

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**  
**ENGENHARIA MECÂNICA**

**NAYARA SPINASSI**

**ANÁLISE DINÂMICA DO MOVIMENTO VERTICAL DE UM VEÍCULO**  
***OFF-ROAD* PARA COMPETIÇÕES BAJA SAE**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

**LONDRINA**

**2021**

**NAYARA SPINASSI**

**ANÁLISE DINÂMICA DO MOVIMENTO VERTICAL DE UM VEÍCULO  
OFF-ROAD PARA COMPETIÇÕES BAJA SAE**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel, em Engenharia Mecânica, do *campus* Londrina, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof<sup>a</sup>. Dra. Janaina Fracaro de Souza Gonçalves.

**LONDRINA**

**2021**



Ministério da Educação  
**Universidade Tecnológica Federal do Paraná**  
Campus Ponta Grossa

Nome da Diretoria  
Nome da Coordenação  
Nome do Curso



---

## TERMO DE APROVAÇÃO

# ANÁLISE DINÂMICA DO MOVIMENTO VERTICAL DE UM VEÍCULO *OFF-ROAD* PARA COMPETIÇÕES BAJA SAE

por

Nayara Spinassi

Este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) foi apresentado no dia 18 de maio de 2021 como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica. A candidata foi arguida pela banca examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a banca examinadora considerou o trabalho aprovado.

---

Janaina Fracaro de Souza Gonçalves  
Prof. Orientador

---

Amadeu Lombardi Neto

---

Genaro Marcial Mamani Gilapa

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço à minha orientadora Janaina Fracaro de Souza Gonçalves , pela sabedoria com que me guiou nesta trajetória e pela paciência.

Aos meus colegas de sala que sempre apontaram meus erros e me ajudaram a construir meu caminho e a chegar até aqui.

A Secretaria do Curso, pela cooperação.

Gostaria de deixar registrado também, o meu reconhecimento à minha família, pois acredito que sem o apoio deles seria muito difícil vencer esse desafio.

Enfim, a todos os que por algum motivo contribuíram para a realização desta pesquisa.

## RESUMO

SPINASSI, Nayara. **ANÁLISE DINÂMICA DO MOVIMENTO VERTICAL DE UM VEÍCULO OFF-ROAD PARA COMPETIÇÕES BAJA SAE.** 2019. Trabalho de Conclusão de Curso, Bacharelado em Engenharia Mecânica - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2019.

Este trabalho tem como objetivo análise da dinâmica veicular do movimento vertical de sistemas pré definidos na literatura de suspensão e de veículo *offroad* que serão aplicados posteriormente no Baja SAE. Com base nas revisões bibliográficas o sistema de suspensão de um veículo é diretamente responsável por filtrar as acelerações impostas pelas imperfeições dos pavimentos e de outras fontes de excitações, além de garantir estabilidade, dirigibilidade e performance. Este trabalho propõe um estudo de caso no protótipo BAJA, com base nos dados da equipe LondriBaja, e utilizará de modelos matemáticos para determinar as frequências naturais do veículo e compara-las com as frequências naturais encontradas nas revisões bibliográficas.

**Palavras-chave:** Baja, frequência natural, sistema de suspensão, performance, modelos matemáticos.

## ABSTRACT

SPINASSI, Nayara. **DYNAMIC ANALYSIS OF THE VERTICAL MOVEMENT OF AN OFF-ROAD VEHICLE FOR BAJA SAE COMPETITIONS**. 2019. Course Conclusion Paper, Bachelor of Mechanical Engineering - Federal Technological University of Paraná. Londrina, 2019.

This work aims to analyze the vehicle dynamics of the vertical movement of pre-defined systems in the suspension and offroad vehicle literature that will be applied later in Baja SAE. Based on the bibliographic reviews, the suspension system of a vehicle is directly responsible for filtering the accelerations imposed by the imperfections of the pavements and other sources of excitation, in addition to ensuring stability, handling and performance. This work proposes a case study in the prototype BAJA, based on data from the LondriBaja team, and will use mathematical models to determine the natural frequencies of the vehicle and compare them with the natural frequencies found in the bibliographic reviews.

**Keywords:** Baja, natural frequency, suspension system, performance, mathematical models.

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	1
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	4
2.1.1 Dinâmica veicular.....	7
2.1.2 Vibrações mecânicas.....	8
2.1.3 Tipos de suspensão.....	9
2.1.3.1 Eixos rígidos ou suspensão dependentes.....	9
2.1.3.2 Suspensão semi-independentes ( <i>trailing arm</i> ).....	10
2.1.3.3 Suspensão independentes.....	10
3 OBJETIVO.....	11
3.1 Objetivo geral.....	11
3.2 Objetivos específicos.....	11
4 JUSTIFICATIVA.....	12
5 MATERIAS E MÉTODOS.....	13
5.1 MODELOS MATEMÁTICOS PARA O MOVIMENTO VERTICAL DE UM CARRO 13	
5.2 MODELO DE UM GRAU DE LIBERDADE.....	13
5.2.1 Modelo de um grau de liberdade obtido usando a formulação newtoniana....	14
5.2.2 Modelo de um grau de liberdade obtido usando a formulação lagrangiana....	15
5.3 MODELO DE UM QUARTO DE CARRO.....	19
5.3.1 Modelo de um quarto de carro obtido usando a formulação newtoniana.....	20
5.3.2 Modelo de um quarto de carro obtido usando a formulação lagrangiana.....	21
5.4 MODELO DE MEIO CARRO.....	23
5.4.1 Modelo de meio carro utilizando a formulação newtoniana.....	24
5.4.2 Modelo de meio carro utilizando a formulação lagrangiana.....	25
5.5 MODELO DE UM CARRO COMPLETO.....	26
5.5.1 Modelo de um carro completo utilizando a formulação newtoniana.....	28
5.5.2 Modelo de um carro completo utilizando a formulação lagrangiana.....	30
6 ESTUDO DE CASO.....	34
7 RESULTADOS.....	36
7.1 ANÁLISE DA AMPLITUDE DE VIBRAÇÃO.....	38
8 CONCLUSÃO 13	

## 1 INTRODUÇÃO

Para que o projeto de suspensão de um veículo possa ser desenvolvido é necessário fazer um estudo da dinâmica veicular do mesmo, para entender a distribuição de massa, o balanceamento do carro, sua construção massa-mola. O desenvolvimento do controle de uma suspensão é uma tarefa complexa, sobretudo pela quantidade de parâmetros que devem ser atendidos, para que haja um bom desempenho. As características desejáveis de um sistema de suspensão são (ANDRADE, 2002):

- Isolar a massa suspensa dos impactos produzidos pelas imperfeições das estradas;
- Reduzir a perda de aderência entre o pneu e o solo;
- Garantir o contato dos pneus com o solo em todas as quatro rodas.

Em diversas situações essas características são contraditórias, ou subjetivas, ou não são conhecidas em um sistema de suspensão convencional sob todas as condições de operação. As características desejáveis podem ser estudadas através de modelos matemáticos lineares, ou não lineares, e simulações com diferentes níveis de complexidade de um sistema de suspensão veicular.

O programa Baja SAE BRASIL é uma competição anual de projetos de veículos *off-road* promovida pela *Society of Automotive Engineers* do Brasil (SAE, 2019) que proporciona aos universitários um ambiente que possam mostrar seus projetos e desenvolvimento na construção do veículo. O projeto de um veículo envolve pesquisas de suporte, definições de objetivos, especificações de tarefas, síntese, análise, seleção, projeto detalhado, construção de um protótipo e testes em pista (NORTON, 2013).

Na busca por um protótipo competitivo, é fundamental investigar possíveis comportamentos dinâmico do veículo em pista. Conforme Manfred (2014), existem dois métodos fundamentais para descrever o comportamento dinâmico de um veículo usando modelos matemáticos: modelagem teórica e modelagem empírica. Na modelagem teórica, o modelo matemático é obtido a partir das leis da física. No modelo empírico, o modelo matemático é representado por parâmetros que são



identificados usando medições experimentais das respostas do sistema à excitações com sinais de testes conhecidos.

Segundo Manfred (2014), o objetivo da modelagem é obter uma descrição analítica matemática do respectivo sistema o qual possa permitir uma investigação dos aspectos relevantes do comportamento do sistema e a influência dos componentes do sistema. É possível desenvolver modelos de complexidade e validade variadas. Quanto mais complexo é o modelo, mais precisa é a simulação do comportamento do sistema. No entanto, isso resultará em equações complexas, bem como na necessidade de um melhor desempenho computacional. Além disso, o número de parâmetros do modelo que precisam ser determinados aumenta juntamente com a complexidade de um modelo. Na maioria das vezes, o esforço para obter os parâmetros necessários superará o esforço das equações do modelo. Portanto, é necessário avaliar criticamente se um aumento na complexidade do modelo ainda é adequado aos seus objetivos (MANFRED, 2014).

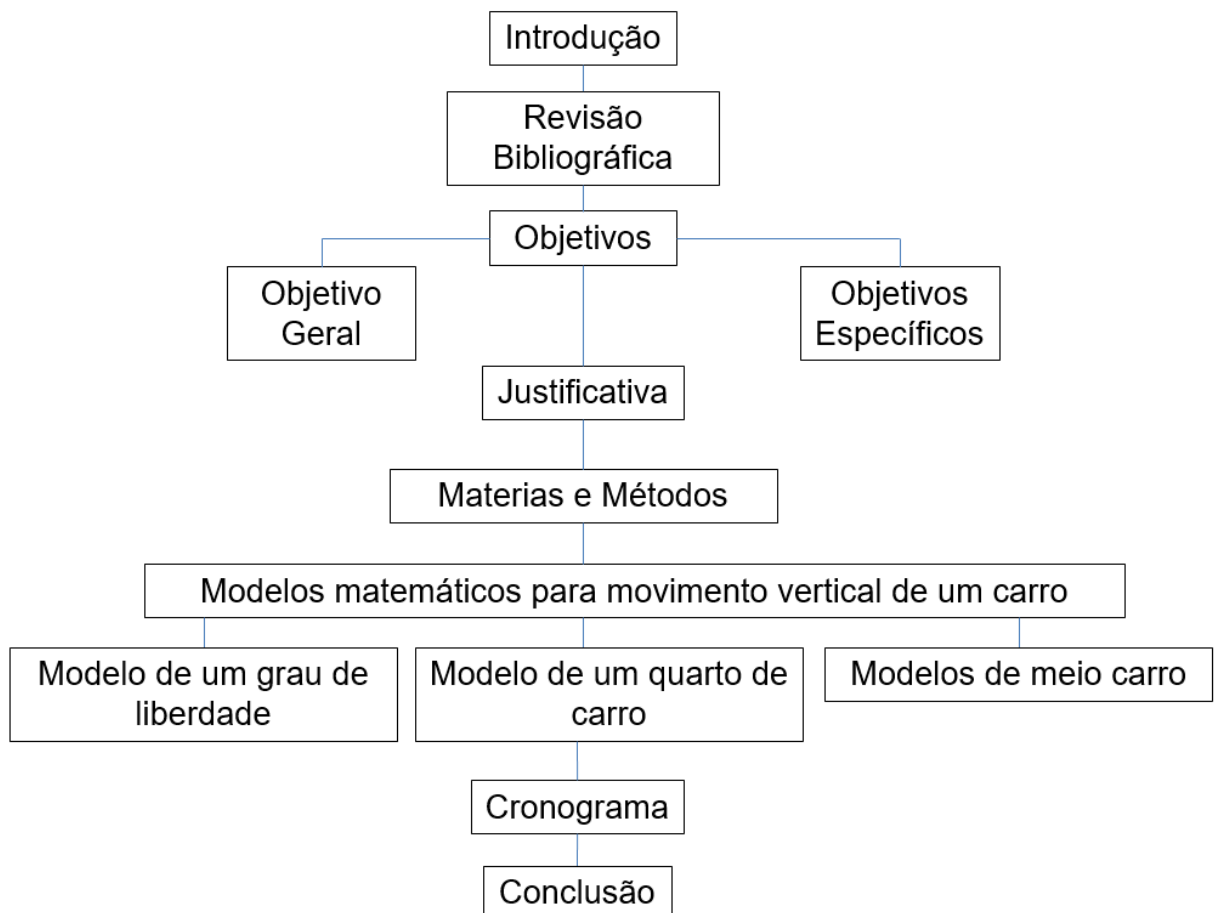
Considera-se que um modelo completo de veículo consiste no chassi, no sistema de transmissão, nas suspensões das rodas, nas rodas, nos freios e na direção. As entradas para este modelo são a posição do pedal do freio e do acelerador, o ângulo do volante, a marcha engatada ou a posição da alavanca automática definida pelo motorista. O ambiente atua no veículo por meio de condições ambientais predefinidas, como vento lateral e de cabeça, coeficiente de conexão de atrito da estrada, inclinação e solavancos da estrada. Nem sempre é necessário modelar um veículo inteiro. É possível dividir o modelo do veículo em seus subsistemas, que podem ser examinados individualmente e, se necessário, combinados posteriormente com um modelo completo (SAE, 2019).

Neste trabalho será considerado somente o movimento vertical do veículo. As investigações do movimento vertical fornecem uma base para a otimização do conforto de dirigir e da segurança na direção de veículos (POPP, 2010). O principal componente de ajuste do movimento vertical de um veículo é a suspensão.

Nesse contexto, o desenvolvimento do desempenho da suspensão é feita partindo-se de uma abordagem simplificada, com um modelo de um grau de liberdade (um oitavo de carro), possibilitando a definição de alguns parâmetros dinâmicos desse modelo. E depois a análise é aprofundada por meio de um modelo com quatro graus de liberdade (meio carro). E por fim será apresentado o modelo de um carro completo com sete graus de liberdade.

O presente trabalho está dividido em uma revisão bibliográfica focando em dinâmica veicular vertical e seus princípios, sendo ilustrado no fluxograma apresentado na figura 1. Será utilizado investigações de casos já realizados sobre dinâmica veicular e o protótipo baja do Londribaja para aplicar o método determinado e comparar os resultados. Ainda será apresentada uma introdução de vibrações mecânicas e como modelar os sistemas mecânicos, sendo que será feito neste trabalho duas modelagens, uma analítica e outra vetorial. No próximo capítulo será apresentado os modelos de um oitavo, um quarto e meio carro com suas devidas modelagens. E será apresentado, também, alguns resultados mostrando o que é esperado de cada resposta do sistema em certas condições utilizando o *software* MatLab e por fim uma breve conclusão.

Figura 1 – Fluxograma dos tópicos que serão apresentados no trabalho.



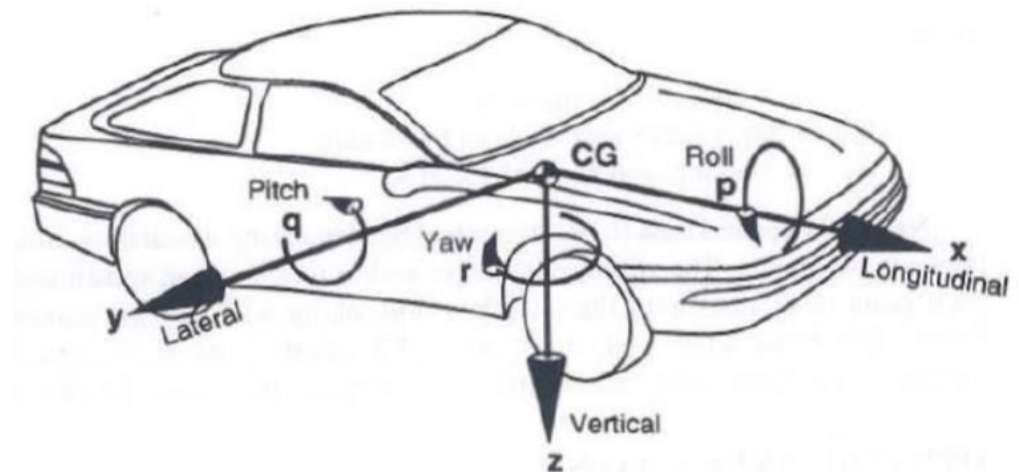
Fonte: Autoria Própria.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nicanor, Carvalho e Mazzon (2016) fez um estudo o qual o principal foco era o desempenho e a robustez do sistema, não se importando muito com o conforto. Assim teve os resultados utilizando um tipo de suspensão duplo A com amortecedores hidráulicos com molas helicoidais, parecidos com o sistema de suspensão da equipe LondriBaja, obtendo as frequências naturais em movimentos verticais entre 1 e 3 Hz. O estudo mostrou ainda que a suspensão consegue amortecer as irregularidades da pista e reagir as forças externas transmitidas ao veículo.

A dinâmica veicular estuda as respostas do veículo às mais variadas imperfeições de trajetórias imposta ao veículo. Muito das vezes ligado às questões de conforto, essa parte é afetada pelo movimento vertical, também chamado de *bounce*, o presente trabalho irá focar apenas no movimento vertical e suas respostas, porém há outras formas de movimentos como os movimentos de rotação *roll* e o *pitch*.

Figura 2 - Eixo de coordenadas e os momentos possíveis em cada direção.



Fonte: Gillespie(1992).

Além disso, está relacionado ao controle do movimento vertical das massas suspensas e não suspensas, sempre com o objetivo de minimizar as vibrações sentidas pelo piloto. O estudo é normalmente dividido em três partes, as excitações a que o veículo é submetido, modelagem do comportamento do

veículo em relação as excitações e a percepção e tolerância humana a essas vibrações. Segundo Gillespie (1992), a percepção de vibração é um dos principais critérios usados pelas pessoas para julgar a qualidade de construção e projeto de um veículo. Por ser um critério subjetivo existe uma grande dificuldade para ser analisado.

Ainda conforme Gillespie (1992), todas as forças de controle e de perturbações aplicadas a um veículo, tais como esforços de aceleração, frenagem e de curva e com exceção de forças aerodinâmicas, são geradas no contato pneu-solo. Isso demonstra a grande importância de se estudar o comportamento do pneu em um determinado meio, independente da aplicação à qual o veículo será destinado. Porém, o pneu é um sistema não linear altamente complexo, tornando difícil a quantificação de suas propriedades.

Em um estudo feito por Duarte, Barreto e Amaral (2016) fez um estudo utilizando os modelos de um quarto de carro e meio carro para obtenção da frequência de *bounce*, do movimento vertical, da suspensão dianteira e traseira. No modelo de um quarto, e para o modelo de meio carro foi possível obter a frequência do carro todo e do movimento de *bounce*, fazendo comparações com simulações e experimentalmente.

Outro estudo ainda feito por Morlin (2017) obteve valores considerado pelo autor consideravelmente bons, pois as frequências naturais em todas as configurações, variou entre 1,72 Hz e 1,86 Hz para o modelo de quatro graus de liberdade, isto é, o modelo de meio carro. E ainda Duarte (2010) considera-se aceitável a frequência de "*ride*" pela indústria automobilística valores entre 1,2Hz a 1,6Hz, sendo o termo "*ride*" é utilizado para referenciar as vibrações tátil e visuais apresentadas por um veículo.

Porém, segundo Freitas Junior (2006) para alguns casos é melhor investir num protótipo virtual, para obter valores aceitáveis das respostas em comparação com a realidade é necessário utilizar várias restrições, assim, não é recomendado o uso de adaptação no modelo de um quarto de veículo com o objetivo de obter resultados mais próximos com os reais.

Morlin (2017) utilizou de uma metodologia parecida com a apresentada neste trabalho, focando na avaliação do desempenho da suspensão. Primeiramente, fez uma abordagem, simplificada considerando um modelo de 2 graus de liberdade, possibilitando a definição de valores para a rigidez do sistema de suspensão traseira

e dianteira. Para por fim, realizar uma análise do comportamento vertical da dinâmica do veículo por meio de um modelo linear com 4 graus de liberdade, desenvolvido no *software Octave*. As repostas dinâmicas no domínio do tempo foram obtidas por meio de simulações realizadas para diferentes casos, diferentes valores para rigidez da mola pneumática e do pneu foram extraídos por meio de experimentos, para diferentes ajustes de pressão, de modo que foi possível caracterizar o comportamento dinâmico.

Já Duarte, Barreto e Amaral (2016) utilizou de modelos não lineares com influência da geometria da suspensão, desenvolvido no *software Matlab*. Utilizando da justificativa que o modelo linear não reproduz o comportamento real do veículo, pois são feitas simplificações como amortecimento constante na vertical e que o movimento do pneu é transmitido integralmente para o amortecedor. Com isso, foi considerado no desenvolvimento da metodologia a geometria das balanças e o desacoplamento do pneu-solo.

Com uma visão diferente Fernandes (2015) apresenta os dados do protótipo atual da equipe estudada, tendo com parâmetros dados de outras equipes que possuem alta eficiência e dirigibilidade em competições. Assim, com as novas peças e dados, ele refaz a análise do sistema ride, aceleração vertical, para que possa verificar se estão aceitáveis.

O estudo feito por Freitas (2006) já mostra uma comparação entre o modelo simplificado de um quarto de veículo, com o modelo de um protótipo virtual utilizando uma suspensão qualquer, para por fim comparar com um modelo virtual de suspensão MacPherson. O intuito é mostrar a influência das características específicas e intrínsecas a uma suspensão do tipo MacPherson. Os trabalhos mencionados anteriormente utilizaram a suspensão Duplo-A, a mesma utilizada pela equipe LondriBaja.

Duarte (2010), fez um estudo desenvolvendo um modelo de multicorpo utilizando o software ADAMS e o detalhamento dos elementos elásticos necessários para a correta representação dos fenômenos de ride em um modelo numérico. E por fim faz uma validação experimental.

Nicanor (2016) analisa o efeito da vibração da dinâmica veicular com um modelo linear de 3 graus de liberdade, pois o efeito da vibração da roda é menor no comportamento dinâmico do veículo quando este trafega em velocidades relativamente baixas, como é no caso das competições da SAE, permanecendo longe

da região da ressonância, assim sendo, ele desconsidera os graus de liberdade relacionados a roda, ou seja, num do modelo completo de 7 graus de liberdade ele desconsidera 4 deles, os dois da roda dianteira e os 2 da roda traseira. Outra consideração feita é a de um sistema de equivalente de rigidez considerando o ângulo de montagem do conjunto da suspensão. Por fim ele faz uma análise da amplitude de vibração do veículo para uma velocidade média de 30 m/s, simulando uma pista de obstáculos.

Para simplificar o quadro 1 apresentará uma síntese de cada trabalho adotado nesta pesquisa:

**Quadro 1 – Portifólio dos trabalhos selecionados**

Autor	Tipo de publicação	Método	Objetivo/ Enfoque
Morlin (2017)	Trabalho de conclusão de curso (TCC)	Modelo linear de 2 e 4 graus de liberdade.	Comportamento vertical da dinâmica do veículo, para diversos casos de pressão.
Duarte, Barreto e Amaral (2016)	Trabalho de conclusão de curso (TCC)	Modelo não linear	Comportamento vertical da dinâmica real do veículo em uma pista.
Fernandes (2015)	Trabalho de conclusão de curso (TCC)	Modelagem CAD	Estudo do comportamento dos novos componentes do protótipo e verificar se são aceitáveis.
Nicanor (2017)	Artigo (periódico)	Modelo linear de 3 graus de liberdade	Análise do comportamento vertical dinâmico de um protótipo mini baja e a amplitude da vibração em uma pista com obstáculos modelado em uma curva senoidal.
Freitas (2006)	Dissertação de mestrado	Modelagem linear e virtual	Comparar o modelo linear simplificado com o modelo virtual de uma suspensão específica.
Duarte (2010)	Dissertação de mestrado	Modelo de multicorpos	Estudos dos efeitos do movimento <i>ride</i> .

**Fonte: Autoria própria.**

### 2.1.1 Dinâmica veicular

O estudo do comportamento vertical da dinâmica veicular é feito por vários tipos de modelagem, de um grau de liberdade até sete graus de liberdade (JAZAR, 2008). A Equação de movimento de cada modelo pode ser obtida por meio de três

métodos, pelo método analítico, porém, possui algumas condições específicas e pelos métodos vetoriais, isto é, a segunda lei de Newton e Lagrange (RAO, 2008).

A dinâmica vertical estuda as respostas do veículo às mais variadas imperfeições de trajetórias imposta ao veículo. Muito das vezes ligado as questões de conforto, essa parte é afetada pelo movimento vertical, também chamado de bounce (GILLESPIE, 1992).

O estudo da dinâmica vertical também está relacionado ao controle das vibrações das massas suspensas, pneu, e não suspensas o veículo, sempre com o objetivo de minimizar as vibrações sentidas pelo piloto (GILLESPIE, 1992). O estudo é normalmente dividido em três partes, as excitações a que o veículo é submetido, modelagem do comportamento do veículo em relação as excitações e a percepção e tolerância humana a essas vibrações. Segundo Gillespie (1992), a percepção de vibração é um dos principais critérios usados para julgar a qualidade de construção e projeto de um veículo. Por ser um critério subjetivo existe uma grande dificuldade para ser analisado.

### 2.1.2 Vibrações mecânicas

Vibração mecânica ou também chamada de oscilação é um movimento qualquer o qual há repetições no decorrer do tempo. Um sistema vibratório pode ser dividido em três partes elementares que são: um meio para armazenagem de energia potencial (mola ou elasticidade), um meio para armazenar energia cinética (massa ou inércia) e um meio de perda gradual de energia (amortecedor), este último pode ou não conter no meu sistema de estudo. (RAO, 2009)

A vibração de um sistema consiste na troca de energia potencial para energia mecânica e vice-versa, e quando há um elemento dissipativo, ou seja, amortecedor, há também as energias perdidas para o meio em cada ciclo de vibração, a qual deve ser substituída por uma força externa.

As vibrações podem ser classificadas em: vibração livre, aquela que após uma perturbação inicial continua vibrar por conta própria e não há nenhuma força externa agindo sobre o sistema e a vibração forçada a qual submete ao sistema uma força externas, muitas vezes harmônica. Nesta última classificação pode ocorrer um

fenômeno chamado de ressonância magnética, que ocorreria quando a frequência da força externa for igual a frequência natural do sistema. (RAO, 2009)

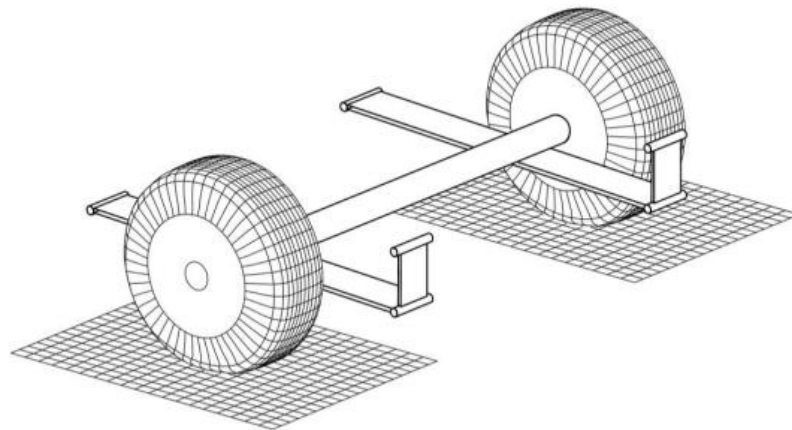
Conforme Rao (2009), para a modelagem de sistemas em geral é possível modelar numericamente pelo a utilização de Lagrange, função das energias cinéticas, potenciais e dissipativas do sistema, pela segunda lei de Newton e também por um método analítico, os quais serão apresentados nos capítulos posteriores.

### 2.1.3 Tipos de suspensão

#### 2.1.3.1 Eixos rígidos ou suspensão dependentes

Esse tipo de suspensão é aquela que as rodas são montadas nas extremidades opostas de um eixo rígido, garantindo que o movimento de uma seja transmitido até a outra. Como é mostrado na figura 3.

**Figura 3 – Suspensão eixo rígido.**



**Fonte: JAZAR, 2008.**

De acordo com Jazar (2008) a performance de uma suspensão de eixo rígido pode ser melhorada adicionando uma articulação para guiar o eixo cineticamente e fornecer suporte dinâmico para transportar as forças que não são sejam do eixo z.



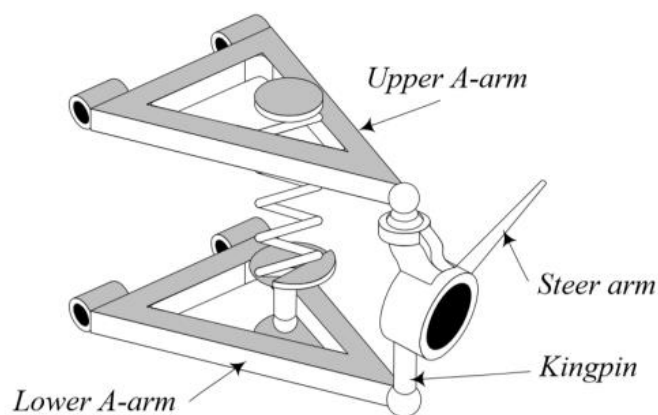
### 2.1.3.2 Suspensão semi-independentes (*trailing arm*)

Atualmente as suspensões traseiras do tipo eixo de torção viraram uma tendência em veículos comerciais leves. O princípio de funcionamento é transformar o elo de interdependência entre as rodas em um meio elástico. Sendo assim, parte da solicitação sofrida por uma roda é absorvida pela suspensão, não atingindo em sua totalidade a outra. Quando comparado com suspensões independentes, as suspensões do tipo eixo de torção têm um desempenho ligeiramente inferior, o que é compensado pelo baixo custo de fabricação e montagem (Leal, 2007).

### 2.1.3.3 Suspensão independentes

Este tipo de suspensão garante que haverá variação de cambagem com o movimento da suspensão, mostrado na figura 4. Utiliza um ou dois braços conectados ao chassi com eixo paralelo ao mesmo, os tipos mais utilizados são o duplo-A e o McPherson. O LondriBaja utiliza deste modelo de suspensão, especificamente o duplo-A, que é aquele o qual a configuração utiliza duas bandejas presas na estrutura. Apesar de ser uma configuração um pouco mais complexa, possui a vantagem de possuir possibilidades de trabalho em variação de cambagem e convergência.

**Figura 4 – suspensão duplo A.**



Fonte: JAZAR, 2008.

### 3 OBJETIVO

#### 3.1 Objetivo geral

O objetivo principal deste trabalho é realizar um estudo de caso do comportamento dinâmico veicular do veículo *Offroad* Baja da equipe LondriBaja.

#### 3.2 . Objetivos específicos

Os objetivos específicos se dividem em:

- Levamento de modelos matemático para movimento vertical;
- Critérios de projeto, como valores de frequência natural do protótipo;
- Simulações e comparações numéricas dos modelos.

## 4 JUSTIFICATIVA

O presente trabalho pretende contribuir com o desenvolvimento científico da equipe Londribaja, a equipe de projeto de extensão BAJA SAE do campus de Londrina, visto que esta é uma equipe nova. Assim, pretende-se também auxiliar com o desenvolvimento de projetos para a suspensão.

A competição de BAJA SAE, o nível de exigência da performance dos veículos é extremamente rígido nas competições. Na busca de um veículo mais competitivo, as equipes procuram desenvolver a dinâmica vertical com menos incertezas e de modo menos conservativo, sendo assim cada vez mais semelhante à realidade.

E o motivo para usar simulações utilizando complexos modelos matemáticos para estudar a dinâmica veicular de um veículo principalmente é o econômico, encontrar melhores projetos com pequenos custos. O aumento da competitividade nas está forçando as equipes investirem mais em pesquisas e desenvolvimento de projetos mais eficientes e melhores neste assunto, pois além do aspecto de engenharia as competições da SAE visam também o aspecto empresarial e de planejamento financeiro de cada equipe. No quadro 2, poderá ser observado a evolução da equipe no decorrer dos anos.

**Quadro 2 – Evolução da suspensão do Londribaja.**

Ano do carro	Tipo de suspensão	Resultados nas competições do subsistema
Os primeiros protótipos (2016 e 2017)	<i>Trailing arm</i> (braço arrastado)	Por problemas no chassi o protótipo não pode participar das competições.
2018	Suspensão dianteira duplo-A e traseira <i>trailing arm</i> .	Impacto com um obstáculo ocasionou a falha na manga traseira, o protótipo não pode ser testado na pista.
2019	Duplo – A	O sistema de pneu-mola não estava absorvendo as vibrações como deveria, num obstáculo com vala teve-se muita dificuldade.
2020	Duplo – A	

**Fonte: Autoria própria.**

## 5 MATERIAS E MÉTODOS

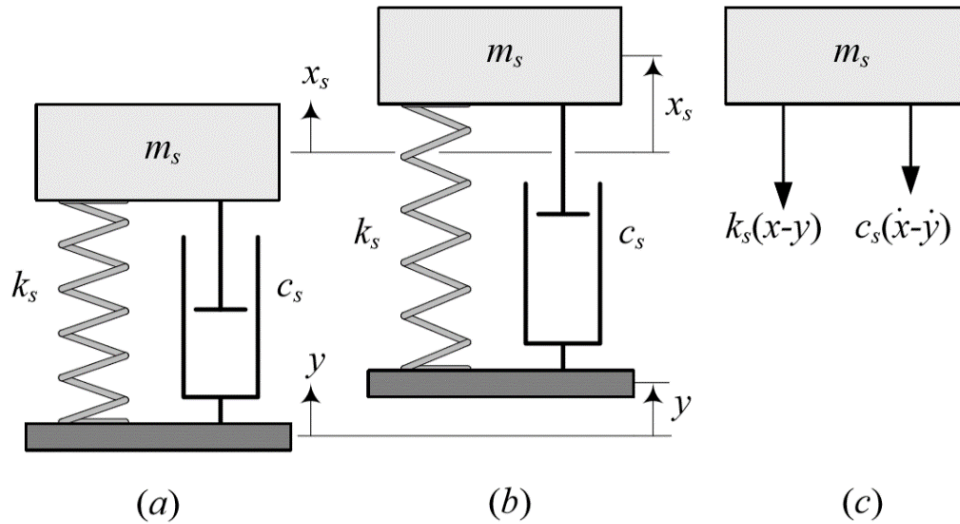
### 5.1 MODELOS MATEMÁTICOS PARA O MOVIMENTO VERTICAL DE UM CARRO

Este capítulo está dividido em quatro seções. A seção 5.1 apresenta um modelo de um grau de liberdade para o movimento vertical de um carro. A seção 5.2 apresenta um modelo com dois graus de liberdade denotado por modelo de um quarto de carro. A seção 5.3 apresenta um modelo de quatro graus de liberdade chamado de modelo de meio carro. E a última seção apresenta o modelo de um carro completo, com 7 graus de liberdade.

### 5.2 MODELO DE UM GRAU DE LIBERDADE

Conforme Jazar (2008), um carro pode ser modelado por um sistema massa-mola com amortecimento viscoso como mostrado na figura 5(a). Neste modelo, o deslocamento vertical do carro é representado por  $x_s(t)$ , a massa equivalente do carro é  $m_s$ , a rigidez equivalente é  $k_s$  e o amortecimento equivalente é  $c_s$ . O desnível do solo é modelado por uma função  $y(t)$ .

Figura 5 - Modelo de um grau de liberdade.



Fonte: Jazar (2008).

### 5.2.1 Modelo de um grau de liberdade obtido usando a formulação newtoniana

A equação de movimento do carro pode ser obtida aplicando-se a segunda lei de Newton (RAO,2009), dada por

$$\uparrow \sum F = m\ddot{x} \quad (1)$$

Considerando o diagrama de corpo livre mostrado na figura 5(c) e a equação (1), tem-se o modelo matemático:

$$k_s(y - x_s) + c_s(\dot{y} - \dot{x}_s) = m_s\ddot{x}_s \quad (2)$$

A equação (2) pode ser reescrita como:

$$m_s\ddot{x}_s + c_s\dot{x}_s + k_sx_s = c_s\dot{y} + k_sy \quad (3)$$

### 5.2.2 Modelo de um grau de liberdade obtido usando a formulação lagrangiana

A equação de movimento do carro também pode ser obtida aplicando-se a equação de Lagrange (RAO, 2009).

$$\frac{\delta}{\delta t} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_j} \right) - \frac{\delta L}{\delta q_j} = Q_j \text{ com } L = K - V \quad (4)$$

onde  $q_j$  é a j-ésima coordenada generalizada,  $Q_j$  é a força generalizada associada a j-ésima coordenada generalizada,  $L$  é a função lagrangiana,  $K$  é a energia potencial do sistema e  $V$  é a energia potencial do sistema.

Seja  $x_s$  a coordenada generalizada, então a energia cinética é dada por :

$$K = \frac{1}{2} m_s (\dot{x}_s)^2 \quad (5)$$

e a energia potencial é dada por:

$$V = \frac{1}{2} k_s (y - x_s)^2 \quad (6)$$

$$Q_j = c_s (\dot{y} - \dot{x}_s) \quad (7)$$

Aplicando a equação de Lagrange, dada pela equação (4), junto com as equações (5) a (7), obtém-se

$$m_s \ddot{x}_s + c_s \dot{x}_s + k_s x_s = c_s \dot{y} + k_s y \quad (8)$$

Note que a equação (8) é igual a equação (3).

Conforme Rao (2009), a solução analítica da equação (8) quando  $y = 0$  é dada por:

$$x(t) = Ce^{st}, \dot{x}(t) = sCe^{st}, \ddot{x}(t) = s^2Ce^{st} \quad (9)$$

$$m_s s^2 C e^{st} + c_s s C e^{st} + k_s C e^{st} = 0 \quad (10)$$

sendo reescrita da seguinte forma:

$$C e^{st} (m_s s^2 + c_s s + k_s) = 0 \quad (11)$$

Sabendo que, C é uma constante qualquer diferente de zero e que  $e^{st}$ :

$$m_s s^2 + c_s s + k_s = 0 \quad (12)$$

A equação (12) é chamada de equação característica do sistema e utilizando Bhaskara na mesma teremos:

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad (13)$$

A equação (13) pode ser reescrita dependendo do fator de amortecimento  $\xi$  e frequência natural do sistema,  $\omega_n$ :

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n} e\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (14)$$

Logo a equação (13) ficará :

$$s_{1,2} = \omega_n (-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}) \quad (15)$$

Assim, sistemas de vibrações mecânicas podem ser divididos em quatro categorias, um sistema sem o amortecimento com valor de  $\xi$  igual a zero, um sistema subamortecido com valores de  $\xi < 1$ , um sistema criticamente amortecido com valor de  $\xi = 1$  e por último um sistema superamortecido com valores de  $\xi > 2$ .

A resposta da equação diferencial mostrada em (8) para um sistema sem amortecimento é dada por:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t} \quad (16)$$

Podendo ser reescrita como:

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t \quad (17)$$

sendo  $A_1$  e  $A_2$  constantes quaisquer que dependem das condições iniciais do sistema.

A resposta para um sistema subamortecido será dada por:

$$x(t) = C_1 e^{(-\xi + i\sqrt{1-\xi^2})\omega_n t} + C_2 e^{(-\xi - i\sqrt{1-\xi^2})\omega_n t} \quad (18)$$

com as constantes  $C_1$  e  $C_2$  depende das condições iniciais do sistema ( $x_0$  para o deslocamento e  $\dot{x}_0$  para a velocidade), a resposta do sistema descrita na equação (18) pode ser reescrita em função da frequência amortecida  $\omega_d$ , de uma amplitude  $X$  e uma fase  $\phi$ , sendo estas duas últimas dependendo das constantes  $C_1$  e  $C_2$ .

$$X = \sqrt{C_1'^2 + C_2'^2} e^\phi = \tan^{-1} \left( \frac{-C_2'}{C_1'} \right) \quad (19)$$

$$C_1' = x_0 e C_2' = \frac{\dot{x}_0 + \xi \omega_n x_0}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Logo,  $x(t)$  poderá ser reescrita como:

$$x(t) = X e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi) \text{ com } \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (20)$$

A resposta para um sistema criticamente amortecido no qual o valor de  $\xi$  é igual a 1 será :

$$x(t) = C_1 e^{-\omega_n t} + C_2 t e^{-\omega_n t} \quad (21)$$

Em função das condições iniciais ficará da seguinte forma:



$$x(t) = x_0 e^{-\omega_n t} + (\dot{x}_0 + \omega_n x_0) t e^{-\omega_n t} \quad (22)$$

E Por último, a resposta para um sistema superamortecido será:

$$x(t) = C_1 e^{(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} + C_2 e^{(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} \quad (23)$$

Sabendo que as constantes  $C_1$  e  $C_2$  depende das condições iniciais do sistema ( $x_0$  para o deslocamento e  $\dot{x}_0$  para a velocidade) elas serão iguais a:

$$C_1 = \frac{-\dot{x}_0 - x_0 \left( (-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n \right)}{-2\xi\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}} + x_0 e$$

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0 - x_0 \left( (-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n \right)}{-2\xi\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

Os casos mostrados anteriormente eram de vibrações livre. Agora será apresentado as respostas para os mesmos casos para um sistema de vibração forçada com uma função  $y(t) = A \cos(\omega t)$ . Para o caso sem amortecimento, a resposta particular será dada por:

$$x_p(t) = X \cos(\omega t)$$

sendo X uma constante a qual define o máximo valor da amplitude de  $x_p(t)$ .

$$X = \frac{A}{k - m\omega^2}$$

A resposta completa do sistema é:

$$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t + \frac{A}{k - m\omega^2} \cos \omega t \quad (24)$$

Para sistemas com amortecimento a solução particular  $x_p(t)$  é dada por:

$$x_p(t) = X \cos(\omega t - \phi)$$

$X$  e  $\phi$  são dados por:

$$X = \frac{A}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} e\phi \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right)$$

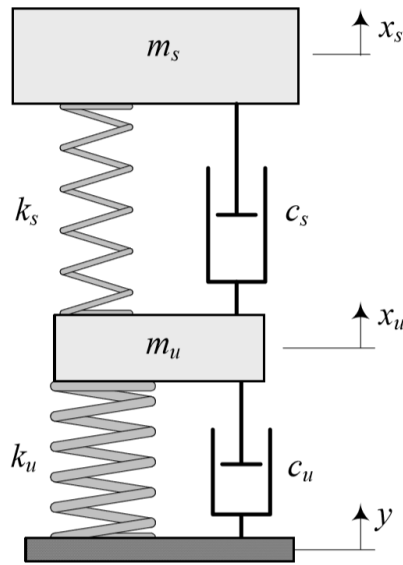
Podendo ser reescrito em função de  $\xi$  e  $\omega_n$ .

$$X = \frac{A}{\left[\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2}} e\phi \tan^{-1}\left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right) \quad (25)$$

### 5.3 MODELO DE UM QUARTO DE CARRO

Conforme Jazar (2008), um carro pode ser modelado por um sistema de dois graus de liberdade como mostrado na figura 6. Neste modelo, o deslocamento vertical do carro é representado por  $x_s(t)$ , o deslocamento da roda é dado por  $x_u$ , a massa equivalente do carro é  $m_s$ , a massa equivalente da roda e pneu é  $m_u$ , a rigidez da suspensão é  $k_s$ , a rigidez do pneu é  $k_u$ , o amortecimento viscoso da suspensão é  $c_s$  e o amortecimento do pneu é  $c_u$ . O desnível do solo é modelado por uma função  $y(t)$ .

Figura 6 – Modelo de um quarto de carro.



Fonte: Jazar(2008).

### 5.3.1 Modelo de um quarto de carro obtido usando a formulação newtoniana

Aplicando a segunda lei de Newton

$$\uparrow \sum F_i = m\ddot{x}_i$$

tem-se as equações de movimento

$$m_s \ddot{x}_s = k_s(x_u - x_s) + c_s(\dot{x}_u - \dot{x}_s) \quad (26)$$

$$m_u \ddot{x}_u = -k_s(x_u - x_s) - c_s(\dot{x}_u - \dot{x}_s) + k_u(y - x_u) + c_u(\dot{y} - \dot{x}_u) \quad (27)$$

As equações de movimento (26) e (27) podem ser reescritas na forma matricial como

$$[m]\ddot{x} + [c]\dot{x} + [k]x = F$$

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_s \\ \ddot{x}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s & -c_s \\ -c_s & c_u + c_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_u \\ \dot{x}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_s & -k_s \\ -k_s & k_u + k_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u \\ x_u \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 \\ k_u y + c_u \dot{y} \end{bmatrix}$$

### 5.3.2 Modelo de um quarto de carro obtido usando a formulação lagrangiana

Seja  $x_s$  e  $x_u$  as coordenadas generalizadas, então a energia cinética é dada por :

$$K = \frac{1}{2} m_s (\dot{x}_s)^2 + \frac{1}{2} m_u (\dot{x}_u)^2 \quad (28)$$

e a energia potencial é dada por:

$$V = \frac{1}{2} k_s (x_u - x_u)^2 + \frac{1}{2} k_u (y - x_u)^2 \quad (29)$$

$$Q_j = c_u (\dot{y} - \dot{x}_u) + c_s (\dot{x}_u - \dot{x}_s) \quad (30)$$

Aplicando a equação de Lagrange, dada pela equação (4), junto com as equações (28) a (30), obtém-se

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_s \\ \ddot{x}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s & -c_s \\ -c_s & c_u + c_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_u \\ \dot{x}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_s & -k_s \\ -k_s & k_u + k_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u \\ x_u \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 \\ k_u y + c_u \dot{y} \end{bmatrix}$$

A equação para definir as frequências naturais de um sistema com mais de um grau de liberdade é:

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_s \\ \ddot{x}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_s & -k_s \\ -k_s & k_u + k_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ x_u \end{bmatrix} = 0$$

Admite-se que:

$$x_i(t) = X_i T(t), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

onde,  $X_i$  é uma constante e  $T(t)$  é uma função do tempo  $t$ . Logo:

$$[M]\vec{X}\ddot{T}(t) + [k]\vec{X}T(t) = 0 \quad (31)$$

com  $[k]$  a matriz de rigidez,  $[M]$  a matriz de massa.

A equação 31 pode ser escrita da forma escalar:

$$\left( \sum_{j=1}^n m_{ij} X_j \right) \ddot{T}(t) + \left( \sum_{j=1}^n k_{ij} X_j \right) T(t) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (32)$$

da qual pode ser obtida a relação:

$$-\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{(\sum_{j=1}^n k_{ij} X_j)}{(\sum_{j=1}^n m_{ij} X_j)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Visto que o lado esquerdo da equação 32 é independente do índice  $i$ , e o lado direito é independente de  $t$ , ambos os lados devem ser iguais a uma constante. Considerando esta constante igual a  $w^2$  esta equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \ddot{T}(t) + w^2 T(t) &= 0 \\ ([k] - w^2[M])\vec{X} &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

com

$$M = \begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_u \end{bmatrix} \text{ e } k = \begin{bmatrix} k_s & -k_s \\ -k_s & k_u + k_s \end{bmatrix}$$

sendo que  $\vec{X}$  é conhecida como a forma modal do sistema que possui um valor diferente de zero, e para uma solução não trivial da equação (33), o determinante da matriz de coeficientes deve ser zero. Isto é:

$$\det[[k] - w^2[M]] = 0 \quad (34)$$

A equação (34) pode ser tratada como um problema de autovalor e autovetor. As frequências naturais do sistema podem ser encontradas pelos autovalores da equação (34). Agora, para encontrar os modos vibracionais tem que substituir o valor de  $w$  na equação (34), ou seja:

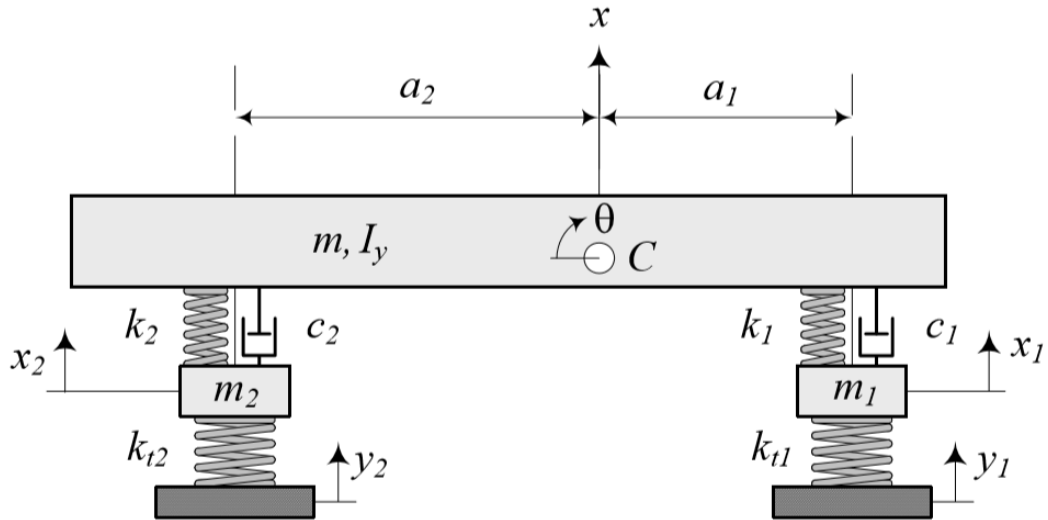
$$\det [[k] - w_i^2[M]] X^i = 0$$

#### 5.4 MODELO DE MEIO CARRO

Um modelo mais aprofundado é o de meio carro ou chamado de carro bicicleta, conforme Jazar (2008), por levar em consideração os efeitos causados na suspensão traseira e dianteira, tanto como os efeitos dos pneus. Além disso, o modelo agora conta também com um efeito rotacional devido ao um deslocamento angular definido como  $\theta$ , assim, a segunda lei de Newton modifica-se para a equação (25) para fazer a equação de movimento em relação ao momento de inércia da metade do carro.

Na figura 7 é demonstrado um modelo genérico para representar o meio carro, sendo que  $m$  é a metade da massa do carro,  $I_y$  é a metade do momento de inércia,  $\theta$  como já dito é o deslocamento angular do sistema,  $x$  é o deslocamento sofrido pelo carro. Já  $m_2$  é a massa da suspensão traseira contando com a massa do pneu traseiro,  $k_2$  é a rigidez da suspensão traseira,  $c_2$ , o amortecimento da suspensão traseira e  $x_2$  é o deslocamento da mesma,  $k_{t2}$  é a rigidez apenas do pneu traseiro e  $y_2$  é o deslocamento da trajetória em relação à traseira do carro. E  $m_1$  é a massa da suspensão dianteira, também contando com a massa do pneu dianteiro,  $k_1$  é a rigidez do sistema da suspensão dianteira,  $c_1$  é o amortecimento da suspensão dianteira e  $x_1$  é o deslocamento da suspensão dianteira do carro. Assim,  $k_{t1}$  é a rigidez apenas do pneu dianteiro e  $y_1$  é o deslocamento da trajetória em relação à dianteira do carro. Ainda na figura 7 é apresentado a referência central do sistema pela letra  $C$  e as distâncias entre o centróide e a suspensão traseira ( $a_2$ ) e a distância entre o centróide até a suspensão dianteira ( $a_1$ ).

Figura 7 – Modelo de meio carro.



Fonte: Jazar (2008).

O modelo de meio carro representado na figura 5 envolve além do deslocamento do corpo do veículo como também seu deslocamento angular relacionando-o com metade do momento de inércia do carro. Além desses elementos, conta também com os sistemas de suspensão traseira e dianteira do carro e com os pneus traseiros e dianteiros com seus respectivos deslocamentos. Neste caso, o deslocamento da trajetória está relacionado com os pneus, sendo que para o pneu traseiro adiciona-se uma defasagem. Este modelo é mais próximo do real por possuir mais detalhes.

#### 5.4.1 Modelo de meio carro utilizando a formulação newtoniana

Para este modelo é necessário utilizar também o somatório de momento, pois este está sujeito a um movimento rotacional. Ou seja, além da equação (12) pela lei de Newton leva-se também em conta a seguinte equação (RAO,2009):

$$\sum M_i = I\ddot{\theta}_i \quad (35)$$

Utilizando a figura 7 como referência as equações de movimento para cada elemento serão:

$$m\ddot{x} + c_1(\dot{x} - \dot{x}_1 - a_1\dot{\theta}) + c_2(\dot{x} - \dot{x}_2 - a_2\dot{\theta}) + k_1(x - x_1 - a_1\theta) + k_2(x - x_2 - a_2\theta) = 0$$

$$I_z\ddot{\theta} - a_1c_1(\dot{x} - \dot{x}_1 - a_1\dot{\theta}) + a_2c_2(\dot{x} - \dot{x}_2 - a_2\dot{\theta}) - a_1k_1(x - x_1 - a_1\theta) + a_2k_2(x - x_2 - a_2\theta) = 0$$

$$m_1\ddot{x}_1 - c_1(\dot{x} - \dot{x}_1 - a_1\dot{\theta}) + k_{t1}(x_1 - y_1) - k_1(x - x_1 - a_1\theta) = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 - c_2(\dot{x} - \dot{x}_2 - a_2\dot{\theta}) + k_{t2}(x_2 - y_2) - k_2(x - x_2 - a_2\theta) = 0$$

#### 5.4.2 Modelo de meio carro utilizando a formulação lagrangiana

Como foi sugerido nas seções anteriores, para o método de Lagrange de forma análoga feito pelo modelo de um quarto de carro, temos que a energia cinética

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2}I_z(\dot{\theta})^2$$

E a energia potencial do sistema é dada por:

$$V = \frac{1}{2}k_{t1}(x_1 - y_1)^2 + \frac{1}{2}k_{t2}(x_2 - y_2)^2 + \frac{1}{2}k_1(x - x_1 - a_1\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2(x - x_2 - a_2\theta)^2$$

E por fim as forças não conservativas serão:

$$Q_j = \frac{1}{2}c_1(\dot{x} - \dot{x}_1 - a_1\dot{\theta}) + c_2(\dot{x} - \dot{x}_2 - a_2\dot{\theta})$$



Aplicando a equação de Lagrange, dada pela equação (4), junto com as equações (39) a (40), obtém-se a equação de movimento de forma matricial:

$$[m]\ddot{x} + [c]\dot{x} + [k]x = F$$

Onde:

$$x = \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$m = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & a_2c_2 - a_1c_1 & -c_1 & -c_2 \\ a_2c_2 - a_1c_1 & a_1c_1^2 + a_2c_2^2 & a_1c_1 & a_2c_2 \\ -c_1 & a_1c_1 & c_1 & 0 \\ -c_2 & a_2c_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & a_2k_2 - a_1k_1 & -k_1 & -k_2 \\ a_2k_2 - a_1k_1 & a_1k_1^2 + a_2k_2^2 & a_1k_1 & a_2k_2 \\ -k_1 & a_1k_1 & k_1 + k_{t1} & 0 \\ -k_2 & a_2k_2 & 0 & k_2 + k_{t2} \end{bmatrix}$$

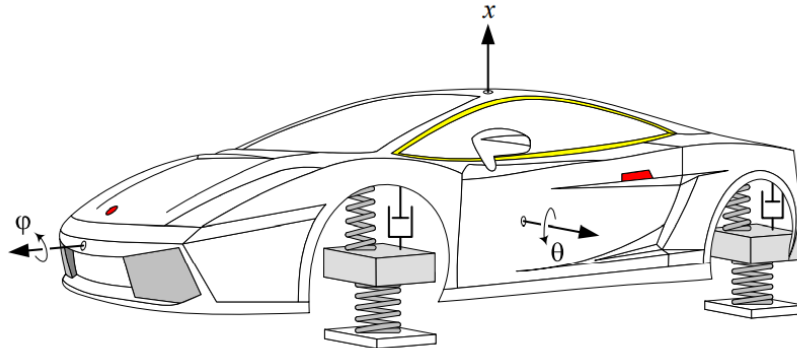
$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_1k_1 \\ y_2k_2 \end{bmatrix}$$

As frequências naturais são encontradas utilizando o mesmo método mostrado na seção anterior.

## 5.5 MODELO DE UM CARRO COMPLETO

O modelo de um carro completo é o modelo mais genérico para estudar um veículo. Ele possui os três tipos de movimento, o *bounce*  $x$ , o *roll*  $\phi$  e o *pitch*  $\theta$ . Lembrando que o presente trabalho irá apenas focar no movimento vertical, o *bounce*. O modelo pode ser melhor visto na figura abaixo.

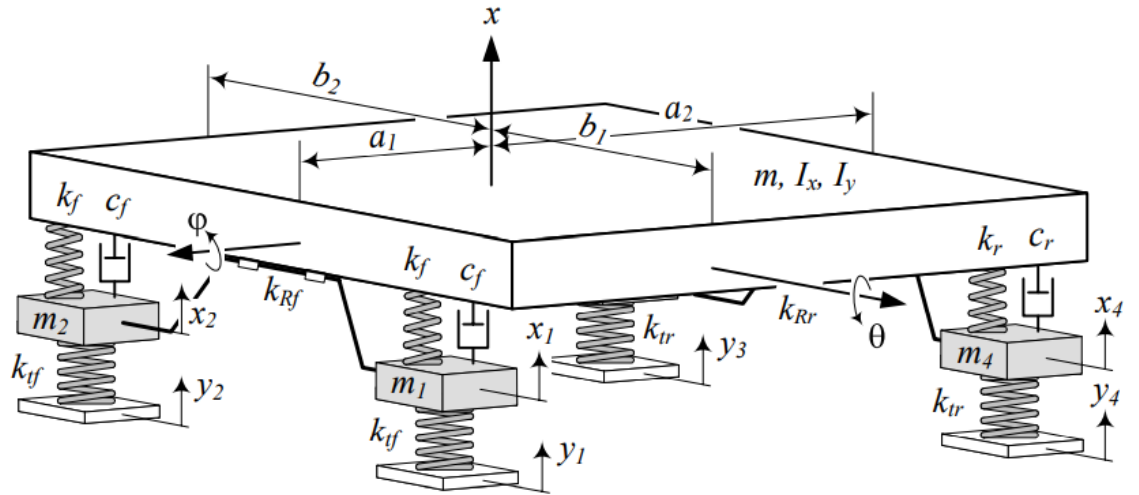
Figura 8 – Modelo de um carro completo.



Fonte: Jazar (2008).

Na figura 9 é demonstrado um modelo genérico para representar o modelo de um carro completo, sendo que  $m$  é a massa do carro,  $I_x$  é o momento de inércia longitudinal,  $I_y$  o momento de inercia lateral,  $\theta$  como já dito é o deslocamento angular do sistema relacionado ao movimento pitch,  $\phi$  é o deslocamento angular relacionado ao movimento *roll*,  $x$  é o deslocamento sofrido pelo carro. Já  $m_1$  e  $m_2$  são as massas das suspensão dianteira contando com a massa do pneu traseiro,  $k_f$  é a rigidez da suspensão dianteira,  $c_f$ , o amortecimento da suspensão dianteira e  $x_1$  e  $x_2$  é o deslocamento da mesmo,  $k_{tf}$  é a rigidez apenas dos pneus dianteiros e  $y_1$  e  $y_2$  é o deslocamento da trajetória em relação á traseira do carro. E  $m_3$  e  $m_4$  são a massa da suspensão traseiras, também contando com a massa do pneu traseiro,  $k_r$  é a rigidez do sistema da suspensão traseira,  $c_r$  é o amortecimento da suspensão traseira e  $x_3$  e  $x_4$  é o deslocamento da suspensão traseira do carro. Assim,  $k_{tr}$  é a rigidez apenas dos pneu traseiros e  $y_3$  e  $y_4$  são os deslocamento da trajetória em relação á traseira do carro. Ainda na figura 9 é apresentado a referência central do sistema pela letra  $x$  e as distâncias longitudinais entre o centróide com a suspensão traseira ( $a_2$ ) e a suspensão dianteira ( $a_1$ ), como também, as distâncias laterias do carro entre o centróide sendo  $b_1$  do centro até a direita e  $b_1$  do centro até a esquerda do carro.

Figura 9 – Representação dos graus de liberdade do modelo completo de carro.



Fonte: Jazar (2008)

### 5.5.1 Modelo de um carro completo utilizando a formulação newtoniana

As equações de movimento serão, utilizando o somatório de forças da equação (12) e somatório de momentos da equação (35).

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} + c_f(\dot{x} - \dot{x}_1 + b_1\dot{\phi} - a_1\dot{\theta}) + c_f(\dot{x} - \dot{x}_2 - b_2\dot{\phi} - a_1\dot{\theta}) \\
 + c_r(\dot{x} - \dot{x}_3 - b_1\dot{\phi} - a_2\dot{\theta}) + c_r(\dot{x} - \dot{x}_4 - b_2\dot{\phi} - a_2\dot{\theta}) \\
 + k_f(x - x_1 + b_1\phi - a_1\theta) + k_f(x - x_2 - b_2\phi - a_1\theta) \\
 + k_r(x - x_3 + b_1\phi + a_2\theta) + k_r(x - x_4 + b_2\phi + a_2\theta) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_x \ddot{\varphi} + b_1 c_f (\dot{x} - \dot{x}_1 + b_1 \dot{\varphi} - a_1 \dot{\theta}) - b_2 c_f (\dot{x} - \dot{x}_2 - b_2 \dot{\varphi} - a_1 \dot{\theta}) \\
- b_1 c_r (\dot{x} - \dot{x}_3 - b_1 \dot{\varphi} + a_2 \dot{\theta}) + b_2 c_r (\dot{x} - \dot{x}_4 + b_2 \dot{\varphi} + a_2 \dot{\theta}) \\
+ b_1 k_f (x - x_1 + b_1 \varphi - a_1 \theta) - b_2 k_f (x - x_2 - b_2 \varphi - a_1 \theta) \\
- b_1 k_r (x - x_3 - b_1 \varphi + a_2 \theta) + b_2 k_f (x - x_4 + b_2 \varphi + a_2 \theta) \\
+ k_R \left( \varphi - \frac{x_1 - x_2}{\omega} \right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_y \ddot{\theta} - a_1 c_f (\dot{x} - \dot{x}_1 + b_1 \dot{\varphi} - a_1 \dot{\theta}) + a_1 c_f (\dot{x} - \dot{x}_2 - b_2 \dot{\varphi} - a_1 \dot{\theta}) \\
+ a_2 c_r (\dot{x} - \dot{x}_3 - b_1 \dot{\varphi} + a_2 \dot{\theta}) + a_2 c_r (\dot{x} - \dot{x}_4 + b_2 \dot{\varphi} + a_2 \dot{\theta}) \\
- a_1 k_f (x - x_1 + b_1 \varphi - a_1 \theta) - a_1 k_f (x - x_2 + b_2 \varphi - a_1 \theta) \\
+ a_2 k_r (x - x_3 - b_1 \varphi + a_2 \theta) + a_2 k_r (x - x_4 + b_2 \varphi + a_2 \theta) \\
= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_f \ddot{x}_1 - c_f (\dot{x} - \dot{x}_1 + b_1 \dot{\varphi} - a_1 \dot{\theta}) + k_f (x - x_1 + b_1 \varphi - a_1 \theta) \\
- k_R \frac{1}{\omega} \left( \varphi - \frac{x_1 - x_2}{\omega} \right) + k_{tf} (x_1 - y_1) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_f \ddot{x}_2 - c_f (\dot{x} - \dot{x}_2 + b_2 \dot{\varphi} - a_1 \dot{\theta}) - k_f (x - x_2 - b_2 \varphi - a_1 \theta) \\
+ k_R \frac{1}{\omega} \left( \varphi - \frac{x_1 - x_2}{\omega} \right) + k_{tf} (x_2 - y_2) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_r \ddot{x}_3 - c_r (\dot{x} - \dot{x}_3 - b_1 \dot{\varphi} - a_2 \dot{\theta}) - k_r (x - x_3 - b_1 \varphi + a_2 \theta) \\
+ k_{tr} (x_3 - y_3) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_r \ddot{x}_4 - c_r (\dot{x} - \dot{x}_4 + b_2 \dot{\varphi} + a_2 \dot{\theta}) + k_r (x - x_4 + b_2 \varphi + a_2 \theta) \\
+ k_{tr} (x_4 - y_4) = 0
\end{aligned}$$

Sendo que o torque devido ao eixo *antiroll* ( $M_R$ ), relacionando ao movimento angular  $\varphi$ , é:

$$M_R = -k_{Rf} \left( \varphi - \frac{x_1 - x_2}{\omega} \right) - k_{Rf} \left( \varphi - \frac{x_3 - x_4}{\omega} \right) \quad (36)$$

A maioria dos carros apenas possuem o eixo *antiroll* dianteiro, logo, a equação (36) pode ser simplificada como:

$$M_R = -k_{Rf} \left( \varphi - \frac{x_1 - x_2}{\omega} \right)$$

Com

$$\omega = b_1 + b_2$$

### 5.5.2 Modelo de um carro completo utilizando a formulação lagrangiana

Como foi sugerido nas seções anteriores, para o método de Lagrange de forma análoga feito nos modelos anteriores, temos que a energia cinética:

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}I_y(\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}I_x\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_f(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2}m_r(\dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2)$$

E a energia potencial do sistema é dada por:

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2}k_f(x - x_1 + b_1\varphi - a_1\theta)^2 + \frac{1}{2}k_f(x - x_2 - b_2\varphi + a_1\theta)^2 \\ & + \frac{1}{2}k_r(x - x_3 + b_1\varphi - a_2\theta)^2 \\ & + \frac{1}{2}k_r(x - x_4 - b_2\varphi + a_2\theta)^2 + \frac{1}{2}k_R \left( \varphi - \frac{x_1 - x_2}{\omega} \right)^2 \\ & + \frac{1}{2}k_{tf}(x_1 - y_1)^2 + \frac{1}{2}k_{tf}(x_2 - y_2)^2 + \frac{1}{2}k_{tr}(x_3 - y_3)^2 \\ & + \frac{1}{2}k_{tr}(x_4 - y_4)^2 \end{aligned}$$

E por fim as forças não conservativas serão:

$$\begin{aligned} Q_j = & \frac{1}{2}c_f(\dot{x} - \dot{x}_1 + b_1\dot{\varphi} - a_1\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}c_f(\dot{x} - \dot{x}_2 - b_2\dot{\varphi} - a_1\dot{\theta})^2 \\ & + \frac{1}{2}c_r(\dot{x} - \dot{x}_3 + b_1\dot{\varphi} + a_2\dot{\theta})^2 \\ & + \frac{1}{2}c_r(\dot{x} - \dot{x}_4 + b_2\dot{\varphi} + a_2\dot{\theta})^2 \end{aligned}$$

Aplicando a equação de Lagrange, dada pela equação (4), junto com as equações a cima, obtém-se a equação de movimento de forma matricial:

$$[m]\ddot{x} + [c]\dot{x} + [k]x = F$$

Onde:

$$x = \begin{bmatrix} x \\ \varphi \\ \theta \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$m = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_r \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & -c_f & -c_f & -c_r & -c_r \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & -b_1c_f & b_2c_f & b_1c_r & -b_2c_r \\ c_{31} & c_{31} & c_{33} & a_1c_f & a_1c_f & a_2c_r & a_2c_r \\ -c_f & -b_1c_f & a_1c_f & c_f & 0 & 0 & 0 \\ -c_f & b_2c_f & a_1c_f & 0 & c_f & 0 & 0 \\ -c_r & b_1c_r & a_2c_r & 0 & 0 & c_r & 0 \\ -c_r & -b_2c_r & a_2c_r & 0 & 0 & 0 & c_r \end{bmatrix}$$

Com:

$$c_{11} = 2c_f + 2c_r$$

$$c_{21} = c_{12} = b_1c_f - b_2c_f - b_1c_r + b_2c_r$$

$$c_{31} = c_{13} = 2a_2c_r - 2a_1c_f$$

$$c_{22} = b_1^2c_f + b_2^2c_f + b_1^2c_r + b_2^2c_r$$

$$c_{32} = c_{23} = a_1b_2c_f - a_1b_1c_f - a_2b_1c_r + a_2b_2c_r$$

$$c_{33} = 2c_fa_1^2 + 2c_ra_2^2$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & -k_f & -k_f & -k_r & -k_r \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & b_1 k_r & -b_2 k_r \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & a_1 k_f & a_1 k_f & -a_2 k_r & -a_2 k_r \\ -k_f & k_{42} & a_1 k_f & c_{44} & -\frac{k_R}{\omega^2} & 0 & 0 \\ -k_f & k_{52} & a_1 k_f & -\frac{k_R}{\omega^2} & \frac{k_R}{\omega^2} & 0 & 0 \\ -k_r & b_1 k_r & -a_2 k_r & 0 & 0 & k_r + k_{tr} & 0 \\ -k_r & -b_2 k_r & -a_2 k_r & 0 & 0 & 0 & k_r + k_{tr} \end{bmatrix}$$

Com:

$$k_{11} = 2k_f + 2k_r$$

$$k_{12} = k_{21} = b_1 k_f - b_2 k_f - b_1 k_r + b_2 k_r$$

$$k_{31} = k_{13} = 2a_2 k_r - 2a_1 k_f$$

$$k_{22} = k_R + b_1^2 k_f + b_2^2 k_f + b_1^2 k_r + b_2^2 k_r$$

$$k_{32} = k_{23} = a_1 b_2 k_f - a_1 b_1 k_f - a_2 b_1 k_r + a_2 b_2 k_r$$

$$k_{33} = 2k_f a_1^2 + 2k_r a_2^2$$

$$k_{42} = k_{24} = -b_1 k_f - \frac{1}{\omega} k_R$$

$$k_{44} = k_f + k_{tf} + \frac{1}{\omega^2} k_R$$

$$k_{52} = k_{25} = b_2 k_f - \frac{1}{\omega} k_R$$

$$k_{55} = k_f + k_{tf} + \frac{1}{\omega^2} k_R$$

E por fim:

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ y_1 k_{tf} \\ y_2 k_{tf} \\ y_3 k_{tr} \\ y_4 k_{tr} \end{bmatrix}$$

As frequências naturais são encontradas utilizando o mesmo método mostrado na seção 5.3 .



## 6 ESTUDO DE CASO

Nesse capítulo será caracterizado o veículo do estudo de caso, no caso o veículo *offroad* da equipe Londribaja, com os parâmetros geométricos e físicos. E por fim uma comparação da obtenção das frequências naturais obtidas pelo método de meio carro e o carro completo, as figuras 10 e 11 mostram os últimos protótipos.

Figura 10 – Protótipo LB02 da equipe LondriBaja.



Fonte: Autoria própria.

Figura 11 – Protótipo LB03 da equipe Londribaja.



Fonte: Autoria própria.

Na tabela 1 será possível observar as características físicas dos veículos como as massas, massas não suspensas e as rigidez do amortecimento e do eixo traseiro. Por ser uma equipe ainda relativamente nova, há alguns dados que ainda não foram obtidos, como a rigidez dos pneus.

**Tabela 1 – Dados físicos dos protótipos.**

Protótipo	LB02	LB03
Massa total	113,15 kg	112,60 kg
Momento de inércia transversal	7,75 kgm <sup>2</sup>	6,81 kgm <sup>2</sup>
Momento de inércia longitudinal	12,13 kgm <sup>2</sup>	11,20kgm <sup>2</sup>
Massa não suspensa dianteira	57 kg	51,2 kg
Massa não suspensa traseira	64,4 kg	51,3 kg
Rigidez mola dianteira	45 KN/m	45 KN/m
Rigidez mola traseira	73 KN/m	73 KN/m
Rigidez eixo antiroll	190,31 N/m	321,75 N/m

**Fonte: Autoria própria.**

Já na tabela 2 será observado os dados geométricos dos protótipos.

**Tabela 2 – Dados geométricos dos protótipos.**

Protótipo	LB02	LB03
$a_1$	1143 mm	804 mm
$a_2$	913 mm	683,32 mm
$b_1$	316 mm	301 mm
$b_2$	313,75 mm	301 mm

**Fonte: Autoria própria.**

## 7 RESULTADOS

Para encontrar as frequências naturais pelos modelos definidos, foi feito um programa utilizando o *software Matlab*. Assim, para comprovar a eficiência do programa, foi utilizado um exemplo do Jazar (2008), tendo os valores de frequências naturais iguais, o programa está apto para realizar os cálculos desta tese. Os programas utilizados estarão presente nos apêndices.

Primeiramente foi utilizado os dados para encontrar as frequências naturais do modelo de meio carro, os resultados encontram-se na tabela 3, e depois foi feito o mesmo para o modelo de carro inteiro, os resultados estão na tabela 4.

**Tabela 3 – Frequências naturais meio carro**

Frêquencia natural	Valor em Hz LB02	Valor em Hz LB03
$\omega n_1$	0,0000	0,0000
$\omega n_2$	3,1353	3,3681
$\omega n_3$	5,8313	5,0579
$\omega n_4$	2,5578 e+03	2,0114e+03

**Fonte: Autoria própria.**

**Tabela 4 – Frenquências naturais carro inteiro**

Frêquencia natural	Valor em Hz LB02	Valor em Hz LB03
$\omega n_1$	0,0000	0,0000
$\omega n_2$	0,0000	0,0000
$\omega n_3$	0,0068	0,0097
$\omega n_4$	0,0068	0,0097
$\omega n_5$	0,5941	0,6635
$\omega n_6$	4,0839	1,2173
$\omega n_7$	4,0839	1,2173

**Fonte: Autoria própria.**

Como foi dito na seção referência bibliografica as frequências naturais para estarem num intervalo aceitável deveriam estar entre 1,2Hz a 1,6Hz. Utilizando o modelo de meio carro, percebeu-se que as frequências encontradas eram maiores que aquelas aceitáveis, e um outro problema também é que o pico da frequência natural 4. Deve-se levar em conta que neste trabalho não foi considerado as rigidez dos pneus, mais o erro dentro do próprio software Matlab.

Já utilizando um modelo de 7 graus de liberdades, pode-se perceber o quão melhor é para fazer as análises, por ter mais detalhes como momento de inércia transversal, rigidez do eixo de apoio traseiro. Os resultados obtidos do modelo atual do protótipo mini baja, as frequências do protótipo LB03, estão dentro do intervalo proposto por Duarte (2010). E o pico da amplitude em ambos os protótipos não são tão altos como o obtido no modelo de meio carro. O que influencia no conforto do piloto.

Além da mudança das massas no protótipo deve-se levar em conta que no modelo LB02 era utilizado o aço SAE 4340, o que gerou certos problemas na fabricação, pois a equipe não soube soldar da maneira correta os tubos, e causou um tratamento térmico. Enquanto no modelo atual o aço utilizado é o SAE 1020. Mudando apenas o material do chassi, já é possível ter uma grande diferença de resultados, melhorando a rigidez do veículo ao mudar a geometria, diminuindo a parede de espessura do aço, a redução da massa não foi tão significativa quanto a melhoria na geometria.

Há estudos dos campos de biodinâmica e epidemiológicos os quais apresentam evidências de um elevado risco à saúde devido à exposição por longos períodos à vibrações de corpo inteiro, com possíveis prejuízos à coluna e sistema nervoso, numa competição Baja SAE no último dia tem o em duro, uma prova de quatro horas. Por isso, é importante levar em conta os níveis de vibrações sofrida pelo piloto no carro. Além das vibrações também se assumem que a contribuição de fatores como ergonomia, baixas temperaturas e correntes de ar no aumento da dor muscular, assim como um aumento do risco com aumentos de duração e intensidade.

O propósito da norma ISO 2631 é a definição de métodos para quantificação de vibrações de corpo inteiro relacionadas a saúde, conforto e percepção, na faixa de 0,5 Hz a 80 Hz, para esse caso. A orientação se faz em termos numéricos, de modo a se evitar ambiguidades e aumentar a precisão da medida. Entretanto, não abrange potencialidades da vibração intensa no desempenho e capacidade de execução de tarefas, visto que dependem criticamente de características ergonômicas (ISO 2631-1, 1997).

Outra análise feita foi comparar os resultados obtidos para o protótipo minibaja da equipe Londribaja com os resultados obtidos pelas referências, as equipes foram adotadas como equipe A, B e C.

**Tabela 5 – Frequências obtidas para as suspensões nas referências.**

Referência	Equipe A	Equipe B	Equipe C
Suspensão dianteira	1,49 Hz	9,8464 Hz	15,74 Hz
Suspensão traseira	1,79 Hz	7,7428 Hz	15,83 Hz

**Fonte: Autoria Própria.**

Ao comparar os resultados obtidos para um modelo de 7 graus com os valores das frequências obtidas pela equipe A, a frequência da suspensão dianteira está muito abaixo, sendo 0,0097 e 0,6635, para o protótipo mais atual. Essa diferença pode ser pela diferença de métodos utilizados, e também tanto o trabalho feito pelas equipe B e C, as quais variam a pressão do pneu, para encontrar a frequência da suspensão. Como nesses casos eles levam em conta o pneu, o mesmo seria uma variável de muita importância.

O trabalho da equipe B utilizou o modelo de 4 graus de liberdade para encontrar as frequências naturais do protótipo, levando isso em conta, vale comparar os resultados obtidos por ele com os valores da tabela 3. Como foi já dito, este trabalho utilizou as características do pneu, e seus dados como variáveis também, o que no presente trabalho não foi utilizado, a diferença dos resultados pode está relacionado a isso, o que mostra o quanto o pneu e suas características influenciam no isolamento de vibrações.

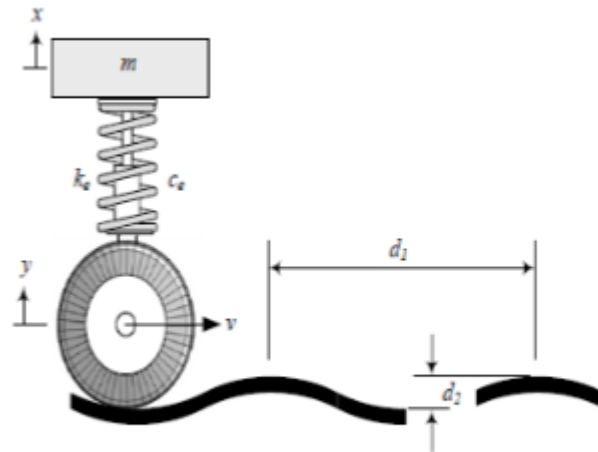
Um outro trabalho que utilizou de uma metodologia parecida com a utilizada neste trabalho é o de Nicanor (2016). Este utilizou um método de 3 graus de liberdade, encontrando frequências com os valores:  $\omega_1$  de 1,09 Hz,  $\omega_2$  de 2,37 Hz e  $\omega_3$  de 2,5 Hz. Para encontrar essas frequências ele também utilizou as características do pneu, e para complementar o artigo ele fez uma análise para estimar a amplitude de vibração do veículo quando trafegando uma pista com obstáculo.

## 7.1 ANÁLISE DA AMPLITUDE DE VIBRAÇÃO

Utilizando o método de um grau de liberdade, obtido na seção 5.2, e as equações deduzidas, e modelando o sistema por uma curva senoidal conforme a figura 12, e os dados utilizados para estimar a amplitude se encontram na tabela 6.

Serão apresentados resultados para dois casos considerados, em que, no primeiro, o veículo ultrapassa um obstáculo com máxima velocidade de 42 km/h e, em um segundo caso, com uma velocidade moderada de 20 km/h.

**Figura 12 - modelo de ¼ de veículo entrando no obstáculo**



Fonte: JAZAR, 2008

**Tabela 6 – Características do obstáculo.**

Parâmetros	Valores
Velocidade (V)	11,67 m/s e 5,55 m/s
Diâmetro da onda ( $d_1$ )	2 m
Amplitude da onda ( $d_2$ )	0,2 m
Amplitude da oscilação do obstáculo (Y)	0,2 m

Fonte: Autoria própria

Resultados encontrados para a frequência da força induzida, para ambos casos, razão das amplitudes, frequência natural para um grau de liberdade, na tabela 7. E por fim na tabela 8, encontra-se a amplitude da vibração encontrada para velocidade máxima e velocidade mínima.

**Tabela 7 – Valores das frequências e razão.**

Parâmetros	Valores
Frequência natural 1 grau de liberdade	40 rad/s
Frequência induzida velocidade máxima	36,652 rad/s
Razão da amplitude velocidade máxima	0,9163
Frequência induzida velocidade mínima	17,453 rad/s
Razão da amplitude velocidade mínima	0,4363

**Fonte: Autoria própria.**

**Tabela 8 – Amplitude da vibração**

Caso	Valor
Velocidade máxima	0,2269 m
Velocidade mínima	0,2229 m

**Fonte: Autoria própria.**

Observando os valores obtidos na tabela 8 para as amplitudes de vibrações, pode-se dizer que os resultados são consideravelmente altos, o valor obtido por Nicanor (2016) foi de 0,064 metros para uma velocidade de 30km/h e Morlin (2017) obteve, utilizando os mesmo valores de velocidades, pois são as velocidades médias obtidas por um protótipo baja em competições, foi de 0,08 metros para uma velocidade de 42km/h e para 20 km/h foi de aproximadamente 0,06 metros. Mostrando que o protótipo da equipe Londribaja ainda não está com um sistema de amortecimento desejável e confortável para o piloto.

Ainda, tem-se que levar em consideração em uma prova, há várias formas de obstáculos, o proposto foi encontrado na bibliografia Jazar (2008), como o mais condizente ao projeto, e que as velocidades podem ser diferentes. Além disso, o sistema de amortecimento escolhido foi o criticamente amortecido, sendo que esse valor de amortecimento ainda não é conhecido pela equipe

## 8 CONCLUSÃO

Nesse trabalho, avaliou-se a dinâmica vertical de um veículo do tipo fora de estrada, ou *off road*, por meio de comparação de valores de frequências naturais e a amplitude de vibração para dois casos de velocidades. Os parâmetros dinâmicos do protótipo foram definidos com base em ensaios experimentais, no caso da rigidez das molas e para a massa dos componentes, e modelagens em *software CAD*, e para as simulações numéricas foi utilizado o *software matlab*.

Foram obtidos valores consideravelmente bons, levando em consideração os dados que se tinha para as simulações, para as frequências naturais. Ressaltando a configuração de 7 graus de liberdade do protótipo atual que obteve frequências até 1,2 Hz, sendo esse modelo aquele com características mais próximas do veículo real. Já a amplitude de vibração para o caso de um grau de liberdade, se localizam, em termos de desempenho, abaixo dos valores definidos pela literatura clássica, e em consideração ao isolamento de vibrações, também se encontram abaixo dos valores definidos pelas literaturas.

Vale ressaltar que a grande melhoria do protótipo mais recente é devido a mudança de geometria. As características de ambos aços são similares, a diferença entre os tubos utilizados foram também geométricas, melhorando a rigidez do meu protótipo ao diminuir a espessura de parede dos tubos. E além disso, com o novo projeto pode ser feito um carro mais simétricos, melhorando o centro gravitacional do veículo, influenciando nos parâmetros geométricos da tabela 2.

Como pode-se observar esse trabalho é apenas o começo de um estudo bem complexo, para os próximos trabalhos recomenda-se fazer um estudo detalhado do pneu e suas características, nos resultados das referências observou que é uma variável de grande importância. Como sugestão fazer testes experimentais utilizando uma mesa vibratória, ou o *drop test*, para que assim possa comparar as frequências naturais obtidas por meio numérico.



## REFERÊNCIAS

ANDRADE, Antonio F. A. Controle de suspensões ativas utilizando redes neurais. São Paulo, Faculdade de Engenharia Mecânica, 2002 (Dissertação Mestrado em Engenharia Mecânica), 155p. São Paulo, 2001, Universidade Estadual de Campinas

DUARTE, M. D. R. Simulação de ride primário e secundário através do uso de carregamento de pista. 2010. 127f. Dissertação (Mestre em Engenharia Mecânica). Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010

DUARTE, Brenno Tavares; BARRETO, Juliana Ramos; AMARAL, Pedro Trindade do. Análise de Dinâmica Veicular do Protótipo Baja SAE. 2016. 176 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Mecânica, Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro, 2016.

FERNANDES, MARCUS VINÍCIUS DA SILVA. ANÁLISES DA SUSPENSÃO E DIREÇÃO DE UM VEÍCULO "OFF-ROAD" DO TIPO MINI BAJA. 2015. TCC (Graduação) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Curitiba, [S. l.], 2015.

FREITAS JUNIOR, Luís Mauro Pereira. Estudo da dinâmica vertical de uma suspensão veicular do tipo mcpherson. 2006. 122 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

GILLESPIE, T. D. Fundamentals of Vehicle Dynamics. First edition. ed. Warrendale: Society of Automotive Engineers, Inc., 1992.

ISO 2631-1. Mechanical vibration and shock-evaluation of human exposure to whole-body vibration-part 1: General requirements. Geneva, Switzerland, 1997.

JAZAR, R. N. Vehycle Dynamics: Theory and Application. Riverdale: Springer, 2008.

LEAL, Vinicius. ESTUDO CINEMÁTICO DE SUSPENSÕES VEICULARES DO TIPO EIXO DE TORÇÃO. 2007. Mestrado (Pós Graduação) - PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS, [S. l.], 2007.

MORLIN, Fernando Vinícius. ANÁLISE DA DINÂMICA VERTICAL DE UM VEÍCULO FORA DE ESTRADA. 2017. 71 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2017.

NICANOR, Gustavo Araujo; CARVALHO, Leando dos Santo de; MAZZON, Uanderson Rodrigues Costa. ANÁLISE DINÂMICA DA SUSPENSÃO DE UM VEÍCULO MINI BAJA SAE. Revista de Engenharia e Tecnologia, Santo André, v. 8, n.3, p.2-12, dez. 2016.

NORTON, Robert. L.. Projeto de Máquinas: Uma abordagem integrada. 4. ed. Massachusetts: Bookman, 2013.

POPP, Karl; SCHIEHLEN, Werner. Ground Vehicle Dynamics. Alemanha: Springer, 2010.

SAE. SAE BRASIL. Disponível em: <<http://portal.saebrasil.org.br/>>. Acesso em: 10 nov. 2019.

STCHRAMM, Dieter; HILLER, Manfred; BARDINI, Roberto. Vehicle Dynamics: modeling and simulation. Berlim: Springer, 2014.

RAO, Singiresu S. Título original: "Mechanical Vibrations", 4. Ed. Americana. Revisor técnico José Júlio de Lima Junior, São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008. Vibração Mecânica, 4. Ed.

RIBEIRO JUNIOR. Elson Heraldo; PENTEADO, Rosangela de Fatima Stankowitz. Modelo para formatação de trabalhos acadêmicos da UTFPR. Ponta Grossa, 2011. (Apostila)