

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
ENGENHARIA MECÂNICA

PEDRO HENRIQUE MARTINEZ DE BARROS

**IMPLEMENTAÇÃO SIMPLE POR MATRIZES ESPARSAS PARA  
ESCOAMENTO DE FLUIDO INCOMPRESSÍVEL BIDIMENSIONAL**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO  
2017

PEDRO HENRIQUE MARTINEZ DE BARROS

**IMPLEMENTAÇÃO SIMPLE POR MATRIZES ESPARSAS PARA  
ESCOAMENTO DE FLUIDO INCOMPRESSÍVEL BIDIMENSIONAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso 2, do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Antonio de S. Lourenço

CORNÉLIO PROCÓPIO  
2017



## FOLHA DE APROVAÇÃO

**Pedro Henrique Martinez de Barros**

### **Implementação SIMPLE por Matrizes Esparsas para Escoamento de Fluido Incompressível Bidimensional**

Trabalho de conclusão de curso apresentado às 15:00hs do dia 22 de Novembro de 2017, como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro Mecânico no programa de Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. O candidato foi arguido pela Banca Avaliadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Avaliadora considerou o trabalho aprovado.

Cornélio Procópio, \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_.

---

Prof. Dr. Marcos Antonio de Souza Lourenço (Orientador)

---

Prof. Dr. Rubens Gallo (Membro)

---

Prof. Dr. Fabio Kenji Suguimoto (Membro)

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação de Curso”

Dedico esse trabalho a Deus e a minha família  
que são sempre minha fonte de inspiração.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente ao Onipotente, Onipresente e Onisciente Deus, que por Sua imensa misericórdia tem sido minha forte rocha e tem me sustentado em todo meu peregrinar na face da Terra até o momento. Também agradeço a minha família que é a minha base forte nesse mundo, que sempre está ao meu lado em todos os momentos e é certamente o motivo do meu sorriso cotidiano. Não poderia deixar de agradecer o meu orientador nesse trabalho o prof. Dr. Marcos Antonio de Souza Lourenço que demonstrou grande paciência, humildade e consideração por mim, que tem me auxiliado durante minha graduação e que hoje é meu grande amigo.

Ainda faço notória toda minha gratidão as pessoas especiais que me circundam, sejam eles meus amigos, meus companheiros de república, meus familiares, meus professores, etc. Por fim, agradeço a Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, Câmpus Cornélio Procópio, por ter me propiciado experiências maravilhosas de vida.

*O meu coração ferve com palavras boas; falo  
do que tenho feito no tocante ao Rei: a minha  
língua é a pena de um destro escritor.  
(Salmos 45-1)*

## RESUMO

BARROS, Pedro H. M.. Implementação SIMPLE por Matrizes Esparsas para Escoamento de Fluido Incompressível Bidimensional. 2017. 41 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2017.

Problemas envolvendo a mecânica dos fluidos têm tido uma atenção especial dia após dia e muitos esforços são aplicados para a solução de tais problemas. Algumas das grandes áreas da ciência beneficiadas com esse desenvolvimento são a hidrodinâmica e a aerodinâmica, ciências que estudam o comportamento de um corpo devido o escoamento da água e do ar respectivamente. Na indústria o custo de experimentação em laboratório e o espaço necessário para realização do experimento são muito grandes, portanto, faz-se necessário o desenvolvimento de métodos numéricos que configurem condições diferenciadas, só assim, a necessidade de experimentação pode ser minimizada. Desta forma, o presente trabalho tem como objetivo realizar a implementação numérica do escoamento incompressível bidimensional utilizando o método SIMPLE, de maneira tal a observar tanto o comportamento do método implementado, quanto sua eficiência através da resposta obtida para determinados problemas.

**Palavras-chave:** Escoamento. Implementação. SIMPLE.

## ABSTRACT

BARROS, Pedro H. M.. A SIMPLE Implementation for Two-Dimensional Incompressible Flow Using Sparse Matrices. 2017. 41 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2017.

Problems involving fluid mechanics have been given special attention day by day and many efforts are being made to solve these problems. Some of the great areas of science benefited from this development are hydrodynamics and aerodynamics, sciences that study the behavior of a body due to the flow of water and air respectively. In industry the cost of experimentation in the laboratory and the space required for the experiment are very large, therefore, it is necessary to develop numerical methods that configure differentiated conditions, only then, the need for experimentation can be minimized. In this way, the present work has the objective of realizing the numerical implementation of the incompressible two-dimensional flow using the SIMPLE method, in order to observe both the behavior of the implemented method and its efficiency through the response obtained for certain problems.

**Keywords:** Flow. implementation. SIMPLE.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Níveis de validação . . . . .	9
Figura 2 – Volume elementar para os balanços de conservação . . . . .	12
Figura 3 – Malha deslocada (staggered grid) para escoamento bidimensional . . . . .	14
Figura 4 – Condições de contorno com pontos fictícios . . . . .	15
Figura 5 – Algoritmo SIMPLE . . . . .	18
Figura 6 – Matrizes de coeficientes para: a)Problemas 1-D, matriz tridiagonal; b)Problemas 2-D, matriz pentadiagonal; c)Problemas 3-D, matriz heptadiagonal . . . . .	19
Figura 7 – Esquema da cavidade bidimensional com tampa deslizante . . . . .	20
Figura 8 – Processamento do Engauge Digitizer . . . . .	25
Figura 9 – Velocidade $u$ para $y = 0,5$ (centro da cavidade) . . . . .	25
Figura 10 – Velocidade $u$ para $y = 0,5$ (centro da cavidade)-Obtidos pelo Engauge Digitizer . . . . .	26
Figura 11 – Velocidade $v$ para $x = 0,5$ (centro da cavidade) . . . . .	26
Figura 12 – Velocidade $v$ para $x = 0,5$ (centro da cavidade)-Obtidos pelo Engauge Digitizer . . . . .	27
Figura 13 – Campo escalar de velocidade - $Re = 10$ - Malha: 128x128 . . . . .	28
Figura 14 – Velocidade $u$ no centro da cavidade - $Re = 10$ . . . . .	29
Figura 15 – Velocidade $v$ no centro da cavidade - $Re = 10$ . . . . .	30
Figura 16 – Campo escalar de velocidade - $Re = 100$ - Malha: 128x128 . . . . .	31
Figura 17 – Velocidade $u$ no centro da cavidade - $Re = 100$ . . . . .	32
Figura 18 – Velocidade $v$ no centro da cavidade - $Re = 100$ . . . . .	33
Figura 19 – Campo escalar de velocidade - $Re = 400$ - Malha: 128x128 . . . . .	34
Figura 20 – Velocidade $u$ no centro da cavidade - $Re = 400$ . . . . .	35
Figura 21 – Velocidade $v$ no centro da cavidade - $Re = 400$ . . . . .	36
Figura 22 – Campo escalar de velocidade - $Re = 1000$ - Malha: 128x128 . . . . .	37
Figura 23 – Velocidade $u$ no centro da cavidade - $Re = 1000$ . . . . .	38
Figura 24 – Velocidade $v$ no centro da cavidade - $Re = 1000$ . . . . .	39

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CFD	Computational Fluid Dynamics
EDO	Equação Diferencial Ordinária
MDF	Método de Diferenças Finitas
MDC	Método das Diferenças Centradas
MDP	Método das Diferenças Progressivas
MVF	Método de Volumes Finitos
SIMPLE	Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations
MEF	Método de Elementos Finitos

## LISTA DE SÍMBOLOS

$u$	Velocidade em $x$
$v$	Velocidade em $y$
$p$	Pressão
$u^*$	Velocidade estimada em $x$
$v^*$	Velocidade estimada em $y$
$p^*$	Pressão estimada
$u'$	Correção da velocidade em $x$
$v'$	Correção da velocidade em $y$
$p'$	Correção da pressão
$\nu$	Viscosidade cinemática
P, S, E, W, N	Nós de malha genéricos
$i, j$	Índices de posição da malha do domínio físico
$I, J$	Índices de posição da malha deslocada
$\Delta x$	Dimensão de um volume elementar em $x$
$\Delta y$	Dimensão de um volume elementar em $y$
$\Delta t$	Passo de tempo
$\partial$	Derivada parcial de primeira ordem
$\partial^2$	Derivada parcial de segunda ordem
$b$	Termo fonte de momento
$A$	Área da face da célula do volume de controle
$\tau_{xy}$	Tensão de Cisalhamento
$\rho$	Massa Específica
$Re$	Número de Reynolds
$E_v$	Módulo de Compressibilidade

## SUMÁRIO

<b>1 – INTRODUÇÃO</b>	<b>8</b>
<b>2 – OBJETIVOS</b>	<b>10</b>
2.1 Objetivos específicos	10
<b>3 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>11</b>
3.1 Linguagem Python	11
3.2 escoamento compressível e incompressível	11
3.3 Método dos volumes finitos	11
3.4 Equações de Navier-Stokes	12
3.5 Equações de Navier-Stokes em escoamentos bidimensionais	13
3.6 Malha deslocada	14
3.7 Condições de contorno por volumes fictícios	15
3.8 Acoplamento pressão/velocidade - método SIMPLE	16
3.9 Estrutura da matriz de coeficientes	19
3.10 Cavidade bidimensional com tampa deslizante	20
<b>4 – METODOLOGIA</b>	<b>21</b>
4.1 Equação de Navier-Stokes bidimensional	21
4.2 Formulação no tempo por Euler explícito	21
4.3 Discretização dos termos convectivos	22
4.4 Discretização do termo de pressão	23
4.5 Discretização dos termos difusivos	23
4.6 Correção de pressão-velocidade	23
4.7 Coleta e tratamento de dados	24
<b>5 – RESULTADOS</b>	<b>28</b>
<b>6 – CONCLUSÃO</b>	<b>40</b>
6.1 Trabalhos futuros	40
<b>Referências</b>	<b>41</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Os conhecimentos de Mecânica dos Fluidos têm sido fundamentais para o desenvolvimento e consolidação de diversas ciências da engenharia, sendo que algumas dessas tratam dos escoamentos de fluidos homogêneos e heterogêneos.

Entre as principais aplicações da Mecânica dos Fluidos que dizem respeito a engenharia têm-se os ditos:

a) escoamentos externos, assim denominados os escoamentos de fluidos de extensão ilimitada em torno de sólidos fixos. Nesse tipo de escoamento, os corpos ficam sujeitos a interação de forças de pressão e de atrito, momentos, cargas energéticas e potências. Exemplos desse tipo de escoamento são as ações do vento sobre avioões (em especial na asa) e automóveis, causando assim uma série de forças sobre os mesmos, sejam como resistência ao avanço ou como geradoras de sustentação por exemplo (ASSY, 2004).

b) escoamentos internos, assim denominados os escoamentos de fluidos que ocupam todo o espaço limitado por contornos sólidos. Exemplos desse tipo de escoamento são os transportes por tubulações seja de ar, água e até mesmo de materiais sólidos em suspensão. Nestes escoamentos observa-se a interação de forças internas de pressão e de atrito com a parede do contorno sólido, traduzindo-se em perdas de carga (ASSY, 2004).

Quando o assunto é escoamento do ar externamente a um corpo e suas conseqüentes ações, adota-se o nome dessa área como aerodinâmica. Esta, como ciência específica ganhou importância industrial com o surgimento dos automóveis (aerodinâmica automotiva) e dos aviões pois estes precisavam se locomover tendo o menor atrito possível com o ar, de maneira tal à atingir maiores velocidades e também reduzir o consumo de combustível.

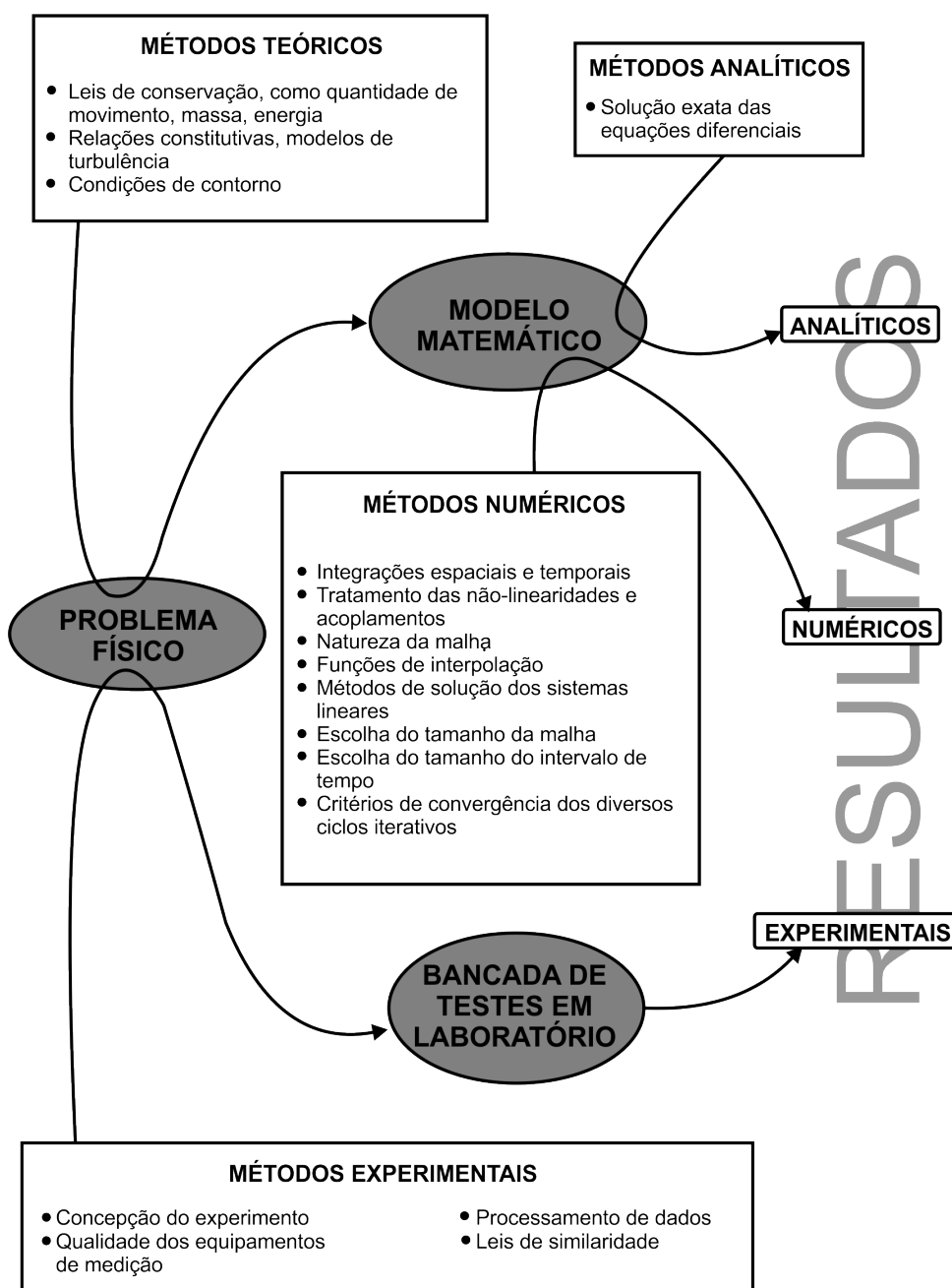
O uso de técnicas numéricas para a solução de problemas complexos na área da mecânica dos fluidos é hoje uma realidade, tudo isso se deve ao notável desenvolvimento de computadores de alta velocidade e de grande capacidade de armazenamento. Graças a tal disponibilidade computacional, que cresce bruscamente, o desenvolvimento de algoritmos para a solução dos mais diversos problemas tem recebido enorme atenção dos engenheiros, o que por conseqüência aumenta o número de pesquisadores e usuários da simulação numérica. A disciplina de mecânica dos fluidos computacional (CFD) é um assunto de grande importância e talvez obrigatório no que diz respeito a graduação e na indústria, a exemplo do que já acontece na pós-graduação e na pesquisa.

Na aerodinâmica, as soluções numéricas estão sendo utilizadas amplamente para representar condições diferentes do escoamento sobre um corpo, visto que os métodos analíticos (que também fazem parte da classe dos métodos teóricos) são aplicados somente a problemas cujas hipóteses simplificativas requeridas os desviam de maneira drástica do fenômeno físico real, além de que é aplicado somente a geometria simples com condições de contorno também simples. Também deve-se levar em consideração que a experimentação em laboratório, mesmo

que tenha vantagem por se tratar da configuração real, é de altíssimo custo, e muitas vezes não pode ser realizada por questões de segurança ou pela dificuldade de reprodução das condições reais, como, por exemplo, no escoamento supersônico a grandes altitudes (MALISKA, 2004).

Desse modo, é possível destacar dois métodos de validação, sendo eles, a **validação numérica** que atesta a qualidade do método numérico empregado e a **validação física** que se preocupa com a fidelidade do modelo matemático para com o problema físico. A Figura 1 detalha os dois níveis de validação.

Figura 1 – Níveis de validação



## 2 OBJETIVOS

O presente trabalho tem como objetivo realizar a implementação em linguagem Python das equações de Navier-Stokes para escoamento incompressível bidimensional e analisar as ferramentas e métodos utilizados durante a mesma. Será implementado o problema do escoamento bidimensional em uma malha retilinear e uniforme com um fluido newtoniano, viscoso e incompressível.

Todo conteúdo exposto aqui serve de proposta e será adaptado conforme as necessidades posteriores do trabalho e em detrimento do cronograma apresentado.

### 2.1 Objetivos específicos

Alguns dos objetivos específicos do trabalho são listados a seguir:

- Realizar a formulação no tempo por Euler Explícito e avaliar tal formulação;
- Realizar a discretização dos termos convectivos e difusivos pelo método das diferenças centradas (MDC) de segunda ordem;
- Utilizar o método de malha deslocada com volumes fictícios (ou células fantasmas);
- Realizar a correção das velocidades e da pressão utilizando o método SIMPLE;
- Resolver a correção de pressão por matriz esparsa pentadiagonal;
- Comparar o resultado calculado com os dados da bibliografia para o caso da cavidade bidimensional com tampa deslizante.

### 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo será apresentado o embasamento teórico relacionado ao trabalho, com o objetivo de auxiliar o leitor na compreensão do mesmo. Toda teoria proveniente da revisão bibliográfica será devidamente referenciada, possibilitando assim consultas aprofundadas e ideias para solução de quaisquer outros problemas da área de dinâmica dos fluidos.

O desenvolvimento deste capítulo segue uma ordem lógica ligada a proposta do trabalho desenvolvido neste documento em uma tentativa de discorrer o raciocínio da maneira mais clara e concisa possível.

#### 3.1 Linguagem Python

A linguagem Python é uma linguagem de programação de alto nível que tem como característica uma tipagem forte e dinâmica. Outra característica marcante da linguagem Python é que ela é multiplataforma, ou seja, todos os programas que forem escritos em uma determinada plataforma, podem facilmente ser executados na maioria das plataformas existentes (DOWNEY; ELKNER; MEYERS, 2002). Não menos importante, a biblioteca padrão da linguagem Python é muito extensa, contendo métodos e funções variadas para a resolução essencialmente de qualquer tarefa e isso inclui as ferramentas para trabalhar com dados científicos.

#### 3.2 escoamento compressível e incompressível

Os escoamentos onde as variações na massa específica são desprezíveis denominam-se incompressíveis, por outro lado quando as variações de massa específica não são desprezíveis, tem-se o escoamento compressível (ASSY, 2004).

Exemplos de escoamento compressível e incompressível são respectivamente os escoamentos de gases e os escoamentos de muitos líquidos.

Sob pressões moderadas, os líquidos geralmente são considerados incompressíveis, mas em altas pressões os efeitos de compressibilidade nos líquidos podem ser importantes. As mudanças de pressão e de massa específica em líquidos são relacionadas pelo módulo de compressibilidade  $E_v$ .

$$E_v \equiv \frac{dp}{(d\rho/\rho)} \quad (1)$$

#### 3.3 Método dos volumes finitos

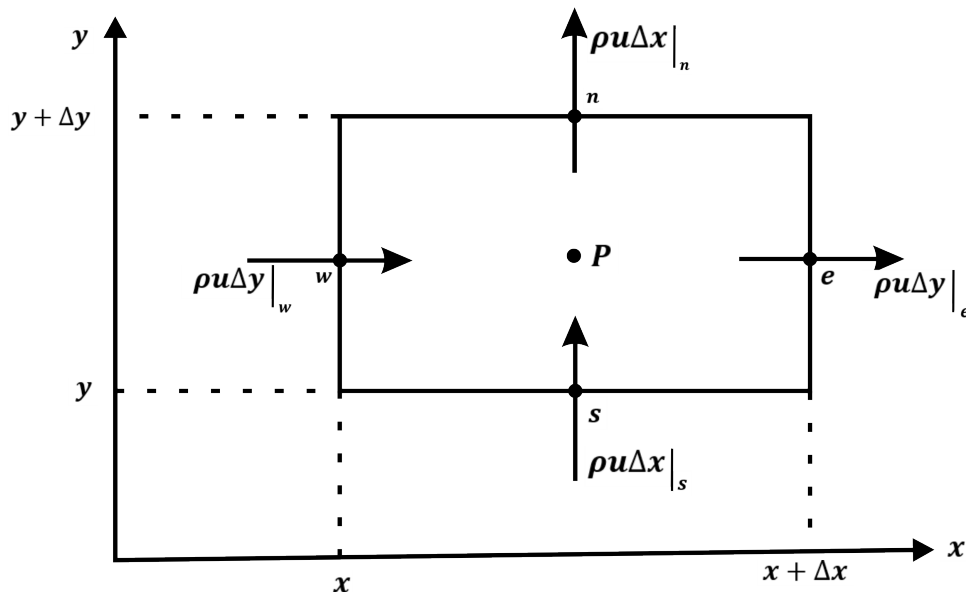
Um método de volumes finitos é qualquer método que, para obter equações aproximadas, satisfaz a conservação da propriedade em nível de volumes elementares. Existem duas maneiras de se obter as equações aproximadas no método dos volumes finitos, sendo



que a primeira é a realização de balanços da propriedade em questão nos volumes finitos e a segunda é integrar sobre o volume elementar, no espaço e no tempo, as equações de forma conservativa (MALISKA, 2004).

Uma maneira de ilustrar a conexão entre as equações aproximadas usadas no método dos volumes finitos e as equações diferenciais na forma conservativa para um volume elementar bidimensional é demonstrada na Figura 2.

Figura 2 – Volume elementar para os balanços de conservação



Fonte: MALISKA 2004

### 3.4 Equações de Navier-Stokes

O comportamento do movimento dos fluidos, bem como as equações que o regem, começaram a ser deduzidas de forma sistemática a partir do século XVIII. O responsável pela formulação matemática do escoamento de fluidos invíscidos foi Leonard Euler (1707-1783), com a dedução das chamadas equações de Euler. No entanto, a representação matemática do comportamento dos fluidos tornou-se forte a partir do século XIX, graças aos estudos dos franceses Claude Navier (1785-1836) e Simeon Poisson (1781-1840), que respectivamente em 1827 e em 1831 introduziram nas equações de Euler, os efeitos da viscosidade, analisando as forças intermoleculares em um escoamento de fluido (CENEDESE, 2005).

Estas equações foram re-deduzidas pelo francês Barre de Saint-Venant (1797-1886) em 1843 e também pelo inglês George Stokes (1819-1903) em 1845, onde a avaliação macroscópica do movimento do fluido e as forças que lhe dão origem, introduziram o conceito de tensão de cisalhamento como uma função linear da taxa de deformação bem como o conceito de pressão termodinâmica num ponto qualquer do escoamento como sendo igual à média aritmética das tensões normais agindo naquele ponto (CENEDESE, 2005). Dessa maneira surgiu a equação

vetorial para a conservação da quantidade de movimento, conhecida como as *Equações de Navier-Stokes*.

Soluções analíticas para as equações de Navier-Stokes são difíceis de serem encontradas porque são equações diferenciais parciais não-lineares, e a teoria matemática dessa classe de equações ainda não é desenvolvida suficientemente de modo a permitir a obtenção de soluções analíticas em regiões arbitrárias e condições de contornos gerais.

Os altos custos associados a experimentação prática, é comum fazer simplificações e realizar medias em apenas alguns pontos da região em que ocorrem os fenômenos de interesse e é por isso que nem sempre esses tratamentos teóricos ou experimentais são satisfatórios. Com o avanço da tecnologia, uma terceira alternativa surgiu e esta é a obtenção pela solução numérica das equações de Navier-Stokes utilizando técnicas e ferramentas computacionais, o campo de velocidade que compõe o escoamento.

Nesse contexto, observa-se que as equações de Navier-Stokes associadas à equação da conservação da massa e submetidas às condições de contorno adequadas são capazes de representar a maioria dos escoamentos, sejam eles com transferência de calor ou sem, seja laminar ou turbulento (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2011).

### 3.5 Equações de Navier-Stokes em escoamentos bidimensionais

A formulação matemática para o escoamento na forma bidimensional (direções  $x$  e  $y$ ) dada pelo sistema de Navier-Stokes é

$$u_t + uu_x + vu_y + p_x = \nu \partial u, \quad (2)$$

$$v_t + uv_x + vv_y + p_y = \nu \partial v, \quad (3)$$

$$u_x + v_y = 0, \quad (4)$$

onde  $\nu > 0$  é a viscosidade,  $u = (u, v)$  é a velocidade e  $p$  é a pressão de um fluido incompressível. As condições iniciais são as seguintes:

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = f(x, y), \\ v(x, y, 0) = g(x, y). \end{cases} \quad (5)$$

Logo, por compatibilidade tem-se que:

$$f_x + g_y = 0. \quad (6)$$

Em uma solução  $(u, v, p)$  do sistema de Navier-Stokes a pressão não está unicamente determinada, pois para uma nova aplicação  $p_0 = p_0(t)$  dependendo somente de  $t$  tem-se que  $(u, v, p_1)$  também soluciona o mesmo sistema, onde  $p_1(x, y, t) = p(x, y, t) + p_0(t)$ . Dessa forma, para que uma solução do sistema de Navier-Stokes seja unicamente determinada, estabelecemos a normalização

$$(1, p(\cdot, t)) = 0, \forall t \leq 0, \quad (7)$$

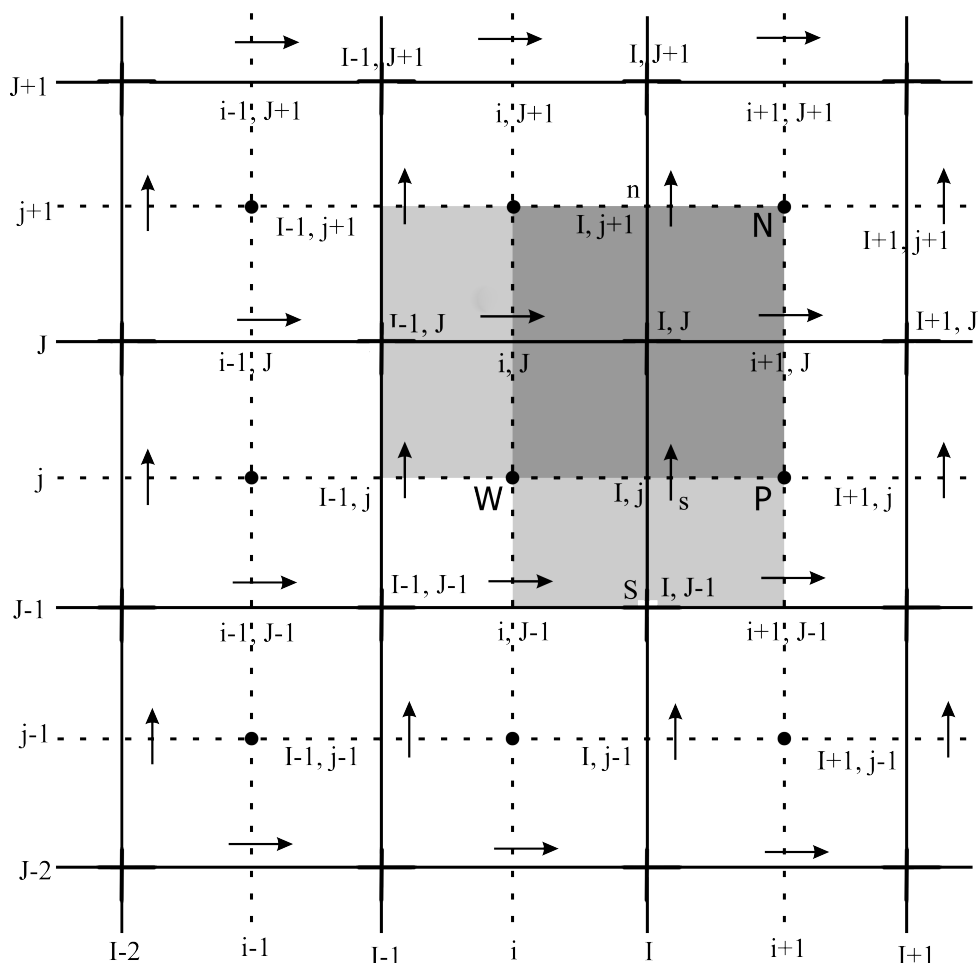
onde 1 indica a função identicamente 1 para quaisquer valores de  $x$  e  $y$ .

### 3.6 Malha deslocada

O método de volumes finitos inicia sempre pela discretização do domínio e as equações de transporte relevantes, mas para isso é necessário decidir onde localizar as velocidades. Parece lógico definir as velocidades no mesmo local onde se encontram as variáveis escalares como a pressão ou a temperatura por exemplo, no entanto, se as velocidades e as pressões são ambas definidas nos nós de um volume de controle pode ocorrer que um campo de pressão altamente não uniforme atue como um campo uniforme nas equações de momento discretizadas (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007). Dessa maneira, fica claro que, se as velocidades são definidas nos nós da malha, a influência da pressão não é adequadamente representada nas equações de momento. Uma solução para esse problema é usar uma malha deslocada (**staggered grid**) para as componentes da velocidade  $u$  e  $v$ , tal qual proposto por (PATANKAR, 1980).

A ideia é avaliar as variáveis escalares tais como a pressão, densidade, temperatura, etc., nos pontos nodais, mas calcular as componentes da velocidade nas faces das células. A disposição para o cálculo de um escoamento bidimensional é mostrada na Figura 3.

Figura 3 – Malha deslocada (staggered grid) para escoamento bidimensional



No arranjo por malha deslocada, os nós de pressão coincidem com as faces do volume de controle, tanto para  $u$ , quanto para  $v$ , logo o gradiente de pressão é dado por

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_P - p_W}{\Delta x_u}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{p_P - p_S}{\Delta y_v}, \tag{9}$$

onde  $\Delta x_u$  e  $\Delta y_v$  são a largura do volume de controle em ambas as direções.

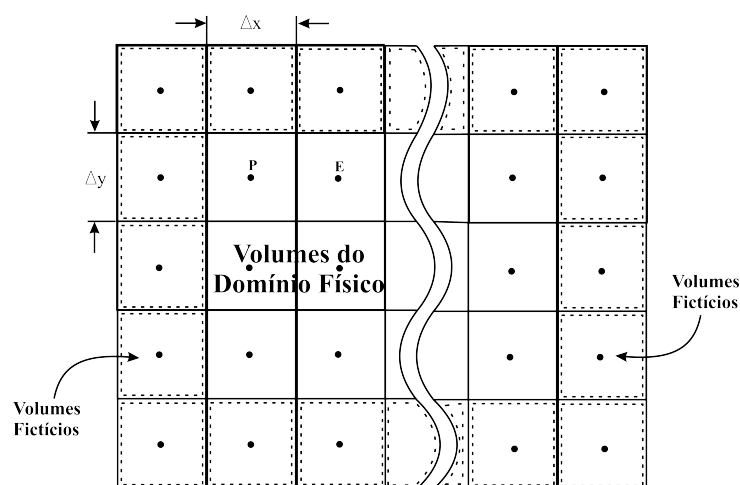
### 3.7 Condições de contorno por volumes fictícios

Todos os volumes elementares internos possuem equações aproximadas idênticas, porém para se obter o sistema de equações algébricas completo, é também necessário obter as condições de contorno. Existem diversas formas de aplicação das condições de contorno e nesse trabalho será utilizada a aplicação por volumes fictícios. Como a sua própria denominação indica, esse volume não existe e não tem posição geométrica na malha. A prática dos volumes fictícios é atraente, de fácil aplicação, e usa volumes inteiros para todos os volumes, respeitando, portanto, os princípios de conservação para todo o domínio (FERZIGER; PERIC, 2002).

Todos os volumes do domínio, inclusive os de fronteira, são interpretados como internos, uma vez que são criados os volumes fictícios. A desvantagem é a criação de novas incógnitas, o que aumenta o sistema linear e causa maiores complicações quando a dimensão do problema aumenta (MALISKA, 2004). Com a criação dos volumes fictícios, deve-se criar as equações para esses volumes em função das condições de contorno existentes.

Em suma, usar volumes fictícios é uma boa alternativa, apesar do aumento significativo do número de equações. A aplicação por volumes fictícios é ilustrada na Figura 4.

Figura 4 – Condições de contorno com pontos fictícios



### 3.8 Acoplamento pressão/velocidade - método SIMPLE

A natureza do processo de solução requer que cada variável tenha uma equação evolutiva para ser avançada. Dada a equação de Navier-Stokes, é fácil identificar que as variáveis  $u$  e  $v$  podem ser avançadas pela equação do movimento em cada direção. Para avançar a pressão, as coisas não são tão simples.

A solução segregada das equações de conservação da quantidade de movimento e da equação de conservação da massa, para problemas incompressíveis, gera o problema do acoplamento pressão-velocidade. Uma das formas de se abordar o problema é seguindo o princípio dos métodos tipo SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*)(MALISKA, 2004).

Para a solução do problema, inicialmente é feita uma estimativa de um campo de pressão  $p^*$  e obtêm-se através das equações de conservação da quantidade de movimento um campo de  $u^*$  e  $v^*$  que, a priori, não satisfazem a equação da continuidade. O procedimento recomendado é estabelecer expressões de correção para as velocidades  $u^*$  e  $v^*$  em função de gradientes de correção de pressão  $p'$ (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007). Quando a correção de pressão não for mais necessária, estes gradientes de  $p'$  serão nulos e a correção sobre  $u^*$  e  $v^*$  será nula.

Para a evolução de  $p'$  a equação da continuidade é utilizada, onde as equações de correção são introduzidas gerando uma equação para  $p'$  com termo fonte envolvendo  $u^*$  e  $v^*$ .

A correção  $p'$  é a diferença entre a pressão real  $p$  e a pressão estimada  $p^*$ , então têm-se que:

$$p = p^* + p' \quad (10)$$

Igualmente, pode-se definir as correções de velocidades  $u'$  e  $v'$  para as velocidades estimadas  $u^*$  e  $v^*$  como segue:

$$u = u^* + u' \quad (11)$$

$$v = v^* + v' \quad (12)$$

Para iniciar o método SIMPLE um campo de pressão  $p^*$  é estimado. Tendo as equações de momento

$$a_{i,J}u_{i,J} = \sum a_{nb}u_{nb} + (p_{I-1,J} - p_{I,J})A_{i,J} + b_{i,J}, \quad (13)$$

$$a_{I,j}v_{I,j} = \sum a_{nb}v_{nb} + (p_{I,J-1} - p_{I,J})A_{I,j} + b_{I,j}, \quad (14)$$

onde  $b_{i,J}$  e  $b_{I,j}$  são os termos fontes de momento e  $A_{i,J}$  e  $A_{I,j}$  são respectivamente a área da face da célula do volume de controle em  $u$  e em  $v$ , pode-se resolvê-las usando a pressão estimada em ordem a obter as componentes de velocidade  $u^*$  e  $v^*$ . A solução é descrita a seguir:

$$a_{i,J}u_{i,J}^* = \sum a_{nb}u_{nb}^* + (p_{I-1,J}^* - p_{I,J}^*)A_{i,J} + b_{i,J}, \quad (15)$$

$$a_{I,j}v_{I,j}^* = \sum a_{nb}v_{nb}^* + (p_{I,J-1}^* - p_{I,J}^*)A_{I,j} + b_{I,j}, \quad (16)$$

A substituição correta do campo de pressão  $p$  nas equações de momento fornece os campos de velocidade reais  $u$  e  $v$ . A subtração das equações (15) e (16) das equações (13) e (14) fornece:

$$a_{i,J}(u_{i,J} - u_{i,J}^*) = \sum a_{nb}(u_{nb} - u_{nb}^*) + [(p_{I-1,J} - p_{I-1,J}^*) - (p_{I,J} - p_{I,J}^*)]A_{i,J}, \quad (17)$$

$$a_{I,j}(v_{I,j} - v_{I,j}^*) = \sum a_{nb}(v_{nb} - v_{nb}^*) + [(p_{I,J-1} - p_{I,J-1}^*) - (p_{I,J} - p_{I,J}^*)]A_{I,j}. \quad (18)$$

Usando as relações dadas nas equações (10) - (12), pode-se reescrever as equações (17) e (18) da seguinte maneira:

$$a_{i,J}u'_{i,J} = \sum a_{nb}u'_{nb} + (p'_{I-1,J} - p'_{I,J})A_{i,J}, \quad (19)$$

$$a_{I,j}v'_{I,j} = \sum a_{nb}v'_{nb} + (p'_{I,J-1} - p'_{I,J})A_{I,j}. \quad (20)$$

Como principal aproximação do algoritmo SIMPLE, é realizada uma omissão dos termos  $\sum a_{nb}u'_{nb}$  e  $\sum a_{nb}v'_{nb}$  (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007), afinal, os mesmos são nulos. Desta maneira as equações (19) e (20) são simplificadas

$$u'_{i,J} = d_{i,J}(p'_{I-1,J} - p'_{I,J}), \quad (21)$$

$$v'_{I,j} = d_{I,j}(p'_{I,J-1} - p'_{I,J}), \quad (22)$$

onde  $d_{i,J} = \frac{A_{i,J}}{a_{i,J}}$  e  $d_{I,j} = \frac{A_{I,j}}{a_{I,j}}$ .

As equações (21) e (22) são as correções a serem aplicadas às velocidades através da formulação em (11) e (12), por consequência têm-se:

$$u_{i,J} = u_{i,J}^* + d_{i,J}(p'_{I-1,J} - p'_{I,J}), \quad (23)$$

$$v_{I,j} = v_{I,j}^* + d_{I,j}(p'_{I,J-1} - p'_{I,J}). \quad (24)$$

De maneira igual, existem expressões para  $u_{i+1,J}$  e  $v_{I,j+1}$ :

$$u_{i+1,J} = u_{i+1,J}^* + d_{i+1,J}(p'_{I-1,J} - p'_{I+1,J}), \quad (25)$$

$$v_{I,j+1} = v_{I,j+1}^* + d_{I,j+1}(p'_{I,J-1} - p'_{I,j+1}). \quad (26)$$

onde  $d_{i+1,J} = \frac{A_{i+1,J}}{a_{i+1,J}}$  e  $d_{I,j+1} = \frac{A_{I,j+1}}{a_{I,j+1}}$ .

O campo de velocidade também deve satisfazer a equação da continuidade dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (27)$$

A continuidade na forma discretizada é satisfeita através de:

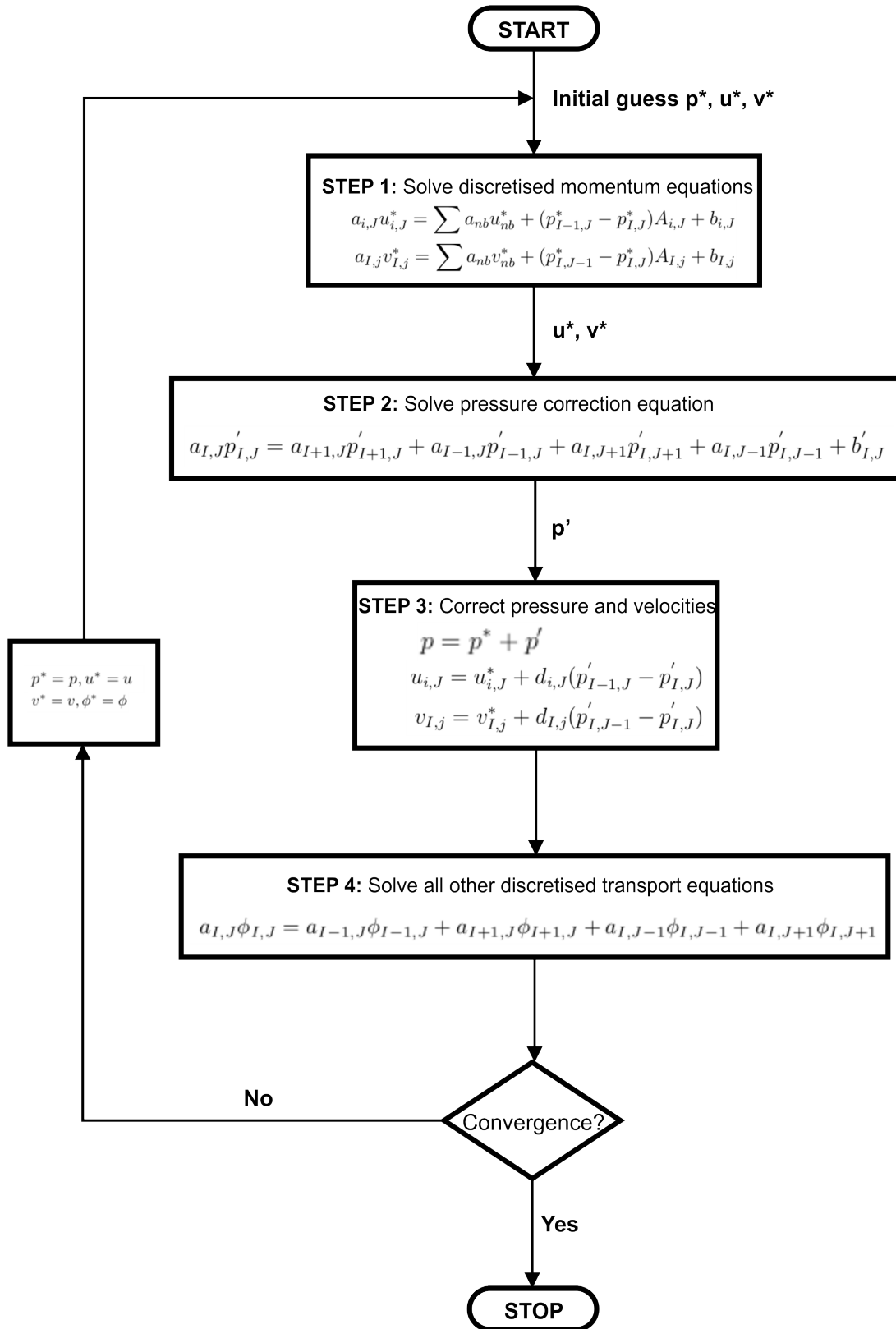
$$[(\rho u A)_{i+1,J} - (\rho u A)_{i,J}] + [(\rho v A)_{I,j+1} - (\rho v A)_{I,j}] = 0 \quad (28)$$

Com a correta substituição das equações já demonstradas, temos a equação de correção da pressão dada por:

$$a_{I,J}p'_{I,J} = a_{I+1,J}p'_{I+1,J} + a_{I-1,J}p'_{I-1,J} + a_{I,J+1}p'_{I,J+1} + a_{I,J-1}p'_{I,J-1} + b'_{I,J} \quad (29)$$

Em resumo o algoritmo SIMPLE é um método através do qual se pode calcular as velocidades e a pressão, é um método iterativo e, a sequência de operações em um programa CFD é demonstrada na Figura 5.

Figura 5 – Algoritmo SIMPLE



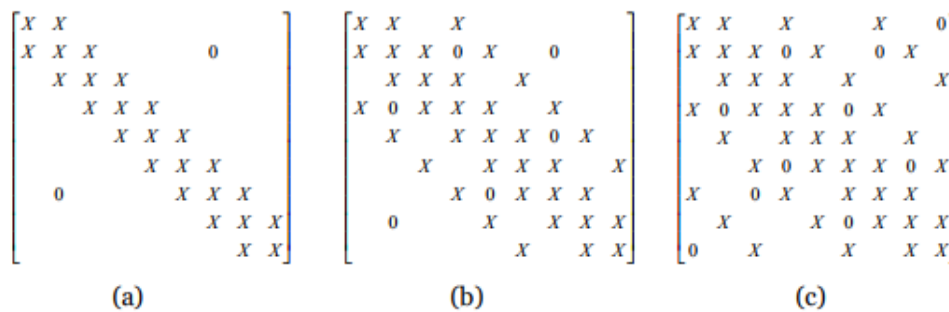
Fonte: Versteeg 2017

### 3.9 Estrutura da matriz de coeficientes

A estrutura da matriz de coeficientes obtida na aproximação numérica é de fundamental importância na escolha do método de solução de um sistema linear.

As matrizes de coeficientes de um problema para os casos uni, bi, ou tridimensional são mostradas na Figura 6.

Figura 6 – Matrizes de coeficientes para: a) Problemas 1-D, matriz tridiagonal; b) Problemas 2-D, matriz pentadiagonal; c) Problemas 3-D, matriz heptadiagonal



Fonte: Autoria Própria 2007

A estrutura da matriz é função de no cálculo do valor de um nó estarem envolvidos os valores dos nós vizinhos e também de termos utilizados na discretização das equações derivadas centrais.

É possível envolver mais pontos do que somente os vizinhos adjacentes para construir a matriz do problema. Se isto for feito, o número de zeros naquela linha se altera. Quando todos os pontos do domínio são envolvidos para a discretização de cada equação, acarreta-se uma linha cheia (sem zeros), no sistema de equações.

Uma característica importante das matrizes obtidas das aproximações numéricas é o alto índice de esparsidade (MALISKA, 2004), para o problema bidimensional o índice de esparsidade é mostrado na Tabela 1.

Tabela 1 – Índice de esparsidade em problemas bidimensionais.

	Malha	10x10	20x20	40x40
Número de Elementos da Matriz		10 <sup>4</sup>	16x10 <sup>4</sup>	256x10 <sup>4</sup>
Não-zeros		500	2000	8000
% de não-zeros		5%	1,25%	0,31%
Índice de Esparsidade		0,95	0,9875	0,9968
Memória requerida [Kbytes]		40/2	640/8	10240/32

Fonte: Maliska 2004



### 3.10 Cavidade bidimensional com tampa deslizante

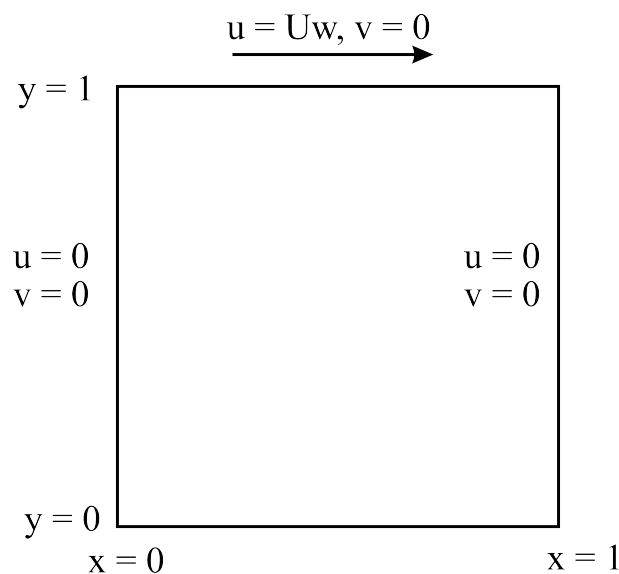
O problema da cavidade com tampa deslizante é um clássico teste de interesse permanente na solução computacional das equações de Navier-Stokes, que permite fazer comparações qualitativas e quantitativas entre os diferentes métodos numéricos.

Simulações numéricas de escoamentos em cavidades retangulares com tampa deslizante são motivadas por quatro fatores principais, sendo eles:

1. Esse escoamento constitui uma representação idealizada de inúmeras situações encontradas na prática, tais como o sistema de deposição contínua de película foto sensível sobre filmes e papéis fotográficos, os escoamentos ao redor de placas divisoras (*cutouts*) e nos sulcos dos trocadores de calor (FERREIRA, 2006) e até mesmo na aerodinâmica aeroespacial;
2. Tal escoamento possui uma topologia altamente não homogênea, que agrega regiões laminares e turbulentas, com forte interação entre estruturas turbilhonares, como detalhado por Ghia, Ghia e Shin (1982);
3. O problema em sua configuração geométrica, facilita a imposição das condições de contornos, além de que necessita de pouca malha para discretização espacial;
4. Existe um considerável número de artigos que tratam desse tema, o que serve de material para a comparação de resultados.

O escoamento no interior de uma cavidade bidimensional apresenta três fronteiras sólidas estacionárias, sobre as quais são impostas condições de não deslizamento, representadas na Figura 7, pelas linhas verticais  $x=0$  e  $x=1$ , com  $y$  variando de 0 a 1, e pela linha horizontal  $y=0$ , com  $x$  variando entre 0 e 1. Para o caso da cavidade com tampa deslizante, uma velocidade não nula  $u = Uw$  é imposta sobre a fronteira superior do domínio de cálculo.

Figura 7 – Esquema da cavidade bidimensional com tampa deslizante



## 4 METODOLOGIA

A formulação do modelo matemático que representará o escoamento será baseada nos princípios fundamentais que governam a mecânica dos fluidos como a equação da conservação de massa, as equações de balanço de quantidade de movimento e de energia.

No que diz respeito a discretização espacial, é importante que seja feito uso de esquemas espaciais que conservam energia, logo, a discretização é realizada através da integração espacial das equações governantes sobre um volume elementar, gerando um sistema de equações algébricas, permitindo assim sua solução.

### 4.1 Equação de Navier-Stokes bidimensional

Para a solução do problema de escoamento incompressível bidimensional, é considerada a equação de Navier-Stokes, que é definida funcionalmente como:

$$T + C = P + D + F \quad (30)$$

onde T é uma função do tempo, C são os termos convectivos, P o termo de pressão, D os termos difusivos e F as forças externas.

Na forma expandida pode ser escrita nas duas direções  $x$  e  $y$  da seguinte maneira:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + g_x, \quad (31)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + g_y. \quad (32)$$

Nesse trabalho, para a solução do escoamento incompressível serão desconsideradas as forças externas ao fluido, portanto a equação de Navier-Stokes bidimensional fica resumida à:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right], \quad (33)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]. \quad (34)$$

### 4.2 Formulação no tempo por Euler explícito

Para a discretização no tempo é utilizado o método de Euler Explícito que é um método numérico de primeira ordem para solucionar EDO's (Equações Diferenciais Ordinárias).

Esse método é baseado na série de Taylor onde, uma função  $f$  é suficientemente diferenciável nas variáveis  $t$  e  $y$  da seguinte maneira:

$$y(t_1) \approx y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} f'(t_0, y_0) + \dots + \frac{\Delta t^k}{k!} f^{k-1}(t_0, y_0) \quad (35)$$

Pode-se definir assim, para cada  $k = 1, 2, \dots$ , um método de passo único explícito que permite obter soluções aproximadas  $y_i \approx y(t_i)$ . O método desta classe mais simples é quando  $k = 1$ , isto é, o método designado por método de Euler (explícito).

Dada a equação de Navier-Stokes bidimensional, a função do tempo discretizada para as duas direções é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t}, \quad (36)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t}. \quad (37)$$

Dessa forma, temos a formulação no tempo que posteriormente será demonstrada juntamente com os demais termos de Navier-Stokes.

### 4.3 Discretização dos termos convectivos

No presente trabalho os termos convectivos são discretizados pelo método das diferenças finitas (MDF), que é um método de resolução de equações diferenciais que se baseia na aproximação de derivadas por diferenças finitas, tal aproximação obtém-se da série de Taylor (já demonstrada no trabalho) da função derivada.

Para uma abordagem espacial de segunda ordem, é utilizado o método das diferenças centradas (MDC) que é uma das vertentes do MDF. Basicamente, o método das diferenças centradas pode ser escrito como:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (38)$$

Considerando a utilização da malha deslocada, a discretização dos termos convectivos para as duas direções  $x$  e  $y$  respectivamente:

$$u_{i,j}^n \left( \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right) + \left( \frac{v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n + v_{i+1,j}^n + v_{i+1,j-1}^n}{4} \right) \left( \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right), \quad (39)$$

$$\left( \frac{u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i-1,j+1}^n}{4} \right) \left( \frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right) + u_{i,j}^n \left( \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right). \quad (40)$$

#### 4.4 Discretização do termo de pressão

O termo de pressão é discretizado pelo método das diferenças finitas, seguindo a vertente do método das diferenças progressivas (MDP), que é uma abordagem de primeira ordem e é basicamente expressa da seguinte maneira:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (41)$$

Para o termo de pressão presente na equação de Navier-Stokes bidimensional, temos a discretização pelo MDP para as duas direções dada respectivamente por:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n}{\Delta x}, \quad (42)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n}{\Delta y}. \quad (43)$$

No caso da pressão, é justificável utilizar uma discretização de primeira ordem, visto que para o problema o gradiente de pressão é linear.

#### 4.5 Discretização dos termos difusivos

Do mesmo modo que os termos convectivos, uma abordagem espacial de segunda ordem será realizada para os termos difusivos, então, a discretização é feita pelo método das diferenças centradas. Como os termos convectivos possuem derivadas de segunda ordem em sua formulação, o esquema do MDF básico para esse tipo de derivada é:

$$f''(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \quad (44)$$

Portanto, a discretização dos termos difusivos em ambas as direções é dada por:

$$\nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \nu \left( \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right), \quad (45)$$

$$\nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \nu \left( \frac{v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right). \quad (46)$$

#### 4.6 Correção de pressão-velocidade

Com a intenção de resolver as variáveis de pressão e velocidade intermediária será utilizado o método SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations), descrito anteriormente nesse trabalho.

Para a direção  $x$  a equação da velocidade estimada pode ser expressa da seguinte maneira:

$$u_{i,j}^{n+1*} = u_{i,j}^{n*} + C^n + D^n - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta p^* \quad (47)$$

onde C são os termos convectivos e D os termos difusivos.

Para a correção da velocidade serão empregadas as equações (10)-(12). Portanto, a correção da velocidade corrigida será:

$$u_{i,j}^{n+1} = -u_{i,j}^{n+1*} + u' \quad (48)$$

onde  $u' = -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta p'$ .

Desta maneira têm-se que:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n+1*} - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta t}{\Delta x} (\Delta p')_{i,j}, \quad (49)$$

$$u_{i-1,j}^{n+1} = u_{i-1,j}^{n+1*} - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta t}{\Delta x} (\Delta p')_{i-1,j}. \quad (50)$$

Levando em consideração a equação da continuidade dada por:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} = 0 \quad (51)$$

A correta substituição das equações (49) e (50) em (51) resultará em:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x^2} [-p'_{i-1,j} + 2p'_{i,j} - p'_{i+1,j}] + \frac{1}{\Delta y^2} [-p'_{i,j-1} + 2p'_{i,j} - p'_{i,j+1}] = \\ \frac{\rho}{\Delta t} \left[ \frac{u_{i,j}^{n+1*} - u_{i-1,j}^{n+1*}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j}^{n+1*} - v_{i,j-1}^{n+1*}}{\Delta y} \right] \end{aligned} \quad (52)$$

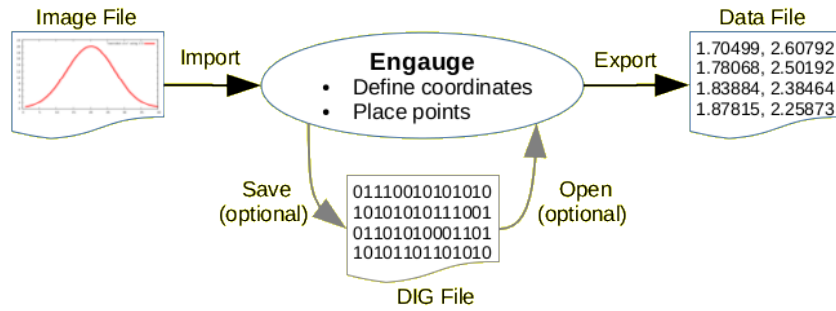
Dada a equação (52), percebe-se que o lado esquerdo da igualdade representa a matriz pentadiagonal do coeficientes e o lado direito da equação equivale ao termo fonte. A solução dessa equação permite iterar as correções para as velocidades e a pressão a cada passo de tempo.

#### 4.7 Coleta e tratamento de dados

A coleta e tratamento de dados é de suma importância para a validação da implementação realizada nesse trabalho.

A coleta de dados foi realizada através do *software open source* Engauge Digitizer, o qual aceita arquivos de imagem (dentre elas PNG, JPEG e TIFF) que contêm gráficos e através desses, converte vários pontos em coordenadas e armazena-os em um arquivo de texto de extensão .csv (tabela com dados numéricos). Trata-se de uma ferramenta muito didática e simples, porém amplamente utilizada para fins científicos. Desta maneira é possível utilizar os gráficos da bibliografia (que estão no formato de imagem) para efeitos de comparação e validação de resultados. Um esquema do processo realizado pelo *software open source* Engauge Digitizer é ilustrado na Figura 8.

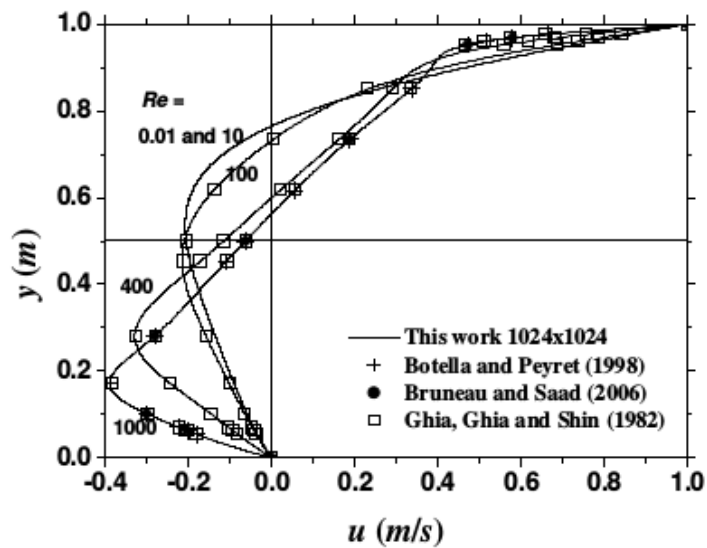
Figura 8 – Processamento do Engauge Digitizer



Fonte: Aatoria Própria 2007

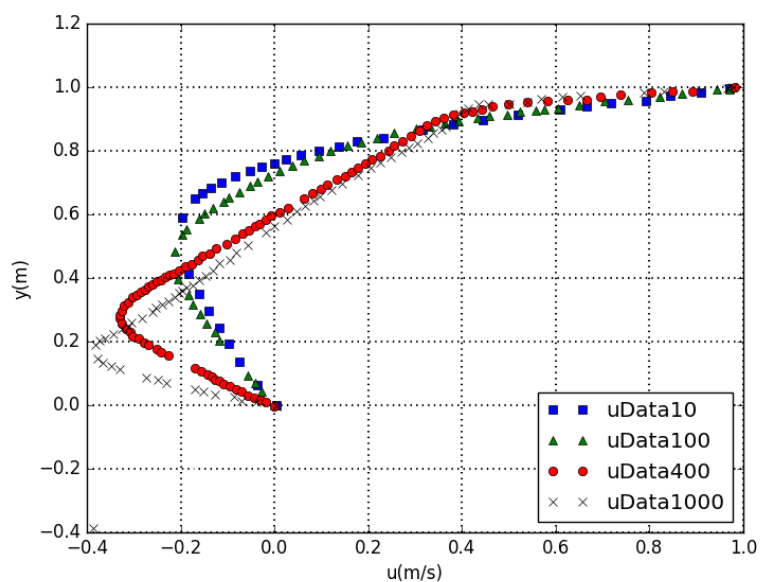
As respostas das velocidades  $u$  e  $v$  para o problema da cavidade com tampa deslizante a 1m/s são fornecidas por Marchi, Suero e Araki (2009) nas Figuras 9 e 11 e os dados obtidos pelo Engauge Digitizer constam nas Figuras 10 e 12.

Figura 9 – Velocidade  $u$  para  $y = 0,5$  (centro da cavidade)



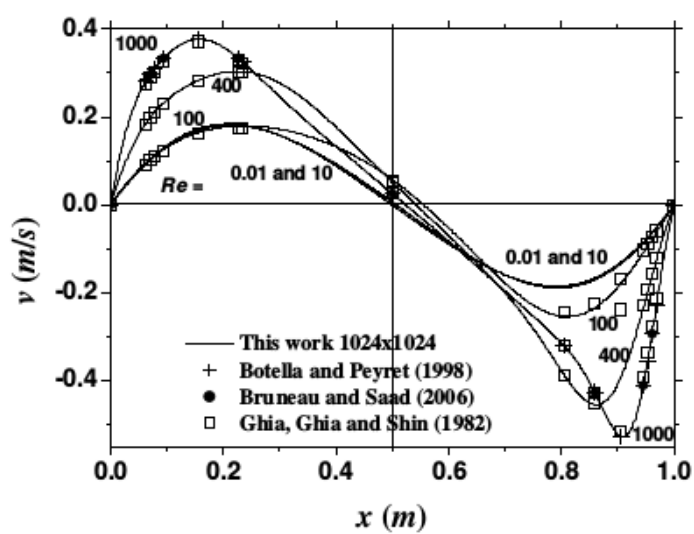
Fonte: Marchi, Suero e Araki (2009)

Figura 10 – Velocidade  $u$  para  $y = 0,5$  (centro da cavidade)-Obtidos pelo Engauge Digitizer



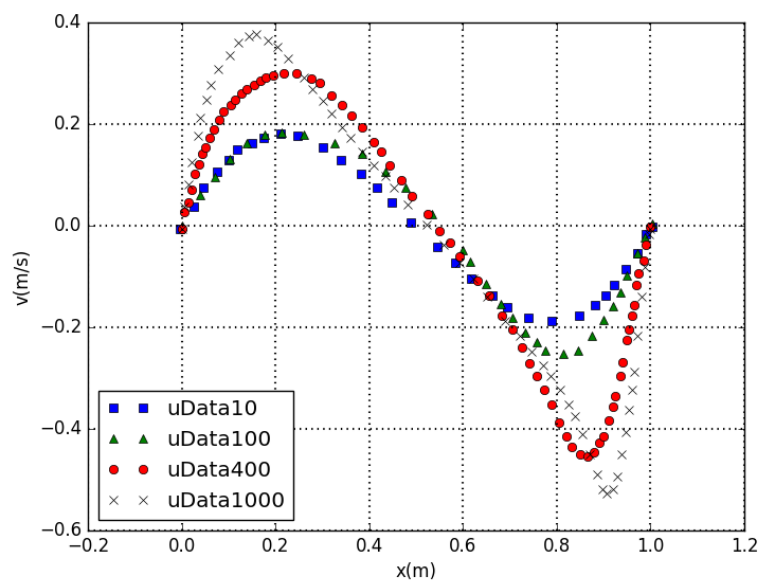
Fonte: Autoria Própria 2017

Figura 11 – Velocidade  $v$  para  $x = 0,5$  (centro da cavidade)



Fonte: Marchi, Suero e Araki (2009)

Figura 12 – Velocidade  $v$  para  $x = 0,5$  (centro da cavidade)-Obtidos pelo Engauge Digitizer



Fonte: Autoria Própria 2017



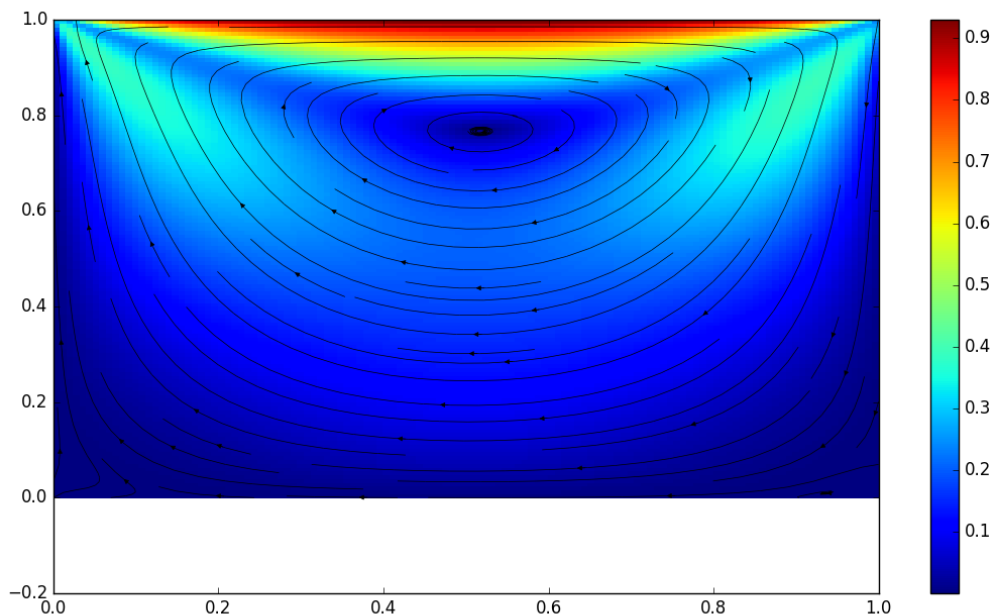
## 5 RESULTADOS

Nesse capítulo são expostos os resultados adquiridos pela implementação SIMPLE para escoamento bidimensional realizada nesse trabalho.

A seguir são apresentados os resultados para o problema da cavidade bidimensional com tampa deslizante de dimensão 1x1m com tampa deslizante a uma velocidade de 1m/s. Os casos analisados são  $Re = 10$ ,  $Re = 100$ ,  $Re = 400$  e  $Re = 1000$ .

A Figura 13 mostra o campo escalar de velocidade do problema calculado pela implementação para  $Re = 10$ , um intervalo de tempo 40s (sendo o passo de tempo  $\Delta t = 0,01s$ )

Figura 13 – Campo escalar de velocidade -  $Re = 10$  - Malha: 128x128

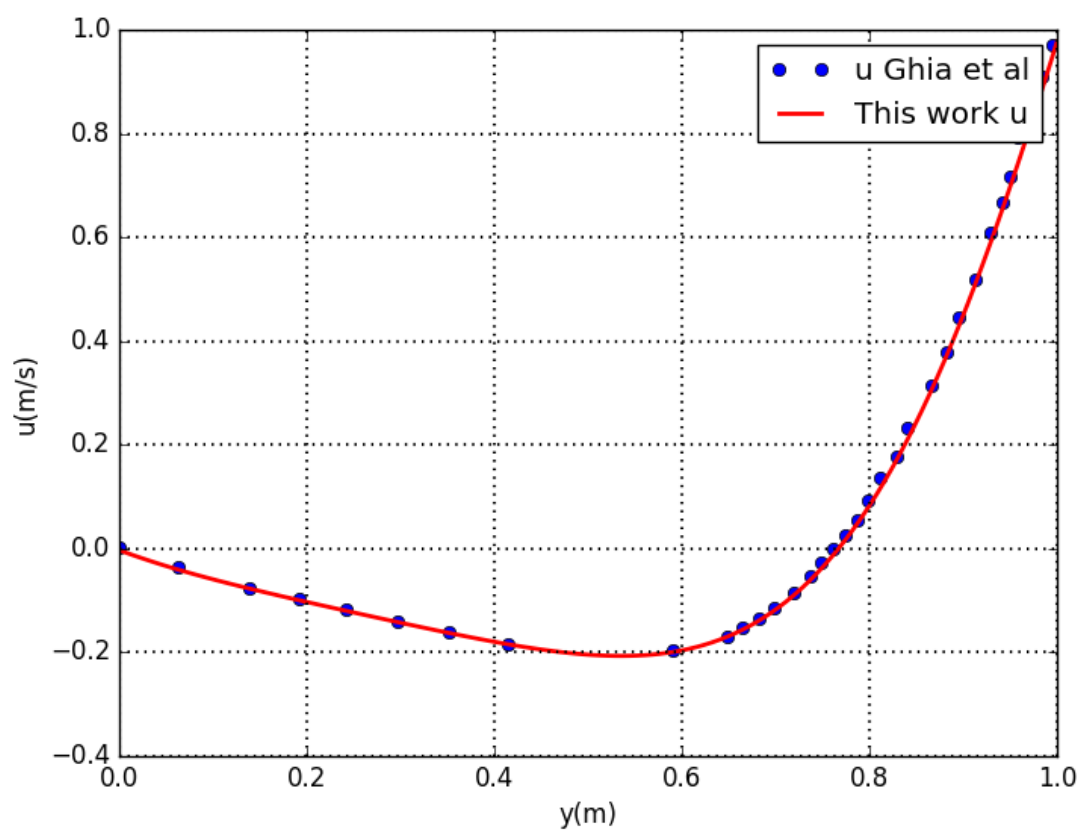


Fonte: Autoria Própria 2007

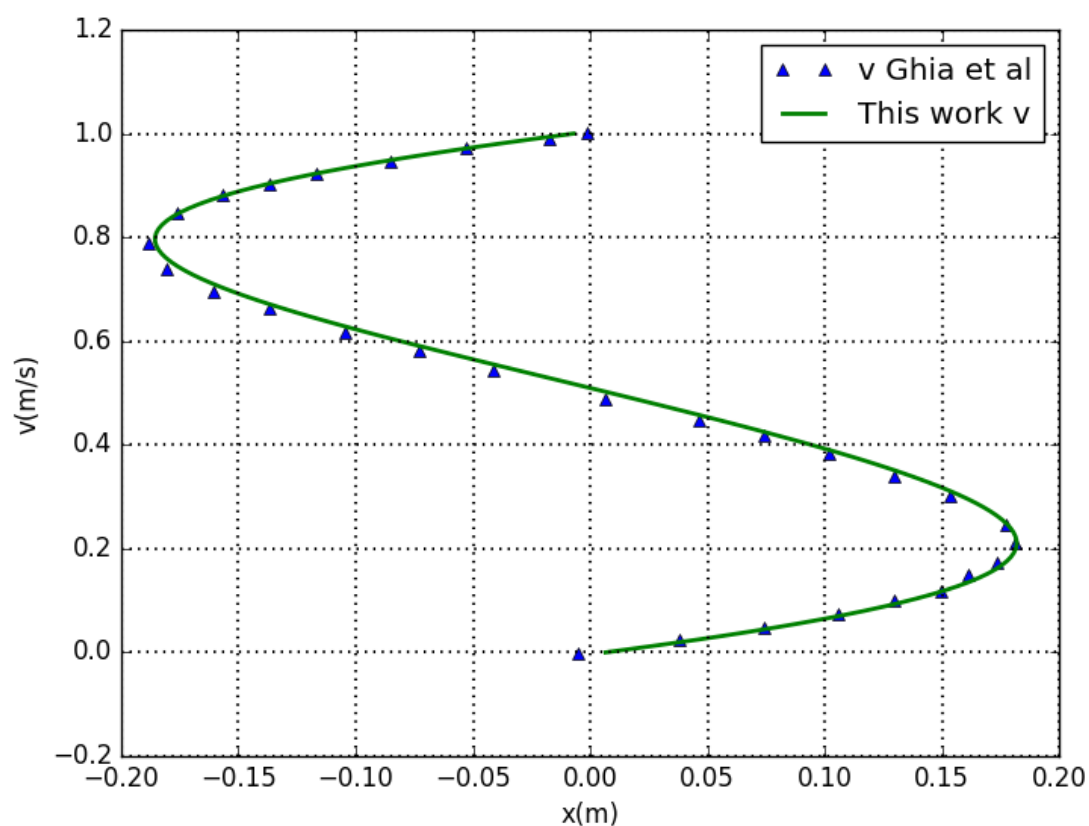
É possível destacar que devido o passo de tempo ser  $\Delta t = 0,01s$  e a malha ser de 128x128, para  $Re = 10$  a simulação foi realizada de maneira ágil e sem maiores problemas.

As Figuras 14 e 15 demonstram a comparação do resultado calculado pela implementação e o resultado exposto por Ghia (1982), conforme exposto no artigo de Marchi, Suero e Araki (2009) para  $Re = 10$ .

Figura 14 – Velocidade  $u$  no centro da cavidade -  $Re = 10$



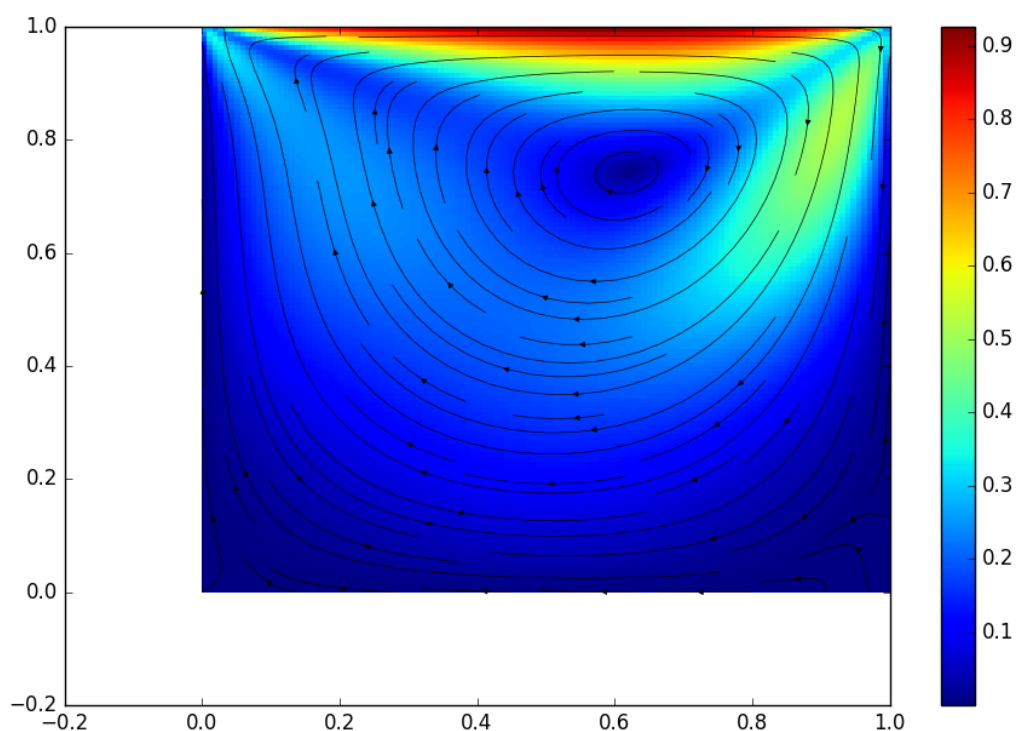
Fonte: Autoria Própria 2017

Figura 15 – Velocidade  $v$  no centro da cavidade -  $Re = 10$ 

Fonte: Autoria Própria 2017

Dado o exposto nas Figuras 14 e 15 é possível perceber que os métodos numéricos utilizados na implementação estão corretamente empregados para a equação de Navier-Stokes bidimensional, visto que o resultado obtido é semelhante ao proposto pela bibliografia.

A Figura 16 mostra o campo escalar de velocidade do problema calculado pela implementação para  $Re = 100$ , um intervalo de tempo 40s (sendo o passo de tempo  $\Delta t = 0,01s$ )

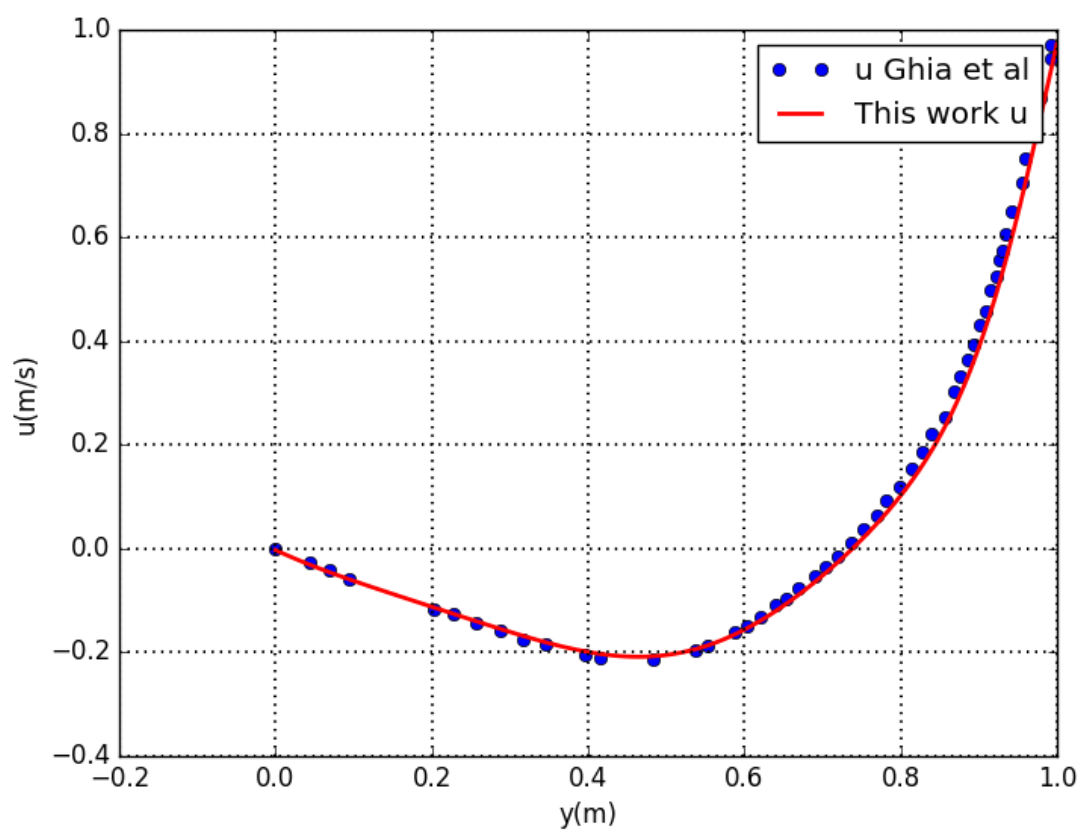
Figura 16 – Campo escalar de velocidade -  $Re = 100$  - Malha: 128x128

Fonte: Autoria Própria 2017

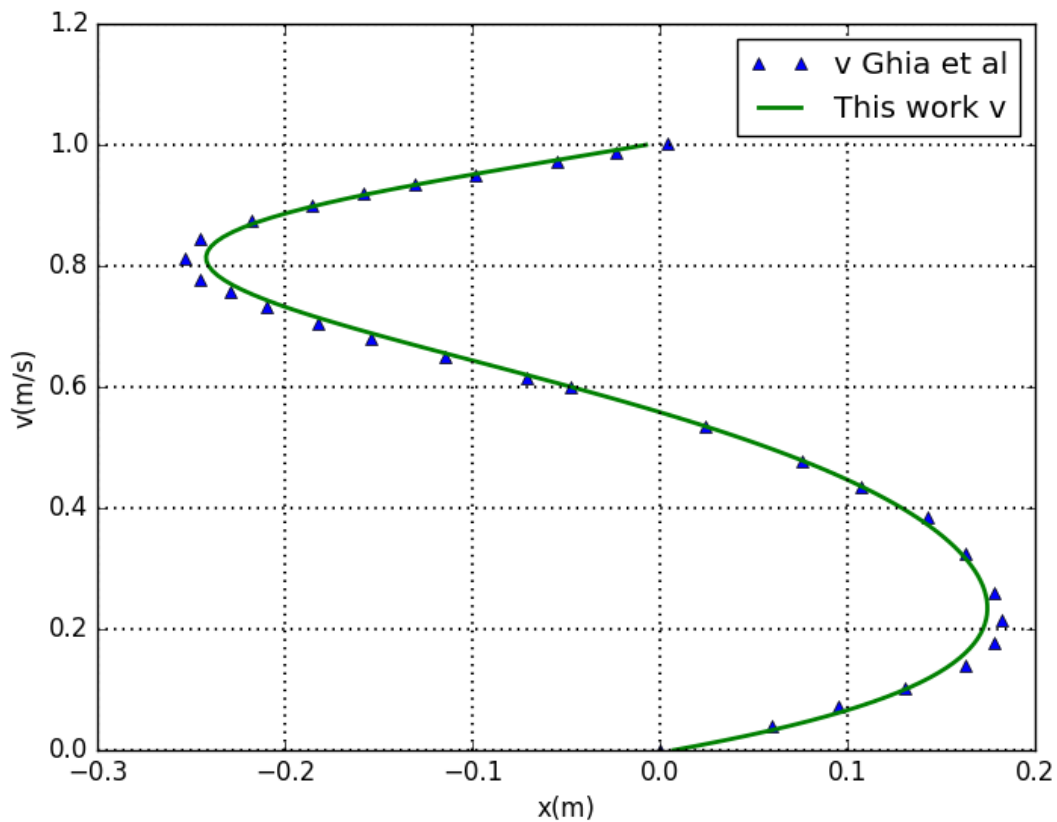
É possível destacar que devido o passo de tempo ser  $\Delta t = 0,01s$  e a malha ser de  $128 \times 128$ , para  $Re = 100$  a simulação foi realizada de maneira ágil, porém de maneira mais lenta do que a simulação com  $Re = 10$ . No entanto não foi preciso fazer alteração no passo de tempo.

As Figuras 17 e 18 demonstram a comparação do resultado calculado pela implementação e o resultado exposto por Ghia (1982), conforme exposto no artigo de Marchi, Suero e Araki (2009) para  $Re = 100$ .

Figura 17 – Velocidade  $u$  no centro da cavidade -  $Re = 100$



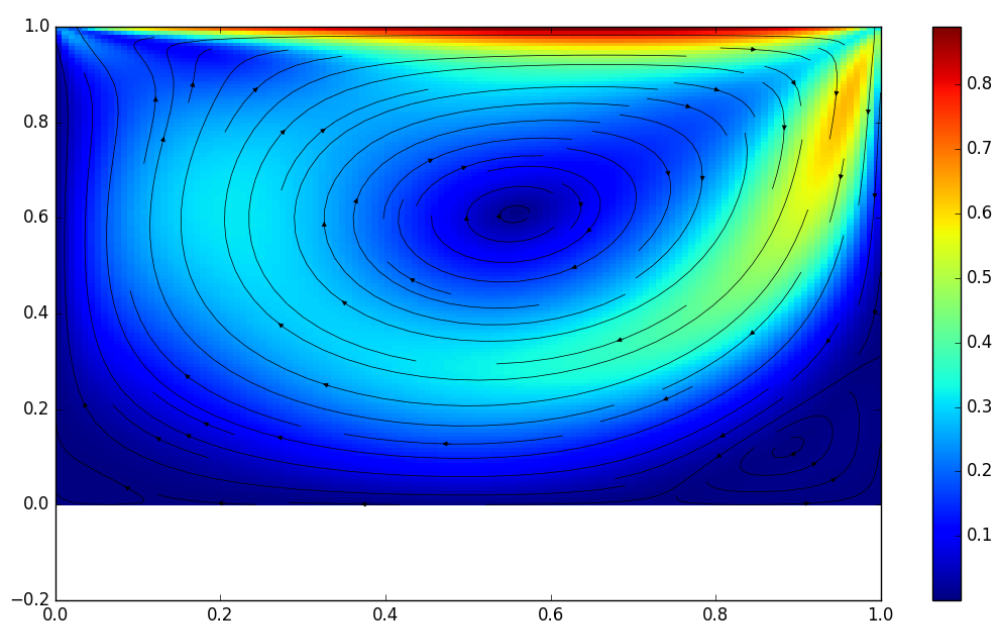
Fonte: Autoria Própria 2017

Figura 18 – Velocidade  $v$  no centro da cavidade -  $Re = 100$ 

Fonte: Autoria Própria 2017

Dado o exposto nas Figuras 17 e 18 é possível novamente perceber que os métodos numéricos utilizados na implementação estão corretamente empregados para a equação de Navier-Stokes bidimensional.

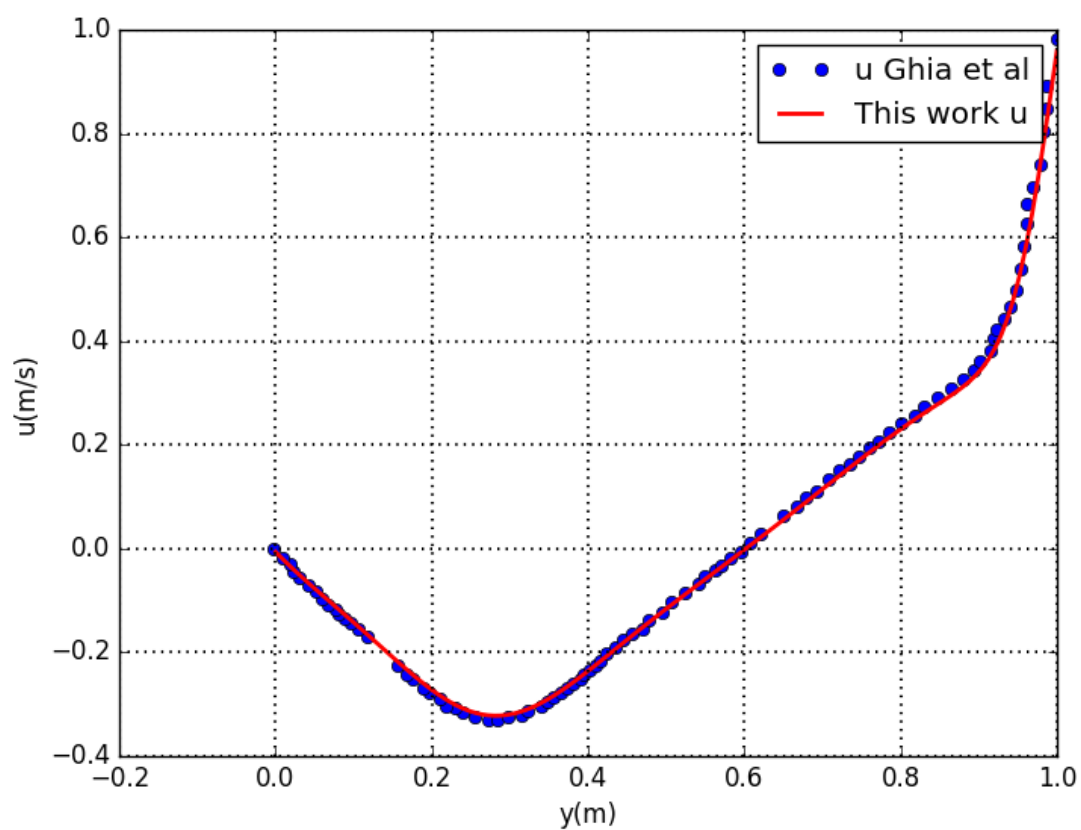
A Figura 19 mostra o campo escalar de velocidade do problema calculado pela implementação para  $Re = 400$ , um intervalo de tempo 40s (sendo o passo de tempo  $\Delta t = 0,001s$ )

Figura 19 – Campo escalar de velocidade -  $Re = 400$  - Malha: 128x128

Fonte: Autoria Própria 2017

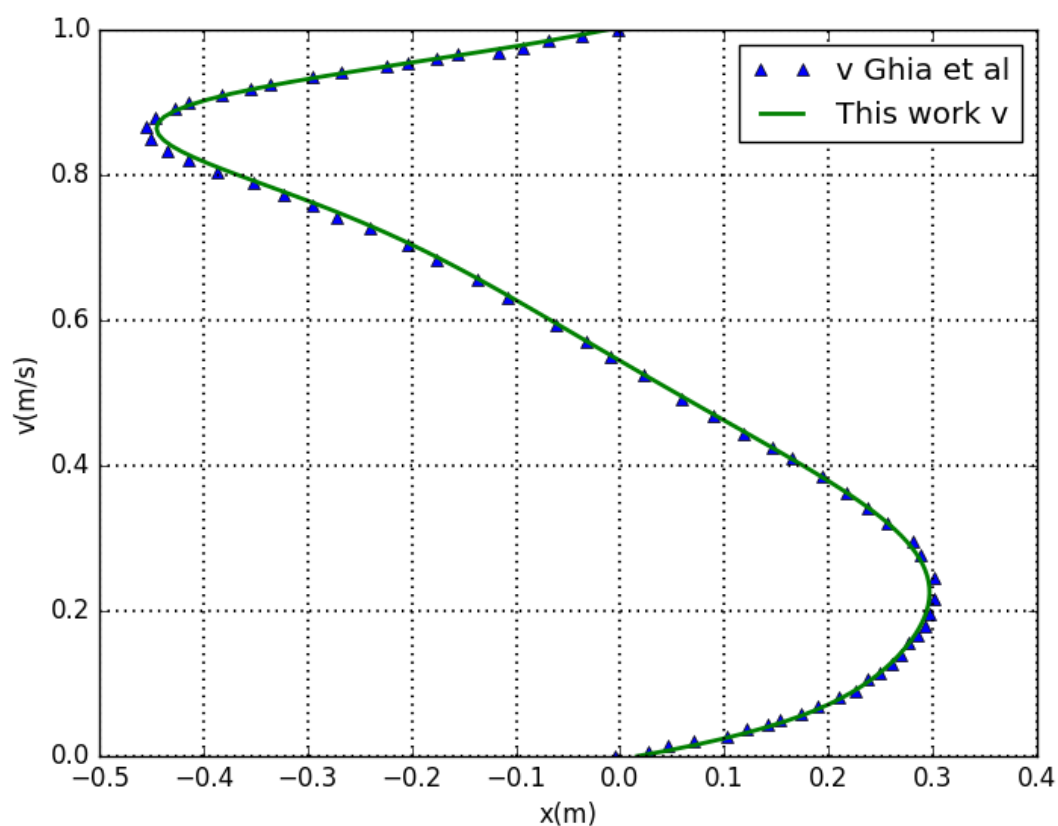
Para  $Re = 400$  foi possível perceber a limitação no passo de tempo devido a abordagem por Euler Explícito, visto que foi necessário diminuir o passo de tempo, o que resultou na necessidade de um maior número de iterações até a convergência, caso contrário não seria possível o cálculo. Desta maneira a simulação começou a necessitar de um tempo maior para ser realizada.

As Figuras 20 e 21 demonstram a comparação do resultado calculado pela implementação e o resultado exposto por Ghia (1982), conforme exposto no artigo de Marchi, Suero e Araki (2009) para  $Re = 400$ .

Figura 20 – Velocidade  $u$  no centro da cavidade -  $Re = 400$ 

Fonte: Autoria Própria 2017

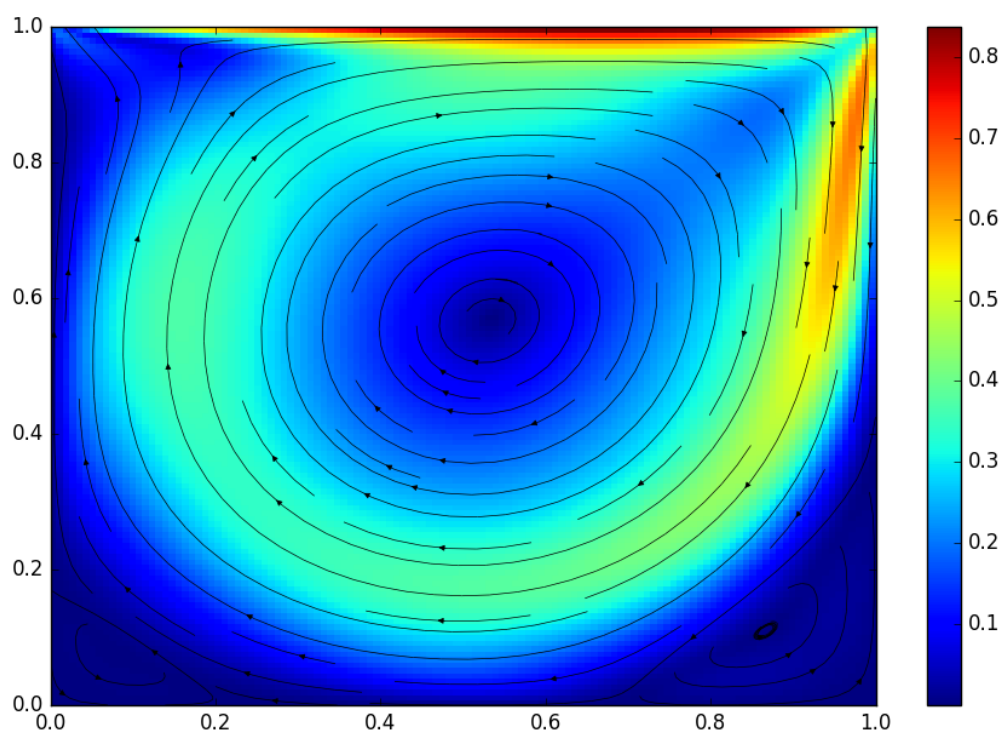


Figura 21 – Velocidade  $v$  no centro da cavidade -  $Re = 400$ 

Fonte: Autoria Própria 2017

Apesar de necessitar de um maior tempo de simulação, foi observado pelas Figuras 20 e 21 que os métodos numéricos utilizados na implementação continuam sendo válidos.

A Figura 22 mostra o campo escalar de velocidade do problema calculado pela implementação para  $Re = 1000$ , um intervalo de tempo 40s (sendo o passo de tempo  $\Delta t = 0,0001s$ )

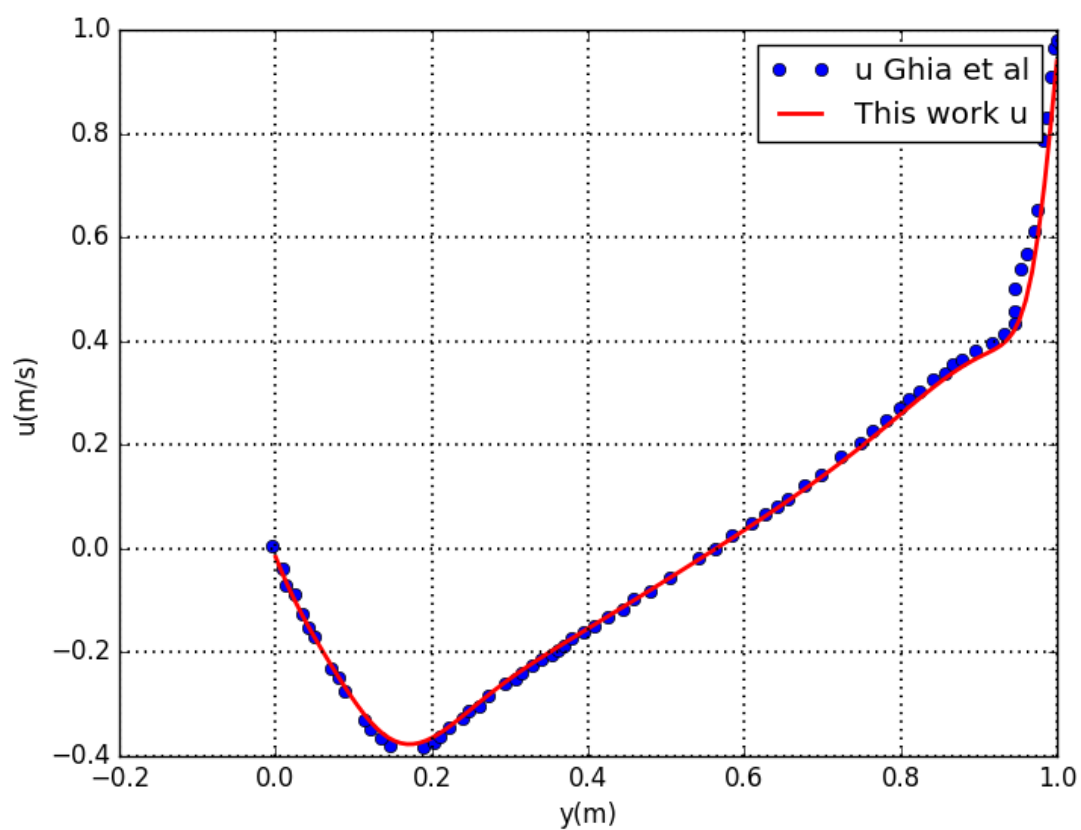
Figura 22 – Campo escalar de velocidade -  $Re = 1000$  - Malha: 128x128

Fonte: Autoria Própria 2017

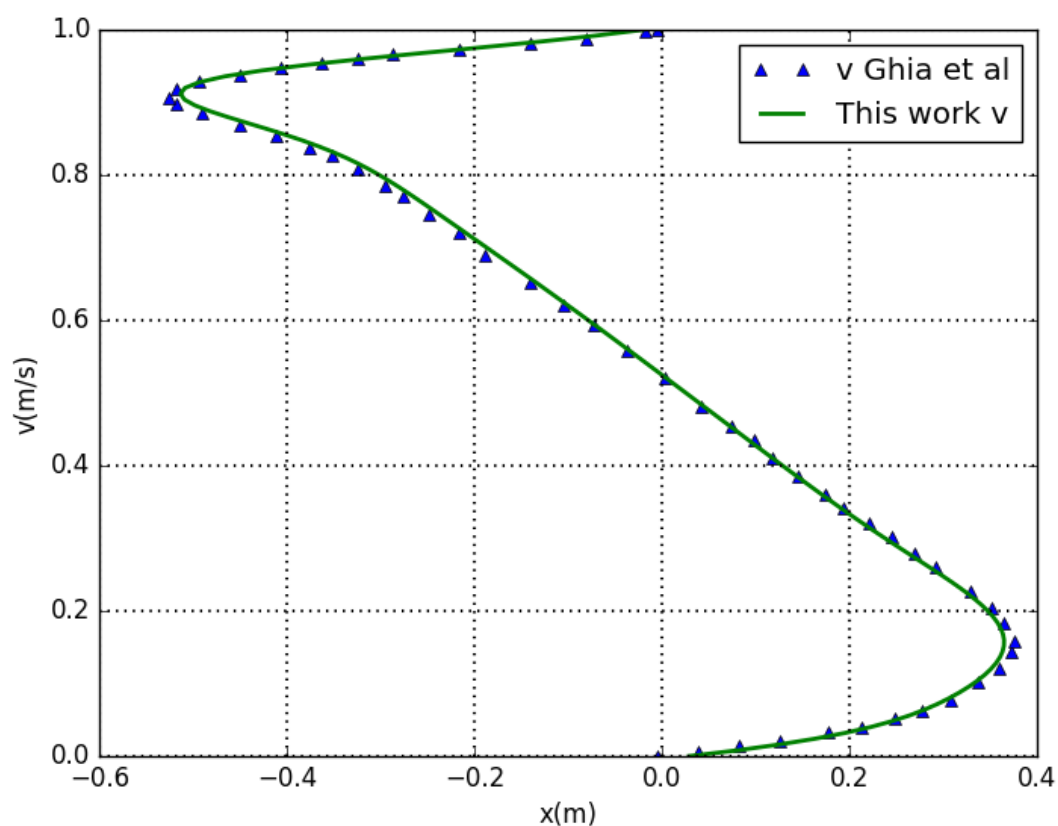
Para  $Re = 1000$  foi possível perceber novamente a limitação no passo de tempo devido a abordagem po Euler Explícito, visto que o passo de tempo teve que ser alterado novamente para que fosse possível chegar a convergência.

As Figuras 23 e 24 demonstram a comparação do resultado calculado pela implementação e o resultado exposto por Ghia (1982), conforme exposto no artigo de Marchi, Suero e Araki (2009) para  $Re = 1000$ .

Figura 23 – Velocidade  $u$  no centro da cavidade -  $Re = 1000$



Fonte: Autoria Própria 2017

Figura 24 – Velocidade  $v$  no centro da cavidade -  $Re = 1000$ 

Fonte: Autoria Própria 2017

Apesar de necessitar de um tempo ainda maior de simulação para  $Re = 1000$ , foi observado pelas Figuras 23 e 24 que os métodos numéricos utilizados na implementação são capazes de descrever o comportamento de fluidos em várias configurações, porém com restrições.

## 6 CONCLUSÃO

Dado o exposto nesse trabalho, é possível perceber que a implementação numérica do escoamento bidimensional realizada é bem eficiente, afinal sua resposta se aproxima muito dos resultados fornecidos pela bibliografia. No problema da cavidade bidimensional com tampa deslizante, as velocidades no centro da cavidade calculadas pelo programa implementado, coincidem com os dados fornecidos por Ghia, Ghia e Shin (1982).

Um aspecto a se destacar é a maior eficiência obtida através da discretização espacial de segunda ordem pelo método das diferenças centradas dos termos convectivos e difusivos, bem como a utilização de uma malha deslocada e de volumes fictícios (ghost cells). Outro ponto fundamental foi a utilização de matrizes esparsas para resolver o sistema de equações, visto que o armazenamento unicamente dos valores não nulos da matriz pentadiagonal (matriz característica em problemas bidimensionais) economiza memória e evita problemas de *overflow* que é uma anomalia onde um programa ultrapassa os limites e sobrescreve a memória adjacente.

No entanto, apesar de ter obtido resultados satisfatórios, foi possível perceber que o tempo de simulação não é rápido suficiente e também que há limitação no passo de tempo ( $\Delta t$ ), este último, proveniente da abordagem explícita e de primeira ordem no tempo por Euler na discretização das equações de Navier-Stokes.

### 6.1 Trabalhos futuros

É possível dar continuidade ao trabalho de diversas maneiras, uma delas é a análise de problemas de escoamentos bidimensionais diferentes da apresentada nesse trabalho, como por exemplo o escoamento entre duas placas paralelas, o escoamento externo em um perfil aerodinâmico, etc. Outra maneira de dar continuidade ao trabalho é fazer abordagens diferentes quanto ao tratamento das equações de Navier-Stokes, um exemplo é a formulação de segunda ordem e implícita no tempo.

## Referências

- ASSY, T. M. **MECÂNICA DOS FLUIDOS: Fundamentos e Aplicações**. 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: Editora LTC, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 11.
- CENEDESE, E. **Solução das Equações de Burgers e de Navier Stokes Bidimensionais Utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada**. Fevereiro 2005. 165 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica - Mecânica dos fluidos) — Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Ilha Solteira, 2005. Citado na página 12.
- DOWNEY, A.; ELKNER, J.; MEYERS, C. **How to Think Like a Computer Scientist**. [S.l.]: Green Tea Press, 2002. Citado na página 11.
- FERREIRA, R. L. **Simulação de Grandes Escalas de Escoamentos Turbulentos Usando Modelagem Dinâmica**. Março 2006. 164 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica - Mecânica dos fluidos) — Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Ilha Solteira, 2006. Citado na página 20.
- FERZIGER, J. H.; PERIC, M. **Computational Methods for Fluid Dynamics**. 3. ed. New York: Springer, 2002. Citado na página 15.
- FOX, R. W.; PRITCHARD, P. J.; MCDONALD, A. T. **Introdução à Mecânica dos Fluidos**. 7. ed. Rio de Janeiro, RJ: Editora LTC, 2011. Citado na página 13.
- GHIA, U.; GHIA, K.; SHIN, C. High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method. **Computational Physics**, v. 48, p. 387–411, 1982. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 40.
- MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**. 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: Editora LTC, 2004. Citado 5 vezes nas páginas 9, 12, 15, 16 e 19.
- MARCHI, C. H.; SUERO, R.; ARAKI, L. K. The lid-driven square cavity flow: Numerical solution with a 1024 x 1024 grid. **Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas – ABCM**, XXXI, n. 3, 2009. Citado 6 vezes nas páginas 25, 26, 28, 31, 34 e 37.
- PATANKAR, S. V. **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**. New York: HEMISPHERE PUBLISHING CORPORATION, 1980. Citado na página 14.
- VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS: The Finite Volume Method**. 2. ed. England: Pearson, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 14, 16 e 17.