

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR MESTRADO
PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT**

PAULA ROBERTA SCABURI DOS SANTOS

**DIAGRAMA DE VORONOI: UMA EXPLORAÇÃO NAS DISTÂNCIAS EUCLIDIANA
E DO TÁXI**

CURITIBA

2016

PAULA ROBERTA SCABURI DOS SANTOS

**DIAGRAMA DE VORONOI: UMA EXPLORAÇÃO NAS DISTÂNCIAS EUCLIDIANA
E DO TÁXI**

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional da Universidade Tec-
nológica Federal do Paraná em Curitiba - PROFMAT-
UTCT como requisito parcial para obtenção do grau
de Mestre.

Orientador: Andrés David Báez Sánchez, Dr.

CURITIBA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

S237di Santos, Paula Roberta Scaburi dos
2016 Diagrama de Voronoi : uma exploração nas distâncias
Euclidiana e do Táxi / Paula Roberta Scaburi dos Santos
.-- 2016.
79 f.: il.; 30 cm.

Disponível também via World Wide Web.
Texto em português, com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica
Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2016.
Bibliografia: f. 75.

1. Geometria - Estudo e ensino (Ensino médio). 2.
Polígonos de Voronoi. 3. Geometria euclidiana. 4. Geometria
não-euclidiana. 5. GeoGebra (Programa de computador). 6.
Matemática - Dissertações. I. Baez-Sanchez, Andres David,
orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional. III. Título.

CDD: Ed. 22 - 510

Biblioteca Central do Câmpus Curitiba - UTFPR

Título da Dissertação No. 034

“Diagrama de Voronoi: Uma exploração nas distâncias Euclidiana e do Táxi.”

por

Paula Roberta Scaburi dos Santos

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 14h do dia 16 de setembro de 2016. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. Andrés David Báez Sánchez, Dr.
(Presidente - UTFPR/Curitiba)

Prof. Rafael Aleixo de Carvalho, Dr.
(UFSC/Blumenau)

Prof. Roy Wilhelm Probst, Dr.
(UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:

Prof. Márcio Rostirolla Adames
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR”

AGRADECIMENTOS

À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.

À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.

Ao meu orientador por compartilhar seus conhecimentos e pela dedicação, sendo a sua colaboração fundamental para a elaboração desta dissertação.

A minha família, por todo apoio durante meus estudos. Especialmente ao meu esposo Alexandre pela compreensão, ajuda e estímulo durante toda a caminhada.

Aos colegas da turma PROFMAT 2014, em especial a Márcia, Sonia, Sílvia e Regina, por todo apoio e momentos de descontração.

RESUMO

SANTOS, Paula Roberta Scaburi dos. DIAGRAMA DE VORONOI: UMA EXPLORAÇÃO NAS DISTÂNCIAS EUCLIDIANA E DO TÁXI. 79 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2016

O objetivo do presente trabalho é explorar o conceito do diagrama de Voronoi considerando a métrica euclidiana e a métrica do táxi. Após uma breve introdução, o segundo capítulo começa com uma definição informal de diagrama de Voronoi considerando a distância euclidiana e traz uma sequência para a construção do diagrama no plano para dois, três e quatro pontos, usando o conceito de mediatriz. Após essa sequência, é feita uma definição formal e são apresentadas algumas propriedades e resultados teóricos acerca do diagrama.

No terceiro capítulo consideramos a ideia do diagrama de Voronoi na métrica do Táxi. Após a definição da métrica do táxi, exploramos alguns lugares geométricos relacionados como: a circunferência e mediatriz, destacando as diferenças e semelhanças com a métrica euclidiana. São apresentados alguns exemplos de diagramas para três e quatro pontos.

O quarto capítulo considera uma ideia para a representação das regiões de influência do diagrama de Voronoi na distância euclidiana e na distância do táxi, usando o GeoGebra. As construções apresentadas envolvem o conceito de circunferência e mediatriz em cada métrica e sua relação com as regiões de influência do diagrama de Voronoi.

Por fim, o quinto capítulo apresenta algumas sugestões de atividades para Ensino Médio relacionadas ao diagrama de Voronoi, envolvendo conceitos de Geometria Analítica e Plana.

Palavras-chave: Geometria, Diagrama de Voronoi, Distância Euclidiana, Distância do Táxi, GeoGebra.

ABSTRACT

SANTOS, Paula Roberta Scaburi dos. VORONOI DIAGRAM: A EXPLORATION IN EUCLIDEAN DISTANCE AND TAXI-DISTANCE. 79 f. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2016

The objective of the present work is to explore the concept of Voronoi diagram considering Euclidean distance and Taxi-distance. After a brief introduction, the second chapter begins with an informal definition of Voronoi diagram considering Euclidean distance and brings a sequence for the construction of the diagram in the plane for two, three and four points, using the concept of perpendicular bisector. After this sequence, a formal definition is introduced and some properties and theoretical results about the diagram are presented.

In the third chapter we consider the idea of Voronoi diagram in the Taxi-distance. After defining the taxi-distance, we explore some related geometric locus as circumference and bisectors, highlighting the differences and similarities with the Euclidean distances. Some examples for three- and four-point diagrams are presented.

The fourth chapter considers an idea for the representation of the regions of influence of the Voronoi diagram in the Euclidean distance and the taxi-distance, using GeoGebra. The construction presented involve the concept of circumference and bisector in each metric and its relation with the regions of influence of the Voronoi diagram.

Finally, the fifth chapter presents some suggestions of activities for High School students related to the Voronoi diagram, involving concepts of Analytical and Plane Geometry.

Keywords: Geometry, Voronoi Diagram, Euclidian distance, Taxi-distance, GeoGebra.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Divisão do plano para dois pontos.	17
Figura 2 – Construção das mediatrizes.	18
Figura 3 – Eliminação dos segmentos que <i>invadem</i> as regiões de influência.	18
Figura 4 – Diagrama de Voronoi para os pontos A, B e C	19
Figura 5 – Diagrama de Voronoi para quatro pontos colineares.	19
Figura 6 – Outras posições possíveis para quatro pontos não colineares.	20
Figura 7 – Ponto externo ao triângulo $\triangle ABC$, formando o segundo triângulo $\triangle BDC$	20
Figura 8 – Diagramas de Voronoi para quatro pontos a partir de dois triângulos.	20
Figura 9 – Diagramas de Voronoi para os pontos A, B, C e D	21
Figura 10 – Diagramas de Voronoi para os três triângulos formados	21
Figura 11 – Diagrama de Voronoi para quatro pontos.	22
Figura 12 – Representação da célula $V(p_i)$	23
Figura 13 – Divisão do plano em dois semiplanos.	23
Figura 14 – Retas paralelas que se <i>encontram</i> no ponto M	25
Figura 15 – Pontos não colineares.	25
Figura 16 – Ponto interior a p_i	26
Figura 17 – Pontos interiores a aresta de Voronoi.	26
Figura 18 – Ponto sobre o vértice de Voronoi.	27
Figura 19 – Caracterização da fronteira do fecho convexo.	28
Figura 20 – Fecho convexo e diagrama de Voronoi.	28
Figura 21 – Recíproca fecho convexo e diagrama de Voronoi.	29
Figura 22 – Diferentes deslocamentos.	31
Figura 23 – Distância ou métrica do táxi.	32
Figura 24 – Centro da circunferência na métrica do táxi.	33
Figura 25 – Circunferência na métrica do táxi.	36
Figura 26 – $d_T(A, B) = d_T(A, P) + d_T(P, B)$	36
Figura 27 – Regiões determinadas pelas retas $x = x_a, x = x_b, y = y_a$ e $y = y_b$	37
Figura 28 – Retângulo Básico: pontos onde $d_T(A, B) = d_T(A, P) + d_T(P, B)$	38
Figura 29 – Táxi-mediatrix quando $m = 0$ ou m é indefinido	40
Figura 30 – Pontos em relação ao retângulo básico.	41
Figura 31 – Táxi-mediatrix para a inclinação \overline{AB} maior que 1.	43
Figura 32 – Táxi-mediatrix para m maior que 1.	43
Figura 33 – Táxi-mediatrix quando $ m \neq 1$	44
Figura 34 – Construção da táxi-mediatrix a partir do retângulo básico.	45
Figura 35 – Construção da táxi-mediatrix do exemplo 1.	46
Figura 36 – Construção da táxi-mediatrix do exemplo 2.	46

Figura 37 – Táxi-mediatriz para $m = 1$	48
Figura 38 – Táxi-mediatriz para $m = -1$	48
Figura 39 – Táxi-mediatrizes dos três segmentos.	49
Figura 40 – Diagrama de Voronoi para os três pontos na métrica do Táxi.	49
Figura 41 – Táxi-mediatrizes dos segmentos.	50
Figura 42 – Diagrama de Voronoi para os quatro pontos na métrica do Táxi.	50
Figura 43 – Táxi-mediatrizes.	51
Figura 44 – Diagrama de Voronoi na métrica do Táxi.	51
Figura 45 – Construção da mediatriz através de duas circunferências de mesmo raio.	53
Figura 46 – Diagrama por meio das mediatrizes, construídas por circunferências.	54
Figura 47 – Ponto P que pertence a região de influência de A	55
Figura 48 – Ajustes para implementação da animação.	55
Figura 49 – Regiões de Voronoi para dois pontos: construção intermediária.	56
Figura 50 – Regiões de Voronoi para dois pontos.	57
Figura 51 – Representação dos pontos e implementação do controle deslizante.	57
Figura 52 – Equações das circunferências com centro em A_1, A_2, \dots, A_8 e raio r	58
Figura 53 – Implementação das cores dinâmicas.	58
Figura 54 – Escolha da opção <i>exibir rastro</i>	59
Figura 55 – Definição da transparência dos círculos para que apareçam as circunferências.	59
Figura 56 – Diferentes fases da animação feita por circunferências.	60
Figura 57 – Resultado final da animação.	60
Figura 58 – Construção intermediária: regiões de influência para os pontos A e B	61
Figura 59 – Regiões de influência para os pontos A e B	62
Figura 60 – Regiões de influência quando a inclinação de \overline{AB} é -1	62
Figura 61 – Animação com táxi-circunferências para determinação das regiões de influência.	63
Figura 62 – Regiões de influência determinadas pelas táxi-mediatrizes.	63
Figura 63 – Retas mediatrizes para três pontos no plano.	67
Figura 64 – Parte das mediatrizes que determinam o diagrama (em preto).	69
Figura 65 – Regiões determinadas pelas retas $x = -3, x = 3, y = -1$ e $y = 3$	70
Figura 66 – Pontos que solucionam $d_T(A, P) = d_T(P, B)$	72
Figura 67 – Regiões onde $d_T(A, P) = d_T(P, B)$	73
Figura 68 – Táxi-mediatriz de \overline{AB} onde $d_T(A, P) = d_T(P, B)$	74
Figura 69 – Táxi-mediatriz de \overline{AB} construída a partir do retângulo básico.	74

SUMÁRIO

	Introdução	16
1	DIAGRAMA DE VORONOI: MOTIVAÇÕES E PROPRIEDADES BÁSICAS	17
1.1	Motivação	17
1.1.1	Construção do Diagrama para um e dois pontos	17
1.1.2	Construção do Diagrama para três pontos não colineares	17
1.1.3	Construção do Diagrama para quatro pontos	19
1.2	Definições e Propriedades	22
2	DIAGRAMA DE VORONOI NA MÉTRICA DO TÁXI	31
2.1	Motivação	31
2.2	Conceitos Básicos	32
2.2.1	Táxi-Circunferência	32
2.2.2	Retângulo Básico	36
2.2.3	Táxi-mediatriz	39
2.2.3.1	Táxi-Mediatriz para $m = 0$ e m indefinido	39
2.2.3.2	Táxi-Mediatriz para $ m \neq 1$ e $m \neq 0$	41
2.2.3.3	Táxi-mediatriz para $ m = 1$	47
2.3	Exemplos do diagrama de Voronoi na métrica do Táxi	49
3	REPRESENTAÇÃO DAS REGIÕES DE INFLUÊNCIA DO DIAGRAMA DE VORONOI USANDO GEOGEBRA	53
3.1	Construção das mediatrizes por circunferências	53
3.1.1	Regiões de influência e Circunferências	54
3.2	Representação das Regiões de influência do Diagrama de Voronoi na métrica euclidiana	56
3.3	Representação do Diagrama de Voronoi na métrica do Táxi	61
4	PROPOSTAS DE ATIVIDADES	65
4.1	Diagrama de Voronoi para três pontos no plano a partir da equação da Reta	65
4.2	Diagrama de Voronoi para três pontos por ortogonalidade de vetores	67
4.3	Atividade na métrica do táxi	70
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	75
	REFERÊNCIAS	77

ANEXO A – LINKS DE ALGUMAS CONSTRUÇÕES NO GEOGE-	
BRA.....	79

INTRODUÇÃO

Historicamente não há uma descrição precisa do primeiro momento em que o conceito do diagrama de Voronoi foi concebido. É provável que o conceito do diagrama de Voronoi seja conhecido a muito tempo, pois muitas estruturas naturais tem semelhanças com o diagrama. Uma possível primeira abordagem ao conceito do diagrama de Voronoi foi usada para mostrar a disposição da matéria no sistema solar e seus arredores por René Descartes (1596-1650) em *Principia Philosophiae*, publicado em 1644 (OKABE et al., 2009).

As primeiras apresentações formais do conceito do diagrama de Voronoi aparecem nos trabalhos de Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) e George Fedoseevich Voronoi (1868-1908). Dirichlet utilizou o diagrama de Voronoi em duas e três dimensões em seu estudo sobre formas quadráticas em 1850. George Voronoi definiu o caso do diagrama para n dimensões em 1908 (LIEBLING; POURNIN, 2012).

Estruturas como o diagrama de Voronoi aparecem em várias áreas do conhecimento como astronomia, arqueologia, planejamento urbano, física, fisiologia, estudo de epidemias, ecologia, entre outras áreas. Muitos problemas dentro das ciências naturais e sociais podem ser modelados por um diagrama de Voronoi (OKABE et al., 2009).

Para citar um exemplo onde o conceito do diagrama já foi usado (LIEBLING; POURNIN, 2012) podemos destacar que em 1854, o médico britânico John Snow (1813-1858) utilizou uma variação do diagrama de Voronoi, para ilustrar como a maioria das pessoas que morreram na epidemia de cólera em Soho, distrito de Londres, viviam mais perto da bomba de água de Broad Street do que de qualquer outra bomba, mostrando assim a relação entre a água consumida e o surto da doença. Este fato é considerado como o início da epidemiologia moderna (JOHNSON, 2008).

O principal objetivo do presente trabalho é apresentar de forma clara e acessível as relações entre o diagrama de Voronoi e alguns conceitos da geometria plana como interseções de semiplanos, regiões conexas, distância entre pontos e lugares geométricos na métrica euclidiana e do táxi, destacando o fato de que alguns lugares geométricos tem comportamentos diferentes em cada uma dessas métricas.

O desenvolvimento central do trabalho está nos Capítulos 2, 3, 4 e 5. O Capítulo 2 traz uma sequência para a construção do diagrama de Voronoi no plano, para dois, três e quatro pontos usando a ideia de mediatriz. Após essa sequência são apresentados definições, propriedades e resultados teóricos acerca do diagrama.

O Capítulo 3 traz conceitos, considerando-se a métrica do Táxi, como táxi-circunferência e táxi-mediatriz que são fundamentais para a construção do diagrama de Voronoi na métrica do Táxi.

O quarto Capítulo apresenta e implementa uma ideia para a representação das regiões de influência do diagrama usando o GeoGebra, inicialmente considerando a distância euclidiana e depois a métrica do táxi.

Já o quinto Capítulo apresenta algumas sugestões de atividades relacionadas ao diagrama de Voronoi. O principal objetivo da primeira atividade é a determinação do diagrama para três pontos no plano usando equações da reta quando se conhece as coordenadas dos pontos. Como complemento, o mesmo problema é solucionado por ortogonalidade de vetores. A segunda atividade traz um problema envolvendo a ideia de mediatriz na métrica do Táxi.

De acordo com (PCNEN, 2000) o ensino da Matemática deve buscar estabelecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento:

"No Ensino Médio, quando nas ciências torna-se essencial uma construção abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes. Mas não é só nesse sentido que a Matemática é fundamental. Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver."

Levando em conta os objetivos de ensino da Matemática, este trabalho pretende ser uma ferramenta diferente para ser usada no ensino de vários conceitos da geometria plana.

1 DIAGRAMA DE VORONOI: MOTIVAÇÕES E PROPRIEDADES BÁSICAS

1.1 MOTIVAÇÃO

A noção intuitiva do diagrama de Voronoi pode ser relacionada à divisão do plano em um conjunto de regiões de influência, sendo que cada região é definida como o conjunto dos pontos que estão a menor distância euclidiana de um certo ponto de influência, entre um conjunto de pontos dados (BERG, 2008). Para ilustrar a construção dessa divisão do plano pode-se considerar o seguinte problema: Como dividir uma cidade, que tenha n escolas, em regiões que levem em consideração a menor distância euclidiana até cada uma das escolas?

Para simplificar a análise vamos considerar que a cidade pode ser representada como um plano. Buscando compreender de forma mais simples e motivar a construção dessa divisão do plano que é influenciada pela distância a certos pontos (considerando as escolas como pontos no plano), será analisada a construção dessa divisão para um, dois, três e depois quatro pontos.

1.1.1 CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA PARA UM E DOIS PONTOS

Quando houver apenas um ponto a região de influência deste ponto será o plano. Para determinar as regiões de influência de dois pontos A e B basta contruir a mediatriz do segmento \overline{AB} . Sobre a mediatriz de \overline{AB} estão os pontos que ficam a mesma distância dos dois pontos e as regiões de influência são justamente os semiplanos definidos pela mediatriz (ver Figura 1).

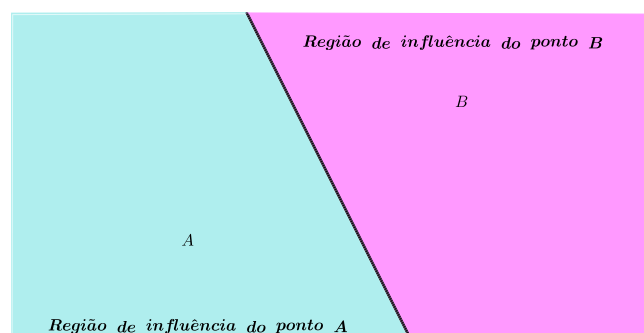


Figura 1 – Divisão do plano para dois pontos.

1.1.2 CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA PARA TRÊS PONTOS NÃO COLINEARES

Para construir o diagrama de Voronoi para três pontos A , B , e C não colineares no plano inicialmente são determinadas as mediatrizes $M(A, B)$, $M(B, C)$ e $M(C, A)$ dos segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} respectivamente:

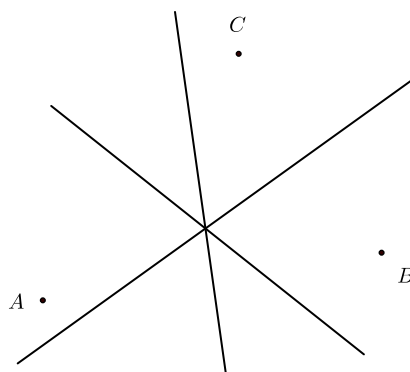


Figura 2 – Construção das mediatrizes.

O ponto de encontro das mediatrizes (circuncentro do $\triangle ABC$) será um vértice do diagrama. Para determinar como serão as regiões de Voronoi para cada ponto de influência basta eliminar parte da mediatriz que contém os pontos que já pertencem a região de influência considerada. Por exemplo, para o ponto de influência A , uma parte da mediatriz do segmento \overline{BC} será desconsiderada, pois estes pontos estão mais próximos do ponto A e portanto pertencem a região de influência de A . O mesmo será feito com as outras mediatrizes conforme a Figura 3:

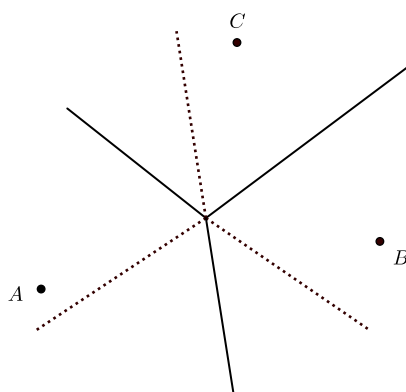


Figura 3 – Eliminação dos segmentos que *invadem* as regiões de influência.

A figura restante, após a eliminação dos segmentos, será o diagrama de Voronoi para estes três pontos no plano (ver Figura 4):

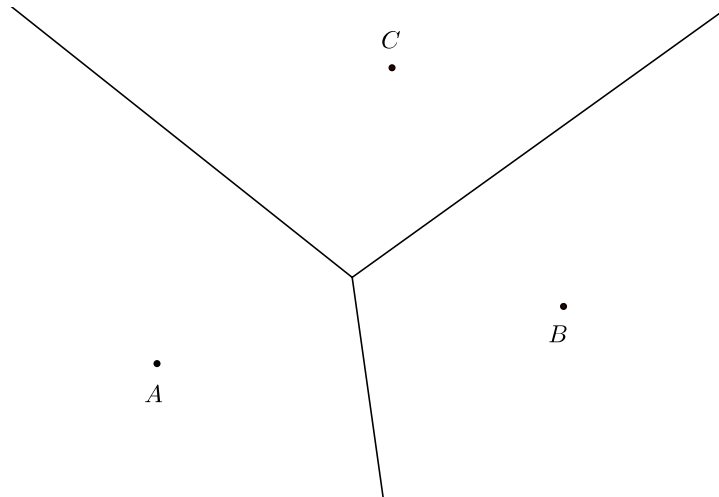


Figura 4 – Diagrama de Voronoi para os pontos A , B e C .

1.1.3 CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA PARA QUATRO PONTOS

Para quatro pontos no plano tem-se duas opções: todos os pontos são colineares ou três dos pontos formam um triângulo e o quarto ponto é externo a esse triângulo.

Quando todos os quatro pontos A , B , C e D forem colineares basta construir as mediatrizes dos segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CD} , e o diagrama de Voronoi será formado por linhas paralelas (ver Figura 5):

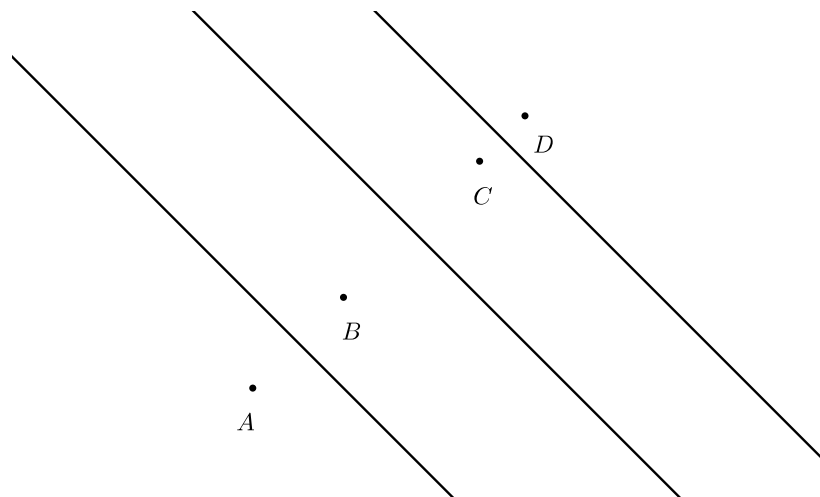


Figura 5 – Diagrama de Voronoi para quatro pontos colineares.

Observe na Figura 6 que mesmo que tenham-se os pontos em diferentes posições é possível escolher três pontos para formar um triângulo sendo o quarto ponto externo a esse triângulo:

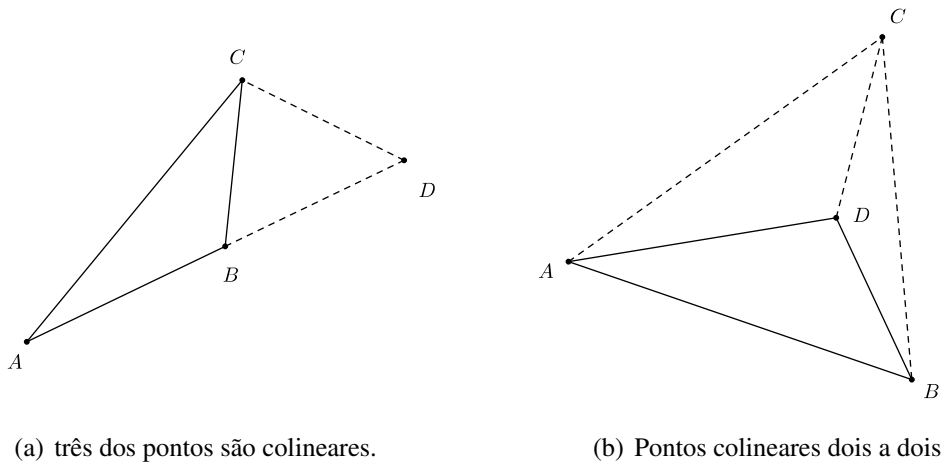


Figura 6 – Outras posições possíveis para quatro pontos não colineares.

Para a construção do diagrama de Voronoi para quatro pontos, será considerado inicialmente que três dos pontos formam um triângulo, e, um quarto ponto será externo ao triângulo como no item (a) da Figura 6. Dividindo a Figura 7 em dois triângulos, $\triangle ABC$ e $\triangle BCD$, a construção do diagrama pode ser feita para os dois triângulos formados, seguindo os mesmos passos considerados para três pontos.

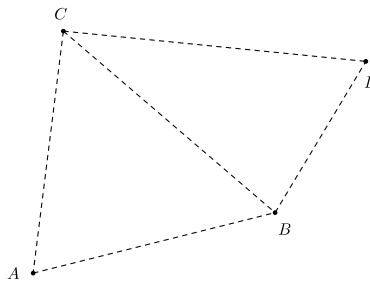


Figura 7 – Ponto externo ao triângulo $\triangle ABC$, formando o segundo triângulo $\triangle BDC$.

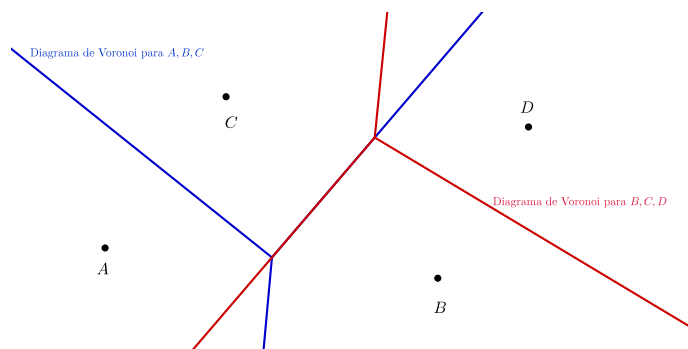


Figura 8 – Diagramas de Voronoi para quatro pontos a partir de dois triângulos.

Observe na Figura 8 parte da semirreta do diagrama de BCD que é interna a região de influência do ponto A no diagrama ABC , note também que parte da semirreta do diagrama ABC é interna a região de influência do ponto D . Eliminando estes segmentos de reta tem-se o diagrama para os quatro pontos $ABCD$ (ver Figura 9).

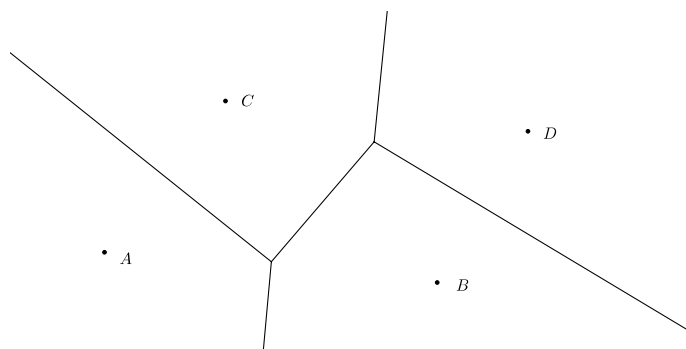


Figura 9 – Diagramas de Voronoi para os pontos A , B , C e D .

Quando a posição dos pontos for semelhante ao item (b) da Figura 6 a construção do diagrama será feita de modo similar com o anterior, determinando o diagrama de Voronoi para cada triângulo pela construção das mediatrizes, mas agora para os três triângulos formados:

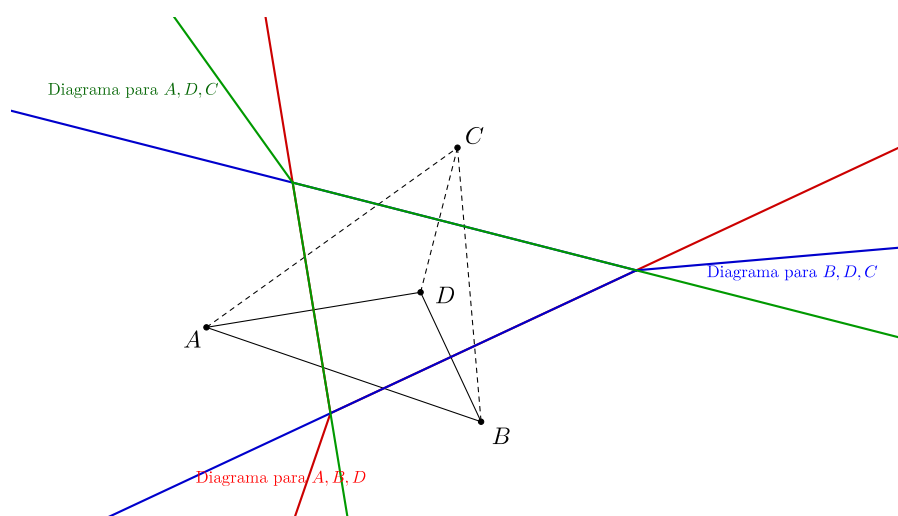


Figura 10 – Diagramas de Voronoi para os três triângulos formados

A sobreposição dos três diagramas forma a região de influência limitada para o ponto D (ver Figura 10). Resta determinar quais partes dos diagramas iniciais irão formar as semirretas do diagrama final. Por exemplo, a região de influência do ponto A , contém as semirretas do diagrama do triângulo BDC , pois estes pontos estão mais próximos de A . A região de influência do ponto B irá conter as semirretas do diagrama do triângulo ADC , pois estes pontos estão mais próximos de B . Já região de influência do ponto C , contém as semirretas do diagrama do triângulo ABD , pois estes pontos estão mais próximos de C . Assim o diagrama para os pontos neste caso será o representado na Figura 11:

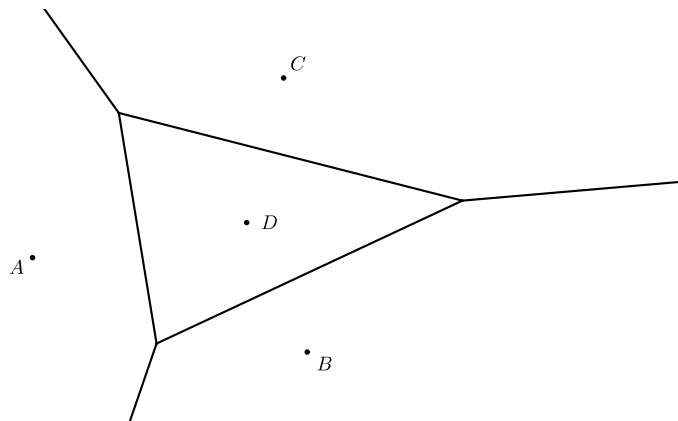


Figura 11 – Diagrama de Voronoi para quatro pontos.

1.2 DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES

Nesta seção vamos introduzir a definição formal e algumas propriedades do Diagrama de Voronoi seguindo o apresentado em (FIGUEIREDO; CARVALHO, 2009) e (BERG, 2008).

Dados dois pontos $p = (p_x, p_y)$ e $q = (q_x, q_y)$ no plano, a distância euclidiana $d(p, q)$ entre eles é definida por:

$$d(p, q) = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}$$

Seja $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ um conjunto de pontos no plano, estes pontos serão chamados *locais*¹ ou pontos de influência na divisão do plano. O diagrama de Voronoi de P é definido a partir da subdivisão do plano em n células, uma para cada ponto de P .

Definição 1.1. A célula de Voronoi $V(p_i)$ é o conjunto de pontos que estão mais próximos a p_i do que de qualquer outro ponto, isto é, um ponto q encontra-se na célula $V(p_i)$ se, e somente se, $d(q, p_i) \leq d(q, p_j)$ para cada $p_j \in P$ com $i \neq j$.

¹ Na literatura em inglês o termo usado é *sites* (BERG, 2008), será usado neste trabalho o termo *pontos de influência*.

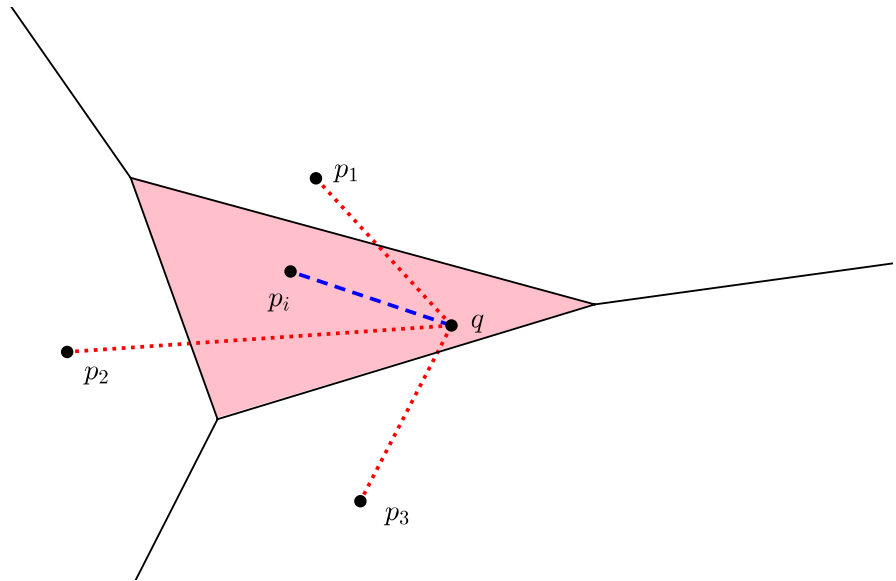


Figura 12 – Representação da célula $V(p_i)$.

Definição 1.2. A união das fronteiras de todas as células de Voronoi que correspondem aos pontos do conjunto $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ é o diagrama de Voronoi de P e será denotado por $Vor(P)$.

Para dois pontos p e q no plano a mediatriz r do segmento \overline{pq} divide o plano em dois semiplanos. O semiplano fechado que contém p será chamado de $h(p, q)$ e o semiplano que contém q de $h(q, p)$ (ver Figura 13). Temos que $r \in h(p, q)$ se, e somente se $d(r, p) \leq d(r, q)$.

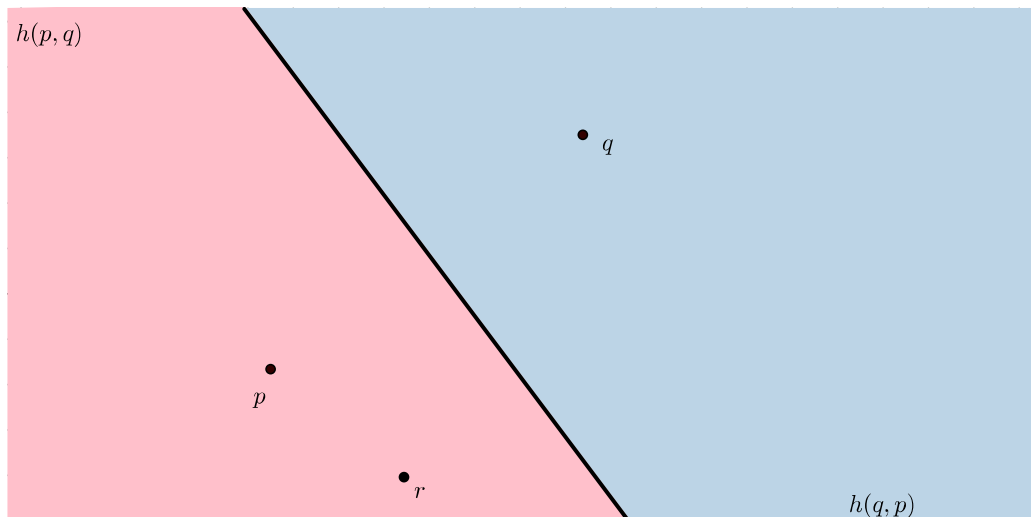


Figura 13 – Divisão do plano em dois semiplanos.

No caso de $n = 2$ esses semiplanos são as células de Voronoi. É possível caracterizar uma célula $V(p_i)$ a partir desses semiplanos (BERG, 2008).

Proposição 1.3. Seja $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ um conjunto de pontos distintos no plano com $n \geq 2$, tem-se que:

$$V(p_i) = \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n h(p_i, p_j)$$

Demonstração: Tem-se como definições preliminares o semiplano $h(p_i, p_j) = \{p \in \mathbb{R}^2 : d(p, p_i) \leq d(p, p_j)\}$ e a célula de Voronoi $V(p_i) = \{p \in \mathbb{R}^2 : d(p, p_i) \leq d(p, p_j), j = 1, 2, 3, \dots, n\}$.

Primeiro irá se mostrar que $V(p_i) \subset \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n h(p_i, p_j)$. Se $p \in V(p_i)$ tem-se por definição que $d(p, p_i) \leq d(p, p_j), \forall j$ com $j = 1, 2, \dots, n$, logo p também pertence a $h(p_i, p_j), \forall j$ com $j \neq i$, isto implica que $p \in \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n h(p_i, p_j)$.

Agora irá se mostrar que $\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n h(p_i, p_j) \subset V(p_i)$. Se $p \in \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n h(p_i, p_j)$ tem-se por definição que $d(p, p_i) \leq d(p, p_j), \forall j$ com $i \neq j$. Para $i = j$ tem-se uma igualdade $d(p, p_i) = d(p, p_i)$, e assim pode-se concluir que $p \in V(p_i)$. \square

Como consequência da proposição anterior, temos que cada célula é a interseção de $n - 1$ semiplanos e portanto, é uma região poligonal convexa.

A interseção de duas células de Voronoi, quando não vazia, é um segmento de reta, possivelmente ilimitado, contido em $Vor(P)$ chamado de *aresta de Voronoi*. Os seus extremos, se existirem, são denominados *vértices de Voronoi*.

Teorema 1.4. *Seja $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ pontos no plano. Se todos os pontos forem colineares o $Vor(P)$ consiste em $n - 1$ linhas paralelas. Caso contrário, $Vor(P)$ é formado por segmentos de reta ou semirretas.*

Demonstração: (Primeira Parte:) Considere um conjunto P de n pontos colineares no plano. Suponha-se, por absurdo que o $Vor(P)$ não seja formado por $n - 1$ linhas paralelas. Isto é, há pelo menos um par de retas do diagrama de Voronoi que se encontram em um ponto M . Considerando que, por exemplo, para três pontos colineares A, B e C , as bissetrizes r e s dos segmentos \overline{AB} e \overline{BC} respectivamente, se encontram em um ponto M , tem-se um triângulo formado por M, N e O (os dois últimos são os pontos médios de \overline{AB} e \overline{BC}) onde a soma dos ângulos internos será $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \widehat{M} > \pi$ o que é um absurdo. Logo as retas r e s são paralelas (Figura 14). Generalizando essa conclusão, tem-se que para um conjunto de P de n pontos colineares o $Vor(P)$ consiste em $n - 1$ linhas paralelas.

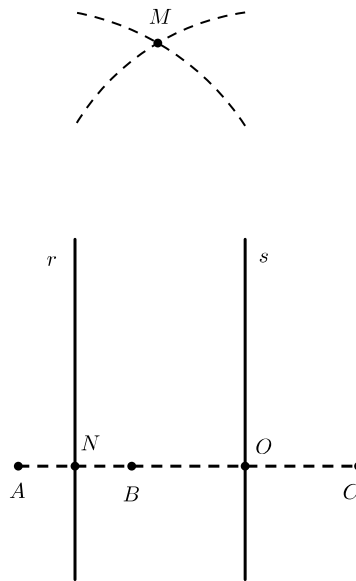


Figura 14 – Retas paralelas que se *encontram* no ponto M .

(*Segunda Parte:*) Como cada célula é formada pela interseção de semiplanos $h(p_i, p_j) = \{p \in \mathbb{R}^2 : d(p, p_i) \leq d(p, p_j)\}$ (Proposição 1.3), temos que toda aresta de Voronoi está contida em alguma mediatriz $M(p_i, p_j)$. Se existir reta inteira que seja aresta de Voronoi ela deve ser determinada por $V(p_i) \cap V(p_j) = M(p_i, p_j)$ para algum par p_i, p_j . Pela hipótese de os pontos de P não serem colineares, existe um $p_k \neq p_i, p_j$ tal que $M(p_j, p_k)$ não é paralela a $M(p_i, p_j)$, assim temos que $M(p_j, p_k)$ e $M(p_i, p_j)$ se intersectam em um ponto fazendo com que $h(p_j, p_k) \cap M(p_i, p_j)$ seja uma semirreta (Figura 15), e assim é impossível que uma reta mediatriz seja parte do diagrama de Voronoi \square

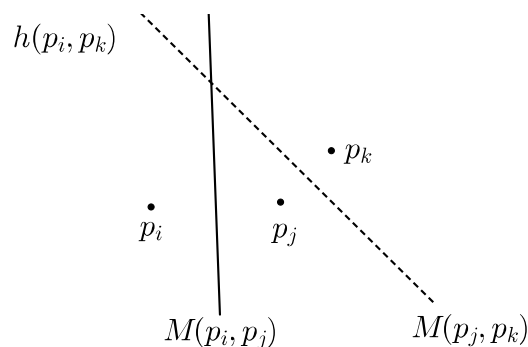


Figura 15 – Pontos não colineares.

Os próximos três teoremas tratam sobre como classificar um ponto qualquer do plano em relação ao diagrama de Voronoi, podendo este ponto ser interior a alguma célula, estar sobre uma única aresta, ou, ser um dos vértices. Dado um ponto $p \notin P$ denotaremos por C_p , um círculo com centro em p que não tenha nenhum ponto de P em seu interior.

Teorema 1.5. Um círculo C_p tem um único ponto p_i de P em sua fronteira, se, e somente se, p é um ponto interior de $V(p_i)$.

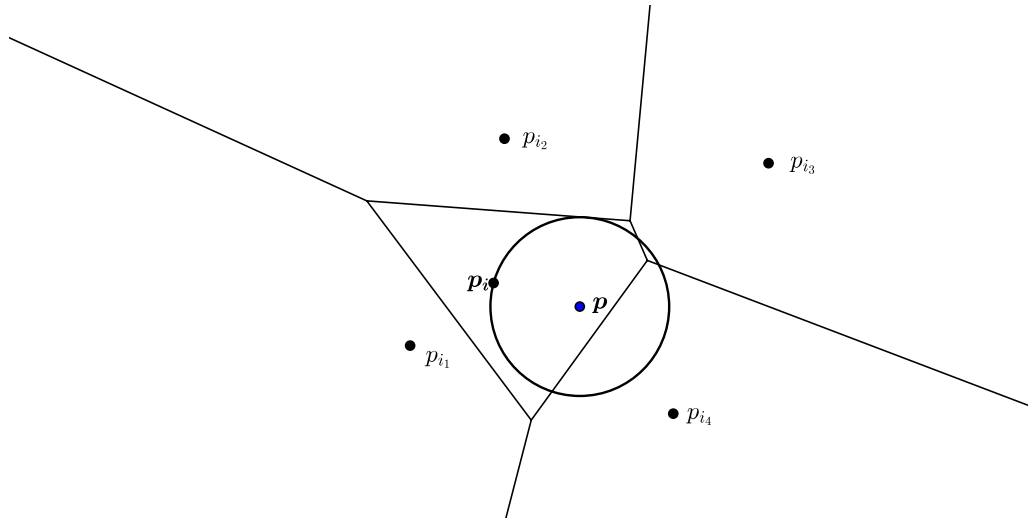


Figura 16 – Ponto interior a p_i .

Demonstração: Se C_p contém um, e somente um ponto de P na sua fronteira, sendo um ponto p_i por exemplo, então p_i é o ponto mais próximo a p entre todos os pontos do conjunto P , ou seja p pertence ao interior de $V(p_i)$. A recíproca também é válida, se p pertence ao interior de $V(p_i)$, $d(p, p_i) < d(p, p_j) \forall j \neq i$ então o C_p com raio $r = d(p, p_i)$ contém apenas na sua fronteira o ponto p_i do conjunto P . \square

Teorema 1.6. Um círculo C_p contém exatamente dois pontos de P , p_i e p_j , na sua fronteira, se, e somente se, p é um ponto interior da aresta $V(p_i) \cap V(p_j)$.

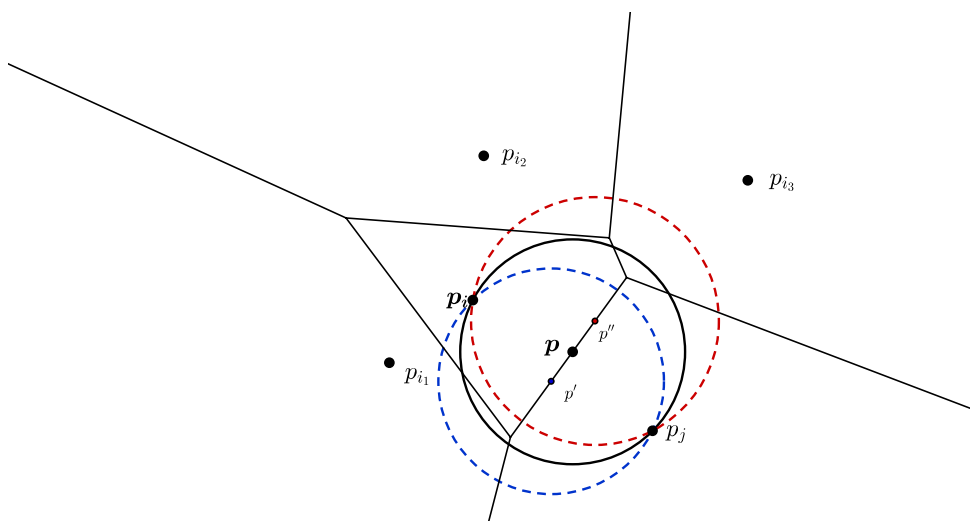


Figura 17 – Pontos interiores a aresta de Voronoi.

Demonstração: Se $C_p \cap P$ contém dois, e somente dois pontos de P , estes pontos sendo p_i e p_j , ambos na fronteira de C_p , este fato implica que $d(p, p_i) = d(p, p_j) < d(p, p_k) \forall k \neq i, j$.

Logo, p pertence apenas a aresta $V(p_i) \cap V(p_j)$ que separa p_i de p_j . Observe que para o ponto p , existem pontos próximos p' e p'' interiores a $V(p_i) \cap V(p_j)$, (Figura 17), que satisfazem a mesma propriedade, portanto p é um ponto interior da aresta. Reciprocamente, se p pertence ao interior da aresta que separa p_i de p_j , o círculo C_p de centro em p e raio $d(p, p_i) = d(p, p_j)$ passa por p_i e p_j . Nenhum outro ponto p_k pode estar na fronteira ou ser interior a C_p pois $d(p, p_k) > d(p, p_i) = d(p, p_j) \forall k \neq i, j$ já que p é um ponto interior da aresta. \square

Teorema 1.7. *O círculo C_p contém três ou mais pontos de P , estando estes em sua fronteira, se, e somente se, p é um vértice de Voronoi.*

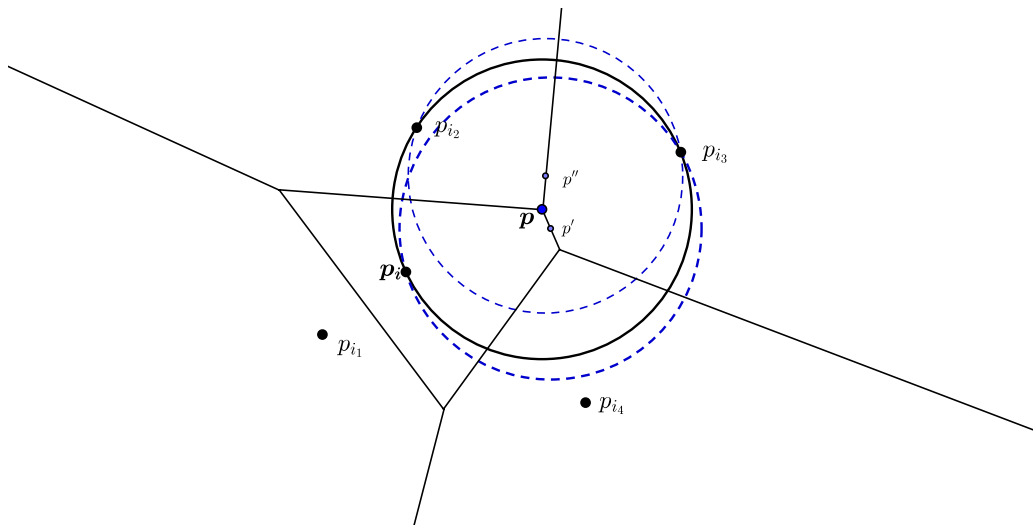


Figura 18 – Ponto sobre o vértice de Voronoi.

Demonstração: Se os pontos do conjunto $p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}, \dots, p_{i_k}$, com $k \geq 3$ estão na borda de C_p e não há pontos de P interiores a C_p , então $p \in V(p_{i_1}) \cap V(p_{i_2}) \cap \dots \cap V(p_{i_k})$. Logo p está em pelo menos três arestas de Voronoi. O ponto p não pode ser interior a nenhuma dessas arestas, pois se fosse interior a $V(p_{i_1}) \cap V(p_{i_2})$ então, pelo Teorema 1.6 que foi provado anteriormente, p_{i_1} e p_{i_2} seriam os únicos pontos de P na borda de C_p , uma contradição. Assim p é ponto extremo de todas as arestas a que pertence e portanto p é um vértice de Voronoi. Reciprocamente, se C_p contém exatamente três pontos de P em sua fronteira, e nenhum ponto de P em seu interior, tem-se duas conclusões sobre o ponto p : não é interior a uma célula de Voronoi pois pelo Teorema 1.5, C_p deveria conter apenas um ponto de P ; o ponto p não é interior a uma aresta de Voronoi pois pelo Teorema 1.6, C_p deveria conter apenas dois pontos de P . Como um ponto no plano que não pertence ao conjunto P deve ser interior a uma célula ou interior a uma aresta ou ser um vértice, logo o ponto p centro de C_p é um vértice de Voronoi. \square

O teorema seguinte aborda o fato de uma célula ser ou não ilimitada, dependendo da posição do ponto p_i . Para a compreensão e demonstração deste teorema serão necessárias uma definição preliminar e uma proposição que será enunciada sem demonstração².

² A proposição apresentada pode ser obtida a partir de resultados mais gerais sobre o fecho convexo (veja (FIGUEIREDO; CARVALHO, 2009) ou (BERG, 2008))

Definição 1.8. Para um conjunto finito P de pontos no plano, o fecho convexo de P é a interseção de todos os polígonos convexos que contém P .

Proposição 1.9. Um ponto p_i está na fronteira do fecho convexo de P , se e somente se existe uma reta r passando por p_i e um vetor v ortogonal a r , tal que a semirreta $p_i + vt$ para $t \geq 0$, pertença a um dos semiplanos determinados por r , e este semiplano não contém nenhum ponto de P .

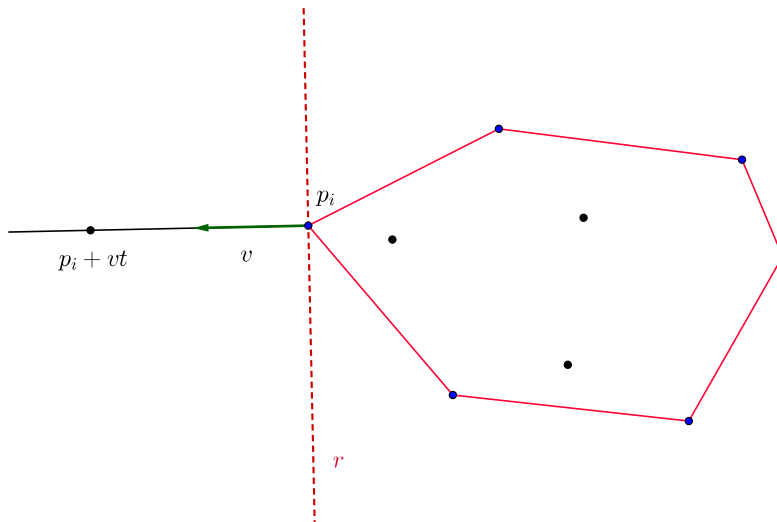


Figura 19 – Caracterização da fronteira do fecho convexo.

Teorema 1.10. A célula de Voronoi $V(p_i)$ é ilimitada se, e somente se, p_i está na fronteira do fecho convexo de P .

Demonstração: Considerando uma célula de Voronoi ilimitada $V(p_i)$, então existe um ponto p_j em P tal que a aresta $V(p_i) \cap V(p_j)$ é um segmento ilimitado de $M(p_i, p_j)$. Este segmento pode ser representado por uma semirreta do tipo $x + vt$, com $t > 0$ e v um vetor unitário. Seja C_t o círculo centrado em $x + vt$ e passando por p_i e p_j (veja Figura 20).

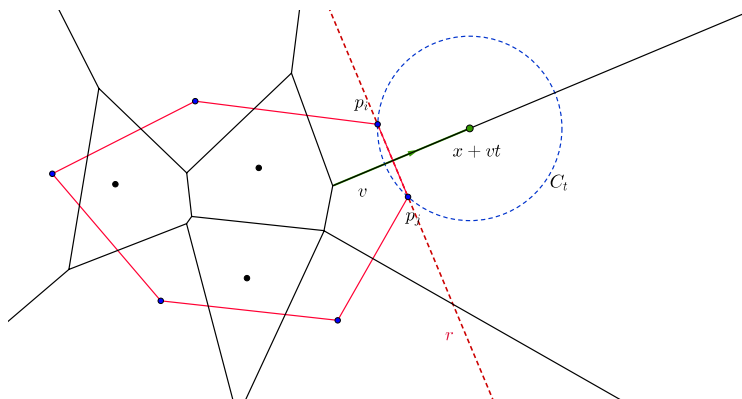


Figura 20 – Fecho convexo e diagrama de Voronoi.

Pela caracterização dos pontos interiores das arestas de Voronoi (Teorema 1.6), a fronteira de C_t não intercepta nenhum ponto de $P \setminus \{p_i, p_j\}$ quando t varia $(0, \infty)$. Isso implica que não há

pontos de P no interior do semiplano determinado pela reta que passa por p_i e p_j e que contém $x + tv$ para $t > 0$. Assim tanto p_i quanto p_j estão na fronteira do fecho convexo de P .

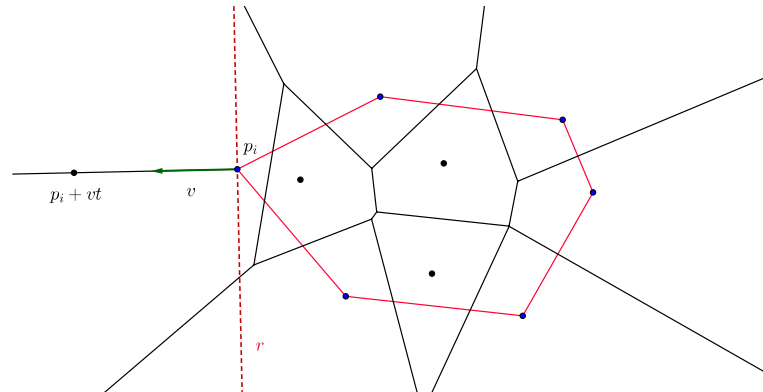


Figura 21 – Recíproca fecho convexo e diagrama de Voronoi.

Reciprocamente, se p_i está na fronteira do fecho convexo de P , então existe uma reta r passando por p_i e um vetor v ortogonal a r , tal que a semirreta $p_i + vt$ é oposta a todo ponto de P em relação a r , para todo $t > 0$. Tem-se que p_i é o ponto mais próximo a $p_i + vt$ entre todos os pontos de P , para todo $t \geq 0$, pois caso contrário, haveria outro ponto de P no semiplano que contém apenas a reta $p_i + vt$. Assim a semirreta $p_i + vt$ pertence a $V(p_i)$ e portanto a célula de Voronoi $V(p_i)$ é ilimitada. \square

2 DIAGRAMA DE VORONOI NA MÉTRICA DO TÁXI

2.1 MOTIVAÇÃO

Até aqui para a compreensão do conceito de diagrama de Voronoi no plano, consideramos a definição de distância na geometria euclidiana, onde a distância entre dois pontos no plano é o comprimento do segmento de reta com extremos nestes pontos. Esta interpretação de distância entre dois pontos só é possível quando não há nenhum *obstáculo* para se traçar o caminho mais curto entre dois pontos no plano.

Pensando em uma cidade planejada, onde a divisão do plano é feita em quarteirões, com as ruas sendo paralelas e perpendiculares entre si, e que apenas o tamanho dos quarteirões (não a largura das ruas) interfere na distância percorrida a distância entre dois pontos, percorrida de carro ou a pé, só pode ser percorrida pelas ruas deslocando-se na horizontal ou vertical. Na Figura 22 estão representados dois tipos de deslocamento: em vermelho *deslocamento euclidiano* entre os pontos, em azul e verde dois diferentes caminhos apenas com deslocamentos horizontais e verticais.

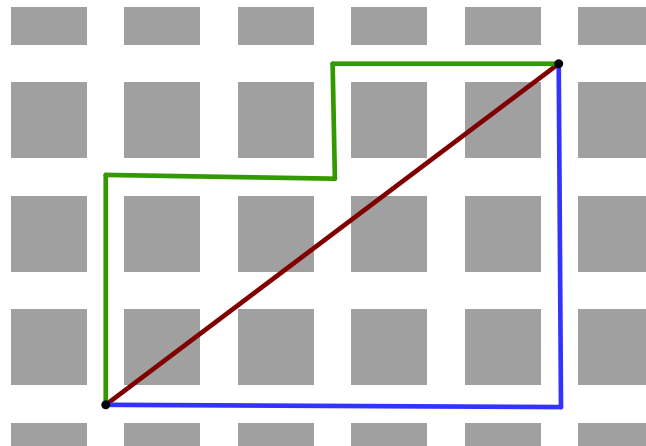


Figura 22 – Diferentes deslocamentos.

Este tipo de situação, sugere considerar outra definição para distância entre pontos no plano, pois a distância entre pontos só pode ser percorrida na horizontal ou vertical. Esta noção é chamada de distância ou métrica do táxi ou táxi-distância (KRAUSE, 1986).

A definição de distância do táxi d_T entre pontos $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ é dada por:

$$d_T(A, B) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|$$

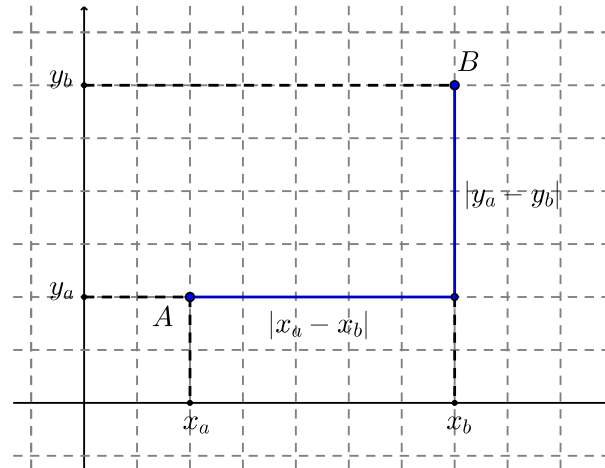


Figura 23 – Distância ou métrica do táxi.

Este Capítulo tem como objetivo explorar a construção do diagrama de Voronoi considerando a definição de distância na métrica do Táxi.

2.2 CONCEITOS BÁSICOS

Para visualizar a construção do diagrama de Voronoi a partir da métrica do táxi vamos definir a circunferência, o retângulo básico e a reta mediatriz, nesta métrica diferente da euclidiana.

2.2.1 TÁXI-CIRCUNFERÊNCIA

Uma táxi-circunferência de centro C e raio r é o lugar geométrico dos pontos no plano que distam r de $C = (x_c, y_c)$. Assim uma *táxi-circunferência* de raio r e centro $C = (x_c, y_c)$ é formada pelos pontos (x, y) que solucionam a equação: $|x - x_c| + |y - y_c| = r$. A seguinte proposição caracteriza este lugar geométrico.

Proposição 2.1. *A táxi-circunferência de centro C e raio r é o quadrado de centro $C = (x_c, y_c)$ e vértices em $(x_c, y_c + r)$, $(x_c + r, y_c)$, $(x_c, y_c - r)$ e $(x_c - r, y_c)$.*

Demonstração: Para determinar as soluções da equação $|x - x_c| + |y - y_c| = r$, irá se considerar os quadrantes determinados pelas retas $x = x_c$ e $y = y_c$ (Figura 24).

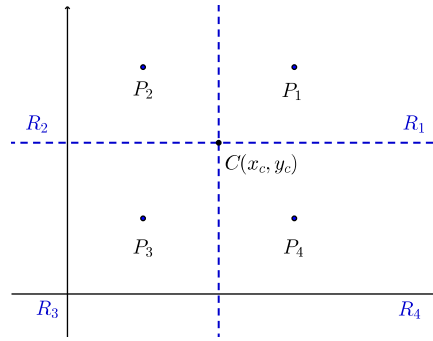


Figura 24 – Centro da circunferência na métrica do táxi.

i) Considerando a região que contém o ponto P_1 :

Para o ponto $P_1 = (x, y)$ tem-se que $x > x_c$ e $y > y_c$. Para estas condições de P_1 e pela definição de módulo a igualdade $|x - x_c| + |y - y_c| = r$, será equivalente à:

$$\begin{aligned}(x - x_c) + (y - y_c) &= r \\ x - x_c + y - y_c &= r \\ y &= -x + x_c + y_c + r,\end{aligned}$$

ou seja, uma reta com inclinação -1 .

ii) Considerando a região que contém o ponto P_2 :

Para o ponto $P_2 = (x, y)$ tem-se que $x < x_c$ e $y > y_c$. Para estas condições de P_2 e pela definição de módulo a igualdade $|x - x_c| + |y - y_c| = r$ será equivalente a:

$$\begin{aligned}-(x - x_c) + (y - y_c) &= r \\ -x + x_c + y - y_c &= r \\ y &= x - x_c + y_c + r,\end{aligned}$$

ou seja, uma reta com inclinação 1 .

iii) Considerando a região que contém o ponto P_3 :

Para o ponto $P_3 = (x, y)$ tem-se que $x < x_c$ e $y < y_c$. Para estas condições de P_3 e pela definição de módulo a igualdade $|x - x_c| + |y - y_c| = r$ será equivalente à:

$$\begin{aligned}-(x - x_c) - (y - y_c) &= r \\ -x + x_c - y + y_c &= r \\ y &= -x + x_c + y_c - r,\end{aligned}$$

ou seja, uma reta com inclinação -1 .

iv) Considerando a região que contém o ponto P_4 :

Para o ponto $P_4 = (x, y)$ tem-se que $x > x_c$ e $y < y_c$. Para estas condições de P_4 e pela definição de módulo a igualdade $|x - x_c| + |y - y_c| = r$ será equivalente à:

$$\begin{aligned}(x - x_c) - (y - y_c) &= r \\ x - x_c - y + y_c &= r \\ y &= x - x_c + y_c - r,\end{aligned}$$

ou seja, uma reta com inclinação 1.

Além das equações das retas, tem-se que determinar as coordenadas dos pontos de interseção entre as retas que pertencem a regiões adjacentes:

Para as regiões R_1 e R_2 temos que determinar o ponto de interseção das retas $y = -x + x_c + y_c + r$ e $y = x - x_c + y_c + r$, igualando as equações tem-se:

$$\begin{aligned}-x + x_c + y_c + r &= x - x_c + y_c + r \\ 2x_c &= 2x \\ x &= x_c\end{aligned}$$

Para determinar a coordenada em y basta substituir o valor de x na reta que pertence a região R_1 (ou na reta de R_2) tem-se:

$$\begin{aligned}y &= -(x_c) + x_c + y_c + r \\ y &= y_c + r\end{aligned}$$

Logo o ponto de interseção das retas $y = -x + x_c + y_c + r$ e $y = x - x_c + y_c + r$ tem coordenadas $(x_c, y_c + r)$.

Para as regiões R_2 e R_3 temos que determinar o ponto de interseção das retas $y = x - x_c + y_c + r$ e $y = -x + x_c + y_c - r$, igualando as equações tem-se:

$$\begin{aligned}x - x_c + y_c + r &= -x + x_c + y_c - r \\ 2x &= 2x_c - 2r \\ x &= x_c - r\end{aligned}$$

Para determinar a coordenada em y basta substituir o valor de x na reta que pertence a região R_2 (ou na reta de R_3) tem-se:

$$\begin{aligned}y &= (x_c - r) - x_c + y_c + r \\ y &= y_c\end{aligned}$$

Logo o ponto de interseção das retas $y = x - x_c + y_c + r$ e $y = -x + x_c + y_c - r$ tem coordenadas $(x_c - r, y_c)$.

Para as regiões R_3 e R_4 temos que determinar o ponto de interseção das retas $y = -x + x_c + y_c - r$ e $y = x - x_c + y_c - r$, igualando as equações tem-se:

$$\begin{aligned} -x + x_c + y_c - r &= x - x_c + y_c - r \\ 2x &= 2x_c \\ x &= x_c \end{aligned}$$

Para determinar a coordenada em y basta substituir o valor de x na reta que pertence a região R_3 (ou na reta de R_4) tem-se:

$$\begin{aligned} y &= -(x_c) + x_c + y_c - r \\ y &= y_c - r \end{aligned}$$

Logo o ponto de interseção das retas $y = -x + x_c + y_c - r$ e $y = x - x_c + y_c - r$ tem coordenadas $(x_c, y_c - r)$.

Para as regiões R_4 e R_1 temos que determinar o ponto de interseção das retas $y = x - x_c + y_c - r$ e $y = -x + x_c + y_c + r$, igualando as equações tem-se:

$$\begin{aligned} x - x_c + y_c - r &= -x + x_c + y_c + r \\ 2x &= 2x_c + 2r \\ x &= x_c + r \end{aligned}$$

Para determinar a coordenada em y basta substituir o valor de x na reta que pertence a região R_4 (ou na reta de R_1) tem-se:

$$\begin{aligned} y &= -(x_c + r) + x_c + y_c + r \\ y &= y_c \end{aligned}$$

Logo o ponto de interseção das retas $y = x - x_c + y_c - r$ e $y = -x + x_c + y_c + r$ tem coordenadas $(x_c + r, y_c)$.

Representando estas retas e pontos no plano tem-se a representação gráfica da táxi-circunferência de centro $C = (x_c, y_c)$ (ver Figura 25):

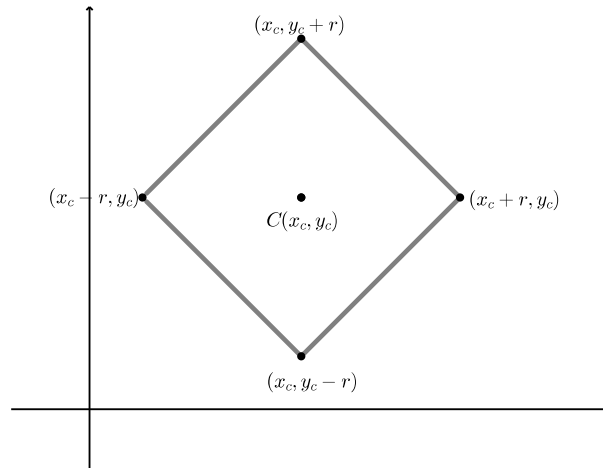


Figura 25 – Circunferência na métrica do táxi.

Assim a proposição fica demonstrada. \square

2.2.2 RETÂNGULO BÁSICO

Para uma motivação da ideia de *retângulo básico* (WANDERLEY; CARNEIRO; WAGNER, 2002), consideremos o seguinte problema em uma métrica qualquer d : Dados dois pontos $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$, para quais pontos $P = (x, y)$ a soma das distâncias $d(A, P)$ e $d(P, B)$ é a menor possível? Estamos procurando os pontos que minimizam o lado direito da desigualdade triangular $d(A, B) \leq d(A, P) + d(P, B)$. Na métrica Euclidiana os pontos P que solucionam esse problema são os pontos do segmento \overline{AB} , pois estes pontos são os únicos que satisfazem $d_E(A, B) = d_E(A, P) + d_E(P, B)$.

Quando consideramos a métrica do Táxi, a solução desse problema será a mesma da métrica Euclidiana apenas quando o segmento \overline{AB} for paralelo a um dos eixos do sistema de coordenadas (ver Figura 26).

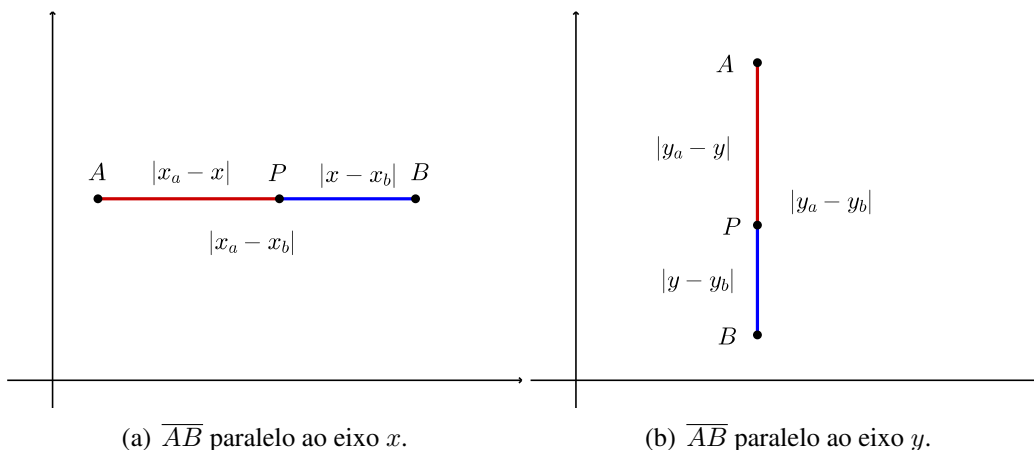


Figura 26 – $d_T(A, B) = d_T(A, P) + d_T(P, B)$.

Em um caso mais geral, este conjunto de pontos é um retângulo, que chamaremos de retângulo básico e será caracterizado na proposição seguinte.

Proposição 2.2. *Dados dois pontos $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ o lugar geométrico dos pontos P no plano tais que $d_T(A, B) = d_T(A, P) + d_T(P, B)$, é o retângulo $ACBD$ de vértices em $A = (x_a, y_a)$, $C = (x_a, y_b)$, $B = (x_b, y_b)$ e $D = (x_b, y_a)$.*

Demonstração: Para a determinação algébrica irá se considerar o caso onde $x_a < x_b$ e $y_a < y_b$, observe na Figura 27 os nove sub-casos que correspondem as nove regiões determinadas pelas retas $x = x_a$, $x = x_b$, $y = y_a$ e $y = y_b$.

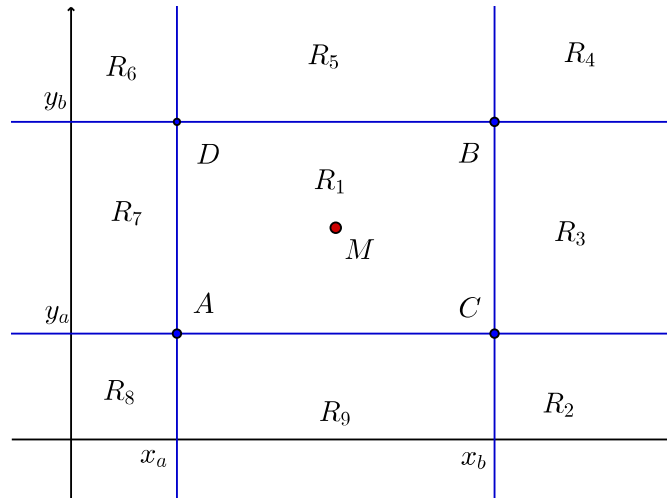


Figura 27 – Regiões determinadas pelas retas $x = x_a$, $x = x_b$, $y = y_a$ e $y = y_b$.

Serão analisadas as regiões R_1 , R_2 , R_3 , R_4 e R_5 , já que existe uma simetria em relação ao ponto M entre os seguintes pares de regiões: R_2 e R_6 , R_3 e R_7 , R_4 e R_8 , R_5 e R_9 .

i) Para a região R_1 tem-se $x_a \leq x \leq x_b$ e $y_a \leq y \leq y_b$, a igualdade $|x_a - x_b| + |y_a - y_b| = |x_a - x| + |y_a - y| + |x_b - x| + |y_b - y|$ será equivalente a:

$$\begin{aligned} -(x_a - x_b) - (y_a - y_b) &= -(x_a - x) - (y_a - y) + (x_b - x) + (y_b - y) \\ -x_a + x_b - y_a + y_b &= -x_a + x - y_a + y + x_b - x + y_b - y \\ 0 &= 0x + 0y \end{aligned}$$

Logo todos os pontos onde $x_a \leq x \leq x_b$ e $y_a \leq y \leq y_b$ satisfazem a igualdade.

ii) Para a região R_2 tem-se $x_a < x_b < x$ e $y < y_a < y_b$, a igualdade $|x_a - x_b| + |y_a - y_b| = |x_a - x| + |y_a - y| + |x_b - x| + |y_b - y|$ será equivalente a:

$$\begin{aligned} -(x_a - x_b) - (y_a - y_b) &= -(x_a - x) + (y_a - y) - (x_b - x) + (y_b - y) \\ -x_a + x_b - y_a + y_b &= -x_a + x + y_a - y - x_b + x + y_b - y \\ 2x_b - 2y_a &= 2x - 2y \\ x - x_b &= y - y_a \end{aligned}$$

Esta equação não tem solução em R_2 pois pela condição inicial $x - x_b > 0$ e $y - y_a < 0$.

iii) Para a região R_3 tem-se $x_a < x_b < x$ e $y_a < y < y_b$, a igualdade $|x_a - x_b| + |y_a - y_b| = |x_a - x| + |y_a - y| + |x_b - x| + |y_b - y|$ será equivalente a:

$$\begin{aligned} -(x_a - x_b) - (y_a - y_b) &= -(x_a - x) - (y_a - y) - (x_b - x) + (y_b - y) \\ -x_a + x_b - y_a + y_b &= -x_a + x - y_a + y - x_b + x + y_b - y \\ 2x_b &= 2x \\ x_b &= x \end{aligned}$$

Esta equação não tem solução em R_3 pois pela condição inicial $x > x_b$.

iv) Para a região R_4 tem-se $x_a < x_b < x$ e $y_a < y_b < y$, a igualdade $|x_a - x_b| + |y_a - y_b| = |x_a - x| + |y_a - y| + |x_b - x| + |y_b - y|$ será equivalente a:

$$\begin{aligned} -(x_a - x_b) - (y_a - y_b) &= -(x_a - x) - (y_a - y) - (x_b - x) - (y_b - y) \\ -x_a + x_b - y_a + y_b &= -x_a + x - y_a + y - x_b + x - y_b + y \\ 2x_b + 2y_a &= 2x + 2y \\ x - x_b &= -(y - y_b) \end{aligned}$$

Esta equação não tem solução em R_4 pois pela condição inicial $x - x_b > 0$ e $y - y_b > 0$.

v) Para a região R_5 tem-se $x_a < x < x_b$ e $y_a < y_b < y$, a igualdade $|x_a - x_b| + |y_a - y_b| = |x_a - x| + |y_a - y| + |x_b - x| + |y_b - y|$ será equivalente a:

$$\begin{aligned} -(x_a - x_b) - (y_a - y_b) &= -(x_a - x) - (y_a - y) + (x_b - x) - (y_b - y) \\ -x_a + x_b - y_a + y_b &= -x_a + x - y_a + y + x_b - x - y_b + y \\ 2y_b &= 2y \\ y_b &= y \end{aligned}$$

Esta equação não tem solução em R_4 pois pela condição inicial $y > y_b$.

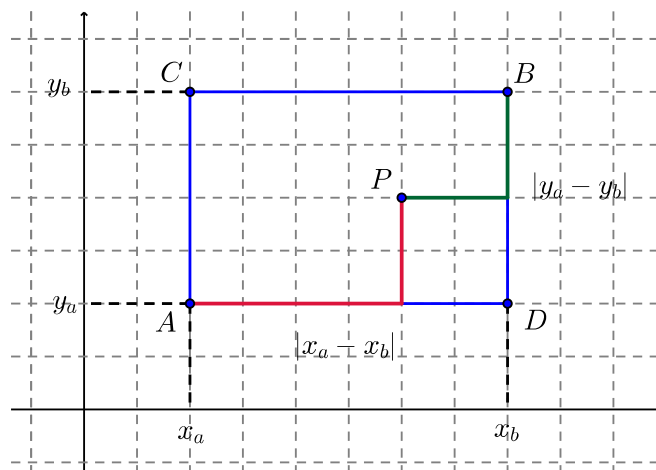


Figura 28 – Retângulo Básico: pontos onde $d_T(A, B) = d_T(A, P) + d_T(P, B)$.

Excluindo as regiões onde a equação $|x_a - x_b| + |y_a - y_b| = |x_a - x| + |y_a - y| + |x_b - x| + |y_b - y|$ não tem solução, obtemos o retângulo $ACBD$ (ver Figura 28). \square

Este retângulo $ACBD$ será chamado de *retângulo básico* e será importante para a visualização geométrica e a determinação algébrica da mediatriz de um segmento na métrica do táxi.

2.2.3 TÁXI-MEDIATRIZ

A mediatriz de um segmento \overline{AB} é o lugar geométrico dos pontos P tais que $d(P, A)$ é igual a $d(P, B)$. Considerando a definição de distância na métrica do Táxi, para $P = (x, y)$, $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ temos que P pertence à táxi-mediatriz de \overline{AB} se, e somente se

$$|x - x_a| + |y - y_a| = |x - x_b| + |y - y_b|. \quad (2.1)$$

A táxi-mediatriz de um segmento \overline{AB} está relacionada à inclinação do segmento em relação ao eixo x . Sendo essa inclinação m , podem ser considerados os casos: $m = 0$, m é indefinido, $|m| \neq 1$ e $|m| = 1$. Nos dois primeiros casos a táxi-mediatriz é igual à mediatriz na métrica Euclidiana. Se $|m| \neq 1$ a táxi-mediatriz será a união de duas semirretas e um segmento de reta. Já quando $|m| = 1$ a táxi-mediatriz não é formada apenas por retas, sendo formada por um segmento de reta unido a dois *quadrantes do plano*. A seguir veremos de forma detalhada o comportamento da táxi-mediatriz.

2.2.3.1 TÁXI-MEDIATRIZ PARA $m = 0$ E m INDEFINIDO

Quando $m = 0$ ou m é indefinido, tem-se \overline{AB} paralelo ao eixo x ou eixo y respectivamente, nestes casos a táxi-mediatriz é a mesma da geometria euclidiana.

Proposição 2.3. *Dados dois pontos $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$, se \overline{AB} é paralelo ao eixo x , a táxi-mediatriz será a reta $x = \frac{x_a + x_b}{2}$. Se \overline{AB} é paralelo ao eixo y , a táxi-mediatriz será a reta $y = \frac{y_a + y_b}{2}$.*

Demonstração: Se \overline{AB} é paralelo ao eixo x tem-se que $y_a = y_b$. Desse modo a definição da mediatriz na equação 2.1 é expressa por $|x - x_a| = |x - x_b|$. Para que um ponto $P = (x, y)$ pertença a táxi-mediatriz tem-se que $x_a \leq x \leq x_b$. Por esta condição e pela definição de módulo, a igualdade $|x - x_a| = |x - x_b|$ é equivalente a:

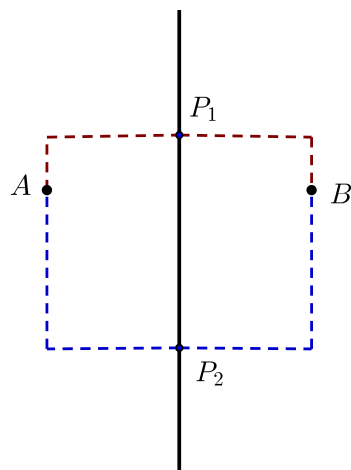
$$\begin{aligned} -(x - x_a) &= (x - x_b) \\ x_a + x_b &= 2x \\ x &= \frac{x_a + x_b}{2}, \end{aligned}$$

ou seja, a coordenada em x do ponto médio do segmento \overline{AB} . Para \overline{AB} paralelo ao eixo y tem-se que $x_a = x_b$. Agora a definição da mediatriz é expressa por $|y - y_a| = |y - y_b|$. Para que um ponto $P = (x, y)$ pertença a táxi-mediatriz tem-se que $y_a \leq y \leq y_b$. Por esta condição e pela definição de módulo a igualdade $|y - y_a| = |y - y_b|$ é equivalente a:

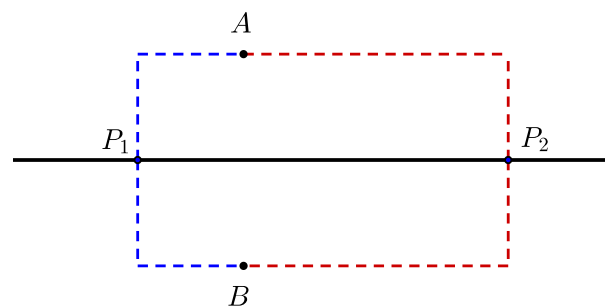
$$\begin{aligned} -(y - y_a) &= (y - y_b) \\ y_a + y_b &= 2y \\ y &= \frac{y_a + y_b}{2}, \end{aligned}$$

ou seja, a coordenada em y do ponto médio do segmento \overline{AB} . \square

A representação gráfica da táxi-mediatriz nesse caso será a mesma da geometria Euclidiana (ver Figura 29), ou seja a reta perpendicular ao segmento \overline{AB} que passa pelo seu ponto médio.



(a) Segmento \overline{AB} paralelo ao eixo x .



(b) Segmento \overline{AB} paralelo ao eixo y .

Figura 29 – Táxi-mediatriz quando $m = 0$ ou m é indefinido .

2.2.3.2 TÁXI-MEDIATRIZ PARA $|m| \neq 1$ E $m \neq 0$

Inicialmente vamos considerar o caso onde $m > 1$ (ver Figura 30):

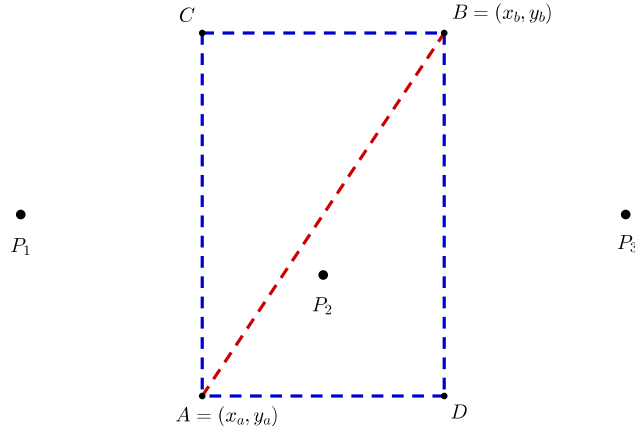


Figura 30 – Pontos em relação ao retângulo básico.

Serão analisadas as condições que um ponto deve possuir para pertencer a táxi-mediatriz em diferentes regiões relacionadas ao retângulo básico $ACBD$. A caracterização algébrica dessas regiões será feita considerando os casos para os pontos P_1 , P_2 e P_3 respectivamente:

i) Considerando o ponto P_1 :

Para um ponto (x, y) que tem as seguintes condições $x \leq x_a < x_b$ e $y_a \leq y \leq y_b$. A definição de táxi-mediatriz $|x - x_a| + |y - y_a| = |x - x_b| + |y - y_b|$, será equivalente a:

$$\begin{aligned} -(x - x_a) + (y - y_a) &= -(x - x_b) - (y - y_b) \\ -x + x_a + y - y_a &= -x + x_b - y + y_b \\ 2y &= -x_a + y_a + x_b + y_b \\ y &= \frac{-x_a + y_a + x_b + y_b}{2} \end{aligned}$$

Ou seja uma semirreta paralela ao eixo x .

ii) Considerando o ponto P_2 :

Para o ponto $P_2 = (x, y)$ tem-se que $x_a < x < x_b$ e $y_a < y < y_b$. Para estas condições de P_2 e pela definição de módulo a igualdade $|x - x_a| + |y - y_a| = |x - x_b| + |y - y_b|$ será equivalente a:

$$\begin{aligned} (x - x_a) + (y - y_a) &= -(x - x_b) - (y - y_b) \\ x - x_a + y - y_a &= -x + x_b - y + y_b \\ 2(x + y) &= x_a + y_a + x_b + y_b \\ y &= \frac{x_a + y_a + x_b + y_b}{2} - x \end{aligned}$$

Ou seja um segmento de reta delimitada ao retângulo básico $ACBD$ e com inclinação $m = -1$.

iii) Considerando o ponto P_3 :

Para o ponto $P_3 = (x, y)$ tem-se que $x > x_b > x_a$ e $y_a < y < y_b$. Para estas condições de P_3 e pela definição de módulo a igualdade $|x - x_a| + |y - y_a| = |x - x_b| + |y - y_b|$ será equivalente a:

$$\begin{aligned}(x - x_a) + (y - y_a) &= (x - x_b) - (y - y_b) \\ x - x_a + y - y_a &= x - x_b - y + y_b \\ 2y &= x_a + y_a - x_b + y_b \\ y &= \frac{x_a + y_a - x_b + y_b}{2}\end{aligned}$$

Ou seja uma semirreta paralela ao eixo y .

Falta determinar os pontos de interseção entre estas semirretas e o segmento de reta que formam a táxi-mediatrix.

Entre a semirreta $y = \frac{-x_a + y_a + x_b + y_b}{2}$ e o segmento de reta $y = \frac{x_a + y_a + x_b + y_b}{2} - x$, comparando-se as equações tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{-x_a + y_a + x_b + y_b}{2} &= \frac{x_a + y_a + x_b + y_b}{2} - x \\ \frac{-x_a}{2} &= \frac{x_a}{2} - x \\ x &= x_a.\end{aligned}$$

Para determinar a coordenada em y do ponto basta substituir $x = x_a$ em $y = \frac{x_a + y_a + x_b + y_b}{2} - x$:

$$\begin{aligned}y &= \frac{x_a + y_a + x_b + y_b}{2} - x_a \\ y &= \frac{-x_a + y_a + x_b + y_b}{2}\end{aligned}$$

Assim o ponto de interseção entre essa semirreta e o segmento de reta tem coordenadas $(x_a, \frac{-x_a + y_a + x_b + y_b}{2})$.

Para a interseção entre a semirreta $y = \frac{x_a + y_a - x_b + y_b}{2}$ e o segmento de reta $y = \frac{x_a + y_a + x_b + y_b}{2} - x$, comparando-se as equações tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{x_a + y_a - x_b + y_b}{2} &= \frac{x_a + y_a + x_b + y_b}{2} - x \\ \frac{-x_b}{2} &= \frac{x_b}{2} - x \\ x &= x_b.\end{aligned}$$

Para determinar a coordenada em y do ponto basta substituir $x = x_b$ em $y = \frac{x_a + y_a + x_b + y_b}{2} - x$:

$$y = \frac{x_a + y_a + x_b + y_b}{2} - x_b$$

$$y = \frac{x_a + y_a - x_b + y_b}{2}$$

Logo o ponto de interseção entre essa semirreta e o segmento de reta tem coordenadas $(x_b, \frac{x_a + y_a - x_b + y_b}{2})$.

Representado-se graficamente tem-se a Figura 31:

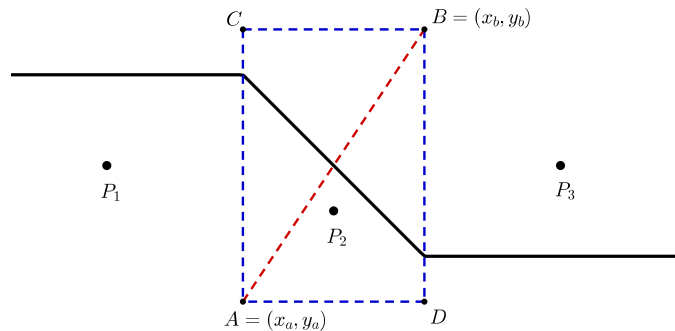


Figura 31 – Táxi-mediatrix para a inclinação \overline{AB} maior que 1.

Para qualquer outra escolha de condições para os pontos em posições diferentes de P_1 , P_2 ou P_3 irá se chegar a contradições. Por exemplo, considere agora um ponto P com as seguintes condições $x < x_a < x_b$ e $y < y_a < y_b$ (Figura 32).

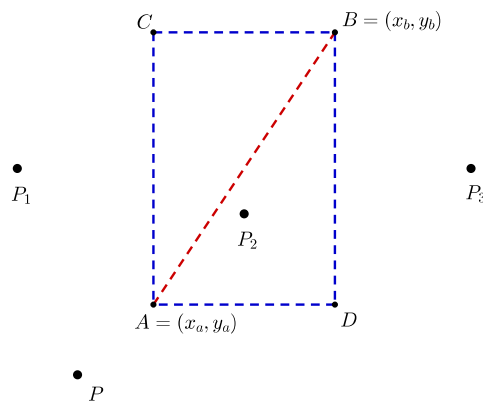


Figura 32 – Táxi-mediatrix para m maior que 1.

Pela definição de módulo a igualdade $|x - x_a| + |y - y_a| = |x - x_b| + |y - y_b|$ será

equivalente a:

$$\begin{aligned} -(x - x_a) - (y - y_a) &= -(x - x_b) - (y - y_b) \\ x_a + y_a &= x_b + y_b \\ x_a - x_b &= y_b - y_a \\ \frac{y_b - y_a}{x_a - x_b} &= -1 \end{aligned}$$

Mas isto é um absurdo pois a inclinação do segmento \overline{AB} é maior que 1 e não -1 .

Para as outras situações onde $|m| \neq 1$ e $m \neq 0$ a determinação das semirretas e segmentos de reta que formam a táxi-mediatrix pode ser feita de maneira semelhante a anterior analisando-se pontos externos ou internos ao retângulo básico. Observe na Figura 33 o comportamento da táxi-mediatrix quando $|m| \neq 1$ e $m \neq 0$.

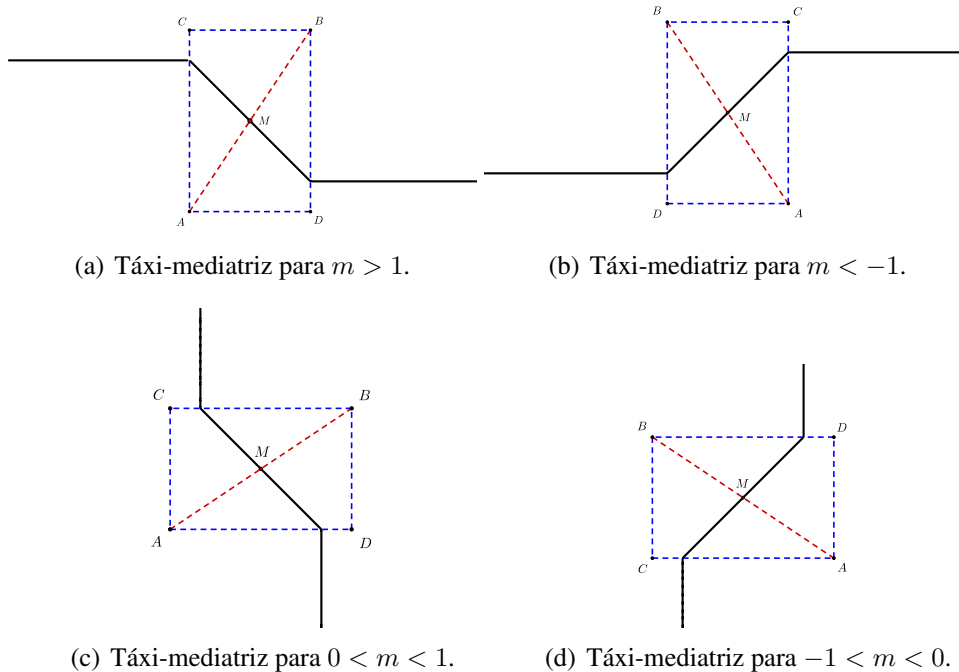


Figura 33 – Táxi-mediatrix quando $|m| \neq 1$.

Pela Figura anterior pode-se pensar em um método prático para a construção da táxi-mediatrix quando $|m| \neq 1$ e $m \neq 0$. Em todos os casos apresentados na Figura 33 o segmento de reta delimitado pelo retângulo básico terá inclinação 1 ou -1 , ou seja é a diagonal de um quadrado.

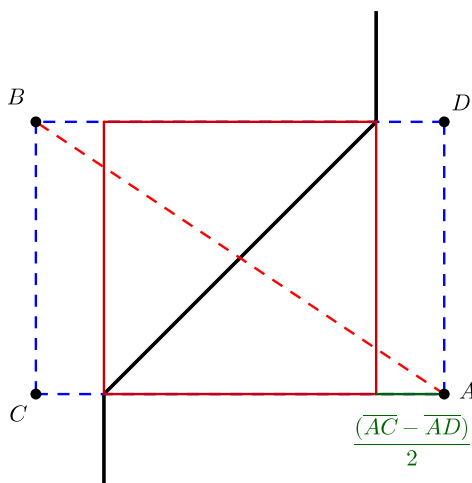


Figura 34 – Construção da táxi-mediatrix a partir do retângulo básico.

Para determinar o posicionamento deste quadrado dentro do retângulo básico pode-se fazer o seguinte: a metade da diferença entre o segmento maior de $ACBD$ e o segmento menor de $ACBD$ será a distância a uma das extremidades do maior segmento de $ACBD$ (Figura 34).

Após o posicionamento deste quadrado dentro do retângulo básico considerando as análises anteriores é possível caracterizar a táxi-mediatrix com a seguinte proposição.

Proposição 2.4. *A táxi-mediatrix de um segmento com inclinação $|m| \neq 1$ e $m \neq 0$ é formada pela união de um segmento de reta e duas semirretas relacionadas com o retângulo básico da seguinte forma:*

- A inclinação do segmento de reta, que fica delimitada pelo quadrado será 1 quando a inclinação m de \overline{AB} for $m < 0$ e $m \neq -1$.
- A inclinação do segmento de reta que fica delimitada pelo quadrado será -1 quando a inclinação m de \overline{AB} for $m > 0$ e $m \neq 1$.
- As semirretas que ficam fora do retângulo básico serão paralelas aos menores lados do retângulo básico $ACBD$ e têm seu início nas extremidades do segmento de reta delimitado pelo quadrado no retângulo básico.

Nos exemplos a seguir serão apresentadas duas construções da táxi-mediatrix de um segmento quando conhecidas as coordenadas cartesianas dos pontos A e B e a sua inclinação é $|m| \neq 1$.

Exemplo 1: Sendo $A = (4, 0)$ e $B = (0, 8)$, para a determinação das coordenadas do retângulo básico temos os pontos $C = (0, 0)$ e $D = (4, 8)$. A distância do quadrado posicionado dentro do retângulo básico em relação ao ponto A será:

$$\frac{(\overline{AD} - \overline{AC})}{2} = \frac{8 - 4}{2} = 2$$

Seguindo os passos para a construção apresentados anteriormente tem-se a táxi-mediatrix para os pontos considerados no exemplo, representando graficamente tem-se:

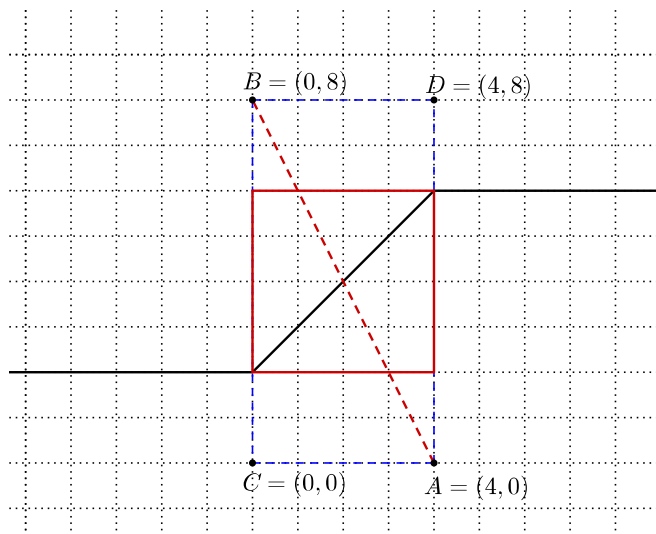


Figura 35 – Construção da táxi-mediatrix do exemplo 1.

Exemplo 2: Sendo $A = (0, 0)$ e $B = (7, 5)$, para a determinação das coordenadas do retângulo básico temos os pontos $C = (0, 5)$ e $D = (7, 0)$. A distância do *quadrado* posicionado dentro do retângulo básico em relação ao ponto A será:

$$\frac{(\overline{AD} - \overline{AC})}{2} = \frac{9 - 7}{2} = 1$$

Seguindo os passos para a construção apresentados anteriormente tem-se a táxi-mediatrix para os pontos considerados no exemplo, representando graficamente tem-se:

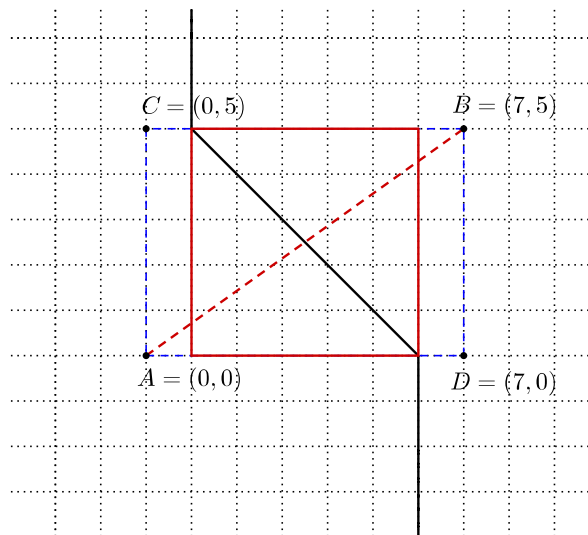


Figura 36 – Construção da táxi-mediatrix do exemplo 2.

2.2.3.3 TÁXI-MEDIATRIZ PARA $|m| = 1$

Vamos considerar inicialmente o caso quando $m = 1$, analisando o comportamento dos pontos que pertencem a diferentes regiões em relação ao retângulo básico.

Para um ponto (x, y) com as condições $x_b > x_a \geq x$ e $y \geq y_b > y_a$, considerando a definição de táxi-mediatrix $|x - x_a| + |y - y_a| = |x - x_b| + |y - y_b|$ temos que:

$$\begin{aligned} -(x - x_a) + (y - y_a) &= -(x - x_b) + (y - y_b) \\ -x + x_a + y - y_a &= -x + x_b + y - y_b \\ -x + x_a + y - y_a &= -x + x_b + y - y_b \\ x_a - y_a &= x_b - y_b \end{aligned}$$

A igualdade acima é verdadeira pois a inclinação de \overline{AB} é igual a 1:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = 1 \\ y_b - y_a &= x_b - x_a \\ x_a - y_a &= x_b - y_b \end{aligned}$$

Portanto, **todos os pontos que pertencem a região delimitada por $x \leq x_a$ e $y \geq y_b$ pertencem a táxi-mediatrix de \overline{AB} para $m = 1$ observe a Figura 37.**

Para um ponto (x, y) com as condições $x \geq x_b > x_a$ e $y_b > y_a \geq y$, considerando a definição de táxi-mediatrix $|x - x_a| + |y - y_a| = |x - x_b| + |y - y_b|$ temos que:

$$\begin{aligned} (x - x_a) - (y - y_a) &= (x - x_b) - (y - y_b) \\ x - x_a - y + y_a &= x - x_b - y + y_b \\ -x_a + y_a &= -x_b + y_b \\ x_a - x_b &= y_a - y_b \end{aligned}$$

Mas esta igualdade é verdadeira pois a inclinação de \overline{AB} é igual a 1.

Como consequência, **todos os pontos que pertencem a região delimitada por $x \geq x_b$ e $y_a \geq y$ pertencem a táxi-mediatrix de \overline{AB} para $m = 1$.**

Já para um ponto (x, y) onde $x_a < x < x_b$ e $y_a < y < y_b$, para estas condições e pela definição de módulo a igualdade $|x - x_a| + |y - y_a| = |x - x_b| + |y - y_b|$ será equivalente a:

$$\begin{aligned} (x - x_a) + (y - y_a) &= -(x - x_b) - (y - y_b) \\ x - x_a + y - y_a &= -x + x_b - y + y_b \\ 2(x + y) &= x_a + y_a + x_b + y_b \\ y &= \frac{x_a + y_a + x_b + y_b}{2} - x \end{aligned}$$

Ou seja uma reta delimitada ao retângulo básico $ACBD$ e com inclinação $m = -1$.

Assim a táxi-mediatrix quando a inclinação de \overline{AB} é $m = 1$ é formada por dois quadrantes ($x \leq x_a, y \geq y_b$) e ($x \geq x_b, y \leq y_a$), e pela reta $y = \frac{x_a + y_a + x_b + y_b}{2} - x$ para $x_a < x < x_b$. Graficamente tem-se:

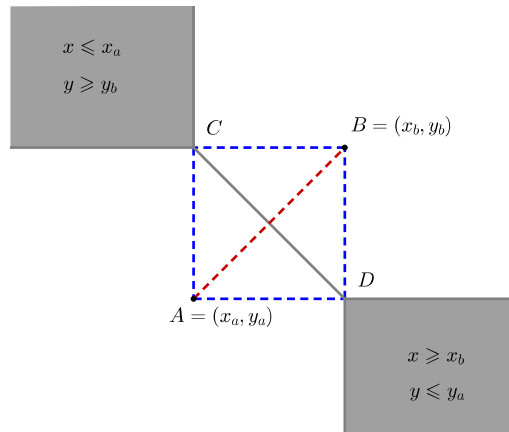


Figura 37 – Táxi-mediatrix para $m = 1$.

Para $m = -1$ a táxi-mediatrix é uma rotação da anterior, podendo ser determinada algebricamente de modo análogo ao feito anteriormente para $m = 1$ (Figura 38).

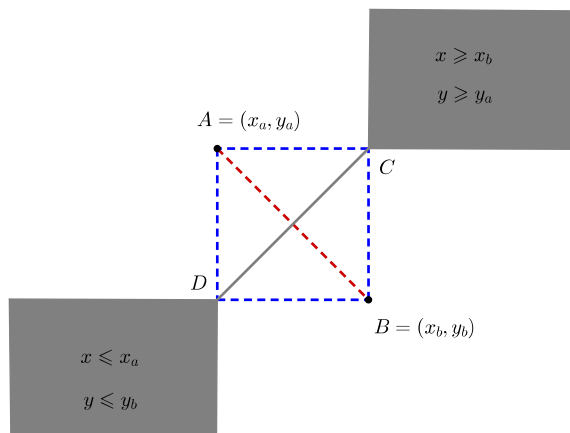


Figura 38 – Táxi-mediatrix para $m = -1$.

Pelas análises anteriores podemos caracterizar a táxi-mediatrix de um segmento com inclinação $|m| = 1$ com seguinte proposição:

Proposição 2.5. *A táxi-mediatrix de um segmento com inclinação $|m| = 1$ é formada pela união de um segmento de reta e dois quadrantes conforme os dois casos a seguir:*

- Se $m = 1$ a táxi-mediatrix é formada pelos quadrantes ($x \leq x_a, y \geq y_b$) e ($x \geq x_b, y \leq y_a$), e pelo segmento de reta $y = \frac{x_a + y_a + x_b + y_b}{2} - x$ para $x_a < x < x_b$.
- Se $m = -1$ a táxi-mediatrix é formada pelos quadrantes ($x \leq x_a, y \leq y_b$) e ($x \geq x_b, y \geq y_a$), e pelo segmento de reta $y = \frac{-x_a + y_a - x_b + y_b}{2} + x$ para $x_a < x < x_b$.

2.3 EXEMPLOS DO DIAGRAMA DE VORONOI NA MÉTRICA DO TÁXI

Conhecendo agora o comportamento da táxi-mediatrix para as diferentes inclinações de um segmento, pode-se pensar na seguinte questão: como será o diagrama de Voronoi para um conjunto de pontos dentro da métrica do Táxi? A resposta desta questão está relacionada ao comportamento da táxi-mediatrix.

Para ilustrar a construção do diagrama de Voronoi na métrica do Táxi serão apresentadas a seguir construções feitas a partir das interseções das táxi-mediatrizes, pode-se comparar estas construções com os diagramas apresentados no Capítulo 1.

Exemplo 1: A construção a seguir considera três pontos no plano e as inclinações m entre os pontos, sendo $|m| \neq 1$.

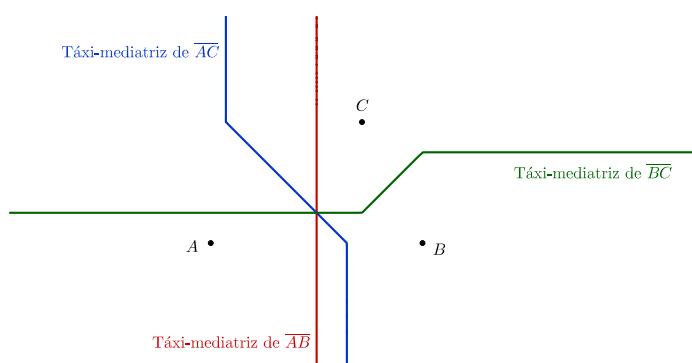


Figura 39 – Táxi-mediatrizes dos três segmentos.

Observe que o ponto de interseção das três táxi-mediatrizes será um *vértice* do diagrama. Para determinar as regiões de influência para os três pontos basta eliminar parte das táxi-mediatrizes que *invadem* as regiões de influência dos pontos (Figura 39). Para a região de influência do ponto A , basta eliminar parte da táxi-mediatrix de \overline{BC} , na região de influência do ponto B , basta eliminar parte da táxi-mediatrix de \overline{AC} , e, para a região de influência de C , basta eliminar parte da táxi-mediatrix de \overline{AB} . A Figura 40 será o diagrama de Voronoi para os três pontos na métrica do Táxi.

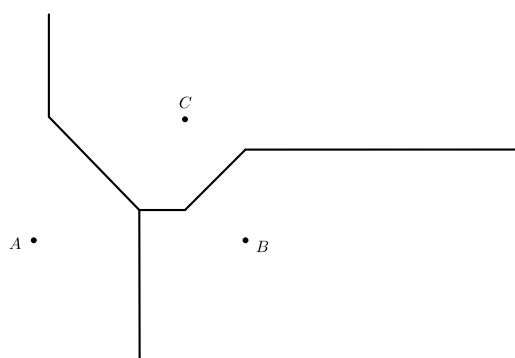


Figura 40 – Diagrama de Voronoi para os três pontos na métrica do Táxi.

Exemplo 2: A construção a seguir considera quatro pontos no plano e as inclinações m entre os pontos, sendo $|m| \neq 1$.

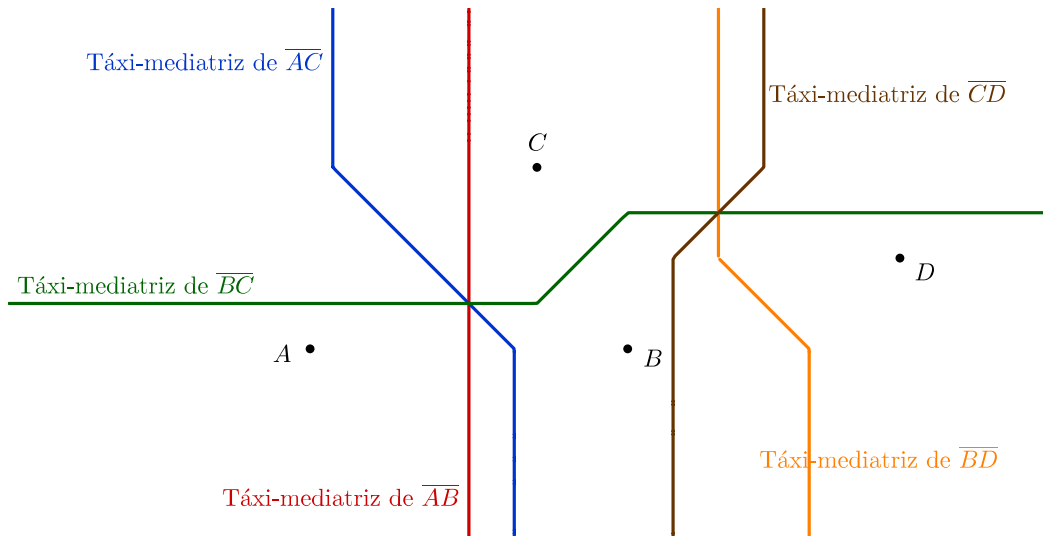


Figura 41 – Táxi-mediatrizes dos segmentos.

Por um processo de eliminação semelhante ao anterior (ver Figura 61), tem-se o diagrama de Voronoi para os quatro pontos na métrica do Táxi (Figura 62).

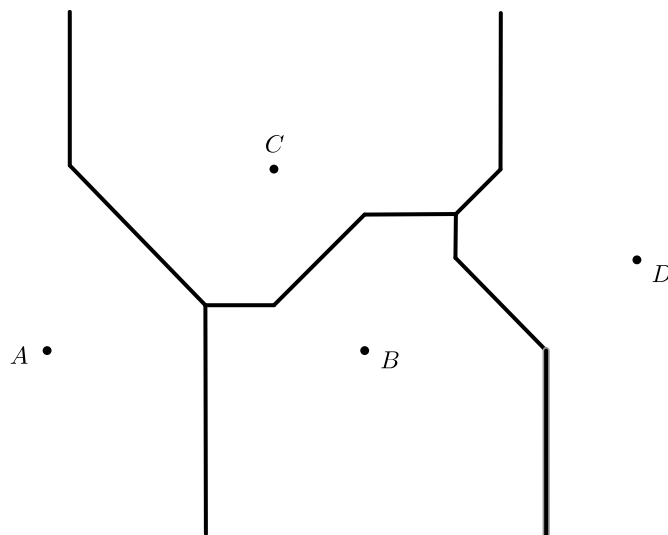


Figura 42 – Diagrama de Voronoi para os quatro pontos na métrica do Táxi.

Exemplo 3: A próxima construção traz alguns segmentos onde a inclinação é $|m| = 1$. Como visto anteriormente estas táxi-mediatrizes não são formadas apenas por semirretas e segmentos de reta, como mostrado na seção anterior. Observe na Figura 43 em azul a táxi-mediatriz de \overline{AC} , em cinza de táxi-mediatriz de \overline{BC} são formadas por dois quadrantes e um segmento de reta.

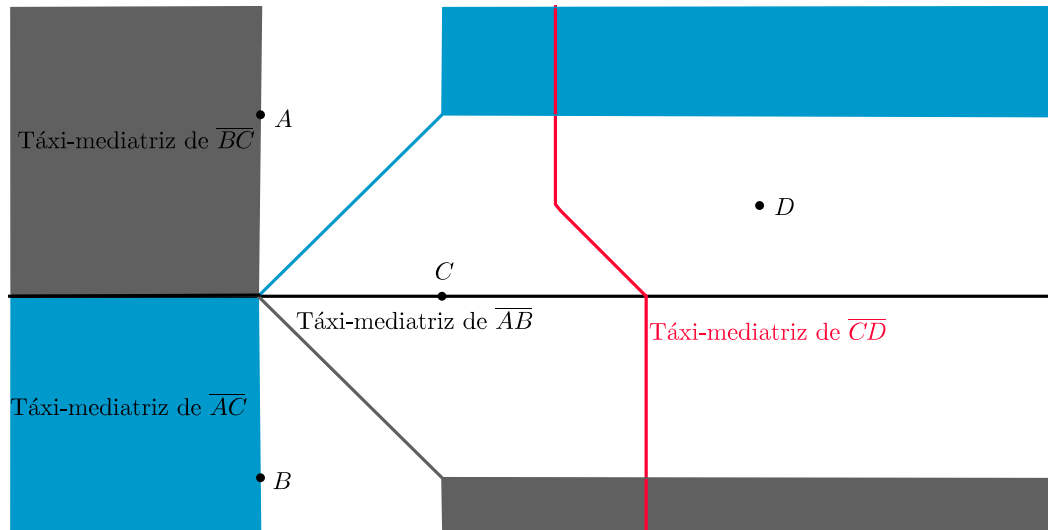


Figura 43 – Táxi-mediatrixes.

Nos dois quadrantes que se intersectam na táxi-mediatrix de \overline{AB} observe que a parte em cinza está contida na região de influência de A pois estes pontos estão acima da táxi-mediatrix de \overline{AB} . De modo análogo a parte em azul está contida na região de influência de B pois estes pontos estão a baixo da táxi-mediatrix de \overline{AB} , portanto estão mais próximos de B do que A . A mesma análise pode ser feita para as outras interseções entre as táxi-mediatrixes. O diagrama final está representado na Figura 44.

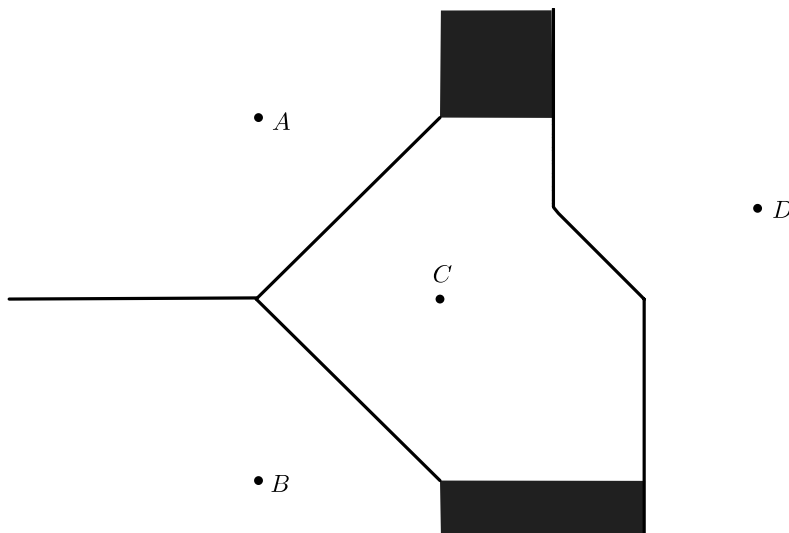


Figura 44 – Diagrama de Voronoi na métrica do Táxi.

A partir do exemplo anterior percebe-se que o diagrama de Voronoi na métrica do Táxi tem um comportamento diferente da métrica Euclidiana, não sendo formado apenas por retas.

3 REPRESENTAÇÃO DAS REGIÕES DE INFLUÊNCIA DO DIAGRAMA DE VORONOI USANDO GEOGEBRA

Neste Capítulo serão apresentadas construções, para as regiões de influência do diagrama de Voronoi, nas distâncias euclidiana e do táxi, utilizando o GeoGebra. O programa traz uma ferramenta para a construção do diagrama para um conjunto de pontos dados, considerando apenas a distância euclidiana entre os pontos. As construções apresentadas não usam esta ferramenta, e podem ser aplicadas a outras métricas. Inicialmente serão apresentados os conceitos geométricos usados para a elaboração das construções.

3.1 CONSTRUÇÃO DAS MEDIATRIZES POR CIRCUNFERÊNCIAS

Partindo da definição de lugar geométrico da circunferência podemos considerar o seguinte fato: tomando como raio um valor maior que a metade da distância entre os dois pontos, podemos construir duas circunferências, de mesmo raio e centro em cada um dos pontos. Os pontos de interseção dessas circunferências estão a mesma distância de A e B portanto determinam a reta mediatriz (ver Figura 45).

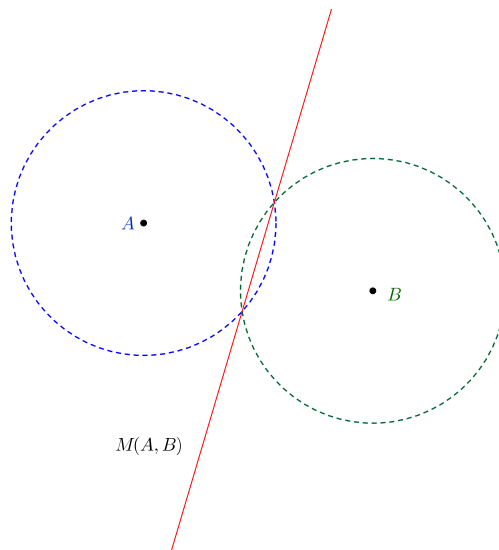


Figura 45 – Construção da mediatriz através de duas circunferências de mesmo raio.

Usando o mesmo raciocínio da construção anterior podemos considerar o seguinte fato: dado um conjunto de pontos escolhendo-se um raio maior que a metade da maior distância possível entre dois pontos quaisquer do conjunto, pode-se construir circunferências com este raio e centro em cada um dos pontos. Os pontos de interseção das circunferências determinam as mediatrizes que permitirão dividir o plano nas regiões de influência do diagrama de Voronoi para o conjunto de pontos dados.

Após a construção destas mediatrizes basta eliminar a parte das mediatrizes que invadem as outras regiões de influência. A Figura 46 mostra o diagrama de Voronoi resultante desta construção.

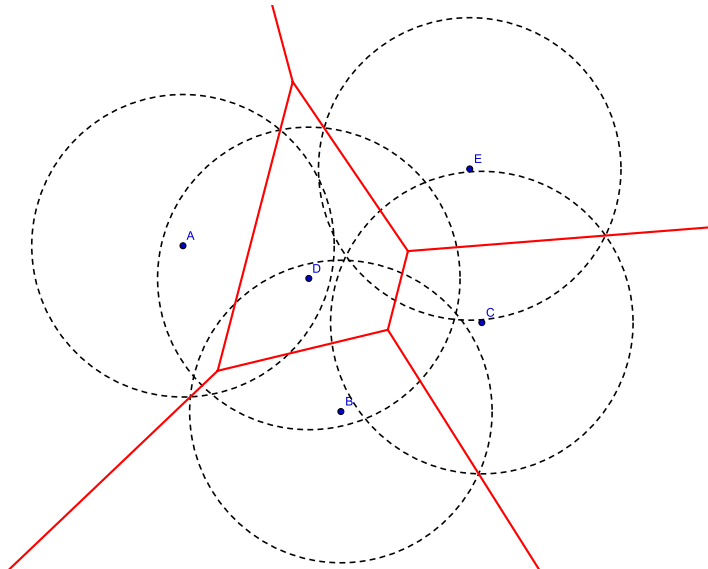


Figura 46 – Diagrama por meio das mediatrizes, construídas por circunferências.

A Figuras 46 ilustra um modo de construção do diagrama de Voronoi por meio de desenho, que pode ser feito apenas com régua e compasso, ou utilizando-se recursos de construção do GeoGebra:

1. Escolher como raio um valor maior que a metade da maior distância possível entre dois pontos quaisquer do conjunto.
2. Traçar as circunferências.
3. Traçar as mediatrizes.
4. Eliminar parte das mediatrizes que invadem as regiões de influência.

3.1.1 REGIÕES DE INFLUÊNCIA E CIRCUNFERÊNCIAS

Observe que se um ponto P pertence a região de influência de A , se este ponto P pertencer a interseção de duas circunferências, uma de centro em A e outra de centro em B , o raio da circunferência de centro em A será menor do que o raio da circunferência de centro em B (veja Figura 47).

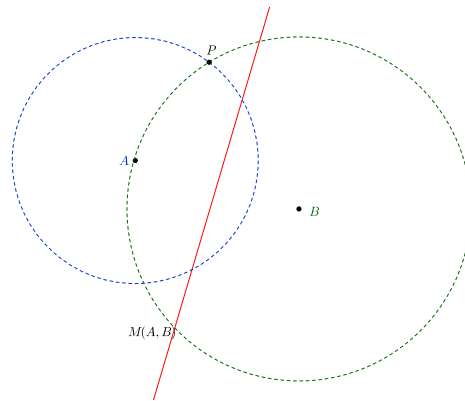


Figura 47 – Ponto P que pertence a região de influência de A .

A partir desse fato, considerando-se dois pontos A e B no plano, pode-se concluir o seguinte: se escolhermos um raio inicial suficientemente grande para circunferências com centros fixos em A e B , e formos diminuindo este raio continuamente, até zero, inicialmente os pontos pertencentes a região de influência de A podem ser atingidos por circunferências de centro em B ou em A , mas conforme o raio for diminuindo apenas os pontos da região de influência de A serão atingidos pelas circunferências de centro em A (veja Figura 48).

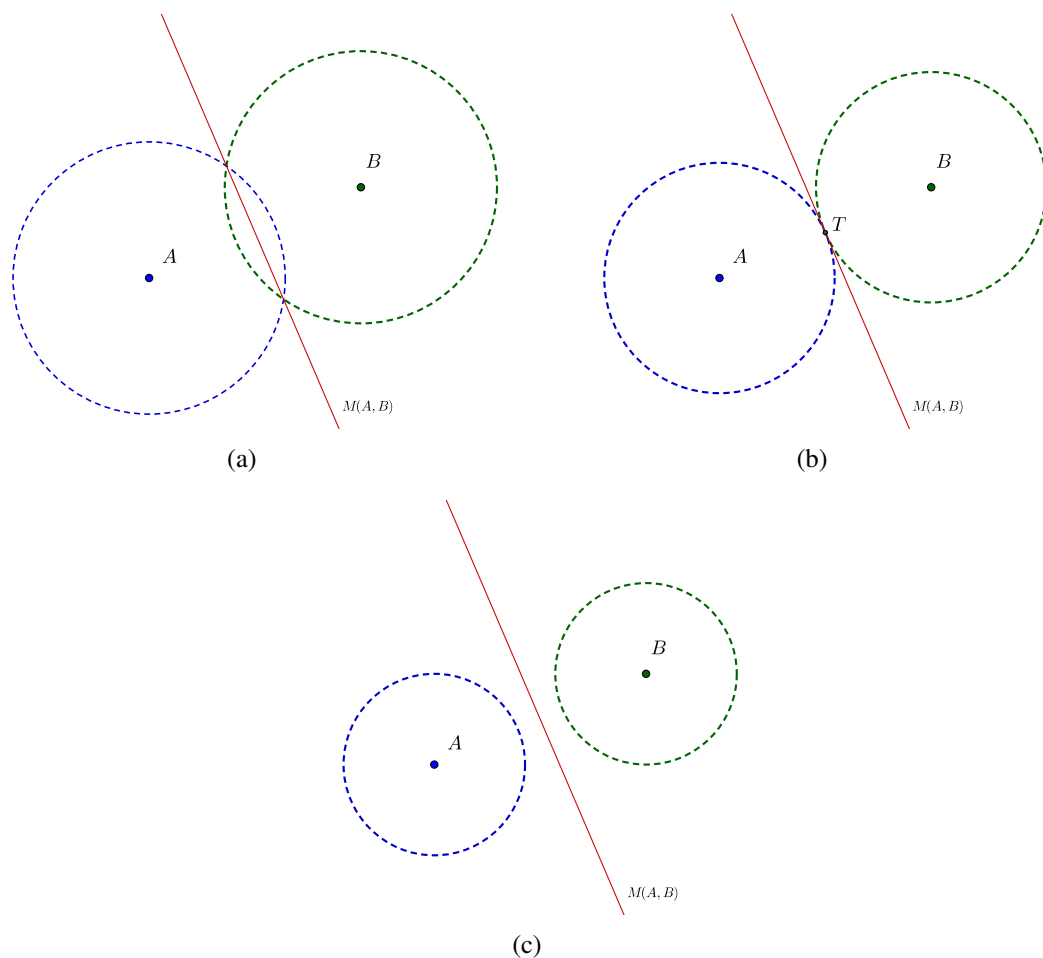


Figura 48 – Ajustes para implementação da animação.

3.2 REPRESENTAÇÃO DAS REGIÕES DE INFLUÊNCIA DO DIAGRAMA DE VORONOI NA MÉTRICA EUCLIDIANA

As ideias apresentadas anteriormente podem ser implementadas usando o GeoGebra para produzir uma animação que gera uma representação das regiões de influência do diagrama de Voronoi.

A Figura 49 ilustra uma animação feita com software de geometria dinâmica GeoGebra. A animação foi feita conforme os passos:

1. Determinação dos pontos de influência A e B .
2. Criação do controle deslizante r responsável pela variação do raio das circunferências.
3. Construção dos círculos de centro em A e B e raio r .

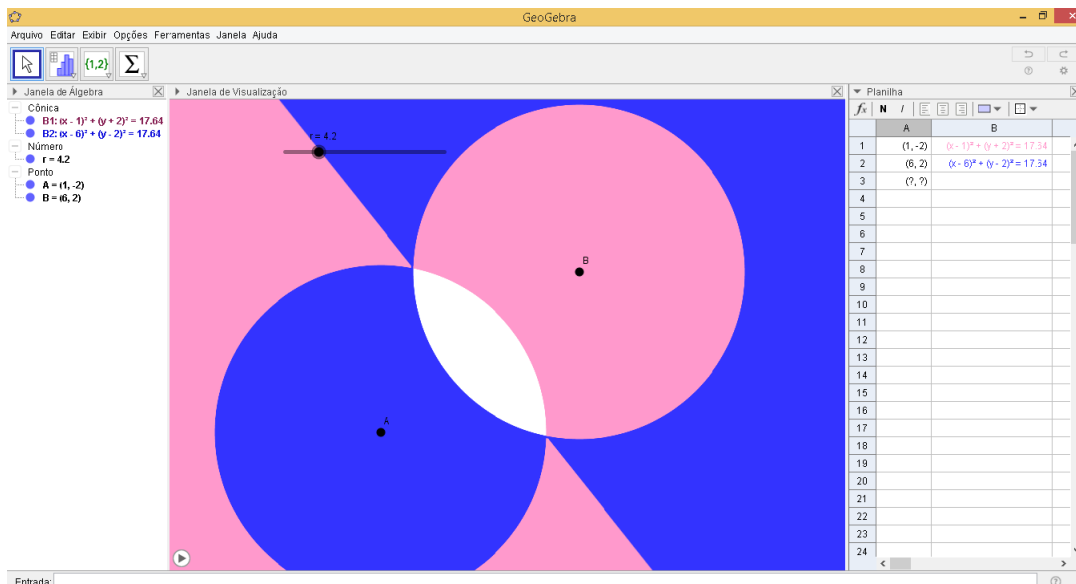


Figura 49 – Regiões de Voronoi para dois pontos: construção intermediária.

Após a construção de todas as circunferências a Figura 50 traz o resultado final da animação:

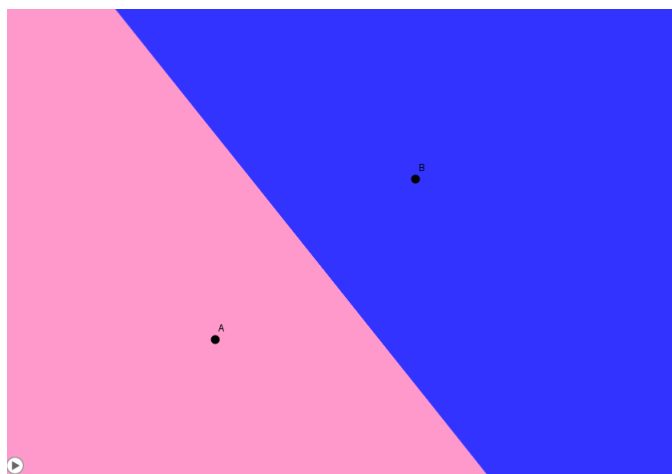


Figura 50 – Regiões de Voronoi para dois pontos.

A partir das considerações anteriores, pode-se criar um tipo de animação para um conjunto maior de pontos, como a criada para dois pontos, onde ficarão definidas as regiões delimitadas por cada célula de Voronoi. Na construção apresentada a seguir há uma descrição das etapas da animação feita para os pontos de coordenadas $A = (1, 0)$, $B = (0, 4)$, $C = (4, 7)$, $D = (12, 6)$, $E = (4, 4)$, $F = (9, 3)$, $G = (10, 0)$, e $H = (15, 1)$.

Na Figura 51, o controle deslizante será responsável pela criação das circunferências que geram as regiões de influência do diagrama final.

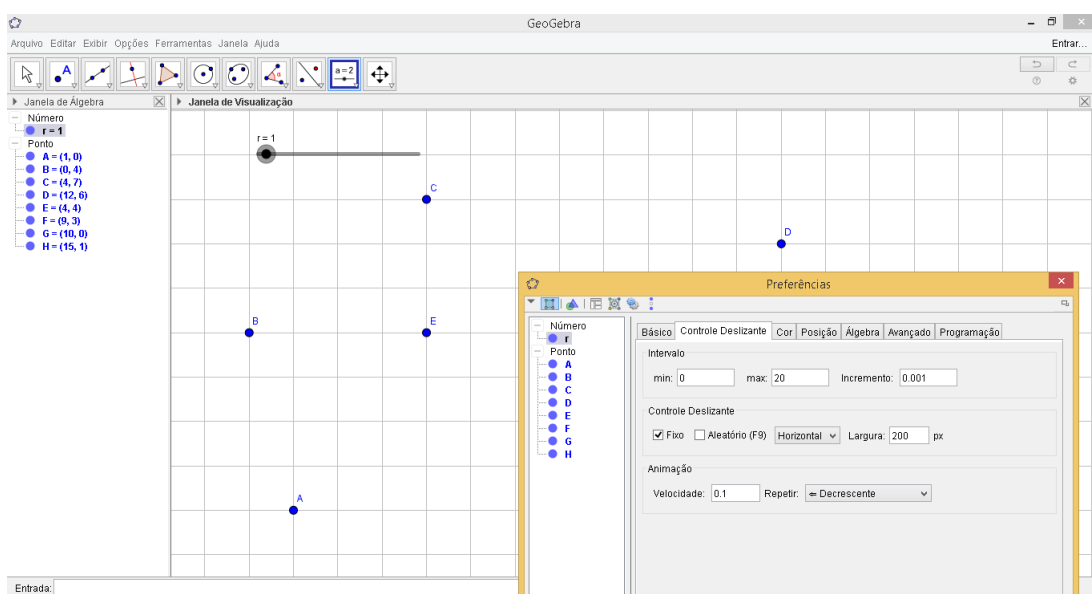


Figura 51 – Representação dos pontos e implementação do controle deslizante.

A Figura 52 mostra como utilizar o recurso da planilha para a criação das circunferências de centro nos pontos iniciais.

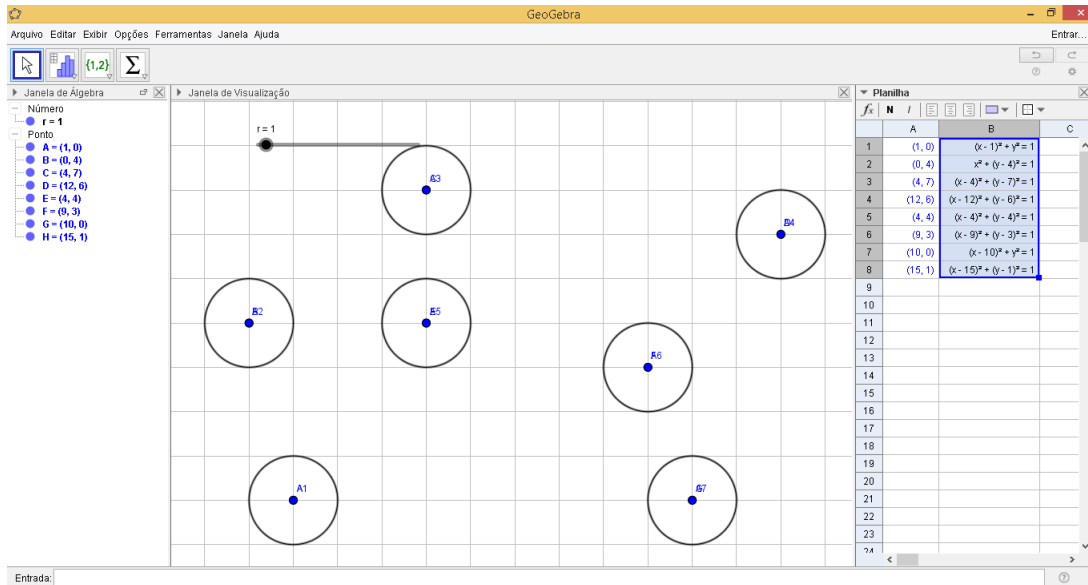


Figura 52 – Equações das circunferências com centro em A1, A2, ..., A8 e raio r .

A implementação das cores dinâmicas (ver Figura 53) facilita a criação de uma animação com muitos pontos.

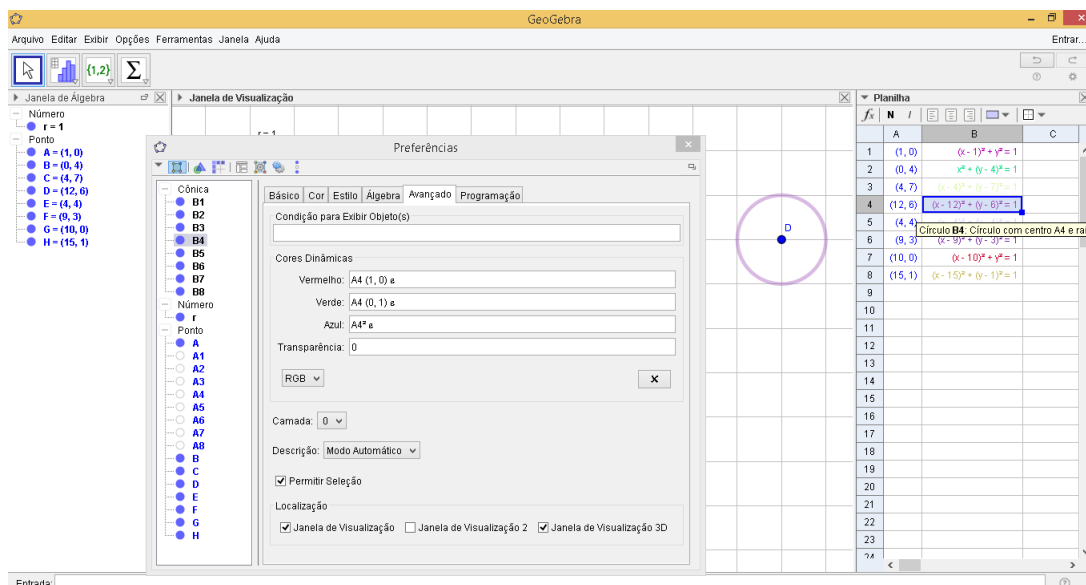


Figura 53 – Implementação das cores dinâmicas.

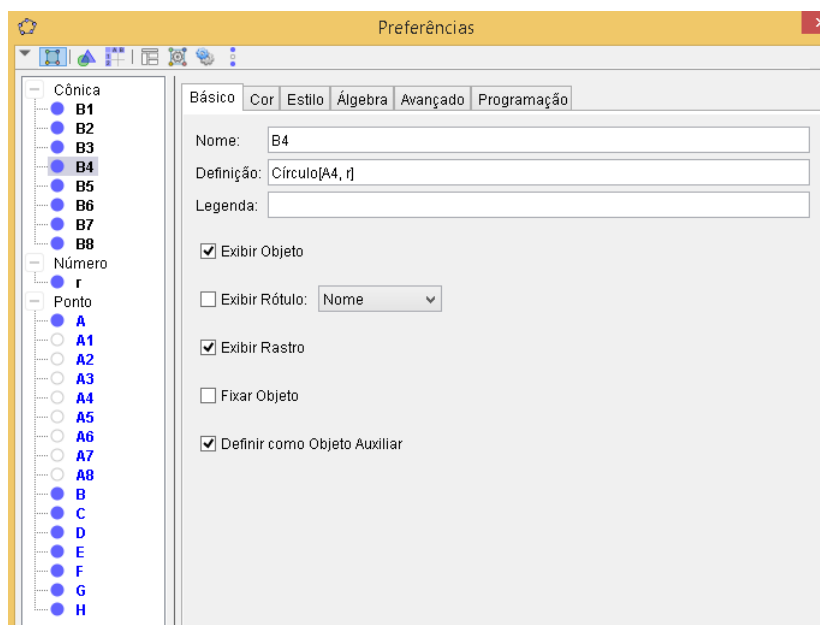


Figura 54 – Escolha da opção *exibir rastro*.

Para que os círculos gerem as regiões de influência do diagrama final é preciso ainda configurar todas as cônicas para que *exibam seu rastro* (ver Figura 54), e fazer a definição da sua transparência, observe a Figura 55:

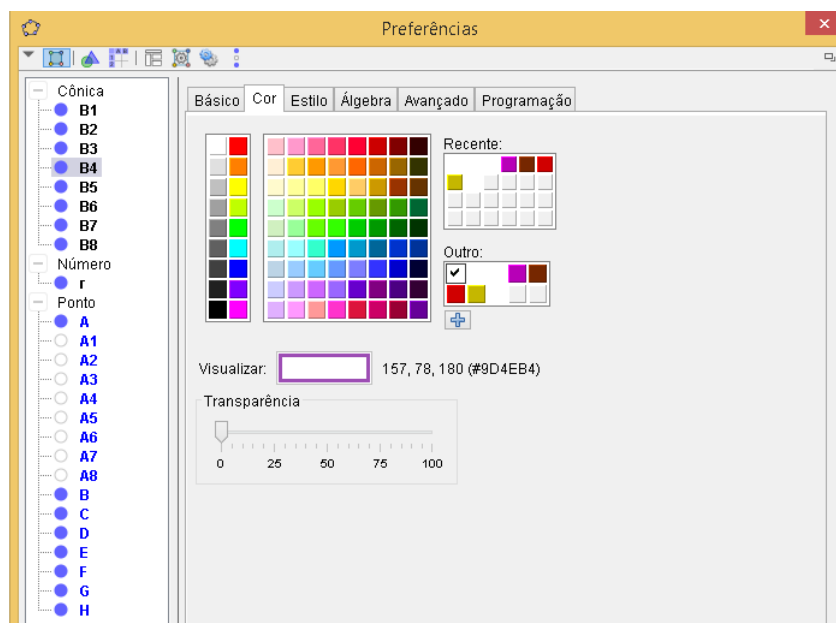
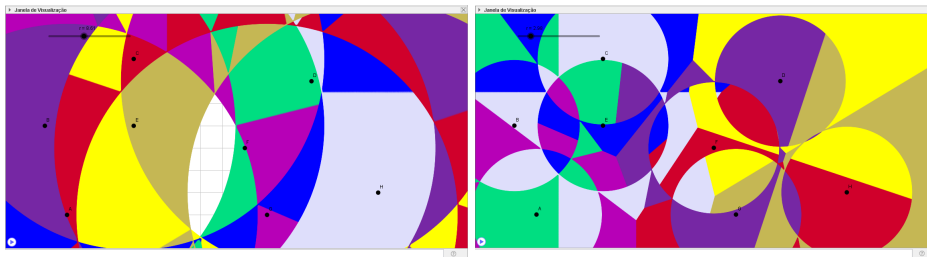
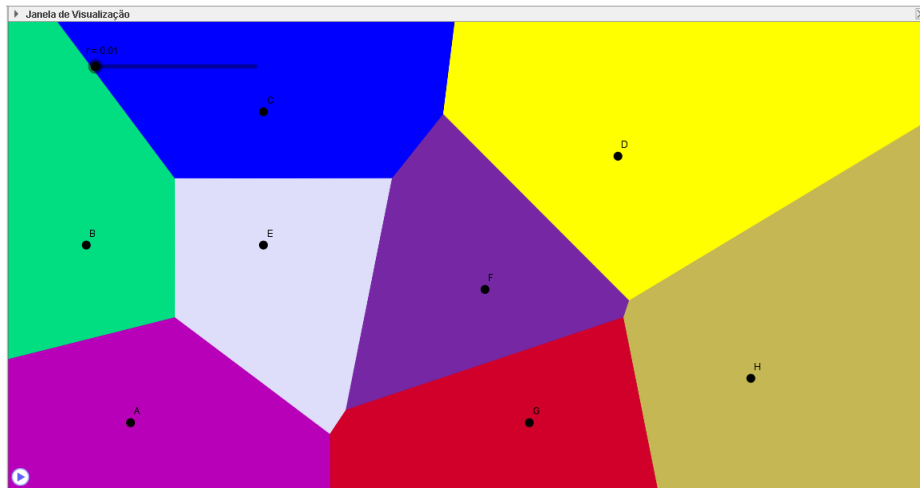


Figura 55 – Definição da transparência dos círculos para que apareçam as circunferências.

A próxima Figura 56 tem duas etapas da implementação e o resultado final da animação:



(a) Resultado da animação para r variando de 20 até 8, 61. (b) Resultado da animação para r variando de 8, 61 até 2, 98.



(c) Resultado final da animação.

Figura 56 – Diferentes fases da animação feita por circunferências.

Este tipo de animação nos fornece apenas uma representação das células do diagrama de Voronoi, pois quando há um *distanciamento* da região do plano que contém os pontos iniciais, percebe-se que estas circunferências criadas na animação não formam as células do diagrama para todo o plano, observe a Figura 57.

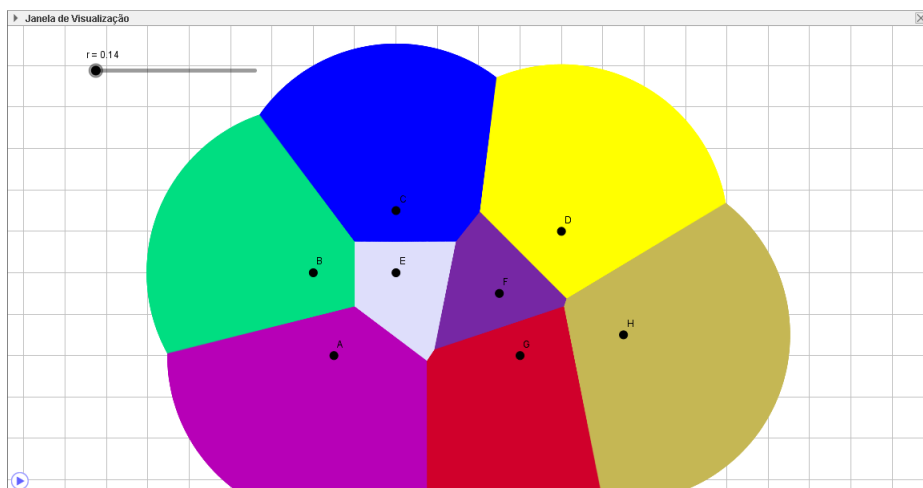


Figura 57 – Resultado final da animação.

3.3 REPRESENTAÇÃO DO DIAGRAMA DE VORONOI NA MÉTRICA DO TÁXI DO TÁXI

A representação do diagrama de Voronoi na métrica do táxi, segue o mesmo raciocínio das construções apresentadas na seção anterior, só que agora utilizando táxi-circunferências. As animações construídas serão baseadas na construção das táxi-circunferências por meio de segmentos de reta, que no final da animação, para dois ou mais pontos, gera a região de influência de cada ponto. Uma sequência para esta construção utilizando GeoGebra é apresentada a seguir:

1. Escolha dos pontos de influência que determinarão os centros das táxi-circunferências.
2. Inclusão de um controle deslizante (r por exemplo) que fará a variação do raio.
3. Determinação dos pontos de coordenadas $P_1 = (x_p + r, y_p)$, $P_2 = (x_p, y_p + r)$, $P_3 = (x_p - r, y_p)$ e $P_4 = (x_p, y_p - r)$, pois são estes os vértices do quadrado que representa a táxi-circunferência de centro (x_p, y_p) .
4. Construção dos segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$ e $\overline{P_4P_1}$, sendo estes segmentos os lados do quadrado que gera a táxi-circunferência.

Para os passos 3 e 4 a utilização da planilha facilita a localização dos vértices da táxi-circunferência e, logo após, a construção dos segmentos que formam os lados da táxi-circunferência.

A Figura 59 traz a construção da táxi-mediatriz usando as táxi-circunferências para a inclinação de \overline{AB} positiva:

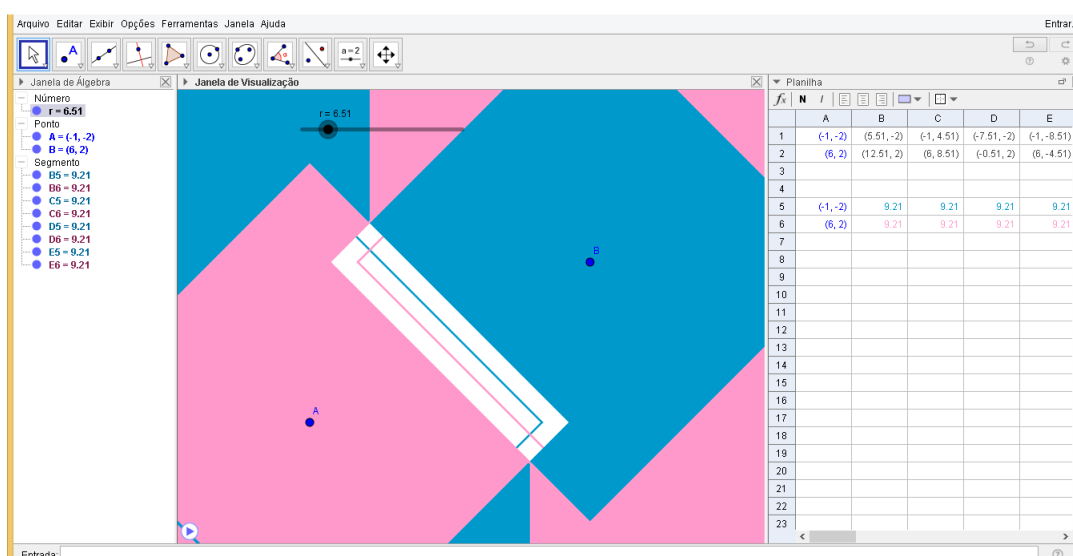


Figura 58 – Construção intermediária: regiões de influência para os pontos A e B .

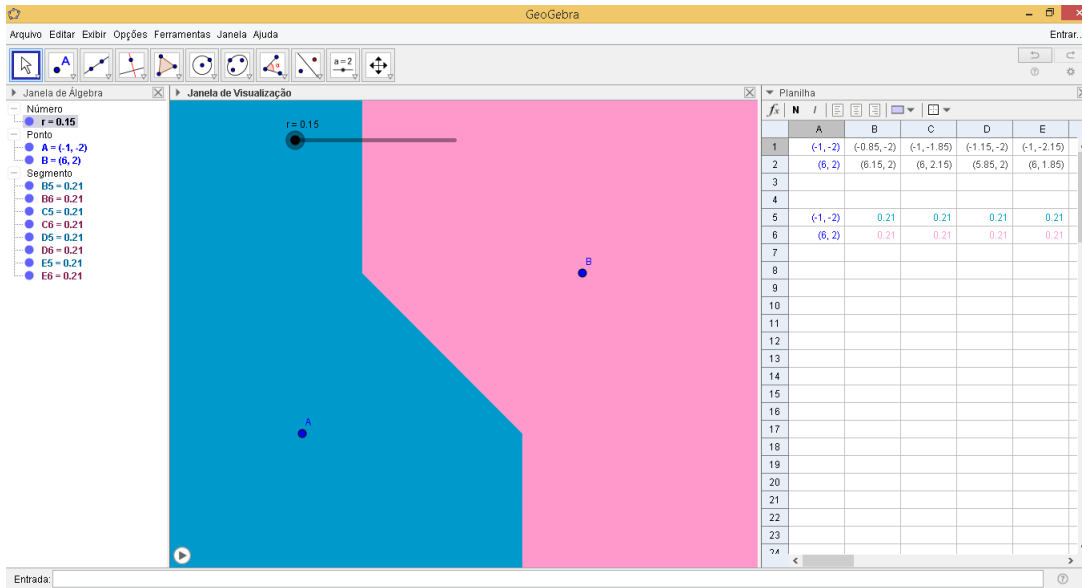


Figura 59 – Regiões de influência para os pontos A e B .

Se a inclinação m de \overline{AB} é tal que $|m| = 1$, a representação da táxi-mediatrix divide o plano em quatro regiões. Observe na Figura 60 que duas das regiões estão representadas pela mesma cor cinza que corresponde a mistura das cores escolhidas para as táxi-circunferências de , estas regiões são os quadrantes que pertencem a táxi-mediatrix quando a inclinação de \overline{AB} é $m = -1$.

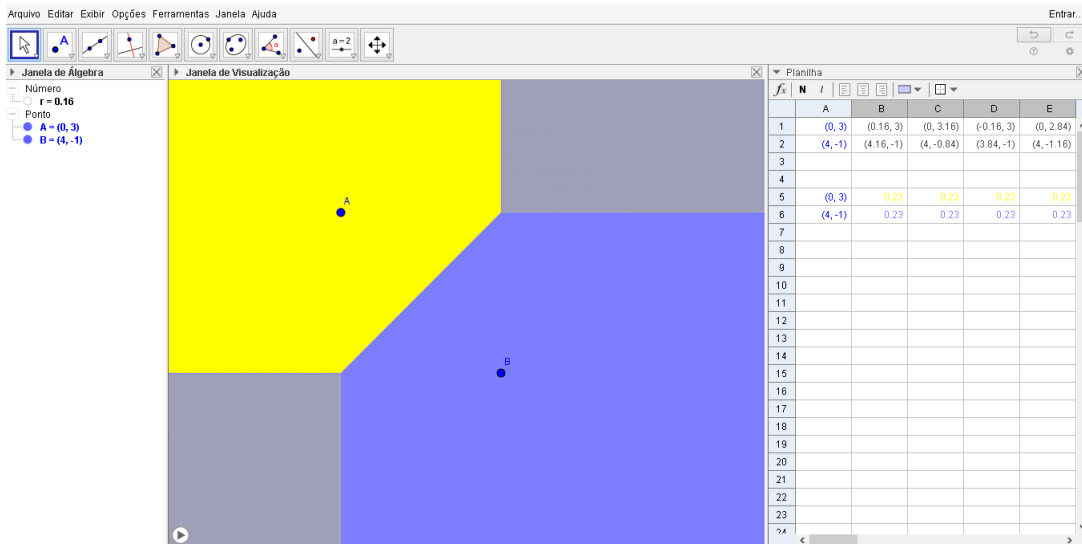


Figura 60 – Regiões de influência quando a inclinação de \overline{AB} é -1 .

Assim, a região que contém os pontos que estão a menor distância do ponto A , por exemplo, é a região colorida em amarelo e analogamente a região em azul contém os pontos que estão a menor distância de B . Os quadrantes em cinza e a reta que separa as regiões coloridas em amarelo e azul representam a táxi-mediatrix de \overline{AB} , que contém os pontos que estão a mesma táxi-distância dos pontos A e B .

Considerando as animações anteriores onde as regiões de influência no diagrama de Voronoi para dois pontos no plano, dentro da métrica do táxi, foram construídas por táxi-circunferências pode-se pensar em um processo semelhante para construir as regiões de influência do diagrama para mais pontos.

Para ilustrar o problema observe a construção, apresentada na Figura 61, feita para os seguintes pontos: $A = (2, 2)$, $B = (4, 4)$, $C = (10, 4)$ e $D = (13, 9)$.

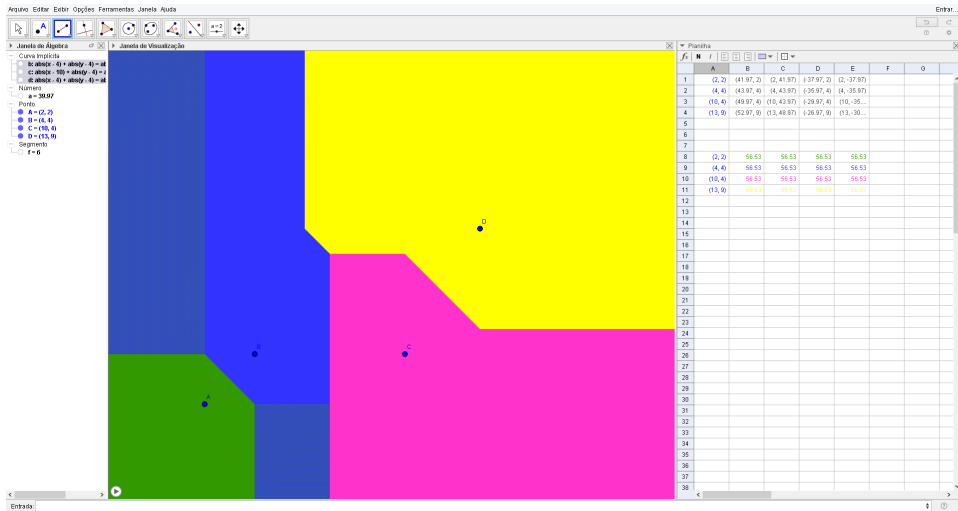


Figura 61 – Animação com táxi-circunferências para determinação das regiões de influência.

Na Figura 62 a táxi-mediatrix de \overline{AB} foi destacada em cinza. Estas regiões contêm os pontos que estão a mesma do ponto A e B

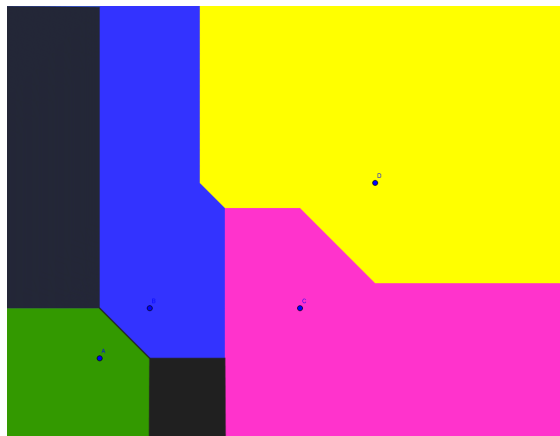


Figura 62 – Regiões de influência determinadas pelas táxi-mediatrixes.

Os processos de construção das regiões de influência do diagrama de Voronoi utilizando-se o Geogebra, apresentados neste Capítulo, permitem a visualização das regiões de influência do diagrama nas duas métricas utilizando-se de conceitos simples da Geometria Plana.

4 PROPOSTAS DE ATIVIDADES

A seguir são apresentadas algumas sugestões de atividades para o Ensino Médio relacionadas ao diagrama de Voronoi, envolvendo conceitos de Geometria Analítica e Plana (DELGADO; FRENSEL; CRISAF, 2013).

4.1 DIAGRAMA DE VORONOI PARA TRÊS PONTOS NO PLANO A PARTIR DA EQUAÇÃO DA RETA

Esta seção busca responder o seguinte problema: Como encontrar as equações das semirretas que correspondentes ao diagrama de Voronoi para três pontos sendo conhecidas suas coordenadas cartesianas no plano? Serão usados conceitos como a equação da reta por meio da inclinação e ortogonalidade de vetores. Para ilustrar inicialmente o problema, irá se determinar as semirretas que formarão o diagrama de Voronoi para os seguintes pontos: $A = (1, 6)$, $B = (7, 10)$ e $C = (11, 2)$.

Solução usando a inclinação da reta:

Inicialmente irá se determinar uma das equações das retas que passam pelos segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} . As retas mediatrizes procuradas passam pelos pontos médios desses segmentos e são perpendiculares a eles. Por este fato irá se determinar as equações dessas retas a partir do seu coeficiente angular, pois sejam m_1 e m_2 os coeficientes angulares das retas que passam por cada segmento e da sua respectiva mediatriz tem-se que $m_1 \cdot m_2 = -1$.

i) Determinação equação da mediatriz de \overline{AB} :

Primeiro irá se calcular o coeficiente angular da reta que passa por \overline{AB} :

$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{10 - 6}{7 - 1} = \frac{2}{3}$$

Como $m_1 \cdot m_2 = -1$ tem-se:

$$\frac{2}{3} \cdot m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = -\frac{3}{2}$$

A reta procurada passa pelo ponto médio de \overline{AB} :

$$M_{\overline{AB}} = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(\frac{1 + 7}{2}, \frac{6 + 10}{2} \right) = (4, 8)$$

A equação da reta mediatriz passa pelo ponto $(4, 8)$ e tem coeficiente angular $-\frac{3}{2}$ é:

$$\begin{aligned}y - 8 &= -\frac{3}{2}(x - 4) \\2y - 16 &= -3x + 12 \\3x + 2y &= 28\end{aligned}$$

Logo a reta $r_1 : 3x + 2y = 28$ é a mediatriz de \overline{AB} .

ii) *Determinação equação da mediatriz de \overline{BC} :*

Primeiro irá se calcular o coeficiente angular da reta que passa por \overline{BC} :

$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_c - y_b}{x_c - x_b} = \frac{2 - 10}{11 - 7} = -2$$

Como $m_1 \cdot m_2 = -1$ tem-se:

$$-2 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = \frac{1}{2}$$

A reta procurada passa pelo ponto médio de \overline{BC} :

$$M_{\overline{BC}} = \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} \right) = \left(\frac{7 + 11}{2}, \frac{10 + 2}{2} \right) = (9, 6)$$

A equação da reta mediatriz passa pelo ponto $(9, 6)$ e tem coeficiente angular $\frac{1}{2}$ é:

$$\begin{aligned}y - 6 &= \frac{1}{2}(x - 9) \\2y - 12 &= x - 9 \\x - 2y &= -3\end{aligned}$$

Logo a reta $r_2 : x - 2y = -3$ é a mediatriz de \overline{BC} .

iii) *Determinação equação da mediatriz de \overline{AC} :*

Primeiro irá se calcular o coeficiente angular da reta que passa por \overline{AC} :

$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_c - y_a}{x_c - x_a} = \frac{2 - 6}{11 - 1} = -\frac{2}{5}$$

Como $m_1 \cdot m_2 = -1$ tem-se:

$$-\frac{2}{5} \cdot m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = \frac{5}{2}$$

A reta procurada passa pelo ponto médio de \overline{AC} :

$$M_{\overline{AC}} = \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2} \right) = \left(\frac{1 + 11}{2}, \frac{6 + 2}{2} \right) = (6, 4)$$

A equação da reta mediatriz passa pelo ponto $(6, 4)$ e tem coeficiente angular $\frac{5}{2}$ é:

$$y - 4 = \frac{5}{2}(x - 6)$$

$$2y - 8 = 5x - 30$$

$$5x - 2y = 22$$

Logo a reta $r_2 : 5x - 2y = 22$ é a mediatriz de \overline{AC} .

4.2 DIAGRAMA DE VORONOI PARA TRÊS PONTOS POR ORTOGONALIDADE DE VETORES

A solução apresentada a seguir considera os mesmos pontos do exemplo anterior, usado agora a ortogonalidade de vetores.

Solução:

Inicialmente irá se determinar as equações paramétricas das retas mediatrizes dos segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} . Essas mediatrizes serão perpendiculares aos vetores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} e \overrightarrow{AC} , e o ponto médio determinado pelas extremidades de cada vetor também pertencerá a respectiva mediatriz.

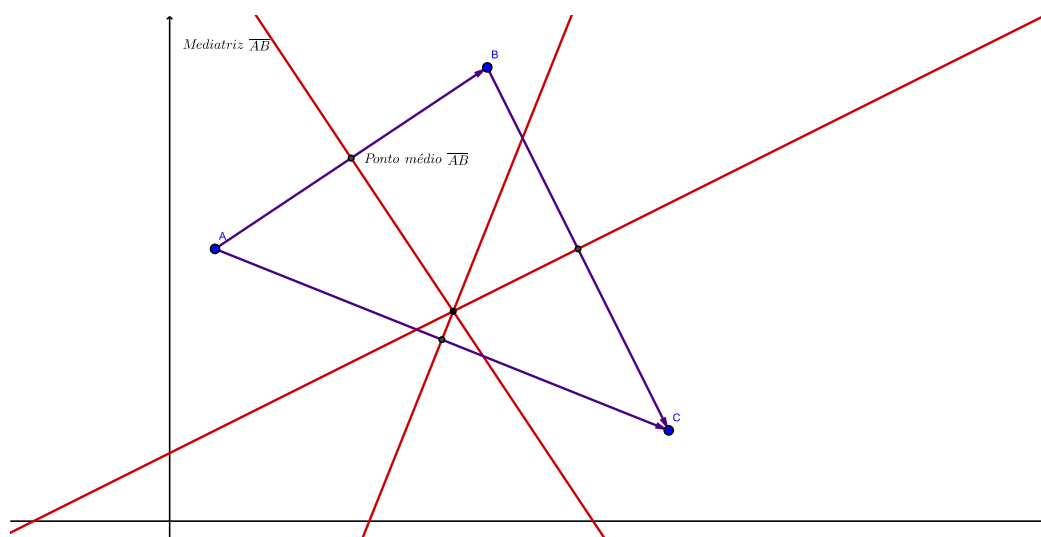


Figura 63 – Retas mediatrizes para três pontos no plano.

i) Determinação da mediatriz de \overline{AB} :

Pela definição de reta mediatriz, a mediatriz de \overline{AB} , é perpendicular ao vetor \overrightarrow{AB} e passa pelo ponto médio de \overline{AB} . A equação da paramétrica da mediatriz pode ser determinada a partir

desse fato: seja r_1 a reta que passa pelo ponto médio de \overline{AB} , que tem coordenadas $M_1 = (4, 8)$, e é perpendicular a $\overrightarrow{AB} = (7 - 1, 10 - 6) = (6, 4)$ será formada pelos pontos P tais que:

$$P = (x, y) \in r_1 \iff \overrightarrow{M_1P} \perp \overrightarrow{AB}$$

Para que isso ocorra o produto interno entre $\overrightarrow{M_1P}$ e \overrightarrow{AB} deve ser zero:

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{M_1P}, \overrightarrow{AB} \rangle &= 0 \\ \langle (x - 4, y - 8), (6, 4) \rangle &= 0 \\ 6(x - 4) + 4(y - 8) &= 0 \\ 6x - 24 + 4y - 32 &= 0 \\ 6x + 4y &= 56 \\ 3x + 2y &= 28 \end{aligned}$$

Logo a reta $r_1 : 3x + 2y = 28$ é a mediatriz de \overline{AB} .

ii) *Determinação da mediatriz de \overline{BC} :*

A mediatriz de \overline{BC} é perpendicular ao vetor \overrightarrow{BC} e passa pelo ponto médio de \overline{BC} . Seja r_2 a reta que passa pelo ponto médio de \overline{BC} , que tem coordenadas $M_2 = (9, 6)$, e é perpendicular a $\overrightarrow{BC} = (11 - 7, 2 - 10) = (4, -8)$ será formada pelos pontos P tais que:

$$P = (x, y) \in r_2 \iff \overrightarrow{M_2P} \perp \overrightarrow{BC}$$

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{M_2P}, \overrightarrow{BC} \rangle &= 0 \\ \langle (x - 9, y - 6), (4, -8) \rangle &= 0 \\ 4(x - 9) + (-8)(y - 6) &= 0 \\ 4x - 36 - 8y + 48 &= 0 \\ 4x - 8y &= -12 \\ x - 2y &= -3 \end{aligned}$$

Logo a reta $r_2 : x - 2y = -3$ é a mediatriz de \overline{BC} .

iii) *Determinação da mediatriz de \overline{AC} :*

A mediatriz de \overline{AC} passa pelo ponto médio de \overline{AC} e é perpendicular ao vetor \overrightarrow{AC} . Seja r_3 a reta que passa pelo ponto médio de \overline{AC} , que tem coordenadas $M_3 = (6, 4)$, e é perpendicular a $\overrightarrow{AC} = (11 - 1, 2 - 6) = (10, -4)$ será formada pelos pontos P tais que:

$$P = (x, y) \in r_3 \iff \overrightarrow{M_3P} \perp \overrightarrow{AC}$$

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{M_3P}, \overrightarrow{AC} \rangle &= 0 \\ \langle (x-6, y-4), (10, -4) \rangle &= 0 \\ 10(x-6) + (-4)(y-4) &= 0 \\ 10x - 60 - 4y + 16 &= 0 \\ 10x - 4y &= 44 \\ 5x - 2y &= 22 \end{aligned}$$

Logo a reta $r_3 : 5x - 2y = 22$ é a mediatriz de \overline{AC} .

Para encontrar as coordenadas do vértice de Voronoi basta determinar $r_1 \cap r_2 \cap r_3$ que será a solução do sistema linear formado pelas três retas:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 28 \\ x - 2y = -3 \\ 5x - 2y = 22 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema formado pelas duas primeiras equações:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 28 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

Adicionando estas equações tem-se $3x + 2y + x - 2y = 28 + (-3)$ o que implica que $x = \frac{25}{4}$. Substituindo na segunda equação tem-se $y = \frac{37}{8}$. Como o ponto $(\frac{25}{4}, \frac{37}{8})$ também pertence a reta $5x - 2y = 22$, as suas coordenadas determinam o vértice de Voronoi.

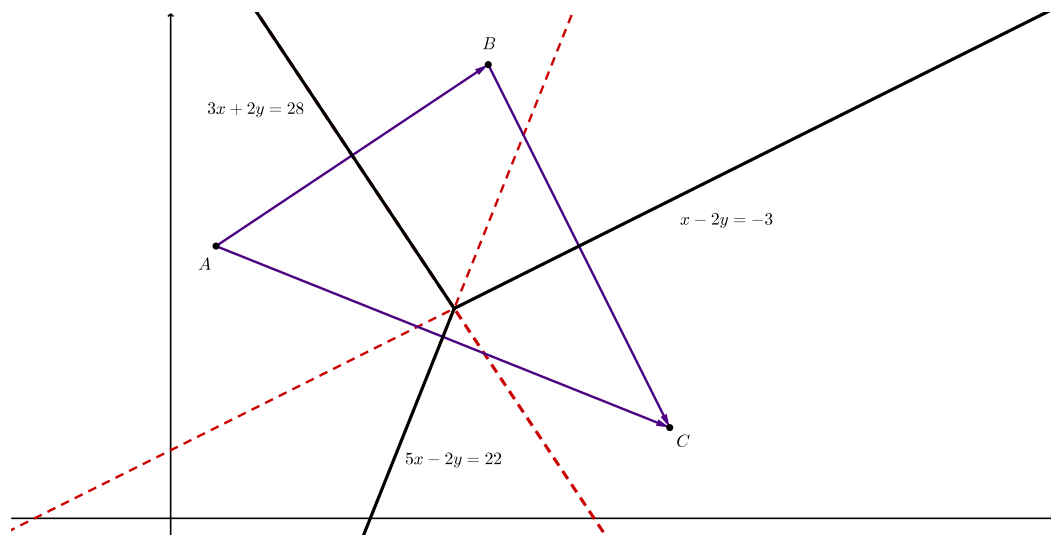


Figura 64 – Parte das mediatrizes que determinam o diagrama (em preto).

Como são segmentos de reta que determinam as arestas de Voronoi, tem-se ainda que definir qual *parte* de cada mediatriz determina o diagrama. O diagrama resultante aparece em preto na Figura 64.

4.3 ATIVIDADE NA MÉTRICA DO TÁXI

A sequência de atividades apresentadas a seguir foram baseadas em atividades sugeridas em (KRAUSE, 1986). O problema a seguir tem relação com os conceitos de retângulo básico e táxi-mediatriz.

Problema:

Um casal, que mora em uma cidade considerada ideal, está à procura de um apartamento. Alice trabalha em um parque de diversões que fica localizado em $A = (-3, -1)$. Bruno trabalha em uma padaria que fica localizada em $B = (3, 3)$, e os dois vão para o trabalho caminhando.

a) Em qual região devem procurar um apartamento para que esteja localizado em um ponto tal que a soma da distância ao trabalho de Alice com a distância ao trabalho de Bruno seja a menor possível?

Esse tipo de problema foi abordado no Capítulo 2, quando o conceito de retângulo básico foi apresentado. A soma da distância ao trabalho de Alice com a distância ao trabalho de Bruno será a menor possível em todos os pontos $P = (x, y)$ que satisfazem a igualdade $d_T(A, B) = d_T(A, P) + d_T(P, B)$, logo estamos procurando os pontos que solucionam $|x_a - x_b| + |y_a - y_b| = |x_a - x| + |y_a - y| + |x_b - x| + |y_b - y|$.

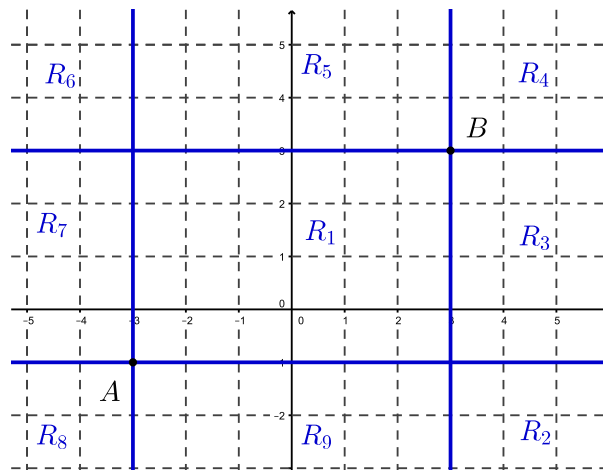


Figura 65 – Regiões determinadas pelas retas $x = -3$, $x = 3$, $y = -1$ e $y = 3$.

Substituindo as coordenadas de A e B em $|x_a - x_b| + |y_a - y_b| = |x_a - x| + |y_a - y| + |x_b - x| + |y_b - y|$ tem-se $10 = |-3 - x| + |-1 - y| + |3 - x| + |3 - y|$, para determinar as soluções serão analisadas as regiões R_1 , R_2 , R_3 , R_4 e R_5 , (observe a figura 65) como feita no Capítulo 2:

i) Para a região R_1 tem-se $-3 \leq x \leq 3$ e $-1 \leq y \leq 1$, a igualdade $10 = |-3 - x| + |-1 - y| + |3 - x| + |3 - y|$ será equivalente a:

$$\begin{aligned} 10 &= -(-3 - x) - (-1 - y) + (3 - x) + (3 - y) \\ 10 &= 3 + x + 1 + y + 3 - x + 3 - y \\ 0 &= 0x + 0y \end{aligned}$$

Logo todos os pontos onde $-3 \leq x \leq 3$ e $-1 \leq y \leq 1$ satisfazem a igualdade.

ii) Para a região R_2 tem-se $x > 3$ e $y < -1$, a igualdade $10 = |-3 - x| + |-1 - y| + |3 - x| + |3 - y|$ será equivalente a:

$$\begin{aligned} 10 &= -(-3 - x) + (-1 - y) - (3 - x) + (3 - y) \\ 10 &= 3 + x - 1 - y - 3 + x + 3 - y \\ 8 &= 2x - 2y \\ x - 3 &= y + 1 \end{aligned}$$

Esta equação não tem solução em R_2 pois pela condição inicial $x - 3 > 0$ e $y + 1 < 0$.

iii) Para a região R_3 tem-se $x > 3$ e $-1 < y < 3$, a igualdade $10 = |-3 - x| + |-1 - y| + |3 - x| + |3 - y|$ será equivalente a:

$$\begin{aligned} 10 &= -(-3 - x) - (-1 - y) - (3 - x) + (3 - y) \\ 10 &= 3 + x + 1 + y - 3 + x + 3 - y \\ 6 &= 2x \\ 3 &= x \end{aligned}$$

Esta equação não tem solução em R_3 pois pela condição inicial $x > 3$.

iv) Para a região R_4 tem-se $x > 3$ e $y > 3$, a igualdade $10 = |-3 - x| + |-1 - y| + |3 - x| + |3 - y|$ será equivalente a:

$$\begin{aligned} 10 &= -(-3 - x) - (-1 - y) - (3 - x) - (3 - y) \\ 10 &= 3 + x + 1 + y - 3 + x - 3 + y \\ 6 &= x + y \\ x - 3 &= -(y - 3) \end{aligned}$$

Esta equação não tem solução em R_4 pois pela condição inicial $x - 3 > 0$ e $y - 3 > 0$.

v) Para a região R_5 tem-se $-3 < x < -1$ e $y > 3$, a igualdade $10 = |-3 - x| + |-1 - y| + |3 - x| + |3 - y|$ será equivalente a:

$$\begin{aligned} 10 &= -(-3 - x) - (-1 - y) + (3 - x) - (3 - y) \\ 10 &= 3 + x + 1 + y + 3 - x - 3 + y \\ 6 &= 2y \\ 3 &= y \end{aligned}$$

Esta equação não tem solução em R_4 pois pela condição inicial $y > 3$.

Assim a solução de $10 = |-3 - x| + |-1 - y| + |3 - x| + |3 - y|$ é formada por todos os pontos que pertencem ao retângulo com vértices nas coordenadas $A = (-3, -1)$, $C = (3, -1)$, $B = (3, 3)$ e $D = (-3, 3)$.

b) Considerando que a soma das distâncias continue sendo mínima, onde deveriam morar para que ambos tivessem que andar a mesma distância até o trabalho?

Do item a) sabemos que os pontos que solucionam $d_T(A, P) = d_T(P, B)$ pertencem ao retângulo com vértices nas coordenadas $A = (-3, -1)$, $C = (3, -1)$, $B = (3, 3)$ e $D = (-3, 3)$, assim temos como condição para a solução $-3 \leq x \leq 3$ e $-1 \leq y \leq 3$. A igualdade $d_T(A, P) = d_T(P, B)$ será equivalente a:

$$\begin{aligned} |x - (-3)| + |y - (-1)| &= |x - 3| + |y - 3| \\ (x - (-3)) + (y - (-1)) &= -(x - 3) - (y - 3) \\ 2x + 2y &= 2 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

A representação gráfica dessa solução é:

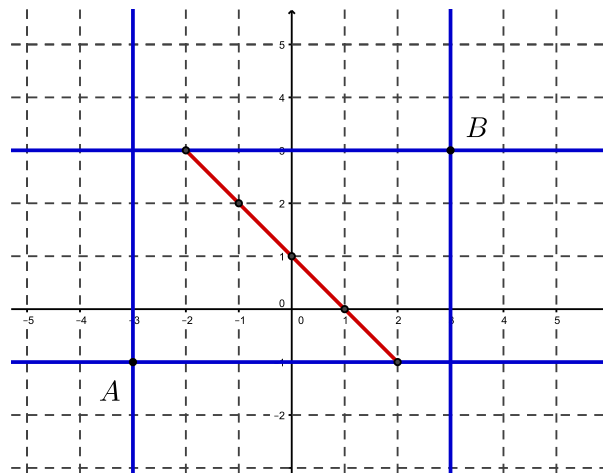


Figura 66 – Pontos que solucionam $d_T(A, P) = d_T(P, B)$.

Como estamos considerando uma cidade ideal, Alice e Bruno podem escolher para morar apenas pontos onde uma das suas coordenadas seja inteira, assim podem escolher entre os pontos $(-2, 3)$, $(-1, 2)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ ou $(2, -1)$.

c) Considerando que não encontraram um apartamento que satisfizesse a condição do item anterior, decidiram ampliar sua área de busca. A única exigência agora é de que ambos devem estar a mesma distância de seus empregos. Agora em que região devem procurar um apartamento?

Agora para determinar a solução tem-se que analisar os pontos que satisfazem $d_T(A, P) = d_T(P, B)$, em regiões fora do retângulo que delimitou a solução no item anterior. Como já abor-

dado no Capítulo 2 estamos determinando a táxi-mediatrix de \overline{AB} . Sem perda de generalidade, pode-se analisar apenas as regiões apresentadas na figura a seguir:

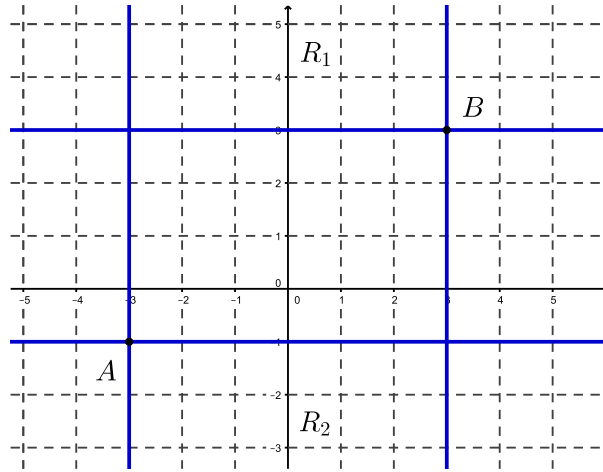


Figura 67 – Regiões onde $d_T(A, P) = d_T(P, B)$.

Para um ponto que pertence a R_1 a equação $|x - (-3)| + |y - (-1)| = |x - 3| + |y - 3|$ será equivalente a:

$$\begin{aligned}(x - (-3)) + (y - (-1)) &= -(x - 3) + (y - 3) \\ x + 3 + y + 1 &= -x + 3 + y - 3 \\ 2x &= -4 \\ x &= -2\end{aligned}$$

Na região R_1 os pontos que estão a mesma distância de A e B , são os pontos que pertencem a reta $x = -2$.

Para um ponto que pertence a R_2 a equação $|x - (-3)| + |y - (-1)| = |x - 3| + |y - 3|$ será equivalente a:

$$\begin{aligned}(x - (-3)) - (y - (-1)) &= -(x - 3) - (y - 3) \\ x + 3 - y - 1 &= -x + 3 - y + 3 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2\end{aligned}$$

Na região R_2 os pontos que estão a mesma distância de A e B , são os pontos que pertencem a reta $x = 2$.

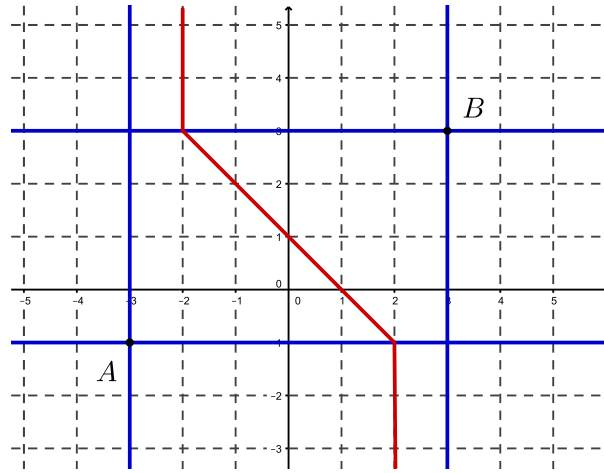


Figura 68 – Táxi-mediatrix de \overline{AB} onde $d_T(A, P) = d_T(P, B)$.

Além da solução algébrica, apresentada anteriormente, pode-se também determinar a solução graficamente como apresentada no Capítulo 3:

Solução Gráfica: Sendo $A = (-3, -1)$ e $B = (3, 3)$, para a determinação das coordenadas do retângulo básico temos os pontos $C = (-3, 3)$ e $D = (3, -1)$. A distância do *quadrado* posicionado dentro do retângulo básico em relação ao ponto A será:

$$\frac{(\overline{AD} - \overline{AC})}{2} = \frac{6 - 4}{2} = 1$$

Seguindo os passos para a construção apresentados no Capítulo 3 tem-se a táxi-mediatrix para os pontos considerados no problema, representando graficamente tem-se:

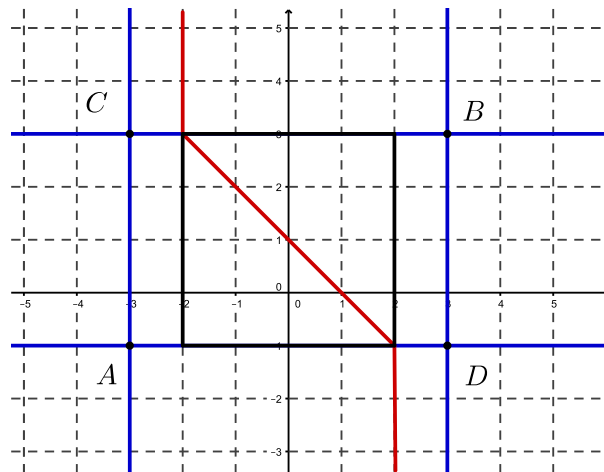


Figura 69 – Táxi-mediatrix de \overline{AB} construída a partir do retângulo básico.

Assim pode-se solucionar o problema de duas maneiras diferentes, estabelecendo-se uma relação entre a solução algébrica e gráfica.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A exploração do conceito do diagrama de Voronoi permite uma abordagem diferente do conceito de lugar geométrico, pois a sua compreensão envolve vários conceitos geométricos como a ideia de mediatriz e distância entre pontos, para assim determinar a divisão do plano em regiões de influência. A sua relação com conceitos mais simples tornam o tema interessante para levar o aluno e professor de Matemática do ensino médio a estabelecer uma aplicação direta de conceitos interessantes de Geometria.

Já a exploração do diagrama de Voronoi na métrica do táxi, trouxe questionamentos e conhecimentos diferentes, pois inicialmente foi preciso compreender o conceito de distância na métrica do Táxi entre pontos no plano e as características, não esperadas, de alguns lugares geométricos dentro desta métrica. Para a compreensão e formalização destas propriedades foram aplicadas as propriedades do módulo. Considero esta parte do trabalho como a que me possibilitou a compreensão e aprendizado de conceitos diferentes dos aprendidos nas disciplinas do mestrado. Foi nesta etapa do trabalho em que me deparei com um problema onde tive que construir uma solução, que não encontrei de maneira completa em outras referências. Assim a determinação do comportamento da táxi-mediatriz e a sua influência no diagrama de Voronoi na métrica do Táxi demandaram um trabalho mais independente.

As animações implementadas no GeoGebra são um facilitador para a visualização do comportamento do diagrama de Voronoi na métrica Euclidiana e do Táxi. Todo seu processo de construção, e as construções geométricas apresentadas no trabalho, possibilitaram um aprendizado muito amplo das ferramentas do GeoGebra, que com toda certeza, serão aplicadas em outras situações durante o meu trabalho em sala de aula.

A elaboração das atividades do capítulo 4 mostraram uma ideia para se trabalhar conceitos relacionados ao diagrama de Voronoi e equações de reta e também trazem a possibilidade de relação entre o desenvolvimento teórico presente nos capítulos 1 e 2 e algumas situações. São atividades que trabalham conceitos como a definição de módulo, lugares geométricos, equação da reta, ortogonalidade de vetores, formando assim uma sequência de atividades que podem ser realizadas em sala de aula.

Durante a pesquisa do tema para a elaboração do trabalho, notei várias aplicações do diagrama de Voronoi muito interessantes que não foram abordadas. Por exemplo, a relação dual que existe entre o diagrama de Voronoi e a triangulação de Delaunay, o algoritmo de Fortune que usa a ideia de parábolas e varredura do plano para a construção do diagrama de Voronoi, e vários outros aspectos relacionados a Geometria Computacional. Todos estes temas poderão ser abordados em trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

- BERG, M. de. **Computational Geometry: Algorithms and Applications**. [S.l.]: Springer, 2008.
- DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAF, L. **Geometria Analítica**. [S.l.]: SBM, 2013. (Coleção Profmat).
- FIGUEIREDO, L. de; CARVALHO, P. P. **Notas de Geometria Computacional**. [S.l.]: IMPA, 2009.
- JOHNSON, S. **O mapa fantasma: Como a luta de dois homens contra a colera mudou o destino de nossas metrópoles**. [S.l.]: Zahar, 2008.
- KRAUSE, E. **Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry**. [S.l.]: Dover Publications, 1986. (Dover Books on Mathematics).
- LIEBLING, T. M.; POURNIN, L. Voronoi diagrams and delaunay triangulations: Ubiquitous siamese twins. **Documenta Mathematica**, Extra Volume ISMP, p. 419–431, 2012.
- OKABE, A. et al. **Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams**. [S.l.]: Wiley, 2009. (Wiley Series in Probability and Statistics).
- PCNEN. **Parâmetros curriculares nacionais (ensino médio): ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/SEB, 2000. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>. Acesso em: 15 de novembro de 2016.
- WANDERLEY, A. J. M.; CARNEIRO, J. P. Q.; WAGNER, E. Como melhorar a vida de um casal usando geometria não-euclidiana. **Revista do Professor de Matemática**, v. 50, p. 23–30, 2002.

ANEXO A – LINKS DE ALGUMAS CONSTRUÇÕES NO GEOGEBRA.

Construção das regiões de influência do diagrama de Voronoi na métrica Euclidiana:
<https://www.geogebra.org/m/qvJVuEW7>.

Construção da táxi-mediatriz quando a inclinação é 1: <https://www.geogebra.org/m/fw8bdyU2>.

Construção das regiões de influência do diagrama de Voronoi na métrica do Táxi:
<https://www.geogebra.org/m/DXcFRpDn>.