

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

LUCAS CHIBELOSKI BAIL

MODELO COSMOLÓGICO NO FORMALISMO COVARIANTE DE ESCALA

CURITIBA

2022

LUCAS CHIBELOSKI BAIL

MODELO COSMOLÓGICO NO FORMALISMO COVARIANTE DE ESCALA

COSMOLOGICAL MODEL IN SCALE COVARIANT FORMALISM

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Física e Astronomia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Pablo Devecchi.

Co-orientador: Prof. Dr. Marlos de Oliveira Ribas.

CURITIBA

2022



[4.0 internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Curitiba



LUCAS CHIBELOSKI BAIL

MODELO COSMOLÓGICO NO FORMALISMO COVARIANTE DE ESCALA

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Física da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Física.

Data de aprovação: 22 de Fevereiro de 2022

Prof. Fernando Pablo Devecchi, Doutorado - Universidade Federal do Paraná (Ufpr)

Prof. André Fabiano Steklain Lisboa, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Clisthenis Ponce Constantinidis, Doutorado - Universidade Federal do Espírito Santo (Ufes)

Prof. Marlos De Oliveira Ribas, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 22/02/2022.

RESUMO

O presente trabalho trata da possibilidade de que dois sistemas de unidades, que descrevem diferentes eras durante a evolução do universo podem ser relacionados através de uma transformação de escala de tempo, sendo essa transformação responsável pelo mapeamento de eras distintas do universo. O sistema de unidades gravitacionais descreve a gravidade na era atual, regida pela relatividade geral, e o sistema de unidades atômicas descreve um universo primordial, com uma gravitação modificada. O modelo foi proposto por Canuto et. al., e traz como consequência a variação temporal da constante gravitacional G , estando esse conceito em acordo com a hipótese dos grandes números de Dirac, e também, com a relatividade geral. Como caso particular, manter G constante significa lidar com equações em unidades gravitacionais, ao passo que a variação temporal de G pode levar a um sistema de equações de campo modificadas em unidades atômicas, que descrevem o universo em uma era no passado. Afim de obter soluções cosmológicas com o formalismo proposto, foram analisadas diferentes possibilidades de constituintes cosmológicos para a aplicação deste, a saber, o fluido de Chaplygin generalizado, o fluido de Van der Waals generalizado e completo e o fluido barotrópico, bem como diferentes possibilidades para a função matemática responsável pela transformação entre os sistemas de unidades. Os resultados encontrados mostram um comportamento diferente para o fator de escala quando comparados os sistemas de unidades gravitacionais e atômicas após a transformação ser aplicada. É observado um comportamento desacelerado-acelerado para o fator de escala em unidades gravitacionais, e um comportamento de Sitter em unidades atômicas, resultados em acordo com o modelo padrão da cosmologia.

Palavras-chave: modelo cosmológico; escala covariante; fluido de Chaplygin generalizado; fluido de Van der Waals.

ABSTRACT

The present work deals with the possibility that two systems of units, which describe different eras during the evolution of the universe, can be related through a timescale transformation, being this transformation responsible for mapping different eras of the universe. The gravitational unit system describes gravity in the current era, governed by general relativity, and the atomic unit system describes a primordial universe, with a modified gravitation. The model was proposed by Canuto et. al., and brings as a consequence the temporal variation of the gravitational constant G , this concept being in agreement with Dirac large number hypothesis, and also with general relativity. As a particular case, keeping G constant means dealing with equations in gravitational units, whereas the temporal variation of G can lead to a system of modified field equations in atomic units, which describe the universe in an era in the past. In order to obtain cosmological solutions with the proposed formalism, different possibilities of cosmological constituents for its application were analyzed, namely, the generalized Chaplygin fluid, the generalized and complete Van der Waals fluid and the barotropic fluid, as well as different possibilities for the mathematical function responsible for the transformation between systems of units. The results found show a different behavior for the scale factor when comparing the systems of gravitational and atomic units after the transformation is applied. A decelerated-accelerated behavior is observed for the scale factor in gravitational units, and a de Sitter behavior in atomic units, results in agreement with the standard model of cosmology.

Keywords: cosmological model; covariant scale; generalized Chaplygin fluid; Van der Waals fluid.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- Figura 1 - Aceleração em função do tempo para $\alpha = 0.5$ nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/\sqrt{t}$, para o gás de Chaplygin Generalizado 56
- Figura 2 - Aceleração em função do tempo para $\alpha = 1$ nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/\sqrt{t}$, para o gás de Chaplygin Generalizado 56
- Figura 3 - Aceleração em função do tempo para $\alpha = 2$ nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/\sqrt{t}$, para o gás de Chaplygin Generalizado 56
- Figura 4 - Aceleração em função do tempo para $\alpha = 0.5$ nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/t$, para o gás de Chaplygin Generalizado 59
- Figura 5 - Aceleração em função do tempo para $\alpha = 1$ nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/t$, para o gás de Chaplygin Generalizado 59
- Figura 6 - Aceleração em função do tempo para $\alpha = 2$ nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/t$, para o gás de Chaplygin Generalizado 59
- Figura 7 - Aceleração em função do tempo para $\alpha = 0.5, 1$ e 2 nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/\sqrt{t}$, para o gás de Chaplygin Generalizado 60
- Figura 8 - Aceleração em função do tempo para $\alpha = 0.5, 1$ e 2 nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/t$, para o gás de Chaplygin Generalizado 60
- Figura 9 - Aceleração em função do tempo nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/\sqrt{t}$, para o gás de Van der Waals Generalizado, com $\psi = 1, \xi = 0,5$ 65
- Figura 10 - Aceleração em função do tempo nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/\sqrt{t}$, para o gás de Van der Waals Generalizado, com $\psi = 1, \xi = 1$ 66
- Figura 11 - Aceleração em função do tempo nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/\sqrt{t}$, para o gás de Van der Waals Generalizado, com $\psi = 1, \xi = 2$ 66
- Figura 12 - Aceleração em função do tempo nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/\sqrt{t}$, para o gás de Van der Waals Generalizado, com $\psi = 2, \xi = 0,5$ 68
- Figura 13 - Aceleração em função do tempo nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/\sqrt{t}$, para o gás de Van der Waals Generalizado, com $\psi = 2, \xi = 1$ 69
- Figura 14 - Aceleração em função do tempo nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/\sqrt{t}$, para o gás de Van der Waals Generalizado, com $\psi = 2, \xi = 2$ 69

Figura 15 - Aceleração em função do tempo nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/t$, para o gás de Van der Waals Generalizado, com $\psi = 1, \xi = 0,5$	71
Figura 16 - Aceleração em função do tempo nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/t$, para o gás de Van der Waals Generalizado, com $\psi = 1, \xi = 1$	71
Figura 17 - Aceleração em função do tempo nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/t$, para o gás de Van der Waals Generalizado, com $\psi = 1, \xi = 2$	72
Figura 18 - Aceleração em função do tempo nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/t$, para o gás de Van der Waals Generalizado, com $\psi = 2, \xi = 0,5$	74
Figura 19 - Aceleração em função do tempo nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/t$, para o gás de Van der Waals Generalizado, com $\psi = 2, \xi = 1$	75
Figura 20 - Aceleração em função do tempo nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/t$, para o gás de Van der Waals Generalizado, com $\psi = 2, \xi = 2$	75
Figura 21 - Aceleração em função do tempo nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/t$, para o gás de Van der Waals Completo	76

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL	12
2.1	Introdução	12
2.2	O Princípio Da Equivalência	12
2.3	O Tensor Métrico	14
2.4	A Equação De Movimento Na Relatividade Geral	15
2.5	O Tensor De Curvatura	16
2.6	O Tensor Energia-Momento	19
2.7	Equação De Campo De Einstein	20
3	COSMOLOGIA	25
3.1	Os Fundamentos Da Cosmologia	25
3.2	Coordenadas Comóveis	26
3.3	A Métrica De Robertson-Walker	28
3.4	A Equação De Friedmann E Da Aceleração No Modelo Cosmológico Padrão	30
3.5	Propriedades Do Modelo Flrw	34
3.5.1	Parâmetros Cosmológicos	34
3.5.2	A Medida De Distâncias Na Métrica De Robertson-Walker	36
3.5.3	O Desvio Para O Vermelho Cosmológico	37
3.6	A Inflação No Modelo Cosmológico Padrão	39
3.6.1	Problemas No Modelo Cosmológico Padrão	39
3.6.2	Cosmologia Inflacionária	40
3.6.3	Soluções Inflacionárias Para Os Problemas No Modelo Cosmológico Padrão	43
3.7	Energia E Matéria Escura	44

3.8	Equações De Estado No Contexto Da Cosmologia	44
3.8.1	A Equação De Estado De Chaplygin	45
3.8.2	A Equação De Estado De Van Der Waals	46
3.8.3	A Equação De Estado Barotrópica	47
4	O FORMALISMO COVARIANTE DE ESCALA	49
5	FLUÍDO DE CHAPLYGIN GENERALIZADO COMO CONSTITUINTE COSMOLÓGICO	54
5.1	Caso $\beta = \frac{1}{\sqrt{t}}$	54
5.2	Caso $\beta = \frac{1}{t}$	59
6	FLUÍDO DE VAN DER WAALS GENERALIZADO COMO CONSTITUINTE COSMOLÓGICO	64
6.1	Caso $\beta = \frac{1}{\sqrt{t}}$	64
6.1.1	Para $\psi = 1$	65
6.1.2	Para $\psi = 2$	68
6.2	Caso $\beta = 1/t$	72
6.2.1	Para $\psi = 1$	72
6.2.2	Para $\psi = 2$	75
6.3	Equação De Estado De Van Der Waals Completa Como Constituinte Cosmológico	78
6.4	O Fluido Barotrópico	79
7	CONCLUSÕES	81
7.1	Considerações Sobre O Universo Preenchido Por Um Fluido De Chaplygin Generalizado	82
7.2	Considerações Sobre O Universo Preenchido Por Um Fluido De Van Der Waals Generalizado	82
7.3	Considerações Finais	83

REFERÊNCIAS	85
--------------------------	-----------

1 Introdução

Com o advento da Teoria da Relatividade Geral e da possibilidade de observações experimentais de propriedades do universo, a Cosmologia deixou de pertencer ao campo da metafísica, para se tornar um ramo da Física, uma ciência em si, com seu caráter teórico e experimental (GRAMS, 2013). Uma importante constatação experimental, e que fundamenta a Cosmologia, é a chamada Lei de Hubble, que afirma que as galáxias estão se afastando com velocidades relativas proporcionais à distância ente a galáxia analisada e o referencial escolhido. Tal constatação é contrária a concepção até então vigente de um universo estático. O primeiro modelo de um universo não estático havia sido proposto por Friedmann, de modo que, revisando tal modelo, Lamaître constatou que a lei de Hubble trata-se de um efeito provocado pela expansão do espaço-tempo em si. Dessa forma, o espaço entre duas partículas quaisquer, suficientemente distantes para que outros efeitos possam ser desconsiderados, presentes no universo, está aumentando.

Na busca da descrição total da natureza do universo, Einstein formulou a Teoria da Relatividade Geral, é uma teoria clássica desenvolvida a partir da necessidade de generalização da Relatividade Restrita. Essa generalização para uma teoria mais abrangente parte do chamado Princípio da Equivalência, que em suma, postula a indistinguibilidade local entre sistemas em referenciais inerciais, e sistemas submetidos a campos gravitacionais. Uma vez que as leis físicas não devem depender das coordenadas escolhidas na análise, estas devem ser covariantes sob qualquer transformação de coordenadas, preservando sua forma, portanto, em referenciais inerciais e não inerciais (ZANETTI,2004). A Relatividade Geral fornece, então, um sistema de unidade na descrição da interação gravitacional em macro escala.

O estudo cosmológico de eras distintas da evolução do universo leva naturalmente a questões sobre diferentes escalas e sistemas de unidades (RIBAS, DEVECCHI, KREMER, 2019). A exemplo, a teoria quântica provê um sistema de unidades - um sistema atômico - no qual todas as grandezas físicas podem ser descritas. Ao mesmo tempo, os estudos cosmológicos empregam um sistema de unidades no qual os efeitos gravitacionais são considerados, não levando em conta efeitos quânticos, e, portanto, não se valendo do sistema de unidades atômicas. Uma vez que diferentes tipos de interações estão presentes em diferentes eras do universo, diferentes sistemas de unidades são utilizados (CANUTO, et. al, 1977). O formalismo aqui utilizado, apresenta a possibilidade de que dois sistemas de unidades, que descrevem

diferentes eras durante a evolução do universo podem ser relacionados através de uma transformação de escala de tempo, sendo essa transformação responsável pelo mapeamento de eras distintas do universo (RIBAS, DEVECCHI, KREMER, 2019).

O conceito de sistemas distintos de unidades leva à ideia de diferentes métricas, e essa segunda implica na variação temporal da constante gravitacional G , estando esse conceito em acordo com a hipótese dos grandes números de Dirac, e também, com a relatividade geral. Como caso particular, manter G constante significa lidar com equações em unidades gravitacionais, ao passo que a variação temporal de G pode levar a um sistema de equações de campo modificadas em unidades atômicas, que descrevem o universo em uma era no passado (CANUTO, et. al, 1977). Dessa forma, o universo atual seria descrito, então, por equações da relatividade geral com G constante.

A discussão apresentada neste trabalho envolve a possibilidade de que as métricas que descrevem eras distintas da evolução do universo no tempo podem estar relacionadas por uma transformação escalar β , possibilidade essa justificada pelo fato de diferentes interações se fazerem presentes em diferentes eras, de modo que os sistemas de unidades respectivos a cada era devem estar relacionados por uma operação de escala de tempo.

O presente trabalho está estruturado de modo a separar a aplicação do modelo apresentado a diferentes possibilidades. Primeiramente, no capítulo 2 é feita uma revisão de literatura na qual são retomados conceitos da Teoria da Relatividade Geral, em seguida o capítulo 3 apresenta o modelo padrão da Cosmologia, a métrica de Robertson-Walker e as equações de estado utilizadas na aplicação do modelo estudado. No capítulo 4 está a descrição do modelo cosmológico proposto por Canuto, et al. em si, enquanto que o capítulo 5 apresenta a aplicação desse modelo à equação de estado de Chaplygin generalizada, e o capítulo 6 a aplicação do modelo à equação de Van der Waals generalizada, completa e ao fluido barotrópico. Cada equação de estado é abordada com duas diferentes possibilidades para a operação escalar β . O capítulo 7 traz as conclusões sobre o estudo feito.

2 Teoria da Relatividade Geral

2.1 Introdução

A Teoria da Relatividade Geral é uma teoria clássica desenvolvida a partir da necessidade de generalização da Relatividade Restrita. Essa necessidade se deveu ao fato de a Relatividade Restrita compreender apenas fenômenos formulados em referenciais inerciais, chamados de Referenciais de Lorentz, excluindo referenciais acelerados.

A generalização da Relatividade Restrita para uma teoria mais abrangente parte do chamado Princípio da Equivalência, que em suma, postula a indistinguibilidade local entre sistemas em referenciais inerciais, e sistemas submetidos a campos gravitacionais. Uma vez que as leis físicas não devem depender das coordenadas escolhidas na análise, estas devem ser covariantes sob qualquer transformação de coordenadas (ZANETTI, 2004), preservando sua forma, portanto, em referenciais inerciais e não inerciais, é o que postula o Princípio da Covariância Geral.

Os desdobramentos desses conceitos levam a consequências que fundamentam a Relatividade Geral, uma teoria mais abrangente que a Relatividade Restrita. Na Relatividade Geral, qualquer fonte de matéria ou energia atua como fonte gravitacional, não mais através de uma força de campo como descrita na física newtoniana, mas através da interferência destas no tecido do espaço-tempo, curvando-o. A sensação de gravidade sentida por qualquer objeto, segundo a Relatividade Geral, é a trajetória deste no espaço tempo curvo.

A generalização da Relatividade Restrita para a Relatividade Geral, matematicamente acontece, em parte, com a substituição das transformações de Lorentz, pelas transformações gerais de coordenadas no formalismo tensorial, e a métrica do espaço-tempo plano, o Espaço de Minkowski, por uma métrica genérica, passível de descrever qualquer geometria para o espaço-tempo.

2.2 O Princípio da Equivalência

Um fato empiricamente constatado fundamenta o Princípio da Equivalência, o de que os conceitos de massa gravitacional e massa inercial são indistinguíveis, pois no vácuo, todos os corpos caem com acelerações idênticas, independentemente de suas massas. A aparente diferença entre esses dois conceitos de massa surge da interpretação que a quantidade massa recebe na

física. No contexto da gravitação newtoniana, a força de atração gravitacional F entre duas massas m e M configuradas a uma distância r entre si, é dada por,

$$F = G \frac{mM}{r^2} \quad (2.1)$$

Observe-se que na equação 2.1, a grandeza m atua como fonte da força gravitacional, podendo ser entendida, por analogia, com uma “carga gravitacional”. Entretanto, na segunda lei de Newton, dada por,

$$F = m'a \quad (2.2)$$

onde F é a força que age sobre um corpo de massa inercial m' , o conceito de massa recebe a interpretação de resistência a alteração do estado de repouso ou movimento do corpo. Verifica-se dessas duas equações, portanto, que

$$a = \frac{m}{m'} \frac{GM}{r} \quad (2.3)$$

Uma vez que essa relação deve ser constante, necessariamente a razão $\frac{m}{m'}$ deve ser constante, e experimentalmente a igualdade entre m e m' é constatada (RIBAS, 2008).

O Princípio da Equivalência é fundamentado na verificada igualdade entre massa gravitacional e inercial, pois devido a essa constatação, o campo gravitacional pode ser localmente desconsiderado. Dessa forma, o Princípio da Equivalência estabelece que na presença de um campo gravitacional, pode ser determinado um referencial localmente inercial, no qual, portanto, a Relatividade Restrita é aplicável. Uma vez que as forças inerciais são explicadas devido a aceleração do referencial analisado, e considerando a igualdade entre massa gravitacional e inercial, a gravidade passaria a ser descrita como força inercial. Os desdobramentos desses princípios levam a constatação de que o campo gravitacional é localmente indistinguível de um referencial acelerado na ausência de gravidade, ou seja, as leis físicas são igualmente aplicáveis a ambos os casos.

Sendo as leis físicas igualmente válidas para referenciais inerciais e não inerciais, estas não devem depender da escolha de coordenadas na modelagem de fenômenos. Para atender a esse pressuposto, o Princípio da Covariância Geral estabelece que as leis físicas são válidas para todos os observadores, seja em referenciais inerciais ou não.

2.3 O Tensor Métrico

No contexto da Relatividade Restrita, as quantidades espaço e tempo são tratadas não conforme em teorias precedentes, ou seja, como entes distintos, mas sim, como características de uma entidade única, o espaço-tempo. Dessa forma, um fenômeno não mais seria descrito com sua localização no espaço e em um instante de tempo, mas por sua coordenada no espaço-tempo, ou seja, um evento, dada pelo quadri-vetor

$$x^\alpha = (x^1, x^2, x^3, x^4) \quad (2.4)$$

O elemento de linha, ou seja, o intervalo espaço-temporal no qual a Relatividade Restrita é válida, também chamado de Espaço de Minkowski, é dado por

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (2.5)$$

Sendo $\eta_{\alpha\beta}$, o Tensor de Minkowski, dado por

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

O elemento de linha dado pela equação (2.5) pode ser expresso em um sistema arbitrário de coordenadas, por

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (2.7)$$

De onde define-se o chamado tensor métrico $g_{\mu\nu}$, dado por lei de transformação tensorial

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \quad (2.8)$$

Sendo o tensor métrico dotado da propriedade de simetria,

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \quad (2.9)$$

Desse modo, o elemento de linha, torna-se,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.10)$$

Relação essa que é válida não só na análise no espaço-tempo plano de Minkowski, mas em geometrias diversas.

Sendo o elemento de linha invariante, e os diferenciais dx^μ e dx^ν contravariantes, tem-se que o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é covariante, sendo sua versão contravariante dada por

$$g^{\sigma\mu} = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\beta} \quad (2.11)$$

De modo que é verdadeira a relação (WEINBERG, 1972):

$$g_{\mu\nu} g^{\sigma\mu} = \delta_\nu^\sigma \quad (2.12)$$

sendo δ_ν^σ o delta de Kronecker.

Outra importante relação envolvendo o tensor métrico é sua relação com a chamada conexão afim, dada por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (2.13)$$

relação essa que estabelece a conexão afim em termos do tensor métrico (SCHIEFER, 2019):

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right) \quad (2.14)$$

2.4 A Equação de Movimento na Relatividade Geral

De acordo com o Princípio da Equivalência, é possível determinar um referencial ξ^α que seja localmente inercial para uma partícula em queda livre sob a ação de um campo gravitacional. Nesse referencial, conforme o Princípio da Equivalência, os efeitos provocados pela gravidade são desconsiderados, e a partícula realiza um movimento com aceleração nula, matematicamente isso é expresso por

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (2.15)$$

onde $d\tau^2$ é o tempo próprio, aquele medido no referencial ξ^α . Pode-se analisar esse movimento em relação a um referencial arbitrário x^μ presente em um campo gravitacional, através de uma mudança de referencial, matematicamente realizada pela regra da cadeia:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = 0 \quad (2.16)$$

Expressão essa que desenvolvida resulta em

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.17)$$

Levando-se em conta a expressão (2.13) e multiplicando-se a expressão (2.17) por

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$$

tem-se (WEINBERG, 1972):

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.18)$$

A equação (2.18) está associada a condição que torna a distância entre dois pontos no espaço-tempo de Minkowski estacionária, ou seja, a uma trajetória geodésica nesse espaço. Da mesma forma, a equação (2.18) descreve a trajetória geodésica em um espaço-tempo com geometria não euclidiana, na Relatividade Geral geralmente são consideradas variedades riemannianas.

Analisando-se a equação (2.18), percebe-se que quando o termo da conexão afim $\Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ é nulo, retorna-se à equação (2.15), ou seja, a esperada linha reta para uma queda livre no espaço-tempo plano. Dessa forma, os efeitos da geometria do espaço-tempo analisado estão contidos na conexão afim $\Gamma_{\nu\mu}^\lambda$, através das derivadas do tensor métrico. Percebe-se, portanto, que os efeitos de aceleração sobre a partícula são consequências da geometria do espaço-tempo no qual a partícula está submetida.

2.5 O Tensor de Curvatura

Apesar do tensor métrico conter informações sobre a geometria do espaço-tempo analisado, a simples análise desta não é suficiente, em geral, para se determinar a planura ou não deste. Dessa forma, é necessária a determinação de uma entidade matemática que contenha essa informação. Para tal, objetiva-se construir um tensor a partir do tensor métrico e suas derivadas primeiras e segundas. Com esse fim, considere-se a lei de transformação da conexão afim, dada por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\xi} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\rho\sigma}^\xi + \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\xi} \frac{\partial^2 x'^\xi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (2.19)$$

Observe-se que o termo mais à direita da expressão acima é o que impede a conexão afim de ter um comportamento tensorial, dessa forma, resolvendo essa expressão para o termo citado,

derivando-se a expressão resultante em relação a x^κ e subtraindo a mesma equação, porém com os índices ν e κ trocados, obtém-se a expressão

$$\frac{\partial \Gamma'_{\rho\sigma}}{\partial x'^\omega} - \frac{\partial \Gamma'_{\rho\omega}}{\partial x'^\sigma} - \Gamma'_{\lambda\sigma} \Gamma'^{\lambda\rho} + \Gamma'_{\lambda\omega} \Gamma'^{\lambda\rho} = \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\omega} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\omega \Gamma_{\kappa\omega}^\lambda + \Gamma_{\mu\kappa}^\omega \Gamma_{\nu\omega}^\lambda \right) \quad (2.20)$$

Definindo-se

$$R_{\mu\nu\kappa}^\lambda = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\omega \Gamma_{\kappa\omega}^\lambda + \Gamma_{\mu\kappa}^\omega \Gamma_{\nu\omega}^\lambda \quad (2.21)$$

Pode-se reescrever a expressão (2.20) como uma lei de transformação (WEINBERG, 1972):

$$R'_{\rho\sigma\omega}{}^\xi = \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\omega} R_{\mu\nu\kappa}^\lambda \quad (2.22)$$

E expressão dada em (2.21) é chamada de Tensor de Curvatura de Riemann-Christoffel, cujo significado está associado a curvatura da variedade riemanniana analisada. A nulidade do Tensor de Curvatura significa um espaço-tempo plano, ao passo que basta que uma de suas componentes seja não nula, para que o espaço-tempo em questão seja curvo.

Através de multiplicação de $R_{\mu\nu\kappa}^\lambda$ por $g_{\lambda\sigma}$, o índice λ é abaixado, gerando a forma covariante do Tensor de Curvatura de e Riemann-Christoffel:

$$g_{\lambda\sigma} R_{\mu\nu\kappa}^\lambda = R_{\lambda\mu\nu\kappa} \quad (2.23)$$

Tensor esse dotado das propriedades de ciclicidade, simetria e antissimetria.

A contração do Tensor de Curvatura de e Riemann-Christoffel na forma covariante, através do tensor métrico na forma contravariante, gera o chamado Tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$:

$$R_{\mu\nu} = g^{\lambda\kappa} R_{\lambda\mu\kappa\nu} \quad (2.24)$$

Cuja forma explícita em função do tensor métrico é dada por (WEINBERG, 1972):

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\left(g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right)^2 g_{\mu\nu} \right] - \frac{\partial^2 g_\nu^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_\mu^\lambda}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 g_\lambda^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (2.25)$$

Ainda, a contração do Tensor de Ricci pelo tensor métrico contravariante gera o chamado Escalar de Ricci R :

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.26)$$

Cuja forma explícita em função do tensor métrico é dada por:

$$R = \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right)^2 g^\lambda_\lambda - \frac{\partial^2 g^{\lambda\sigma}}{\partial x^\lambda \partial x^\sigma} \quad (2.27)$$

O Tensor de Curvatura de Riemann-Christoffel pode ser reescrito considerando-se a definição de conexão fim, como (SCHIEFER, 2019):

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right) + g_{\omega\sigma} (\Gamma_{\nu\lambda}^\omega \Gamma_{\mu\kappa}^\sigma - \Gamma_{\kappa\lambda}^\omega \Gamma_{\mu\nu}^\sigma) \quad (2.28)$$

Calculando-se a derivada covariante em relação a ω da expressão acima, tem-se:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\omega} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\omega} \left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right) \quad (2.29)$$

Expressão essa que quando permutados ciclicamente os índices μ , κ e ω , obtém-se as chamadas Identidades de Bianchi:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\omega} + R_{\lambda\mu\omega\nu;\kappa} + R_{\lambda\mu\kappa\omega;\nu} = 0 \quad (2.30)$$

Contraindo-se os índices dos termos da expressão acima com o tensor métrico contravariante $g^{\lambda\nu}$, obtém-se

$$R_{\mu\kappa;\omega} - R_{\mu\omega;\kappa} + R_{\mu\kappa\omega;\nu}^\nu = 0 \quad (2.31)$$

Novamente com o tensor métrico contravariante $g^{\mu\kappa}$ contraindo os índices dos termos da expressão acima, obtém-se

$$R_{;\omega} - R_{\omega;\mu}^\mu - R_{\omega;\nu}^\nu = 0 \quad (2.32)$$

Expressão essa que pode ser reescrita como (SCHIEFER, 2019):

$$\nabla_\mu \left(R_\omega^\mu - \frac{\delta_\omega^\nu}{2} R \right) = 0 \quad (2.33)$$

Ou, de forma equivalente, quando multiplicada a expressão acima por $g^{\mu\nu}$, tem-se

$$\nabla_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{g^{\mu\nu}}{2} R \right) = 0 \quad (2.34)$$

Pode-se, agora, definir o tensor $G^{\mu\nu}$, como sendo

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{g^{\mu\nu}}{2} R \quad (2.35)$$

O tensor dado pela expressão (2.34) é chamado de Tensor de Einstein, e conforme a relação dada em (2.34), sua derivada covariante é nula, ou seja, pela definição de derivada covariante, tem-se

$$\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} G^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} G^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} G^{\mu\lambda} = 0 \quad (2.36)$$

Expressão essa chamada de Identidades contraídas de Bianchi (SOBREIRO, 2011).

2.6 O Tensor Energia-Momento

O Tensor Métrico e o Tensor de Curvatura são as ferramentas empregadas em Relatividade Geral para a determinação de informações sobre o caráter geométrico do espaço-tempo. É necessário, agora, uma ferramenta que descreva a matéria energia presentes no espaço-tempo. Essa ferramenta, no contexto da Teoria de Campos Clássica, é um tensor de segunda ordem, comumente representado por $T^{\mu\nu}$, no qual as informações sobre energia e momento estão contidas.

Iniciando a discussão para um espaço-tempo plano, e sendo \mathcal{L} a chamada densidade de lagrangiana de um campo ϕ qualquer, o chamado Tensor Energia-Momento $T^{\mu\nu}$ é dado por

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \phi}{\partial x_{\mu}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu} \phi)} \right) - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (2.37)$$

Uma importante característica do Tensor Energia-Momento, é a sua divergência ser nula (JANTSCH, 2009):

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0 \quad (2.38)$$

Característica essa associada as leis de conservação da energia e do momento no espaço-tempo plano. A expressão (2.37) pode ser integrada em um volume d^4x com o emprego do teorema de Gauss, teorema esse que transforma a integral sobre um volume, em uma integral sobre uma hipersuperfície d^3x_{μ} :

$$\int \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} d^4x = \oint T^{\mu\nu} d^3x_{\mu} = 0 \quad (2.39)$$

A expressão acima pode ser reescrita considerando a integral do volume delimitado por duas hipersuperfícies, de modo que constata-se a seguinte relação (ZANETTI, 2004):

$$\int T^{\mu 0} d^3x = \text{constante} \quad (2.40)$$

Por fim, define-se essa grandeza conservada como sendo o quadri-momento total do sistema:

$$P^\mu = \int T^{\mu 0} d^3x$$

Para um espaço-tempo genérico, segundo o Princípio da Covariância Geral, a derivada ordinária presente na relação (2.37) deve ser substituída pela derivada covariante. Dessa forma, tem-se:

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0 \quad (2.41)$$

Que pode ser escrito através da derivada covariante do tensor de energia-momento misto (ZANETTI, 2004):

$$T_{\mu;\nu}^{\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(T_\mu^\nu \sqrt{-g})}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} T^{\nu\lambda} = 0 \quad (2.42)$$

O significado físico das componentes do Tensor Energia-Momento são:

- a componente temporal T^{00} é a densidade de energia do campo;
- as componentes espaço-temporais $T^{\mu 0} = T^{0\nu}$ são as densidades de fluxo de momento e energia;
- as componentes espaciais $T^{\mu\nu}$ representam a pressão do constituinte.

Como exemplo, para um fluido perfeito, o Tensor Energia-Momento tem a forma (FROEHLICH, 2005):

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu - p g^{\mu\nu} \quad (2.43)$$

Onde p e ρ são, respectivamente, pressão e densidade, e U^μ é a quadri-velocidade do fluido.

2.7 Equação de Campo de Einstein

Conforme foi discutido, na Relatividade Geral, o movimento dos corpos deixa de ser descrito conforme a física newtoniana, como uma força de campo, e passa a ser descrito por um

caráter geométrico, no qual a geometria da variedade riemanniana, no caso o espaço-tempo, é responsável pela por esse movimento. Agora, serão discutidas as causas dessa geometria, ou seja, as fontes da gravidade.

A dedução da equação que relaciona o comportamento geométrico do espaço-tempo com a causa dessa geometria, se inicia considerando o princípio da ação mínima (BINDER, 2006), dado por

$$\delta S_T = 0 \quad (2.44)$$

Onde S_T é ação total do sistema, composta pela ação S_g do campo gravitacional, e a ação S_m da matéria. A forma explícita das ações S_g e S_m devem ser provenientes de densidades de lagrangianas \mathcal{L}_g e \mathcal{L}_m , para o campo gravitacional e da matéria, respectivamente, integradas sobre o espaço-tempo, ou seja (RAÍLA, 2017):

$$S_g \propto \int \mathcal{L}_g \sqrt{-g} d^4 x \quad \text{e} \quad S_m \propto \int \mathcal{L}_m \sqrt{-g} d^4 x \quad (2.45)$$

Necessariamente, a densidade de lagrangiana do campo gravitacional \mathcal{L}_g deve ser construído a partir de alguma entidade escalar, entidade essa que deve conter derivadas segundas do tensor métrico, uma vez que as derivadas primeiras e o próprio tensor métrico se anulam devido a escolha de referencial. O Tensor de Curvatura de Riemann- Christoffel atende a essas exigências, e sabendo-se que deste, o único escalar possível se ser construído é o Escalar Ricci, o termo \mathcal{L}_m deve ser proporcional a este último. Dessa forma, a ação S_g do campo gravitacional, com os fatores de normalização pode ser reescrita como

$$S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} d^4 x \quad (2.46)$$

Onde G a constante da gravitação universal. Considerando-se, ainda, a definição do Escalar de Ricci dada em (2.26), pode-se reescrever a relação acima como

$$S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4 x \quad (2.47)$$

Variando a ação na expressão acima, obtém-se (AMORIN, 2010):

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \left(\int \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \sqrt{-g} + g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta \sqrt{-g} \right) d^4 x \quad (2.48)$$

O termo $\delta\sqrt{-g}$ pode ser reescrito em função de $\delta g^{\mu\nu}$ por considerar-se a expressão dada por

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\lambda}} \quad (2.49)$$

E tendo-se a propriedade matricial dada por

$$\text{Tr} \left(M^{-1} \frac{\partial M}{\partial x^{\lambda}} \right) = \frac{\partial(\ln(\text{Det}(M)))}{\partial x^{\lambda}} \quad (2.50)$$

A expressão (2.49) é reescrita como

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\ln(g))}{\partial x^{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g})}{\partial x^{\lambda}} \quad (2.51)$$

Assim, comparando-se as expressões (2.49) e (2.51), tem-se que (AMORIN, 2010):

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (2.52)$$

Com isso, a expressão (2.48) pode ser reescrita como

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x + \frac{c^3}{16\pi G} \int g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \quad (2.53)$$

Para se calcular o termo $\delta R_{\mu\nu}$, considere-se a contração do Tensor de Ricci, dada por

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} + \delta \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} - \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda} - \delta \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \quad (2.54)$$

A lei de transformação da conexão afim demonstra que esta não possui comportamento tensorial. A variação da conexão afim, no entanto, possui comportamento tensorial, visto que apenas o tensor métrico está sendo variado. Dessa forma, define-se a derivada covariante da variação da conexão afim, como

$$\delta \Gamma_{\mu\nu;\kappa}^{\lambda} = \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} + \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \delta \Gamma_{\eta\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\kappa}^{\eta} \delta \Gamma_{\mu\eta}^{\lambda} \quad (2.55)$$

Dessa forma, com base nas expressões (2.54) e (2.55), o termo $\delta R_{\mu\nu}$ pode ser reescrito como (BINDER, 2006):

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\nu} - (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{;\lambda} \quad (2.56)$$

Assim, a integral do lado direito da expressão (2.53) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\int g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x &= \\
&= \int \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\nu} - g^{\mu\nu} (\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{;\lambda}) d^4x \\
&= \int \sqrt{-g} \nabla_{\lambda} (g^{\mu\lambda} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\nu} - g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) d^4x \\
&= \int \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} (\sqrt{-g} (g^{\mu\lambda} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\nu} - g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})) d^4x = 0
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Sendo o resultado acima devido a nulidade da integral de superfície nos limites de integração (RAÍLA, 2017), utilizando-se da Lei de Gauss. Com base nesses resultados, a expressão (2.53) pode, finalmente, ser escrita como

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \tag{2.58}$$

Agora, sendo a ação do campo de matéria dada por

$$S_m = \frac{1}{c} \int \mathcal{L}_m \sqrt{-g} d^4x \tag{2.59}$$

Cuja variação tem a forma

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \tag{2.60}$$

Sendo o termo $T_{\mu\nu}$ o Tensor Energia-Momento, que se relaciona com a densidade de lagrangiana por (BINDER, 2006):

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\mathcal{L}_m \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} \tag{2.61}$$

Dessa forma, a ação total S_T , é dada pela soma das ações dos campos gravitacional e de matéria:

$$S_T = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0 \tag{2.62}$$

Uma vez que $\delta g^{\mu\nu}$ é arbitrário (ZANETTI, 2004), tem-se

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.63)$$

Essa expressão é chamada de Equação de Campo de Einstein, e contém a essência da Relatividade Geral.

Conforme a expressão (2.35), considerando o chamado Tensor de Einstein, a equação (2.63) fica na forma

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.64)$$

Pode-se, ainda, contrair a equação de campo (2.63) com o tensor métrico contravariante $g^{\mu\nu}$, de modo que tem-se:

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \quad (2.65)$$

Resultando no escalar de Ricci, dado por

$$R = \frac{8\pi G}{c^4}T \quad (2.66)$$

Sendo $T = T_{\mu}^{\mu}$ o traço do Tensor Energia-Momento. Dessa forma, substituindo-se o escalar de Ricci (2.66) na equação de campo (2.63), resulta em

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \quad (2.67)$$

No vácuo, o Tensor Energia-Momento é nulo, resultando na Equação de Campo para o Vácuo

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.68)$$

As identidades contraídas de Bianchi garantem que o tensor de Einstein tenha divergência nula (CHRISTMANN, 2015), o que é coerente com o restante da equação de campo, visto que os demais termos também têm essa propriedade. Dessa forma, a introdução de um termo linear com $g_{\mu\nu}$ na equação de campo não afeta essa propriedade, pois a derivada do covariante do tensor métrico é nula. Portanto, a equação de campo pode ser escrita como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.69)$$

Sendo o termo Λ a chamada constante cosmológica, introduzida *ad-hoc* na equação de campo para que as soluções dessa descrevessem um espaço-tempo estático (GRAMS, 2013).

3 Cosmologia

3.1 Os Fundamentos da Cosmologia

Com o advento da Teoria da Relatividade Geral, e da possibilidade de observações experimentais de propriedades do universo, a Cosmologia deixou de pertencer ao campo da metafísica, para se tornar um ramo da Física, uma ciência em si, com seu caráter teórico e experimental. Uma importante constatação experimental, e que fundamenta a Cosmologia, é a chamada Lei de Hubble, que afirma que as galáxias estão se afastando com velocidades relativas proporcionais a distância entre a galáxia analisada e o referencial escolhido. Tal constatação é contrária a concepção até então vigente de um universo estático. O primeiro modelo de um universo não estático havia sido proposto por Friedmann, de modo que, revisando tal modelo, Lemaître constatou que a lei de Hubble trata-se de um efeito provocado pela expansão do espaço-tempo si. Dessa forma, o espaço entre duas partículas quaisquer, suficientemente distantes para que outros efeitos possam ser desconsiderados, presentes no universo, está aumentando.

Analisando-se duas partículas distantes entre si, a distância $l(t)$ entre elas é dada por

$$l(t) = l_0 a(t) \quad (3.1)$$

Onde l_0 é a distância no instante inicial, e $a(t)$ é o chamado fator de escala, que determina a distância em função do tempo. Derivando-se a equação acima para e determinar a velocidade, tem-se (PEREIRA, 2006):

$$v(t) = \frac{d}{dt} l(t) = l_0 \frac{d}{dt} a(t) = l(t) \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (3.2)$$

Definindo-se $\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \equiv H(t)$, a chamada constante de Hubble, tem-se

$$v(t) = H(t)l(t) \quad (3.3)$$

A expansão do universo acontece conforme estabelece o Princípio Cosmológico, sendo a mesma em todos os pontos e em todas as direções, não havendo um centro da expansão, portanto.

Uma segunda importante observação experimental que serve como fundamento da Cosmologia, é a descoberta da chamada radiação cósmica de fundo. As previsões teóricas dessa radiação indicavam que no universo primordial, a temperatura deste era alta de forma que os fótons presentes no universo ionizavam os átomos de hidrogênio, de modo que a matéria contida no universo assemelhava-se a um plasma de bárions e elétrons, opaco à radiação. Dessa forma, um limite universal se impõe no que se refere a observações cosmológicas do passado. Após aproximadamente 300 000 anos após o *Big Bang* (BEZERRA, 2015), a expansão do universo, responsável pelo resfriamento deste, era tal que, a energia dos fótons não mais provocava a ionização dos átomos de hidrogênio, de modo que a radiação se desacoplou da matéria, passando a se deslocar livremente pelo espaço, tornando o universo transparente. Essa é a radiação atualmente observada. Detectada pela primeira vez em 1965, a radiação cósmica de fundo e enquadra no espectro de radiação de corpo negro, com temperatura de 2,7K, e é detectada independentemente da direção da fonte, sendo proveniente, portanto, de qualquer direção do universo.

Dessa forma, são observadas na radiação cósmica de fundo as propriedades de isotropia e de homogeneidade, desconsiderando pequenas não homogeneidades referentes a grandes aglomerados de galáxias. Essas características da radiação cósmica de fundo mostraram-se ser invariâncias espaciais do universo. Essas observações estão contidas no Princípio Cosmológico, que afirma a isotropia e homogeneidade do universo em expansão, justificado em escalas acima de 100Mpc. Dessa forma, em qualquer ponto do universo, as propriedades constatadas são indistinguíveis, uma vez que a matéria contida no universo estaria dispersa de forma simétrica (SILVA, 2004).

3.2 Coordenada Comóveis

Uma vez que o espaço está em expansão, faz-se necessário o emprego de um sistema de coordenadas consistente com tal fato, ou seja, um sistema que acompanhe essa expansão, de modo que um referencial sujeito a expansão não tenha suas coordenadas modificadas.

Define-se um conjunto de partículas em repouso, tendo essas, coordenadas espaciais fixas x^i , e uma forma qualquer de medir para cada partícula o seu tempo próprio. O conjunto

das coordenadas (x^i, t) de cada partícula eram o sistema comóvel de coordenadas, definido dessa forma por acompanhar o movimento do sistema de partículas. A quadrivelocidade U^μ de um sistema de partículas nas coordenadas comoveis é dada por

$$U^\mu = (1,0,0,0) \quad (3.4)$$

uma vez que $x^i = \text{constante}$, a derivada se anula:

$$U^i = \frac{d}{d\tau} x^i = 0 \quad (3.5)$$

Ainda, segundo a normalização

$$U^\mu U_\mu = 1 \quad (3.6)$$

tem-se que

$$U^\mu U_\mu = g_{\mu\nu} U^\nu U^\mu = g_{00} U^0 U^0 = 1 \rightarrow U^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \quad (3.7)$$

Para demonstrar a aplicação das coordenadas comóveis ao caso de uma métrica, considere-se a separação entre dois eventos da linha de mundo de um referencial, como sendo $dx^i = 0$. O intervalo ds seria o tempo próprio $d\tau$, ou seja

$$ds = d\tau = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00} (dx^0)^2 = g_{00} dt^2 \quad (3.8)$$

Fazendo $g_{00} = 1$, fisicamente significando a sincronização das medidas de tempo nos dois eventos, o tempo t é chamado de tempo universal, pois é o mesmo tempo medido para todos os referenciais. Ainda, supondo que as partículas do sistema encontravam-se em repouso no instante de tempo inicial, as componentes g_{i0} do tensor métrico se anulam. Considerando um referencial localmente inercial x'^μ para cada partícula do sistema, a separação entre as partículas P nesse referencial, com as vizinhas de coordenadas x^μ é espacial:

$$\left(\frac{\partial x'^0}{\partial x^i} \right) = 0 \quad (3.9)$$

E a trajetória de P no espaço-tempo é temporal:

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.10)$$

Uma vez que x'^{μ} é localmente inercial, a métrica é localmente plana, ou seja, emprega-se o tensor de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, e o instante inicial, no sistema comóvel de coordenadas x^{μ} , tem-se

$$g_{0i}(x_P^i, 0) = \left[\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^i} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial t} \right] = 0 \quad (3.11)$$

Dessa forma, no referencial comóvel, as componentes g_{i0} se anulam, de modo que o elemento de linha do espaço-tempo no referencial comóvel é dado por

$$ds^2 = dt^2 - g_{ij} dx^i dx^j \quad (3.12)$$

3.3 A Métrica de Robertson-Walker

Conforme foi citado, a métrica que descreve o espaço-tempo deve ter como invariantes, segundo o Princípio Cosmológico, a homogeneidade e isotropia, mesmo em expansão. A métrica mais geral possível que atente a esses requisitos é chamada de Métrica de Robertson-Walker, a qual é estruturada considerando-se um referencial comóvel no qual o elemento de linha do espaço-tempo é escrito conforme a expressão (3.12), no qual é introduzida nas componentes espaciais da métrica, um fator de escala $a(t)$, que descreve a expansão do espaço-tempo. Dessa forma, tem-se (PEREIRA, 2006):

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 g_{ij} dx^i dx^j \quad (3.13)$$

Sendo t o tempo universal. Pode-se definir a parte espacial do elemento de linha como $d\sigma^2 = g_{ij} dx^i dx^j$, a qual descreve espaços tridimensionais com curvatura constante. Respeitando o Princípio Cosmológico, a curvatura deve ser constante em todos os pontos. Sendo a curvatura constante, o tensor de curvatura depende apenas do tensor métrico.

$$R_{ijkl} = k(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \quad (3.14)$$

Onde k caracteriza a geometria do espaço-tempo, podendo assumir valores positivos, negativos e nulos, correspondendo a geometrias fechadas, abertas ou nulas, respectivamente.

Contraindo o tensor de curvatura (3.14), determina-se o tensor de Ricci, dado por

$$R_{jl} = g^{ik} R_{ijkl} = 2k g_{jl} \quad (3.15)$$

Ainda, contraindo o tensor de Ricci (3.15), determina-se o escalar de curvatura, dado por

$$R = g^{ij}R_{ij} = 6k \quad (3.16)$$

Respeitando o Princípio Cosmológico, o espaço-tempo deve ser esfericamente simétrico, de modo que o elemento de linha $d\sigma^2$ pode ser reescrito como (CUZINATTO, 2002):

$$d\sigma^2 = e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\varphi^2) \quad (3.17)$$

Dessa forma, o tensor métrico é dado por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\text{sen}^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

O tensor de Ricci, determinado a partir do tensor métrico (3.18) é dado, portanto, por

$$R_{jl} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda'}{r} & 0 & 0 \\ 0 & -\text{cosec}^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{1}{2}re^{-\lambda}\lambda' - e^{-\lambda} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Comparando as componentes desse tensor com a expressão (3.15), tem-se que

$$\frac{\lambda'}{r} = 2ke^\lambda, \quad 1 + \frac{1}{2}re^{-\lambda}\lambda' - e^{-\lambda} = 2kr^2 \quad (3.20)$$

A solução da expressão acima é dada por

$$e^{-\lambda} = 1 - kr^2 \quad (3.21)$$

Dessa forma, o elemento de linha é reescrito por

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\varphi^2) \quad (3.22)$$

Realizando-se as substituições $k \rightarrow \frac{k}{|k|}$, $r \rightarrow r\sqrt{|k|}$ e $a \rightarrow \frac{a}{\sqrt{|k|}}$, a curvatura é normalizada, de modo que k pode assumir os valores $-1, 0, 1$, correspondendo, respectivamente, a curvaturas aberta (hiperboloide), plana e fechada (esfera). Dessa forma, o elemento de linha (3.13) pode ser finalmente reescrito como

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\varphi^2) \right) \quad (3.23)$$

A expressão acima é a Métrica de Robertson-Walker, cujo tensor métrico, é, portanto, dado por (VIEIRA, 2018).

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-a(t)^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \text{sen}^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

3.4 A Equação de Friedmann e da Aceleração no Modelo Cosmológico Padrão

No modelo padrão da Cosmologia, as principais ferramentas matemáticas empregadas na descrição do universo são, a equação de campo de Einstein, o tensor energia-momento para um fluido perfeito e as equações de estado dos constituintes do universo, como matéria e radiação, sendo a equação de campo da relatividade geral utilizada na descrição dinâmica do universo, através de equações diferenciais. A partir da a métrica de Robertson-Walker (3.23), e utilizando-se a definição dada pela expressão (2.14), pode-se calcular as componentes da conexão afim, dentre as quais, as não nulas são dadas por (JANTSCH, 2012):

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}, \Gamma_{22}^0 = a\dot{a}r^2, \Gamma_{33}^0 = a\dot{a}r^2 \text{sen}^2(\theta), \\ \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a}, \Gamma_{11}^1 = \frac{kr}{1-kr^2}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -r(1-kr^2), \Gamma_{33}^1 = -r(1-kr^2)\text{sen}^2(\theta), \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{23}^3 &= \cot(\theta), \Gamma_{33}^2 = -\text{sen}(\theta)\cos(\theta) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Dessa forma, com as conexões afins, pôde-se determinar o tensor de Ricci, dado por (JANTSCH, 2012):

$$R_{ik} = \begin{pmatrix} 3\frac{\dot{a}}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-a\ddot{a}+2\dot{a}^2+2k}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2 \text{sen}^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Ainda, conforme a expressão (2.26), pode-se determinar o escalar de curvatura, dado por (JANTSCH, 2012):

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right) \quad (3.27)$$

Determinados os termos geométricos da equação de campo de Einstein, cabe determinar a fonte da gravidade, considerada como um fluido perfeito, de modo que o tensor energia momento desse constituinte é dado pela expressão (2.43). Considerado um sistema de coordenadas comoveis, o tensor energia-momento para a métrica de Robertson-Walker assume a forma (JANTSCH, 2012):

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-pa(t)^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -pa(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -pa(t)^2 r^2 \text{sen}^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Considere-se a equação de campo de Einstein somente com as componentes temporais das quantidades envolvidas, dada por

$$R_{tt} - \frac{1}{2} g_{tt} R - \Lambda g_{tt} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{tt} \quad (3.29)$$

Substituindo-se as informações determinadas para o tensor de Ricci, o escalar de Ricci e o tensor energia-momento na expressão (3.29), tem-se (ABREU, 2016):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (3.30)$$

Essa expressão é chamada de Equação de Friedmann.

Tomando-se, agora, a equação de campo de Einstein somente com as componentes espaciais das quantidades envolvidas, dada por

$$R_{ii} - \frac{1}{2} g_{ii} R - \Lambda g_{ii} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{ii} \quad (3.31)$$

Tem-se que apenas uma equação independente pode ser construída a partir dessa expressão, e é dada por

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} - \Lambda c^2 = -\frac{8\pi G}{c^2} p \quad (3.32)$$

Utilizando-se a expressão (3.30) e (3.32), obtém-se a chamada equação da aceleração, ou segunda equação de Friedmann, dada por (ABREU, 2016):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} - \frac{\Lambda c^2}{3} \right) \quad (3.33)$$

Utilizando-se a equação de balanço do tensor energia momento, dado pela expressão (2.38), tem-se a chamada equação do fluido (TESTON, 2017), análoga a equação da continuidade, dada por

$$\dot{\rho} + 3\frac{\ddot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0 \quad (3.34)$$

Para a descrição da evolução temporal do universo, é necessário que as equações de estado dos constituintes do universo sejam especificadas. Usualmente são empregadas equações barotrópicas de estado na forma

$$p = c^2 \omega \rho \quad (3.35)$$

Onde ω é uma constante que caracteriza a natureza do constituinte. Alguns casos típicos para o constituinte do universo são, a matéria diluída, representada por $\omega = 0$, a radiação, representada por $\omega = \frac{1}{3}$, e a energia do vácuo, representada por $\omega = -1$. Para a obtenção das equações que descrevem a evolução temporal das densidades de energia e pressão, são substituídas as equações de estado referente a dado constituinte, na equação do fluido (3.34), ou na equação solução da expressão (3.34), sendo a condição inicial $a_0 = 1$, dada por (TONIATO, 2014).

$$\rho(t) = \rho_0 a^{-3(\omega+1)} \quad (3.36)$$

Dessa forma, para o caso da matéria diluída, a densidade de energia é dada por

$$p_m = 0 \text{ e } \rho_m \propto a^{-3} \quad (3.37)$$

Para o caso da radiação, tem-se

$$p_r = \frac{c^2 \rho_r}{3} \text{ e } \rho_r \propto a^{-4} \quad (3.38)$$

E para o caso da energia do vácuo, tem-se

$$p_v = -\rho_v c^2 \text{ e } \rho_r = \text{constante} \quad (3.39)$$

A energia do vácuo pode ser relacionada a constante cosmológica, uma vez que dada a equação de campo de Einstein na forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (3.40)$$

Definindo-se $\frac{c^4}{8\pi G}\Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^\Lambda$, a constante é interpretada como fonte do campo gravitacional, pois comparando $T_{\mu\nu}^\Lambda$ com a o tensor energia-momento para um fluido perfeito, dado pela expressão (2.43), constata-se que

$$\rho_\Lambda = \frac{-p_\Lambda}{c^2} = \frac{c^2\Lambda}{8\pi G} \quad (3.41)$$

Para a determinação da evolução temporal do fator de escala $a(t)$, substitui-se as relações encontradas em (3.37) e (3.38) na equação de Friedmann (3.30), considerando a nulidade da constante cosmológica Λ , e que no início do universo o fator de escala $a(t)$ é pequeno, observa-se que o termo a constante de curvatura k é desprezível frente ao termo que contém a densidade de energia, ou seja $\frac{8\pi G}{3}\rho \gg \frac{kc^2}{a^2}$. Dessa forma (TESTON, 2017), a equação de Friedmann se reduz a

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (3.42)$$

Essa expressão é resolvida quando analisadas as chamadas eras cosmológicas, períodos de tempo nos quais a densidade de energia do campo de matéria dominava frente a densidade de energia do campo de radiação, e também o inverso. Para a era dominada pela matéria, o fator de escala tem a forma

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3}} \quad (3.43)$$

Enquanto para a era dominada pela radiação, o fator de escala tem a forma

$$a(t) \propto t^{\frac{1}{2}} \quad (3.44)$$

Quando $t \rightarrow 0$, o fator de escala $a(t) \rightarrow 0$, e a densidade de energia $\rho \rightarrow \infty$. Dessa forma, observa-se que é prevista uma singularidade inicial no universo, chamada de Big Bang no modelo cosmológico padrão, segundo o qual, o universo em seu instante inicial era um ponto com densidade e temperaturas infinitas, grandezas essas que regrediram conforme a expansão se sucedeu. Nessa escala inicial, próxima a escala de Planck ($10^{-33}cm$), os efeitos quânticos

tornam-se relevantes, e a cosmologia, bem como toda a física clássica, encontram um limite de validade.

3.5 Propriedades do Modelo FLRW

Na análise da evolução temporal do universo através das equações do modelo padrão, é conveniente a definição de certos parâmetros.

3.5.1 Parâmetros Cosmológicos

Parâmetro de Hubble: O parâmetro de Hubble relaciona a taxa de expansão do universo em termos do fator de escala, e é dado por

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (3.45)$$

Parâmetro de Desaceleração: Semelhante ao parâmetro de Hubble, existe o parâmetro de desaceleração, que está relacionado a variação da taxa de expansão do universo, e é definido como (SILVA, 2004):

$$q = \frac{-\ddot{a}(t)}{a(t)H(t)^2} \quad (3.46)$$

Nas eras dominadas pela radiação e pela matéria o parâmetro de desaceleração assume valores positivos, uma vez que da chamada equação de Raychaudhuri, dada por

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (3.47)$$

tem-se que $\ddot{a}(t) \propto -a(t)\rho$, ou seja, a aceleração é negativa para ambos os casos. Além das eras da matéria e da radiação, o modelo cosmológico padrão prevê a existência de outros dois períodos ao longo da evolução temporal do universo, ambos com aceleração positiva, no universo primitivo, o período da inflação, e atual estado do universo. Conforme a equação (3.47), para que a aceleração seja positiva, a relação entre pressão e densidade deve ser tal que $\rho + 3p < 0$, de modo que, sendo a densidade de energia necessariamente positiva, a pressão deve ser negativa, o que poderia estar de alguma forma relacionado à constante cosmológica.

Parâmetro de Densidade e de Curvatura: A equação de Friedmann (3.30) pode ser reescrita como

$$1 = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho - \frac{k}{a^2H^2} \quad (3.48)$$

De onde define-se o parâmetro de densidade total, referente as fontes de matéria e energia, dado por

$$\Omega_T = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho \quad (3.49)$$

E o parâmetro de curvatura definido como

$$\Omega_k = -\frac{k}{a^2H^2} \quad (3.50)$$

De modo que a equação (3.48) pode ser reescrita como

$$\Omega_T + \Omega_k = 1 \quad (3.51)$$

Uma forma de demonstrar a relação da densidade de energia com a geometria do espaço-tempo, é por considerar o caso do espaço-tempo plano, quando a constante de curvatura $k = 0$, de modo que tem-se

$$\Omega_T = \frac{\rho}{\rho_{critico}} = 1 \quad (3.52)$$

E portanto (RIBAS, 2008)

$$\rho = \rho_{critico} = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (3.53)$$

Onde $\rho_{critico}$ é densidade de energia crítica, para a qual o espaço-tempo tem geometria plana, tendo um valor aproximado de $\rho_{critico} \approx 2 \cdot 10^{-29} h^2 g/cm^3$. Dessa forma, a partir da densidade de energia critica $\rho_{critico}$, pode-se definir a geometria do espaço-tempo, de tal forma que se

$$\rho < \rho_{critico} \rightarrow \Omega_T < 1 \rightarrow k = -1 \Rightarrow \text{geometria aberta}$$

$$\rho \leq \rho_{critico} \rightarrow \Omega_T = 1 \rightarrow k = 0 \Rightarrow \text{geometria plana}$$

$$\rho > \rho_{critico} \rightarrow \Omega_T > 1 \rightarrow k = 1 \Rightarrow \text{geometria fechada}$$

Dados observacionais modernos mostram que o valor de Ω_T é aproximadamente igual a 1, ou seja, o universo é aproximadamente plano, o que está de acordo com o modelo FLRW.

3.5.2 A Medida de Distâncias na Métrica de Robertson-Walker

Na métrica de Robertson-Walker, para se determinar a distância entre dois pontos, é preciso estabelecer $dt^2 = d\theta^2 = d\varphi^2 = 0$, de modo a apenas a componente radial da métrica permanecer não nula. Dessa forma, a distância dl^2 é dada por

$$dl^2 = ds^2 = \frac{a^2(t)dr^2}{1 - kr^2} \quad (3.54)$$

Seja dois pontos $(0, t_0)$ e (r, t_0) , a distância entre estes é dada por

$$l = \int_0^r \frac{a(t)dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (3.55)$$

Para o espaço-tempo de geometria plana, $k = 0$, e a distância fica na forma (ZANETTI, 2004)

$$l = \int_0^r a(t)dr = a(t)r \quad (3.56)$$

Ainda no contexto da medida de distâncias, o chamado Horizonte de Partícula, é a distância percorrida por uma partícula de luz desde o início do universo até um instante de tempo qualquer t . O horizonte de partícula define para cada instante de tempo t a região do universo passível de ser observada, e está em contato causal com dado observador, ou seja, uma região esférica delimitada pela impossibilidade de velocidades maiores que a luz. O cálculo do horizonte de partícula parte da definição cosmológica de distância em um espaço-tempo plano, ou seja

$$d = a(t) \int_0^r dr \quad (3.57)$$

A partir da métrica de Robertson-Walker, tem-se que a distância percorrida por uma partícula de luz em um intervalo de tempo $t - t_0$ é dada por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)dr^2 = 0 \rightarrow dr = \frac{cdt}{a(t)} \quad (3.58)$$

Inserindo a informação acima na expressão (3.57), determina-se o horizonte de partícula em função do tempo, dado por

$$D(t) = a(t) \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')} \quad (3.59)$$

Considerando um universo preenchido por matéria e radiação, o fator de escala é dado por

$$a(t) = a_0 t^{\frac{2}{3}\gamma} \quad (3.60)$$

Resolvendo-se a expressão (3.59) com base em (3.60), tem-se que o horizonte de partícula é dado por (ZANETTI, 2004)

$$D(t) = \frac{3\gamma}{3\gamma - 2} t = \frac{2}{3\gamma - 2} H^{-1}(t) \quad (3.61)$$

Para a era da matéria, na qual $\gamma = 1$, tem-se

$$D_m = 3t = \frac{2}{H} \quad (3.62)$$

E para a era da radiação, na qual $\gamma = 4/3$, tem-se

$$D_m = 2t = \frac{1}{H} \quad (3.63)$$

3.5.3 O Desvio para o Vermelho Cosmológico

O modelo FLRW descreve o desvio para o vermelho como uma consequência direta da expansão do espaço-tempo, onde ondas eletromagnéticas tem suas frequências modificadas. Considerando um uma partícula de luz que se desloca, portanto, em uma geodésica nula, de modo que $ds^2 = 0$. Da direção radial da métrica de Robertson-Walker, tem-se, portanto,

$$0 = dt^2 - a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} \rightarrow dt = \frac{a(t)dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (3.64)$$

Seja a partícula de luz emitida e um instante de tempo t_e e detectado em um instante de tempo t_0 a uma distância r_0 , a expressão (3.64) pode ser integrada nesse intervalo de tempo de modo que, tem-se

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = f(r_0) \quad (3.65)$$

Considere-se, agora, duas partículas de luz emitidas sucessivamente. A primeira é emitida em um instante de tempo t_e e detectada em t_0 , enquanto a segunda partícula é emitida no tempo $t_e + \Delta t_e$, e detectada em $t_0 + \Delta t_0$. Dessa forma, a expressão (3.65) pode ser integrada nesses intervalos:

$$\int_{t_e + \Delta t_e}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = f(r_0) \quad (3.66)$$

Fazendo-se a subtração da expressão (3.65) de (3.66), tem-se

$$\int_{t_e}^{t_e + \Delta t_e} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = f(r_0) \quad (3.67)$$

Considerando que o período, ou seja, o intervalo de emissão entre duas partículas de luz é muito pequeno, da ordem de $10^{-14}s$, de forma que o fator de escala $a(t)$ durante esse intervalo de tempo, varie muito pouco. Assim, da expressão (3.67), tem-se que (ZANETTI, 2004)

$$\frac{\Delta t_e}{a(t_e)} \approx \frac{\Delta t_0}{a(t_0)} \rightarrow \frac{\nu_0}{\nu_e} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t_e} = \frac{a(t_e)}{a(t_0)} \quad (3.68)$$

Onde ν é a frequência da luz emitida, e Δt é o seu período. Tem-se ainda, que $\lambda = c\Delta t$ é o comprimento de onda da luz emitida. Dessa forma, o desvio para o vermelho z é definido como (TESTON, 2017).

$$z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} - 1 = \frac{\Delta \lambda}{\lambda_e} = \frac{a(t_e)}{a(t_0)} - 1 \quad (3.69)$$

Essa expressão é válida para fontes de luz relativamente próximas.

É possível reescrever a expressão (3.69) em função do parâmetro de Hubble, de forma que o desvio para o vermelho é dado por

$$z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} - 1 = \frac{\Delta \lambda}{\lambda_e} = \frac{v}{c} = \frac{Hl}{c} \quad (3.69)$$

Onde v é a velocidade da fonte que emite as partículas de luz em relação ao detector, e l é a distância entre estes.

3.6 A Inflação no Modelo Cosmológico Padrão

Apesar do modelo cosmológico padrão ser capaz de descrever e prever vários fenômenos na Cosmologia, existem questões que o modelo não pôde solucionar. A tentativa de solucionar tais problemas no modelo cosmológico padrão consiste em rever o modelo submetido a condições que representem o universo primitivo, de modo a determinar um instante a partir do qual o modelo cosmológico padrão seja válido.

3.6.1 Problemas no Modelo Cosmológico Padrão

Problema da Planura: As estimativas modernas para o valor do parâmetro de densidade de energia Ω_T é de aproximadamente 1, dessa forma, a densidade de energia do universo como um todo é muito próximo do valor encontrado para a densidade de energia crítica $\rho_{critico}$, devido a isso, a geometria do universo deve aproximadamente plana. Essa, no entanto, é uma solução muito peculiar da equação de Friedmann, uma vez que, o parâmetro de densidade de energia sendo uma função do tempo, se no início do universo Ω_T fosse um pouco maior que 1, o universo tenderia a se expandir sempre, o que ocasionaria um universo aberto, mas se em contrapartida o valor Ω_T fosse um pouco menor que 1, o universo decresceria mais. Por isso, a solução $\Omega_T \approx 1$ significa uma condição de equilíbrio instável, pois para obtê-la, é necessário um ajuste na constante de Hubble na precisão da ordem de 10^{55} (RIBAS, 2008), sendo que no modelo cosmológico padrão, esse valor é assumido sem explicação.

Problema do Horizonte: No modelo cosmológico padrão é assumido, com razoável aproximação, que nos instantes iniciais da expansão, o universo era homogêneo e isotrópico. Nesse período, o horizonte de partícula era muito pequeno, e nesse período, as regiões do universo observável atual não estavam em contato causal. Dessa forma, parece não haver explicação para o fato de regiões distantes do universo apresentarem homogeneidade e isotropia. O modelo padrão não é capaz de explicar como regiões causalmente desconectadas durante a era do desacoplamento, evoluíram de forma a se tornarem homogêneas e isotrópicas.

Problema do Monopolo: As teorias de grande unificação preveem a existência de monopólios magnéticos nos instantes iniciais do universo (ZANETTI, 2004). A existência do monopolo magnético mudaria drasticamente a evolução do universo, uma vez que o parâmetro de densidade Ω_T seria muito maior que 1, o que acarretaria em um colapso do universo em uma singularidade em um tempo da ordem de 10^5 anos. Ainda, considerando que essas partículas

não podem ser destruídas, deveriam ser detectáveis nos tempos atuais, o que não acontece. Portanto, pode-se considerar que algum mecanismo no universo primitivo foi responsável pela eliminação dos monopolos magnéticos, e o modelo cosmológico padrão não prevê um mecanismo dessa natureza.

3.6.2 Cosmologia Inflacionária

Visando uma possível solução para as questões que o modelo cosmológico padrão não foi capaz de resolver, em 1981, Alan Guth propõe um modelo chamado de Modelo do Universo Inflacionário. A principal característica desse modelo é a previsão de um período de curta duração, durante o qual o universo passou por uma expansão extremamente violenta e acelerada, iniciada logo após o tempo de Planck.

Conforme a equação (3.47), observa-se que a condição para que a aceleração seja positiva é que $\rho + 3p < 0$. A energia de vácuo é uma forma de energia que satisfaz tal condição, e está associada a energia fundamental de um sistema. Desconsiderando flutuações quânticas, o vácuo possui densidade de energia constante, e conforme a expressão (3.39), sua equação de estado é $p = -c^2\rho$. Se o volume do vácuo aumentar, a energia também o fará, visto que a densidade de energia deve ser constante. No entanto, em geral, se o volume de um sistema aumentar, a energia decresce e a pressão relacionada a isso é positiva. A pressão negativa associada ao vácuo indica que há um aumento de energia com o aumento do volume.

Conforme a expressão (3.41), a constante cosmológica pode ser interpretada como um análogo clássico da energia de vácuo, com tensor energia momento dado por $\frac{c^4}{8\pi G} \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^\Lambda$. Considerando-se um universo preenchido pela energia de vácuo, a equação de Friedmann (3.30) pode ser reescrita como

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda - \frac{c^2 k}{a} \quad (3.70)$$

Durante a era inflacionária o crescimento rápido do fator de escala permite a desconsideração do termo envolvendo o parâmetro de curvatura k na expressão, (3.70), de modo que pode-se reescrevê-la como

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda \quad (3.71)$$

cuja solução é dada por (ZANETTI, 2004)

$$a(t) \sim e^{Ht}, \quad (3.72)$$

onde $H \equiv \left(\frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda\right)^{1/2}$. A solução dada por (3.72) é chamada de solução de de Sitter, cujo modelo de universo descreve um universo preenchido pela energia de vácuo e prevê uma expansão eterna, acarretando em um universo vazio. Um modelo cosmológico realista deve, no entanto, limitar a inflação a um determinado período. Para garantir a duração correta da era inflacionária, são empregados campos escalares no modelo, com o conveniente potencial.

A ação de um campo escalar não massivo ϕ em um espaço-tempo curvo é dada por (RIBAS, 2008):

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right) \quad (3.73)$$

Variando-se a ação acima, obtém-se a equação de movimento para o campo escalar, dada por

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (3.74)$$

Onde foi empregada a métrica de Robertson-Walker, e visto que se trata de uma métrica homogênea e isotrópica, implica-se que o campo é função exclusivamente do tempo. Variando-se a ação (3.73) em relação ao tensor métrico $g_{\mu\nu}$, obtém-se o tensor energia-momento do campo (RIBAS, 2008), dado por

$$T^{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\theta \phi \partial^\theta \phi - V(\phi) \right) \quad (3.75)$$

Calculando-se as componentes da diagonal principal do tensor energia-momento (3.73), e identificando as mesmas com os termos de pressão e densidade de energia no tensor energia-momento de um fluido perfeito em um referencial comóvel, tem-se que a densidade de energia é dada por

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (3.76)$$

E a pressão por

$$p = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (3.77)$$

A equação de balanço para a densidade de energia é calculada a partir da conservação do tensor energia-momento (2.38), e é dada por

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (3.78)$$

No contexto da Cosmologia, o fator responsável por alterar o regime de inflação é um campo escalar, chamado de inflaton. Conforme citado, se $p = -\rho c^2$, tem-se uma aceleração positiva, e das equações (3.76) e (3.77), tem-se que tal condição pode ser alcançada se o termo cinético for desprezível frente ao termo potencial. É chamada de aproximação *slow-roll* (JANTSCH, 2012) a condição na qual a variação temporal do campo escalar é lenta, sendo tal condição é verificada se o potencial cumprir

$$\epsilon = \frac{1}{16\pi G} \frac{1}{V} \frac{dV}{d\phi} \ll 1. \quad (3.79)$$

A verificação desta relação se dá pela derivação temporal de H , de modo que tem-se

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \quad (3.80)$$

Caracterizando o regime acelerado, impõe-se que

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} \gg 0 \rightarrow -\frac{\dot{H}}{H^2} \ll 1 \quad (3.81)$$

Uma vez que $V(\phi) \gg \dot{\phi}^2$, desprezando o termo cinético, tem-se que $\frac{dV}{d\phi} \gg \ddot{\phi}$, e portanto, a equação de Friedmann e (3.30) é reescrita como (RIBAS, 2008)

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} V(\phi) \quad (3.82)$$

e a equação de movimento do inflaton (3.74) como

$$3H\dot{\phi} = -\frac{dV}{d\phi} \quad (3.83)$$

Derivando-se (3.82) em relação ao tempo, tem-se

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{1}{V} \frac{dV}{d\phi} \right) \quad (3.84)$$

Substituindo-se (3.83) em (3.84), obtém-se a condição (3.79).

Satisfeita a condição (3.79), o potencial varia lentamente, permanecendo, dessa maneira, desprezível o termo cinético enquanto o campo do inflaton evolui temporalmente a partir de um estado de falso vácuo, de um valor esperado nulo, para um estado com potencial mínimo. Dessa forma, o universo no início é dominado pelo campo do inflaton, e após uma evolução temporal ocorre uma transição de fase, e o inflaton atinge um estado de vácuo verdadeiro, encerrando, dessa forma, a era inflacionária, quando $\epsilon \sim 1$. Com a expansão acelerada, o universo se resfria, mas atingindo o potencial mínimo, o termo cinético deixa de ser desprezível, o que ocasiona oscilações amortecidas no campo do inflaton, fazendo este perder energia, o que provoca o reaquecimento do universo. É a partir deste cenário que o modelo cosmológico padrão volta a ser o modelo vigente.

3.6.3 Soluções Inflacionárias para os Problemas no Modelo Cosmológico Padrão

Problema da Planura: Durante a era da inflação, o fator de escala expande a uma taxa muito grande, dessa forma, o termo que contém o parâmetro de curvatura na equação de Friedmann torna-se desprezível quando $\Omega \rightarrow 1$:

$$|\Omega - 1| = \frac{|k|}{a^2 H^2} \rightarrow 0 \Rightarrow \Omega \rightarrow 1 \quad (3.85)$$

Dessa forma, observa-se que após um período de expansão muito violenta, a geometria do espaço com curvatura diferente de zero se torna aparentemente plana, solucionando, assim, o problema da planura.

Problema do Horizonte: A distância percorrida pela luz do início do universo até um determinado tempo é dada pela expressão (3.59), expressão essa que define as regiões do espaço passíveis de terem contato causal. Para uma partícula de luz, a geodésica é nula, e, portanto, $0 = dt^2 - a^2(t)dr^2$, de modo que a expressão (3.59) é reescrita como

$$d = a(t) \int_0^r dr \quad (3.86)$$

Dessa forma, observa-se que regiões que atualmente estão fora de contato causal, estiveram em conectadas causalmente, e com a extrema expansão do universo, essas regiões expandiram-se à frente de seus horizontes, com velocidades superiores à da luz.

Problema do Monopolo: Com a inflação, a densidade de monopolos se torna desprezível devido a violenta expansão.

3.7 Energia e Matéria Escura

Observações recentes de supernovas geraram evidências de que o universo está em expansão positiva e acelerada. A luminosidade medida dessas supernovas são cerca de 25% mais fraca que o desvio para o vermelho previa. A diminuição da luminosidade das supernovas encontra explicação no fato de que no passado, a expansão era mais lenta, e, portanto, a expansão é acelerada. Conforme foi citado, para que a aceleração seja positiva, é preciso que a condição $\rho + 3p < 0$ seja satisfeita, dessa forma, no universo atual deve dominar a energia cuja pressão é negativa, satisfazendo $p < -\frac{1}{3}$, chamada de energia escura, assim referida por não ser interagente com matéria comum, apenas com a gravidade e consigo mesma.

A matéria escura é descrita segundo sua interação com a gravidade, uma vez que não interage com a matéria comum. Dessa forma, a matéria escura é modelada como um fluido sem pressão. As estimativas modernas são de que 70% da energia do universo seja referente a energia escura, e 25% da matéria, seja matéria escura, ao passo que a matéria comum representa cerca de 5% (SILVA, 2004). A contribuição da matéria escura à dinâmica cosmológica é de desaceleração.

3.8 Equações de Estado no Contexto da Cosmologia

No desenvolvimento de modelos cosmológicos é possível aplicar aos constituintes o formalismo da mecânica dos fluidos, e ainda atender a condição de homogeneidade e isotropia do universo. Nessas considerações, os elementos presentes no universo são tratados como por exemplo, fluidos, e as grandezas físicas presentes nesse formalismo afetam a forma como o universo evolui. Constatações recentes indicam a presença de matéria e energia escura como constituintes da maior parte do universo atual, de modo que com o intuito de descrever o universo em escalas cosmológicas, nesse sentido, é preciso escolher a natureza física do constituinte tido como fluido. As grandezas termodinâmicas de estado que descrevem esse fluido se relacionam através das chamadas equações de estado, relações matemáticas que conectam parâmetros que especificam o estado do sistema analisado, e que precisam ser escolhidas para esse tipo de análise na cosmologia.

No caso da Cosmologia, como pilares do modelo padrão, encontra-se além das equações que descrevem a expansão do universo – a equação de Friedmann, e a equação da

aceleração, ambas derivadas diretamente a partir da equação de campo de Einstein – a expressão da conservação do tensor energia-momento. Para a solução dessas equações, é necessária uma outra expressão matemática relacionando as grandezas físicas pressão e densidade de energia, eliminando uma variável (CUZINATTO, 2002). As equações de estado na Cosmologia têm o papel de descrever o substrato analisado como sendo o constituinte do universo, e também misturas de substâncias, como por exemplo a matéria diluída, radiação, energia escura, matéria escura, etc. Conforme citado, para uma aceleração positiva, é necessário que a relação $\rho + 3p < 0$ seja satisfeita, de modo que as equações de estado devem fornecer uma pressão negativa.

3.8.1 A Equação de Estado de Chaplygin

Observações astronômicas recentes, sobretudo da luminosidade de supernovas distantes indicam uma expansão acelerada do universo, significando que a pressão e a densidade de energia do universo devem violar a chamada condição de energia forte, dada pela expressão $\rho + 3p < 0$. Uma possível explicação para o cumprimento dessa condição durante a evolução cosmológica é a chamada energia escura. Nos modelos cosmológicos existem diferentes possibilidades para a modelagem matemática da energia escura. A possibilidade mais tradicional seria uma constante cosmológica independente do tempo, modelada como um fluido perfeito descrito pela equação de estado $p \sim -\rho$. Outra possibilidade para a energia escura seria representá-la pela chamada quintessência, um campo escalar como os geralmente empregados na cosmologia inflacionária para descrever a transição da expansão quase exponencial, para o comportamento observado em épocas recentes. No entanto, a Cosmologia lida também com um problema que seria o oposto disso, a inversão das proporções de matéria comum e de energia escura, ou seja, a transição de uma era na qual a matéria comum dominava, para uma na qual a energia escura domina, sendo essa segunda a atual era cosmológica. O conceito de k-essência surge como modelo para solucionar essa questão.

Nos modelos cosmológicos baseados no emprego de fluidos perfeitos como constituintes do universo, há a possibilidade de análise com o chamado gás de Chaplygin, um fluido descrito pela equação de estado exótica dada por

$$p = -\frac{A}{\rho}, \quad (3.87)$$

onde A é uma constante positiva, e p e ρ as já mencionadas pressão e densidade de energia, respectivamente, com $\rho > 0$. A modelagem da energia escura na teoria da quintessência e do

modelo do gás de Chaplygin se relacionam por, nesta primeira, ser sugerido um potencial $V(\phi)$ do campo escalar, o qual está relacionado com a constante A da expressão (3.87).

Um dos principais aspectos do gás de Chaplygin, e que também fundamenta o emprego dessa equação de estado como constituinte do universo em expansão, é a possibilidade de unificação do setor escuro em uma única equação de estado, sendo o setor escuro, a parte do universo composta pela energia e matéria escuras (GORINI, et. al., 2004).

Uma possibilidade de ρ que satisfaz a equação de Friedmann (3.30), considerando a conservação da energia, é dada por (ZSCHOCHE, 2013):

$$\rho = \sqrt{A + \frac{B}{a^6}} \quad (3.88)$$

Onde B é uma constante de integração. De acordo com a expressão acima, o gás de Chaplygin tem o comportamento de poeira com pressão nula em épocas primitivas, e como constante cosmológica para épocas recentes, uma vez que se $a^6 \ll \frac{B}{A}$, então $\rho \sim \frac{\sqrt{B}}{a^3}$, característico da matéria, e se $a \gg 1$, então $\rho \sim \sqrt{A}$, ou seja, constante. É essa possibilidade de transição característica do gás de Chaplygin que fundamenta uma análise na qual o setor escuro é unificado em apenas uma equação de estado exótica.

É proposta, também, uma generalização do gás de Chaplygin (SEN, SCHERRER, 2005). O chamado gás de Chaplygin generalizado é dado pela equação de estado exótica

$$p = -\frac{A}{\rho^\alpha} \quad (3.89)$$

Onde $0 < \alpha \leq 1$, de modo que quando $\alpha = 1$, tem-se a expressão do gás de Chaplygin original, e se $\alpha = 0$, tem-se o comportamento de uma constante cosmológica. Essa generalização, portanto, amplia a abordagem da transição da era dominada pela matéria, para uma com uma constante cosmológica.

3.8.2 A Equação de Estado de Van der Waals

A equação de estado de Van der Waals é uma equação de estado exótica no contexto cosmológico utilizada na modelagem de fluidos constituintes do universo, e é dada por

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \quad (3.90)$$

Onde $v = V/N$, e o recíproco da densidade de partículas, sendo N o número de partículas, R é a constante dos gases, T é a temperatura, e a e b são constantes relacionadas a cada elemento, caracterizando a atração intermolecular e o volume das partículas em si, respectivamente. É possível reescrever a equação (3.90) considerando-se as variáveis críticas $p_c = \frac{a}{27b^2}$, $v_c = 3b$ e $T_r = \frac{28}{27Rb}$, de modo que a equação (3.90) é reescrita como

$$p_r = \frac{8T_r}{3v_r - 1} - \frac{3}{v_r^2} \quad (3.91)$$

Definindo-se um parâmetro não negativo constante $\omega(T)$ associado a temperatura, e fazendo $v^{-1} = \rho$, equação (3.91) é reescrita como (JANTSCH, CHRISTMANN, KREMER, 2016).

$$p_r = \frac{8\omega\rho}{3 - \rho} - 3\rho^2 \quad (3.92)$$

Com p e ρ sendo respectivamente a pressão e a densidade de energia. É a equação (3.92) a forma da equação de estado de Van der Waals empregada na Cosmologia. Como características qualitativas dessa equação, nota-se que a mesma possui comportamento assintótico quando $\rho \rightarrow 3$, uma vez que a pressão diverge, e quando $\rho \rightarrow 0$, a forma da equação de estado se aproxima da forma $p \propto \rho$, e, ainda, quando $\rho \rightarrow \infty$, a pressão p tende a ser cada vez mais negativa, podendo trocar para valores positivos, e vice-versa.

3.8.3 A Equação de Estado Barotrópica

Considerando-se um universo no modelo FLRW, a expressão mais simples da hidrodinâmica que pode ser estruturada visando descrever um constituinte para o universo, é a equação de estado barotrópica, chamada assim por a pressão depender exclusivamente da densidade de energia, e é dada por

$$p = (\gamma - 1)\rho c^2 \quad (3.93)$$

Onde $\gamma = \omega + 1$ é o chamado índice barotrópico, cujo valor determina a natureza do constituinte analisado. Para o caso de $\gamma = 0$, tem-se o caso da constante cosmológica, considerado o limite entre o fluido cosmológico convencional, com $\gamma > 0$, e o fluido fantasma, com $\gamma < 0$. As outras possibilidades de valores para o índice barotrópico são, por exemplo, $\gamma =$

$\frac{4}{3}$, referente a radiação, ou $\gamma = 1$, referente a poeira. É mais comum a equação (3.93) ser escrita na forma

$$p = \omega \rho c^2 \quad (3.94)$$

Sendo o parâmetro ω uma constante que assume o papel de parâmetro de equação de estado, tendo como valores possíveis, $\omega = 0$, referente a matéria comum, $\omega = \frac{1}{3}$ referente a radiação, e $\omega = -1$ referente a constante cosmológica.

4 O Formalismo Covariante de Escala

O estudo cosmológico de eras distintas da evolução do universo leva naturalmente a questões sobre diferentes escalas e sistemas de unidades. A exemplo, a teoria quântica provê um sistema de unidades - um sistema atômico - no qual todas as grandezas físicas podem ser descritas. Ao mesmo tempo, os estudos cosmológicos empregam um sistema de unidades no qual os efeitos gravitacionais são considerados, não levando em conta efeitos quânticos, e, portanto, não se valendo do sistema de unidades atômicas. Uma vez que diferentes tipos de interações estão presentes em diferentes eras do universo, diferentes sistemas de unidades são utilizados (CANUTO, et. al., 1977). A teoria aqui utilizada, apresenta a possibilidade de que dois sistemas de unidades, que descrevem diferentes eras durante a evolução do universo podem ser relacionados através de uma transformação de escala de tempo, sendo essa transformação responsável pelo mapeamento de eras distintas do universo.

O conceito de sistemas distintos de unidades leva à ideia de diferentes métricas, e essa segunda implica na variação temporal da constante gravitacional G , estando esse conceito em acordo com a hipótese dos grandes números de Dirac, e também, com a relatividade geral (CANUTO, et. al., 1977). Um dos argumento utilizados pra a fixação de determinados parâmetros será a chamada hipótese dos grandes números de Dirac, uma proposição que afirma que como consequência da conexão entre o micro e o macro universo, alguns valores tidos como constantes, deveriam ter uma dependência temporal, em especial, a massa do universo e a constante gravitacional, devendo, essa segunda, ser inversamente proporcional ao tempo do universo, a saber, $G \propto 1/t$ (RAY, MUKHOPADHYAY, GHOSH, 2007).

Como caso particular, manter G constante significa lidar com equações em unidades gravitacionais, ao passo que a variação temporal de G pode levar a um sistema de equações de campo modificadas em unidades atômicas, que descrevem o universo em uma era no passado. Dessa forma, o universo atual seria descrito, então, por equações da relatividade geral com G constante.

Para descrever o sistema de unidades gravitacionais, será empregado o tensor métrico com a notação $\tilde{g}_{\mu\nu}(x^\lambda)$, enquanto o tensor métrico associado ao espaço-tempo em unidades atômicas será dado por $g_{\mu\nu}(x^\lambda)$, associados, respectivamente, aos intervalos de espaço-tempo dados por

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (4.1)$$

Essas métricas estão relacionadas por uma transformação conforme, como citado, dada por uma função escalar $\beta(x^\lambda)$, de modo que

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \beta^2 g_{\mu\nu} \quad (4.2)$$

De modo que

$$\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}^{\mu\lambda} = g_{\mu\nu}g^{\mu\lambda} = \delta_\nu^\lambda \quad (4.3)$$

Para estabelecer a relação entre as equações associadas às diferentes métricas, considere-se, primeiramente, o símbolo de Christoffel em unidades gravitacionais, dado por

$$\tilde{\Gamma}_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\rho}(\partial_\lambda\tilde{g}_{\rho\nu} + \partial_\nu\tilde{g}_{\rho\lambda} - \partial_\rho\tilde{g}_{\nu\lambda}) \quad (4.4)$$

E de acordo com as equações (4.2) e (4.3) tem-se que a relação entre as conexões afins nos dois sistemas de unidades é dada por (RIBAS, DEVECCHI, KREMER, 2019)

$$\tilde{\Gamma}_{\nu\lambda}^\mu = \Gamma_{\nu\lambda}^\mu + \frac{1}{\beta}(\delta_\nu^\mu\beta_\lambda + \delta_\lambda^\mu\beta_\nu - g_{\nu\lambda}\beta^\mu) \quad (4.5)$$

Onde β_ν é a derivada parcial de β em relação a ν . O tensor de Ricci, por sua vez, é dado em unidades gravitacionais por

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = \partial_\nu\tilde{\Gamma}_{\mu\alpha}^\alpha - \partial_\alpha\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha + \tilde{\Gamma}_{\rho\nu}^\alpha\tilde{\Gamma}_{\mu\alpha}^\rho - \tilde{\Gamma}_{\rho\alpha}^\alpha\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho \quad (4.6)$$

E de acordo com as equações (4.2) e (4.3) o tensor de Ricci e unidades gravitacionais e atômicas são relacionados por (RIBAS, DEVECCHI, KREMER, 2019)

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{1}{\beta}(3\partial_\nu\beta_\mu - \partial_\mu\beta_\nu - 2\beta_\alpha\Gamma_{\mu\nu}^\alpha + g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\beta^\alpha) + \frac{1}{\beta^2}(-4\beta_\nu\beta_\mu + g_{\mu\nu}\beta_\alpha\beta^\alpha) \quad (4.7)$$

E de acordo com a condição $\nabla_\mu\beta_\nu = \nabla_\nu\beta_\mu$, a relação entre o tensor de Ricci nos dois sistemas de unidades é dado por

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{1}{\beta}(2\nabla_\nu\beta_\mu + g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\beta^\alpha) + \frac{1}{\beta^2}(-4\beta_\nu\beta_\mu + g_{\mu\lambda}\beta_\alpha\beta^\alpha) \quad (4.8)$$

Considerando-se agora o escalar de curvatura dado por $\tilde{R} = \tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{R}_{\mu\nu}$, tem-se que, dadas as expressões (4.2) e (4.8) a relação entre o escalar de curvatura nos sistemas de unidades gravitacional e atômico, é dada por

$$\tilde{R} = \frac{1}{\beta^2} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \frac{1}{\beta} \frac{1}{\beta^2} (2\nabla_\nu \beta^\nu + 4\nabla_\alpha \beta^\alpha) + \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{\beta^2} (-4\beta^\mu \beta_\mu + 4\beta_\alpha \beta^\alpha) \quad (4.9)$$

o que resulta na relação (RIBAS, DEVECCHI, KREMER, 2019)

$$\tilde{R} = \frac{1}{\beta^2} \left(R + \frac{6\nabla_\nu \beta^\nu}{\beta} \right) \quad (4.10)$$

Pode-se, agora, apresentar o tensor de Einstein em unidades gravitacionais por

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{R} \quad (4.11)$$

que de acordo com os resultados anteriores, se relaciona com o tensor de Einstein em unidades atômicas por

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \\ &= \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{\beta} (2\nabla_\nu \beta_\mu + g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \beta^\alpha) - \frac{1}{\beta^2} (-4\beta_\nu \beta_\mu + g_{\mu\nu} \beta_\alpha \beta^\alpha) \\ &\quad - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(\beta^2 \tilde{R} - \frac{6\nabla_\nu \beta^\nu}{\beta} \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Que pode ser reescrito como (CANUTO, et. al., 1977)

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \frac{2\nabla_\nu \beta_\mu}{\beta} - \frac{4\beta_\nu \beta_\mu}{\beta^2} - g_{\mu\nu} \left(\frac{2\nabla_\alpha \beta^\alpha}{\beta} - \frac{\beta^\alpha \beta_\alpha}{\beta^2} \right) \quad (4.13)$$

Dessa forma, a equação de campo de Einstein é dada por

$$G_{\mu\nu} + \frac{2\nabla_\nu \beta_\mu}{\beta} - \frac{4\beta_\nu \beta_\mu}{\beta^2} - g_{\mu\nu} \left(\frac{2\nabla_\alpha \beta^\alpha}{\beta} - \frac{\beta^\alpha \beta_\alpha}{\beta^2} \right) = -8\pi G(\beta) T_{\mu\nu} \quad (4.14)$$

Onde os tensores energia-momento nos sistemas de unidades gravitacional e atômico se relacionam por uma propriedade de homogeneidade, dada por (CANUTO, et. al., 1977)

$$\tilde{T}_{\mu\nu} \tilde{G} = G(\beta) T_{\mu\nu} \quad (4.15)$$

De modo que quando $\tilde{G} = G(\beta = 1)$, tem-se a constante gravitacional e o tensor energia-momento em unidades gravitacionais.

Considerando a métrica de Robertson-Walker, em unidades gravitacionais dada por

$$d\tilde{s}^2 = dt^2 - \tilde{a}(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (4.16)$$

E unidades atômicas, dada por

$$ds^2 = \frac{dt^2}{\beta^2} - a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (4.17)$$

Postula-se que as métricas se relacionam por

$$d\tilde{s}^2 = \beta(t)^2 ds^2 \quad (4.18)$$

Dessa forma, as componentes do tensor métrico são dadas por

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{00} &= 1, \tilde{g}_{ij} = -\delta_{ij}\tilde{a}(t)^2 \\ g_{00} &= \frac{1}{\beta(t)^2} \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij}a(t)^2 = -\frac{\delta_{ij}\tilde{a}(t)^2}{\beta(t)^2}$$

Observe-se que em unidades gravitacionais, a dinâmica do espaço-tempo depende do fator de escala $\tilde{a}(t)$, enquanto que em unidades atômicas, depende do parâmetro $\beta(t)$.

Os componentes do símbolo de Christoffel não nulos derivados a partir da métrica acima nas unidades gravitacionais, são

$$\tilde{\Gamma}_{00}^0 = 0, \tilde{\Gamma}_{11}^0 = \tilde{\Gamma}_{22}^0 = \tilde{\Gamma}_{33}^0 = \tilde{a}\dot{\tilde{a}}, \tilde{\Gamma}_{10}^1 = \tilde{\Gamma}_{20}^2 = \tilde{\Gamma}_{30}^3 = \frac{\dot{\tilde{a}}}{\tilde{a}} \quad (4.20)$$

E em unidades atômicas, dados por

$$\Gamma_{00}^0 = -\frac{\dot{\beta}}{\beta}, \Gamma_{11}^0 = \Gamma_{22}^0 = \Gamma_{33}^0 = \beta^2 a \dot{a}, \Gamma_{10}^1 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{30}^3 = \frac{\dot{a}}{a} \quad (4.21)$$

No contexto das análises cosmológicas, ao se considerar um fluido como constituinte do universo, a relação entre a quadri-velocidade em unidades gravitacionais e atômicas é dada por

$$\tilde{U}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tilde{s}} = \frac{U^\mu}{\beta} \quad (4.22)$$

E de acordo com a equação (4.1), tem-se que $\tilde{U}^\mu \tilde{U}_\nu = U^\mu U_\nu$. Ainda, considerando a equação (4.15), e multiplicando por $g^{\mu\lambda}$, tem-se

$$\beta^2 \tilde{G} \tilde{T}_\nu^\lambda = G(\beta) T_\nu^\lambda \quad (4.23)$$

Aplicando-se o quadri-divergente e manipulando a expressão acima, obtém-se a equação da continuidade em unidades atômicas, dado por (CANUTO, et. al., 1977)

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho - p) = -\rho\left(\frac{\dot{G}}{G} + \frac{\dot{\beta}}{\beta}\right) - 3p\frac{\dot{\beta}}{\beta} \quad (4.24)$$

Onde p é a pressão, e todas as grandezas estão descritas em unidades atômicas.

A partir da equação modificada de campo de Einstein (4.14), pode-se, ainda, derivar as equações de Friedmann e da aceleração modificadas, dadas respectivamente por (CANUTO, et. al., 1977)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{\dot{a}\dot{\beta}}{a\beta} + \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3\beta^2}\rho \quad (4.25)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}\dot{\beta}}{a\beta} + \frac{\ddot{\beta}}{\beta} = -\frac{4\pi G}{3\beta^2}(\rho + 3p) \quad (4.26)$$

Os capítulos 5 e 6 tratam da aplicação do modelo apresentado, onde a possibilidade de fazer mapeamento entre eras distintas da evolução do universo é desenvolvida, utilizando diferentes possibilidades para constituintes cosmológicos.

5 Fluido de Chaplygin Generalizado como Constituinte Cosmológico

O modelo apresentado no capítulo anterior será, nesse capítulo, aplicado a um universo preenchido com o fluido de Chalygin Generalizado, onde serão consideradas duas possibilidades de escolha para a função escalar β , que representa a conexão entre as duas eras mapeadas.

5.1 Caso $\beta = \frac{1}{\sqrt{t}}$

Conforme a (3.89), a Equação de Estado de Chaplygin Generalizada – uma possibilidade de constituinte no contexto cosmológico – nas unidades gravitacionais, nas quais a Relatividade Geral é válida, é dada por

$$\tilde{p} = -\frac{\tilde{A}}{\tilde{\rho}^\alpha} \quad (5.1)$$

De acordo com a propriedade de homogeneidade dada pela (4.15), relacionando o tensor energia-momento nas unidades atômicas com as unidades gravitacionais, as expressões que relacionam a densidade de energia e pressão entre os dois sistemas de unidades, são dadas por

$$\tilde{\rho}\tilde{G} = \frac{G(\beta)\rho}{\beta^2} \quad (5.2)$$

$$\tilde{p}\tilde{G} = \frac{G(\beta)p}{\beta^2} \quad (5.3)$$

Inserindo as expressões (5.2) e (5.3) na Equação de Estado de Chaplygin Generalizada, obtém-se a seguinte relação:

$$\frac{G(\beta)p}{\tilde{G}\beta^2} = -\frac{\tilde{A}}{\left(\frac{G(\beta)\rho}{\tilde{G}\beta^2}\right)^\alpha} \quad (5.4)$$

Resolvendo a expressão acima para p – a pressão em unidades atômicas – tem-se

$$p = -\frac{A(\beta)}{\rho^\alpha} \quad (5.5)$$

Onde agora, o fator de proporcionalidade do gás de Chaplygin é dada por

$$A(\beta) = \frac{\tilde{A}\tilde{G}^{\alpha+1}\beta^{2(\alpha+1)}}{G(\beta)^{\alpha+1}} \quad (5.6)$$

Observa-se que a equação de estado de Chaplygin nas unidades atômicas difere de sua análoga em unidades gravitacionais pelo fato de na primeira, $A(\beta)$ é uma função com dependência temporal, enquanto que na segunda, trata-se de uma constante.

Inserindo-se a expressão (5.5) na equação de fluido modificada dada por (4.24) tem-se

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho - \frac{A(\beta)}{\rho^\alpha}\right) = -\rho\left(\frac{\dot{G}}{G} + \frac{\dot{\beta}}{\beta}\right) - 3\left(-\frac{A(\beta)}{\rho^\alpha}\right)\frac{\dot{\beta}}{\beta} \quad (5.7)$$

Trabalhando-se a expressão acima e substituindo-se a expressão para $A(\beta)$, dada por (5.6), obtém-se

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 3\left(\frac{\tilde{A}\tilde{G}^{\alpha+1}\beta^{2(\alpha+1)}}{\rho^\alpha G(\beta)^{\alpha+1}}\right)\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\beta}}{\beta}\right) - \rho\left(\frac{\dot{G}}{G} + \frac{\dot{\beta}}{\beta}\right) \quad (5.8)$$

Com o objetivo de obter soluções cosmológicas nas unidades atômicas, a dependência temporal de G e de β deve ser especificada. Uma possibilidade de escolha é definir

$$G(\beta) = \tilde{G}\beta^2 \quad (5.9)$$

Relação essa que satisfaz a hipótese dos grandes números de Dirac, quando da especificação de β como função do tempo. Dessa forma, o fator $A(\beta)$ torna-se

$$A(\beta) = \frac{\tilde{A}\tilde{G}^{\alpha+1}\beta^{2(\alpha+1)}}{\beta^{2(\alpha+1)}G(\beta)^{\alpha+1}} = \tilde{A} \quad (5.10)$$

E a equação de estado dada por (5.5) torna-se

$$p = -\frac{\tilde{A}}{\rho^\alpha} \quad (5.11)$$

Dessa forma, das equações (5.2) e (5.3), observa-se que $\rho = \tilde{\rho}$ e $p = \tilde{p}$. Considerando-se ainda que $\dot{G} = 2\tilde{G}\beta\dot{\beta}$, a equação (5.9) pode ser reescrita como

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 3\frac{\tilde{A}}{\rho^\alpha}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\beta}}{\beta}\right) - \rho\left(3\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right) \quad (5.12)$$

Dividindo-se a expressão (5.12) por ρ , obtém-se, finalmente,

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{\tilde{A}}{\rho^{\alpha+1}} - 1\right) + 3\frac{\dot{\beta}}{\beta}\left(\frac{\tilde{A}}{\rho^{\alpha+1}} - 1\right) \quad (5.13)$$

Essa expressão pode ser integrada, de modo que a densidade de energia ρ em unidades atômicas é dada pela solução

$$\rho = \left(\tilde{A} + \frac{C}{(a\beta)^{3(\alpha+1)}}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \quad (5.14)$$

Onde C é uma constante de integração.

Um resultado interessante, é que para o caso em que $\alpha = 1$, recupera-se a solução para ρ para o caso do gás de Chaplygin original, dada por (GORINI, et. al., 2004)

$$\rho = \sqrt{\tilde{A} + \frac{C}{(a\beta)^6}} \quad (5.15)$$

Visando a solução da equação de Friedmann modificada, dada pela expressão (4.25), é preciso fixar a dependência temporal de G . Para tal, considerar-se-á a hipótese dos grandes números de Dirac, que estabelece a variação da constante gravitacional em função do tempo cosmológico, sendo essa relação dada por

$$G = \frac{\tilde{G}}{t} \quad (5.16)$$

Conforme a expressão (5.9), obtém-se, portanto, a forma explícita de β :

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (5.17)$$

Dessa forma, considerando que $\dot{\beta} = -1/2t^{3/2}$, e inserindo a expressão (5.14) na equação de Friedmann modificada, tem-se que

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\left(-\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{4t^2} = \frac{8\pi Gt}{3}\left(\left(\tilde{A} + \frac{C}{(a\beta)^{3(\alpha+1)}}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}\right) \quad (5.18)$$

Resolvendo-se a expressão (5.18) como uma equação quadrática, e considerando que $G = \tilde{G}/t$ e $\beta = 1/\sqrt{t}$, obtém-se, finalmente (a parte negativa da solução foi desconsiderada por não ter significado físico nesse contexto)

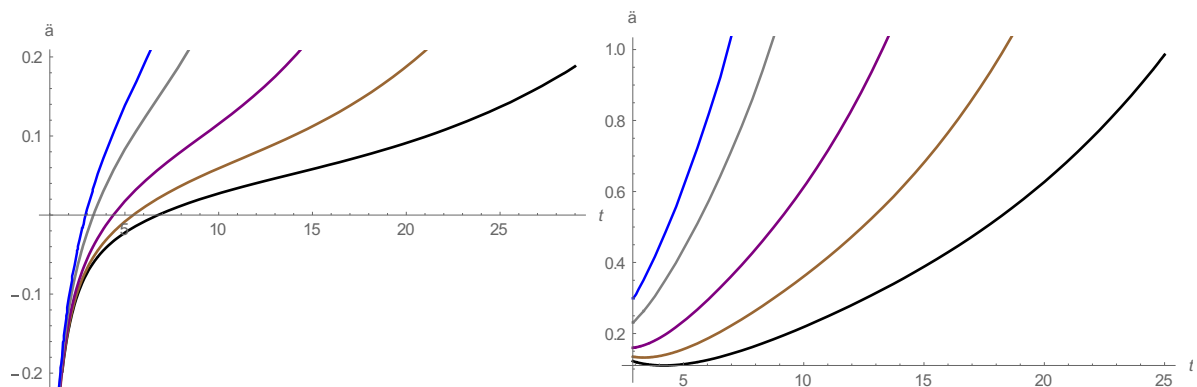
$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t} + \left(\frac{8\pi\tilde{G}}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\tilde{A} + \frac{Ct^{\frac{3(\alpha+1)}{2}}}{a^{3(\alpha+1)}}\right)^{\frac{1}{2(\alpha+1)}} \quad (5.19)$$

A expressão (5.19) pode ser numericamente integrada, descrevendo o comportamento do universo em eras primitivas.

A seguir, é apresentada uma análise gráfica da equação de Friedmann para a densidade de energia dada por (5.14) nas unidades atômicas, e através da conversão entre sistemas de unidades, nas unidades gravitacionais. Nessa análise, a aceleração \ddot{a} é plotada em função do tempo, para ambos os sistemas de unidades. São fixados valores para o expoente α do gás de Chaplygin generalizado, e os valores da constante \tilde{A} são variados (o valor da constante de integração C possui influência quase nula). Os gráficos para ambos os sistemas de unidades possuem intervalos de tempos distintos, uma vez que cada um se refere a diferentes épocas cosmológicas, com seus respectivos ajustes de medida de tempo.

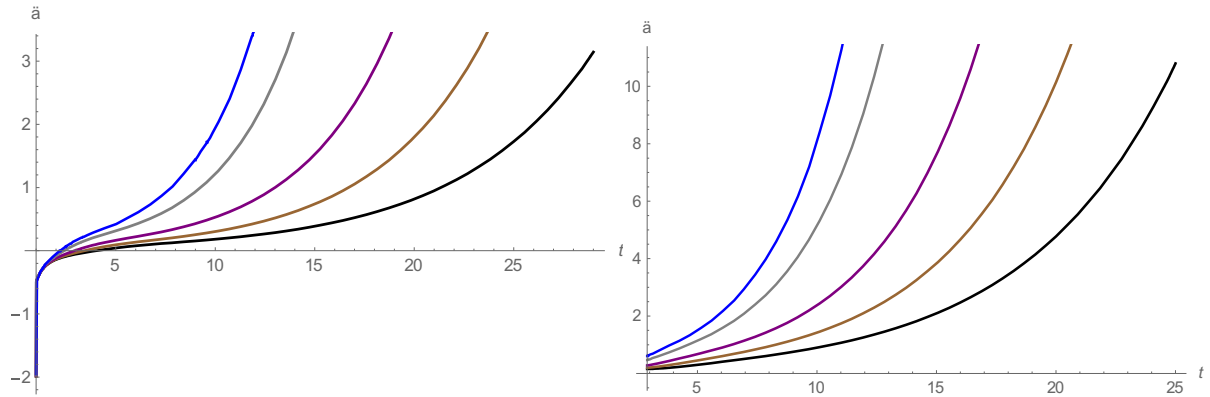
As curvas nos gráficos das figuras de 1 a 3 tem suas respectivas cores distribuídas de acordo com o valor da constante de \tilde{A} conforme se segue: $\tilde{A} = 0,0005$ (preto), $\tilde{A} = 0,001$ (marrom), $\tilde{A} = 0,002$ (roxo), $\tilde{A} = 0,005$ (cinza) e $\tilde{A} = 0,008$ (azul).

Figura 2: Aceleração em função do tempo para $\alpha = 0.5$ nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/\sqrt{t}$, para o gás de Chaplygin Generalizado.



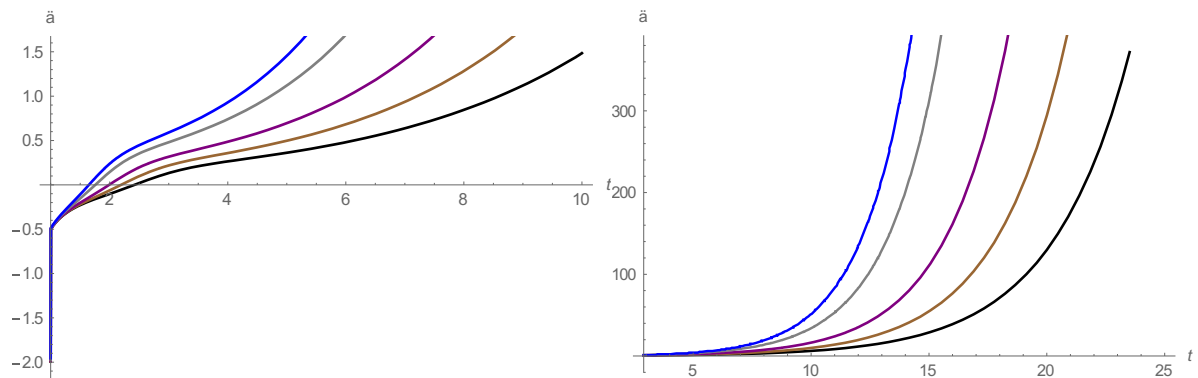
Fonte: O Autor (2021).

Figura 2: Aceleração em função do tempo para $\alpha = 1$ nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/\sqrt{t}$, para o gás de Chaplygin Generalizado



Fonte: O Autor (2021).

Figura 3: Aceleração em função do tempo para $\alpha = 2$ nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/\sqrt{t}$, para o gás de Chaplygin Generalizado.



Fonte: O Autor (2021).

Com base na análise gráfica, observa-se que no sistema de unidade atômicas, o modelo cosmológico apresenta um comportamento de Sitter, comportamento esse típico de eras primitivas do universo, comportando-se, portanto, de forma distinta do modelo nas unidades gravitacionais, nas quais observa-se o comportamento desacelerado-acelerado, típico do gás de Chaplygin em unidades gravitacionais, no qual o universo preenchido por matéria comum evolui de forma gradual para uma era dominada pela energia escura, mostrando, dessa forma, que o presente modelo cosmológico está de acordo com as observações cosmológicas (CHENG, 2005), (RIBAS, DEVECCHI, KREMER, 2019) (HARADHAN, 2017).

5.2 Caso $\beta = \frac{1}{t}$

Analogamente a seção anterior, é possível explicitar a dependência temporal de β como

$$\beta = \frac{1}{t} \quad (5.20)$$

Que de acordo com o formalismo covariante de escala da seção 4, é uma consequência da equação de conservação de massa. Dessa forma, satisfazendo a hipótese dos grandes números de Dirac, a relação entre \tilde{G} e $G(\beta)$ é, nesse caso, dada por

$$G(\beta) = \tilde{G}\beta \quad (5.21)$$

Sabendo-se que a densidade de energia nas unidades gravitacionais, ou seja, quando $\beta = 1$, é dada pela equação

$$\tilde{\rho} = \left(\tilde{A} + \frac{C}{\tilde{a}^{3(\alpha+1)}} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \quad (5.22)$$

E considerando que

$$\tilde{\rho}\tilde{G} = \frac{\rho\tilde{G}\beta}{\beta^2} \rightarrow \rho = \frac{\tilde{\rho}\tilde{G}\beta^2}{\tilde{G}\beta} \rightarrow \rho = \tilde{\rho}\beta \quad (5.23)$$

Sendo, nesse caso, $\beta = 1/t$, observa-se que a conversão entre os dois sistemas de unidades, no para a densidade de energia, é dada por

$$\rho t = \tilde{\rho} \quad (5.24)$$

E no caso do fator de escala,

$$\tilde{a} = \frac{a}{t} \quad (5.25)$$

Tem-se, que, substituindo-se as equações (5.24) e (5.25) na expressão (5.22), obtém-se, diretamente, a expressão da densidade de energia nas unidades atômicas para o caso $\beta = 1/t$:

$$\rho = \frac{1}{t} \left(\tilde{A} + \frac{C}{(\tilde{a}\beta)^{3(\alpha+1)}} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \quad (5.26)$$

A expressão acima é análoga a expressão (5.14) com $\beta = 1/\sqrt{t}$, mas, nesse caso, considerando a possibilidade $\beta = 1/t$.

Sendo a equação de Friedmann (3.42) para unidades gravitacionais dada por

$$\left(\frac{\ddot{a}}{\tilde{a}}\right)^2 = \frac{8\pi\tilde{G}}{3}\tilde{\rho} \quad (5.27)$$

E sabendo que $\tilde{a} = a/t$, visto que $\beta = 1/t$, tem-se que, para unidades atômicas, a equação de Friedmann é dada por

$$\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{a}{t}\right)\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (5.28)$$

Efetuada-se a derivada do lado esquerdo, e substituindo a densidade pela equação (5.26), tem-se

$$\left(\frac{\dot{a}t - a}{t^2}\right) = \left(\frac{8\pi G}{3}\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\left(\tilde{A} + \frac{C}{(a\beta)^{3(\alpha+1)}}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.29)$$

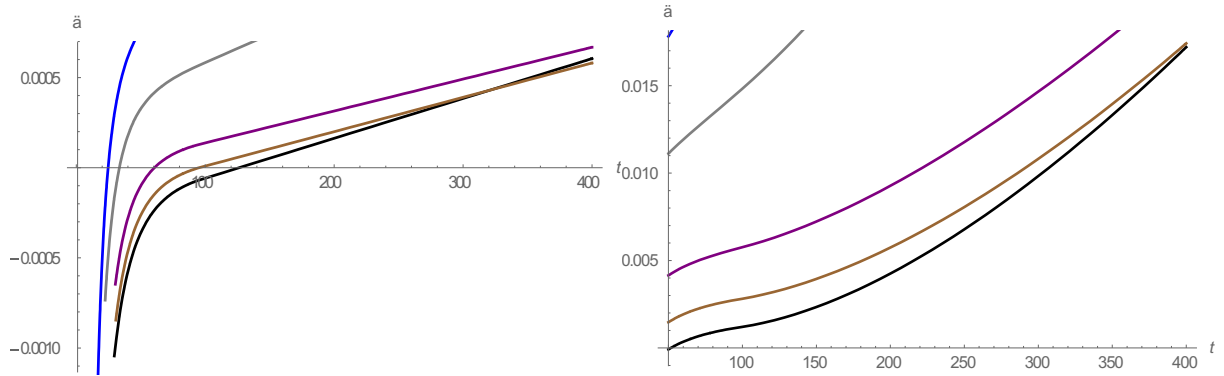
Sabendo-se que $\beta = 1/t$, e que $G = \tilde{G}/t$, a expressão acima pode ser reescrita como

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{t} + \left(\frac{8\pi\tilde{G}}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\tilde{A} + \frac{Ct^{3(\alpha+1)}}{a^{3(\alpha+1)}}\right)^{\frac{1}{2(\alpha+1)}} \quad (5.30)$$

Essa expressão é análoga a (5.19), mas, nesse caso, considerando-se a possibilidade $\beta = 1/t$, e pode ser numericamente integrada, gerando um conjunto de informações referentes a uma era cosmológica anterior.

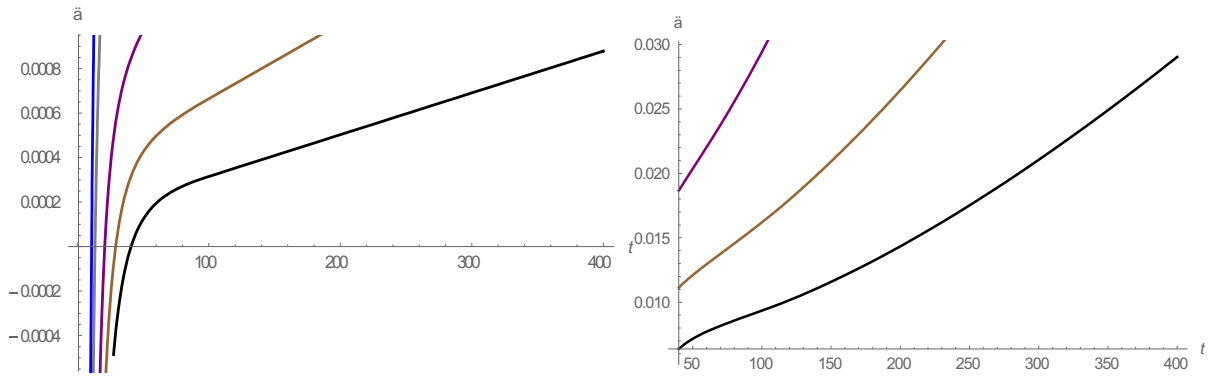
Analogamente a ao caso anterior, é apresentada uma análise gráfica da equação de Friedmann para a densidade de energia dada por (5.26), na qual aceleração \ddot{a} é plotada em função do tempo, para ambos os sistemas de unidades. Semelhante ao caso anterior, são fixados valores para o expoente α do gás de Chaplygin generalizado, e os valores da constante \tilde{A} são variados. As curvas nos gráficos das figuras de 4 a 6 tem suas respectivas cores distribuídas de acordo com o valor da constante de \tilde{A} conforme se segue: $\tilde{A} = 0,0005$ (preto), $\tilde{A} = 0,001$ (marrom), $\tilde{A} = 0,002$ (roxo), $\tilde{A} = 0,005$ (cinza) e $\tilde{A} = 0,008$ (azul).

Figura 4: Aceleração em função do tempo para $\alpha = 0.5$ nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/t$, para o gás de Chaplygin Generalizado.



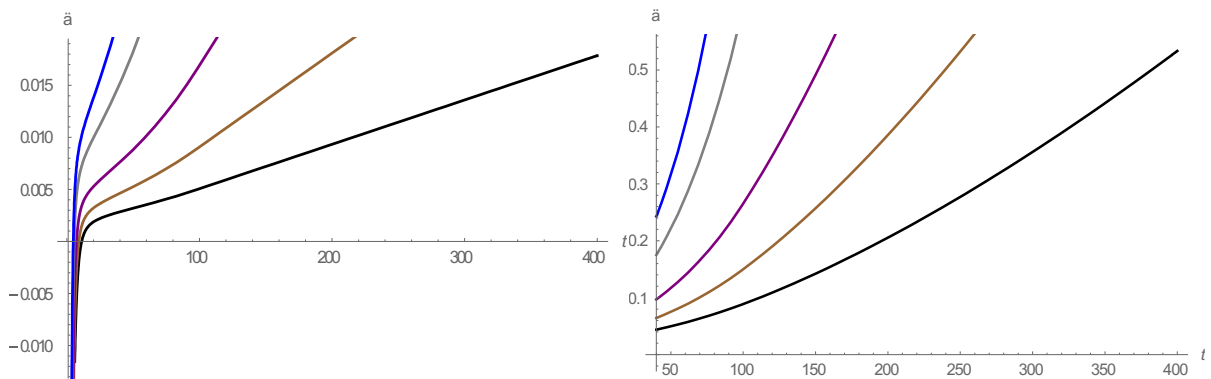
Fonte: O Autor (2021).

Figura 5: Aceleração em função do tempo para $\alpha = 1$ nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/t$, para o gás de Chaplygin Generalizado.



Fonte: O Autor (2021).

Figura 6: Aceleração em função do tempo para $\alpha = 2$ nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/t$, para o gás de Chaplygin Generalizado.



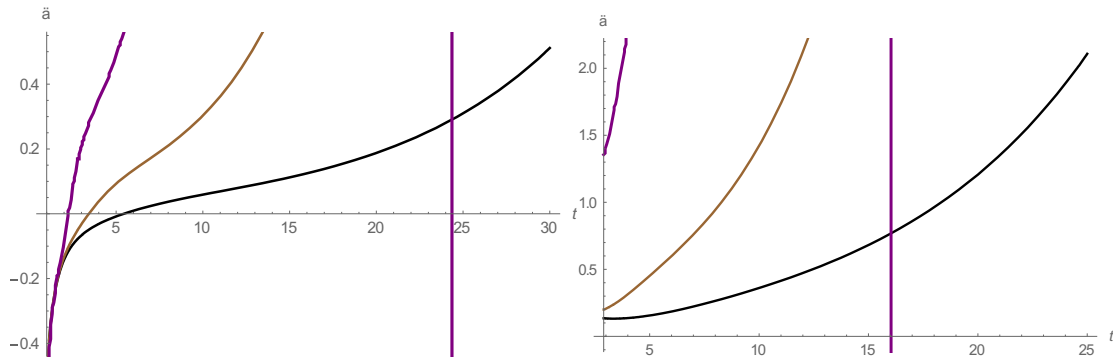
Fonte: O Autor (2021).

Analogamente a seção anterior, tem-se que com base na análise gráfica, observa-se que no sistema de unidade atômicas, esse modelo cosmológico apresenta um comportamento de Sitter, comportamento esse típico de eras primitivas do universo, comportando-se, portanto, de forma distinta do modelo nas unidades gravitacionais, nas quais observa-se o comportamento

desacelerado-acelerado, típico do gás de Chaplygin em unidades gravitacionais, no qual o universo preenchido por matéria comum evolui de forma gradual para uma era dominada pela energia escura, mostrando, dessa forma, que o presente modelo cosmológico está de acordo com o as observações cosmológicas (CHENG, 2005), (RIBAS, DEVECCHI, KREMER, 2019) (HARADHAN, 2017).

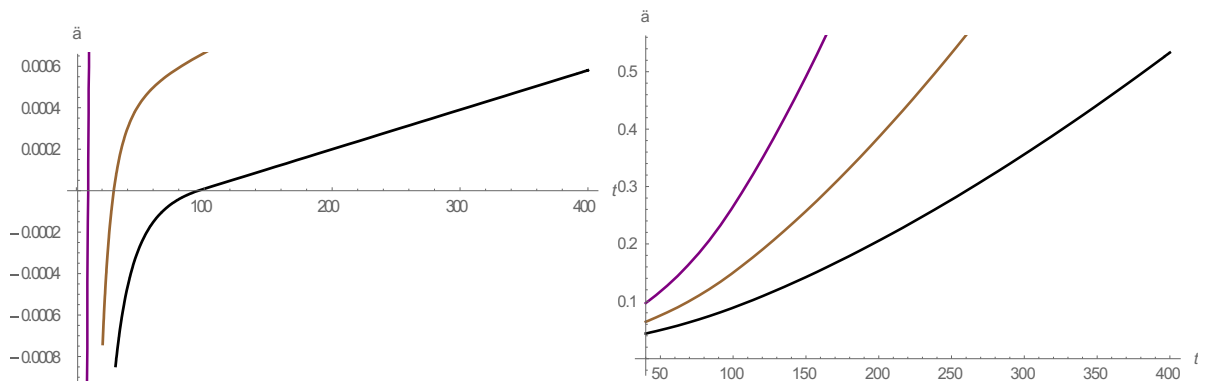
Pode-se, ainda, representar graficamente a mudança no comportamento de \ddot{a} para cada valor de α no gás de Chaplygin generalizado (As curvas nos gráficos das figuras 7 e 8 têm suas cores relacionadas aos valores de α conforme se segue: $\alpha = 0.5$ (preto), $\alpha = 1$ (marrom) e $\alpha = 2$ (roxo)).

Figura 7: Aceleração em função do tempo para $\alpha = 0.5, 1$ e 2 nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/\sqrt{t}$, para o gás de Chaplygin Generalizado.



Fonte: O Autor (2021).

Figura 8: Aceleração em função do tempo para $\alpha = 0.5, 1$ e 2 nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/t$, para o gás de Chaplygin Generalizado.



Fonte: O Autor (2021).

Pode-se observar que conforme o valor do expoente α aumenta, mais rapidamente acontece a transição da fase desacelerada para a acelerada.

Nesse capítulo, foram analisadas duas possibilidades de escolha para a função escalar β no mapeamento de eras distintas em um universo preenchido com o fluido de Chaplygin

Generalizado. No capítulo a seguir, uma análise semelhante será feita para o fluido de Van der Waals Generalizado.

6 Fluido de Van der Waals Generalizado como Constituinte Cosmológico

Nesse capítulo, o modelo cosmológico apresentado no capítulo 4 é aplicado na consideração de um universo preenchido pelo Fluido de Van der Waals Generalizado. Conforme citado no capítulo 4, a escolha da função escalar β é um fator importante no modelo. A seguir, duas possíveis escolhas são apresentadas, e suas implicações na análise da evolução temporal do universo.

6.1 Caso $\beta = \frac{1}{\sqrt{t}}$

A equação de Estado de Van der Waals generalizada trata-se de uma modificação da expressão (3.92), onde os coeficientes da densidade de energia são genéricos, passando a ser ψ e ξ :

$$\tilde{p} = \frac{\psi \tilde{\rho}}{1 - \xi \tilde{\rho}} \quad (6.1)$$

Onde ψ e ξ são parâmetros a serem definidos.

Novamente, substituindo-se as expressões da propriedade de homogeneidade dada pela (4.15), relacionando o tensor energia-momento, e dessa forma, a densidade de energia e a pressão, na equação de Van der Waals generalizada, tem-se que

$$\frac{G(\beta)p}{\tilde{G}\beta^2} = \frac{\psi \left(\frac{G(\beta)\rho}{\tilde{G}\beta^2} \right)}{1 - \xi \left(\frac{G(\beta)\rho}{\tilde{G}\beta^2} \right)} \quad (6.2)$$

Resolvendo a expressão acima para a pressão em unidades atômicas, obtém-se

$$p = \frac{\psi \rho}{1 - \xi \frac{G(\beta)\rho}{\tilde{G}\beta^2}} \quad (6.3)$$

Inserindo-se a expressão (6.3) na equação de fluido modificada dada por (4.24), gera-se

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{\psi\rho}{1 - \xi\frac{G\rho}{\tilde{G}\beta^2}}\right) = -\rho\left(\frac{\dot{G}}{G} + \frac{\dot{\beta}}{\beta}\right) - 3\left(\frac{\psi\rho}{1 - \xi\frac{G\rho}{\tilde{G}\beta^2}}\right)\frac{\dot{\beta}}{\beta} \quad (6.4)$$

Com o objetivo de obter soluções cosmológicas nas unidades atômicas, a dependência temporal de G e de β devem ser especificadas. Uma possibilidade de escolha, é definir

$$G(\beta) = \tilde{G}\beta^2 \quad (6.5)$$

Relação essa que satisfaz a hipótese dos grandes números de Dirac, quando da especificação de β como função do tempo. Dessa forma, das equações (6.2) e (6.3), observa-se que $\rho = \tilde{\rho}$ e $p = \tilde{p}$. Considerando-se ainda que $\dot{G} = 2\tilde{G}\beta\dot{\beta}$, a equação (6.4) pode ser reescrita como

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}\left(1 + \frac{\psi}{1 - \xi\rho}\right) - 3\frac{\dot{\beta}}{\beta}\left(1 + \frac{\psi}{1 - \xi\rho}\right) \quad (6.6)$$

Visando a integração dessa expressão, a mesma como ser organizada como

$$\int \frac{d\rho}{\rho\left(1 + \frac{\psi}{1 - \xi\rho}\right)} = \int \left(-3\frac{da}{a} - 3\frac{d\beta}{\beta}\right) \quad (6.7)$$

Efetuada a integração de ambos os lados da expressão (6.7), obtém-se

$$\frac{\psi}{1 + \psi}\ln(\xi\rho - 1 - \psi) + \frac{1}{1 + \psi}\ln(\rho) = -3\ln(a) - 3\ln(\beta) + \ln(k) \quad (6.8)$$

Onde k é uma constante de integração. Aplicando-se a propriedade da soma de logaritmos e a função exponencial em ambos os lados da expressão (6.8), obtém-se

$$\rho^{\frac{1}{1+\psi}}(\xi\rho - 1 - \psi)^{\frac{\psi}{1+\psi}} = k(a\beta)^{-3} \quad (6.9)$$

Expressão essa que pode ser rearranjada como

$$\rho(\xi\rho - 1 - \psi)^\psi = k(a\beta)^{-3(\psi+1)} \quad (6.10)$$

6.1.1 Para $\psi = 1$

Para a obtenção da forma explícita da densidade de energia, considerar-se-á o valor do parâmetro ψ como sendo $\psi = 1$. Dessa forma, a expressão (6.10) fica

$$\xi\rho^2 - 2\rho - k(a\beta)^{-6} = 0 \quad (6.11)$$

Resolvendo-se essa expressão quadrática, obtém-se a solução para a densidade de energia, para o caso $\psi = 1$:

$$\rho = \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi} \left(1 + \frac{\xi k}{(a\beta)^6} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.12)$$

Para resolver a equação de Friedmann modificada, dada pela expressão (4.25), é preciso fixar a dependência temporal de G . Para tal, considerar-se-á a hipótese dos grandes números de Dirac, que estabelece a variação da constante gravitacional em função do tempo cosmológico, relação essa dada por

$$G = \frac{\tilde{G}}{t} \quad (6.13)$$

Conforme a expressão (6.5), obtém-se, portanto, a forma explícita de β :

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (6.14)$$

Dessa forma, considerando que $\dot{\beta} = -1/2t^{3/2}$, e inserindo a expressão (6.12) na equação de Friedmann modificada, tem-se que

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\left(-\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{4t^2} = \frac{8\pi G t}{3} \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi} \left(1 + \frac{\xi k}{(a\beta)^6} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (6.15)$$

Resolvendo-se a expressão (6.15) como uma equação quadrática, e considerando que $G = \tilde{G}/t$, e $\beta = 1/\sqrt{t}$ obtém-se, finalmente (a parte negativa da solução foi desconsiderada por não ter significado físico nesse contexto):

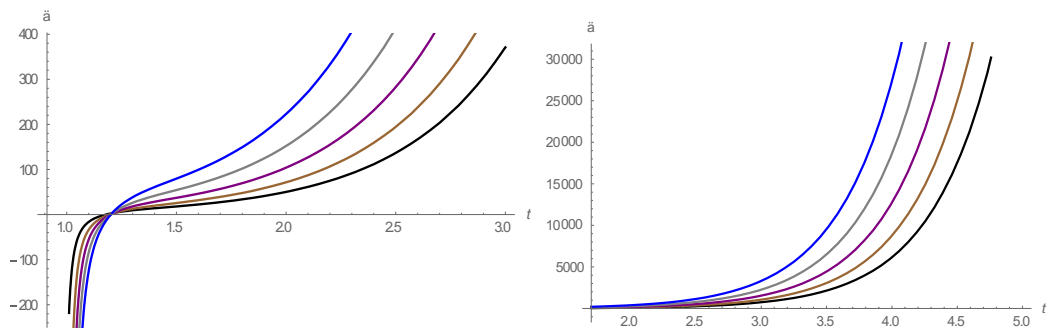
$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t} + \left(\frac{8\pi\tilde{G}}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi} \left(1 + \frac{\xi k t^3}{(a)^6} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.16)$$

A expressão (6.16) pode ser numericamente integrada, descrevendo o comportamento do universo em eras primitivas.

A seguir, é apresentada uma análise gráfica da equação de Friedmann para a densidade de energia dada por (6.12) nas unidades atômicas, e através da conversão entre sistemas de unidades, nas unidades gravitacionais. Nessa análise, a aceleração \ddot{a} é plotada em função do

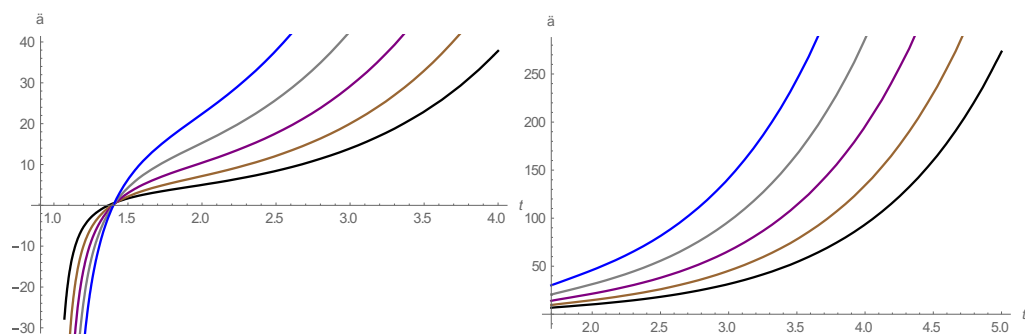
tempo, para ambos os sistemas de unidades. São variados os valores da constante k , e do parâmetro ξ . Os gráficos para ambos os sistemas de unidades possuem intervalos de tempos distintos, uma vez que cada um se refere a diferentes eras, com seus respectivos ajustes de medida de tempo. As curvas nos gráficos das figuras 9 a 11 tem suas respectivas cores distribuídas de acordo com o valor da constante de \tilde{A} conforme se segue: $k = 400$ (preto), $k = 4000$ (marrom), $k = 40000$ (roxo), $k = 400000$ (cinza) e $k = 4000000$ (azul).

Figura 9: Aceleração em função do tempo nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/\sqrt{t}$, para o gás de Van der Waals Generalizado, com $\psi = 1$, $\xi = 0,5$.



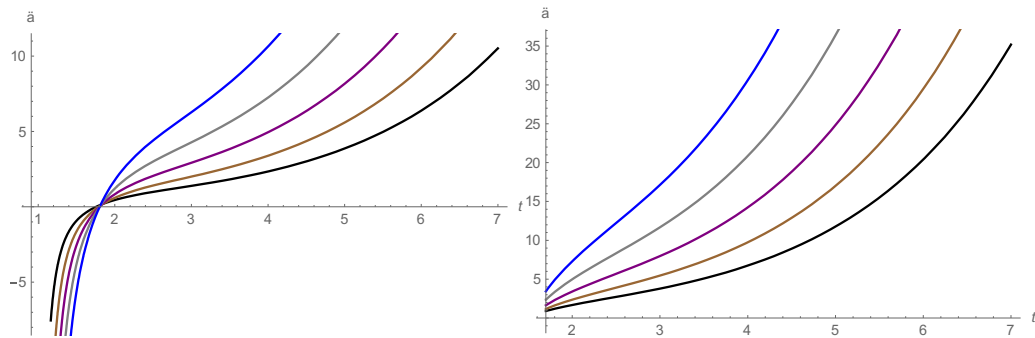
Fonte: O Autor (2021).

Figura 10: Aceleração em função do tempo nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/\sqrt{t}$, para o gás de Van der Waals Generalizado, com $\psi = 1$, $\xi = 1$.



Fonte: O Autor (2021).

Figura 11: Aceleração em função do tempo nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/\sqrt{t}$, para o gás de Van der Waals Generalizado, com $\psi = 1$, $\xi = 2$.



Fonte: O Autor (2021).

Analogamente ao caso do fluido de Chaplygin, observa-se que no sistema atômico, esse modelo cosmológico apresenta comportamento de-Sitter, novamente, típico de épocas primitivas do universo, distintamente do sistema gravitacional, no qual o comportamento desacelerado-acelerado é constatado. Ambos casos estão de acordo com as observações cosmológicas (CHENG, 2005), (RIBAS, DEVECCHI, KREMER, 2019) (HARADHAN, 2017).

6.1.2 Para $\psi = 2$

Pode-se, ainda, a partir da expressão (6.10), considerar o valor do parâmetro ψ como sendo $\psi = 2$, de modo que obtém-se a expressão

$$\xi^2 \rho^3 - 6\xi \rho^2 + 9\rho - k(a\beta)^{-9} = 0 \quad (6.17)$$

Resolvendo-se essa expressão cúbica, obtém-se a solução para a densidade de energia, para o caso $\psi = 2$:

$$\rho = \frac{2}{\xi} + \frac{2^{\frac{1}{3}}}{\left(-2\xi^3 + \frac{k\xi^4}{(a\beta)^9} + \sqrt{\frac{k^2\xi^8}{(a\beta)^{18}} - \frac{4\xi^7k}{(a\beta)^9}}\right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left(-2\xi^3 + \frac{k\xi^4}{(a\beta)^9} + \sqrt{\frac{k^2\xi^8}{(a\beta)^{18}} - \frac{4\xi^7k}{(a\beta)^9}}\right)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}\xi^2} \quad (6.18)$$

Analogamente ao caso anterior, utilizando-se a hipótese dos grandes números de Dirac para a fixação da dependência temporal G , novamente obtém-se a forma explícita de β como sendo $\beta = 1/\sqrt{t}$. Dessa forma, tem-se que a equação de Friedmann modificada fica

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\left(-\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{4t^2} \\ &= \frac{8\pi Gt}{3} \left(\frac{2}{\xi} + \frac{2^{\frac{1}{3}}}{\left(-2\xi^3 + \frac{k\xi^4}{(a\beta)^9} + \sqrt{\frac{k^2\xi^8}{(a\beta)^{18}} - \frac{4\xi^7k}{(a\beta)^9}}\right)^{\frac{1}{3}}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\left(-2\xi^3 + \frac{k\xi^4}{(a\beta)^9} + \sqrt{\frac{k^2\xi^8}{(a\beta)^{18}} - \frac{4\xi^7k}{(a\beta)^9}}\right)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}\xi^2} \right) \quad (6.19) \end{aligned}$$

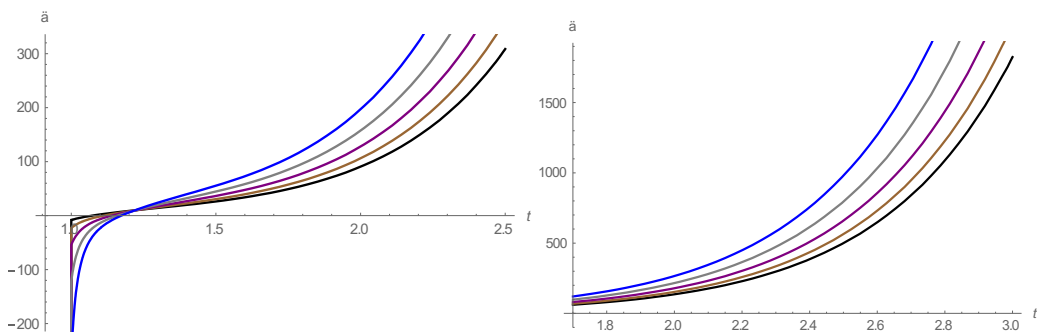
Resolvendo-se a expressão (6.19) como uma equação quadrática, e considerando que $G = \tilde{G}/t$, e $\beta = 1/\sqrt{t}$ obtém-se, finalmente:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t} + \left(\frac{8\pi\tilde{G}}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\xi} + \frac{2^{\frac{1}{3}}}{\left(-2\xi^3 + \frac{9}{(a)^9}t^{\frac{9}{2}}k\xi^4 + \sqrt{\frac{k^2\xi^8}{(a\beta)^{18}} - \frac{4\xi^7k}{(a\beta)^9}}\right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left(-2\xi^3 + \frac{9}{(a)^9}t^{\frac{9}{2}}k\xi^4 + \sqrt{\frac{k^2\xi^8t^9}{(a)^{18}} - \frac{9}{(a)^9}t^{\frac{9}{2}}4\xi^7k}\right)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}\xi^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.20)$$

A expressão (6.20) pode ser numericamente integrada, descrevendo o comportamento do universo em eras primitivas.

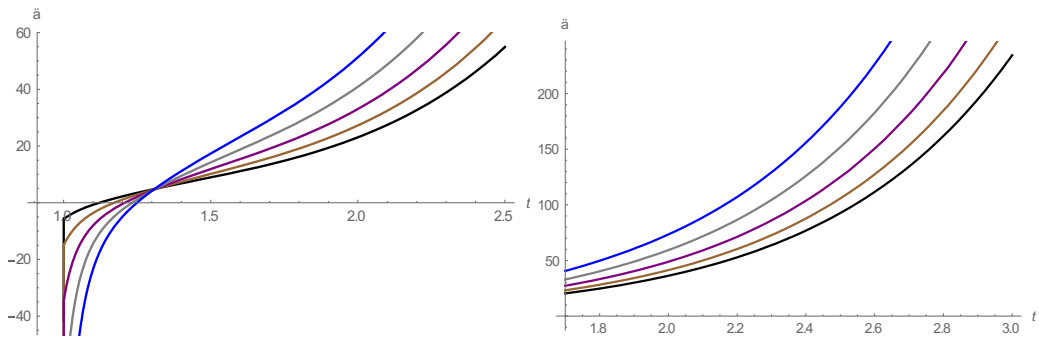
A seguir, é apresentada uma análise gráfica análoga ao caso anterior, na qual a aceleração \ddot{a} é plotada em função do tempo, para ambos os sistemas de unidades, e são variados os valores da constante k , e do parâmetro ξ . As curvas nos gráficos das figuras 12 a 14 tem suas respectivas cores distribuídas de acordo com o valor da constante de \tilde{A} conforme se segue: $k = 400$ (preto), $k = 4000$ (marrom), $k = 40000$ (roxo), $k = 400000$ (cinza) e $k = 4000000$ (azul).

Figura 12: Aceleração em função do tempo nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/\sqrt{t}$, para o gás de Van der Waals Generalizado, com $\psi = 2$, $\xi = 0,5$.



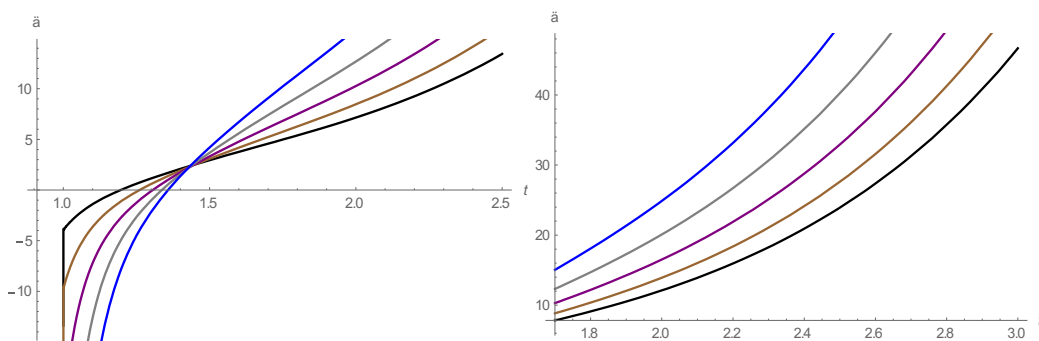
Fonte: O Autor (2021).

Figura 13: Aceleração em função do tempo nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/\sqrt{t}$, para o gás de Van der Waals Generalizado, com $\psi = 2$, $\xi = 1$.



Fonte: O Autor (2021).

Figura 14: Aceleração em função do tempo nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/\sqrt{t}$, para o gás de Van der Waals Generalizado, com $\psi = 2$, $\xi = 2$.



Fonte: O Autor (2021).

Novamente, observa-se que o no sistema atômico, esse modelo cosmológico apresenta comportamento de-Sitter, novamente, típico de épocas primitivas do universo, distintamente do sistema gravitacional, no qual o comportamento desacelerado-acelerado é constatado. Ambos casos estão de acordo com as observações cosmológicas (CHENG, 2005), (RIBAS, DEVECCHI, KREMER, 2019) (HARADHAN, 2017).

6.2 Caso $\beta = \frac{1}{t}$

Analogamente ao caso do Gás de Chaplygin, é possível explicitar a dependência temporal de β como $\beta = 1/t$, sendo essa possibilidade, uma consequência da conservação de massa. Dessa forma, satisfazendo a hipótese dos grandes números de Dirac, com $G(\beta) = \tilde{G}\beta$.

6.2.1 Para $\psi = 1$

Sabendo-se que a densidade de energia nas unidades gravitacionais, ou seja, quando $\beta = 1$, para o caso particular $\psi = 1$, conforme a expressão (6.12) é dada pela equação

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi} \left(1 + \frac{\xi k}{\tilde{a}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.21)$$

Novamente considerando as conversões entre sistemas, onde vê-se que a densidade de energia nos dois sistemas de unidade é relacionada por $\rho t = \tilde{\rho}$, e o fator de escala por $t\tilde{a} = a$, observa-se que substituindo-se essas duas relações na expressão para a densidade (6.11), obtém-se, diretamente, a expressão da densidade de energia nas unidades atômicas para o caso $\beta = 1/t$:

$$\rho = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi} \left(1 + \frac{\xi k}{(a\beta)^6} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (6.22)$$

A expressão acima é análoga a expressão (6.12), com $\beta = 1/\sqrt{t}$, mas, nesse caso, considerando a possibilidade $\beta = 1/t$.

Semelhante ao caso do gás de Chaplygin, sabendo que $\tilde{a} = a/t$, e tendo-se em conta a densidade de energia (6.22), tem-se que para unidades atômicas, a equação de Friedmann é dada por

$$\left(\frac{\dot{a}t - a}{\frac{a}{t}} \right) = \left(\frac{8\pi G}{3} \frac{1}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi} \left(1 + \frac{\xi k}{(a\beta)^6} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.23)$$

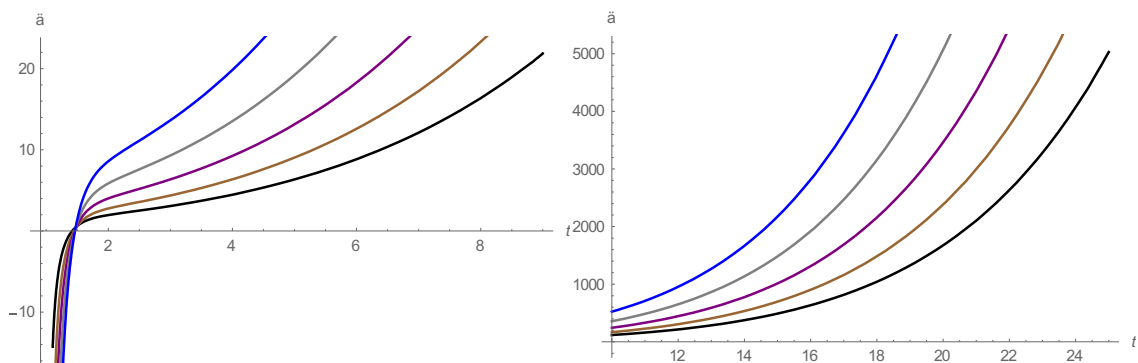
Sabendo-se que $\beta = 1/t$, e que $G = \tilde{G}/t$, a expressão acima pode ser reescrita como

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{t} + \left(\frac{8\pi\tilde{G}}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi} \left(1 + \frac{\xi kt^6}{a^6} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.24)$$

Essa expressão é análoga à expressão (6.16), mas, nesse caso, considerando-se a possibilidade $\beta = 1/t$, e pode ser numericamente integrada, gerando um conjunto de informações referentes a uma era cosmológica anterior.

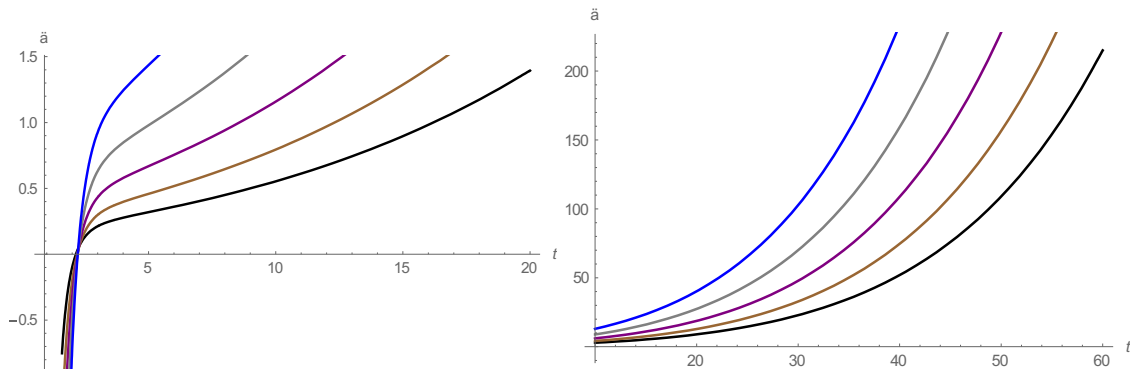
A seguir, é apresentada uma análise gráfica da equação de Friedmann para a densidade de energia dada por (6.22) nas unidades atômicas, e através da conversão entre sistemas de unidades, nas unidades gravitacionais. Nessa análise, a aceleração \ddot{a} é plotada em função do tempo, para ambos os sistemas de unidades, e são variados os valores da constante k , e do parâmetro ξ . Os gráficos para ambos os sistemas de unidades possuem intervalos de tempos distintos, uma vez que cada um se refere a diferentes eras, com seus respectivos ajustes de medida de tempo. As curvas nos gráficos das figuras 14 a 17 tem suas respectivas cores distribuídas de acordo com o valor da constante de k conforme se segue: $k = 400$ (preto), $k = 4000$ (marrom), $k = 40000$ (roxo), $k = 400000$ (cinza) e $k = 4000000$ (azul).

Figura 15: Aceleração em função do tempo nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/t$, para o gás de Van der Waals Generalizado, com $\psi = 1$, $\xi = 0,5$.



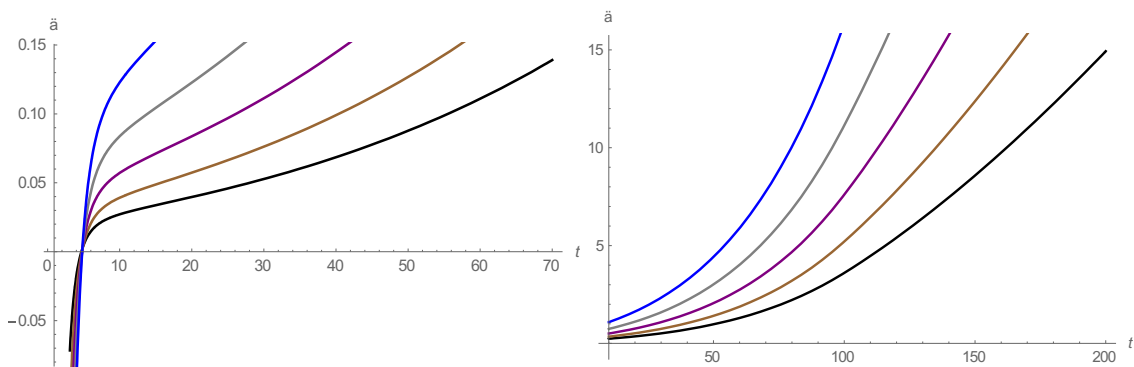
Fonte: O Autor (2021).

Figura 16: Aceleração em função do tempo nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/t$, para o gás de Van der Waals Generalizado, com $\psi = 1$, $\xi = 1$.



Fonte: O Autor (2021).

Figura 17: Aceleração em função do tempo nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/t$, para o gás de Van der Waals Generalizado, com $\psi = 1$, $\xi = 2$.



Fonte: O Autor (2021).

Analogamente aos demais casos, observa-se que o no sistema atômico, esse modelo cosmológico apresenta comportamento de-Sitter, novamente, típico de épocas primitivas do universo, distintamente do sistema gravitacional, no qual o comportamento desacelerado-acelerado é constatado. Ambos casos estão de acordo com as observações cosmológicas (CHENG, 2005), (RIBAS, DEVECCHI, KREMER, 2019) (HARADHAN, 2017).

6.2.2 Para $\psi = 2$

Analogamente, pode-se verificar o caso $\beta = 1/t$ para o caso particular $\psi = 2$, sendo essa possibilidade, uma consequência da equação de conservação de massa. Dessa forma, satisfazendo a hipótese dos grandes números de Dirac com $G(\beta) = \tilde{G}\beta$.

Sabendo-se que a densidade de energia nas unidades gravitacionais, ou seja, quando $\beta = 1$, para o caso particular $\psi = 2$, conforme a equação (6.18), é dada pela equação

$$\tilde{\rho} = \frac{2}{\xi} + \frac{2^{\frac{1}{3}}}{\left(-2\xi^3 + \frac{k\xi^4}{(\tilde{a})^9} + \sqrt{\frac{k^2\xi^8}{(\tilde{a})^{18}} - \frac{4\xi^7k}{(\tilde{a})^9}}\right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left(-2\xi^3 + \frac{k\xi^4}{(\tilde{a})^9} + \sqrt{\frac{k^2\xi^8}{(\tilde{a})^{18}} - \frac{4\xi^7k}{(\tilde{a})^9}}\right)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}\xi^2} \quad (6.25)$$

E novamente considerando as transformações entre sistemas de unidades dadas por $\rho t = \tilde{\rho}$, e o fator de escala por $t\tilde{a} = a$, observa-se que substituindo-se essas duas relações na expressão para a densidade (6.25), obtém-se, diretamente, a expressão da densidade de energia nas unidades atômicas para o caso $\beta = 1/t$:

$$\rho = \frac{1}{t} \left(\frac{2}{\xi} + \frac{2^{\frac{1}{3}}}{\left(-2\xi^3 + \frac{k\xi^4}{(a\beta)^9} + \sqrt{\frac{k^2\xi^8}{(a\beta)^{18}} - \frac{4\xi^7k}{(a\beta)^9}}\right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left(-2\xi^3 + \frac{k\xi^4}{(a\beta)^9} + \sqrt{\frac{k^2\xi^8}{(a\beta)^{18}} - \frac{4\xi^7k}{(a\beta)^9}}\right)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}\xi^2} \right) \quad (6.26)$$

A expressão acima é análoga a expressão (6.18), com $\beta = 1/\sqrt{t}$, mas, nesse caso, considerando a possibilidade $\beta = 1/t$.

Semelhante ao caso do gás de Chaplygin, sabendo que $\tilde{a} = a/t$, e tendo-se em conta a densidade de energia (6.26) tem-se que, para unidades atômicas, a equação de Friedmann é dada por

$$\left(\frac{\dot{a}t - a}{\frac{t^2}{a} \frac{1}{t}}\right) = \left(\frac{8\pi G}{3} \frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\xi} + \frac{2^{\frac{1}{3}}}{\left(-2\xi^3 + \frac{k\xi^4}{(a\beta)^9} + \sqrt{\frac{k^2\xi^8}{(a\beta)^{18}} - \frac{4\xi^7 k}{(a\beta)^9}}\right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left(-2\xi^3 + \frac{k\xi^4}{(a\beta)^9} + \sqrt{\frac{k^2\xi^8}{(a\beta)^{18}} - \frac{4\xi^7 k}{(a\beta)^9}}\right)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}\xi^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.27)$$

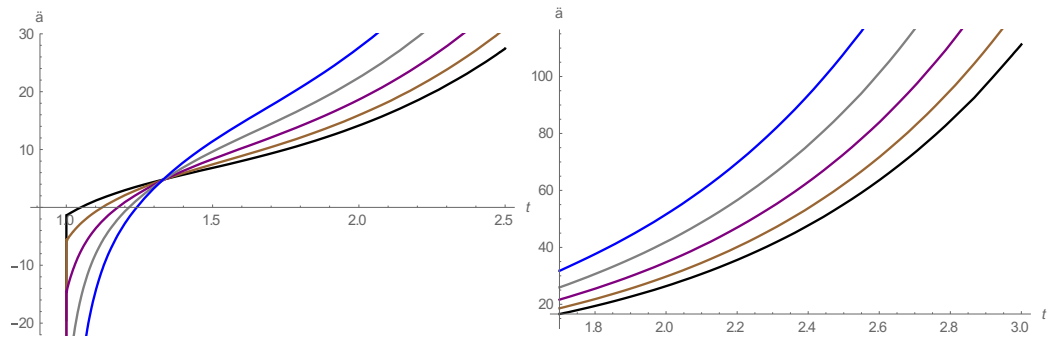
Sabendo-se que $\beta = 1/t$, e que $G = \tilde{G}/t$, a expressão acima pode ser reescrita como

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{t} + \left(\frac{8\pi\tilde{G}}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\xi} + \frac{2^{\frac{1}{3}}}{\left(-2\xi^3 + \frac{t^9 k \xi^4}{(a)^9} + \sqrt{\frac{t^{18} k^2 \xi^8}{(a)^{18}} - \frac{t^9 4 \xi^7 k}{(a)^9}}\right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left(-2\xi^3 + \frac{t^9 k \xi^4}{(a)^9} + \sqrt{\frac{t^{18} k^2 \xi^8}{(a)^{18}} - \frac{t^9 4 \xi^7 k}{(a)^9}}\right)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}\xi^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.28)$$

Essa expressão é análoga à expressão (6.20), mas, nesse caso, considerando-se a possibilidade $\beta = 1/t$, e pode ser numericamente integrada, gerando um conjunto de informações referentes a uma era cosmológica anterior.

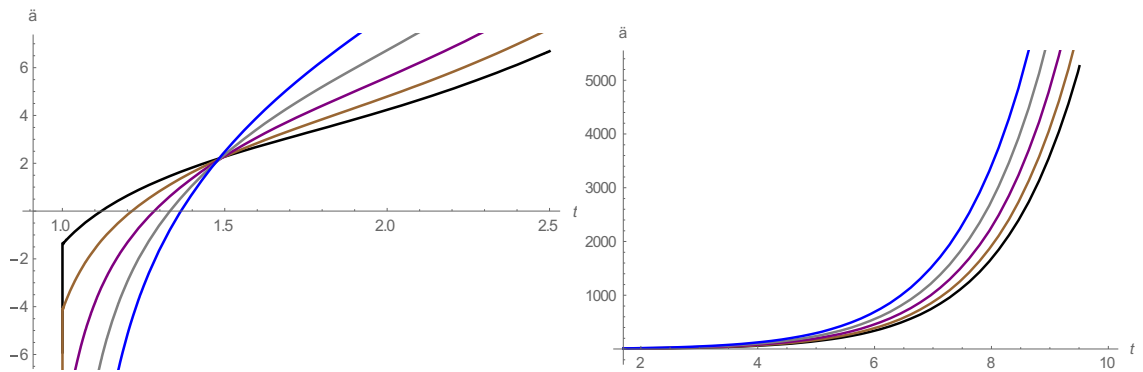
A seguir, é apresentada uma análise gráfica da equação de Friedmann para a densidade de energia dada por (6.26) para ambos os sistemas de unidades. Nessa análise, a aceleração \ddot{a} é plotada em função do tempo e são variados os valores da constante k , e do parâmetro ξ . As curvas nos gráficos das figuras 18 a 20 tem suas respectivas cores distribuídas de acordo com o valor da constante de k conforme se segue: $k = 400$ (preto), $k = 4000$ (marrom), $k = 40000$ (roxo), $k = 400000$ (cinza) e $k = 4000000$ (azul).

Figura 18: Aceleração em função do tempo nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/t$, para o gás de Van der Waals Generalizado, com $\psi = 2$, $\xi = 0,5$.



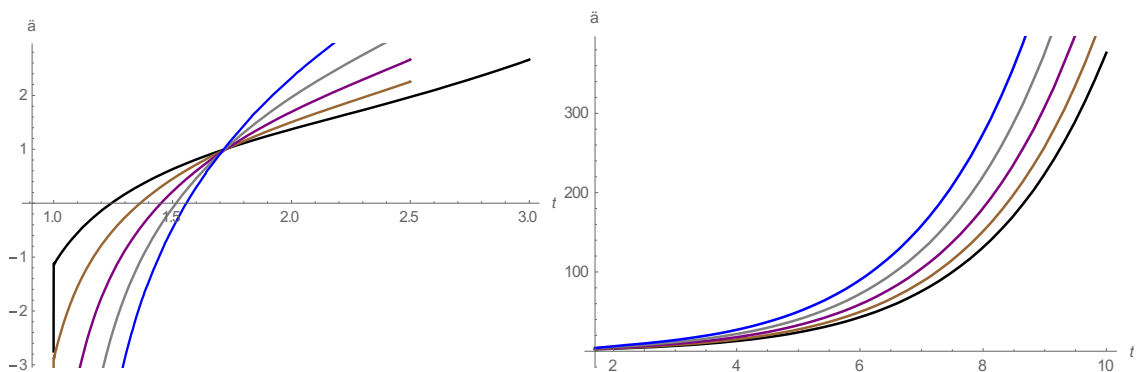
Fonte: O Autor (2021).

Figura 19: Aceleração em função do tempo nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/t$, para o gás de Van der Waals Generalizado, com $\psi = 2$, $\xi = 1$.



Fonte: O Autor (2021).

Figura 20: Aceleração em função do tempo nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/t$, para o gás de Van der Waals Generalizado, com $\psi = 2$, $\xi = 2$.



Fonte: O Autor (2021).

Analogamente aos demais casos, observa-se que o no sistema atômico, esse modelo cosmológico apresenta comportamento de-Sitter, novamente, típico de épocas primitivas do universo, distintamente do sistema gravitacional, no qual o comportamento desacelerado-acelerado é constatado. Ambos casos estão de acordo com as observações cosmológicas (CHENG, 2005), (RIBAS, DEVECCHI, KREMER, 2019) (HARADHAN, 2017).

6.3 Equação de Estado de Van der Waals Completa Como Constituinte Cosmológico

Pode-se, ainda, considerar um universo preenchido por um fluido que obedece a equação de estado de Van der Waals completa, em unidades gravitacionais dada por

$$\tilde{p} = \frac{8\omega\tilde{\rho}}{3 - \tilde{\rho}} - 3\tilde{\rho}^2 \quad (6.29)$$

Considere-se agora, a equação da continuidade em unidades gravitacionais, ou seja, o caso particular em que $\tilde{G} = G(\beta = 1)$, de acordo com a expressão (3.78), dada por

$$\dot{\tilde{\rho}} + 3\frac{\dot{\tilde{a}}}{\tilde{a}}(\tilde{\rho} + \tilde{p}) = 0 \quad (6.30)$$

Substituindo-se a equação de estado de Van de Waals completa na expressão cima, tem-se

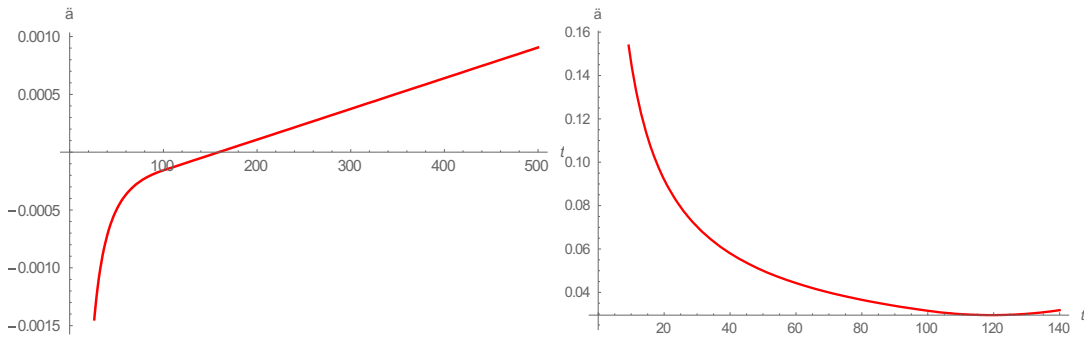
$$\dot{\tilde{\rho}} + 3\frac{\dot{\tilde{a}}}{\tilde{a}}\left(\tilde{\rho} + \frac{8\omega\tilde{\rho}}{3 - \tilde{\rho}} - 3\tilde{\rho}^2\right) = 0 \quad (6.31)$$

Para a obtenção de soluções cosmológicas pode-se ainda considerar a equação de Friedmann em unidades gravitacionais, novamente, um caso particular da equação de Friedmann modificada em que $\tilde{G} = G(\beta = 1)$, dada, conforme a expressão (3.71), por

$$\left(\frac{\dot{\tilde{a}}}{\tilde{a}}\right)^2 = \frac{8\pi\tilde{G}}{3}\tilde{\rho} \quad (6.32)$$

As expressões (6.31) e (6.32) podem ser resolvidas numericamente em sistema, e a solução pode ser observada nos gráficos a seguir, onde a aceleração é plotada em função do tempo nas unidades gravitacionais, e considerando a possibilidade $\beta = 1/t$, em unidades atômicas.

Figura 21: Aceleração em função do tempo nas unidades gravitacionais (esquerda) e atômicas (direita), caso $\beta = 1/t$, para o gás de Van der Waals Completo



Fonte: O Autor (2021).

Como pode ser observado, o comportamento aceleração durante a evolução do universo é distinta se comparado as análises anteriores para o fluido de Chaplygin e Van der Waals sem considerar o termo quadrático da densidade, sendo no presente caso, observada que a fase acelerada da expansão do universo assintoticamente aproxima-se de um fim.

6.4 O Fluido Barotrópico

Pode-se, ainda, considerar como constituinte cosmológico um fluido descrito pela equação barotrópica, um caso particular da equação de estado de Van der Waals, onde $\xi = 0$ de acordo com a expressão (6.1), a expressão mais simples da hidrodinâmica que pode ser estruturada visando descrever um constituinte para o universo, dada em unidades gravitacionais por

$$\tilde{p} = \psi \tilde{\rho} \quad (6.33)$$

Sendo ψ agora chamado de coeficiente barotrópico.

De acordo com as relações (5.2) e (5.3), em unidades atômicas, a expressão barotrópica fica $p = \psi\rho$, mostrando que a forma matemática das relações não é alterada com as transformações de escala. Inserindo a expressão $p = \psi\rho$ na equação da continuidade modificada (4.24), obtém-se

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho - \psi\rho) = -\rho\left(\frac{\dot{G}}{G} + \frac{\dot{\beta}}{\beta}\right) - 3\psi\rho\frac{\dot{\beta}}{\beta} \quad (6.34)$$

Integrando-se essa expressão, e considerando que $Gt = \tilde{G}$, obtém-se a densidade em unidades atômicas em função do fator de escala, dada por

$$\rho = \frac{Ct}{\beta^{1+3\psi} a^{1+\psi}} \quad (6.35)$$

Inserindo a expressão (6.35) na equação de Friedmann modificada (4.25), e considerando a hipótese dos grandes números de Dirac, de modo que $\beta = 1/t$, obtém-se (RIBAS, DEVECCHI, KREMER, 2019).

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{t} + \left(\frac{8\pi C \tilde{G}}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{t}{a} \right)^{\frac{3(1+\psi)}{2}} \quad (6.36)$$

Essa expressão pode ser integrada, resultando na forma explícita do fator de escala

$$a(t) = \frac{t}{2^{\frac{2}{3(1+\psi)}}} \left(3 \left(\frac{8\pi C \tilde{G}}{3} \right)^{\frac{1}{2}} (1 + \psi)t + \kappa \right)^{\frac{2}{3(1+\psi)}} \quad (6.37)$$

Onde κ é outra constante de integração.

Iniciando a análise com as equações nas unidades gravitacionais, a interpretação dos resultados leva a um universo preenchido com matéria e radiação, com comportamento desacelerado. Após a transformação de escala, observa-se um regime acelerado que assintoticamente se aproxima da aceleração nula, descrito pela gravitação modificada.

6 Conclusões

Proposto por (CANUTO, et. al. 1977), o formalismo covariante de escala abordado no capítulo 4 se baseia na possibilidade de que os sistemas de unidades empregados na descrição do universo em diferentes eras estejam relacionados por uma transformação temporal. A possibilidade de aplicação desse modelo no mapeamento de duas eras cosmológicas foi primeiramente apresentada em no artigo “*Mapping Between Different Cosmological Eras in Scale-Covariant Formalism*” (RIBAS, DEVECCHI, KREMER, 2019), no qual o gás de Chaplygin tradicional e o fluido barotrópico são considerados como constituintes cosmológicos. Dando prosseguimento a essa possibilidade, o presente trabalho aplicou o formalismo estudado para fazer o mapeamento de duas eras cosmológicas distintas, ou seja, épocas diferentes do universo, mais precisamente, uma era mais próxima dos momentos iniciais após o *big bang*, e outra próxima da era atual.

No estudo feito, foram consideradas diferentes possibilidades para o constituinte cosmológico, a saber, o fluido de Chaplygin generalizado, o fluido de Van der Waals generalizado e completo, e o fluido barotrópico. Aplicado o formalismo de Canuto et al., gerou-se um conjunto de expressões da relatividade geral modificadas pelos termos de transformação de sistemas de unidades, e a partir dessas expressões, fez-se uma análise gráfica (visto que parte delas não são passíveis de serem integradas analiticamente), possibilitando avaliar o comportamento da aceleração da expansão do universo em duas eras distintas, uma representando a era atual, e outra, uma era primitiva com gravidade modificada.

Na análise feita no capítulo 5 o fluido de Chaplygin generalizado é considerado como constituinte cosmológico. Conforme citado no capítulo 4 na descrição do formalismo, a função escalar β que representa a transformação conforme, não é definida a priori, e precisa de argumentos físicos para ser definida. Nesse trabalho, a hipótese dos grandes números de Dirac é utilizada para fixação de β . Dessa hipótese, implica a possibilidade da dependência temporal da constante gravitacional, a saber, inversamente proporcional a idade do universo, $G \propto 1/t$. Com esse argumento, duas possibilidades para a função β foram fixadas, a saber, $1/t$ e $1/\sqrt{t}$, e utilizadas na determinação da expressão da densidade de energia, através da equação da continuidade, para em seguida, serem inseridas na expressão da equação de Friedmann modificada, visando a observação do comportamento do fator de escala para cada caso.

7.1 Considerações sobre o universo preenchido por um fluido de Chaplygin Generalizado

Utilizando a possibilidade $\beta = 1/\sqrt{t}$, a representação gráfica da aceleração \ddot{a} em função do tempo, quando analisada em unidades atômicas, ou seja, para uma época anterior do universo regida por uma gravidade modificada, demonstra um comportamento de Sitter, um comportamento típico de eras primitivas do universo, conforme observado no lado direito dos gráficos nas figuras 1 a 3. Esse comportamento de Sitter é distinto do observado para as unidades gravitacionais, visto no lado esquerdo nas figuras 1 a 3, onde um comportamento desacelerado-acelerado é constatado, descrevendo um universo preenchido por matéria comum, que gradualmente evolui para um universo preenchido por matéria e energia escura, conforme atualmente.

Fazendo a mesma análise considerando a possibilidade $\beta = 1/t$, um comportamento semelhante ao visto quando $\beta = 1/\sqrt{t}$ no que se refere ao comportamento de Sitter da aceleração descrita em unidades atômicas, e o comportamento desacelerado-acelerado em unidades gravitacionais, conforme figuras 4 a 6. A diferença observada entre os resultados para as duas diferentes possibilidades de β encontra-se na escala de tempo, já que em unidades gravitacionais a transição entre a fase desacelerada e a acelerada acontece mais cedo quando $\beta = 1/\sqrt{t}$ do que quando $\beta = 1/t$. O mesmo é observado em unidade atômicas, onde a aceleração demonstra uma mudança brusca mais cedo quando $\beta = 1/\sqrt{t}$ do que quando $\beta = 1/t$. O que deve ser destacado, é que para ambos os casos de β os resultados obtidos pelo modelo cosmológico abordado estão de acordo com as constatações e observações astronômicas e cosmológicas atuais (CHENG, 2005), (RIBAS, DEVECCHI, KREMER, 2019) (HARADHAN, 2017).

Nas figuras 7 e 8 é analisada a aceleração \ddot{a} para cada valor de α no gás de Chaplygin generalizado, a saber $\alpha = 0.5$, $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$, onde pode ser claramente observado que conforme o valor do expoente α aumenta, mais rapidamente acontece a transição da fase desacelerada para a acelerada, para ambas as possibilidades de β .

7.2 Considerações sobre o universo preenchido por um fluido de Van der Waals Generalizado

Primeiramente foi considerado um universo preenchido por um fluido de Van der Waals com os coeficientes generalizados, e desconsiderando o termo quadrático da densidade de energia. Novamente, a hipótese dos grandes números de Dirac foi usada para fixar a função β ,

de modo que o primeiro caso estudado foi $\beta = 1/\sqrt{t}$. Conforme se observa na equação (6.1), existem os coeficientes ψ e ξ que podem ser fixados, o que gera várias possibilidades de ajuste. O mesmo método empregado na análise com o fluido de Chaplygin generalizado foi feita, onde os termos de conversão de unidades foram inseridos na expressão do fluido, e com o objetivo de se determinar a expressão para a densidade de energia, e então, com a equação de Friedmann, ser possível avaliar o comportamento da aceleração no tempo.

A primeira possibilidade de ajuste foi $\psi = 1$ e $\xi = 0,5$, em seguida $\psi = 1$ e $\xi = 1$ e então, $\psi = 1$ e $\xi = 2$. Observa-se, conforme as figuras 9 a 11, que conforme o coeficiente ξ aumenta, a transição entre a fase desacelerada-acelerada acontece mais cedo. A segunda possibilidade de ajuste foi alterar ψ , de modo que as combinações foram $\psi = 2$ e $\xi = 0,5$, em seguida $\psi = 2$ e $\xi = 1$ e então, $\psi = 2$ e $\xi = 2$. Como pode ser visto nas figuras 12, 13 e 14, com o aumento do coeficiente ψ , novamente, a transição entre as fases desacelerada e acelerada acontece mais cedo, mas de forma mais suave do que com a variação de ξ .

Fazendo-se as conversões de unidades, ou seja, $\rho t = \tilde{\rho}$, e $t\tilde{a} = a$, a análise foi refeita considerando a possibilidade $\beta = 1/t$. Novamente, a variação positiva dos coeficientes ψ e ξ influencia na antecipação da transição da fase desacelerada para a acelerada, da mesma forma que a alteração de $\beta = 1/\sqrt{t}$ para $\beta = 1/t$. Em todos esses casos do fluido de Van der Waals generalizado, observa-se um comportamento de Sitter para a aceleração em unidades atômicas, o que é esperado para uma era antiga do universo.

Foi ainda feita uma última análise considerando-se o termo quadrático no fluido de Van der Waals generalizado, considerando a possibilidade $\beta = 1/t$, onde pode-se observar um comportamento claramente distinto do constatado para os casos anteriores, onde dessa vez, apesar de em unidades gravitacionais o comportamento ser semelhante, em unidades atômicas é observada uma aceleração decrescente, se anulando em algum momento, isso pode ser motivado pela auto interação do fluido de Van der Waals.

7.3 Considerações Finais

O modelo cosmológico estudado nesse trabalho, proposto por Canuto et al., no qual é apresentada a possibilidade de que os sistemas de unidades utilizados na descrição de eras diferentes do universo podem estar relacionados por uma transformação covariante de escala, foi abordado por Ribas, Devecchi e Kremer como possibilidade para o mapeamento de duas eras

cosmológicas, e o presente trabalho desenvolveu essa ideia para mais algumas possibilidades de constituintes cosmológicos. Os resultados obtidos estão de acordo com as constatações cosmológicas modernas – uma transição entre uma fase desacelerada para uma acelerada em unidades gravitacionais, e um comportamento de Sitter em unidades atômicas, típico de eras primitivas do universo. Trabalhos futuros podem aplicar esse formalismo cosmológico a outras métricas, e outros possíveis constituintes cosmológicos. Um artigo compreendendo o formalismo abordado nesta dissertação está em desenvolvimento, no qual está sendo discutido o uso do fluido de Van der Waals como constituinte cosmológico.

REFERÊNCIAS

- ABREU, Thiago Moralles de. **Modelos Cosmológicos com Gás Relativístico Reduzido e com Constantes Gravitacional e Cosmológica Variáveis**. Dissertação de Mestrado. Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora, 2016.
- AMORIN, Luciana Cristine Silva. **Modelos Cosmológicos Inflacionários com Correções Semi-Clássicas**. Dissertação de Mestrado. Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2010.
- BEZERRA, Eunice Valtânia de Jesus. **Um Estudo Sobre Modelos Cosmológicos com Campos Escalares Não-Canônicos**. Dissertação de Mestrado. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE. São José dos Campos, 2015.
- BINDER, Juliano Brun. **Modelos Cosmológicos com Campo Escalar Não-Minimamente Acoplado e Interações no Setor Escuro**. Dissertação de Mestrado. Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2006.
- CANUTO V., ADAMS, P. J., HSIEH, S.-H., TSIANG E. **Scale-covariant theory of gravitation and astrophysical applications**. Physical Review D16 (1977) 1643.
- CANUTO V., ADAMS, P. J., HSIEH, S.-H., TSIANG E. **Scale-covariant theory of gravitation and astrophysical applications**. Physical Review Letters 39, (1977) 1643.
- CHENG, Ta-Pei. **Relativity, Gravitation and Cosmology – A Basic Introduction**. Oxford University, 2005.
- CHRISTMANN, Marcus Henrique Birkholz. **Perturbações Cosmológicas de um Fluido de van der Waals**. Dissertação de Mestrado. Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2015.
- CUZINATTO, Rodrigo Rocha. **Modelos de Universo e Equações de Estado em Cosmologia**. Dissertação de Mestrado. Instituto de Física Teórica da Universidade Estadual Paulista. São Paulo, 2002.
- FROEHLICH, Margaret L. **Modelos Cosmológicos não Lineares em 2d e 3d**. Dissertação de Mestrado. Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2005.
- GORINI, V., KAMENSHCHIK, A., MOSCHELLA, U., PASQUIER, V. **The Chaplygin Gas as a Model for Dark Energy**. American Institute of Physics. 2004.
- GRAMS, Guilherme. **Modelos Cosmológicos com Campos Fermiônicos**. Dissertação de Mestrado. Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2013.
- HARADHAN, Mohajan. **A Brief Analysis of de Sitter Universe in Relativistic Cosmology**. Journal of Scientific Achievements, vol. 2, Issue 11, 2017.
- JANTSCH, Rudinei C. S., CHRISTMANN, Marcus H. B., KREMER, Gilberto M. **The van der Waals fluid and its Role in Cosmology**. International Journal of Modern Physics. D Vol. 25, No. 2, 1650031. 2016.

JANTSCH, Rudinei Celso de Souza. **Modelos Cosmológicos para o Universo Atual e Primordial**. Tese de Doutorado. Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2012.

JANTSCH, Rudinei Celso de Souza. **Modelos Cosmologicos pela Simetria de Noether**. Dissertação de Mestrado. Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2009.

PEREIRA, Stella Fernandes. **Modelos Cosmológicos Escalares-Tensoriais**. Dissertação de Mestrado. Instituto de Física da Universidade de Brasília. Brasília, 2006.

RAÍLA, André. **Análise da Instabilidade de Jeans Em Sistemas Auto-Gravitantes E um Modelo de Estrutura Estelar no Contexto da Teoria de Gravidade F(R)**. Tese de Doutorado. Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2017

RAY, Saibal, MUKHOPADHYAY, Utpal, GHOSH, Partha Pratim. **Large Number Hypothesis: A Review**. General Relativity and Gravitation. 2007.

RIBAS, Marlos de Oliveira. **Modelos Cosmológicos Acelerados com Campos Fermiônicos**. Tese de Doutorado. Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2008.

RIBAS, Marlos de Oliveira; DEVECCHI, Fernando Pablo; KREMER, Gilberto. **Mapping between different cosmological eras in scale-covariant formalism**. International Journal of Modern Physics. 2019.

SCHIEFER, Elberth Manfron. **Instabilidade de Jeans para Sistemas Esféricos em um Universo em Expansão a Partir das Equações de Boltzmann e de Poisson**. Dissertação de Mestrado. Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2019.

SEN, A. A., SCHERRER, Robert J. **Generalizing the generalized Chaplygin gas**. Phys. Rev. D 72, 063511. 2005.

SILVA, Marcus Calmon Navarro Teixeira da. **Modelos Cosmológicos Viscosos Segundo a Termodinâmica dos Processos Irreversíveis**. Dissertação de Mestrado. Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2004.

SOBREIRO, Octávio Augusto Schweickerski. **Modelos Cosmológicos com Interações no Setor Escuro**. Dissertação de Mestrado. Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2011.

TESTON, Felipe. **Instabilidade Gravitacional para um Universo Estático e em Expansão Sob Influência de Termos Dissipativos**. Dissertação de Mestrado. Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2017.

TONIATO, Júnior Diniz. **A Teoria Geométrica-Escalar da Gravitação e sua Aplicação à Cosmologia**. Tese de Doutorado. Instituto de Cosmologia Relatividade e Astrofísica do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Rio de Janeiro, 2014.

VIEIRA, Lucas Elias. **Campos Escalares Aplicados em Cosmologia**. Dissertação de Mestrado. Instituto de Física da Universidade Federal de Goiás. Goiânia, 2018.

WEINBERG, Steven. **Gravitation and Cosmology: Principles and Application of the General Theory of Relativity**. Massachusetts Institute of Technology, 1972.

ZANETTI, Carina Maria. **Regimes acelerados em modelos cosmológicos 2d e 3d**. Dissertação de Mestrado. Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2004.

ZSCHOCHÉ, J. **The Chaplygin Gas Equation of State for the Quantized Free Scalar Field on Cosmological Spacetimes**. *Ann. Henri Poincaré* 15, 1285–1325 (2014).