiente, momento este em que iniciam-se as mensurações a fim de coletar os dados para definir a equação que modela o sistema. Uma análise interessante a pontuar referente a este problema consiste no fato do corpo observado apresentar características que o difere dos demais corpos, pois ele é um condutor térmico, com isso, verifica-se a influência desta característica na variação de sua temperatura com o passar do tempo.

Para o estudo serão necessários alguns materiais, sendo estes:

- Barra de alumínio;
- Termômetro - TD 801 - Termopar;
- Termômetro infra-vermelho com mira laser;
- Dilatômetro linear;
- Tubos de silicone;
- Erlenmeyer;
- Lamparina com álcool etílico 70%;
- Recipiente para recolha da água;
- Cronômetro.

A seguir, nas Figuras 6, 7 e 8, são ilustrados os materiais utilizados e como o experimento foi realizado.

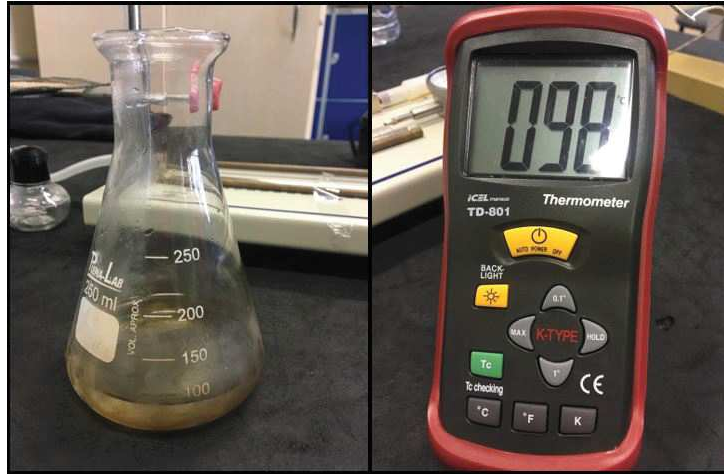


Figura 6 – Erlenmeyer e termopar.

Fonte: Autores (2019).



Figura 7 – Lamparinas.

Fonte: Autores (2019).



Figura 8 – Dilatômetro Linear.

Fonte: Autores (2019).

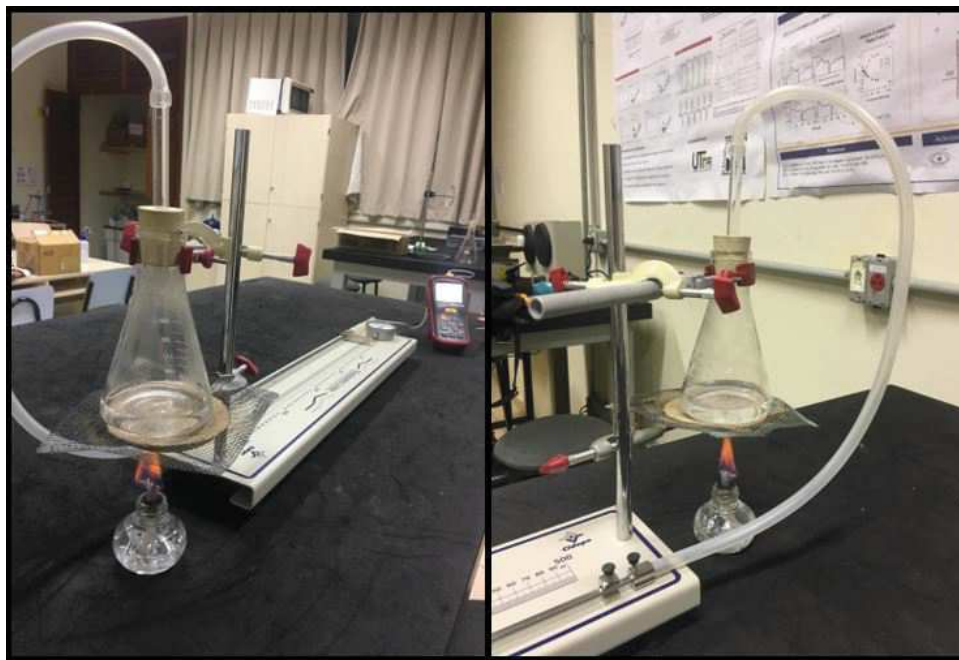


Figura 9 – Dilatômetro Linear

Fonte: Autores (2019).

### 6.2.2 Resultados e Discussões

Para realização do experimento a barra de alumínio foi fixada ao dilatômetro linear, de modo que, em cada uma de suas extremidades foram presos tubos de silicone, tal que um deles estava anexo ao erlenmeyer de 250 ml e o outro foi utilizado para escoar a água.

O erlenmeyer foi enchido com 100 ml de água e posicionado sobre o suporte de copos de prova. Para aquecer a água a lamparina com álcool foi disposta abaixo da vidraria do erlenmeyer. A verificação da temperatura da barra foi realizada por meio do termômetro digital, que estava conectado ao termopar que foi inserido no interior da barra. Destaca-se que os dados obtidos por meio do termopar se dão pelo contato com o corpo, nesse sentido, os resultados obtidos apresentam uma melhor precisão de acordo com o evento real, não estando tão suscetíveis aos erros.

A temperatura ambiente foi coletada pelo termômetro infravermelho com mira laser, por meio do qual constatou-se a temperatura de  $18,7^{\circ}\text{C}$ .

A etapa de aquecimento da barra de alumínio se deu da seguinte forma. A chama emitida pela lamparina passou a aquecer a água, até atingir a temperatura propícia para iniciar o processo de ebulição. Ao atingir o estado gasoso, a água passa pelo tubo que estava ligado ao erlenmeyer e circula no interior da barra proporcionando o aquecimento.

No momento em que a barra atingiu uma temperatura superior a  $98,6^{\circ}\text{C}$  o processo



foi interrompido e iniciaram-se as medições da temperatura da barra, em intervalos de 1 minuto. Os dados coletados podem ser observados na Tabela 6, onde estão dispostos o tempo e a temperatura da barra no instante.

Tabela 3 – Dados experimentais da temperatura da barra de metal.

Tempo (minutos)	Temperatura (°C) da barra
0	98,6
1	83,9
2	69,5
3	58,9
4	50,8
5	44,8
6	40,3
7	37,0
8	34,3
9	32,2
10	30,5

Fonte: Autores (2019).

Nessa perspectiva, salienta-se uma observação quanto a variação da temperatura de um instante para o outro, sendo uma diferença significativa nos primeiros minutos devido a temperatura ambiente ser baixa e ocasionando o resfriamento do corpo de maneira mais rápida, contudo, tal fator não influenciou no comportamento do fenômeno.

Associado a Tabela 6, determina-se o gráfico e conforme a Figura 10, onde se pode observar que até o instante  $t = 4$  a queda da temperatura foi mais rápida, vindo a apresentar-se mais estável nos instantes seguintes.

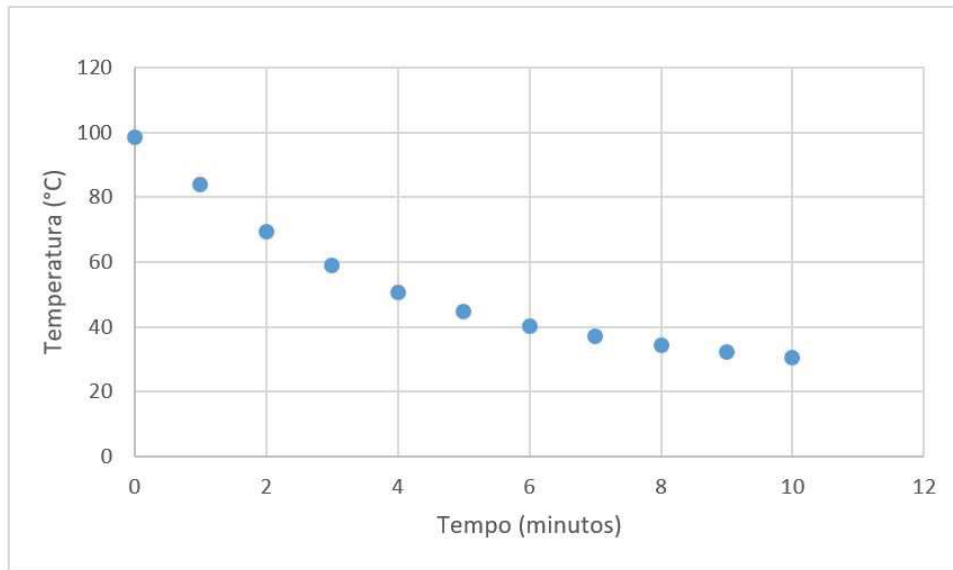


Figura 10 – Dados experimentais relativos a variação da temperatura da barra no decorrer do tempo.

Fonte: Autores (2019).

De posse dos dados apresentados na Tabela 6 modela-se a equação diferencial que descreve o problema. Para tal, utiliza-se o modelo de Newton, conforme apresentado na equação (5.49).

Consideram-se os valores,

$$T_a = 18,7, \quad (6.23)$$

$$T(0) = T_0 = 98,6, \quad (6.24)$$

para determinar o valor da constante  $C$  da equação (5.45). Logo, de acordo com (5.48) segue que,

$$C = 98,6 - 18,7 = 79,9. \quad (6.25)$$

Substituindo a constante  $C$  (6.25) em (5.49), tem-se,

$$T(t) = 18,7 + 79,9e^{-kt}. \quad (6.26)$$

Agora, basta determina o valor da constante de proporcionalidade  $k$ . De tal forma, toma-se como valor de contorno a temperatura da barra no instante  $t = 1$ , isto é,

$$T(1) = 83,9. \quad (6.27)$$

Substituindo (6.27) na equação (5.49), obtém-se,

$$83,9 = 18,7 + 79,9e^{-k}, \quad (6.28)$$

$$\frac{83,9 - 18,7}{79,9} = e^{-k}, \quad (6.29)$$

$$0,816020025 = e^{-k}, \quad (6.30)$$

$$\ln|0,816020025| = -k, \quad (6.31)$$

$$k = 0,203316383. \quad (6.32)$$

Assim, substituindo as constantes  $C$  e  $k$ , equações (6.25) e (6.32), respectivamente, na equação (5.49), obtém-se a equação que modela o resfriamento da barra de alumínio com o passar do tempo. A equação fica escrita como,

$$T(t) = 18,7 + 79,9e^{-0,203316383t} \quad (6.33)$$

Por meio da equação (6.33), a qual descreve a variação de temperatura da barra, é possível determinar o instante em que a temperatura da barra se aproximará da temperatura ambiente  $T_a$ . Pois o modelo apresenta uma função exponencial, desse modo, a barra nunca atingirá a temperatura ambiente. Para tal, considera-se  $T(t) = 18,7000001$ , ou seja, um valor muito próximo da temperatura ambiente. Assim, tem-se,

$$18,7000001 = 18,7 + 79,9e^{-0,203316383t}, \quad (6.34)$$

$$\frac{18,7000001 - 18,7}{79,9} = e^{-0,203316383t}, \quad (6.35)$$

$$1,251564456 \cdot 10^{-9} = e^{-0,203316383t}, \quad (6.36)$$

$$\ln|1,251564456 \cdot 10^{-9}| = -0,203316383t, \quad (6.37)$$

$$-20,4988715 = -0,203316383t, \quad (6.38)$$

$$\frac{-20,4988715}{-0,203316383} = t, \quad (6.39)$$

$$t = 100,8225269. \quad (6.40)$$

Assim sendo, a barra de alumínio se aproximará da temperatura ambiente, aproximadamente, 149 minutos após ser exposta ao ambiente, o que equivale a 2 horas e 29 minutos.

Visando a verificação da validação do modelo quanto sua aproximação aos valores obtidos experimentalmente, apresenta-se a Tabela 4, onde estão dispostas a temperatura

coletada pelo método experimental e a temperatura obtida pelo modelo estabelecido, além do erro relativo ao modelo que descreve o problema.

Tabela 4 – Relação entre a temperatura obtida por meio do experimento ( $T_e$ ) e a temperatura obtida de forma analítica ( $T_m$ )

Tempo (minutos)	Temperatura obtida pelo experimento (°C)	Temperatura obtida pelo modelo (°C)	Variação $ T_m - T_e $	Erro relativo (%) $\frac{ T_m - T_e }{T_m}$
0	98,6	98,6	0,0	0,000%
1	83,9	83,9	0,0	0,000%
2	69,5	71,9	2,4	3,330%
3	58,9	62,1	3,2	5,150%
4	50,8	54,1	3,3	6,090%
5	44,8	47,6	2,8	5,880%
6	40,3	42,3	2,0	4,730%
7	37,0	37,9	0,9	2,370%
8	34,3	34,4	0,1	0,209%
9	32,2	31,5	0,7	2,220%
10	30,5	29,1	1,4	4,810%

Fonte: Autores (2019).

Observando os instantes  $t = 8$  e  $t = 9$  na Tabela 4, a diferença entre a temperatura obtida experimentalmente e pelo modelo é praticamente insignificante. No instante  $t = 8$  a diferença é de  $0,1^\circ\text{C}$  e no instante  $t = 9$  é de  $0,7^\circ\text{C}$ . Logo, os instantes em que foram utilizados os dados experimentais a diferença é nula. Verifica-se também que o maior erro relativo é de  $0,0609$ , isto é, um erro de  $6,09\%$ , no instante 4, evidenciando a eficiência do modelo.

Contudo, reitera-se que houve o cuidado em diminuir fatores que contribuíssem com margens de erros mais significativos na realização do experimento, como foi o caso do uso do termômetro - TD 801 e o termopar, onde a temperatura era mensurada por meio do contato com o corpo e a temperatura era registrada no termômetro sem necessitar da participação direta do operador em cada instante da medição. Assim, erros originados no manuseio inexperiente do instrumento são reduzidos consideravelmente, influenciando no resultado final.

Na Figura 11, apresentam-se as curvas referentes aos dados experimentais e a resolução analítica do estudo de caso, além da reta que representa a temperatura ambiente. Conforme os dados analisados e considerações realizadas a partir da Tabela 4 se constatou a aproximação obtida com o modelo de Newton, verificando ainda que o comportamento das curvas referentes ao experimento e ao modelo é o mesmo, isto é, são representados por uma exponencial, onde verifica-se uma variação da temperatura mais rápida inicialmente,

porém, passados alguns instantes ela passa a diminuir e ambas tendem para a temperatura ambiente (reta em vermelho).

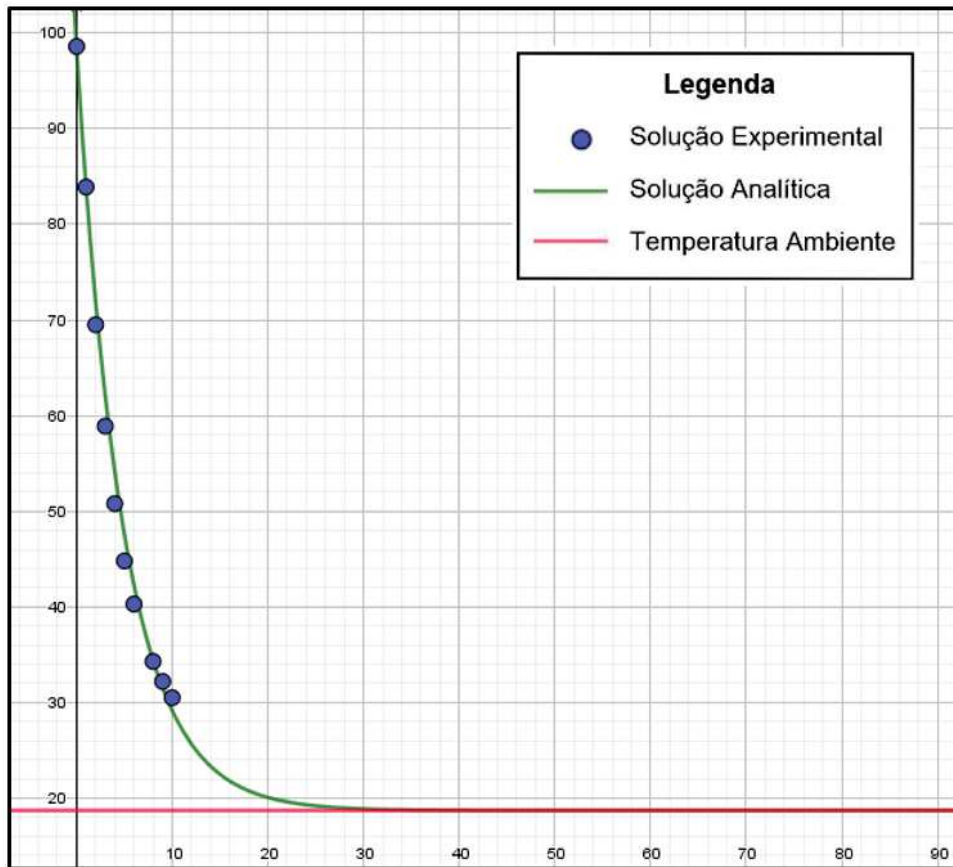


Figura 11 – Gráfico com os dados experimentais e a solução obtida por meio do modelo

Fonte: Autores (2019).

A fim de complementar a validação do modelo, apresenta-se a Figura 12, na qual estão dispostos os erros absoluto e relativo, de modo que, o último está expresso em percentuais. Analisando o gráfico verifica-se que o maior erro relativo é de 6,09% no instante 4, onde o erro absoluto também é mais acentuado.

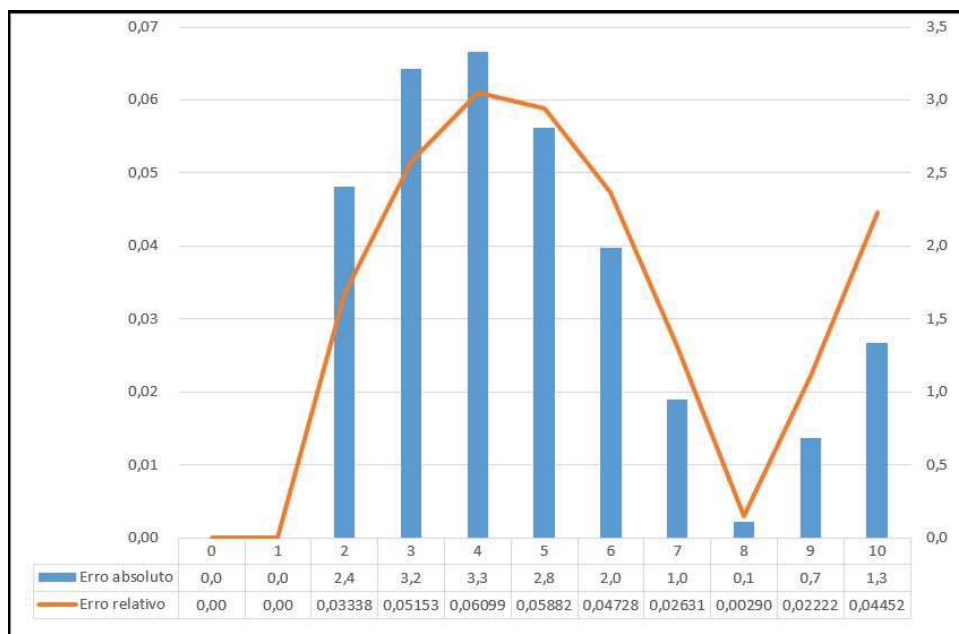


Figura 12 – Erros analisados no modelo.

Fonte: Autores (2019).

Nesse sentido, conclui-se que a lei do Resfriamento de Newton é, de fato, um modelo matemático que proporciona resultados satisfatórios, sendo uma ferramenta para estabelecer possíveis previsões, mostrando a aplicabilidade da Matemática em outras áreas e sua eficácia em descrever comportamentos de eventos reais.

### 6.3 DETERMINAÇÃO DO INSTANTE DA MORTE

#### 6.3.1 Características do Problema

A determinação da hora da morte de um ser humano é importante para esclarecer fatos em investigações criminais e civis. Nas investigações envolvendo a morte de um indivíduo pode-se, por exemplo, deliberar sobre suspeitos e na juntada de provas. Para casos envolvendo ações civis, pode-se determinar quem herda uma propriedade ou se uma apólice de seguro estava em vigor (ASANTE, 2013).

Em situações em que o tempo decorrido entre a morte e a descoberta da mesma é desconhecido, são utilizadas diversas técnicas médicas e científicas para determinar o tempo, as causas da morte, além do estágio de decomposição do corpo. Tais práticas constituem tarefas de peritos criminais, que no ato da investigação realizam todas essas verificações considerando as peculiaridades de cada caso em específico (ASANTE, 2013).

Segundo Lima et al. (2018), o homicídio, visto como a morte intencionalmente provocada, é um notável marcador da violência social. O Brasil, em 2016, atingiu 62.517 homicídios, o que é compatível com a taxa bruta de 30,3 homicídios para cada 100 mil

habitantes. Os dados são ainda mais alarmantes, ao verificar que apenas na última década, meio milhão de pessoas tiveram suas vidas ceifadas devido à violência intencional no Brasil, um número equivalente ao visto na Guerra da Síria desde o início do conflito há sete anos. Frente a realidade nacional, com elevado índice de homicídios, diversas investigações criminais são realizadas a fim de apurar as causas e condições do óbito.

A investigação forense é a prática de indicar as evidências e fatos, de forma legal, a serem apresentados em um tribunal de justiça (ASANTE, 2013). Logo, a determinação do instante da morte de um indivíduo, vítima de algum ato criminoso, é parte integrante da coleta de evidências do fato.

De acordo com Silva (2014), atualmente há várias técnicas para indicar a hora do óbito. Contudo, a forma mais simples e usada no mundo é a medição da temperatura do cadáver por meio de um termômetro, essa que segundo Asante (2013), por ser um método manual, é por vezes imprecisa para estimar o tempo.

Quando um indivíduo morre, a temperatura do seu corpo, que era em torno de  $36,5^{\circ}\text{C}$ , começa a diminuir e tende para a temperatura ambiente. Porém, existem condições a serem analisadas antes de aplicar o método, tais como, se o cadáver perdeu muito sangue ou se morreu devido à ingestão de algum tipo de veneno. Além disso, se tiver passado muito tempo após o óbito o método perde sua eficácia, já que fatores diversos afetam a perda de temperatura e justificam a margem de erro da técnica (SILVA, 2014).

Como já exposto ao longo do trabalho, as equações diferenciais lineares de primeira ordem configuram-se como excelentes aliadas na modelagem de problemas (GOMES et al., 2017). Assim, por meio de um modelo matemático, é possível determinar o instante aproximado que uma pessoa veio à óbito.

Desse modo, é possível verificar a complexidade da aplicação do modelo matemático em estudo, mostrando sua funcionalidade desde problemas relativamente simples, como no resfriamento de uma xícara de café, caso estudado na seção 6.1, até um caso criminalista. No estudo serão desconsiderados fatores que influenciem nos resultados de modo a amenizar possíveis erros, ou seja, no modelo a vítima terá falecido em condições normais de saúde.

### 6.3.2 Resultados e Discussões

Devido as dificuldades inerentes ao problema, não foi realizado o estudo experimental. Desse modo, o objetivo deste estudo de caso é informar ao leitor sobre a potencialidade da Lei do Resfriamento de Newton.

O modelo de resfriamento de Newton, representado pela equação (5.45) na Seção 5.3, é utilizado por Silva (2014) ao apresentar uma situação hipotética, onde com dados meramente ilustrativos determina-se a hora do óbito.

Conforme Asante (2013) a taxa de resfriamento de um corpo após a morte é

afetada por diversos fatores do meio ambiente, como a própria temperatura ambiente e ainda a temperatura do corpo no tempo da morte. Dentre os fatores, destacam-se:

- Tamanho do corpo: O resfriamento do corpo é relacionado com a área da superfície do corpo e sua massa.
- Roupas e coberturas: Tais artefatos isolam a temperatura do corpo, diminuindo a influência do ambiente sobre o mesmo. Um corpo vestido resfria-se metade da velocidade de um corpo nu;
- Movimento e umidade do ar: O resfriamento é considerado mais rápido em um atmosfera úmida, isso porque o ar úmido é um melhor condutor de calor. Assim, a umidade atmosférica afetará o resfriamento, ou seja, a evaporação onde um corpo ou sua roupa está molhada.
- Imerso na água: O resfriamento de um corpo que esteja imerso em água parada é duas vezes mais rápido se o corpo estivesse exposto ao ar. Quando o fluxo de água é constante, o corpo resfria três vezes mais rápido. Obviamente, o resfriamento será ainda mais rápido na água fria do que na água morna.

Devido a todos os fatores que atuam no processo de resfriamento de um corpo falecido, Asante (2013) considera algumas suposições a mais para descrever o problema que aprimoram as condições definidas pelo modelo de Newton:

- Nenhuma radiação forte;
- Nenhuma mudança severa na condição de resfriamento durante o período entre o momento da morte e o exame;
- A temperatura ambiente é mantida em 37,2°C.

Nesse sentido, Marshall e Hore (1962) observaram que o resfriamento do corpo é inicialmente influenciado por um fenômeno cujo efeito decai com o tempo. Tal fenômeno foi aproximado por uma função exponencial, da forma,

$$Ce^{(-pt)}, \text{comp} > 0. \quad (6.41)$$

Desse modo, a expressão que define a taxa de resfriamento de um corpo falecido é dada por (MARSHALL; HORE, 1962),

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) + Ce^{(-pt)}, \quad (6.42)$$



onde,

$t$ : Tempo;

$T$ : Temperatura do corpo em °C;

$T_a$ : Temperatura ambiente em °C;

$k$  e  $p$ : Constantes de proporcionalidade, tal que,  $k > 0$  e  $p > 0$ ;

$C$ : Constante.

A equação (6.42), que modela o problema em estudo, é uma equação diferencial de primeira ordem, a qual determina-se sua solução por meio do método dos fatores integrantes.

Reescrevendo a equação (6.42), obtém-se,

$$\frac{dT}{dt} + k(T - T_a) = Ce^{(-pt)}. \quad (6.43)$$

Pelo método dos fatores integrantes, determina-se o fator de integração

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt},$$

tal que,

$$p(t) = k.$$

Logo,

$$\mu(t) = e^{\int kdt}, \quad (6.44)$$

$$\mu(t) = e^{kt}. \quad (6.45)$$

Multiplicando a equação (6.43), pelo fator de integração  $\mu(t)$ , (6.45), segue que,

$$\frac{dT}{dt}e^{kt} + k(T - T_a)e^{kt} = Ce^{(-pt)}e^{kt}, \quad (6.46)$$

$$\frac{dT}{dt}e^{kt} + kTe^{kt} = kT_ae^{kt} + Ce^{(-pt)}e^{kt}. \quad (6.47)$$

Observa-se que o lado esquerdo da equação (6.47) pode ser reescrito utilizando a regra da cadeia para as derivadas. Assim, tem-se,

$$[Te^{kt}]' = kT_ae^{kt} + Ce^{-pt}e^{kt}. \quad (6.48)$$

Integrando ambos os lados da equação (6.48), segue que,

$$Te^{kt} = \int kT_a e^{kt} dt + \int C e^{-pt} e^{kt} dt + C_1, \quad (6.49)$$

$$Te^{kt} = \int kT_a e^{kt} dt + \int C e^{(k-p)t} dt + C_1, \quad (6.50)$$

$$Te^{kt} = T_a e^{kt} + \frac{C}{k-p} e^{(k-p)t} + C_2. \quad (6.51)$$

Para obter-se a solução, multiplica-se (6.51) por  $e^{-kt}$ , assim tem-se,

$$T = T_a + \frac{C}{k-p} e^{(k-p)t} e^{-kt} + C_2 e^{-kt}.$$

Realizando algumas simplificações matemáticas e substituindo  $C_2 = A$ , a solução da equação (6.43) é dada por,

$$T(t) = T_a + \frac{C}{k-p} e^{-pt} + A e^{-kt}, \text{ com } k \neq p. \quad (6.52)$$

Utilizando dados provenientes da coleta de dados, obtém-se A e C. Ao considerar  $T(0) = T_0$ , e substituir em (6.52), tem-se,

$$T_0 = T_a + \frac{C}{k-p} + A, \quad (6.53)$$

$$A = T_0 - T_a - \frac{C}{k-p}. \quad (6.54)$$

Substituindo a equação (6.54) na equação (6.52), obtém-se,

$$T(t) = T_a + \frac{C}{k-p} e^{-pt} + (T_0 - T_a - \frac{C}{k-p}) e^{-kt} \quad (6.55)$$

$$T(t) = T_a + \frac{C}{k-p} e^{-pt} + T_0 e^{-kt} - T_a e^{-kt} - \frac{C}{k-p} e^{-kt} \quad (6.56)$$

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a) e^{-kt} + \frac{C}{k-p} (e^{-pt} - e^{-kt}). \quad (6.57)$$

Como  $C = k(T_0 - T_a)$  a solução (6.57) é reduzida, obtendo-se a solução final,

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a) e^{-kt} + \frac{k}{k-p} (T_0 - T_a) (e^{-pt} - e^{-kt}). \quad (6.58)$$

Desse modo, a equação (6.58), apresentada por Asante (2013) em seu trabalho, conforme o autor conclui, é o modelo mais apropriado para determinar a hora da morte.

No estudo desenvolvido por Asante (2013), em sua tese, foram analisados 59 casos obtidos em fontes literárias, onde a hora da morte era conhecida, possibilitando a comparação do resultado determinado computacionalmente.

Em Asante (2013) coletaram-se as medidas referentes a temperatura retal e a temperatura ambiente, além do peso do corpo. Priorizando resultados aproximados, considerou-se também a condição da roupa, ou seja, se o indivíduo estava vestido ou nu. Sob influência das variáveis envolvidas no problema, realizaram-se as verificações quanto a hora conhecida e o tempo determinado, usando o modelo estabelecido, por meio de ferramentas computacionais. Nesse sentido, apresenta-se a Tabela 5, com 9 dos casos analisados e as informações pertinentes para a aplicação do modelo. Ressalta-se que nos casos apresentados todos os indivíduos estavam vestidos, além disso, as informações da Tabela 5 que se referem dizem respeito ao período pós-morte do indivíduo, isto é, há quantas horas o sujeito veio a óbito.

Tabela 5 – Casos com a hora da morte conhecida

Caso	Temperatura Ambiente Média (°C)	Temperatura retal (°C)	Peso do corpo	Período pós-morte	Período pós-morte estimado pelo modelo
1	16,00	33,1	62	5,80	5,690
2	22,75	32,8	57	7,70	7,770
3	18,75	33,5	96	11,3	6,980
4	26,15	33,3	78	11,6	10,04
5	26,90	33,0	116	29,1	14,05
6	1,500	16,7	78	16,6	16,64
7	5,250	28,3	69	8,40	7,810
8	17,45	26,3	71	16,9	15,14
9	16,45	25,4	56	13,9	14,08

Fonte: (ASANTE, 2013).

Nas discussões realizadas a respeito dos resultados obtidos, verificou-se a validade do modelo de resfriamento em relação ao dados conhecidos, de modo que os dados computacionais mostraram que não houve diferença significativa entre a hora conhecida da morte com a estimativa obtida por meio do modelo. Tal comparativo pode ser observado graficamente na Figura 13, na qual pode-se constatar que houve maior disparidade nos casos 3 e 5.

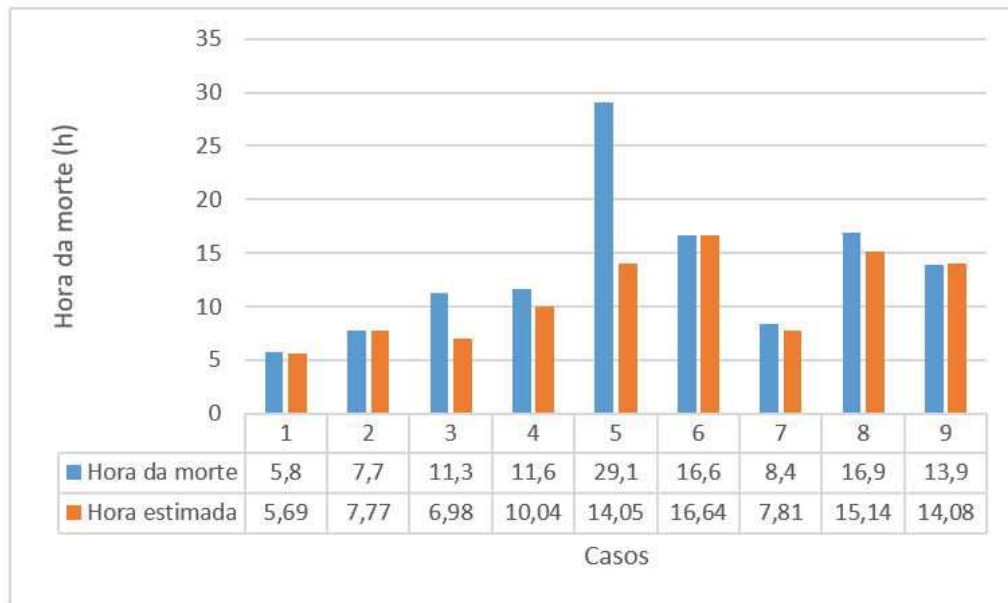


Figura 13 – Comparativo entre hora da morte e hora estimada

Fonte: Autores (2019).

Analisando a Tabela 5, tem-se que a diferença entre a temperatura média do ambiente e a temperatura retal do indivíduo nos casos 3 e 5 é pequena, logo a determinação da hora com o modelo distanciou-se consideravelmente da hora real da morte. Todavia, quanto maior for a diferença entre a temperatura ambiente e temperatura retal, maior será a aproximação do modelo, como ocorre no caso 1, que também pode ser observado na Tabela 5.

Na Tabela 6 são elencados alguns dos outros 50 casos expostos por Asante (2013). A escolha dos casos teve como critério a diferença entre a temperatura ambiente e a temperatura retal, de modo que, pode-se verificar o que já foi explicitado anteriormente.

Tabela 6 – Outros casos com a hora da morte conhecida

Caso	Temperatura Ambiente (°C)	Temperatura retal (°C)	Peso do corpo	Vestido (+) Nu (-)	Período pós-morte	Período pós-morte estimado pelo modelo
1	17	34,9	65	+	4	3,94
2	22	34,4	65	+	4	5,44
5	22,4	35,9	65	-	4	2,96
6	24	33	75	-	5	7,94
8	22,4	32,8	80	-	6	7,7
11	16,5	33,2	60	+	6	5,47
12	20	33	78	-	6	6,47
14	21	32	57	-	7	7,15
17	24	33	78	+	7	8,86
21	30	35,4	75	+	7	7,17
22	21	32	72	-	8	7,86
25	24	32	50	-	9	8,16
26	19	31,6	78	+	10	8,61
28	15,7	37,2	75	+	12	12,39
30	21	28,8	83	-	13	13,64
31	16,5	28,1	80	-	13	11,14
33	20,6	27,2	54	-	14	13,42
34	20	27,5	45	-	14	11,42
35	23	27	75	+	15	21,55
36	24,4	25,9	76	-	15	33,07
37	23,6	24,1	75	-	15	49,05
40	23	23,5	95	+	17	58,30
42	22	23,3	95	+	19	41,52
44	17	22,7	75	+	20	21,53
45	17	22,5	70	+	20	21,3
48	21	21,6	73	+	22	49,26
49	20	21,3	80	+	24	41,5
50	21	21,8	60	-	24	39,67

Fonte: (ASANTE, 2013).

Analisando a Tabela 6, mais especificamente os casos 34 a 42 e, posteriormente, 48 a 50, onde o período pós-morte chegou às 24h, verifica-se a grande discrepância nos dados referentes a hora da morte e a estimativa disponibilizada pelo modelo. Logo, analisando a temperatura ambiente e retal desses mesmos casos, observa-se que as mesmas estão muito próximas, validando as considerações que já foram evidenciadas. Assim, quanto menor a diferença entre as temperaturas ambiente e retal, mais distante a estimativa ficou do tempo de morte. Contudo, nos casos 44 e 45, onde a diferença entre a temperatura ambiente e retal é mais significativa, a estimativa por meio do modelo condiz com a hora

da morte.

Tais considerações são devidas ao tempo do pós-morte, isto é, quanto mais tempo se passar da morte do indivíduo, conseqüentemente a temperatura do corpo estará mais próxima da temperatura ambiente, fatores que incidem sobre a determinação da hora da morte por meio do modelo.

Assim, conclui-se que a precisão na estimativa do tempo de morte por meio do modelo definido por Marshall e Hore (1962) depende do período pós-morte. Logo, quanto maior o intervalo do pós-morte, maior será o intervalo da estimativa de quando provavelmente ocorreu a morte.

Nesta perspectiva, Asante (2013) conclui que o modelo exponencial duplo estabelecido por Marshall e Hore (1962) é o mais apropriado para a determinação do tempo de morte em assassinatos, fornecendo resultados mais satisfatórios, considerando variáveis singulares de cada caso analisado. Configurando-se em uma grande contribuição para o âmbito científico, em que por meio de conhecimentos matemáticos e computacionais, é possível fornecer respostas a situações rotineiras ao meio forense.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Trabalho de Conclusão de Curso foi uma experiência singular, envolvendo estudos além dos realizados inicialmente em Projeto de Iniciação Científica, proporcionando momentos de dúvidas e estudos específicos, que vieram a somar ainda mais na formação acadêmica, propiciando um maior engajamento em uma área cativante da Matemática, a Matemática Aplicada.

No que tange os estudos realizados ao longo da construção desse trabalho, é válido citar o grande enriquecimento acadêmico que esse viabilizou, a partir do momento que fez-se necessário imergir em áreas alheias à Matemática, sendo um desafio que proporcionou grande satisfação a cada experimento e validação realizada, elucidando a aplicabilidade e a eficácia de modelos matemáticos em fenômenos físicos.

A metodologia aplicada nesse trabalho, aliando a resolução experimental a analítica, possibilitou a utilização do modelo da lei do resfriamento de Newton em situações práticas e a comparação dos resultados obtidos em ambos os métodos.

Ao considerarmos que o trabalho foi voltado para o estudo de fenômenos físicos, os erros são inevitáveis, contudo, analisando os erros relativos em cada estudo de caso, verifica-se a consistência do modelo, fornecendo dados de acordo com o evento real e previsões confiáveis, devido ao índice de erros estar dentro de uma margem aceitável, frente aos diversos fatores que implicam na obtenção/coleta de dados.

Assim, a aprendizagem e o conhecimento envolvidos tornaram-se muito significativos, pois foi possível compreender os fenômenos físicos e verificar que a escolha dos instrumentos de pesquisa desempenham grande influência sobre os resultados.

Nesse seguimento a resolução experimental contribuiu para o levantamento e teste de hipóteses, em que entre erros e acertos, os experimentos propiciaram grande satisfação, sendo uma vivência que, de fato, atrelou teoria e prática.

A proposta deste trabalho foi atendida, ao verificar-se que o modelo estudado atendeu as expectativas, descrevendo sistemas de pequena e grande complexidade com eficiência. Além disso, desencadeou novos questionamentos, que podem direcionar pesquisas futuras, ao considerar as demais variáveis envolvidas nos sistemas, trabalhando com modelos mais complexos que venham a trazer resultados ainda melhores.

## REFERÊNCIAS

- ASANTE, S. Application of newton's law of cooling case study: Estimation of time of death in murder. *Kwame Nkrumah University of Science and Technology*, 2013.
- BARIVIERA, G. D.; MUMBERGER, G. M.; SANTOS, L. A.; PADUA, S. G. B. d. Lei de resfriamento de newton: Resolução por edo e método de euler. *Anais Inovação, Tecnologia, Gestão e Sustentabilidade.*, v. 03, 2017.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. Equações diferenciais ordinárias e problemas de valores de contorno. *Rio de Janeiro: LTC*, 1998.
- CARGNELUTTI, J.; GALINA, V.; KAVISKI, E.; GRAMANI, L. M.; LOBEIRO, A. M. Simulation of the two-dimensional flow of the initiation channel of the itaipu hydroelectric power plant by the lattice boltzmann method. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, (to appear), 2017.
- CARGNELUTTI, J.; GALINA, V.; KAVISKI, E.; GRAMANI, L. M.; LOBEIRO, A. M. Two-dimensional numerical simulation of channel flow with submerged obstacles using the lattice boltzmann method. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, (to appear), 2017.
- DIACU, F. *Introdução a Equações Diferenciais: teoria e aplicações*. 2ª. ed. Rio de Janeiro: LCT, 2004.
- FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. Equações diferenciais aplicadas“; coleção matemática universitária, impa. 2000.
- FORTUNA, A. de O. *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações*. [S.l.]: Edusp, 2000.
- FREIRE, M. L. F. A transferência de calor com o uso de experimentos alternativos. *Scientia Plena*, v. 1, n. 8, dez. 2005.
- GALINA, V.; CARGNELUTTI, J.; KAVISKI, E.; GRAMANI, L. M.; LOBEIRO, A. M. Simulação de onda de maré por meio do método do reticulado de boltzmann. In: UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ. *I Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia*. Curitiba - Brasil, 2016.
- GALINA, V.; CARGNELUTTI, J.; KAVISKI, E.; GRAMANI, L. M.; LOBEIRO, A. M. Application of lattice boltzmann method for surface runoff in watershed. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, (to appear), 2017.
- GOMES, L. D. et al. Determinação do instante de morte, falsificação de obras de arte e outros problemas curiosos. Universidade Federal de Goiás, 2017.
- GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo*. [S.l.]: Rio de Janeiro : LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 1988. v. 4.



- LIMA, A. L. B. de; SANTOS, T. R. M. dos; SILVA, E. M. da; LIMA, K. C. A dependência dos homicídios e as desvantagens socioeconômicas em municípios do Brasil. *Revista Ciência Plural*, v. 4, n. 2, p. 102–114, 2018.
- MARSHALL, T.; HORE, F. E. Estimating the time of death—the rectal cooling after death and its mathematical representation. *Forensic Sciences*, v. 7, p. 56–81, 1962.
- MIOTTO, C. M.; CARGNELUTTI, J.; MACHADO, V. M. Aplicações das equações diferenciais na modelagem matemática da dilatação/contração térmica de cabos da rede elétrica. *I Semana da Matemática da UTFPR, Toledo, Paraná*, 2013.
- PEREIRA, E. L.; DIAS, B. E.; LERIS, B. N.; TANURE, J. d. S. Propagação de erros e incertezas em experimentos. *Revista da Universidade Vale do Rio Verde*, v. 14, n. 2, p. 1136–1151, 2016.
- PEREIRA, I. M.; BARBOZA, C. M. Teoria e prática na lei de resfriamento de Newton. *Ensino da Matemática em Debate (ISSN 2358-4122)*, v. 5, n. 1, p. 45–53, 2018.
- PESCADOR, A.; OLIVEIRA, Z. R. Q. Resolução numérica da equação diferencial de resfriamento de Newton pelos métodos de Euler e Runge-Kutta. *Revista Produção e Desenvolvimento*, v. 2, n. 1, p. 10–25, 2016.
- SEGOBIA, P. B.; SUSIN, R.; CARGNELUTTI, J. Aplicação da lei do resfriamento de Newton em blocos cerâmicos: Modelagem, resolução analítica e comparação prática dos resultados. 2013.
- SILVA, J. S. F. da. Sobre o problema da variação de temperatura de um corpo. *CONNECTIONLINE*, n. 5, 2014.
- SIMMONS, G. F.; KRANTZ, S. G. Equações diferenciais: teoria, técnica e prática. *São Paulo, SP: McGraw*, 2008.
- SIQUEIRA, E. M.; FREITAS, L. M.; RIBEIRO, R. F. Avaliação experimental da condutividade térmica de barras metálicas. *Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Escola de Engenharia - Engenharia Mecânica*, dez. 2010.
- STEWART, J. Cálculo, vol 2, 5ª edição. *Thomson, São Paulo*, 2006.
- YULISTIYANTO, B. *Flow around a cylinder installed in a fixed-bed open channel*. [S.l.], 1997.
- ZILL, D. G. *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*. [S.l.]: Cengage Learning Editores, 2003.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. Equações diferenciais, vol. 1. *São Paulo, Makron*, 2001.