

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE INFORMÁTICA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

ALEFF RENAN PEREIRA CORREA

**COLORAÇÃO COMPLETA NÃO-PRÓPRIA FORTE EM GRAFOS
SPLIT**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

PONTA GROSSA

2020

ALEFF RENAN PEREIRA CORREA

**COLORAÇÃO COMPLETA NÃO-PRÓPRIA FORTE EM GRAFOS
SPLIT**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação, do Departamento Acadêmico de Informática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientadora: Prof^a Sheila Morais de Almeida
Coorientadora: Prof^a Denise do Rocio Maciel

PONTA GROSSA

2020



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Ponta Grossa

Diretoria de Graduação e Educação Profissional
Departamento Acadêmico de Informática
Bacharelado em Ciência da Computação



TERMO DE APROVAÇÃO

COLORAÇÃO COMPLETA NÃO-PRÓPRIA FORTE EM GRAFOS SPLIT

por

ALEFF RENAN PEREIRA CORREA

Este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) foi apresentado em dezesseis de outubro de 2020 como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação. O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelas professoras abaixo assinadas. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

Membro titular

Profa. Dra. Sheila Morais de Almeida
Orientadora

Prof. Dra. Maria Cláudia Aguitoni
Membro titular

Profa. MSc. Denise do Rocio Maciel
Co-Orientadora

MSc. Mayara Midori Omai
Membro titular

Prof. MSc. Glasielly Demori Proença

Prof. MSc. Geraldo Ranthum
Responsável pelo Trabalho de Conclusão
de Curso

Profa. Dra. Mauren Louise Sguario
Coordenadora do curso

Este trabalho é dedicado
a todos os amigos,
professores e familiares
que me ajudaram nesta jornada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Professora Sheila Morais de Almeida por todo o apoio e trabalho feito não só neste Trabalho de Conclusão de Curso, como também durante o curso, desde o início. Também agradeço da mesma forma a Professora Denise do Rócio Maciel, que muito ajudou nesse trabalho. Sem as mesmas esse trabalho nunca teria sido possível.

Agradeço também aos meus familiares, e em especial meu pai, Jair Corrêa, pelo esforço e sacrifício dado, sem hesitar, para que eu pudesse estar cursando um curso de bacharelado nesta instituição por vários anos. Atitude exemplar de pai a qual sou grato e espero um dia poder passar adiante.

Por fim, agradeço ao câmpus de Ponta Grossa da Universidade Tecnológica Federal do Paraná por manter um curso e corpo docente de altíssima qualidade que é o Departamento Acadêmico de Informática.

*“Aqui ninguém mais, senão tu, podia entrar, porque só para ti era feita esta porta.
Agora vou-me embora e fecho-a.”
(Der Prozess, Franz Kafka)*

RESUMO

R. P. CORREA, Aleff. **Coloração Completa Não-Própria Forte em Grafos Split**. 2020, 38page.38 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Ciência da Computação) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Ponta Grossa, 2020.

Uma coloração completa não-própria forte (coloração CNPF) de um grafo G é uma atribuição de cores para os vértices de G de maneira que, para quaisquer duas cores utilizadas (distintas ou não), exista um par de vértices adjacentes coloridos com essas cores. O número pseudoacromático forte de G é o maior número de cores para o qual existe uma coloração CNPF em G . Nesse trabalho, determinamos o número pseudoacromático forte dos grafos split.

Palavras-chaves: Coloração de vértices. Coloração Completa Não-Própria Forte. Número Pseudoacromático forte. Grafos split.

ABSTRACT

R. P. CORREA, Aleff. **Strong Complete Non-Proper Coloring of Split Graphs**. 2020, 38page.38 p. Work of Conclusion Course (Graduation in Computer Science) - Federal University of Technology - Paraná. Ponta Grossa, 2020.

A strong complete non-proper coloring (SCNP coloring) of a graph G is an assignment of colors to the vertices of G such that each possible combination of two colors (c_1, c_2) is assigned to at least one pair of adjacent vertices of G , even when $c_1 = c_2$. The strong pseudoachromatic number of G is the maximum number of colors for which G has a SCNP coloring. In this document, we determine the strong pseudoachromatic number of split graphs.

Keywords: Vertex coloring. Strong complete non-proper coloring. Strong pseudoachromatic number. Split graphs.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Exemplos de coloração própria e não-própria	11
Figura 2	– Coloração CNPF	11
Figura 3	– Grafo não-simples	14
Figura 4	– Grafo e subgrafo induzido	15
Figura 5	– Emparelhamento perfeito em um grafo G , com $\alpha'(G) = 5$	16
Figura 6	– Grafo completo K_{10}	16
Figura 7	– Grafo caminho	17
Figura 8	– Grafo ciclo	17
Figura 9	– O grafo bipartido C_6 , apresentado à direita evidenciando-se uma partição de $V(C_6)$ em dois conjuntos independentes.....	18
Figura 10	– Grafo Multipartido Completo	19
Figura 11	– Grafo Split.....	19
Figura 12	– Grafo split com uma partição dos vértices em uma clique (azul) e um conjunto independente (vermelho).....	30
Figura 13	– Grafo split com uma clique maximal (azul).....	30
Figura 14	– Coloração parcial de um grafo split	32
Figura 15	– Emparelhamento máximo em B de G	32
Figura 16	– Emparelhamento máximo em B de G	34

LISTA DE SÍMBOLOS

$\alpha'(G)$	tamanho de um emparelhamento máximo em G .
$\Delta(G)$	maior grau do grafo G .
$\omega(G)$	tamanho de uma clique máxima em G .
$\psi^*(G)$	número pseudoacromático forte de G .
$\chi(G)$	número cromático de G .
$c(v)$	cor do vértice v .
C_n	grafo ciclo com n vértices.
$E(G)$	conjunto de arestas do grafo G .
K_n	grafo completo com n vértices.
$K_{s,t}$	grafo bipartido completo com partes de tamanhos s e t .
K_{k_1, \dots, k_n}	grafo multipartido completo com n partes de tamanhos k_1, k_2, \dots, k_n .
P_n	grafo caminho com n vértices.
$V(G)$	conjunto de vértices do grafo G .
V_i	classe de cor i .
$[z]$	subconjunto dos números inteiros $\{1, 2, \dots, z\}$.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO	13
2	ARCABOUÇO TEÓRICO	14
3	RESULTADOS ANTERIORES EM COLORAÇÃO CNPF	20
3.1	GRAFOS COMPLETOS	21
3.2	GRAFOS CICLO E CAMINHO	22
3.3	GRAFOS MULTIPARTIDOS COMPLETOS	28
4	COLORAÇÃO CNPF EM GRAFOS SPLIT	30
5	CONCLUSÕES	37

1 INTRODUÇÃO

Uma coloração dos vértices de um grafo é uma atribuição de cores para seus vértices. Os problemas de coloração de vértices em grafos são aqueles que têm como instância um grafo G e devem apresentar uma coloração de vértices para G , obedecendo a determinadas restrições. Dentre esses problemas, o mais antigo é o *Problema da Coloração de Vértices*, que consiste em apresentar uma coloração de vértices com o menor número de cores possível para um dado grafo G , com a restrição de que deve-se atribuir cores distintas a qualquer par de vértices adjacentes. Esse número mínimo de cores é chamado de *número cromático* de G e denotado por $\chi(G)$.

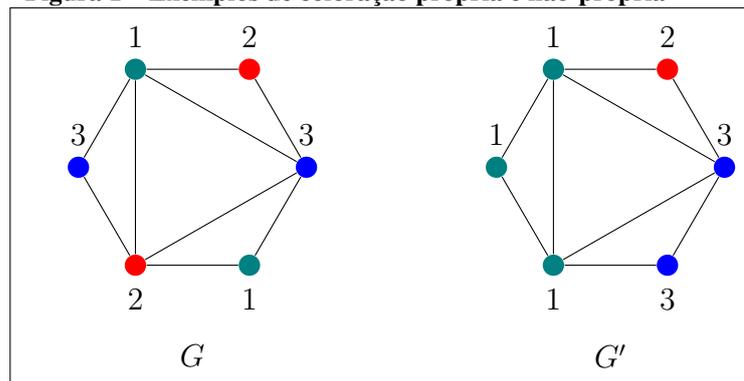
Uma coloração de vértices é *própria* se vértices adjacentes não possuem a mesma cor. Em qualquer coloração própria dos vértices de G utilizando $\chi(G)$ cores, é verdade que para cada par de cores, c_1 e c_2 , existe uma aresta em G cujos vértices estão coloridos com as cores c_1 e c_2 . Caso contrário, seria possível atribuir cor c_1 para todo vértice colorido com cor c_2 e G teria uma coloração de vértices própria com menos que $\chi(G)$ cores, contrariando a minimalidade de $\chi(G)$. Então, o problema clássico conhecido como Problema da Coloração de Vértices pode ser enunciado como o problema de determinar o menor número de cores necessárias para uma coloração própria de G tal que, para qualquer par de cores utilizadas, c_1 e c_2 , existe uma aresta em G cujos vértices estão coloridos com c_1 e c_2 .

Quando uma coloração de vértices própria satisfaz a restrição de que para qualquer par de cores, c_1 e c_2 , existe uma aresta em G cujos vértices estão coloridos com c_1 e c_2 , esta coloração é chamada de *coloração completa própria*. Embora toda coloração de vértices própria, para um dado grafo G , seja completa, nem toda coloração completa própria é uma coloração própria mínima para G . O **maior** número de cores em uma coloração completa própria de um grafo G é chamado de *número acromático* de G . Harary, Hedetniemi e Prins (1967) introduziu o *Problema da Coloração Completa Própria*, que é determinar o número acromático para um dado grafo G . Há diversos resultados na literatura sobre o Problema da Coloração Completa Própria, uma boa referência é o Capítulo 12 do livro de Chartrand e Zhang (2009).

Em uma *coloração não-própria* de G podem existir vértices adjacentes com a mesma cor, embora não seja obrigatório. Quando existem dois vértices adjacentes com as cores i e j , faremos um abuso de linguagem e diremos que i e j são adjacentes. Neste trabalho, as cores são representadas por números naturais. A Figura 1 mostra duas colorações de vértices para o mesmo grafo. À esquerda, o grafo G possui uma coloração própria. Tanto a coloração de G quanto a coloração de G' na Figura 1 são completas não-próprias¹.

¹ Como na coloração não-própria não é obrigatório existirem vértices adjacentes com a mesma cor, toda coloração própria é também não-própria.

Figura 1 – Exemplos de coloração própria e não-própria

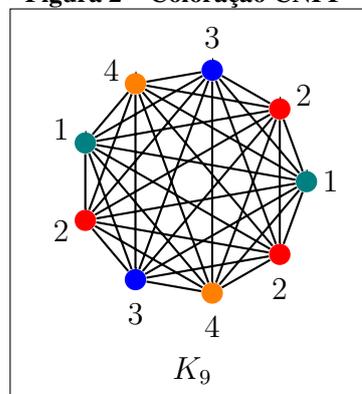


Fonte: Autoria própria

Gupta (1969) introduziu o *Problema da Coloração Completa Não-Própria*, que é determinar, dado um grafo G , qual o maior número de cores possível em uma coloração dos vértices de G completa e não necessariamente própria. Este número é chamado de *número pseudoacromático* de G e denotado por $\psi(G)$. Embora o Problema da Coloração Completa Própria seja amplamente estudado (CHARTRAND; ZHANG, 2009, p.329), há poucas referências literárias sobre a coloração completa não própria. Yegnanarayanan (2000) determinou o número pseudoacromático para ciclos, grafos linhas de rodas e alguns grafos multipartidos completos. Liu e Liu (2011) determinaram o número pseudoacromático dos demais multipartidos completos e dos grafos disjunção de equipartidos completos.

Uma versão mais restrita da coloração completa não própria é a *coloração completa não-própria forte* (ou, de forma abreviada, coloração CNPF), definida como uma coloração de vértices completa e não-própria em que, para cada cor i utilizada, existe uma aresta do grafo cujos vértices estão ambos coloridos com a cor i . Em outras palavras, na coloração completa não-própria forte, cada cor deve ser adjacente às demais cores utilizadas e a si própria. A Figura 2 mostra uma coloração CNPF em um grafo K_9 .

Figura 2 – Coloração CNPF



Fonte: Autoria própria

Chartrand e Zhang (2009, 442) introduziram o *Problema da Coloração Completa Não-Própria Forte*, que é determinar o maior número de cores que permite uma coloração CNPF para

um dado grafo G . Este número é chamado de *número pseudoacromático forte* de G e denotado por $\psi^*(G)$. A coloração CNPF do grafo K_9 , apresentada na Figura 2 é máxima, ou seja, utiliza o maior número de cores possível. Portanto, $\psi^*(K_9) = 4$. Note que toda cor da coloração apresentada na Figura 2 foi atribuída a pelo menos um par de vértices vizinhos, o que é mandatório numa coloração CNPF.

Durante a pesquisa bibliográfica realizada para o desenvolvimento desse trabalho, verificou-se que estudos sobre a coloração CNPF são escassos. Chartrand e Zhang (2009, 442) sugerem como projeto de pesquisa a determinação de limitantes para o número pseudoacromático forte em função do número de arestas do grafo e a determinação do número pseudoacromático forte para os caminhos e para grafos em geral. Além do livro de Chartrand e Zhang (2009), até onde vai nosso conhecimento, há apenas um artigo de Liu, Li e Liu (2015). Neste artigo, os autores apresentam limitantes para o número pseudoacromático forte em função do número de arestas e determinam o número pseudoacromático forte dos caminhos, atendendo à sugestão de Chartrand e Zhang (2009). Liu, Li e Liu (2015) também apresentam o número pseudoacromático forte dos grafos completos, ciclos, multipartidos completos, biequipartidos completos dos quais um emparelhamento perfeito foi removido, rodas, leques, e alguns grafos linha.

Como resolver o Problema da Coloração CNPF para um grafo qualquer seria um projeto bastante audacioso, este trabalho foi dedicado à determinação do número pseudoacromático forte em casos específicos. Na famosa coluna de Johnson (1985), publicada entre 1981 e 1992, foi compilado um conjunto de classes de grafos largamente estudadas, para as quais deseja-se determinar a complexidade computacional de problemas famosos da Teoria dos Grafos. Dentre essas classes, está a dos grafos split².

O reconhecimento dos grafos split pode ser feito em tempo linear (HAMMER; SIMONE, 1981). Além disso, diversos problemas que são difíceis do ponto de vista da complexidade computacional (NP-Completo) têm solução linear quando restritos à classe dos grafos split, como o Problema do Conjunto Independente Mínimo (ROSE; TARJAN; LUEKER, 1976), da Coloração de Vértices (CHVÁTAL *et al.*, 1987) e da Clique Máxima (CHVÁTAL *et al.*, 1987). Mas isso não significa que para esta classe de grafos todos os problemas possam ser resolvidos facilmente, existem diversos problemas bastante conhecidos que são NP-Completo mesmo quando restritos aos grafos split, como o Problema do Conjunto Dominante Mínimo (BERTOSI, 1984) e do Caminho Hamiltoniano (MÜLLER, 1996). Restringindo-se aos problemas de coloração, apesar de o Problema da Coloração de Vértices ter solução em tempo linear para os grafos split, a complexidade computacional do Problema da Coloração de Arestas ainda não é conhecida (ALMEIDA, 2012).

Neste trabalho, determinamos o número pseudoacromático forte dos grafos split e apresentamos um algoritmo $O(|V(G)|^{\frac{5}{2}})$ que, dado um grafo split G , gera uma coloração CNPF ótima para G . Além disso, com o objetivo de auxiliar em futuros estudos sobre o tema, reapresentamos algumas provas dos resultados de Liu, Li e Liu (2015), referentes à determinação do

² Os grafos split e outros conceitos importantes para este trabalho são formalmente apresentados no Capítulo 2.

número pseudoacromático forte de caminhos, ciclos e grafos multipartidos completos, dando mais informações sobre os argumentos utilizados, com uma organização diferente e com maior riqueza de detalhes.

1.1 ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO

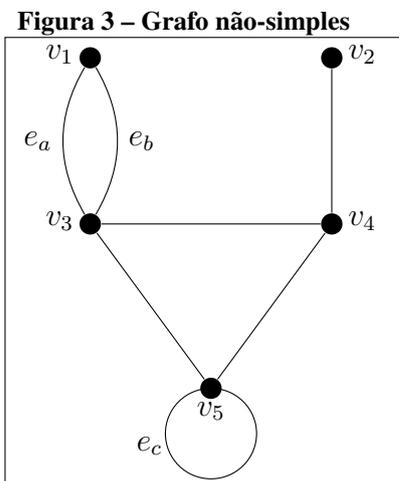
Além do capítulo introdutório esse documento apresenta mais 4 capítulos. No Capítulo 2 apresentamos conceitos básicos da Teoria dos Grafos, bem como algumas classes de grafos utilizadas ao longo do texto. Em seguida, o Capítulo 3 apresenta os principais resultados sobre a coloração CNPF publicados no artigo de Liu, Li e Liu (2015). Dentre os resultados pode-se citar propriedades gerais e número pseudoacromático forte em função do número de vértices para os grafos completos, ciclos, caminhos e multipartidos completos. No Capítulo 4 determinamos o número pseudoacromático forte nos grafos split e apresentamos um algoritmo de tempo polinomial que recebe como entrada um grafo split G e gera uma coloração CNPF ótima para G . Por fim, o Capítulo 5 se refere às conclusões obtidas nesse trabalho e às sugestões de trabalhos futuros.

2 ARCABOUÇO TEÓRICO

Apresentamos nesse capítulo conceitos básicos em Teoria dos Grafos que são utilizados neste texto. Qualquer outro conceito não apresentado nesse capítulo usará a definição que consta em West (2001).

Um *grafo* G é uma estrutura matemática que possui um conjunto de *vértices* $V(G)$ e um conjunto de *arestas* $E(G)$, onde cada elemento de $E(G)$ é um par de vértices pertencentes a $V(G)$. Os números de vértices e arestas de um grafo G serão representados, respectivamente, por $|V(G)|$ e $|E(G)|$, mas também é comum representá-los, em trabalhos relacionados à Teoria dos Grafos, por n e m , sem rotular explicitamente o grafo do contexto da discussão. Os vértices e arestas de um grafo podem ser representados graficamente por pontos ou círculos e segmentos de retas, como exemplificado pelas figuras utilizadas nesse trabalho.

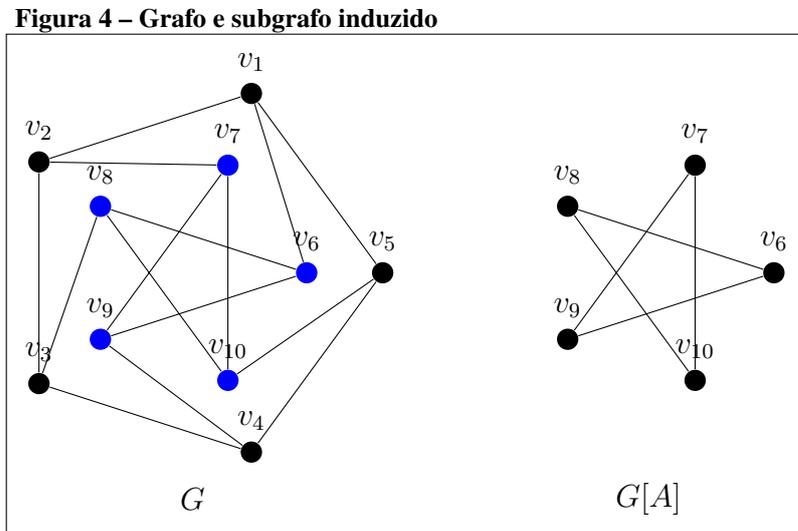
Arestas múltiplas são um conjunto de um ou mais pares de arestas formadas pelo mesmo par de vértices. Quando um grafo possui arestas múltiplas, é chamado de *multigrafo*. Um *laço* é uma aresta e tal que ambos os vértices que a compõe são iguais, ou seja, $e = (v, v)$, $e \in E(G)$, $v \in V(G)$. Como exemplificado pelo grafo da Figura 3, as arestas $e_a = e_b = (v_1, v_3)$ são arestas múltiplas em (v_1, v_3) , e a aresta $e_c = (v_5, v_5)$ é um laço. Quando um grafo não possui arestas múltiplas e laços, dizemos que esse grafo é um *grafo simples*. Nesse trabalho, considere que todos os grafos são simples, exceto quando explicitado.



Fonte: Autoria própria

Um *subgrafo* H de G é um grafo cujo conjunto de vértices é um subconjunto dos vértices de G e cujo conjunto de arestas é um subconjunto das arestas de G . Dois subgrafos H_1 e H_2 de um grafo G são *disjuntos nos vértices* se $V(H_1) \cap V(H_2) = \emptyset$ e são *disjuntos nas arestas* se $E(H_1) \cap E(H_2) = \emptyset$. Note que podem existir subgrafos disjuntos nas arestas que não são disjuntos nos vértices, porém quaisquer dois subgrafos disjuntos nos vértices são também disjuntos nas arestas. Um *subgrafo induzido* $H = G[A]$ é um subgrafo de G induzido por um conjunto de vértices $A \subseteq V(G)$, obtido ao se remover de G os vértices do conjunto $V(G) \setminus A$ e as arestas

que neles incidem. A Figura 4 mostra o exemplo de um grafo G e um subgrafo induzido $G[A]$, com $A = \{v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$.

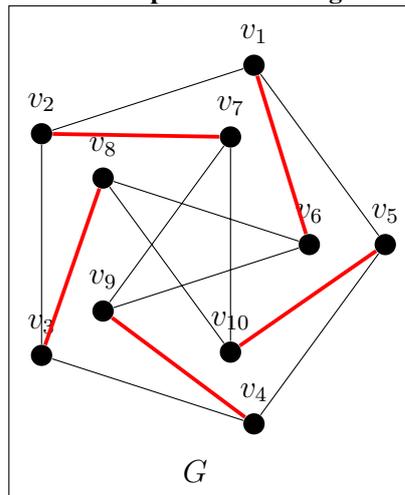


Fonte: Autoria própria

O *grau* de um vértice $v \in V(G)$, denotado por $d(v)$, é o número de arestas de G das quais v é uma ou ambas as extremidades, laços devem ser contados duas vezes. O maior grau entre os vértices pertencentes a G é chamado de *grau máximo* de G e é denotado por $\Delta(G)$. Quando um vértice v_1 está ligado por uma aresta a um vértice v_2 , dizemos que v_1 é *vizinho* de v_2 , ou então que v_1 é *adjacente* a v_2 . Um grafo em que todos os vértices tem grau igual a k , para qualquer número inteiro não-negativo k , é chamado de *grafo k -regular*.

Um *emparelhamento* em um grafo G é um subconjunto M das arestas de G que não possuem vértices em comum. Um emparelhamento de um grafo G é *perfeito* se todo vértice de G é extremo de alguma aresta em M . Neste caso, dizemos que M *cobre os vértices* de G . Um emparelhamento M em um grafo G é *máximo* se não existe nenhum emparelhamento em G que tenha mais arestas que M . O tamanho de um emparelhamento máximo em um grafo G é denotado por $\alpha'(G)$. A Figura 5 exibe um emparelhamento máximo (arestas vermelhas) para um grafo G que, portanto, tem $\alpha'(G) = 5$. Note que o emparelhamento apresentado na Figura 5 também é perfeito.

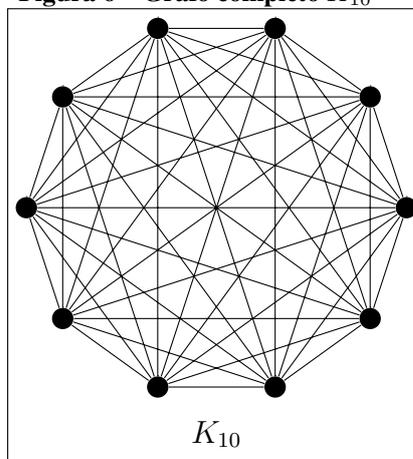
Figura 5 – Emparelhamento perfeito em um grafo G , com $\alpha'(G) = 5$.



Fonte: Autoria própria

Um grafo *completo* K_n é um grafo em que para cada par de vértices $v_a, v_b \in V(K_n)$, existe uma aresta $e = (v_a, v_b) \in E(K_n)$. Em outras palavras, um grafo completo é um grafo onde cada vértice é adjacente a todos os demais. A Figura 6 apresenta o grafo completo com dez vértices, K_{10} .

Figura 6 – Grafo completo K_{10}

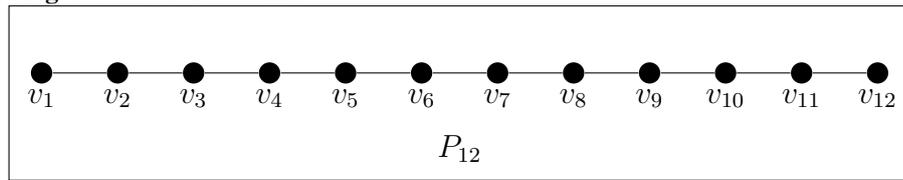


Fonte: Autoria própria

Observe que cada vértice do grafo K_n é vizinho de $(n - 1)$ outros vértices. Logo, o número de arestas do grafo K_n é $|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$.

Um grafo *caminho* P_n é um grafo com n vértices, v_1, v_2, \dots, v_n , e conjunto de arestas $E(P_n) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n)\}$. Pela definição, observa-se que grafos caminho possuem grau máximo igual a 2. A Figura 7 mostra o grafo caminho P_{12} .

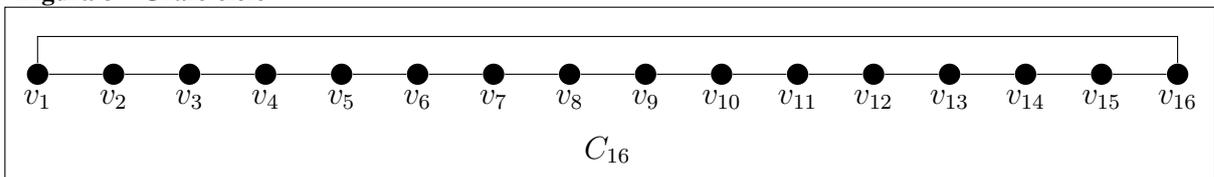
Figura 7 – Grafo caminho



Fonte: Autoria própria

Um grafo *ciclo* C_n é um grafo com n vértices, com conjunto de vértices $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e conjunto de arestas $E(C_n) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)\}$. Ou seja, $V(C_n) = V(P_n)$ e $E(C_n) = E(P_n) \cup \{(v_1, v_n)\}$. A Figura 8 mostra o grafo ciclo C_{16} .

Figura 8 – Grafo ciclo



Fonte: Autoria própria

Um *caminho* em um grafo G é um subgrafo de G que é um grafo caminho. Analogamente, um *ciclo* em G é um subgrafo de G que é um grafo ciclo. Um grafo G é *conexo* se existe um caminho entre cada par de vértices de G .

Um *passeio* em um grafo G é uma sequência de vértices (não necessariamente distintos) $u_1 u_2 u_3 \dots u_k$ tal que $(u_i, u_{i+1}) \in E(G)$ para $1 \leq i < k$. Uma *trilha* em um grafo G é um passeio em que as arestas são duas a duas distintas. Um *caminho euleriano* em um grafo G é uma trilha em G que contém todas as arestas de $E(G)$. Analogamente, um *circuito euleriano* em um grafo G é uma trilha $u_1 u_2 u_3 \dots u_k$ em G que contém todas as arestas de $E(G)$ e tal que $u_1 = u_k$. Um grafo é *euleriano* se, e somente se, possui um circuito euleriano. Liu, Li e Liu (2015) utilizam caminhos e circuitos eulerianos para determinar o número pseudoacromático forte em caminhos e ciclos. Para que este texto seja auto-contido e por questões de completude, apresentamos a seguir o resultado de Euler (1741), que garante condições necessárias e suficientes para que um grafo tenha um circuito euleriano.

Teorema 2.1 (EULER, 1741). *Um grafo conexo G é euleriano se, e somente se, todos os vértices em $V(G)$ possuem grau par.*

Demonstração. \mapsto Seja G um grafo euleriano. Por definição, G tem um circuito euleriano. Para cada ocorrência de um vértice v nesse circuito, existem duas arestas (u, v) e (v, w) que incidem em v . Como toda aresta faz parte do circuito, necessariamente o número de arestas incidentes em cada vértice deve ser par.

\mapsto Seja G um grafo tal que todo vértice em $V(G)$ tem grau par. Considere um vértice $v_i \in V(G)$. Vamos construir uma trilha T_i a partir de v_i até que não seja possível continuar.

Como todos os vértices possuem grau par, todo vértice é intermediário nessa trilha¹ $\frac{d(v)}{2}$ vezes. A única exceção é o vértice v_i onde a trilha T_i começa e termina. Se T_i contém todas as arestas de G , então T_i é um circuito euleriano. Senão, retiramos de G todas as arestas que fazem parte de T_i . No grafo resultante G' , todos os vértices também possuem grau par e necessariamente um deles faz parte de T_i , senão o grafo não seria conexo. Recomeçamos o mesmo processo com o grafo G' , partindo de um vértice comum com T_i , obtendo assim um novo circuito T_j . Continuando esse processo, necessariamente obteremos um circuito único que contém todas as arestas de G , ou seja, um circuito euleriano. Portanto, G é euleriano. \square

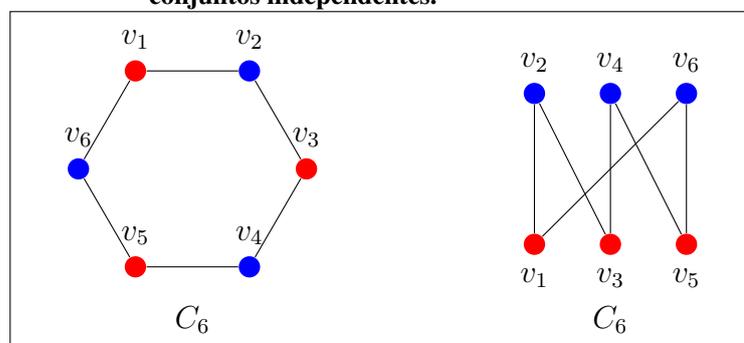
Considere um grafo euleriano G e seja e uma aresta qualquer em $E(G)$. A partir da prova do Teorema 2.1, conclui-se que existe uma trilha que contém todas as arestas de $G - e$ e que não é fechada, ou seja, um caminho euleriano em $G - e$. Essa trilha é obtida a partir de qualquer circuito euleriano de G , removendo-se do circuito a mesma aresta e . Euler também apresentou a seguinte observação.

Observação 2.2 (EULER, 1741). *Se G é conexo e tem exatamente dois vértices de grau ímpar, u e v , então G tem um caminho euleriano cujos extremos são u e v .*

Um conjunto independente de um grafo G é um conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ tal que cada par de vértices $v_1, v_2 \in S$ satisfaz $(v_1, v_2) \notin E(G)$. Ou seja, em um conjunto independente os vértices não possuem nenhuma aresta entre si.

Um grafo é k -partido se seu conjunto de vértices admite uma partição em k conjuntos independentes. Dizemos que um grafo G é *bipartido* quando seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos independentes, ou seja, quando G é 2-partido. A Figura 9 ilustra um exemplo de grafo bipartido, os vértices com índices ímpares (coloridos de vermelho) não são vizinhos entre si, assim como os vértices com índices pares (coloridos de azul). A coloração destaca os dois conjuntos independentes existentes no grafo que, portanto, é um grafo bipartido.

Figura 9 – O grafo bipartido C_6 , apresentado à direita evidenciando-se uma partição de $V(C_6)$ em dois conjuntos independentes.

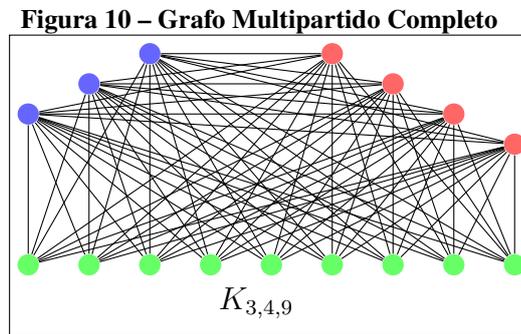


Fonte: Autoria própria

Um grafo *multipartido completo* K_{n_1, n_2, \dots, n_k} é um grafo k -partido cujo conjunto de vértices pode ser particionado em k conjuntos independentes S_1, S_2, \dots, S_k , tal que $|S_i| = n_i$ e

¹ Por vértice intermediário, entenda-se que não é o vértice inicial nem final da trilha.

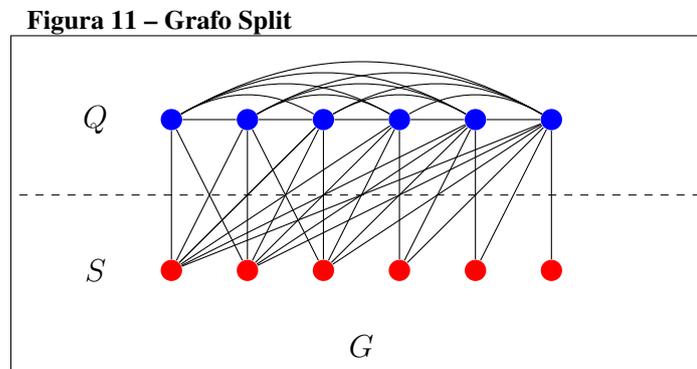
cada vértice $v \in S_i$ é adjacente a todos os vértices em $V(G) \setminus S_i$, $1 \leq i \leq k$. A Figura 10 mostra o grafo multipartido completo $K_{3,4,9}$.



Fonte: Autoria própria

Uma *clique* em um grafo G é um conjunto de vértices que são dois a dois adjacentes em G . Uma clique Q_1 é *maximal* em G se não existe uma clique Q_2 tal que $|Q_2| > |Q_1|$ e $Q_1 \subset Q_2$. O tamanho da maior clique de um grafo G é denotado por $\omega(G)$. Uma clique Q é *máxima* em G quando $|Q| = \omega(G)$.

Um grafo *split* $G = [Q, S]$ é um grafo cujo conjunto de vértices pode ser particionado em uma clique Q e um conjunto independente S . Um exemplo de grafo split é apresentado na Figura 11.



Fonte: Autoria própria

3 RESULTADOS ANTERIORES EM COLORAÇÃO CNPF

Liu, Li e Liu (2015) determinaram o número pseudoacromático forte para os grafos completos, ciclos, caminhos e multipartidos completos. Durante esse trabalho, provas alternativas e equivalentes para esses resultados foram construídas com a finalidade de facilitar a compreensão do leitor. São estas provas que apresentamos a seguir.

Dada uma coloração de vértices de um grafo G , utilizando cores de um conjunto C , a classe de cor $V_i \subseteq V(G)$ é o conjunto dos vértices de $V(G)$ que estão coloridos com a cor i , para cada $i \in C$. No restante desse documento, para qualquer inteiro positivo z , o subconjunto dos números inteiros $\{1, 2, \dots, z\}$ será denotado por $[z]$.

Liu, Li e Liu (2015) estabeleceram limitantes para $\psi^*(G)$, apresentados no Teorema 3.1. A prova desse teorema é especialmente importante para a determinação do número pseudoacromático forte dos grafos completos, que será vista a seguir.

Teorema 3.1 (LIU; LI; LIU, 2015). *Seja G um grafo com n vértices e $m \geq 1$ arestas. Então,*

$$\psi^*(G) \leq \min \left\{ \frac{\sqrt{8m+1} - 1}{2}, \frac{n}{2} \right\}; \quad (3.1)$$

$$\psi^*(G) \left\lceil \frac{\psi^*(G) + 1}{\Delta(G)} \right\rceil \leq n. \quad (3.2)$$

Demonstração. Seja G um grafo com n vértices e m arestas, com uma coloração CNPF utilizando cores do conjunto $[\psi^*(G)]$. Para simplificar a notação, vamos denotar $\psi^*(G)$ e $\Delta(G)$ apenas por ψ^* e Δ , respectivamente. Seja H_G um grafo-partição de G , tal que cada vértice $v_i \in V(H_G)$ corresponde à classe de cor V_i e existe a aresta $(v_i, v_j) \in E(H_G)$ se e somente se existe pelo menos uma aresta $(u, w) \in E(G)$ tal que $u \in V_i$ e $w \in V_j$.

Como, por definição, uma cor em uma coloração CNPF é adjacente a todas as demais cores, o grafo H_G é o grafo completo K_{ψ^*} . Isto implica que H_G tem exatamente $\frac{1}{2}\psi^*(\psi^* - 1)$ arestas. Como, na coloração CNPF, cada cor é obrigatoriamente adjacente a ela mesma, os subgrafos induzidos $G[V_i]$ de todas classes de cores V_i em G possuem pelo menos uma aresta interna (entre seus próprios vértices), ou seja, G possui $n \geq 2\psi^*$ vértices. Então, $\psi^* \leq \frac{n}{2}$.

Como cada aresta em H_G implica na existência de uma ou mais arestas entre os vértices das respectivas classes de cores em G , tem-se $m \geq |E(H_G)| = \frac{1}{2}\psi^*(\psi^* - 1)$. Além disso, existem pelo menos ψ^* arestas internas às partes V_i . Portanto $m \geq \psi^* + \frac{1}{2}\psi^*(\psi^* - 1)$. Esta desigualdade pode ser escrita como a inequação de segundo grau

$$\frac{(\psi^*)^2}{2} + \frac{\psi^*}{2} - m \leq 0 \quad (3.3)$$

A Inequação 3.3 tem raízes $(-1 \pm \sqrt{8m+1})/2$, com parábola convexa. Então, estamos interessados em valores de ψ^* pertencentes ao intervalo $[(-\sqrt{8m+1}-1)/2, (\sqrt{8m+1}-1)/2]$. Como valores negativos de ψ^* não fazem sentido, considerando o cenário em que o número pseudoacromático forte está inserido, tem-se obrigatoriamente que $\psi^* \in [0, (\sqrt{8m+1}-1)/2]$, ou seja, $\psi^* \leq (\sqrt{8m+1}-1)/2$, concluindo a prova da Inequação 3.1.

O grau de cada vértice em G é no máximo Δ . Então, cada vértice em uma classe de cor V_i tem no máximo Δ arestas incidentes em outras classes de cores. Como existe pelo menos uma aresta interna à classe de cor V_i , existem dois vértices em V_i que têm no máximo $\Delta - 1$ arestas incidentes em outras classes de cores, cada um. Então, o número de arestas com um extremo em V_i e o outro extremo em outra classe de cor é no máximo $(|V_i| - 2)\Delta + 2(\Delta - 1)$. Como existe aresta entre quaisquer duas classes de cores, existem pelo menos $\psi^* - 1$ arestas entre V_i e as demais classes de cores. Portanto, $(|V_i| - 2)\Delta + 2(\Delta - 1) \geq \psi^* - 1$. Então,

$$|V_i|\Delta - 2\Delta + 2\Delta - 2 \geq \psi^* - 1$$

$$|V_i|\Delta \geq \psi^* + 1$$

$$|V_i| \geq \left\lceil \frac{\psi^* + 1}{\Delta} \right\rceil.$$

Como temos ψ^* classes de cores em G , então é possível afirmar que $n \geq \psi^* \left\lceil \frac{\psi^* + 1}{\Delta} \right\rceil$, o que prova a Inequação 3.2. \square

3.1 GRAFOS COMPLETOS

Uma consequência direta do Teorema 3.1 é a determinação do número pseudoacromático forte para os grafos completos, apresentada no Corolário 3.2.

Corolário 3.2. $\psi^*(K_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Demonstração. Como cada cor utilizada na coloração CNPF precisa ser adjacente a si mesma e a todas as outras cores, e como em um grafo K_n todos os vértices são adjacentes aos demais, pode-se assumir que cada dois vértices em um grafo K_n correspondem a um classe de cor. Portanto, teremos $\psi^* = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. \square

3.2 GRAFOS CICLO E CAMINHO

Esta seção apresenta o número pseudoacromático forte dos ciclos e caminhos, que foi determinado por Liu, Li e Liu (2015).

Liu, Li e Liu (2015) afirmam sem provar que todo número inteiro positivo n pode ser descrito pela equação $n = 2k^2 + x$, para um par de números inteiros k e x tais que $x \in [-k, 3k]$. A seguir, nós apresentamos uma prova para esta afirmação. Esta forma de representar n é importante pois o Teorema 3.6 apresenta o número pseudoacromático forte do ciclo C_n em função de k e x .

Lema 3.3. *Todo número inteiro positivo n pode ser descrito como $2k^2 + x$, para um único par de números inteiros k e x , tais que $x \in [-k, 3k]$.*

Demonstração. A prova é por indução em n . Para a prova da base, a Tabela 1 mostra os valores de k e x para cada valor de n no intervalo $[1, 6]$.

n	k	x	n	k	x
1	1	-1	4	1	2
2	1	0	5	1	3
3	1	1	6	2	-2

Tabela 1 – Base para $n = 2k^2 + x$.

Por hipótese, assuma que $n = 2k^2 + x$, para um único par de números inteiros k e x , tais que x pertence ao intervalo $[-k, 3k]$.

Resta mostrar que $n + 1$ pode ser descrito como $2q^2 + y$, para um único par de números inteiros q e y , tais que y pertence ao intervalo $[-q, 3q]$.

Por hipótese, $n = 2k^2 + x$. Então, $n + 1 = 2k^2 + x + 1$. Então, $n + 1$ é descrito como $2q^2 + y$, onde $q = k$ e $y = x + 1$. Devemos verificar que $y \in [-q, 3q]$. Como $x \in [-k, 3k]$ e $y = x + 1$, então $y \in [-k + 1, 3k + 1]$. Como $k = q$, tem-se que $y \in [-q + 1, 3q + 1]$, que não satisfaz as restrições impostas para a prova do passo, já que y deve ser no máximo $3q$. Portanto, a prova deve ser dividida em dois casos.

Se $x < 3k$, então pode-se considerar $y = x + 1$ e $q = k$, pois assim $y \in [-q, 3q]$ e $n + 1 = 2q^2 + y$, como queríamos.

Seja $x = 3k$. Como $n + 1 = 2k^2 + x + 1$ e $x = 3k$, tem-se $n + 1 = 2k^2 + x + 1 = 2k^2 + 3k + 1 = 2(k^2 + 2k) - k + 1 = 2(k^2 + 2k + 1) - k - 1 = 2(k + 1)^2 - (k + 1)$. Assim $n + 1$ pode ser descrito como duas vezes quadrado de um número inteiro $(k + 1)$ mais um inteiro $(-k - 1)$. Então, $q = k + 1$ e $y = -k - 1 = -q$. Observe que, neste caso, $y \in [-q, 3q]$, como queríamos demonstrar. \square

Os Lemas 3.4 e 3.5 apresentam limitantes superiores para o número pseudoacromático forte de grafos com grau máximo igual a 2. Embora estes lemas não tenham sido apresentados por Liu, Li e Liu (2015), são utilizados por estes autores nas provas dos Teoremas 3.6 e 3.8. Apresentamos estes lemas e suas provas explicitamente para auxiliar o leitor na compreensão do Teorema 3.6.

Lema 3.4. *Seja G um grafo com $\Delta(G) = 2$ e $|V(G)| = 2k^2 + x$, para números inteiros positivos k e x tais que $x \leq 2k - 1$. Então $\psi^*(G) \leq 2k - 1$.*

Demonstração. Seja G um grafo com $\Delta(G) = 2$ e $|V(G)| = 2k^2 + x$, para números inteiros positivos k e x tais que $x \leq 2k - 1$. Suponha por contradição que $\psi^*(G) \geq 2k$. Então, pela equação 3.2 do Teorema 3.1, tem-se

$$2k \left\lceil \frac{2k+1}{2} \right\rceil \leq \psi^*(G) \left\lceil \frac{\psi^*(G)+1}{\Delta(G)} \right\rceil \leq |V(G)|.$$

Portanto,

$$2k \left(\frac{2k+2}{2} \right) \leq |V(G)|$$

$$|V(G)| \geq 2k^2 + 2k.$$

Observe que $|V(G)| \geq 2k^2 + 2k$ contraria a hipótese de que $|V(G)| = 2k^2 + x$, já que $x \leq 2k - 1$ e, portanto, $|V(G)| \leq 2k^2 + 2k - 1$. \square

Lema 3.5. *Seja G um grafo com $\Delta(G) = 2$ e $|V(G)| = 2k^2 + x$, para números inteiros positivos k e x tais que $x \leq 3k$. Então $\psi^*(G) \leq 2k$.*

Demonstração. Suponha por contradição que $\psi^*(G) \geq 2k + 1$. Então, pela equação 3.2 do Teorema 3.1,

$$(2k+1) \left\lceil \frac{(2k+1)+1}{2} \right\rceil \leq \psi^*(G) \left\lceil \frac{\psi^*(G)+1}{\Delta(G)} \right\rceil \leq |V(G)|.$$

Então,

$$(2k+1) \left(\frac{2k+2}{2} \right) \leq |V(G)|$$

$$|V(G)| \geq (2k+1)(k+1) = 2k^2 + 3k + 1$$

Observe que $|V(G)| \geq 2k^2 + 3k + 1$, contraria a hipótese de que $|V(G)| = 2k^2 + x$, já que $x \leq 3k$ e, portanto, $|V(G)| \leq 2k^2 + 3k$. \square

Os Teoremas 3.6 e 3.8 mostram que os limitantes superiores obtidos nos Lemas 3.4 e 3.5 são justos. Na verdade, eles apresentam exatamente o número pseudoacromático forte dos ciclos e caminhos.

Teorema 3.6 (LIU; LI; LIU, 2015). *Seja C_n um ciclo tal que $n = 2k^2 + x$, para os números inteiros k e x , tais que x pertence ao intervalo $[-k, 3k]$. Então,*

$$\psi^*(C_n) = \begin{cases} 2k - 1, & \text{se } -k \leq x \leq 2k - 1. \\ 2k, & \text{se } 2k \leq x \leq 3k. \end{cases}$$

Demonstração. Há dois casos, descritos a seguir.

Caso 1: $-k \leq x \leq 2k - 1$. Então, $2k^2 - k \leq n \leq 2k^2 + 2k - 1$ e, pelo Lema 3.4, $\psi^*(C_n) \leq 2k - 1$. Resta mostrar que C_n tem uma coloração CNPF com $2k - 1$ cores.

Primeiro, vamos construir um grafo euleriano H que tem uma coloração CNPF com $2k - 1$ cores. Depois, mostrar que toda aresta de H corresponde a uma aresta de um ciclo C_{2k^2-k} , garantindo, portanto, uma coloração CNPF para o grafo C_{2k^2-k} . Por fim, vamos estender a coloração do ciclo C_{2k^2-k} para uma coloração CNPF do ciclo C_n .

Para construir o grafo H , considere o grafo completo K_{2k-1} , com conjunto de vértices $V(K_{2k-1}) = \{u_1, u_2, \dots, u_{2k-1}\}$. Para todo número inteiro $i \in [2k - 2]$ remova a aresta (u_i, u_{i+1}) e adicione um novo vértice w_i adjacente a u_i e a u_{i+1} . Remova a aresta (u_1, u_{2k-1}) e adicione um novo vértice w_{2k-1} adjacente a u_1 e a u_{2k-1} . Atribua cor i para os vértice u_i e w_i do grafo H , $1 \leq i \leq 2k - 1$. Vamos mostrar que esta é uma coloração CNPF do grafo H .

Para toda cor i , existem dois vértices adjacentes em H coloridos com i , pois u_i é adjacente a w_i . Cores consecutivas i e $i + 1$ foram atribuídas aos vértices das arestas (w_i, u_{i+1}) , para $1 \leq i \leq 2k - 2$. A cor 1 e a cor $2k - 1$ foram atribuídas aos vértices da aresta (u_1, w_{2k-1}) . Todos os outros pares de cores i e j foram atribuídos para os pares de vértices u_i e u_j , que são adjacentes já que H foi construído a partir do grafo completo.

Seja C_{2k^2-k} um ciclo com vértices rotulados $v_1, v_2, \dots, v_{2k^2-k}$. Vamos apresentar uma coloração CNPF para este ciclo. Observe que todo vértice em H tem grau par. Além disso, por construção, H tem $2k - 1 + \frac{(2k-1)(2k-2)}{2} = 2k^2 - k$ arestas. Pelo Teorema 2.1, H tem um circuito euleriano $\mathcal{T} = t_1 t_2 t_3 \dots t_{2k^2-k} t_1$ tal que cada vértice t_i corresponde a um vértice de H . Lembre-se que dois vértices t_i e t_j podem corresponder ao mesmo vértice de H , pela definição de circuito euleriano. Seja $c(t_i)$ a cor do vértice t_i no grafo H , para $1 \leq i \leq 2k^2 - k$. Uma coloração CNPF para o ciclo C_{2k^2-k} é dada pela função $\pi : V(C_{2k^2-k}) \rightarrow [2k - 1]$ definida por $\pi(v_i) = c(t_i)$, $1 \leq i \leq 2k^2 - k$. Como \mathcal{T} é um circuito euleriano, toda aresta de H corresponde a uma aresta de \mathcal{T} . Como toda aresta de \mathcal{T} corresponde a uma aresta de C_{2k^2-k} , por transitividade, toda aresta de H corresponde a uma aresta de C_{2k^2-k} . Logo, para cada par de cores i e j do conjunto $[2k - 1]$ existe uma aresta no ciclo C_{2k^2-k} cujos vértices estão coloridos com as cores i e j , inclusive quando $i = j$.

Para obter uma coloração CNPF para o ciclo C_n , lembre-se que $n = 2k^2 + x$ para algum número inteiro x no intervalo $[-k, 2k - 1]$. Se $x = -k$, então foi apresentada uma coloração CNPF para C_n . Caso contrário, remova a aresta (v_{2k^2-k}, v_1) do ciclo já colorido C_{2k^2-k} e adicione um caminho com $x+k$ vértices, $y_1 y_2 \dots y_{x+k}$, tal que y_1 é adjacente a v_{2k^2-k} e y_{x+k} é adjacente a v_1 . Atribua a cor $c(t_1)$ para todos os vértices do caminho $y_1 y_2 \dots y_{x+k}$. Observe que, embora a aresta (v_{2k^2-k}, v_1) tenha sido removida, agora existe a aresta (v_{2k^2-k}, y_1) cujos vértices estão coloridos respectivamente com as cores $c(t_{2k^2-k})$ e $c(t_1)$. Portanto, esta é uma coloração CNPF para C_n com $2k - 1$ cores.

Caso 2: $2k \leq x \leq 3k$. Então, $2k^2 + 2k \leq n \leq 2k^2 + 3k$ e, pelo Lema 3.5, $\psi^*(C_n) \leq 2k$. Resta mostrar que C_n tem uma coloração CNPF com $2k$ cores.

A prova é análoga à apresentada para o caso 1 com a principal diferença de que agora H é um multigrafo. Vamos construir um multigrafo euleriano H com uma coloração CNPF com $2k$ cores. Depois, mostrar que toda aresta de H corresponde a uma aresta de um ciclo C_{2k^2+2k} . Por fim, vamos estender a coloração do ciclo C_{2k^2+2k} para uma coloração CNPF do ciclo C_n .

Para construir o multigrafo H , considere o grafo completo K_{2k} , com conjunto de vértices $V(K_{2k}) = \{u_1, u_2, \dots, u_{2k}\}$. Adicione uma nova aresta entre os seguintes pares de vértices: u_1 e u_{2k} , u_2 e u_{2k-1} , ..., u_k e u_{k+1} , de forma que entre esses pares de vértices existam arestas múltiplas. Para todo número inteiro $i \in [2k - 1]$ remova a aresta (u_i, u_{i+1}) e adicione um novo vértice w_i adjacente a u_i e a u_{i+1} . Remova a aresta (u_1, u_{2k}) e adicione um novo vértice w_{2k} adjacente a u_1 e a u_{2k} . Atribua cor i para os vértice u_i e w_i do grafo H , $1 \leq i \leq 2k$. Vamos mostrar que esta é uma coloração CNPF do grafo H .

Para toda cor i , existem dois vértices adjacentes em H coloridos com i , pois u_i é adjacente a w_i . Cores consecutivas i e $i + 1$ foram atribuídas aos vértices das arestas (w_i, u_{i+1}) , para $1 \leq i \leq 2k - 1$. A cor 1 e a cor $2k$ foram atribuídas aos vértices da aresta (u_1, w_{2k}) . Todos os outros pares de cores i e j foram atribuídos para os pares de vértices u_i e u_j , que são adjacentes já que H foi construído a partir do grafo completo.

Seja C_{2k^2+2k} um ciclo com vértices rotulados $v_1, v_2, \dots, v_{2k^2+2k}$. Vamos apresentar uma coloração CNPF para este ciclo. Observe que todo vértice em H tem grau par. Além disso, por construção, H tem $2k + k + \frac{(2k)(2k-1)}{2} = 3k + k(2k-1) = 2k^2 + 2k$ arestas. Pelo Teorema 2.1, H tem um circuito euleriano $\mathcal{T} = t_1 t_2 t_3 \dots t_{2k^2+2k} t_1$ tal que cada vértice t_i corresponde a um vértice de H . Seja $c(t_i)$ a cor do vértice t_i no grafo H , para $1 \leq i \leq 2k^2 + 2k$. Uma coloração CNPF para o ciclo C_{2k^2+2k} é dada pela função $\pi : V(C_{2k^2+2k}) \rightarrow [2k]$ definida por $\pi(v_i) = c(t_i)$, $1 \leq i \leq 2k^2 + 2k$. Por transitividade, toda aresta de H corresponde a uma aresta de C_{2k^2+2k} . Logo, para cada par de cores i e j do conjunto $[2k]$ existe uma aresta no ciclo C_{2k^2+2k} cujos vértices estão coloridos com as cores i e j .

Para obter uma coloração CNPF para o ciclo C_n , lembre-se que $n = 2k^2 + x$ para algum número inteiro x no intervalo $[2k, 3k]$. Se $x = 2k$, então foi apresentada uma coloração CNPF para C_n . Caso contrário, remova a aresta (v_{2k^2+2k}, v_1) do ciclo C_{2k^2+2k} (já colorido) e adicione um caminho com $x+k$ vértices, $y_1 y_2 \dots y_{x+k}$, tal que y_1 é adjacente a v_{2k^2+2k} e y_{x+k} é adjacente

a v_1 . Atribua a cor $c(t_1)$ para todos os vértices do caminho $y_1 y_2 \dots y_{x+k}$. Esta é uma coloração CNPF para C_n com $2k$ cores. \square

Observe que pelo Teorema 3.6 o Problema da Coloração CNPF no grafo ciclo C_n reduz-se ao problema de determinar quais os valores inteiros de k e x que satisfazem $n = 2k^2 + x$ e $-k \leq x \leq 3k$.

Liu, Li e Liu (2015) também afirmam sem provar que todo número inteiro positivo n pode ser descrito pela equação $n = 2k^2 + x$, para algum número inteiro x no intervalo $[-k + 1, 3k + 1]$. Nós apresentamos uma prova para esta afirmação. Em seguida, o Teorema 3.8 apresenta o número pseudoacromático forte do caminho P_n em função de k e x .

Lema 3.7. *Todo número inteiro positivo n pode ser descrito como $n = 2k^2 + x$ para um único par de números inteiros k e x , tais que $x \in [-k + 1, 3k + 1]$.*

Demonstração. A prova é por indução em n . Para a base, consideramos os casos $n = 1$ e $n = 2$. Para $n = 1$, tem-se $k = 0$ e $x = 1$. Para $n = 2$, tem-se $k = 1$ e $x = 0$.

Suponha, por hipótese de indução, que $n = 2k^2 + x$ para um único par de números inteiros k e x tais que $x \in [-k + 1, 3k + 1]$.

Vamos provar que $n + 1$ pode ser descrito como $2q^2 + y$ para um único par de inteiros q e y tais que $y \in [-q + 1, 3q + 1]$.

Como, por hipótese, $n = 2k^2 + x$, tem-se $n + 1 = 2k^2 + x + 1$.

Se $x \leq 3k$, então, pode-se considerar que $y = x + 1$ e $q = k$. Portanto, $n + 1 = 2q^2 + y$ para algum $y \in [-q + 1, 3q + 1]$, como queríamos provar.

Caso contrário, $x = 3k + 1$. Como $n + 1 = 2k^2 + x + 1$, tem-se $n + 1 = 2k^2 + 3k + 2$. Então, $n + 1 = 2(k^2 + 2k + 1) - k = 2(k + 1)^2 - k$. Neste caso, pode-se considerar que $q = k + 1$ e $y = -k$. Devemos verificar que $y \in [-q + 1, 3q + 1]$, o que de fato ocorre, pois $y = -k \in [-(k + 1) + 1, 3(k + 1)] = [-k, 3k + 3]$, concluindo a prova. \square

Teorema 3.8 (LIU; LI; LIU, 2015). *Seja P_n um caminho tal que $n = 2k^2 + x$, para k e x números inteiros e x no intervalo $[-k + 1, 3k + 1]$. Então,*

$$\psi^*(P_n) = \begin{cases} 2k - 1, & \text{se } -k + 1 \leq x \leq 2k - 1. \\ 2k, & \text{se } 2k \leq x \leq 3k + 1. \end{cases}$$

Demonstração. Há três casos, descritos a seguir.

Caso 1: $n = 2$. Então $k = 1$ e $x = 0$. Vamos mostrar que $\psi^*(P_2) = 1$. Como $n = 2$, pela definição do número pseudoacromático forte, $\psi^*(P_n) \leq 1$. Faça uma coloração para o grafo P_2 atribuindo cor 1 para os dois vértices. Então, $\psi^*(P_2) = 1$.

Para os demais casos, $n \geq 3$ e, portanto, $\Delta(P_n) = 2$.

Caso 2: $-k + 1 \leq x \leq 2k - 1$. Então, $2k^2 - k + 1 \leq n \leq 2k^2 + 2k - 1$. Pelo Lema 3.4, $\psi^*(P_n) \leq 2k - 1$. A prova é análoga à apresentada para o Caso 1 do Teorema 3.6. Considere o mesmo grafo H construído a partir de um grafo completo K_{2k-1} . Da mesma forma, os vértices de H estão rotulados $u_1, u_2, \dots, u_{2k-1}, w_1, w_2, \dots, w_{2k-1}$ e cada u_i e w_i estão coloridos com a cor i , para $1 \leq i \leq 2k - 1$. Lembre-se que H tem $2k^2 - k$ arestas e tem um circuito euleriano $\mathcal{T} = t_1 t_2 \dots t_{2k^2-k} t_1$. Seja $c(t_i)$ a cor do vértice t_i no grafo H , para todo i . Considere um caminho $P_{2k^2-k+1} = u_0 u_1 \dots u_{2k^2-k+1}$. Note que o caminho P_{2k^2-k+1} tem o mesmo número de arestas que H . Atribua a cor $c(t_i)$ para o vértice u_i , quando $1 \leq i \leq 2k^2 - k$. Atribua a cor $c(t_1)$ para o vértice u_{2k^2-k+1} . Note que todas as arestas de H foram mapeadas em arestas correspondentes (arestas com as mesmas cores nos extremos) do caminho P_{2k^2-k+1} . Portanto, esta é uma coloração CNPF para P_{2k^2-k+1} .

Agora, considere o caminho $P_n = v_1 v_2 \dots v_n$, com n satisfazendo a hipótese deste caso. Então, se $n = 2k^2 - k + 1$, uma coloração CNPF com $2k - 1$ cores foi apresentada e está provado. Se $n > 2k^2 - k + 1$, construa o grafo P_n adicionando o caminho $u_{2k^2-k+2} u_{2k^2-k+3} \dots u_{2k^2+x}$ ao grafo P_{2k^2-k+1} já colorido, de forma que u_{2k^2-k+1} seja adjacente a u_{2k^2-k+2} . Atribua a cor $c(t_1)$ para os novos vértices adicionados. Esta é uma coloração CNPF para P_n . Portanto, $\psi^*(P_n) = 2k - 1$.

Caso 3: $2k \leq x \leq 3k + 1$. Então, $2k^2 + 2k \leq n \leq 2k^2 + 3k + 1$. Pelo Lema 3.5, $\psi^*(P_n) \leq 2k$. A prova é análoga à apresentada para o Caso 2 do Teorema 3.6. Considere o mesmo grafo H construído a partir de um grafo completo K_{2k} . Da mesma forma, os vértices de H estão rotulados $u_1, u_2, \dots, u_{2k}, w_1, w_2, \dots, w_{2k}$ e cada u_i e w_i estão coloridos com a cor i , para $1 \leq i \leq 2k$. Lembre-se que H tem arestas múltiplas entre u_1 e u_{2k} . Remova uma das arestas entre u_1 e u_{2k} . Agora, H tem exatamente dois vértices de grau ímpar e, pela Observação 2.2, tem um caminho euleriano, que começa em u_1 e termina em u_{2k} . Note que H tem $2k^2 + 2k - 1$ arestas. Seja $\mathcal{T} = t_1 t_2 \dots t_{2k^2+2k}$ um caminho euleriano em H . E seja $c(t_i)$ a cor do vértice t_i no grafo H , para todo i . Considere um caminho $P_{2k^2+2k} = u_1 u_2 \dots u_{2k^2+2k}$. Note que o caminho P_{2k^2+2k} tem o mesmo número de arestas que H . Atribua a cor $c(t_i)$ para o vértice u_i , $1 \leq i \leq 2k^2 + 2k$. Como todas as arestas de H foram mapeadas em arestas correspondentes do caminho P_{2k^2+2k} , esta é uma coloração CNPF para o caminho P_{2k^2+2k} .

Agora, considere o caminho $P_n = v_1 v_2 \dots v_n$, com n satisfazendo a hipótese deste caso. Então, se $n = 2k^2 + 2k$, uma coloração CNPF com $2k$ cores foi apresentada e está provado. Se $n > 2k^2 + 2k$, construa o grafo P_n adicionando o caminho $u_{2k^2+2k+1} u_{2k^2+2k+2} \dots u_{2k^2+x}$ ao grafo P_{2k^2+2k} já colorido, de forma que u_{2k^2+2k} seja adjacente a u_{2k^2+2k+1} . Atribua a cor $c(t_1)$ para os novos vértices adicionados. Esta é uma coloração CNPF para P_n . Portanto, $\psi^*(P_n) = 2k$. \square

3.3 GRAFOS MULTIPARTIDOS COMPLETOS

Liu, Li e Liu (2015) também determinaram o número pseudoacromático forte para os grafos multipartidos completos, conforme apresentado no Teorema 3.9.

Teorema 3.9 (LIU; LI; LIU, 2015). *Seja K_{n_1, n_2, \dots, n_t} um grafo multipartido completo com n vértices, tal que $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_t$. Se $t \geq 2$, então*

$$\psi^*(K_{n_1, n_2, \dots, n_t}) = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, & \text{se } n_t \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor. \\ n - n_t, & \text{se } n_t \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil. \end{cases}$$

Demonstração. Sejam $G = K_{n_1, n_2, \dots, n_t}$, e, para todo $i \in [t]$, $S_i = \{v_{i,j} : 1 \leq j \leq n_i\}$, a i -ésima parte de $V(G)$ tal que S_i é um conjunto independente em G .

Considere os vértices de G linearmente ordenados de forma que:

1. se $i < k$, então o vértice $v_{i,j}$ precede o vértice $v_{k,\ell}$, para qualquer j e qualquer ℓ ;
2. se $i = k$, então o vértice $v_{i,j}$ precede o vértice $v_{i,\ell}$, se, e somente se, $j < \ell$, para qualquer i e para $j \neq \ell$.

Vamos chamar esta ordem de λ . Seja $p_\lambda(v_{i,j})$ a posição do vértice $v_{i,j}$ na ordem λ , de forma que $p_\lambda(v_{1,1}) = 1$.

A prova se divide em dois casos.

Caso 1: $n_t \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Como o tamanho da maior parte na partição $[S_1, S_2, \dots, S_t]$ é no máximo a metade de $|V(G)|$, então, cada vértice em $V(G)$ tem pelo menos $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ vizinhos. Então, $m = |E(G)| \geq (n \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) / 2 = \frac{n^2}{4}$. Então, $\frac{\sqrt{8m+1}-1}{2} \geq \frac{\sqrt{2n^2+1}-1}{2} \geq \frac{n}{2}$, para todo $n \geq 2$. Portanto, quando $n \geq 2$, pelo item (1) do Teorema 3.1, pode-se afirmar que $\psi^*(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Então, é suficiente mostrar, que G possui uma coloração CNPF com $\psi^*(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ cores.

Atribua a cor $(p_\lambda(v_{i,j}) \bmod \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1$ para o vértice $v_{i,j}$. Para completar a prova, é suficiente mostrar que todas as cores utilizadas na coloração não são utilizadas em dois vértices da mesma parte na partição $[S_1, S_2, \dots, S_t]$. Suponha, por contradição, que existem dois vértices $v_{i,j}$ e $v_{i,k}$ coloridos com a mesma cor c . Sem perda de generalidade, seja $j < k$. Então, os vértices $v_{i,j}, v_{i,j+1}, v_{i,j+2}, \dots, v_{i,k}$ estão coloridos, respectivamente, com as cores $c, c+1, c+2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 1, 2, \dots, c$. Consequentemente, foram utilizadas todas as cores em vértices de S_i e pelo menos uma delas (a cor c) foi utilizada mais de uma vez. Como são $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ cores, conclui-se que $n_i \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, contrariando a hipótese de que $n_i \leq n_t \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Portanto, não há vértices com a mesma cor na mesma parte. Como são $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ cores, cada cor foi utilizada em pelo menos dois vértices. Portanto, para cada par de cores c_1 e c_2 , não necessariamente distintas, existe uma aresta cujos extremos estão coloridos com as cores c_1 e c_2 , concluindo a prova deste caso.

Caso 2: $n_t \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. Primeiro, vamos mostrar que $\psi^*(G) \leq n - n_t$. Por contradição, suponha que G tem uma coloração CNPF com $n - n_t + 1$ cores. Como o número de cores empregado nesta coloração é maior que o número total de vértices em $V(G) \setminus S_t$, existe pelo menos uma cor c que é utilizada somente em vértices da parte S_t . Por consequência, o conjunto de vértices com cor c é um conjunto independente, contrariando a hipótese de que esta é uma coloração CNPF. Logo, $\psi^*(G) \leq n - n_t$.

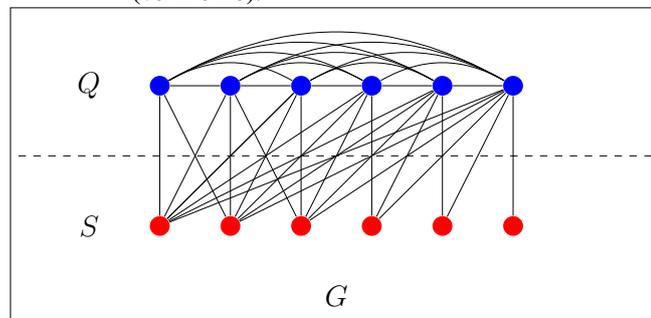
Resta mostrar que G possui uma coloração CNPF com $\psi^*(G) = n - n_t$ cores. Considere a coloração $c = V(G) \rightarrow [n - n_t]$, definida por $c(v_{i,j}) = p_\lambda(v_{i,j}) \bmod (n - n_t) + 1$. Note que toda cor foi atribuída a exatamente um vértice em $V(G) \setminus S_t$. Como $n_t \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, então $n_t > \frac{n}{2}$, ou seja, $n_t > n - n_t$. Portanto, toda cor foi atribuída a pelo menos um vértice em S_t . Como existe aresta de cada vértice de S_t para todo vértice em $V(G) \setminus S_t$, esta é uma coloração CNPF. \square

4 COLORAÇÃO CNPF EM GRAFOS SPLIT

Este capítulo apresenta a contribuição deste trabalho para o Problema da Coloração CNPF. Mais especificamente, determinamos o número pseudoacromático forte para os grafos split e apresentamos um algoritmo polinomial que recebe como entrada um grafo split e apresenta uma coloração CNPF ótima para este grafo.

Considere um grafo split G . Por definição, o conjunto de vértices $V(G)$ pode ser particionado em uma clique e um conjunto independente. Para alguns grafos split, pode haver mais de uma possível partição de seus vértices em clique e conjunto independente. Isso ocorre quando o conjunto de vértices de G tem uma partição $[Q, S]$ tal que existe um subconjunto de S cujos vértices são, cada um deles, adjacentes a todos os vértices da clique Q . Seja $S_Q \subseteq S$ esse subconjunto dos vértices de S vizinhos de todos os vértices de Q . Então, a partição $[Q \cup \{u\}, S \setminus \{u\}]$ também é uma partição de $V(G)$ em clique e conjunto independente, para qualquer $u \in S_Q$. Além disso, $Q \cup \{u\}$ é maximal, já que nenhum outro vértice de S é adjacente a u e, portanto, $Q \cup \{u\}$ não está propriamente contida em nenhuma clique de G . A Figura 12 mostra um grafo split com uma partição dos seus vértices em clique (azul) e conjunto independente (vermelho).

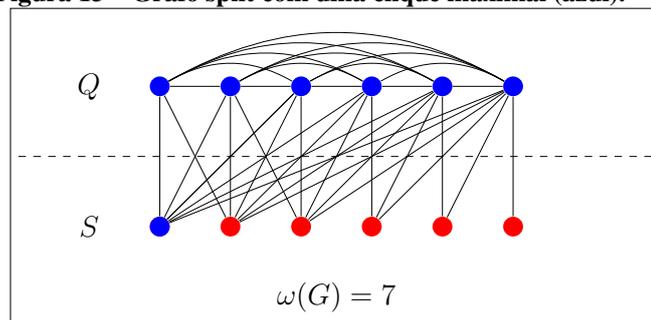
Figura 12 – Grafo split com uma partição dos vértices em uma clique (azul) e um conjunto independente (vermelho).



Fonte: Autoria própria

Note que os dois primeiros vértices em S (da esquerda para a direita) são adjacentes a todos os vértices da clique Q e, portanto, Q não é maximal. Um exemplo de clique maximal para o grafo da Figura 12 é apresentado na Figura 13 (clique em azul).

Figura 13 – Grafo split com uma clique maximal (azul).



O Lema 4.1 mostra que, dada uma partição $[Q, S]$ do conjunto de vértices de um grafo split, tal que Q é uma clique maximal, pode-se concluir que Q é uma clique máxima. Esta propriedade é interessante já que o número pseudoacromático forte dos grafos split tem limitantes em função do tamanho da clique máxima.

Lema 4.1 . *Se G é um grafo split, com uma partição dos vértices $[Q, S]$ tal que Q é uma clique maximal, então Q é máxima.*

Demonstração. Seja G um grafo split com uma partição dos vértices $[Q, S]$ tal que Q é maximal. Suponha por contradição que Q não é máxima. Então, existe uma clique Q' que é máxima, ou seja, $|Q'| = \omega(G)$. Como $|Q'| > |Q|$, obrigatoriamente Q' contém vértices de S . Como Q' é uma clique, então Q' contém no máximo um vértice $v \in S$. Como $|Q'| > |Q|$, tem-se obrigatoriamente $Q' = Q \cup \{v\}$, contrariando a hipótese de que Q é maximal. \square

O Lema 4.2 apresenta limitantes inferior e superior para o número pseudoacromático forte dos grafos split em função do tamanho da clique máxima.

Lema 4.2 . *Se G é um grafo split, então*

$$\left\lfloor \frac{\omega(G)}{2} \right\rfloor \leq \psi^*(G) \leq \omega(G)$$

Demonstração. Considere um grafo split $G = [Q, S]$ tal que Q é maximal e S é um conjunto independente. Pelo Lema 4.1, Q é máxima.

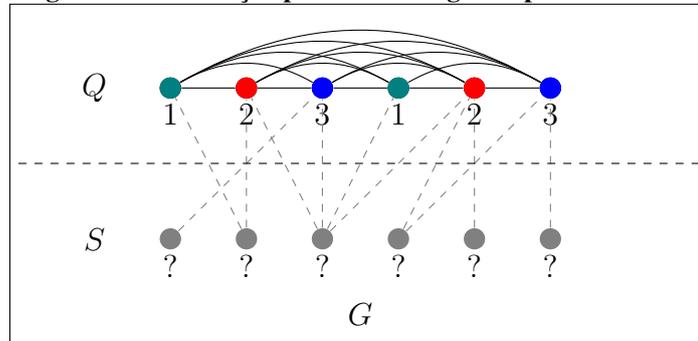
Seja π uma coloração CNPF para o grafo G utilizando $\psi^*(G)$ cores. Por definição da coloração CNPF, sabemos que toda cor foi atribuída a pelo menos dois vértices adjacentes em G . Como S é um conjunto independente, toda cor da coloração π foi atribuída a pelo menos um vértice em Q . De fato, se uma cor c for atribuída somente a vértices de S , então não existem vértices adjacentes com cor c . Portanto, $\psi^*(G) \leq |Q| = \omega(G)$.

Agora vamos provar que $\psi^*(G) \geq \left\lfloor \frac{\omega(G)}{2} \right\rfloor$. É suficiente apresentar uma coloração CNPF para G com $\left\lfloor \frac{\omega(G)}{2} \right\rfloor$ cores. Pelo Corolário 3.2, $\psi^*(G[Q]) = \left\lfloor \frac{|Q|}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\omega(G)}{2} \right\rfloor$. Seja β uma coloração CNPF do subgrafo $G[Q]$ utilizando $\left\lfloor \frac{\omega(G)}{2} \right\rfloor$ cores. Atribua uma cor já utilizada em β para cada vértice em S . Como β é uma coloração CNPF em $G[Q]$, para cada par de cores, c_1 e c_2 , não necessariamente distintas na coloração β , existe uma aresta em $G[Q]$ (e consequentemente em G) cujos extremos tem as cores c_1 e c_2 . Portanto, esta é uma coloração CNPF para G usando $\left\lfloor \frac{\omega(G)}{2} \right\rfloor$ cores e, portanto, $\psi^*(G) \geq \left\lfloor \frac{\omega(G)}{2} \right\rfloor$. \square

A Figura 14 apresenta uma coloração CNPF parcial de um grafo split onde apenas os vértices em $G[Q]$ estão coloridos. Como toda cor de uma coloração CNPF precisa ser atribuída a pelo menos um vértice da clique, o número de cores que podem ser usadas é maior quando a

mesma cor não precisa ser atribuída a dois vértices da clique. Assim, ao maximizar o número de cores que são atribuídas a um vértice $v \in Q$ e a seu vizinho $u \in S$, pretende-se maximizar o número de cores que podem ser usadas em uma coloração CNPF para o grafo split G .

Figura 14 – Coloração parcial de um grafo split

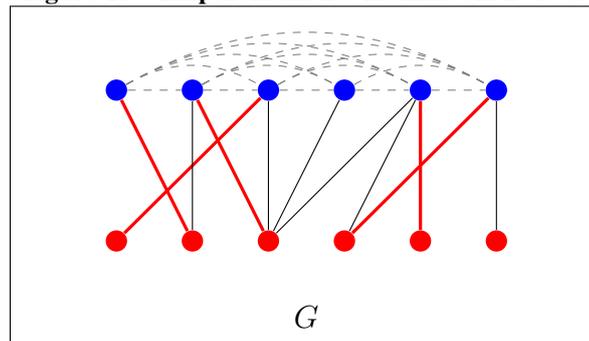


Fonte: Autoria própria

Considere o subgrafo de um grafo split $G = [Q, S]$ obtido ao se remover todas as arestas que não incidem em vértices de S . Vamos chamar este grafo de subgrafo bipartido associado a G e denotá-lo por $B(G)$. Então, o maior número de cores que podem ser atribuídas a vértices de $B(G)$ garantindo-se que cada cor esteja em pelo menos um par de vértices vizinhos em $B(G)$ é $\alpha'(B(G))$.

A Figura 15 ilustra um emparelhamento máximo em um subgrafo bipartido associado a um grafo split. Note que, neste caso, não é possível cobrir todos os vértices de Q com as arestas do emparelhamento.

Figura 15 – Emparelhamento máximo em B de G



Fonte: Autoria própria

Seja M um emparelhamento máximo do subgrafo $B(G)$. Então, para se obter uma coloração CNPF com mais que $|M|$ cores, pode-se atribuir uma nova cor para cada par de vértices em Q que não estão cobertos por M . A partir desta ideia, apresentamos o número pseudoacromático forte dos grafos split no Teorema 4.5. Mas, antes precisamos explicitar duas propriedades importantes.

O Lema 4.3 apresenta um limitante superior para o número pseudoacromático forte de qualquer grafo G . No Teorema 4.5, verificamos que este limitante superior é justo.

Lema 4.3 . Para qualquer grafo G , tem-se $\psi^*(G) \leq \alpha'(G)$.

Demonstração. Considere um grafo G e uma coloração CNPF $\pi : V(G) \rightarrow [\psi^*(G)]$ ótima. Como cada cor incide em dois vértices adjacentes, então existe um conjunto com $\psi^*(G)$ arestas, $E_p = \{e_1, e_2, \dots, e_{\psi^*(G)}\}$, tais que os extremos de e_i estão coloridos com cor i . Note que, se $i \neq j$, então os vértices de e_i são diferentes dos vértices de e_j , pois receberam cores diferentes. Logo, E_p é um emparelhamento em G . Portanto, $\psi^*(G) \leq |E_p| \leq \alpha'(G)$. \square

O Lema 4.4 apresenta o tamanho de um emparelhamento máximo em um grafo split G em função do tamanho de um emparelhamento máximo no grafo bipartido associado a G . E, em seguida, mostramos que para os grafos split o limitante superior apresentado no Lema 4.3 é justo, provando que todo grafo split G tem $\psi^*(G) = \alpha'(G)$.

Lema 4.4 . Seja G um grafo split e $B(G)$ o subgrafo bipartido obtido ao se remover de G as arestas entre vértices de uma clique máxima. Então,

$$\alpha'(G) = \alpha'(B(G)) + \left\lfloor \frac{\omega(G) - \alpha'(B(G))}{2} \right\rfloor.$$

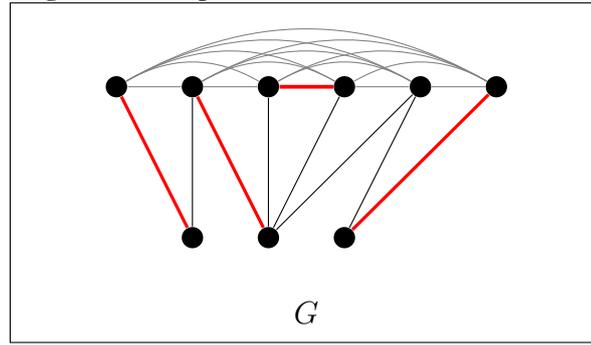
Demonstração. Considere a partição $[Q, S]$ de $V(G)$ tal que Q é uma clique máxima. Primeiro, vamos mostrar que $\alpha'(G) \geq \alpha'(B(G)) + \left\lfloor \frac{\omega(G) - \alpha'(B(G))}{2} \right\rfloor$. Depois, para garantir a igualdade, vamos mostrar que $\alpha'(G) \leq \alpha'(B(G)) + \left\lfloor \frac{\omega(G) - \alpha'(B(G))}{2} \right\rfloor$.

Parte 1: $\alpha'(G) \geq \alpha'(B(G)) + \left\lfloor \frac{\omega(G) - \alpha'(B(G))}{2} \right\rfloor$. É suficiente mostrar que G tem um emparelhamento com $\alpha'(B(G)) + \left\lfloor \frac{\omega(G) - \alpha'(B(G))}{2} \right\rfloor$ arestas. Sejam M_B um emparelhamento em $B(G)$ de tamanho $\alpha'(B(G))$ e $V(M_B)$ o conjunto dos vértices cobertos por M_B . Sejam $X = Q \setminus V(M_B)$ e M_Q um emparelhamento máximo em $G[X]$. Note que $|M_Q| = \left\lfloor \frac{|Q| - \alpha'(B(G))}{2} \right\rfloor$. Então $M_B \cup M_Q$ é um emparelhamento em G com tamanho $\alpha'(B(G)) + \left\lfloor \frac{|Q| - \alpha'(B(G))}{2} \right\rfloor$.

Parte 2: $\alpha'(G) \leq \alpha'(B(G)) + \left\lfloor \frac{\omega(G) - \alpha'(B(G))}{2} \right\rfloor$. Seja M_{\max} um emparelhamento máximo em G . Suponha, por contradição, que $|M_{\max}| > \alpha'(B(G)) + \left\lfloor \frac{\omega(G) - \alpha'(B(G))}{2} \right\rfloor$. Então M_{\max} não contém um emparelhamento máximo de $B(G)$ e deve conter um emparelhamento M_Q em $G[Q]$ com pelo menos $\left\lfloor \frac{|Q| - \alpha'(B(G))}{2} \right\rfloor + k + 1$ arestas, em que $k = \alpha'(B(G)) - |M_b|$ e M_b é o emparelhamento de $B(G)$ que pertence a M_{\max} tal que $|M_b| < \alpha'(B(G))$. Então Q contém pelo menos $2(\left\lfloor \frac{|Q| - \alpha'(B(G))}{2} \right\rfloor + \alpha'(B(G)) - |M_b| + 1) + |M_b|$ vértices. Ou seja, $|Q| \geq 2(\left\lfloor \frac{|Q| - \alpha'(B(G))}{2} \right\rfloor + \alpha'(B(G)) - |M_b| + 1) + |M_b| = |Q| + \alpha'(B(G)) - |M_b| + 1$. Como $|M_b| < \alpha'(B(G))$, concluímos que $|Q| \geq |Q| + 2$, um absurdo. Portanto, $\alpha'(G) = |M_{\max}| \leq \alpha'(B(G)) + \left\lfloor \frac{\omega(G) - \alpha'(B(G))}{2} \right\rfloor$. \square

A Figura 16 exibe um emparelhamento máximo em um grafo split (arestas vermelhas), de acordo com a prova do Lema 4.4. Neste exemplo, $\omega(G) = 6$, $\alpha'(B(G)) = 3$ e $\alpha'(G) = 4$.

Figura 16 – Emparelhamento máximo em B de G



Fonte: Autoria própria

Teorema 4.5 . Se G é um grafo split, então $\psi^*(G) = \alpha'(G)$

Demonstração. Seja $G = [Q, S]$ um grafo split tal que Q é maximal. Pelo Lema 4.1, Q é máxima. Pelo Lema 4.3, $\psi^*(G) \leq \alpha'(G)$. Então, é suficiente mostrar uma coloração CNPF para G com $\alpha'(G)$ cores.

Pelo Lema 4.4, sabe-se que $\alpha'(G) = \alpha'(B(G)) + \left\lfloor \frac{\omega(G) - \alpha'(B(G))}{2} \right\rfloor$, em que $B(G)$ é o grafo bipartido que se obtém ao remover as arestas que não incidem em vértices de S . Então, considere um emparelhamento máximo M_B no subgrafo bipartido $B(G)$. Como M_B é máximo, $\alpha'(B(G)) = |M_B|$. Seja $M_B = \{e_1, e_2, \dots, e_{\alpha'(B(G))}\}$ o conjunto das arestas pertencentes a M_B . Atribua cor i para os vértices em que incide a aresta e_i , para cada $i \in [\alpha'(B(G))]$. Atribua cor 1 para os demais vértices do conjunto independente.

Seja Q_r o conjunto dos vértices de Q não cobertos por M_B . Resta atribuir cores para os vértices de Q_r . Note que $G[Q_r]$ é um grafo completo com $\omega(G) - \alpha'(B(G))$ vértices. Pelo Corolário 3.2, $G[Q_r]$ tem uma coloração CNPF com $\left\lfloor \frac{\omega(G) - \alpha'(B(G))}{2} \right\rfloor$ cores. Seja $\pi : Q_r \rightarrow \{\alpha'(B(G)) + 1, \alpha'(B(G)) + 2, \dots, \alpha'(B(G)) + \left\lfloor \frac{\omega(G) - \alpha'(B(G))}{2} \right\rfloor\}$ uma coloração CNPF de $G[Q_r]$. Utilize as cores da coloração π nos vértices de Q_r para completar a coloração CNPF de G .

Nesta coloração dos vértices de G foram utilizadas $\alpha'(B(G)) + \left\lfloor \frac{\omega(G) - \alpha'(B(G))}{2} \right\rfloor = \alpha'(G)$ cores. Resta provar que esta é uma coloração CNPF de G . Observe que todas as cores foram atribuídas a pelo menos um vértice de Q . Como Q é uma clique, existem pares de vértices adjacentes com cores i e j para qualquer $i \neq j$. Além disso, para toda cor i no intervalo $[1, \alpha'(B(G))]$, existe uma aresta e_i cujos vértices foram coloridos com a mesma cor i . Por fim, para toda cor i no intervalo $[\alpha'(B(G)) + 1, \alpha'(G)]$, existem dois vértices (adjacentes) em Q coloridos com cor i . Portanto, esta é uma coloração CNPF para G . \square

A partir da prova do Teorema 4.5, pode-se construir um algoritmo que recebe como entrada um grafo split G e apresenta uma coloração CNPF máxima para G . O Algoritmo 1, apresentado a seguir, utiliza um algoritmo linear de reconhecimento de grafos split que, dado um grafo split G retorna seus vértices ordenados por grau (do maior para o menor) de forma que os $\omega(G)$ primeiros vértices correspondem a uma clique máxima de G e os vértices seguintes correspondem a um conjunto independente. Esse algoritmo foi apresentado por Hammer e Simeone

(1981) e sua execução será indicada pela chamada ao procedimento $\text{splitance}(G, V)$, que apresenta os vértices em ordem não-crescente de graus no vetor V e retorna o valor de $\omega(G)$. Uma vez que a clique máxima Q e o conjunto independente S estejam identificados, pode-se obter o grafo bipartido associado a G em tempo linear, sendo suficiente remover as arestas entre vértices de Q . Hopcroft e Karp (1973) apresentaram um algoritmo de complexidade $O(|V(G)|^{\frac{5}{2}})$ que encontra um emparelhamento máximo em um grafo bipartido. A execução desse algoritmo está representada pela chamada do procedimento $\text{maximum-matching}(B, M_B)$, que armazena na estrutura M_B quais são as arestas de $B(G)$ que pertencem ao emparelhamento máximo e retorna o valor de $\alpha'(B(G))$. A estrutura M_B armazena, para cada aresta e_j , dois valores $p_1(j)$ e $p_2(j)$, que correspondem à posição dos vértices que são extremos de e_j no vetor V . Em seguida, são atribuídas cores cor para os vértices de G . As cores dos vértices são armazenadas no vetor C , de forma que a cor $C[i]$ é atribuída ao vértice $V[i]$.

Teorema 4.6 . *O Problema da Coloração CNPF pode tem solução polinomial quando restrito à classe dos grafos split.*

Demonstração. Uma solução para o Problema da Coloração CNPF restrito aos grafos split é dada pelo Algoritmo 1. Observe que todos os laços de repetição do Algoritmo 1 têm tempo de execução limitado a $O(|V(G)|)$. Além dos laços de repetição, há uma chamada a cada um dos procedimentos $\text{splitance}(G, V)$ e $\text{maximum-matching}(B, M_B)$. De acordo com Hammer e Simeone (1981), o procedimento $\text{splitance}(G, V)$ pode ser executado em tempo linear. Hopcroft e Karp (1973) mostram que o procedimento $\text{maximum-matching}(B, M_B)$ pode ser executado em tempo $O(|V(G)|^{\frac{5}{2}})$.

Portanto, o procedimento mais custoso na execução do Algoritmo 1 é a determinação de um emparelhamento máximo no grafo bipartido associado a G , feita pelo procedimento $\text{maximum-matching}(B, M_B)$. Portanto, o Algoritmo 1 é executado em tempo $O(|V(G)|^{\frac{5}{2}})$ e é polinomial. \square

Algoritmo 1: MAXCNPFSPLIT(G)**Entrada:** grafo split $G = (V, E)$ **Saída:** sequência de cores C e número pseudoacromático forte k , do grafo G

```

1 início
2    $\omega \leftarrow \text{splittance}(G, V)$ ;
3    $\alpha'_B \leftarrow \text{maximum-matching}(B, M_B)$ ;
4    $i \leftarrow 1$ ;
5   enquanto  $i \leq |V|$  faça
6      $C[i] \leftarrow 0$ ;
7      $i \leftarrow i + 1$ ;
8   fim
9    $k = 1$ ;
10  enquanto  $k \leq \alpha'_B$  faça
11     $p_1[k], p_2[k] \leftarrow M_B[k]$ ;
12     $C[p_1[k]] \leftarrow k$ ;
13     $C[p_2[k]] \leftarrow k$ ;
14     $k \leftarrow k + 1$ ;
15  fim
16   $i \leftarrow 1$ ;
17   $t \leftarrow 1$ ;
18  enquanto  $i \leq \omega$  faça
19    se  $C[i] = 0$  então
20       $C[i] \leftarrow k$ ;
21      se  $t = 1$  então
22         $t \leftarrow 2$ ;
23         $j \leftarrow i$ ;
24      fim
25      senão
26         $t \leftarrow 1$ ;
27         $k \leftarrow k + 1$ ;
28      fim
29    fim
30     $i \leftarrow i + 1$ ;
31  fim
32  se  $t = 2$  então
33     $C[j] \leftarrow 1$ ;
34  fim
35   $i \leftarrow \omega + 1$ ;
36  enquanto  $i \leq |V|$  faça
37    se  $C[i] = 0$  então
38       $C[i] \leftarrow 1$ ;
39    fim
40     $i \leftarrow i + 1$ ;
41  fim
42   $k \leftarrow k - 1$ ;
43  retorna  $C, k$ 
44 fim

```

5 CONCLUSÕES

Como evidenciado nos capítulos anteriores, as soluções existentes do Problema da Coloração CNPF, sejam elas provenientes do levantamento bibliográfico ou do resultado deste trabalho, estão restritas a algumas classes de grafos. Portanto, por Liu, Li e Liu (2015), os grafos caminhos, ciclos, completos e multipartidos completos possuem número pseudoacromático forte conhecido, e, pelo resultado deste trabalho, também é conhecido o número pseudoacromático forte dos grafos split. As demais classes de grafos continuam com o Problema da Coloração CNPF em aberto.

Também pode-se observar que, as provas dos teoremas em si são construtivas, o que permite encontrar algoritmos computacionais para apresentação de uma coloração CNPF máxima para as classes estudadas a partir destas provas.

Considerando o levantamento bibliográfico, é evidente a escassez de resultados sobre o Problema da Coloração CNPF. Diante desse fato, evidencia-se que este é um tema fértil para trabalhos futuros. Considerando a pesquisa realizada durante o desenvolvimento deste projeto, sugere-se o estudo do Problema da Coloração CNPF em outras classes de grafos ou que tenham estrutura similar à dos grafos split, como os grafos cobipartidos; ou que sejam grafos eulerianos e talvez tenham solução através de técnicas como a aplicada em grafos ciclos e caminhos, como as potências de caminhos e de ciclos.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, S. M. **Coloração de arestas em grafos split**. 2012. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Computação, Curso de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Campinas, Brasil, 2012.
- BERTOSSI, A. A. Dominating sets for split and bipartite graphs. **Information processing letters**, Elsevier, v. 19, n. 1, p. 37–40, 1984.
- CHARTRAND, G.; ZHANG, P. **Chromatic Graph Theory**. 1. ed. [S.l.]: Chapman and Hall, 2009. (Discrete mathematics and its applications).
- CHVÁTAL, V. *et al.* Four classes of perfectly orderable graphs. **J. Graph Theory** **11**, p. 481–495, 1987.
- EULER, L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. **Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae**, p. 128–140, 1741. Disponível em: <<http://math.dartmouth.edu/~euler/docs/originals/E053.pdf>>.
- GUPTA, R. P. Bounds on the chromatic and achromatic numbers of complementary graphs. **Recent Progress in Combinatorics**, Academic Press, p. 229–235, 1969.
- HAMMER, P. L.; SIMEONE, B. The splittance of a graph. **Combinatorica** **1**, p. 275–284, 1981.
- HARARY, F.; HEDETNIEMI, S.; PRINS, G. An interpolation theorem for graphical homomorphisms. **Portugal. Math**, v. 26, p. 453–462, 1967.
- HOPCROFT, J.; KARP, R. M. An $n^{\frac{5}{2}}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs. **SIAM Journal on computing**, SIAM, v. 2, n. 4, p. 225–231, 1973.
- JOHNSON, D. S. The np-completeness column: an ongoing guide. **Journal of Algorithms** **6**, p. 434–451, 1985.
- LIU, M.; LI, R.; LIU, B. The strong pseudoachromatic number of a graph. **Utilitas Mathematica** **98**, p. 3–21, 2015.
- LIU, M.; LIU, B. On pseudoachromatic number of graphs. **Southeast Asian Bull. Math.** **24**, p. 431–438, 2011.
- MÜLLER, H. Hamiltonian circuits in chordal bipartite graphs. **Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 156, n. 1-3, p. 291–298, 1996.
- ROSE, D. J.; TARJAN, R. E.; LUEKER, G. S. Algorithmic aspects of vertex elimination on graphs. **SIAM Journal on computing**, SIAM, v. 5, n. 2, p. 266–283, 1976.
- WEST, D. B. **Introduction to Graph Theory**. Second. [S.l.]: Prentice Hall, 2001. ISBN 0-13-014400-2.
- YEGNANARAYANAN, V. The pseudoachromatic number of a graph. **Southeast Asian Bulletin of Mathematics**, Springer, v. 24, n. 1, p. 129–136, 2000.