

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE ELÉTRICA
CURSO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

RUHAN PONTES POLICARPO DE SOUZA

**CONTROLE PID ROBUSTO PROJETADO VIA LMI APLICADO A
UM MOTOR DE CORRENTE CONTÍNUA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2018

RUHAN PONTES POLICARPO DE SOUZA

**CONTROLE PID ROBUSTO PROJETADO VIA LMI APLICADO A
UM MOTOR DE CORRENTE CONTÍNUA**

Trabalho de Conclusão de Curso, do curso superior de Engenharia Elétrica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Cornélio Procópio, apresentado como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro Eletricista.

Orientador: Prof. Dr. Emerson Ravazzi Pires da
Silva

CORNÉLIO PROCÓPIO

2018



Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Cornélio Procópio
Departamento Acadêmico de Elétrica
Curso de Engenharia Elétrica



FOLHA DE APROVAÇÃO

Ruhan Pontes Policarpo de Souza

Controle PID robusto projetado via LMI aplicado a um motor de corrente contínua

Trabalho de conclusão de curso apresentado às 14:00hs do dia 01/11/2018 como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro Eletricista no programa de Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. O candidato foi arguido pela Banca Avaliadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Avaliadora considerou o trabalho aprovado.

Prof(a). Dr(a). Emerson Ravazzi Pires da Silva - Presidente (Orientador)

Prof(a). Dr(a). Luiz Francisco Sanches Buzachero - (Membro)

Prof(a). Dr(a). Wagner Endo - (Membro)

Dedico este trabalho aos meus pais, Elson Policarpo de Souza e Maria Teresa de Pontes Ormeneze.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me dar o dom da vida, iluminando meu caminho e me zelando. A Virgem Maria, por me proteger e abençoar todos os dias.

Aos meus pais, Elson Policarpo de Souza e Maria Teresa de Pontes Ormeneze, por me darem amor, carinho, incentivo e apoio imensurável, não medindo esforços para me ajudar e me dar a oportunidade de uma vida melhor. Eu vos amo!

Agradeço aos amigos, que após todo este caminho, se tornaram nada menos que uma família, compartilhando das felicidades e dificuldades do dia-a-dia, mas sempre com união e alegria.

Agradeço também ao professor Emerson Ravazzi, por toda sua sabedoria, tranquilidade e dedicação em seu trabalho, agradeço também pelas palavras de incentivo e amizade. A todos meus mestres e professores, meu muito obrigado.

Por fim, agradeço a todos que neste período tive a oportunidade de conhecer e conviver, a cada um que me fez pensar e aprender mais um pouco sobre a vida e sobre este pequeno mundo. Levo todos em meu coração.

"Cada um de nós compõe a sua história, cada ser em si, carrega o dom de ser capaz, de ser feliz."

Almir Sater

RESUMO

SOUZA, Ruhan Pontes Policarpo de. **CONTROLE PID ROBUSTO PROJETADO VIA LMI APLICADO A UM MOTOR DE CORRENTE CONTÍNUA**. 83 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Engenharia Elétrica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2018.

Na indústria moderna, o motor de corrente contínua é amplamente utilizado, possuindo facilidade de operação e controle. Entretanto, em muitos casos, com o passar do tempo seus parâmetros podem sofrer alterações devido a diversos fatores, tais como desgastes e condições ambientes desfavoráveis, logo, um sistema de controle previamente projetado pode perder eficiência no decorrer de um período de tempo e até mesmo se tornar instável. Considerando um controlador PID (proporcional, integral e derivativo), a estrutura de controle mais utilizada na indústria atual, este trabalho apresenta uma forma de tratar a variação de parâmetros em sistemas de controle PID aplicados a um motor de corrente contínua. Os ganhos do controlador, K_p , K_i e K_d são obtidos através de LMIs (*Linear Matrix Inequalities*), técnica que permite a abordagem de parâmetros incertos. Utilizou-se as LMIs de realimentação de estados via taxa de decaimento e \mathcal{D} -estabilidade, garantindo o desempenho do sistema por meio da alocação robusta de polos. Demonstra-se neste trabalho o processo de obtenção da função de transferência, modelagem do sistema de controle robusto e sua implementação, validada através de simulações e comparações com parâmetros de desempenho. A estrutura de controle estudada é composta por um motor de corrente contínua, driver de alimentação, placa Arduino e o software de processamento Simulink. O sistema de controle se mostrou viável em condições diversas, diante até mesmo de operação com falha na realimentação.

Palavras-chave: Controle PID Robusto, Desigualdades Matriciais Lineares, Motor de Corrente Contínua, \mathcal{D} -estabilidade, Taxa de decaimento.

ABSTRACT

SOUZA, Ruhan Pontes Policarpo de. **ROBUST PID CONTROL DESIGNED BY LMI APPROACH APPLIED IN A DC MOTOR**. 83 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Engenharia Elétrica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2018.

In modern industry, the DC motor is widely used, having easy operation and control. However, in many cases, its parameters may suffer changes over time due to several factors, such as wear and environmental conditions, so, a previously designed control system may lose efficiency and even become unstable. Considering a PID controller (Proportional, Integral and Derivative), the most used control structure in current industry, this work presents a way to treat parameter variation in a PID control system applied to a DC motor. The controller gains, K_p , K_i and K_d are obtained through LMIs (Linear Matrix Inequalities), a technique that allows the uncertain parameters approach. The decay rate and \mathcal{D} - stability state feedback LMIs were used, introducing performance parameters to the system by pole allocation. This work shows the process of obtaining the system transfer function, robust control system modeling and its implementation, validated through simulations and comparisons with performance parameters. The control system proved to be viable under different conditions, even in the case of a failed feedback operation.

Keywords: PID Robust Control, Linear Matrix Inequalities, DC Motor, \mathcal{D} -stability, Decay Rate.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Funcionamento básico de um motor CC.	20
FIGURA 2	– Circuito equivalente para a armadura do motor de corrente contínua. ..	21
FIGURA 3	– Circuito equivalente para o estator do motor de corrente contínua.	21
FIGURA 4	– Diagrama de blocos do motor de corrente contínua.	27
FIGURA 5	– Resposta transitória ao degrau unitário	30
FIGURA 6	– Diagrama de blocos do sistema de controle PID.	32
FIGURA 7	– Diagrama do sistema de rastreamento.	33
FIGURA 8	– Realimentação de estados.	38
FIGURA 9	– Região para alocação dos polos, considerando a taxa de decaimento. ..	40
FIGURA 10	– Região $S(\gamma, r, \theta)$	42
FIGURA 11	– Sistema de controle PID robusto.	46
FIGURA 12	– Estrutura e equipamentos de controle utilizados	48
FIGURA 13	– Fluxograma de implementação	49
FIGURA 14	– Motor CC com <i>encoder</i> acoplado	49
FIGURA 15	– Circuito de acionamento do motor	51
FIGURA 16	– Placa de desenvolvimento Arduino Leonardo	52
FIGURA 17	– Diagrama de blocos para obtenção do sinal	53
FIGURA 18	– Diagrama de blocos - Sinal de controle	53
FIGURA 19	– Diagrama do controlador desenvolvido	54
FIGURA 20	– Sistema de captura em malha fechada	55
FIGURA 21	– Curva de reação de $B(s)$, para $R(s)=200$ rpm.	56
FIGURA 22	– Curva de reação de $B(s)$, para $R(s)=250$ rpm.	57
FIGURA 23	– Localização global dos polos do sistema - Taxa de decaimento $\gamma = 1,66$	62
FIGURA 24	– Zoom na localização dos polos dominantes do sistema - Taxa de decaimento $\gamma = 1,66$	62
FIGURA 25	– Localização global dos polos do sistema - \mathcal{D} -estabilidade	65
FIGURA 26	– Taxa de decaimento - Resposta ao degrau	67
FIGURA 27	– Taxa de decaimento - Sinal simulado para referência do tipo degrau ...	68
FIGURA 28	– Taxa de decaimento - Sinal de controle para referência do tipo degrau .	68
FIGURA 29	– Taxa de decaimento - Resposta a rampa	69
FIGURA 30	– Taxa de decaimento - Sinal simulado para referência do tipo rampa	70
FIGURA 31	– Taxa de decaimento - Sinal de controle para referência do tipo rampa ..	70
FIGURA 32	– Estrutura para simulação de falha na realimentação	71
FIGURA 33	– Taxa de decaimento - Resposta a falha	71
FIGURA 34	– Taxa de decaimento - Sinal simulado para sistema sujeito a falha	72
FIGURA 35	– Taxa de decaimento - Sinal de controle para sistema sujeito a falha	72
FIGURA 36	– \mathcal{D} -estabilidade - Resposta ao degrau	74
FIGURA 37	– \mathcal{D} -estabilidade - Sinal simulado para referência do tipo degrau	75
FIGURA 38	– \mathcal{D} -estabilidade - Sinal de controle para referência do tipo degrau	75
FIGURA 39	– \mathcal{D} -estabilidade - Resposta a rampa	76
FIGURA 40	– \mathcal{D} -estabilidade - Sinal simulado para referência do tipo rampa	76
FIGURA 41	– \mathcal{D} -estabilidade - Sinal de controle para referência do tipo rampa	77

FIGURA 42 – \mathcal{D} -estabilidade - Resposta a falha	78
FIGURA 43 – \mathcal{D} -estabilidade - Sinal simulado para sistema sujeito a falha	78
FIGURA 44 – \mathcal{D} -estabilidade - Sinal de controle para sistema sujeito a falha	79

LISTA DE TABELAS

TABELA 1	–	Parâmetros de um sistema dinâmico e suas características.	30
TABELA 2	–	Influência dos ganhos K_p , K_i e K_d sobre o sistema.	32
TABELA 3	–	Características técnicas do motor	50
TABELA 4	–	Comportamento transitório de $B(s)$	56
TABELA 5	–	Coefficientes do sistema $G(s)$	58
TABELA 6	–	Ganhos do controlador PID	73

LISTA DE SIGLAS

CC	Corrente Contínua
PID	Proporcional, Integral e Derivativo
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i>
MIMO	<i>Multiple-Input Multiple-Output</i>
SISO	<i>Single-Input Single-Output</i>
PI	Proporcional Integral
MOSFET	<i>Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor</i>
PWM	<i>Pulse-Width Modulation</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	PROBLEMA	15
1.2	JUSTIFICATIVA	17
1.3	OBJETIVOS	17
1.3.1	Objetivos específicos	17
1.4	ESTRUTURA DO TRABALHO	18
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	19
2.1	MOTOR DE CORRENTE CONTÍNUA	19
2.2	REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS	21
2.2.1	Função de transferência	22
2.2.2	Espaço de Estados	23
2.2.3	Conversão de função de transferência para espaços de estado	24
2.3	MODELAGEM E IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS	25
2.3.1	Representação matemática do motor de corrente contínua	25
2.3.2	Resposta ao degrau de um sistema de segunda ordem	28
2.4	SISTEMAS DE CONTROLE	30
2.4.1	Controlador PID	31
2.4.2	Rastreamento de sistemas	32
2.4.3	Controle Robusto	34
3	DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES	36
3.1	ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES	36
3.2	ESTABILIDADE QUADRÁTICA DE SISTEMAS LINEARES INCERTOS	37
3.3	CONTROLE VIA REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS	38
3.4	REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS COM TAXA DE DECAIMENTO	40
3.5	REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS - \mathcal{D} -ESTABILIDADE	41
4	CONTROLADOR PID ROBUSTO	44
5	MATERIAIS E MÉTODOS	48
5.1	MOTOR DE CORRENTE CONTÍNUA	48

5.2	DRIVER DE ALIMENTAÇÃO	50
5.3	PLACA DE COMUNICAÇÃO	51
5.4	INTERFACE DE CONTROLE	52
6	DESENVOLVIMENTO	55
6.1	CAPTURE DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA	55
6.2	MODELAGEM DO SISTEMA DE CONTROLE ROBUSTO	58
6.3	PROJETO DO CONTROLADOR - TAXA DE DECAIMENTO	61
6.4	PROJETO DO CONTROLADOR - \mathcal{D} -ESTABILIDADE	63
7	RESULTADOS E DISCUSSÕES	66
7.1	DADOS EXPERIMENTAIS - TAXA DE DECAIMENTO	66
7.1.1	Resposta ao degrau	67
7.1.2	Resposta a rampa	69
7.1.3	Resposta a falha	70
7.2	DADOS EXPERIMENTAIS - \mathcal{D} -ESTABILIDADE	73
7.2.1	Resposta ao degrau	73
7.2.2	Resposta a rampa	74
7.2.3	Resposta a falha	77
8	CONCLUSÃO	80
	REFERÊNCIAS	81

1 INTRODUÇÃO

A criação do motor elétrico no século XIX alterou de forma significativa a dinâmica e os modos de produção industriais através da utilização da eletricidade como recurso energético. Neste período histórico, o motor elétrico se apresentou como um substituto aos motores a vapor, já que possui maior eficiência energética e maior facilidade de controle, ideal para a utilização em processos industriais. Diante da sua vantagem frente as máquinas já existentes e com o processo de expansão da rede de distribuição de energia elétrica no século XX, os motores elétricos se consolidaram como peça essencial na indústria moderna. Utilizado em larga escala, estima-se que atualmente é responsável pelo consumo de cerca de 40% da energia elétrica mundial (WEG, 2010).

Dentre os diversos tipos de motores existentes, um modelo comumente utilizado é o motor de corrente contínua ou motor CC (corrente contínua). Ele tem como principal característica sua alimentação por meio de uma fonte de tensão contínua, aplicada em seus terminais em diferentes configurações possíveis (CHAPMAN, 2013). Esta característica lhe confere fácil operação e controle, sendo utilizado em processos que exigem controle de velocidade, posição e torque, como por exemplo em máquinas operatrizes, prensas, máquinas da indústria têxtil, máquinas de moagem e esteiras em geral. Para este motor, um método de controle industrial amplamente utilizado é o controle PID (proporcional, integral e derivativo), que pode facilmente ser aplicado em motores CC. Sua vasta utilização industrial se deve a grande faixa de aplicação e a sua facilidade de operação (OGATA, 2010). Ainda, sabe-se que o controle PID é responsável por mais de 97% do controle industrial nas áreas químicas, refinarias e papel e celulose, mesmo sabendo que apenas cerca de 36% apresentam desempenho excelente ou aceitável (CHENG, 2006).

Entretanto, os motores, assim como diversos outros equipamentos, estão sujeitos a desgastes dentro do ambiente industrial, devido a fatores ambientais e físicos, tais como temperatura de operação, presença de atmosfera contaminante e vibrações. Logo, o controle destas máquinas pode representar um grande problema, já que com o desgaste os parâmetros da máquina podem sofrer alterações e, conseqüentemente, um controle anteriormente aplicado pode não atender as especificações iniciais de projeto. Esta alteração nos parâmetros pode diminuir o desempenho dinâmico do sistema de controle e, até mesmo tornar o sistema instável. Diversas teorias podem ser verificadas na literatura, por exemplo, em Dorf e Bishop (2013), é apresentado um método de controle robusto de sistemas, onde os parâmetros a serem

controlados podem sofrer variação e possuírem incertezas. Santos et al. (2013) apresentam um método de alocação de polos robusto, aplicado a um motor CC de uma junta robótica. Lordelo e Fazzolari (2012) desenvolvem uma técnica de controle robusto com estrutura variável e modos deslizantes, tal como em Kommuri et al. (2016).

Dado um sistema de controle robusto, a sintonia de seus parâmetros e a adequação do desempenho dinâmico do sistema aos requisitos de projeto constituem uma tarefa complexa. Contudo, uma possível solução para este problema é a utilização de LMIs (*Linear Matrix Inequalities*) para o projeto de controladores. Com a expansão dos métodos computacionais e a criação de ferramentas específicas, tais como o *LMI Control Toolbox*, disponível no software Matlab[®], sua utilização se tornou mais simples e acessível. Utilizando LMIs, Manesco (2013) apresenta o desenvolvimento de um controlador utilizando a realimentação estática da saída, onde é possível realizar o controle de sistemas MIMO (*Multiple-Input Multiple-Output*). Silva (2009) também utiliza a abordagem das LMIs para o desenvolvimento de controladores robustos para sistemas não lineares sujeitos a falhas, aplicação esta muito importante em controles que exigem alto nível de confiabilidade.

Seguindo este caminho, neste trabalho propõe-se o estudo e a implementação de um controlador robusto aplicado em um motor CC, onde os parâmetros do motor estão sujeitos a incertezas. O sistema de controle proposto é baseado em um controlador PID adaptado, sendo os ganhos projetados segundo a abordagem de desigualdades matriciais lineares (LMIs), sujeito aos requisitos de desempenho de projeto.

1.1 PROBLEMA

Para o desenvolvimento de um sistema de controle e sua correta parametrização, muitas vezes é necessário o estudo do sistema perante sua representação matemática. Para isto, pode-se utilizar principalmente as representações por função de transferência e espaço de estados. A Equação (1) representa um sistema genérico de terceira ordem, sendo s a frequência de Laplace.

$$G(s) = \frac{b_0}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}. \quad (1)$$

Na equação, os índices b_0 , a_2 , a_1 e a_0 são os coeficientes que representam o comportamento do sistema. Com base nessa função, os dispositivos controladores são projetados e sintonizados. Considere o exemplo adaptado de Dorf e Bishop (2013), para o

sistema dado pelos coeficientes $a_2 = 2$, $a_1 = 4$ e $a_0 = 7,5$, pode-se analisar a estabilidade através dos polos do sistema, utilizando a sua equação característica, dada pela Equação (2).

$$s^3 + 2s^2 + 4s + 7,5 = 0. \quad (2)$$

Através da análise de estabilidade de Routh Hurwitz (OGATA, 2010), verifica-se que o sistema é estável, com todos os polos no semiplano esquerdo. Entretanto, em aplicações práticas, os seus parâmetros podem se modificar, como consequência de características físicas do equipamento e ambientais. Considere, por exemplo, a situação em que os coeficientes estão contidos dentro de um intervalo, de maneira incerta.

$$1,5 \leq a_2 \leq 2,5, \quad (3)$$

$$3 \leq a_1 \leq 5, \quad (4)$$

$$7 \leq a_0 \leq 8,5. \quad (5)$$

Para este caso, dado um controlador projetado para a situação dada na Equação (2), não se pode garantir o desempenho dinâmico do sistema nem sua estabilidade, dado a incerteza e a variação de seus parâmetros. Para a análise de estabilidade, pode-se considerar as condições de extremo, considerando os maiores e menores valores dos coeficientes. A partir disso, deve-se fazer a análise para todas as combinações existentes. Existem 2^n equações características possíveis, sendo n o número de parâmetros incertos; para o sistema dado, $n = 3$.

$$s^3 + 1,5s^2 + 3s + 7 = 0, \quad (6)$$

$$s^3 + 1,5s^2 + 3s + 8,5 = 0, \quad (7)$$

$$s^3 + 1,5s^2 + 5s + 7 = 0, \quad (8)$$

$$s^3 + 1,5s^2 + 5s + 8,5 = 0, \quad (9)$$

$$s^3 + 2,5s^2 + 3s + 7 = 0, \quad (10)$$

$$s^3 + 2,5s^2 + 3s + 8,5 = 0, \quad (11)$$

$$s^3 + 2,5s^2 + 5s + 7 = 0, \quad (12)$$

$$s^3 + 2,5s^2 + 5s + 8,5 = 0. \quad (13)$$

Ao analisar as equações, verifica-se que a variação dos parâmetros fez com que os sistemas representados pelas Equações (6), (7), (9) e (11) se tornassem instáveis, deslocando alguns de seus polos para o semiplano direito. Esta situação pode ser crítica em aplicações práticas, pois um sistema em normal funcionamento pode se tornar instável, afetando a qualidade do processo e a segurança, podendo causar prejuízos físicos aos equipamentos, já que seu comportamento não pode ser controlado. Além disso, mesmo considerando a condição de o sistema se manter estável, a variação dos parâmetros afeta diretamente o comportamento dinâmico do mesmo, prejudicando seu desempenho. Em diversos sistemas o desempenho é fator crucial para o sistema.

1.2 JUSTIFICATIVA

Diante da situação apresentada, a variação dos parâmetros é verificada como um sério problema para o comportamento de um sistema. Além disso, em sistemas de controle de alto desempenho, existe a necessidade de manter a controlabilidade do sistema e garantir o seu desempenho dinâmico dentro dos requisitos exigidos durante o projeto.

Tendo isso em vista, e levando em consideração a relevância dos motores CC dentro do contexto industrial, o desenvolvimento de um controlador robusto que seja projetado considerando condições de incertezas, vem a resolver o problema apresentado, garantindo estabilidade e desempenho do sistema mesmo em condições adversas. A utilização de um controle PID sintonizado via LMIs para o desenvolvimento do projeto, é justificado devido a possibilidade do tratamento das incertezas ser de simples execução, possuindo também facilidade na inclusão de índices de desempenho na abordagem do problema, além de ser considerada uma técnica de controle moderno.

1.3 OBJETIVOS

Diante do problema apresentado e da justificativa, o seguinte trabalho tem como objetivo geral projetar um controlador PID robusto, implementado em um motor CC, utilizando do recurso das desigualdades lineares matriciais para a sintonia.

1.3.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudar e sintetizar o controlador PID robusto, sintonizado a partir de LMIs;

- Identificar os parâmetros matemáticos do motor de corrente contínua, a serem utilizados no projeto;
- Resolver as LMIs a fim de encontrar os ganhos do controlador;
- Simular em software, para a verificação dos parâmetros projetados;
- Implementar em bancada, a fim de verificar a eficácia do método estudado.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

O seguinte trabalho está dividido em oito capítulos. Neste primeiro capítulo, é apresentada uma introdução geral sobre o tema, bem como o problema presente e os objetivos deste trabalho. No segundo capítulo, realiza-se uma revisão bibliográfica sobre os temas pertinentes ao trabalho, onde encontra-se a teoria básica necessária para o desenvolvimento do projeto. No terceiro capítulo, apresentam-se as desigualdades matriciais lineares, técnica que será utilizada para a sintonia do controlador PID robusto. No quarto capítulo, a teoria sobre o controlador PID robusto é apresentada e desenvolvida. Por sua vez, no quinto capítulo apresenta-se os materiais e métodos utilizados para a implementação do controlador. No sexto capítulo, apresenta-se o desenvolvimento do controlador, desde a obtenção dos parâmetros do sistema até a sintonia dos controladores. Por fim, no capítulo sétimo os resultados e discussões são expostos, e no oitavo capítulo expõe-se as conclusões e consideração finais sobre o trabalho.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo apresenta-se a revisão bibliográfica realizada para o desenvolvimento deste trabalho, apresentando os principais tópicos relacionados ao motor de corrente contínua, sistemas de controle e ao controlador PID.

2.1 MOTOR DE CORRENTE CONTÍNUA

O motor de corrente contínua, ou motor CC, é um tipo de máquina elétrica capaz de converter energia elétrica em energia mecânica, por meio de uma fonte de energia de corrente contínua. Seu funcionamento é baseado na interação de um campo magnético com os condutores elétricos do seu rotor, o qual produz uma força, e conseqüentemente, um torque em seu rotor. Muito utilizado, possui a característica de ser facilmente controlável, com uma larga faixa de operação, além de que diversos sistemas de potência disponíveis fornecem energia em corrente contínua, tal como em automóveis e aeronaves, logo, sua utilização é vantajosa (CHAPMAN, 2013). O equipamento é composto essencialmente por um estator, parte estática do equipamento; e um rotor, também chamado de armadura, parte móvel do motor.

O estator possui um campo magnético estático, gerado pela passagem de corrente nos seus enrolamentos, ou então, por ímãs permanentes. O rotor por sua vez é alimentado por uma fonte de tensão externa V_a , com isso, uma corrente circula pelos condutores do rotor, gerando um campo magnético no rotor. O campo magnético do rotor é atraído pelo campo magnético do estator, logo, uma força mecânica é observada, e conseqüentemente, um torque. A equação principal que relaciona seu funcionamento é a seguinte:

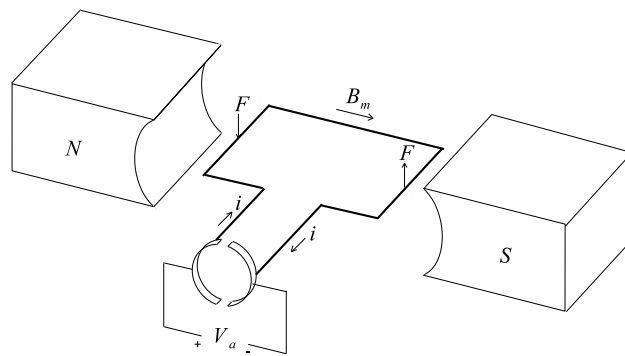
$$\vec{F}_{ind} = i(l \times \vec{B}_m), \quad (14)$$

onde \vec{F}_{ind} é a força induzida no rotor, i é a corrente que passa pelos condutores, e l é o comprimento do condutor perpendicular ao campo magnético \vec{B}_m .

Entretanto, dado uma fonte de tensão constante, quando ambos os campos magnéticos, do rotor e do estator, se alinharem, a força aplicada nos enrolamentos cessará. Para que a força aplicada e o movimento continue, é necessário que a alimentação do rotor se inverta, afim de que os campos magnéticos tentem se alinhar novamente. Para contornar este problema, uma possível solução é a utilização de escovas comutadoras, que invertem os terminais do

enrolamento do rotor. Além da utilização de escovas, outras técnicas de comutação podem ser desenvolvidas, tais como os motores *Brushless*, em que a comutação é feita através de acionadores eletrônicos, não havendo escovas (CHAU, 2015). A Figura 1 representa o funcionamento básico de um motor de corrente contínua com apenas uma espira. Quando o rotor atinge 180° , as escovas comutadoras invertem a tensão aplicada ao enrolamento, garantindo o mesmo sentido de corrente nos enrolamentos e a continuidade do movimento de rotação.

Figura 1: Funcionamento básico de um motor CC.



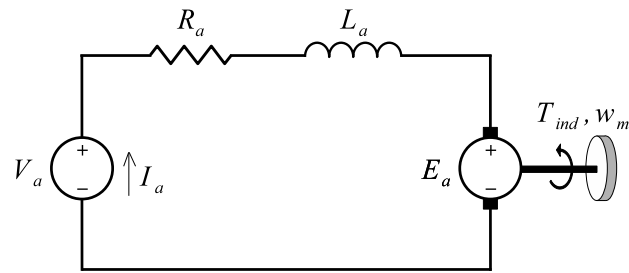
Fonte: Adaptado de Chapman (2013).

Para o motor de corrente contínua, temos que seu circuito de armadura pode ser representado por uma resistência, um indutor e uma fonte de tensão. O resistor R_a representa a resistência do enrolamento da armadura, bem como pode representar as perdas por efeito Joule presentes no rotor; o indutor L_a nos fornece uma representação sobre a indutância do enrolamento da armadura, e por fim, uma fonte de tensão E_a representa a tensão induzida nos enrolamentos da máquina. O circuito equivalente pode ser observado pela Figura 2, sendo V_a a tensão terminal de armadura, I_a a corrente de armadura, w_m a velocidade angular do rotor e por fim, T_{ind} o torque induzido no rotor.

Por sua vez, o circuito do estator, também chamado de circuito de campo, pode ser dado simplesmente por um resistor R_f em série com um indutor L_f . O resistor R_f representa as perdas por efeito Joule no enrolamento de campo bem como a resistência do próprio enrolamento, enquanto que o indutor L_f fornece a indutância do enrolamento e as perdas por dispersão de fluxo (CHAPMAN, 2013). A tensão de alimentação do campo é dada por V_f , sendo o circuito equivalente do campo representado pela Figura 3.

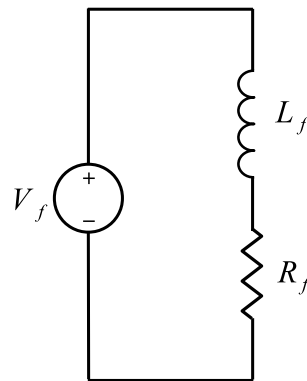
A partir dos dois circuitos obtidos, diferentes combinações entre os circuitos de

Figura 2: Circuito equivalente para a armadura do motor de corrente contínua.



Fonte: Adaptado de Chapman (2013).

Figura 3: Circuito equivalente para o estator do motor de corrente contínua.



Fonte: Adaptado de Chapman (2013).

campo e de armadura podem ser verificadas, afim de adequar o comportamento do motor as situações desejadas. Por exemplo, para aplicações em que se deseja elevado torque de partida, uma possível configuração é a ligação do enrolamento de campo em série com a armadura. Outras configurações possíveis são a excitação em paralelo, na qual o campo e a armadura compartilham da mesma fonte de tensão, e a excitação independente. Para maiores informações sobre configurações de excitação, Chapman (2013) apresenta diversas configurações e suas respectivas características.

2.2 REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS

O modelo que representa o sistema é essencial para o bom desenvolvimento das estratégias de controle e sua posterior calibração e otimização, já que é possível mensurar

seu comportamento e atuar no sistema de forma correta e eficaz (NISE, 2012). Duas possíveis formas de representação matemática são a utilização de funções de transferência e a representação por espaços de estados.

2.2.1 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

Com base nas leis que regem o comportamento físico de um sistema, tal como as leis de Newton para um sistema mecânico e as leis de Kirchoff para um sistema elétrico, pode-se descrever o comportamento dinâmico de um sistema (OGATA, 2010). Se tratando de um sistema dinâmico, as equações que o descrevem são usualmente equações diferenciais. Contudo, a resolução destas equações possui grande complexidade, sendo que para sistemas lineares do tipo SISO (*Single-Input Single-Output*), a análise no domínio complexo através da aplicação da transformada de Laplace é vantajosa, reduzindo as equações diferenciais a simples equações algébricas. Dado um sistema linear genérico, e considerando suas condições iniciais nulas, tem-se:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dx}{dt} + b_m x, \quad (15)$$

onde y é a saída do sistema e x é a entrada. Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da Equação (15), obtêm-se:

$$Y(s)[a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n] = [b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m] X(s). \quad (16)$$

A partir desta análise, pode-se definir a função de transferência de um sistema linear como a relação entre a transformada de Laplace da saída e a transformada de Laplace da entrada, dadas condições iniciais nulas. Esta equação possui o comportamento inerente do sistema e nos permite relacionar a entrada com a saída independente da natureza do sinal de excitação ou de entrada. Com base na equação diferencial (15) e sua transformada de Laplace, Equação (16), tem-se a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}. \quad (17)$$

Na função de transferência $G(s)$, a maior potência no denominador determinará a

ordem do sistema, sendo chamado de sistema de ordem n , para $n \geq m$. Para maiores detalhes, vide Ogata (2010).

2.2.2 ESPAÇO DE ESTADOS

A engenharia de controle moderna exige o estudo de sistemas complexos, que muitas vezes possuem diversas entradas e saídas, também chamados de sistemas MIMO. Diante dessa situação e com o avanço das técnicas numéricas para a resolução de equações diferenciais, a análise de sistemas complexos no domínio do tempo se tornou conveniente (OGATA, 2010).

A técnica de representação de sistemas através de espaço de estados se baseia em um conjunto de variáveis que fornecem informações do estado futuro e a saída futura do sistema, com base em seu estado atual e sua respectiva função de entrada. Como as variáveis de estado representam o comportamento dinâmico de um sistema, utiliza-se um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem para representá-las, tal como a Equação (18).

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1m}u_m, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2m}u_m, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nm}u_m. \end{aligned} \quad (18)$$

Neste conjunto de equações, as variáveis de estado (x_1, x_2, \dots, x_n) representam características de um sistema qualquer, que possuem memória e determinam a sua dinâmica, tal como a tensão de um capacitor, velocidade angular de uma peça, temperatura de um processo químico, entre outras variáveis possíveis. Desta maneira, o sistema formado pelas equações diferenciais acima podem ser expressas em forma matricial:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Nesta notação matricial, nomeia-se a matriz coluna contendo as variáveis de estados como vetor de estado x , o vetor dos sinais de entrada como u , e as matrizes que relacionam a taxa de variação do estado ao estado do sistema e aos sinais de entrada como matrizes A e B , respectivamente. Também pode-se relacionar a saída y do sistema diretamente com o vetor de

estado x através da matriz C e o os sinais de entrada u com a saída através da matriz D . Para maiores detalhes sobre, vide Ogata (2010). Com isso, forma-se o seguinte conjunto de equações do espaço de estados:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (20)$$

$$y = Cx + Du. \quad (21)$$

2.2.3 CONVERSÃO DE FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA PARA ESPAÇOS DE ESTADO

Ambas as representações, função de transferência e espaço de estados, podem representar um sistema de forma equivalente, entretanto, em muitas técnicas de projeto de controladores a representação por espaço de estados se faz necessária, logo, pode-se realizar a conversão da forma de representação do sistema. Considere o sistema representado pela seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^2 + a_1s + a_0}, \quad (22)$$

onde b_0 , a_1 e a_0 são os parâmetros do sistemas. Para converter este sistema, primeiramente é necessário obter a representação por equações diferenciais, através da multiplicação cruzada e aplicando a transformada inversa de Laplace (OGATA, 2010):

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0y(t) = b_0u(t). \quad (23)$$

Pode-se fazer as seguintes considerações:

$$x_1(t) = y(t), \quad (24)$$

$$x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}. \quad (25)$$

Aplicando a derivada em ambos os lados das Equações (24) e (25), e fazendo as substituições necessárias, conclui-se que:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad (26)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) + b_0u(t). \quad (27)$$

Organizando as Equações (26) e (27) em notação matricial, obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t), \quad (28)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \quad (29)$$

2.3 MODELAGEM E IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

Para iniciar o estudo de um sistema de controle, normalmente é preciso conhecer seu comportamento dinâmico através das equações que o representam, ou seja, sua modelagem matemática. Conhecendo o comportamento físico e os componentes do sistema, é possível ao projetista traduzir a dinâmica do equipamento em equações, tais como as apresentadas na Seção 2.2. A seguir, apresenta-se a modelagem de motor de corrente contínua, bem como um método de identificação determinística do sistema.

2.3.1 REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA DO MOTOR DE CORRENTE CONTÍNUA

Através do circuito de armadura equivalente, apresentado na Seção 2.1 temos o seguinte equacionamento:

$$V_a(t) = R_a I_a(t) + L_a \frac{dI_a(t)}{dt} + E_a(t). \quad (30)$$

Sabe-se que a tensão induzida E_a é uma função da velocidade angular w_m , do fluxo eletromagnético do estator φ , e de características construtivas do motor. Entretanto, considerando um motor de corrente contínua com imã permanente, seu campo eletromagnético, e consequentemente seu fluxo eletromagnético, podem ser considerados constantes para a região de não-saturação (DEL TORO, 1999). Portanto, a tensão induzida nos enrolamentos será função apenas da velocidade w_m e das características construtivas do motor. Combinando o fluxo constante com as características construtivas do motor por meio da constante K_m :

$$E_a(t) = K_m w_m(t). \quad (31)$$

Portanto, a equação final do circuito elétrico equivalente será:

$$V_a(t) = R_a I_a(t) + L_a \frac{dI_a(t)}{dt} + K_m w_m(t). \quad (32)$$

Outra abordagem necessária para a modelagem matemática do motor é sua representação mecânica. Para isso, é necessário analisar os torques aplicados no rotor do motor, a partir das forças mecânicas existentes. Sabe-se que o torque T_{ind} é induzido no rotor a partir das forças eletromagnéticas presentes, todavia, este torque induzido não é totalmente aplicado ao torque de carga T_c , já que o motor possui outras componentes mecânicas, tais como inércia e atrito. O torque inercial T_J é aquele necessário para colocar a carga inercial do motor em movimento, enquanto que o torque de atrito T_B é aquele que tem origem a partir do atrito entre as partes mecânicas do sistema. A partir disso, é possível realizar a somatória de conjugados presentes no motor:

$$T_{ind}(t) = T_c(t) + T_J(t) + T_B(t). \quad (33)$$

O torque induzido T_{ind} provém da força que é exercida nos condutores, devido a corrente, ao campo eletromagnético e ao comprimento do condutor, logo, é função da corrente de armadura I_a , do fluxo φ e de aspectos construtivos. Analogamente a análise feita para a tensão induzida, o fluxo eletromagnético é constante, devido ao campo oriundo de um ímã permanente. Portanto, combinando o fluxo constante com as características construtivas do motor por meio da constante K_m :

$$T_{ind}(t) = K_m I_a(t). \quad (34)$$

Por sua vez, o torque inercial pode ser representado através da segunda lei de Newton para rotação, no qual o torque é igual ao momento de inércia J multiplicado pela aceleração angular do rotor α_m , com isso:

$$T_J(t) = J \frac{dw_m(t)}{dt}. \quad (35)$$

O torque de carga será tomado pela variável $T_c(t)$, já que depende da carga aplicada ao motor e seu comportamento dinâmico. Por fim, o torque de atrito é um torque oriundo das forças de atrito entre os componentes mecânicos do sistema. Devido a força de atrito cinética, T_B é proporcional a velocidade angular w_m , multiplicado pelo coeficiente de atrito B_c .

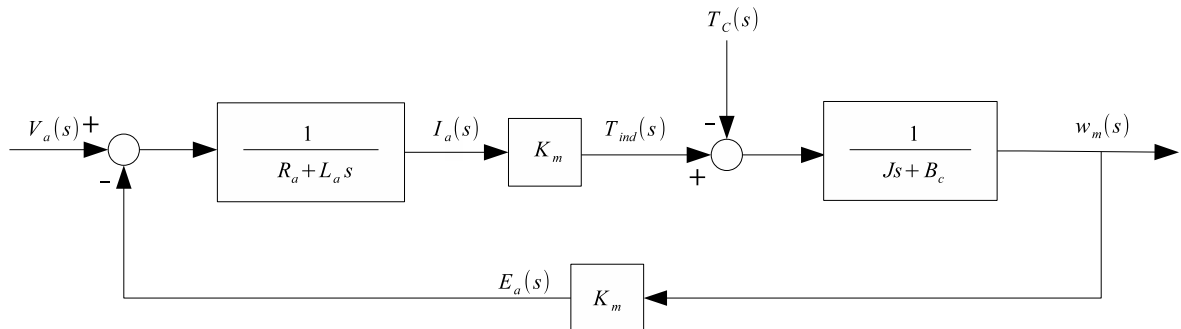
$$T_B(t) = B_c w_m(t). \quad (36)$$

Combinando as Equações (33), (34), (35) e (36), temos a equação que representa o sistema mecânico do motor de corrente contínua:

$$K_m I_a(t) = T_c(t) + J \frac{dw_m(t)}{dt} + B_c w_m(t). \quad (37)$$

Com isso, a combinação entre a Equação (32), que representa o circuito elétrico, e a Equação (37), que representa o sistema mecânico, pode-se representar com boa fidelidade o comportamento dinâmico de um motor de corrente contínua. A partir da representação destas equações no domínio da frequência, por meio da transformada de Laplace, é possível obter o sistema dinâmico dado pela Figura 4.

Figura 4: Diagrama de blocos do motor de corrente contínua.



Fonte: Adaptado de Del Toro (1999).

Considerando que o sistema obtido é linear, a função de transferência do sistema pode ser obtida através do princípio da superposição (OGATA, 2010). Para isto, considere duas situações distintas: a primeira, onde o torque de carga T_c é zero, e a tensão de armadura V_a é diferente de zero; e a segunda situação, onde V_a é nula, e T_c é diferente de zero. Portanto, a função de transferência será dada pela soma das duas funções de transferências obtidas, por

meio da superposição:

$$w_m(s) = G_1(s)V_a(s) + G_2(s)T_c(s), \quad (38)$$

onde,

$$G_1(s) = \frac{K_m}{L_a J s^2 + (R_a J + L_a B_c)s + R_a B_c + K_m^2}, \quad (39)$$

$$G_2(s) = \frac{-(L_a s + R_a)}{L_a J s^2 + (R_a J + L_a B_c)s + R_a B_c + K_m^2}. \quad (40)$$

Neste trabalho, iremos considerar a condição de motor operando sem carga externa acoplada, ou seja, o torque de carga T_c será nulo. Logo, a representação do sistema é dado pela seguinte função de transferência de segunda ordem:

$$\frac{w_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{L_a J s^2 + (R_a J + L_a B_c)s + R_a B_c + K_m^2}. \quad (41)$$

Os parâmetros do motor, R_a , L_a , J e B_c , apresentados na Seção 2.1, podem ser obtidos através de diversos métodos de ensaio, tal como o método tradicional visto em Basilio e Moreira (2001), e outro método exposto em Rocha (2014), no qual é desenvolvido um método de obtenção automática dos parâmetros do motor, com a utilização de uma interface baseada em microcontroladores.

2.3.2 RESPOSTA AO DEGRAU DE UM SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM

O conhecimento do comportamento de um sistema pode ser dado através de sua modelagem, como exposta anteriormente. Contudo, os equipamentos e sistemas ao qual o projetista terá acesso podem possuir parâmetros físicos desconhecidos, ou sua modelagem pode ser de extrema complexidade, inviabilizando seu equacionamento. Outro exemplo são sistemas integrados, ao qual o objeto de estudo é uma combinação de diversos subsistemas menores. Uma analogia muito utilizada para estes sistemas é o de "caixa preta", ao qual não se conhece o conteúdo interno.

Diante deste fato, a identificação determinística de sistemas, com o intuito de se conhecer sua função de transferência, pode ser aplicada. Neste método, aplica-se um sinal de

entrada conhecido, seja um impulso, degrau, rampa, ou outro, e observa-se o comportamento de saída do sistema. Diversos métodos de análise permitem obter a função de transferência do sistema com base nesta resposta. Neste trabalho, nos concentraremos em analisar o método de identificação do sistema baseada na aplicação de um degrau unitário, tal como exposto em Ogata (2010).

Dado um sistema de segunda ordem, o comportamento dinâmico deste pode ser definido com base em dois parâmetros, ω_n , frequência natural não amortecida, e ζ , coeficiente de amortecimento do sistema. Utilizando estes parâmetros, podemos reescrever a equação (22) para um sistema em malha aberta, tal como:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (42)$$

Logo, aplicando um degrau unitário a $G(s)$, temos que a resposta será dada por:

$$Y(s) = U(s)G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (43)$$

Portanto, manipulando e aplicando a transformada inversa de Laplace à Equação (43), obtemos a resposta temporal do sistema de controle, representada pela Equação (44).

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \text{sen}(\omega_d t) \right), \quad (44)$$

onde $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$.

A partir desta equação, Ogata (2010) desenvolve em seu trabalho uma série de definições relativas a resposta transitória do sistema, definindo características e parâmetros, e demonstrando seu respectivo equacionamento. Um breve resumo destas características pode ser observada na Tabela 1.

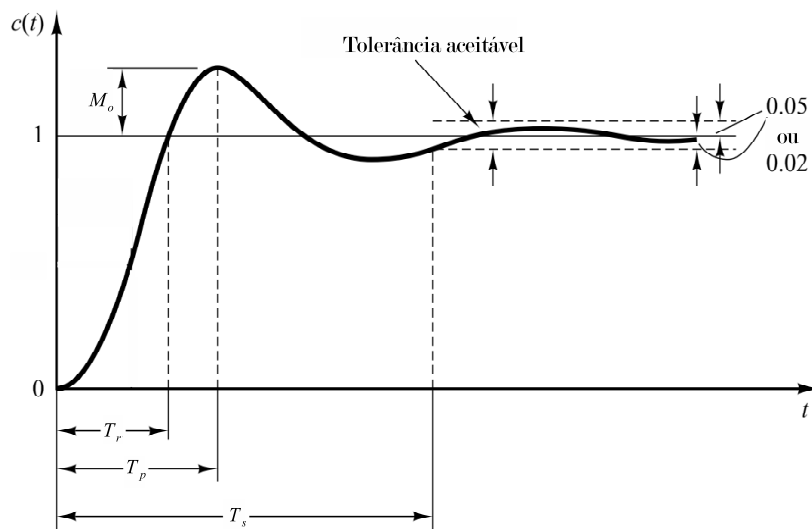
Considerando um sistema de segunda ordem em repouso, a resposta transitória a partir da aplicação de um degrau unitário é característica, conhecida. Isto é justificado pelo fato da resposta do sistema ser dada pela Equação (44), de comportamento oscilatório amortecido, tal como pode ser visto na Figura 5. Portanto, à partir da análise da resposta ao degrau de um sistema, podemos verificar parâmetros tais como os apresentados na Tabela 1, e utilizando as equações apresentadas, estimar ω_n e ζ . Por consequência, aplicando-os na Equação (42),

Tabela 1: Parâmetros de um sistema dinâmico e suas características.

Símbolo	Característica	Descrição	Equação
T_r	Tempo de subida	Tempo necessário para que o sistema passe de 20% a 90% do valor final	$T_r = \frac{2,16\zeta + 0,60}{\omega_n}$
T_p	Tempo de pico	Tempo em que o sistema atinge o primeiro pico de sobressinal	$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$
M_o	Máximo sobressinal	Relação de máxima ultrapassagem sobre o valor final	$M_o\% = e^{\frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} 100\%$
T_s	Tempo de acomodação	Tempo necessário para que o sistema atinja valores próximos ao valor final (5% de tolerância)	$T_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$

Fonte: Autoria própria.

obtêm-se a função de transferência do sistema.

Figura 5: Resposta transitória ao degrau unitário

Fonte: Adaptado de Ogata (2010).

2.4 SISTEMAS DE CONTROLE

O controle de sistemas é realizado com o intuito de que o sistema estudado responda aos estímulos aplicados, a fim de gerar uma saída desejada pelo usuário. Em um exemplo

simples, de um motor elétrico CC, a entrada do sistema pode ser a tensão aplicada a um driver de acionamento, que posteriormente fornece uma tensão CC ao barramento do motor, e a saída do sistema pode ser a velocidade angular do motor (DORF; BISHOP, 2013). Através da utilização de controladores, é possível que o ajuste da entrada de um sistema a ser controlado seja feito de forma contínua e automática, regulando-o para a saída desejada. Para que este controle seja realizado, é necessário a aplicação de uma técnica de controle, das quais pode-se citar o controle PID e o rastreamento de sistemas.

2.4.1 CONTROLADOR PID

Devido a sua simplicidade construtiva e sua capacidade de operar dentro de uma larga faixa de condições ambientes, o controle PID se tornou uma das topologias de controle mais comuns e amplamente utilizadas na indústria mundial (DORF; BISHOP, 2013). Este controlador se baseia na comparação entre uma referência desejada e a saída da planta para a aplicação de um sinal de controle, com o intuito de que a saída da planta rastreie a referência desejada. A equação no domínio do tempo que representa o comportamento desse controlador é dado por (45).

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt}, \quad (45)$$

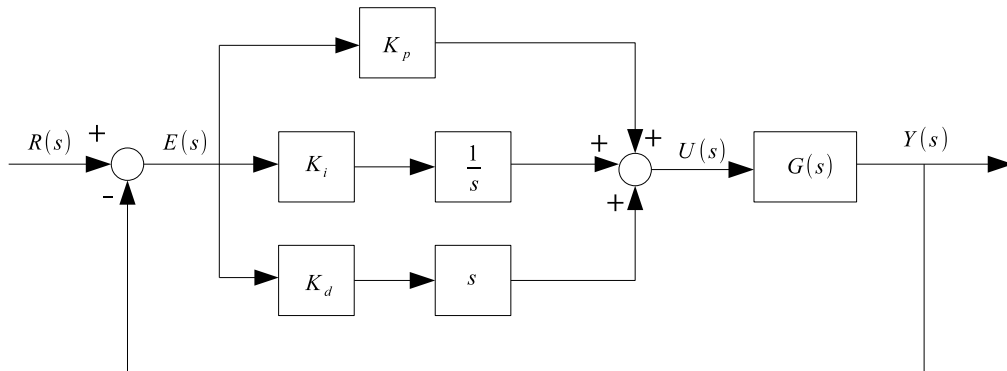
sendo $e(t)$ o erro entre o sinal de referência e a saída do sistema no instante t . A função de transferência no domínio de Laplace do respectivo sistema de controle é dado por:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s. \quad (46)$$

Este controlador, como visto na equação anterior, é fundamentado em três termos principais, sendo eles o termo proporcional K_p , o termo integral K_i e o termo derivativo K_d . Cada um desses termos possui sua relevância na ação do controlador e pode ser ajustado de acordo com o tipo de resposta - seja transitória ou em regime permanente - desejada. O sistema de controle PID pode ser visto na Figura 6, sendo $R(s)$ a referência desejada e $Y(s)$ a saída do sistema de controle.

A ação de controle do termo proporcional é aplicada com o intuito de melhorar a resposta do sistema, já que atua proporcionalmente ao erro. Por sua vez, a ação de controle integral tem por objetivo reduzir e eliminar os erros em regime permanente com a adição de um

Figura 6: Diagrama de blocos do sistema de controle PID.



Fonte: Adaptado de Ogata (2010) .

polo na origem do sistema. Entretanto, este termo pode inserir oscilações na resposta transitória do sistema. Finalmente, a ação de controle derivativa se baseia na taxa de variação do erro, de forma a aplicar uma ação corretiva, aumentando o amortecimento do sistema, diminuindo oscilações. A influência individual dos termos K_p , K_i e K_d sobre o sistema pode ser vista na Tabela 2, sendo T_r o tempo de subida, M_o o máximo sobressinal, T_s o tempo de acomodação ou assentamento, e e_{ss} o erro de regime permanente. Mais detalhes sobre os termos T_r , M_o , T_s , e_{ss} e estabilidade, podem ser vistos em Ogata (2010).

Tabela 2: Influência dos ganhos K_p , K_i e K_d sobre o sistema.

	T_r	M_o	T_s	e_{ss}	Estabilidade
K_p	Decresce	Aumenta	Aumenta pouco	Decresce	Degrada
K_i	Decresce pouco	Aumenta	Aumenta	Decresce muito	Degrada
K_d	Decresce pouco	Decresce	Decresce	Influi pouco	Melhora

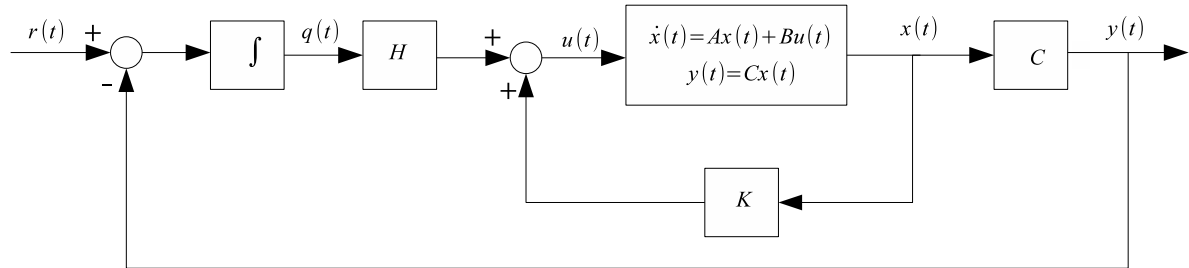
Fonte: Li et al. (2006).

2.4.2 RASTREAMENTO DE SISTEMAS

Ao desenvolver um sistema de controle, um dos principais objetivos é fazer com que a saída da planta realize o rastreamento da entrada do sistema, ou seja, após um instante de tempo determinado sua saída seja idêntica ao sinal de referência utilizado. Para sistemas do tipo zero, isto é, que não possuem polos na origem do plano complexo, uma possível técnica para a realização do rastreamento, dado uma entrada degrau, é a inserção de um integrador

no ramo direto, entre o comparador de erro e a planta, topologia semelhante a um controlador PI (Proporcional Integral) (DORF; BISHOP, 2013). Para o desenvolvimento desta técnica, considere o sistema de controle representado pela Figura 7.

Figura 7: Diagrama do sistema de rastreamento.



Fonte: Adaptado de Silva (2016).

O sistema é representado em espaços de estados, conforme Seção 2.2.2. Define-se então uma nova variável, a ser chamada de $q(t)$:

$$q(t) = \int_0^t (r(t) - y(t)) dt, \quad (47)$$

sendo $r(t)$ o sinal de referência e $y(t)$ o sinal de saída do sistema. Nesta configuração, o sistema é expandido e aumenta-se o número de estados, considerando a variável $q(t)$ como um estado adicional do sistema, já que apresenta informações sobre o comportamento do mesmo. Derivando ambos os lados da Equação (47), obtêm-se:

$$\dot{q}(t) = r(t) - y(t). \quad (48)$$

Ainda, a entrada $u(t)$ de controle pode ser definida como:

$$u(t) = Hq(t) + Kx(t). \quad (49)$$

Substituindo a Equação (49) na Equação (20), que representa o sistema em espaço de estados, temos:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t) + BHq(t), \quad (50)$$

$$y(t) = Cx(t). \quad (51)$$

Reescrevendo na forma matricial as Equações (50) e (51), com a variável adicional $q(t)$, obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BK & BH \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t), \quad (52)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix}. \quad (53)$$

Logo, a definição das matrizes de realimentação K e H de maneira adequada faz com que o sistema seja controlado. Uma possibilidade é a alocação dos polos do sistema de acordo com os valores de K e H , de modo que o sistema tenha um comportamento considerando requisitos desejados de projeto. Tal técnica pode ser vista em Ogata (2010).

2.4.3 CONTROLE ROBUSTO

A utilização de um controlador PID fornece uma resposta adequada para uma ampla faixa de aplicações, entretanto, sua modelagem leva em consideração sistemas lineares invariantes no tempo, condição esta que em aplicações práticas nem sempre pode ser garantida. Além disso, para sistemas que requerem um alto grau de precisão no controle ou então um elevado grau de confiabilidade, o controle PID pode não ser suficiente, já que muitos dos parâmetros modelados provém de aproximações ou considerações de condições ideais de operação. Estes dois problemas de aplicação se originam no fato de que os sistemas físicos podem possuir incertezas quanto a sua modelagem (DORF; BISHOP, 2013). As incertezas de modelagem podem ser oriundas de diversas situações, tais como:

- Imprecisão - no processo de modelagem dos sistemas dinâmicos muitos parâmetros não podem ser mensurados com exatidão, já que os equipamentos de medição possuem precisão limitada;
- Mudança de parâmetros - os parâmetros do sistema modelado podem sofrer diversas mudanças com o passar do tempo, sendo oriundas de fatores ambientais e físicos, como variação de temperatura, desgaste de peças, vibração, lubrificação, entre outros;

- Ruídos - diversos ruídos podem ser inseridos no sistema de controle, modificando a percepção do sistema pelo controlador, tais como erros e oscilações de sensoriamento.

Diante destas incertezas e da necessidade de sistemas de controle cada vez mais confiáveis e que possuam desempenho garantido, utiliza-se como recurso os sistemas de controle robusto. Um sistema pode ser chamado de robusto quando apresenta baixa sensibilidade à variação dos parâmetros, se mantém estável sobre uma faixa aceitável de variação e o desempenho continua a atender as especificações de projeto mesmo sobre variação dos parâmetros.

3 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

3.1 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES

Para um sistema dinâmico linear autônomo, com $u(t) = 0$, tem-se a seguinte equação (BOYD et al., 1994):

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (54)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz contante. Dado este sistema podemos definir uma função de Lyapunov, sendo $P = P' > 0$, com $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$V(x) = x'Px > 0. \quad (55)$$

Tal função é dada como positiva definida, ou seja, $V(x) > 0$ para todos os estados não nulos $x(t)$ e $V(0) = 0$. Para a função possuir estabilidade assintótica, $\dot{V}(x)$ deve ser definida negativa, vide Boyd et al. (1994). Logo, a seguinte expressão deve ser verdadeira:

$$\dot{V}(x) < 0. \quad (56)$$

Derivando a Equação (55), e substituindo $\dot{x}(t)$ pela equação (54), obtêm-se:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}(t)'Px(t) + x(t)'P\dot{x}(t) = x(t)'A'Px(t) + x(t)'PAx(t) = x(t)'(A'P + PA)x(t). \quad (57)$$

Logo, conclui-se que:

$$A'P + PA < 0, \quad (58)$$

$$P > 0. \quad (59)$$

Se as Equações (58) e (59) forem satisfeitas, o sistema (54) é dito estável, sendo esta uma condição necessária e suficiente.

3.2 ESTABILIDADE QUADRÁTICA DE SISTEMAS LINEARES INCERTOS

Para a Equação (58), uma situação possível é de que A não seja precisamente conhecida, mas sim pertencente a um politopo de incertezas, dado por \mathcal{A} (BUZACHERO, 2010). Para isso, a matriz $A(\alpha) \in \mathcal{A}$ será escrita como combinação convexa dos vértices A_j , $j = 1, 2, \dots, N$, conforme a equação seguinte (BOYD et al., 1994):

$$A(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j, \quad (60)$$

onde as seguintes condições devem ser obedecidas:

$$\mathcal{A} = \left\{ A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}; \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1; \alpha_j \geq 0; j = 1, 2, \dots, N \right\}. \quad (61)$$

Para a estabilidade do politopo de incertezas \mathcal{A} , uma condição suficiente é que exista uma matriz $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que as seguintes LMIs sejam satisfeitas:

$$A(\alpha)'P + PA(\alpha) < 0, \quad (62)$$

$$P > 0. \quad (63)$$

Substituindo a Equação (60) na Equação (62), e colocando o somatório em evidência, obtêm-se:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j (A_j'P + PA_j) < 0, \quad (64)$$

para (64), verifica-se que uma condição suficiente para a equação ser verdadeira, e para garantir a estabilidade quadrática do politopo, é:

$$A_j'P + PA_j < 0, \quad (65)$$

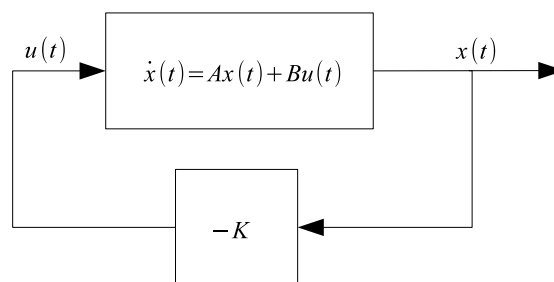
$$P > 0. \quad (66)$$

Deste modo, garante-se a estabilidade do sistema, resultando em índices de desempenho conservadores, entretanto, a estabilidade quadrática vem sendo muito utilizada no desenvolvimento de controladores robustos (BUZACHERO, 2010 apud LEITE et al., 2004).

3.3 CONTROLE VIA REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

Considere um sistema representado por espaços de estados, conforme Equação (20). Caso o sistema possua todos os seus estados acessíveis, é possível desenvolver uma estratégia de controle realimentando sua entrada a partir dos estados do sistema, conforme representado pela Figura 8 (BOYD et al., 1994).

Figura 8: Realimentação de estados.



Fonte: Adaptado de Assunção e Teixeira (2008).

Com isto, o sinal de controle aplicado ao sistema será:

$$u(t) = -Kx(t). \quad (67)$$

Substituindo a Equação (67) na equação que representa o sistema em espaço de estados, Equação (20), a seguinte expressão é verificada:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(-Kx(t)) = (A - BK)x(t). \quad (68)$$

Para obter um controlador de realimentação de estados, basta considerar as condições de estabilidade de Lyapunov, Equações (58) e (59), através das seguintes desigualdades matriciais:

$$P(A - BK) + (A - BK)'P < 0, \quad (69)$$

$$P > 0. \quad (70)$$

Resolvendo a desigualdade matricial acima, obtêm-se o valor da matriz de ganhos K . Entretanto, a desigualdade apresentada é definida com uma BMI (*Bilinear Matrix Inequalities*), pois possui o termo PBK , sendo necessária manipulação (BUZACHERO, 2010). Multiplicando ambos os lados por P^{-1} , definindo $X = P^{-1}$ e $G = KP^{-1}$, temos:

$$AX - BG + XA' - G'B' < 0, \quad (71)$$

$$X > 0. \quad (72)$$

Considerando $X = X'$, após a resolução das desigualdades matriciais, define-se o valor da matriz K , que pode ser dado por $K = GX^{-1}$. Assim, obtêm-se a matriz de realimentação para o sistema apresentado na Figura 8.

De forma análoga, é possível desenvolver um sistema de controle através da realimentação de estados para sistemas em que as matrizes do sistema não sejam precisamente conhecidas, de acordo com o exposto na Seção 3.2. Neste caso, as matrizes A e B são representadas como combinação convexa dos vértices do politopo:

$$A(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j ; B(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j B_j, \quad (73)$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1, \quad (74)$$

com $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, N$. Substituindo $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ por A_j e B_j respectivamente na desigualdade (71), obtêm-se como condição suficiente:

$$A_j X - B_j G + X A_j' - G' B_j' < 0, \quad (75)$$

$$X > 0. \quad (76)$$

De forma similar, a resolução do valor da matriz de ganho de realimentação de estados, K , é dado por $K = GX^{-1}$. Caso as desigualdades sejam satisfeitas para todo e qualquer j , o sistema será factível, e a matriz de realimentação K garantirá estabilidade para estas condições.

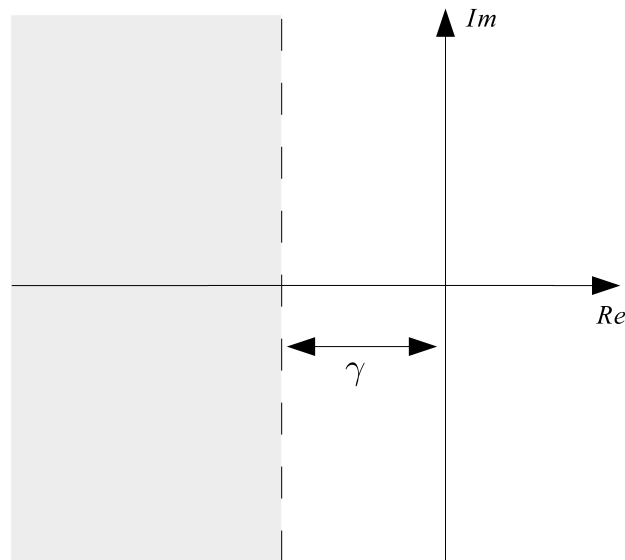
3.4 REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS COM TAXA DE DECAIMENTO

Define-se a taxa de decaimento, também chamado de maior expoente de Lyapunov, como sendo a maior contante positiva γ , que se mantenha para todo $x(t)$, $t > 0$, tal que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\gamma t} \|x(t)\| = 0. \quad (77)$$

De acordo com Faria (2009), a restrição na taxa de decaimento pode ser usada para diminuir o tempo de estabelecimento do sistema, já que os polos do sistema podem ser alocados em uma região mais deslocada em relação ao eixo imaginário, conforme a Figura 9 a seguir:

Figura 9: Região para alocação dos polos, considerando a taxa de decaimento.



Fonte: Autoria Própria.

Utilizando a função quadrática de Lyapunov, dada pela Equação (55), pode-se estabelecer um limite inferior para a taxa de decaimento:

$$\dot{V}(x(t)) \leq -2\gamma V(x(t)). \quad (78)$$

Para sistemas de controle robustos com realimentação dos estados, pode-se escrever:

$$\dot{x}(t) = (A(\alpha) - B(\alpha)K)x(t). \quad (79)$$

Considerando $\dot{V}(x(t))$ e substituindo $\dot{x}(t)$ pela Equação (79), verifica-se:

$$\dot{V}(x(t)) = x(t)'(A(\alpha) - B(\alpha)K)'Px(t) + x(t)'P(A(\alpha) - B(\alpha)K)x(t). \quad (80)$$

Agrupando os termos,

$$\dot{V}(x(t)) = x(t)'[(A(\alpha) - B(\alpha)K)'P + P(A(\alpha) - B(\alpha)K)]x(t). \quad (81)$$

Igualando o resultado obtido na Equação (78), a desigualdade matricial resultante é:

$$(A(\alpha) - B(\alpha)K)'P + P(A(\alpha) - B(\alpha)K) < -2\gamma P. \quad (82)$$

Todavia, a desigualdade (82) se tornou um BMI, tal que deve-se realizar manipulações a fim de adequá-la as LMIs, portanto, multiplica-se os dois lados da inequação por P^{-1} , e fazendo $X = P^{-1}$ e $G = KX$, obtêm-se a seguinte desigualdade matricial:

$$A_jX - B_jG + XA_j' - G'B_j' + 2\gamma X < 0, \quad (83)$$

$$X > 0. \quad (84)$$

Com $j = 1, 2, \dots, N$ sendo condição suficiente para a resolução da inequação. Desta forma, caso as desigualdades sejam factíveis, a matriz K dada por $K = GX^{-1}$, fornece condições para a estabilidade do sistema incerto dado uma taxa de decaimento γ (MANESCO, 2013).

3.5 REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS - \mathcal{D} -ESTABILIDADE

Uma condição essencial no desenvolvimento de um sistema de controle é a sua estabilidade, que pode ser determinada pela alocação dos polos no semiplano esquerdo do plano imaginário. Esta condição pode ser obtida a partir das LMIs observadas no item 3.3. Entretanto, conforme visto, a alocação dos polos no semiplano esquerdo não garante o desempenho do sistema.

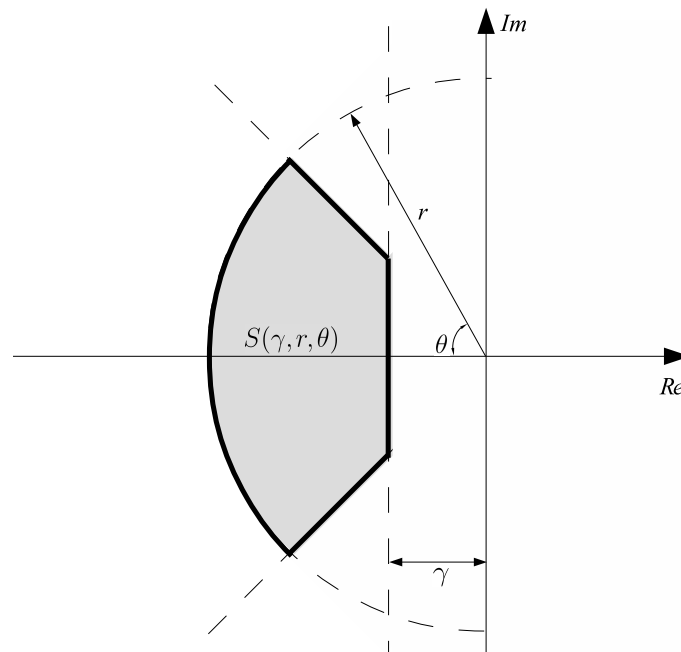
Em um sistema de segunda ordem subamortecido, ω_n e ζ determinam o

comportamento transitório do sistema e são definidos pela localização dos polos (OGATA, 2010). Diversas características, como, tempo de subida, instante de pico, máximo *overshoot* e tempo de acomodação podem ser determinados a partir destas variáveis, tal como apresentado na Seção 2.3.2. Portanto, a localização dos polos é fator primordial para o desempenho do sistema.

Pode-se introduzir parâmetros de desempenho no sistema através de sua alocação em uma região específica do plano, a ser chamada de região S . Conforme exposto em Silva et al. (2013), esta região pode ser definida através da Equação (85), sendo x e y números complexos pertencentes a $S(\gamma, r, \theta)$, e representada pela Figura 10.

$$S(\gamma, r, \theta) = \begin{cases} x < -\gamma < 0, \\ |x + iy| < r, \\ \tan(\theta)x < -|y|. \end{cases} \quad (85)$$

Figura 10: Região $S(\gamma, r, \theta)$.



Fonte: Adaptado de Chilali et al. (1999).

Chilali et al. (1999) demonstra em seu trabalho que pode-se definir uma região no plano complexo através da formulação de LMIs, logo, uma possível forma de alocação dos polos

destinada ao desenvolvimento de um sistema de controle é, aplicar a um sistema a realimentação de estados, de forma semelhante a exposta na Seção 3.3 e 3.4, considerando as novas LMIs que restrinjam os auto-valores do sistema à região $S(\gamma, r, \theta)$.

Em um outro trabalho, Chilali e Gahinet (1994) desenvolvem LMIs baseadas nas condições de Lyapunov para a alocação de polos. Considerando o sistema dinâmico apresentado na seção 3.3, e aplicando a metodologia para sistemas incertos citada, temos as seguintes LMIs:

$$A_j X - B_j G + X A_j' - G' B_j' + 2\gamma X < 0, \quad (86)$$

$$\begin{bmatrix} -rX & X A_j' - G' B_j' \\ A_j X - B_j G & -rX \end{bmatrix} < 0 \quad (87)$$

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(A_j X + X A_j' - B_j G - G' B_j') & \text{cos}(\theta)(X A_j' - G' B_j' - A_j X + B_j G) \\ \text{cos}(\theta)(A_j X - X A_j' - B_j G + G' B_j') & \text{sen}(\theta)(X A_j' - G' B_j' + A_j X - B_j G) \end{bmatrix} < 0 \quad (88)$$

$$X > 0. \quad (89)$$

Portanto, caso as desigualdades matriciais lineares (86), (87), (88) e (89), sejam factíveis, pode-se afirmar que um sistema é \mathcal{D} -estável, com todos os seus polos contidos em uma subregião do plano complexo, $S(\gamma, r, \theta)$. Neste sistema com realimentação, os ganhos da matriz de controle K podem obtidos através da manipulação $K = GX^{-1}$.

4 CONTROLADOR PID ROBUSTO

Sabe-se que diversos sistemas dinâmicos possuem parâmetros incertos, devido a motivos físicos, ambientais e matemáticos. Com isso, pode-se classificar as incertezas em quatro tipos, paramétricas, não-paramétricas, estruturadas e não-estruturadas (FISCHMAN, 1993). As incertezas paramétricas são aquelas oriundas da variação ou falta de conhecimento dos exatos valores dos parâmetros, as não-paramétricas provem de processos ou dinâmicas não consideradas durante a modelagem matemática do sistema. Nesse sentido, as incertezas estruturadas são aquelas da qual se tem conhecimento sobre como ela afeta os elementos matemáticos da função de transferência, e as incertezas não estruturadas são as que não se tem nenhum conhecimento sobre como elas afetam matematicamente o sistema.

A representação de sistemas incertos é feita considerando que os parâmetros estão contidos dentro de uma faixa de valores, faixa esta conhecida, estimada ou desconhecida. Pode-se representar estes sistemas através da Equação (90).

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_0 = 0. \quad (90)$$

para $i = 0, 1, \dots, n$, onde os coeficientes da equação são dados por $a_i \in [\underline{a}_i, \overline{a}_i]$, sendo \underline{a}_i e \overline{a}_i os limitantes inferiores e superiores de a_i , respectivamente.

Com base em um sistema genérico de segunda ordem, segue-se para o desenvolvimento de um controlador PID robusto via espaço de estados (GE et al., 2002). Considere a seguinte função de transferência, com incertezas paramétricas:

$$G(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1s + a_0}, \quad (91)$$

sendo os parâmetros incertos representados pela variável contida dentro do intervalo:

$$a_1 \in [\underline{a}_1, \overline{a}_1], a_0 \in [\underline{a}_0, \overline{a}_0], b_0 \in [\underline{b}_0, \overline{b}_0]. \quad (92)$$

Considere a função de transferência (91) representada no espaço de estados, representação esta que pode ser obtida através de sua conversão, conforme exposto na Seção 2.2.3. Para o desenvolvimento de um sistema de controle, tem-se a necessidade de definir o sinal de controle $u(t)$. Conforme visto na Seção 2.4.1, o sinal de controle obtido através de um

controlador PID pode ser definido como:

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} + K_i \int_0^t e(t) dt, \quad (93)$$

onde:

$$e(t) = r(t) - y(t). \quad (94)$$

Combinando as Equações (93) e (94), obtêm-se a seguinte expressão:

$$u(t) = K_p(r(t) - y(t)) + K_d \frac{d(r(t) - y(t))}{dt} + K_i \int_0^t (r(t) - y(t)) dt. \quad (95)$$

Aplicando a multiplicação distributiva:

$$u(t) = K_p r(t) - K_p y(t) + K_d \frac{dr(t)}{dt} - K_d \frac{dy(t)}{dt} + K_i \int_0^t (r(t) - y(t)) dt. \quad (96)$$

Para o desenvolvimento do sistema de controle, considera-se as seguintes equivalências de estado:

$$x_1(t) = y(t), \quad (97)$$

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t), \quad (98)$$

$$x_3(t) = - \int_0^t (r(t) - y(t)) dt. \quad (99)$$

Aplicando as substituições necessárias na Equação (96):

$$u(t) = K_p r(t) - K_p x_1(t) + K_d \frac{dr(t)}{dt} - K_d x_2(t) - K_i x_3(t). \quad (100)$$

Reorganizando os termos, obtêm-se:

$$u = -Kx(t) + K_p r(t) + K_d \dot{r}(t), \quad (101)$$

onde $K = [K_p, K_d, K_i]$. O sistema de controle completo pode ser representado na forma matricial aumentada, pelas seguintes equações:

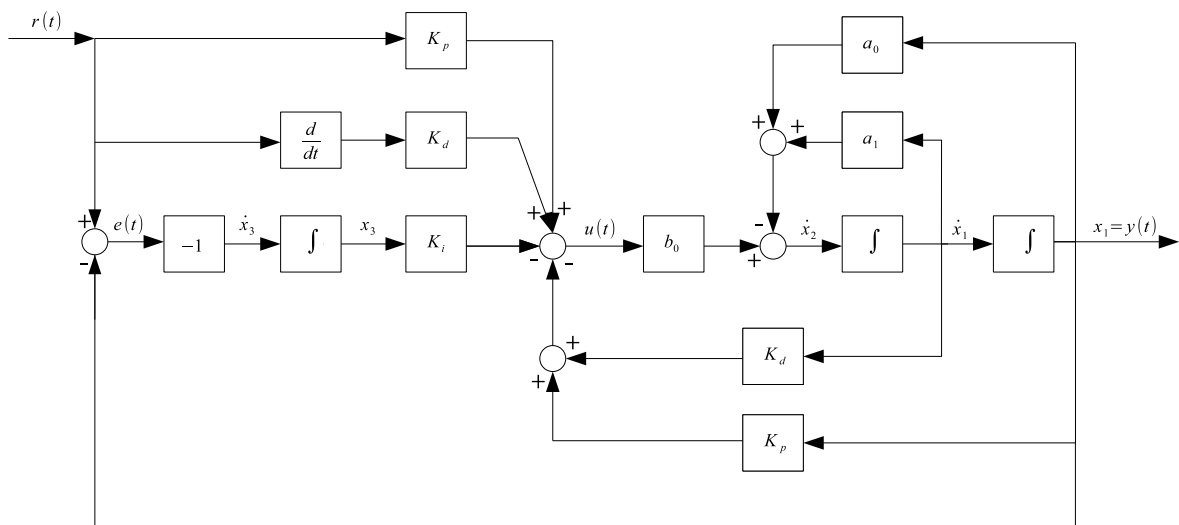
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} r(t), \quad (102)$$

$$u(t) = - \begin{bmatrix} K_p & K_d & K_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + K_p r(t) + K_d \dot{r}(t), \quad (103)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}. \quad (104)$$

A Figura 11 representa o sistema de controle obtido.

Figura 11: Sistema de controle PID robusto.



Fonte: Adaptado de Ge et al. (2002)

Nesta representação por espaço de estados, o controlador PID robusto torna-se um controlador por realimentação estática dos estados, onde o ganho K é dado pelos ganhos do controlador PID. Verifica-se na literatura, diversas técnicas de controle de motores CC, entretanto, é comum a representação dos estados utilizando a velocidade angular w_m e a corrente de armadura I_a , tal como visto em Basilio e Moreira (2001), logo, dois estados devem estar acessíveis e serem observáveis. Todavia, diferente de um controlador convencional por realimentação de estados, o *design* do controlador proposto trás consigo a vantagem de

necessitar apenas da leitura da variável $y(t)$, já que os outros estados podem ser mensurados em função de $y(t)$, permitindo uma implementação simplificada.

Para o desenvolvimento do controlador, deve-se levar em consideração os três parâmetros incertos dados na Equação (102). Os ganhos do controlador PID robusto, representados pela matriz K , devem garantir a estabilidade e os requisitos de projetos para todos os conjuntos de incertezas (GE et al., 2002). Para sua análise, deve-se considerar as possibilidades resultantes entre as combinações dos pontos extremos dos conjuntos representados pela Equação (92). O conjunto politópico incerto pode ser dado por:

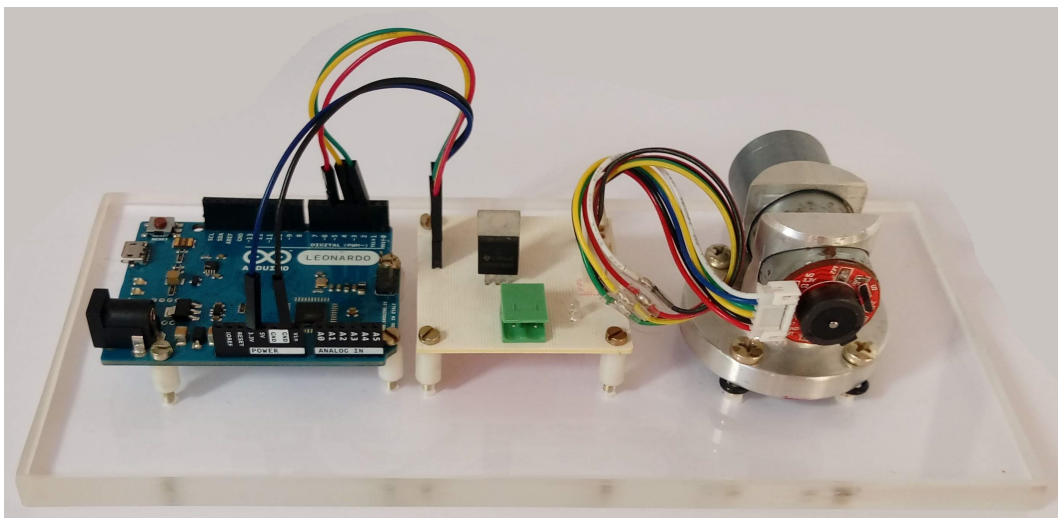
$$\Omega = \text{Cov} \{ [A_1, B_2], [A_2, B_2], \dots, [A_8, B_8] \}. \quad (105)$$

Uma forma de encontrar a matriz K é com a utilização das LMIs apresentadas no Capítulo 3, que retornará um ganho robusto que satisfaz todo o conjunto de incertezas.

5 MATERIAIS E MÉTODOS

Para a implementação do sistema, buscou-se a utilização de equipamentos simples e de fácil acesso, a fim de permitir a reprodutibilidade do sistema. Parte destes equipamentos foram previamente desenvolvidos por Bonzanini (2017), disponíveis em seu trabalho intitulado "Estudo de técnicas de controle PID aplicado em motor CC". O equipamento desenvolvido por Bonzanini pode ser visto na Figura 12.

Figura 12: Estrutura e equipamentos de controle utilizados



Fonte: Autoria própria.

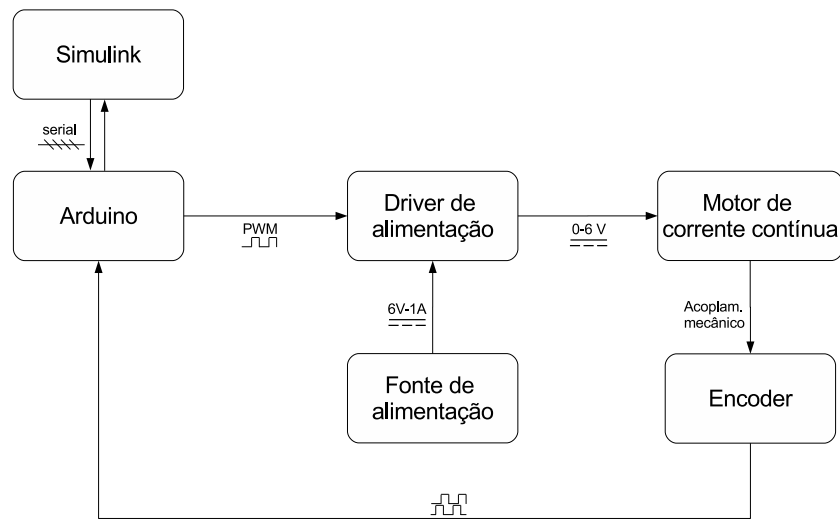
No sistema desenvolvido, o motor de corrente contínua é alimentado por um *driver* de alimentação, a ser acionado pelo sinal oriundo de uma placa comunicadora Arduino[®]. Por sua vez, o controle e processamento de dados é realizado pelo *software* Simulink[®] com base no sinal de velocidade do motor. O fluxograma detalhado do sistema de controle realizado pode ser visto na Figura 13.

A seguir, descreve-se brevemente os materiais e equipamentos utilizados, bem como a interface de controle desenvolvida no software Simulink[®].

5.1 MOTOR DE CORRENTE CONTÍNUA

Conforme apresentado na seção 2.1, o motor de corrente contínua se apresenta como uma boa opção para aplicações em processos industriais, automação, e robótica. Para o

Figura 13: Fluxograma de implementação



Fonte: Autoria própria.

desenvolvimento deste trabalho, utilizou-se um motor de corrente contínua voltado para a aplicação em robótica e eletrônica didática, dado sua disponibilidade e fácil acesso. Este equipamento possui *encoder* de posição integrado, permitindo o monitoramento de sua posição angular, essencial para o desenvolvimento do sistema de controle. O motor de corrente contínua utilizado pode ser visto na Figura 14.

Figura 14: Motor CC com *encoder* acoplado



Fonte: Baú da Eletrônica Componentes Eletrônicos Ltda (2017).

O equipamento possui elevado torque mecânico, devido a sua caixa de redução acoplada, permitindo a utilização com cargas de alto momento de inércia. Alimentado por uma fonte de tensão contínua de 6V, sua velocidade nominal é de 300 rpm, atingindo 6120 rpm em seu eixo rotor. Seu *encoder* é do tipo magnético, de efeito Hall, sensível as variações do fluxo magnético geradas pelo imã acoplado em seu eixo rotor. Demais especificações estão disponíveis na Tabela 3.

Tabela 3: Características técnicas do motor

Parâmetro	Valor
Tensão nominal	6 V
Velocidade nominal	300 rpm
Torque máximo	1,8 kg.cm - 160 rpm
Máxima eficiência	0,7 kg.cm - 245 rpm
Taxa de redução	1:20,4
<i>encoder</i>	11 pulsos/rpm

Fonte: Adaptado de Baú da Eletrônica Componentes Eletrônicos Ltda (2017).

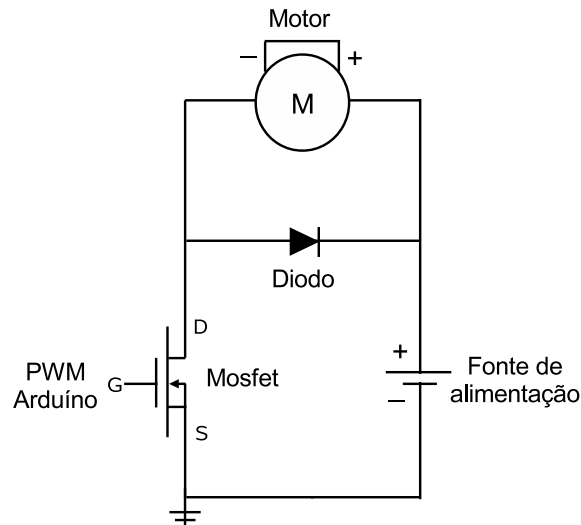
Considerando que a medição da posição feita pelo *encoder* é realizada antes de redução de velocidade, pode-se concluir que a resolução útil do *encoder*, dada pela taxa de redução multiplicada pela resolução do *encoder*, é de 224,4 pulsos por revolução, garantido alta precisão nas medições, essencial para o bom desenvolvimento de um sistema de controle.

5.2 DRIVER DE ALIMENTAÇÃO

A alimentação do motor é normalmente realizada por meio de uma fonte de tensão constante de 6V, todavia, a estratégia de controle utilizada exige que o sinal de alimentação seja modulado, variável. Considera-se também que a placa de comunicação não possui potência suficiente para a alimentação direta do motor. Portanto, utilizou-se um *driver* de acionamento, no qual uma chave de potência modula a tensão de alimentação do motor, com base no sinal PWM proveniente do sistema de controle. O circuito do *driver* de alimentação pode ser visto na Figura 15.

Bonzanini (2017) utilizou em seu trabalho a chave de potência MOSFET (*Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor*) CSD18534KCS, controlada pelo sinal oriundo da placa de comunicação Arduino[®], a ser aplicado em seu *gate*. Quando acionada, a chave de potência conduz e permite a alimentação direta do motor. Em um segundo momento, quando desligada, a chave cria um circuito aberto, impedindo a circulação de corrente e alimentação do motor.

Figura 15: Circuito de acionamento do motor



Fonte: Adaptado de Messner (2017).

Todavia, considerando que o motor possui impedância indutiva, se faz necessário a utilização de um diodo de roda livre, a fim de permitir a circulação de correntes indutivas que possam danificar o *driver*. Por meio desta metodologia, é possível modular a potência de alimentação do motor através do chaveamento PWM gerado pela placa de comunicação.

5.3 PLACA DE COMUNICAÇÃO

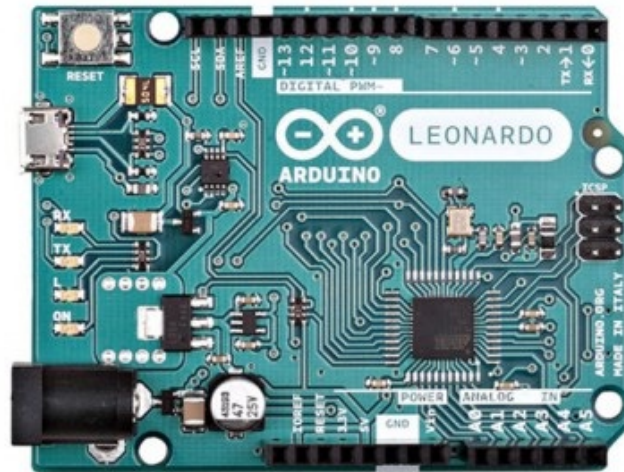
A placa de comunicação tem como principal objetivo realizar a leitura e pré-processamento dos sinais emitidos pelo *encoder*, disponibilizando-os à interface de controle, bem como atuar sobre o *driver* de alimentação, por meio de um sinal PWM (*Pulse-Width Modulation*).

Utilizou-se a placa microcontroladora Arduino[®] Leonardo. Baseada no chip ATmega32U4, esta placa possui 20 entradas/saídas digitais, das quais 7 podem ser usadas como saídas analógicas simuladas (PWM). A plataforma possui clock de 16MHz, além de conexões USB, serial e de alimentação (ATMEL CORPORATION, 2014).

O pulso de tensão gerado pelo *encoder* é lido pela placa de comunicação, através de uma de suas entradas digitais, que incrementa um registrador a cada novo pulso emitido. Esta informação é então enviada ao software Simulink[®] através da comunicação USB. Após o

processamento deste sinal pelo software, o sinal de controle é enviado a placa, que emite um sinal PWM em uma de suas saídas digitais. O *duty-cycle* do sinal emitido é variável, sendo determinado pelo respectivo sinal de controle. A placa Arduino[®] Leonardo é apresentada na Figura 16.

Figura 16: Placa de desenvolvimento Arduino Leonardo



Fonte: Arduino (2018).

5.4 INTERFACE DE CONTROLE

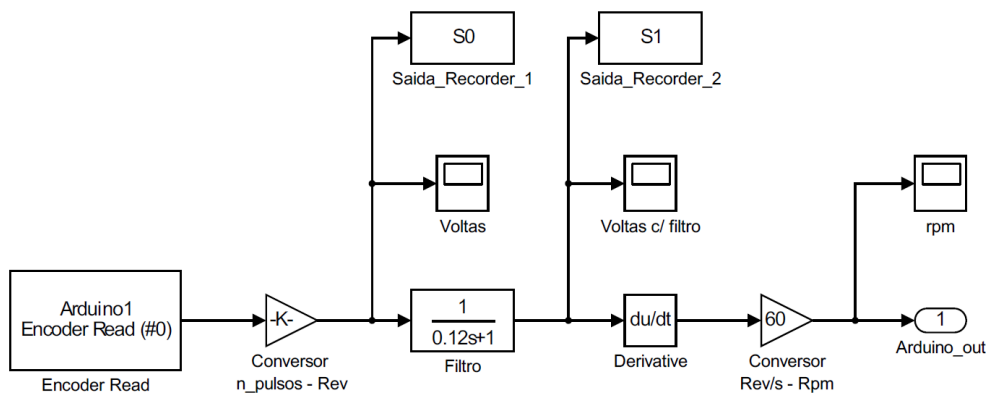
O *software* Simulink[®] é um ambiente para programação e simulação multidomínio, baseado em diagrama de blocos. Desenvolvido pela MathWorks[®], permite a integração com diversos *softwares* e *hardwares*, tais como a placa Arduino[®] utilizada.

Com a utilização do pacote Arduino IO Package, desenvolvido por Campa (2016), conectou-se a placa de comunicação com o software, a fim de realizar o processamento de seu sinal. A placa de comunicação possui uma codificação embarcada, realizando a leitura dos sinais capturados e retransmitindo para o software. Da mesma forma, após o processamento do sinal de controle pelo Simulink[®], o sinal é enviado para a placa por meio de comunicação serial, a uma taxa de 200 Hz. O sistema de controle proposto necessita apenas que a variável de estado velocidade esteja disponível, para tal, a placa de comunicação captura o sinal proveniente do *encoder*.

A cada pulso emitido pelo *encoder* do motor, um registrador é incrementado na

memória interna do Arduino® e enviado ao software Simulink®. Primeiramente, aplica-se um ganho ao sinal, com o objetivo de converter o número de pulsos emitido em número de revoluções. Posteriormente, filtra-se o sinal, a fim de eliminar ruídos e atenuar o efeito de sua discretização, para que então, seja finalmente derivado, obtendo sua taxa de variação - a velocidade angular. A Figura 17 representa o diagrama de blocos desenvolvido no software para a obtenção do sinal de velocidade.

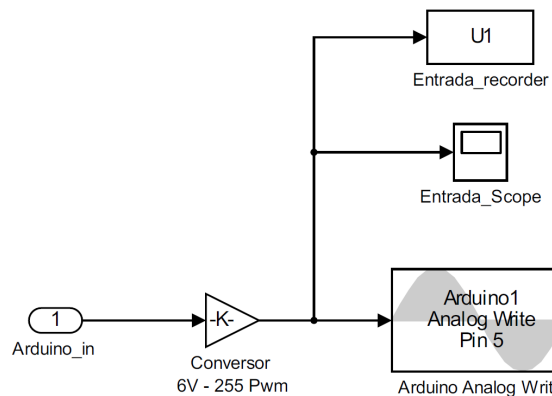
Figura 17: Diagrama de blocos para obtenção do sinal



Fonte: Autoria própria.

O sinal a ser aplicado ao *driver* de alimentação é do tipo PWM, que irá controlar a chave de potência à alimentar o motor. O sinal deve estar entre uma faixa de 0 à 255, valor aceitável pelo registrador PMW da placa, portanto o sinal é convertido e então aplicado à porta analógica do Arduino®, conforme visto na Figura 18.

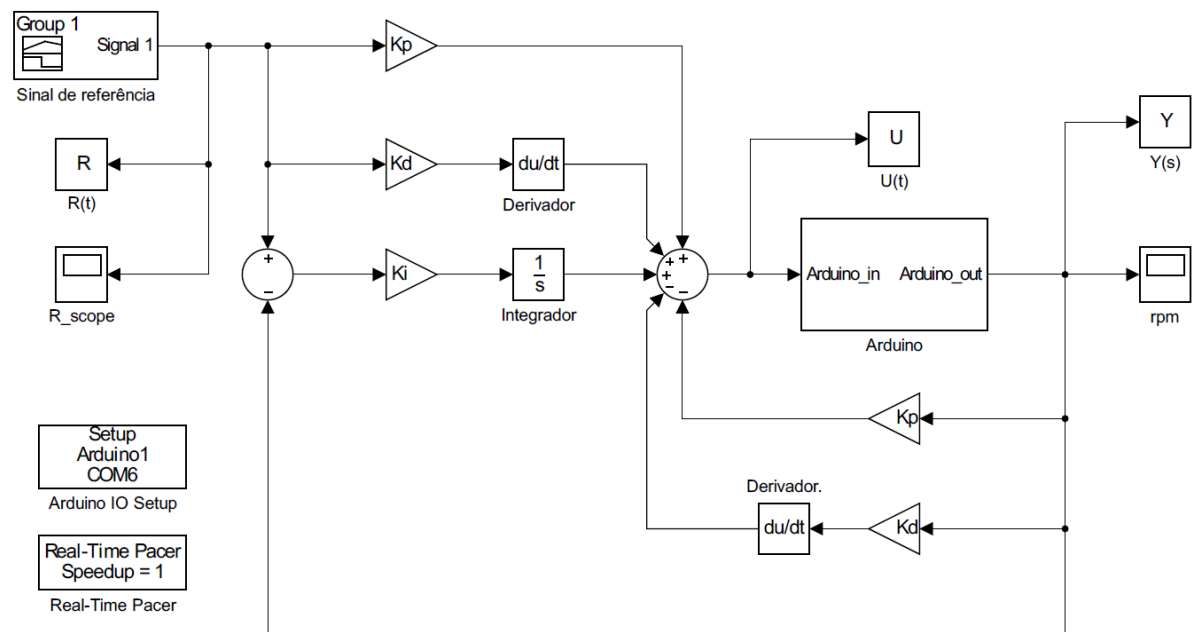
Figura 18: Diagrama de blocos - Sinal de controle



Fonte: Autoria própria.

Com base no sistema de controle apresentado por Ge et al. (2002) e no desenvolvimento desta interface de comunicação, implementou-se o sistema de controle representado pela Figura 19. O sistema se trata de um controlador PID robusto, que controla a velocidade angular do motor de corrente contínua. Aplica-se como entrada para o sistema um sinal de referência, permitindo observar a variável de estado velocidade. Demais variáveis de estado são estimadas pelo sistema conforme exposto no Capítulo 4, enquanto os ganhos do controlador, K_p , K_i e K_d , são obtidos pela resolução das LMIs propostas neste trabalho. Por fim, um sinal de controle adequado para o controle do sistema é aplicado. Nesta representação, os diagramas representados pelas Figuras 17 e 18 estão agrupados no subsistema "Arduino", para melhor visualização.

Figura 19: Diagrama do controlador desenvolvido



Fonte: Autoria própria.

6 DESENVOLVIMENTO

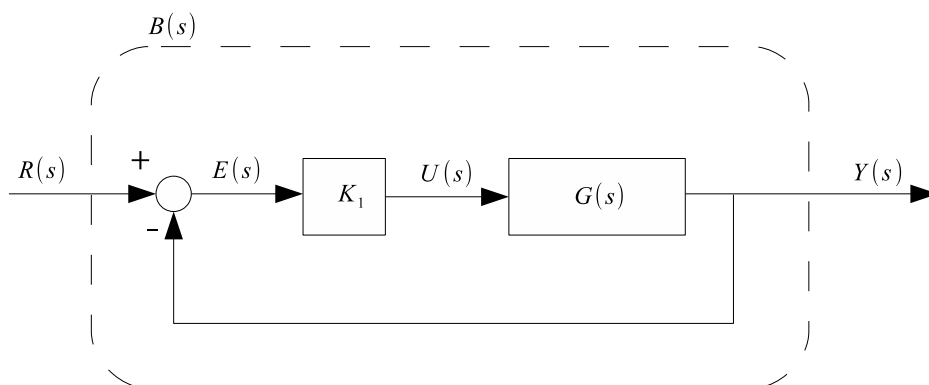
Neste capítulo apresenta-se o desenvolvimento do sistema de controle, partindo da obtenção da função de transferência do sistema robusto, até o projeto dos ganhos do controlador à partir de LMIs, utilizando taxa de decaimento e \mathcal{D} -estabilidade.

6.1 CAPTURA DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

Para o desenvolvimento do sistema de controle e sua sintonia, é importante conhecer os parâmetros reais do sistema. Para isto, utilizou-se o método de identificação tal como apresentado na Seção 2.3.2, afim de obter sua função de transferência. O método baseia-se em observar a curva de reação do sistema diante da aplicação de um sinal do tipo degrau, e então, estimar seus parâmetros.

Dada a sensibilidade do sistema e a alta taxa de ruído, optou-se pela aplicação do método em malha fechada, permitindo uma melhor visualização de sua resposta. Portanto, o método de identificação é aplicado a um sistema equivalente, a ser chamado de $B(s)$, sendo necessária a manipulação algébrica do resultado para a obtenção do sistema objetivo de estudo, $G(s)$. O sistema em malha fechada utilizado pode ser visto na Figura 20.

Figura 20: Sistema de captura em malha fechada



Fonte: Autoria própria.

A fim de garantir a robustez do sistema durante seu desenvolvimento, realizou-se as medições considerando toda a faixa de atuação do motor, que vai até 300 rpm. As medições foram realizadas aplicando um degrau de referência no sistema, com intervalos de 50 rpm,

a se iniciar em 100 rpm, visto que abaixo deste valor o motor apresentou dificuldades em iniciar seu movimento, devido ao baixo nível de tensão. As medições foram executadas até 350 rpm, garantindo a validade dos parâmetros em casos de overshoot e ampliando a área de parametrização do motor. A partir dos degraus de referência aplicados, observou-se o comportamento transitório, em especial o tempo de pico, T_p , máximo sobressinal M_o , e o valor de saída em regime permanente. Os resultados obtidos para $B(s)$ estão contidos na Tabela 4.

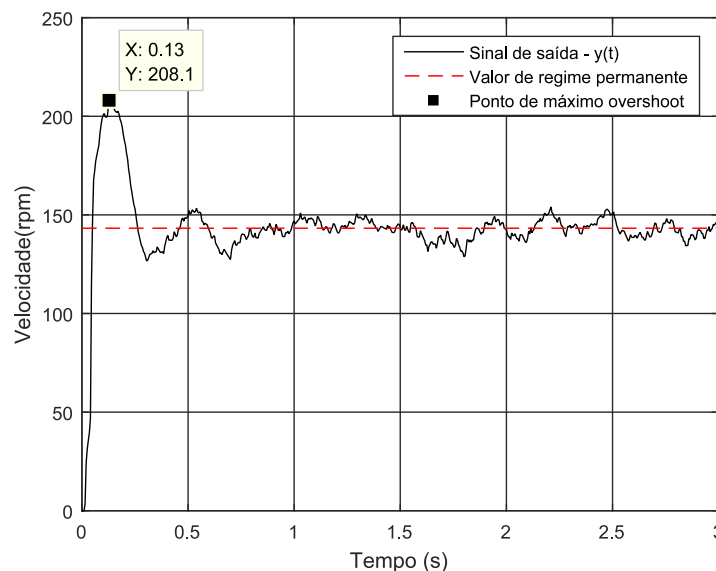
Tabela 4: Comportamento transitório de $B(s)$.

n	R(s) [rpm]	T_p [s]	M_o [%]	$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ [rpm]
1	100	0,145	42,18	63,06
2	150	0,155	42,22	105,63
3	200	0,130	45,31	143,24
4	250	0,140	36,85	183,36
5	300	0,145	25,94	221,98
6	350	0,140	20,99	255,69

Fonte: Autoria própria.

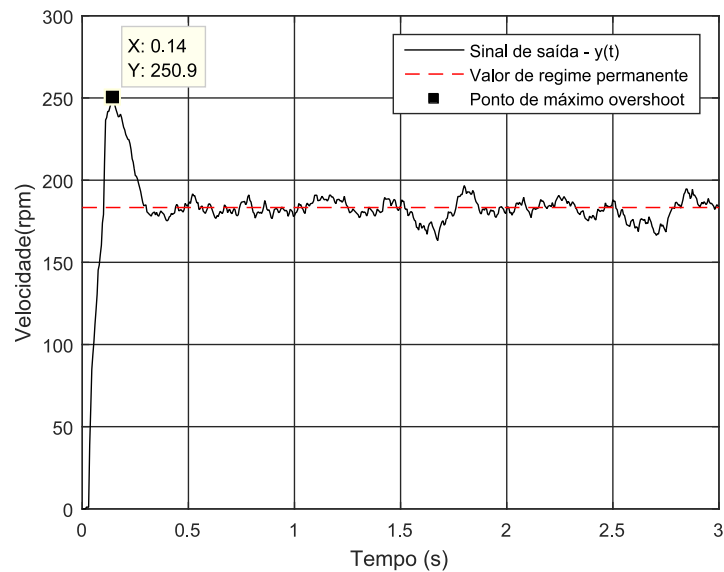
As curvas de reação das medições n^o3 e n^o4 podem ser visualizadas nas Figuras 21 e 22, respectivamente.

Figura 21: Curva de reação de B(s), para R(s)=200 rpm.



Fonte: Autoria própria.

Figura 22: Curva de reação de B(s), para R(s)=250 rpm.



Fonte: Autoria própria.

Em seguida, com base nos valores apresentados na Tabela 4, foi possível estimar a frequência natural não amortecida, ω_n , e o coeficiente de amortecimento do sistema, ζ . Considerando que um sistema subamortecido de segunda ordem pode ser escrito em função de ω_n e ζ , como visto na Equação (42), obtêm-se a função de transferência de $B(s)$. A função de transferência desejada no entanto, é $G(s)$, que pode ser obtida através da manipulação seguinte, sendo b_0 , a_1 e a_0 os respectivos coeficientes do sistema :

$$G(s) = \frac{B(s)}{K_1(1 - B(s))} = \frac{b_0}{s^2 + a_1s + a_0}. \quad (106)$$

Os valores dos coeficientes do sistema $G(s)$, obtidos para cada medição, são apresentados na Tabela 5.

Observa-se que durante a execução das medições, o comportamento do sistema e o respectivo resultado final variavam de acordo com a magnitude do degrau de referência. Ou seja, para cada degrau aplicado, uma respectiva função de transferência era obtida. Isto pode ser explicado ao fato do sistema real não ser puramente linear, bem como a incidência de fatores físicos, tais como a temperatura, precisão do sistema de medição, ruídos, assim como apresentado na Seção 2.4.3. Um fato observado foi a influência da temperatura na resposta do sistema, após um tempo de utilização, o motor e a fonte de alimentação se aqueciam,

Tabela 5: Coeficientes do sistema $G(s)$.

n	b_0	a_1	a_0
1	19100	11,91	186,5
2	18670	11,13	130,6
3	26690	12,18	176,2
4	24400	14,26	147,8
5	24690	18,61	144,6
6	27520	22,30	169,2

Fonte: Autoria própria.

aumentando a incidência de ruídos e oscilações, prejudicando o desempenho do sistema. A seção seguinte apresenta a modelagem do sistema robusto e do controlador à partir dos parâmetros obtidos nesta etapa.

Considerando a variação dos parâmetros observada, é previsto no desenvolvimento do controlador robusto utilizando as LMIs apresentadas no Capítulo 3, a situação em que um parâmetro não seja precisamente conhecido, mas pertencente a um politopo de incertezas. Para os resultados observados, pode-se considerar portanto que:

$$18670 \leq b_0 \leq 27520, \quad (107)$$

$$11,13 \leq a_1 \leq 22,30, \quad (108)$$

$$130,6 \leq a_0 \leq 186,5. \quad (109)$$

6.2 MODELAGEM DO SISTEMA DE CONTROLE ROBUSTO

Com os parâmetros do sistema disponíveis, o próximo passo foi o pré-projeto do controlador. Primeiramente, aplicou-se a modelagem apresentada por Ge et al. (2002), desenvolvendo no sistema um controlador PID e convertendo-o para a notação utilizada, espaço de estados. Maiores detalhes podem ser vistos no Capítulo 4.

Afim de adicionar mais robustez ao sistema, introduziu o conceito de falha na realimentação. Considerando que a realimentação do sistema é dada pela variável $u(t)$, pode-se simular uma falha no atuador do sistema inserindo na matriz B uma constante F_r , a atenuar o sinal de realimentação. Com isso, considerando a incerteza dos parâmetros, b_0 terá um novo valor mínimo, dada a possível atenuação de realimentação. O projeto do controlador levará em consideração uma falha de até 30% na realimentação do sistema, portanto:

$$0,7 \leq F_r \leq 1. \quad (110)$$

O sistema equivalente obtido é:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F_r b_0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} r(t), \quad (111)$$

$$u(t) = - \begin{bmatrix} K_p & K_d & K_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + K_p r(t) + K_d \dot{r}(t), \quad (112)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}. \quad (113)$$

A análise robusta deve levar em consideração a incerteza e variação do parâmetro obtido. No projeto do controlador utilizando as LMIs desenvolvidas, é visto que considerar os vértices de cada parâmetro é suficiente para modelar sua variação, sendo seus vértices, máximos e mínimos obtidos para cada parâmetro do sistema. Todavia, deve-se considerar todas possibilidades e combinações resultantes entre os vértices de cada parâmetro, a fim de garantir a robustez em todos os pontos possíveis do sistema.

A quantidade de equações características possíveis é dada por 2^n , sendo n o número de parâmetros incertos. Em nosso projeto, $n = 3$. Sendo A e B as matrizes contendo os parâmetros, temos portanto, um politopo contendo 8 vértices, a ser dado por:

Vértice 1 (a_0 máximo, a_1 máximo, b_0 máximo):

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -186,5 & -22,30 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 27520 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (114)$$

Vértice 2 (a_0 máximo, a_1 máximo, b_0 mínimo):

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -186,5 & -22,30 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 13069 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (115)$$

Vértice 3 (a_0 máximo, a_1 mínimo, b_0 máximo):

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -186,5 & -11,13 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 27520 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (116)$$

Vértice 4 (a_0 máximo, a_1 mínimo, b_0 mínimo):

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -186,5 & -11,13 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 13069 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (117)$$

Vértice 5 (a_0 mínimo, a_1 máximo, b_0 máximo):

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -130,6 & -22,30 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 27520 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (118)$$

Vértice 6 (a_0 mínimo, a_1 máximo, b_0 mínimo):

$$A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -130,6 & -22,30 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 13069 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (119)$$

Vértice 7 (a_0 mínimo, a_1 mínimo, b_0 máximo):

$$A_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -130,6 & -11,13 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 27520 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (120)$$

Vértice 8 (a_0 mínimo, a_1 mínimo, b_0 mínimo):

$$A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -130,6 & -11,13 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ 13069 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (121)$$

6.3 PROJETO DO CONTROLADOR - TAXA DE DECAIMENTO

Após a análise inicial, o próximo passo é aplicar a LMI desenvolvida para a taxa de decaimento, no sistema obtido. Inicialmente é necessário definir o valor da taxa de decaimento do sistema, sendo para este trabalho $\gamma = 1,66$, valor definido empiricamente com base em testes realizados. Em seguida, utilizando o software Matlab[®], em conjunto com a biblioteca YALMIP e o solver SeDuMi, resolveu-se as seguintes desigualdades matriciais:

$$A_j X - B_j G + X A_j' - G' B_j' + 2\gamma X < 0, \quad (122)$$

$$X > 0, \quad (123)$$

onde $j = 1, 2, 3, \dots, 8$. Neste sistema, o valor da matriz K , que contem os ganhos do controlador é dada por $K = GX^{-1}$, portanto:

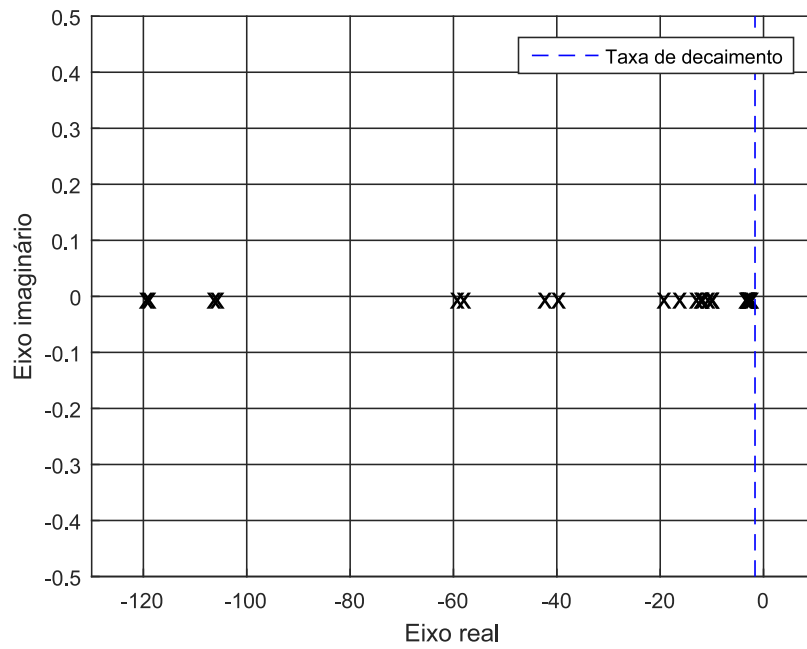
$$K_p = 0,0691, \quad (124)$$

$$K_i = 0,2481, \quad (125)$$

$$K_d = 0,0042. \quad (126)$$

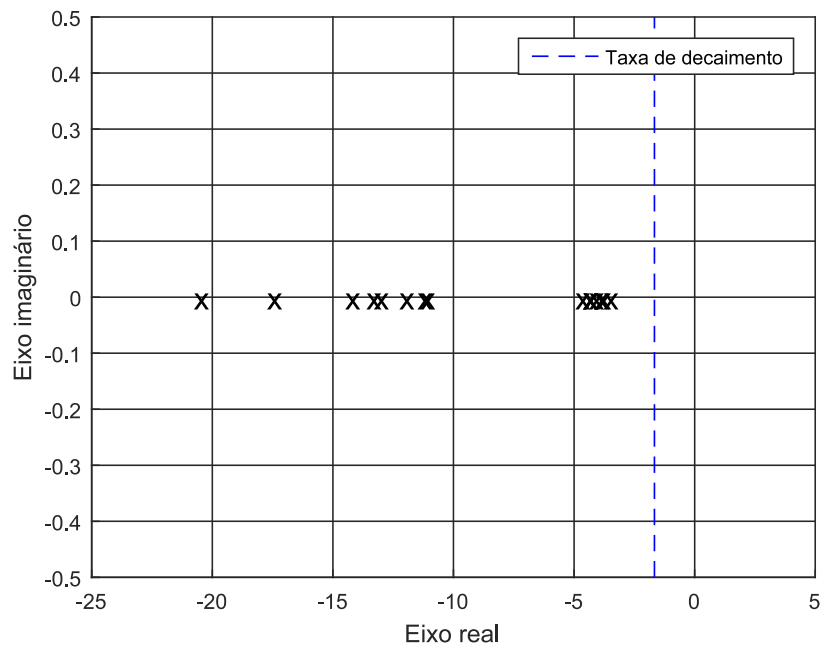
Na Figura 23, é possível visualizar a localização dos polos de cada vértice do sistema, alocados a esquerda da linha imaginária definida pela taxa de decaimento. Considerando que a LMI é uma desigualdade e é resolvida por um processo iterativo, a matriz de controle K obtida é apenas uma das diversas possíveis que satisfazem as condições estabelecidas no projeto. Percebe-se que a resolução da LMI em questão nos fornece um controlador K que alocou os polos no eixo real, tornando o sistema superamortecido. A Figura 24 nos mostra com maiores detalhes a localização dos polos próximos a taxa de decaimento limitante, polos "dominantes" do sistema.

Figura 23: Localização global dos polos do sistema - Taxa de decaimento $\gamma = 1,66$



Fonte: Autoria própria.

Figura 24: Zoom na localização dos polos dominantes do sistema - Taxa de decaimento $\gamma = 1,66$



Fonte: Autoria própria.

6.4 PROJETO DO CONTROLADOR - \mathcal{D} -ESTABILIDADE

De forma análoga à apresentada para a taxa de decaimento, o projeto do controlador considerando a \mathcal{D} -estabilidade levou em consideração a falha de até 30% na realimentação e variação dos parâmetros do sistema, sendo o sistema equivalente representado pelas Equações (111), (112) e (113). Todavia, esta metodologia permite inserir parâmetros de desempenho no projeto do controlador, alocando os polos em uma região pré-definida. Considerou-se os seguintes parâmetros de desempenho, sendo T_s o tempo de acomodação e M_o o máximo sobressinal:

$$0,3s \leq T_s \leq 1,8s, \quad (127)$$

$$0\% \leq M_o \leq 25\%. \quad (128)$$

O tempo mínimo de acomodação foi inserido no sistema a fim de evitar ganhos e esforços de controle elevados, incompatíveis com a capacidade do sistema. Manipulando as equações expostas na Seção 2.3.2, podemos obter a frequência natural não amortecida ω_n , e ζ , coeficiente de amortecimento do sistema:

$$\zeta = -\frac{\ln(M_o)}{\sqrt{\pi^2 + \ln(M_o)^2}}, \quad (129)$$

$$\omega_n = \frac{3}{\zeta T_s}. \quad (130)$$

Aplicando os parâmetros de desempenho nas Equações (129) e (130), obtêm-se os valores máximos de ω_n , e ζ :

$$\zeta \geq 0,403. \quad (131)$$

$$4,12 \leq \omega_n \leq 24,77. \quad (132)$$

A região de alocação dos polos é definida restringindo os polos a uma região $S(\gamma, r, \theta)$, como apresentado na Seção 3.5. Aplicando a metodologia exposta por Chilali e Gahinet (1994) para a definição das variáveis, temos:

$$\theta = \cos^{-1}(\zeta_{min}) = 66,18^\circ, \quad (133)$$

$$r = w_{n_{max}} = 24,77, \quad (134)$$

$$\gamma = \zeta_{min} \omega_{n_{min}} = 1,66. \quad (135)$$

Considerando as matrizes A e B definidas no pré-projeto, resolveu-se as LMIs \mathcal{D} -estabilidade:

$$A_j X - B_j G + X A_j' - G' B_j' + 2\gamma X < 0, \quad (136)$$

$$\begin{bmatrix} -rX & X A_j' - G' B_j' \\ A_j X - B_j G & -rX \end{bmatrix} < 0, \quad (137)$$

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(A_j X + X A_j' - B_j G - G' B_j') & \text{cos}(\theta)(X A_j' - G' B_j' - A_j X + B_j G) \\ \text{cos}(\theta)(A_j X - X A_j' - B_j G + G' B_j') & \text{sen}(\theta)(X A_j' - G' B_j' + A_j X - B_j G) \end{bmatrix} < 0, \quad (138)$$

$$X > 0. \quad (139)$$

sendo $j = 1, 2, 3, \dots, 8$. Após a resolução da desigualdade matricial, obteve-se o valor da matriz K , que contém os ganhos do controlador. Ele é dada por $K = GX^{-1}$, portanto:

$$K_p = 0,0026, \quad (140)$$

$$K_i = 0,0318, \quad (141)$$

$$K_d = 0,0002965. \quad (142)$$

Na Figura 25, é possível observar a localização dos polos de cada vértice do sistema, considerando a região de restrição desenvolvida no método da \mathcal{D} -estabilidade.

7 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com o projeto do controlador desenvolvido e utilizando os equipamentos apresentados, realizaram-se os testes práticos, através da implementação do controlador. A implementação tem como objetivo validar o sistema desenvolvido, bem como observar seu comportamento dinâmico. Os testes foram realizados considerando duas metodologias de projeto, a primeira à partir da resolução da LMI apenas com taxa de decaimento, e a segunda considerando a LMI \mathcal{D} -estabilidade completa.

Para a realização dos testes, aplicou-se ao sistema sinais de referência, observando então o rastreamento deste sinal, o comportamento dinâmico e o sinal de controle. Os sinais utilizados foram:

- Degrau fixo;
- Rampas crescentes e decrescentes;
- Degrau fixo com simulação de falha.

Complementar aos testes, realizou-se a simulação do sistema através do software Simulink[®], a fim de comparar os dados experimentais com o simulado teórico. O sistema simulado representa o vértice 1, dado pela Equação (114), que contém os máximos valores possíveis para os parâmetros do sistema.

7.1 DADOS EXPERIMENTAIS - TAXA DE DECAIMENTO

Na implementação deste sistema, utilizou-se os ganhos do controlador obtidos através da resolução da LMI considerando a taxa de decaimento apresentada na Seção 6.3. O método nos forneceu um sistema apenas com polos reais, de resposta superamortecida. Verifica-se que o resultado obtido é apenas um dos possíveis resultados existentes, já que a desigualdade linear matricial possui infinitas resoluções factíveis. Portanto, é aceitável observar uma resposta do tipo superamortecida.

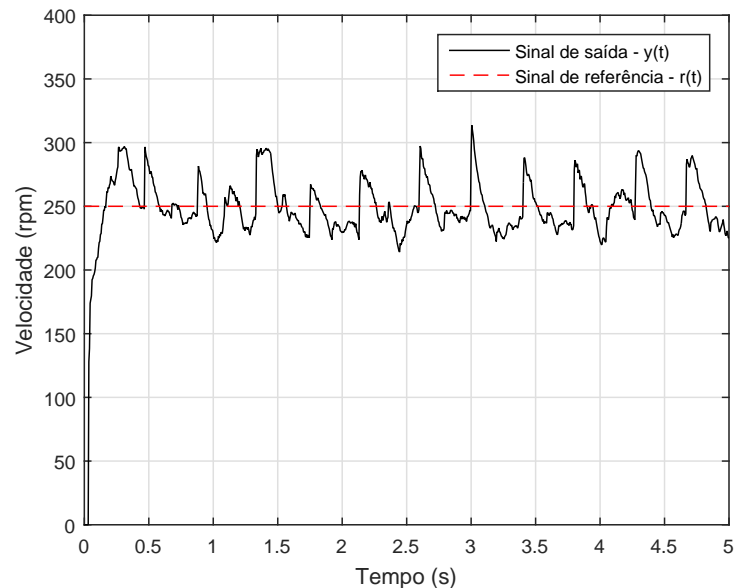
Uma observação importante é a relação de parâmetros de desempenho com a taxa de decaimento. O método não permite garantir quantitativamente o desempenho, já que a alocação dos polos é realizada de maneira pouco restritiva. Todavia, compreende-se que maior seja a

taxa de decaimento, mais rápida será a resposta do sistema (tempo de assentamento, tempo de subida), nos fornecendo portanto uma abordagem qualitativa de desempenho. A metodologia então permite acelerar a resposta do sistema aumentando sua taxa de decaimento, alocando os polos do sistema em uma região mais distante do eixo imaginário. Contudo, deve-se atentar que este deslocamento resulta em um maior esforço de controle, exigindo capacidade física de resposta dos atuadores e sensores, à fim de evitar sua saturação.

7.1.1 RESPOSTA AO DEGRAU

A Figura 26 mostra o comportamento do sistema quando aplicado a um degrau de referência, com valor de 250 rpm. Observa-se que o sistema, representado por $y(t)$, busca a referência $r(t)$ rapidamente, em tempo aproximado de 0,5 segundos, comportamento característico de um sistema superamortecido. Infelizmente, o sistema em questão possui elevada taxa de ruído, prejudicando a visualização e o controle do sistema. É de conhecimento que o elevado ganho derivativo do controlador, K_d , pode contribuir para a amplificação dos ruídos do sistema.

Figura 26: Taxa de decaimento - Resposta ao degrau

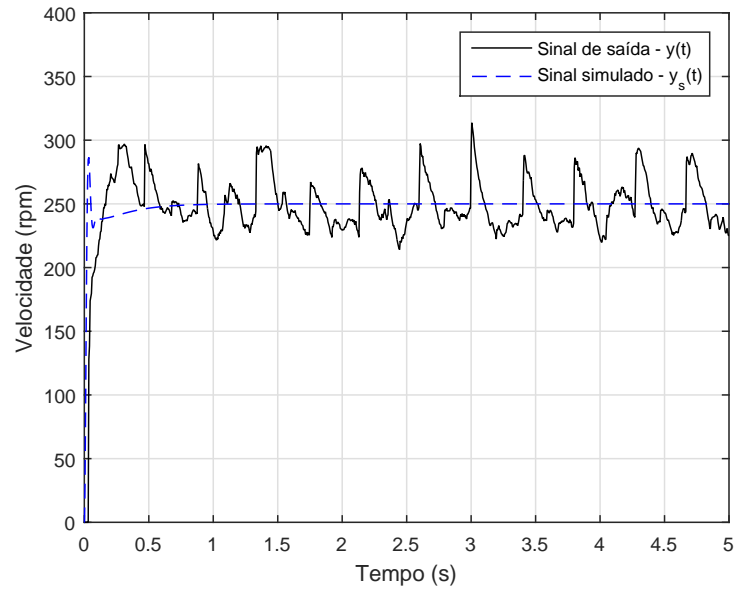


Fonte: Autoria própria.

A Figura 27 mostra a comparação entre o sinal de saída $y(t)$ obtido experimentalmente, e o sinal de saída simulado, $y_s(t)$. Percebe-se que ambos possuem valor de *máximo overshoot* similar, por volta de 290 rpm, todavia, o sinal experimental possui um atraso de reposta. Isto

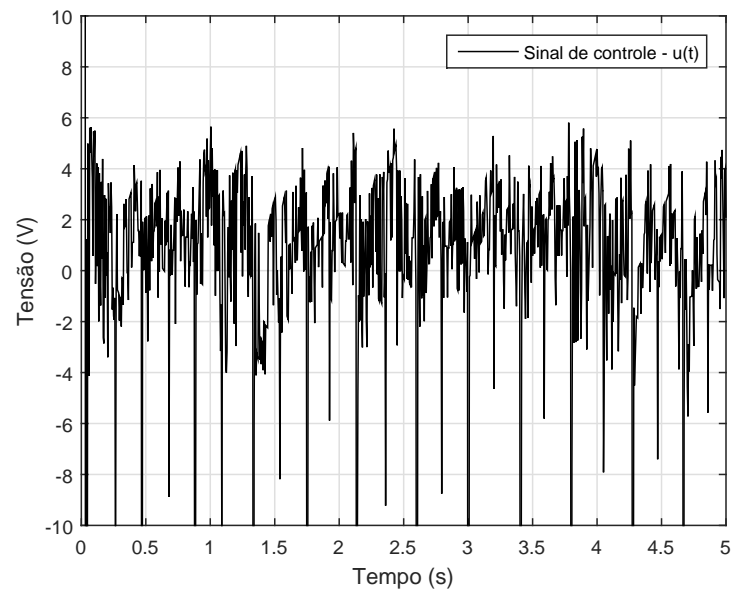
pode ser justificado dado condições físicas do atuador, bem como o tempo de processamento do sinal por parte do software, comportamento observado em controladores discretos.

Figura 27: Taxa de decaimento - Sinal simulado para referência do tipo degrau



Fonte: Autoria própria.

Figura 28: Taxa de decaimento - Sinal de controle para referência do tipo degrau



Fonte: Autoria própria.

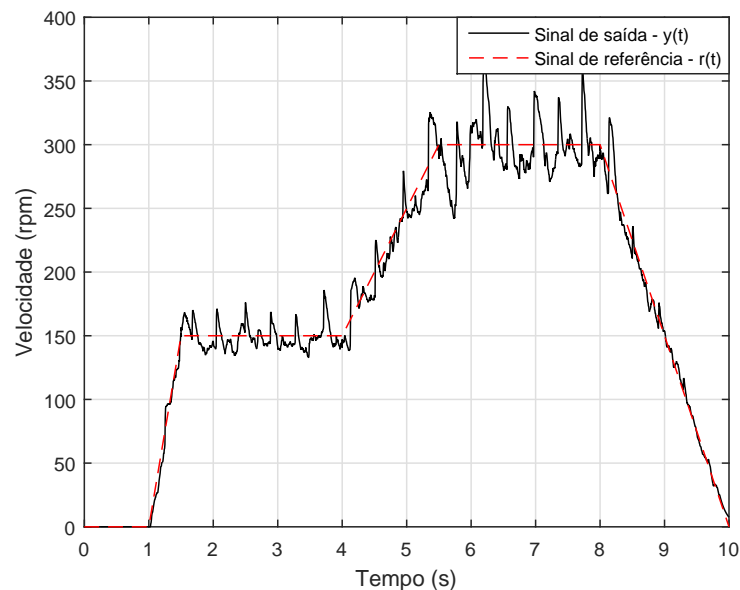
Por fim, a Figura 28 nos apresenta o sinal de controle $u(t)$ utilizado para este teste.

Percebe-se uma grande variação do sinal aplicado, devido a resposta do controlador diante de ruídos e da variação do sinal de saída. Contudo, a parcela negativa do sinal de controle não é aplicada ao sistema real, devido a limitação da fonte de tensão em aplicar tensões negativas ao sistema.

7.1.2 RESPOSTA A RAMPA

Através da Figura 29, observa-se o comportamento da saída do sistema, $y(t)$, diante de sinais de referência do tipo rampa, $r(t)$. O sistema desenvolvido é do tipo 1, com apenas um polo na origem, oriundo do próprio integrador, sendo portanto capaz de eliminar erros de regime permanente apenas para sinais de referência do tipo degrau. Contudo, dado os ganhos K_p e K_i , os erros para a referência rampa são atenuados, devido a atuação elevada do termo integrador e proporcional.

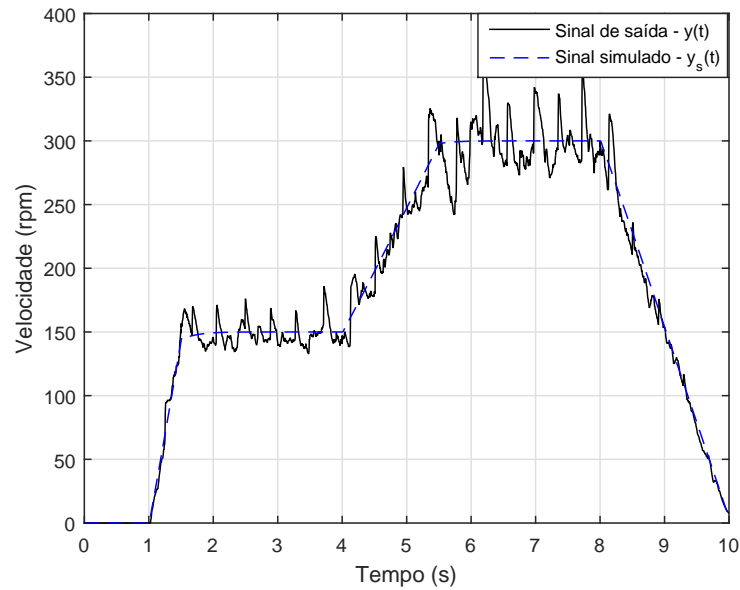
Figura 29: Taxa de decaimento - Resposta a rampa



Fonte: Autoria própria.

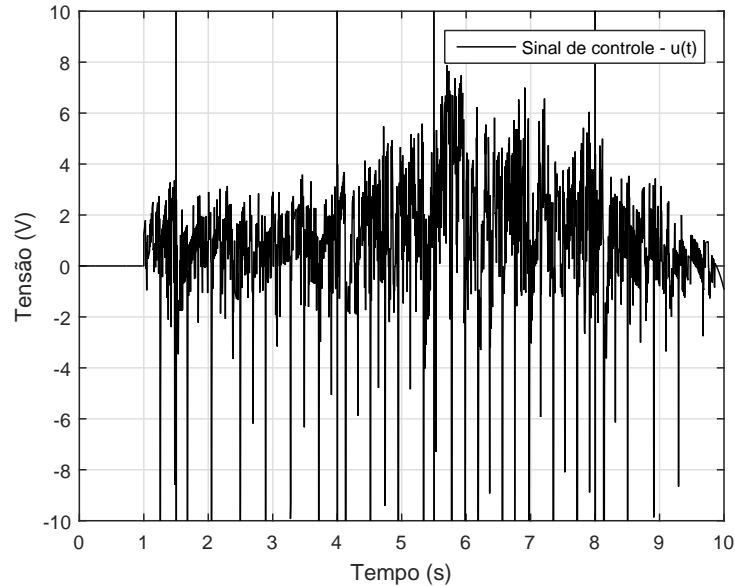
A Figura 30 por sua vez nos mostra a comparação entre o sinal simulado $y_s(t)$ e o sinal experimental $y(t)$, para o teste em questão. É possível perceber pouco sobressinal, atenuado em parte pelo ganho derivativo K_d . A Figura 31 nos mostra o sinal de controle $u(t)$ resultante.

Figura 30: Taxa de decaimento - Sinal simulado para referência do tipo rampa



Fonte: Autoria própria.

Figura 31: Taxa de decaimento - Sinal de controle para referência do tipo rampa



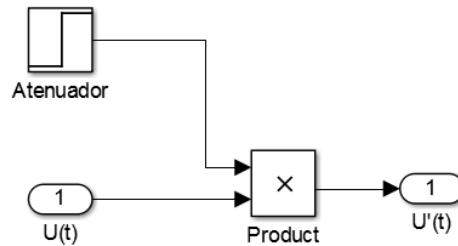
Fonte: Autoria própria.

7.1.3 RESPOSTA A FALHA

Com o objetivo de validar a robustez do sistema, simulou-se a falha na realimentação do sistema. A simulação da falha foi realizada atenuando o sinal de realimentação por meio de

um ganho, a ser implementado na estrutura de controle desenvolvida no software Simulink®. A estrutura desenvolvida pode ser observada na Figura 32.

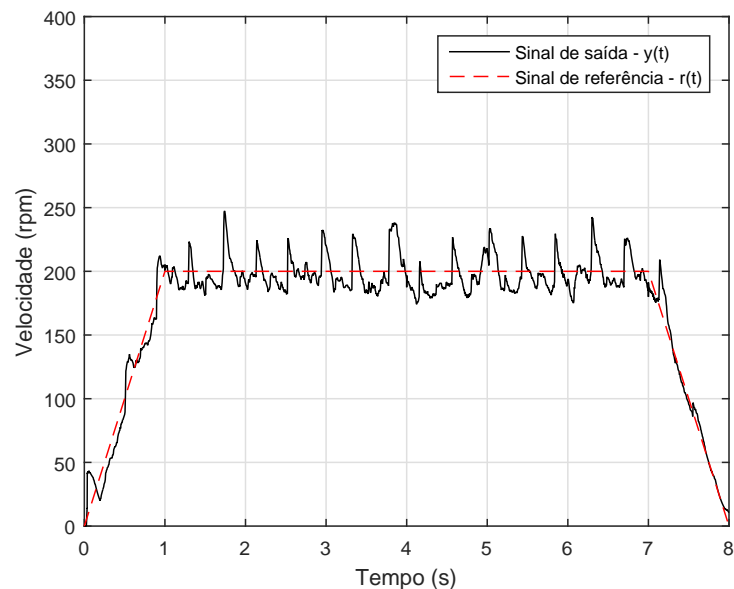
Figura 32: Estrutura para simulação de falha na realimentação



Fonte: Autoria própria.

Com isto, o sinal de controle a ser aplicado ao driver de alimentação foi atenuado em 30% no instante de tempo $t=4s$. Neste instante, esperava-se uma queda momentânea na velocidade do motor, e em seguida sua recuperação. Na Figura 33 é possível observar a resposta do sistema diante desta atenuação, verificando em $t=4s$, uma leve queda na velocidade.

Figura 33: Taxa de decaimento - Resposta a falha

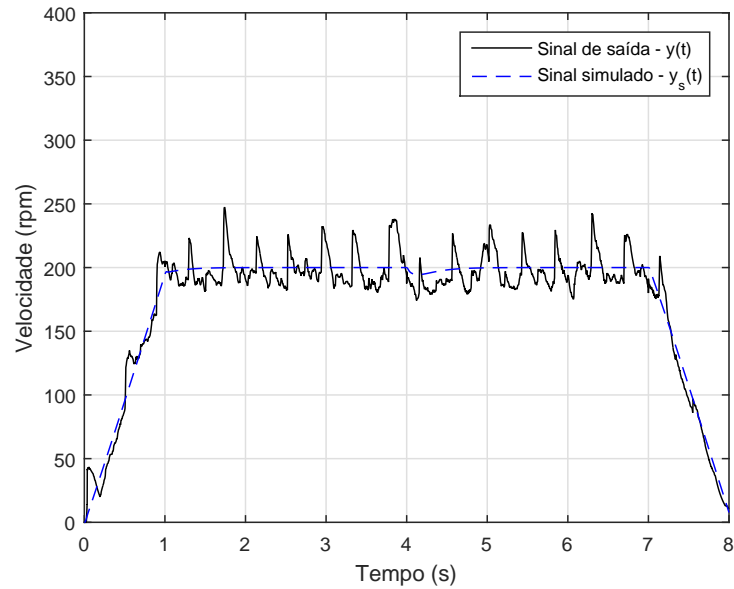


Fonte: Autoria própria.

Contudo, devido ao comportamento superamortecido e ação do controle robusto, projetado considerando esta possibilidade de falha, o sistema se recupera rapidamente. Por

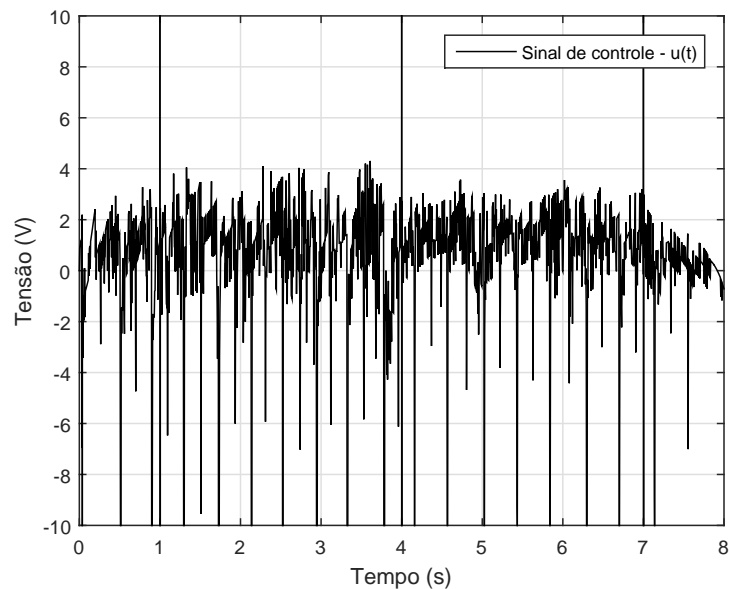
outro lado, o alto nível de ruídos no sistema não permite uma boa visualização, sendo a ação do sistema pouco visível dado os ruídos e picos indesejáveis.

Figura 34: Taxa de decaimento - Sinal simulado para sistema sujeito a falha



Fonte: Autoria própria.

Figura 35: Taxa de decaimento - Sinal de controle para sistema sujeito a falha



Fonte: Autoria própria.

A Figura 34 ilustra a comparação do sinal experimental $y(t)$ com o sinal simulado

$y_s(t)$. Percebe-se que para uma falha de 30% no atuador, a queda de velocidade é pequena e momentânea, devido a ação do controlador robusto, e ao comportamento superamortecido do sistema. A Figura 35 mostra o sinal de controle $u(t)$ do sistema sujeito a falha. Verifica-se no instante $t=4s$, um elevado pico no sinal de controle, representando a atuação do sistema.

É possível observar nos testes realizados a boa atuação do controlador robusto, que garantiu a estabilidade e o bom desempenho do sistema, mesmo diante da falha, condição crítica do sistema.

7.2 DADOS EXPERIMENTAIS - \mathcal{D} -ESTABILIDADE

De forma análoga, implementou-se o controlador proposto baseado na alocação de polos, utilizando a LMI \mathcal{D} -estabilidade. A metodologia utilizada e seus respectivos parâmetros podem ser observado na Seção 6.4. Uma análise inicial permite verificar que os ganhos obtidos através da resolução desta LMI são menores que aqueles obtidos considerando a taxa de decaimento, sendo:

Tabela 6: Ganhos do controlador PID

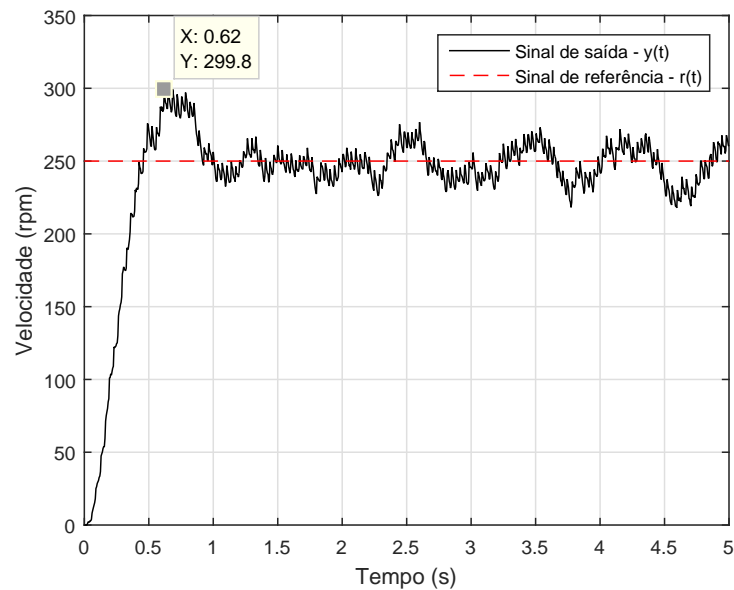
	Taxa de decaimento	\mathcal{D} -estabilidade
K_p	0,0691	0,0026
K_i	0,2481	0,0318
K_d	0,0042	0,0002965

Fonte: Autoria própria.

Estes valores são justificados pela restrição na alocação dos polos pela curva de raio r , limitando o desempenho máximo do sistema, a fim de preservá-lo e evitar esforços de controle excessivos. Com isto, observou-se resposta de controle típica de um sistema subamortecido.

7.2.1 RESPOSTA AO DEGRAU

Aplicou-se um degrau de referência ao sistema, no valor de 250 rpm, afim de observar seu máximo *overshoot* e tempo de acomodação. De acordo com a restrição implementada durante a fase de projeto, o valor máximo permitido para o *overshoot* é de 25%, enquanto o tempo de assentamento deve estar entre 0,3s e 1,8s. A Figura 36 apresenta os resultados obtidos. O sistema apresentou *overshoot* de 19,92%, e tempo de assentamento de 1,2s, em concordância com os parâmetros de desempenho pré-estabelecidos.

Figura 36: \mathcal{D} -estabilidade - Resposta ao degrau

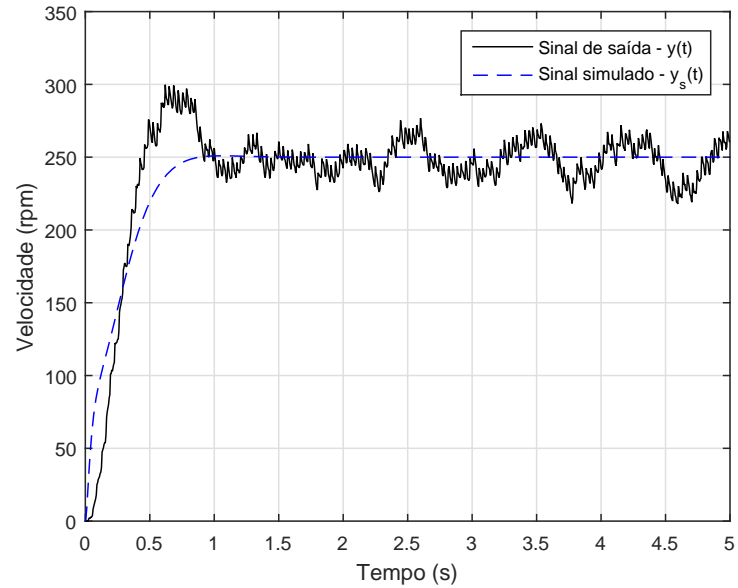
Fonte: Autoria própria.

Outro ponto a se analisar em comparação com o método da taxa de decaimento, foi a diminuição do ruído de alta frequência. Esta diminuição pode ser explicada a partir da diminuição dos ganhos, tal como o ganho derivativo K_d , que pode amplificar pequenas oscilações e ruídos, bem como a diminuição dos esforços de controle devido à restrição no tempo mínimo de acomodação, através da alocação dos polos. A Figura 37 demonstra a comparação do sinal experimental $y(t)$, com o sinal simulado $y_s(t)$.

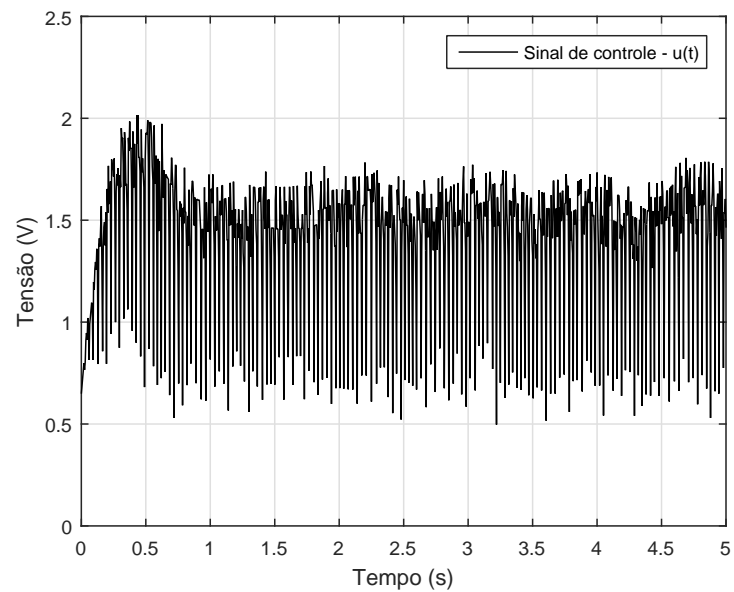
A Figura 38 mostra o sinal de controle aplicado ao sistema. Em comparação com o método anterior, observa-se um sinal de controle mais regular e com menores oscilações, não sendo verificado picos excessivos, que levariam a saturação do atuador. Verificou-se também que o sinal de controle não possui componentes negativas, que não poderiam atuar sobre o sistema.

7.2.2 RESPOSTA A RAMPA

Ao aplicar sobre o sistema um sinal de referência do tipo rampa, observou-se que o sistema implementado apresentou desempenho compatível com o projetado. Durante o período de rampa, o sinal possuiu pequeno atraso em relação a referência, comportamento de um sistema do tipo 1, com apenas um polo na origem. Em comparação com o sistema desenvolvido através

Figura 37: \mathcal{D} -estabilidade - Sinal simulado para referência do tipo degrau

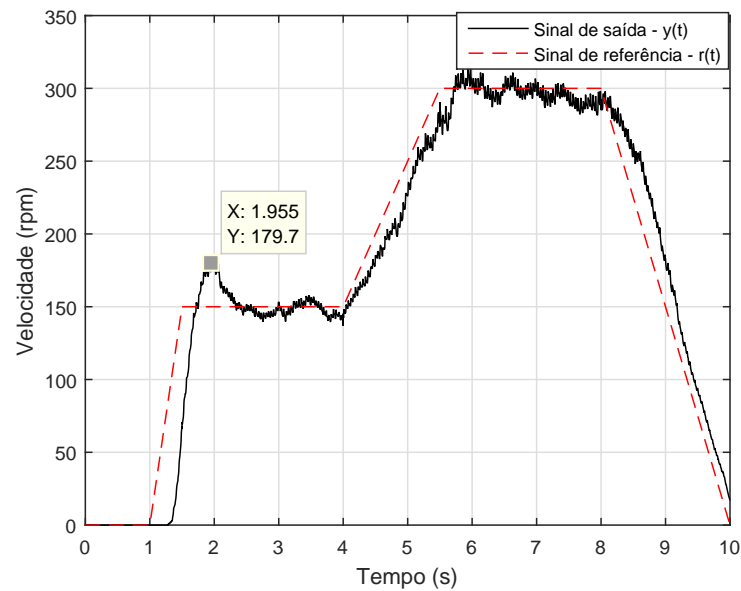
Fonte: Autoria própria.

Figura 38: \mathcal{D} -estabilidade - Sinal de controle para referência do tipo degrau

Fonte: Autoria própria.

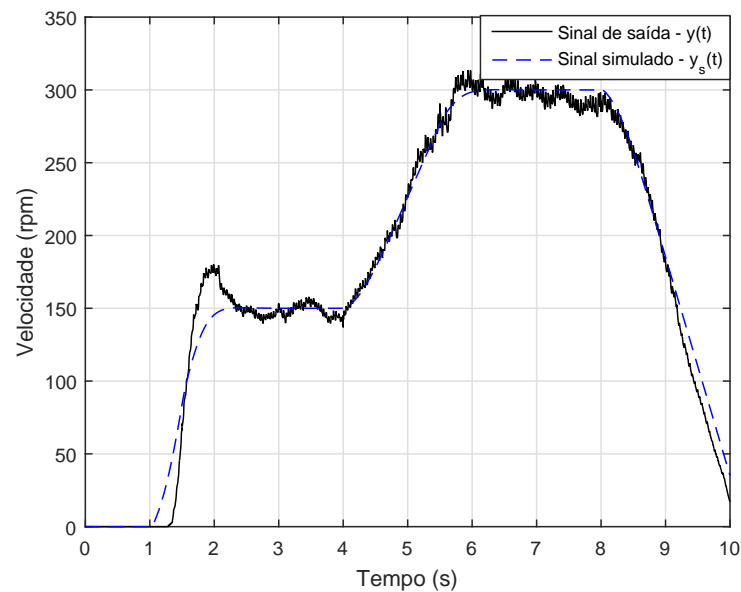
da taxa de decaimento, o atraso agora foi maior, devido ao menor ganho integrativo, K_i . Nas regiões de parada brusca da rampa, o sistema apresentou *overshoot* antes de entrar em regime permanente, com valores dentro da faixa tolerável. O resultado pode ser visto na Figura 39.

Figura 39: \mathcal{D} -estabilidade - Resposta a rampa



Fonte: Autoria própria.

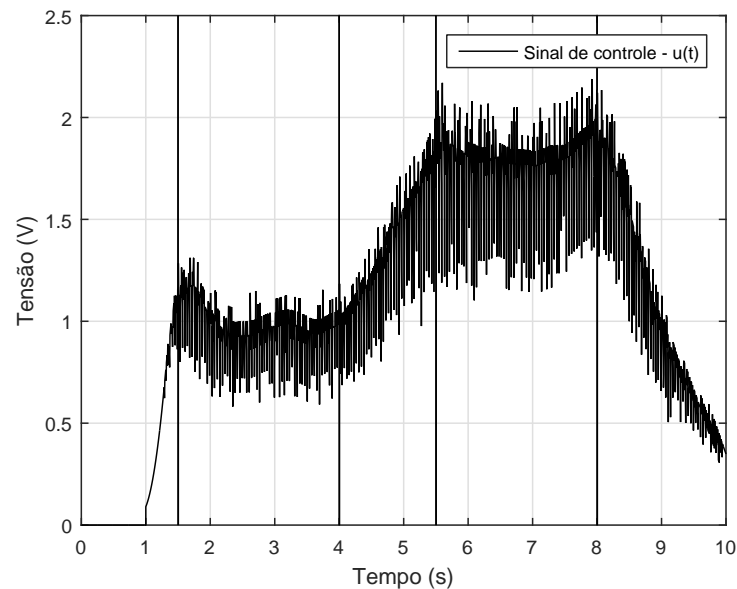
Figura 40: \mathcal{D} -estabilidade - Sinal simulado para referência do tipo rampa



Fonte: Autoria própria.

A Figura 40 nos mostra a comparação do sinal experimental $y(t)$ versus o sinal de saída simulado, $y_s(t)$, enquanto a Figura 41 demonstra o sinal de controle $u(t)$ obtido na realização desta implementação.

Figura 41: \mathcal{D} -estabilidade - Sinal de controle para referência do tipo rampa



Fonte: Autoria própria.

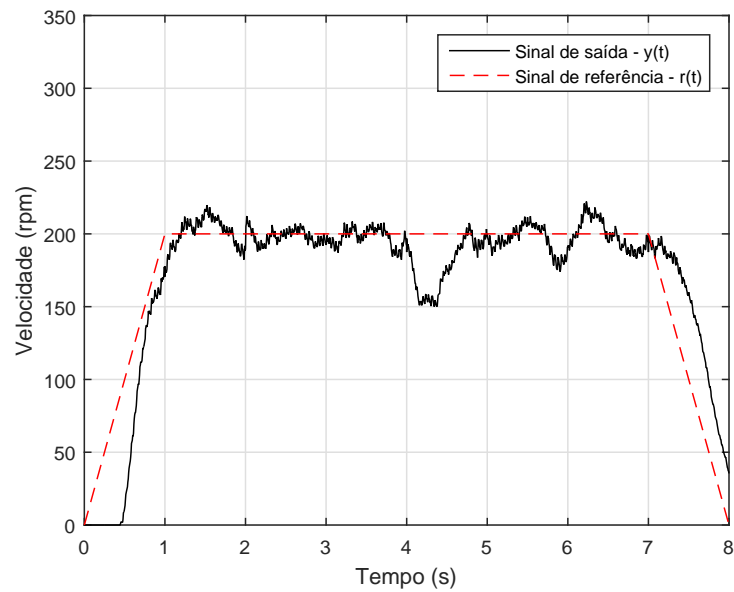
7.2.3 RESPOSTA A FALHA

A fim de verificar a robustez do sistema diante de falhas, aplicou-se uma falha de realimentação, de forma análoga a apresentada na seção 7.1.3. No instante $t=4s$, o sistema teve sua realimentação atenuada em 30%, à fim de simular uma falha nos componentes físicos do sistema. Percebe-se então, uma queda na velocidade do motor, a saída $y(t)$. A Figura 42 mostra o sinal de saída $y(t)$, em comparação com o sinal de referência, $r(t)$.

Todavia, com a atuação do controlador robusto, o sistema logo se recupera, retornando ao seu estado inicial. Verifica-se que o tempo necessário para a recuperação do sistema é menor que o tempo máximo de assentamento, determinado no projeto.

A partir da comparação do sinal de saída $y(t)$ com o sinal simulado, $y_s(t)$, verifica-se que a queda na velocidade e o tempo de recuperação de ambos são similares. O resultado pode ser verificado na Figura 43. Neste sistema, a queda de velocidade e sua respectiva recuperação são mais visíveis e perceptíveis que em comparação com o sistema obtido através da taxa de

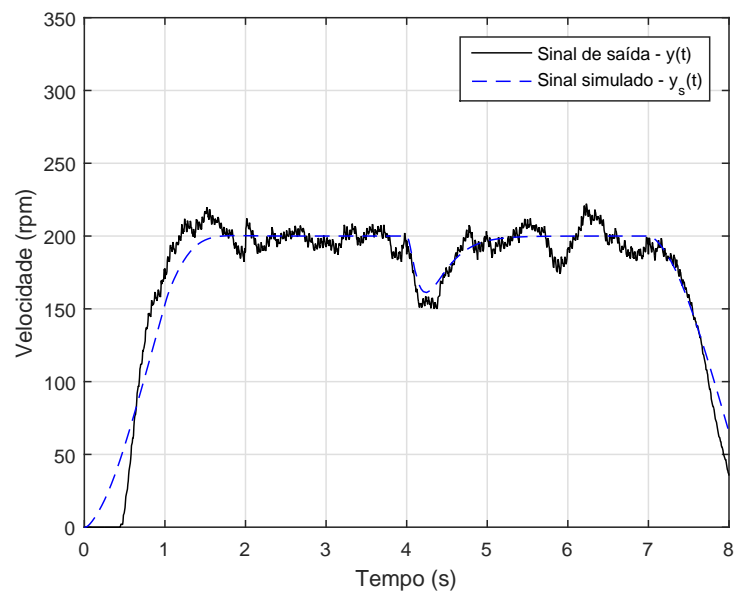
Figura 42: \mathcal{D} -estabilidade - Resposta a falha



Fonte: Autoria própria.

decaimento. A resposta mais suave e o menor esforço de controle podem ser responsáveis por este comportamento.

Figura 43: \mathcal{D} -estabilidade - Sinal simulado para sistema sujeito a falha

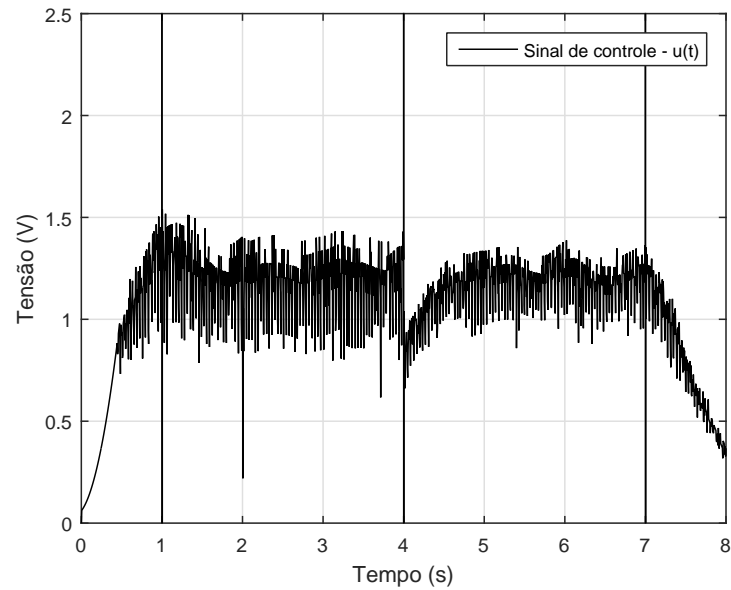


Fonte: Autoria própria.

Por fim, o sinal de controle $u(t)$ aplicado ao sistema sujeito a falha é apresentado

na Figura 44. Verifica-se uma menor oscilação do sinal em comparação com o sistema desenvolvido à partir da taxa de decaimento. Apesar do tempo de estabilização superior e da maior queda de velocidade, o comportamento observado se mostrou mais próximo daquele simulado, previsto no desenvolvimento.

Figura 44: \mathcal{D} -estabilidade - Sinal de controle para sistema sujeito a falha



Fonte: Autoria própria.

A ação do controlador robusto se mostra eficaz, garantindo os parâmetros de desempenhos pré-estabelecidos em projeto, mesmo sobre condição de falha, condição crítica.

8 CONCLUSÃO

O objetivo principal deste trabalho, desenvolvimento e implementação de um sistema de controle robusto através de desigualdades matriciais lineares, foi alcançado, sendo seu resultado validado através de simulações, testes experimentais e comparação de parâmetros de desempenho. Os materiais e métodos utilizados permitiram também desenvolver tópicos relacionados ao sensoriamento, comunicação, alimentação e controle de sistemas.

Apresentou-se e utilizou-se a metodologia de controle via realimentação dos estados, que pode ser utilizada em uma vasta gama de aplicações. A implementação se mostrou simples dada a modelagem do sistema, que permitiu controlar o sistema à partir de um único estado acessível, sua velocidade angular, através da variável de saída $y(t)$, sendo os demais estados estimados à partir de $y(t)$. Modelou-se a variação de parâmetros do motor CC, utilizando tópicos de controle robusto à partir das LMIs de realimentação de estados. A robustez do sistema foi validada através da simulação de falha na realimentação da planta, na qual o sistema se mostrou estável e com desempenho garantido mesmo após a falha.

Dois métodos de alocação de polos, que introduzem parâmetros de desempenho ao sistema foram utilizados, taxa de decaimento e \mathcal{D} -estabilidade, permitindo ao projetista adequar o desempenho do seu sistema de acordo com as singularidades do projeto. Pode-se concluir que o método da \mathcal{D} -estabilidade apresentou resultados melhores, com menor taxa de ruído e menor esforço de controle, enquanto que o método da taxa de decaimento demonstrou menor tempo de subida T_r , e tempo de assentamento T_s mais rápido, ao custo de um maior esforço de controle. Logo, os parâmetros de restrição disponíveis através da \mathcal{D} -estabilidade permitem adequar as ações do controlador às limitações físicas do sistema.

No mais, o trabalho exposto possui perspectivas para melhorias e desenvolvimento de trabalhos futuros, já que a metodologia é flexível, facilmente adaptável e com grande possibilidade de ajustes de desempenho. A utilização de técnicas de otimização do controlador, tal como as normas H_2 e H_∞ permitem aprofundar e melhorar as técnicas desenvolvidas. Pode-se citar também o estudo de sistemas de controle via realimentação derivativa e controladores do tipo LQR.

REFERÊNCIAS

- ARDUINO. **Arduino Leonardo with headers**. 2018. Disponível em: <<https://store.arduino.cc/usa/arduino-leonardo-with-headers>>. Acesso em: 01 de outubro de 2018.
- ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. **Projeto de sistemas de controle via LMIs usando o Matlab**. 2008. Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira.
- ATMEL CORPORATION. **ATmega32U4**. 2014. Disponível em: <<https://www.microchip.com/wwwproducts/en/atmega32u4>>. Acesso em: 01 de outubro de 2018.
- BASILIO, J. C.; MOREIRA, M. V. Experimentos para estimação dos parâmetros de motores de corrente contínua. **Cobenge - Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia**, v. 1, p. 298 – 307, 2001.
- BAÚ DA ELETRÔNICA COMPONENTES ELETRÔNICOS LTDA. **Motor DC 6V com Encoder 300 RPM**. 2017. Disponível em: <<http://www.baudaeletronica.com.br/motor-dc-6v-com-encoder-300-rpm.html>>. Acesso em: 02 de setembro de 2018.
- BONZANINI, J. M. M. **Estudo de técnicas de controle PID aplicado em motor CC**. 2017. 42 f. p. Dissertação (Trabalho de Conclusão de Curso - Especialização) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, 2017.
- BOYD, S.; El Ghaoui, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Philadelphia, PA: SIAM, 1994. (Studies in Applied Mathematics, v. 15). ISBN 0-89871-334-X.
- BUZACHERO, L. F. S. **Otimização de controladores robustos de sistemas dinâmicos sujeitos a falhas estruturais**. 2010. 72 f. p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2010. Disponível em: <<<http://hdl.handle.net/11449/87054>>>.
- CAMPA, G. **MATLAB and Simulink Support for Arduino**. 2016. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/32374-legacy-matlab-and-simulink-support-for-arduino>>. Acesso em: 03 de outubro de 2018.
- CHAPMAN, S. J. **Fundamentos de máquinas elétricas**. 5. ed. Porto Alegre, RS: AMGH, 2013.
- CHAU, K. T. Permanent magnet brushless motor drives. In: _____. **Electric Vehicle Machines and Drives: Design, Analysis and Application**. Wiley-IEEE Press, 2015. p. 375–. ISBN 9781118752555. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=7123282>>.

CHENG, C. Y. **Autotuning of PID Controllers - A Relay Feedback Approach**. 2. ed. Springer-Verlag London, 2006.

CHILALI, M.; GAHINET, P. H/sub /spl infin// design with pole placement constraints: an lmi approach. In: **Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control**. 1994. v. 1, p. 553–558 vol.1.

CHILALI, M.; GAHINET, P.; APKARIAN, P. Robust pole placement in lmi regions. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 44, n. 12, p. 2257–2270, Dec 1999. ISSN 0018-9286.

DEL TORO, V. **Fundamentos de máquinas elétricas**. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 1999.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de controle modernos**. 12. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2013.

FARIA, F. A. **Projetos de controladores baseados em LMI usando realimentação da derivada dos estados**. 2009. 112 f. p. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2009. Disponível em: <<<http://hdl.handle.net/11449/100284>>>.

FISCHMAN, A. **Controle robusto de sistemas lineares incertos : teoria e aplicações**. 1993. 106 f. p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, 1993. Disponível em: <<http://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/75945>>.

GE, M.; CHIU, M.-S.; WANG, Q.-G. Robust pid controller design via lmi approach. **Journal of process control**, Elsevier, v. 12, n. 1, p. 3–13, 2002.

KOMMURI, S. K.; SHAFIQ, G.; RATH, J. J.; VELUVOLU, K. C. Robust control of dc motor drives using higher-order integral terminal sliding mode. In: **2016 14th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV)**. 2016. p. 1–6.

LEITE, V. J. S.; MONTAGNER, V. F.; OLIVEIRA, P. J.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; RAMOS, D. C. W.; PERES, P. L. D. Estabilidade robusta de sistemas lineares através de desigualdades matriciais lineares. **SBA: Controle e Automação**, Scielo, v. 15, p. 24 – 40, 2004.

LI, Y.; ANG, K. H.; CHONG, G. C. Y. Pid control system analysis and design. **IEEE Control Systems Magazine**, v. 26, n. 1, p. 32–41, 2006.

LORDELO, A. D. S.; FAZZOLARI, H. A. Controle robusto de posição do motor dc com estrutura variável e modos deslizantes de ordem completa. **XIX Congresso Brasileiro de Automática**, v. 1, p. 4624–4630, 2012.

MANESCO, R. M. **Projeto de controladores robustos para sistemas sujeitos a falhas estruturais usando realimentação estática de saída**. 2013. 68 f. p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2013. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/87072>>.

MESSNER, B. **Time-Response Analysis of a DC Motor**. 2017. Disponível em: <<http://ctms.engin.umich.edu/CTMS>>. Acesso em: 27 de setembro de 2018.

- NISE, N. S. **Engenharia de sistemas de controle**. 6. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2012.
- OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo, SP: Pearson Prentice Hall, 2010.
- ROCHA, F. S. Determinação automática dos parâmetros da máquina de corrente contínua. **Ceel - Conferência de Estudos em Engenharia Elétrica**, n. 6, p. 1–5, 2014.
- SANTOS, V. A. B.; PRADO, M. L. M.; DIAS, A. M. Alocação de pólos robusta para um motor de uma junta robótica. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics**, v. 1, n. 1, p. 100040.1 – 100040.6, 2013.
- SILVA, E. R. P. da. **Controle robusto de sistemas não-lineares sujeitos a falhas estruturais**. 2009. 80 f. p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2009. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/87065>>.
- SILVA, E. R. P. da. **Controle por rastreamento em espaço de estados**. 2016. Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Cornélio Procopio. Notas de aula.
- SILVA, E. R. P. da; FAZZOLARI, H. A.; OLIVEIRA, P. C. de; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; LORDELO, A. D. S. Implementação prática da d-estabilidade robusta via realimentação derivativa em um sistema de suspensão ativa. **XI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente**, 2013. Disponível em: <<http://www.sbai2013.ufc.br/pdfs/3645.pdf>>.
- WEG. **Uso eficiente da energia elétrica**. Abril 2010. Disponível em: <<http://ecatalog.weg.net/files/wegnet/WEG-cartilha-weg-uso-eficiente-da-energia-eletrica-50030292-catalogo-portugues-br.pdf>>. Acesso em: 07 de abril de 2017.