

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ANA CLÁUDIA DE OLIVEIRA

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DE SUPERPOSIÇÃO MODAL PARA  
ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO  
2015

ANA CLÁUDIA DE OLIVEIRA

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DE SUPERPOSIÇÃO MODAL PARA  
ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do Curso Superior de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR como requisito parcial para a obtenção do título de bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Edson Hideki Koroish

CORNÉLIO PROCÓPIO  
2015



**Universidade Tecnológica Federal do Paraná**  
**Campus Cornélio Procópio**  
**Departamento Acadêmico de Mecânica**  
**Curso de Engenharia Mecânica**



## **FOLHA DE APROVAÇÃO**

**Ana Cláudia de Oliveira**

### **Aplicação do método de superposição modal para análise dinâmica de estruturas**

Trabalho de conclusão de curso apresentado às 16:20hs do dia 10/06/2015 como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro Mecânico no programa de Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. O candidato foi arguido pela Banca Avaliadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Avaliadora considerou o trabalho aprovado.

---

Prof(a). Dr(a). Edson Hideki Koroishi - Presidente (Orientador)

---

Prof(a). Dr(a). Adailton Silva Borges - (Membro)

---

Prof(a). Dr(a). Fabian Andres Lara Molina - (Membro)

A folha de aprovação assinada encontra-se na coordenação do curso.

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais pela confiança depositada, pelo carinho, compreensão, incentivo e apoio durante esses longos anos.

À todos os professores pelos ensinamentos.

Ao meu orientador, pelo tempo disponibilizado para as reuniões, por ter esclarecido minhas dúvidas, pela disponibilização de materiais e principalmente pelos conhecimentos repassados.

Aos meus colegas de universidade pelo companheirismo, colaboração e amizade.

## RESUMO

OLIVEIRA, Ana Cláudia. Aplicação do método de superposição modal para análise dinâmica de estruturas. 2015. 48 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2015.

Este trabalho apresenta uma análise do comportamento dinâmico de uma estrutura com quatro graus de liberdade através aplicação do Método de Superposição Modal. Para a determinação dos modos de vibrar e frequências naturais que caracterizam o sistema utiliza-se o problema de autovalor e autovetor. O problema de autovalor e autovetor é resolvido através do método da Iteração Inversa, método da Iteração Subespacial e método QR. Uma análise é realizada comparando os valores obtidos para as frequências naturais e modos de vibrar pelos diferentes métodos e os valores dados pelo comando Eig do software *Matlab*®. Determinados os parâmetros do sistema, o Método da Superposição Modal é aplicado para calcular a massa, rigidez, força e o deslocamento nodal.

**Palavras-chave:** Modos de vibrar, Frequências Naturais, Método da Iteração Inversa, Método da Iteração Subespacial, Superposição Modal.

## ABSTRACT

OLIVEIRA, Ana Cláudia. Application of the mode-superposition method for dynamic analysis of structures. 2015. 48 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica) – Federal Technology University – Paraná. Cornélio Procópio, 2015.

This work presents an analysis of the dynamic behavior of a structure with four degrees of freedom through application of the Mode-Superposition Method. For the determination of modes to vibrate and natural frequencies that characterize the system is uses the problem of eigenvalue and eigenvector. The problem of eigenvalue and eigenvector is solve by the inverse iteration method, iteration subespacial and QR method. An analysis is performed by comparing the values obtained for the natural frequencies and modes of vibration by different methods and the values given by the command eig software Matlab®. Certain system parameters, the Mode-Superposition method is applied to calculate the mass, stiffness, strength and the nodal displacement.

**Keywords:** Vibration shapes, Natural frequencies, Iteration inverse method, Subspace iteration method, Mode-Superposition.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Representação de um sistema com $n$ graus de liberdade. ....	13
Figura 2: Viga: (a) número de nós; (b) número de elementos. ....	29
Figura 3: 1º modo de vibrar. ....	31
Figura 4: 2º modo de vibrar ....	32
Figura 5: 3º modo de vibrar ....	32
Figura 6: 4º modo de vibrar ....	33
Figura 7: 5º modo de vibrar ....	33
Figura 8: 6º modo de vibrar ....	34
Figura 9: 7º modo de vibrar ....	34
Figura 10: 8º modo de vibrar ....	35
Figura 11: 1º modo de vibrar do sistema.....	40
Figura 12: 2º modo de vibrar do sistema.....	40
Figura 13: 3º modo de vibrar do sistema.....	41
Figura 14: 4º modo de vibrar do sistema.....	41

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1:Frequências naturais para a viga (rad/s) .....	30
Tabela 2: Tempo decorrido para a solução do problema .....	31
Tabela 3: Parâmetros físicos do sistema .....	36
Tabela 4: Frequências naturais do sistema (rad/s). .....	37
Tabela 5: Diferença das frequências naturais obtidas comparadas as obtidas com o comando Eig (%) .....	37
Tabela 6: 1º modo de vibrar do sistema .....	38
Tabela 7: 2º modo de vibrar do sistema .....	38
Tabela 8: 3º modo de vibrar do sistema .....	38
Tabela 9: 4º modo de vibrar do sistema .....	39
Tabela 10:Valores de MAC .....	42
Tabela 11: Massa modal .....	43
Tabela 12: Rigidez modal ( $10^4$ ) .....	43
Tabela 13: Constante C da força modal em $F=CP_1$ .....	43
Tabela 14: Constante C em $u(t) = CP_t \cos(\Omega t)$ , para o comando Eig .....	44
Tabela 15: Constante C em $u(t) = CP_t \cos(\Omega t)$ , para Iteração Subespacial .....	44
Tabela 16: Constante C em $u(t) = CP_t \cos(\Omega t)$ , para o Método QR .....	44
Tabela 17: Constante C em $u(t) = CP_t \cos(\Omega t)$ , para Iteração Inversa com deslocamento espectral .....	45



# SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	9
1.1 OBJETIVOS.....	10
1.1.1 Objetivo Geral.....	10
1.1.2 Objetivos específicos .....	10
1.2 JUSTIFICATIVA .....	11
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	12
2.1 MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL.....	12
2.2 AUTOVALORES E AUTOVETORES .....	21
2.3 MÉTODOS ITERATIVOS DE DETERMINAÇÃO DOS MODOS E FREQUÊNCIAS NATURAIS.....	21
2.3.1 Método da Iteração Inversa .....	22
2.3.2 Algoritmo do Método da Iteração Inversa.....	24
2.4 MÉTODO DE ITERAÇÃO SUBESPACIAL.....	24
2.4.1. Algoritmo do Método de Iteração Subespacial .....	26
2.5 MÉTODO QR.....	27
2.5.1 Algoritmo do Método QR .....	28
<b>3 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL E RESULTADOS</b> .....	29
3.1 SIMULAÇÃO DOS MODOS DE VIBRAR DE UMA VIGA.....	29
3.2 SIMULAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS DE VIBRAR DE UM SISTEMA COM 4 GRAUS DE LIBERDADE .....	35
<b>4 CONCLUSÃO</b> .....	46
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	47

# 1 INTRODUÇÃO

O estudo de vibrações mecânicas é de fundamental importância, visto que, a maioria das atividades humanas envolve alguma forma de vibração. A análise de vibrações foi grandemente influenciada pelo advento dos computadores, que permitiu o desenvolvimento de métodos numéricos de análise de sistemas de vários graus de liberdade, possibilitando a criação de modelos matemáticos para representar o comportamento de sistemas de grande porte com boa precisão.

Segundo Rao (2008), a vibração mecânica pode ser definida como o movimento periódico de um corpo ou um sistema de corpos conectados, deslocados de uma posição de equilíbrio. O fenômeno ocorre devido à transformação da energia potencial do sistema em energia cinética e de energia cinética em potencial de forma alternada.

Em engenharia, um dos objetivos do estudo de vibrações é reduzir os níveis vibratórios, visto que, a transmissão de vibração resulta em perda de eficiência e desconforto.

A resposta dinâmica de um sistema representa como o estado desse sistema varia no domínio do tempo ou da frequência, em resposta a uma excitação externa. Geralmente é modelada por equações diferenciais. A resposta de um sistema a uma excitação harmônica é chamada de resposta harmônica. Enquanto a resposta a excitações não periódicas aplicadas de forma repentina é denominada de resposta transitória.

A superposição modal é um método que permite transformar a equação de equilíbrio dinâmico de um sistema complexo com muitos graus de liberdade em um conjunto de  $n$  equações ordinárias. Cada uma das equações equivale ao equilíbrio dinâmico de um sistema com um grau de liberdade, facilitando a solução matemática.

O método de superposição modal apresenta grande aplicabilidade na análise dinâmica de estruturas sendo empregue para calcular as respostas dinâmicas no domínio do tempo. A composição da resposta a partir de uma parcela reduzida de modos de vibrar reduz o custo computacional da análise. O método não é válido para análise de estruturas não-lineares.

Diversos métodos analíticos e numéricos foram desenvolvidos para calcular as frequências naturais (autovalores) e os modos naturais (autovetores) de um sistema com vários graus de liberdade. Dentre eles estão o método de iteração inversa, o método da iteração subespacial e o método QR.

De acordo com Craig (2006), o método da iteração inversa é o procedimento mais eficaz quando se deseja encontrar os autovalores e autovetores de um sistema pequeno. O método é muito utilizado para solucionar problemas de flambagem de estruturas e vibração de eixos de rotação.

Em diversas aplicações de engenharia, o sistema se torna muito complexo, apresentando inúmeros graus de liberdade, porém, não é necessário que se encontre todos os autovetores e auto valores, e sim apenas algum modo que exerça maior influência no sistema. Para este caso o método da Iteração Subespacial é mais indicado, pois define o subespaço em que autovetores aproximados para o problema de valores próprios originais são procurados.

O método QR determina todos os autovalores de uma matriz, sem determinar o polinômio característico. Maciel (2008), utilizou o método para encontrar os principais poços em uma rede de monitoramento de aquíferos. O custo computacional deste método é relativamente elevado, no entanto, é mais estável numericamente.

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1.1 Objetivo Geral

O presente trabalho de conclusão de curso tem como objetivo estudar o comportamento dinâmico de estruturas através da aplicação do Método de Superposição Modal.

### 1.1.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Estudar os conceitos relacionados à teoria de vibrações mecânicas e análise modal;
- Implementar algoritmos de métodos numéricos para determinação das frequências naturais e modos de vibrar de uma estrutura;
- Aplicar o método de superposição modal na caracterização da resposta dinâmica de um determinado sistema;

## 1.2 JUSTIFICATIVA

A caracterização de um sistema mecânico é realizada através da obtenção de seus modos de vibrar e frequências naturais. O método da superposição modal fornece as características dos modos de vibrar e a contribuição de cada um para o sistema em estudo. Neste trabalho pretende-se estudar o comportamento dinâmico de uma estrutura com quatro graus de liberdade através da superposição modal.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Diversas técnicas de análise modal, tanto teórica como experimental têm sido desenvolvidas e aplicadas ao estudo do comportamento de estruturas mecânicas, com o intuito de determinar suas propriedades dinâmicas através dos parâmetros modais. A identificação destes parâmetros fornece informações que podem ser utilizadas para projetos, correção e validação de modelos analíticos, detecção de falhas, modificações estruturais e monitoramento da vida útil da estrutura.

Argenta (2007) utiliza o método de superposição modal para resolver as equações de movimento de uma torre de transmissão de energia, com estrutura metálica, reticular e de base quadrada submetida a cargas dinâmicas causadas pela componente turbulenta do vento e pela ruptura de um ou mais cabos.

Mamede (2008) aplica o método ao realizar um estudo qualitativo e quantitativo dos erros cometidos ao se utilizar um modelo aproximado de amortecimento proporcional para amortecimento não-proporcional analisando o comportamento de sistemas dinâmicos com amortecimento não-proporcional.

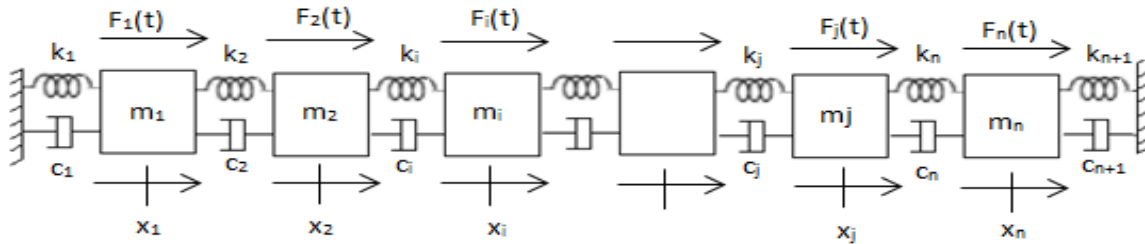
Wan et al. (2013) faz uma abordagem para a reconstrução da resposta estrutural com base no método da superposição modal na presença de modos espaçados, onde o conjunto de modos de uma estrutura é dividido em modos espaçados, e os modos cujas respostas são conhecidas são utilizados para encontrar as demais respostas.

### 2.1 MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL

O número de graus de liberdade de um sistema é definido como o número de coordenadas que podem variar independentemente em um deslocamento do sistema.

A análise de um sistema com vários graus de liberdade exige a solução de um conjunto de equações diferenciais ordinárias. As equações de movimento para cada grau de liberdade podem ser deduzidas através da segunda lei de Newton. Em

um sistema de  $n$  graus de liberdade, há  $n$  frequências naturais, cada uma associada à sua forma modal. Quanto maior o grau de liberdade de um sistema mais complexa se torna a solução da equação característica. A propriedade de ortogonalidade apresentada pelas formas modais simplifica a análise de sistemas com diversos graus de liberdade.



**Figura 1: Representação de um sistema com  $n$  graus de liberdade.**

Fonte: Craig (2006)

As equações para o método de superposição modal demonstradas neste trabalho são descritas por Craig (2006).

A aplicação da segunda lei de Newton ao sistema representado pela figura (1) resulta nas equações de movimento que podem ser expressas na forma matricial como:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = p(t) \quad (1)$$

Onde  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, e os vetores  $u$ ,  $\dot{u}$ ,  $\ddot{u}$  e  $P$  são os vetores deslocamento, velocidade, aceleração e força, respectivamente.

O método da superposição modal fornece a resposta de cada modo de vibrar isoladamente apresentando como resposta total a soma das contribuições de cada um dos modos.

Os modos normais estão associados às frequências naturais de um sistema mecânico, sendo definidos como movimentos particulares, livres e periódicos que ocorrem sob determinadas condições iniciais. A análise modal proporciona o desacoplamento das equações de movimento de um sistema, facilitando sua solução.

O modelo de  $n$  graus de liberdade com resposta livre obedece a equação de movimento, onde  $\{u\}$  é o deslocamento e  $\{p(t)\}$  é a força de excitação. Para o caso da vibração livre não amortecida  $\{p(t)\} = 0$  e  $[C] = [0]$ , logo

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\} \quad (2)$$

A solução desta equação para as condições iniciais não-nulas é do tipo

$$\{u(t)\} = \{\phi\}e^{st} \quad (3)$$

onde  $\{\phi\}$  é um vetor de ordem  $n$ , e  $s$  é um número complexo. Substituindo na equação (1) resulta:

$$[[K] + s^2[M]]\{\phi\}e^{st} = \{0\} \quad (4)$$

Como  $e^{st} \neq 0$  podemos escrever

$$[[K] - \lambda[M]]\{\phi\} = \{0\} \quad (5)$$

onde  $\lambda = -s^2$ .

Reescrevendo a equação (6) na forma de matriz dinâmica temos:

$$[M]^{-1}[K]\{\phi\} = \lambda\{\phi\} \quad (6)$$

As variáveis  $\lambda$  e  $\phi$  são os autovalores e autovetores do problema e estão relacionados com as frequências naturais e os modos normais de vibração. Sua solução consiste na solução de um autoproblema generalizado.

A solução não trivial da equação (6) é obtida fazendo o determinante da matriz dos coeficientes igual a zero.

Escrevendo na forma polinomial obtemos a equação característica do sistema.

$$\sum_{p=1}^n a_p \lambda^p = 0 \quad (7)$$

Os coeficientes desta equação dependem das características de massa e rigidez do sistema. O p-ésimo autovalor do sistema está relacionado com sua frequência natural através da seguinte equação:

$$\omega_{np} = \pm i \sqrt{\lambda_p}, \quad i = \sqrt{-1} \quad (8)$$

As relações de ortogonalidade são relações importantes entre os modos de um mesmo sistema. Para modos r e s distintos tem-se:

$$[K - \omega_r^2 M] \phi_r = 0 \quad (9)$$

$$[K - \omega_s^2 M] \phi_s = 0 \quad (10)$$

Multiplicando a equação (9) por  $\phi_s^T$  e multiplicando a transposta da equação (10) por  $\phi_r$  obtemos:

$$\phi_s^T [K - \omega_r^2 M] \phi_r = 0 \quad (11)$$

$$\phi_s^T [K - \omega_s^2 M] \phi_r = 0 \quad (12)$$

A combinação das equações (11) e (12) fornece

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \phi_s^T [M] \phi_r = 0 \quad (13)$$

Se  $\omega_r \neq \omega_s$  a equação (13) será satisfeita se e somente se:

$$\phi_s^T [M] \phi_r = 0 \quad (14)$$

$$\phi_s^T [K] \phi_r = 0 \quad (15)$$



Com  $r \neq s$ . As relações acima representam as relações de ortogonalidade entre os modos normais de vibração em relação as matrizes de massa e rigidez. Considerando o caso em que  $\omega_r \neq \omega_s$  e  $r = s$ :

$$\phi_r^T [M] \phi_r = M_r \quad (16)$$

$$\phi_r^T [K] \phi_r = K_r \quad (17)$$

Onde  $M_r$  e  $K_r$  são os valores da massa modal e rigidez modal respectivamente. A seguinte relação é válida para um sistema não amortecido com  $n$  graus de liberdade:

$$\omega_r^2 = \frac{\phi_r^T [K] \phi_r}{\phi_r^T [M] \phi_r} = \frac{K_r}{M_r} \quad (18)$$

Generalizando em relação à matriz modal:

$$\phi^T M \phi = \text{diag}(M_r) \quad (19)$$

$$\phi^T K \phi = \text{diag}(K_r) \quad (20)$$

Os modos normais normalizados podem ser obtidos da seguinte maneira:

$$\psi_r = \frac{1}{\sqrt{M_r}} \phi_r \quad (21)$$

$$\psi^T = [M][\psi] = [I] \quad (22)$$

$$\psi^T = [K][\psi] = [\omega_r^2] \quad (23)$$

A solução para a resposta dinâmica do sistema é da forma:

$$u(t) = \sum_{r=1}^N (a_r e^{i\omega_r t} + \bar{a}_r e^{-i\omega_r t}) \{\phi_r\} \quad (24)$$

Ou ainda,

$$u(t) = \sum_{r=1}^N \{\phi_r\} \eta_r \quad (25)$$

Onde,

$$\eta_r(t) = \frac{F_r}{K_r} \left[ \frac{1}{1 - (\Omega/\omega_r)^2} \right] \cos(\Omega t) \quad (26)$$

De forma mais compacta a superposição modal pode ser escrita como

$$\{u\} = [\phi]\{\eta\} \quad (27)$$

Para o caso da resposta harmônica forçada, a equação de movimento se torna:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{f_0\}e^{i\omega t} \quad (28)$$

Onde  $\omega$  é a frequência de excitação harmônica e  $f_0$  é o vetor das amplitudes. A solução adotada é da forma  $\{u\} = [\phi]\{\eta\}$ , que resulta:

$$[M][\phi]\{\ddot{\eta}\} + [C][\phi]\{\dot{\eta}\} + [K][\phi]\{\eta\} = \{f_0\}e^{i\omega t} \quad (29)$$

Multiplicando por  $[\phi]^T$

$$[\phi]^T[M][\phi]\{\ddot{\eta}\} + [\phi]^T[C][\phi]\{\dot{\eta}\} + [\phi]^T[K][\phi]\{\eta\} = [\phi]^T\{f_0\}e^{i\omega t} \quad (30)$$

As relações de ortogonalidade diagonalizam a matriz de amortecimento se  $[C]$  for uma combinação de  $[K]$  e  $[M]$ .

Assim,

$$[C] = [M] \sum_b a_b [[M]^{-1}[K]]^b \quad (31)$$

O conjunto de equações desacopladas escrita na forma modal é da forma:

$$\ddot{\eta}_r + 2\omega_r \xi_r \dot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = \mu_r e^{i\omega t} \quad (32)$$

Os parâmetros  $\xi_r, \omega_r$  e  $\mu_r$  representam respectivamente, o fator de amortecimento modal, a frequência natural não amortecida e a força de excitação modal e são dados pelas equações (33), (34) e (35).

$$\xi_r = \frac{c_r}{2\sqrt{k_r m_r}} \quad (33)$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k_r}{m_r}} \quad (34)$$

$$\mu_r = \frac{1}{m_r} \{\Phi\}_r^T \{f_0\} \quad (35)$$

A solução da equação modal pode ser expressa como:

$$\eta_r(t) = Q_r e^{i\omega t} \quad (36)$$

A amplitude modal associada ao r-ésimo termo do modo de vibrar do sistema é

$$Q_r = \frac{\mu_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + i2\xi_r \omega_r \omega} \quad (37)$$

Usando o conceito de superposição modal encontramos a solução nas coordenadas físicas.

$$\{x\} = \sum_{r=1}^N \frac{\varphi_r \varphi_r^T f_0}{m_r (\omega_r^2 - \omega^2 + i2\xi_r \omega_r \omega)} e^{i\omega t} \quad (38)$$

A expressão para a matriz FRF do sistema é dada por:

$$H(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\varphi_r \varphi_r^T}{m_r (\omega_r^2 - \omega^2 + i2\xi_r \omega_r \omega)} \quad (39)$$

Os elementos  $H_{ij}(\omega)$  são definidos por:

$$H_{ij}(\omega) = \frac{U_i}{F_j}(\omega) \quad (40)$$

Onde  $U_i$  é a resposta de deslocamento na coordenada  $i$  e  $F_j$  é a força aplicada na coordenada  $j$ , considerando o domínio da frequência.

Para o caso onde a matriz de amortecimento não obedece as relações de ortogonalidade em relação aos modos naturais, as equações não são mais desacopladas e para solucioná-las fazemos uso da equação auxiliar

$$[M]\{\ddot{u}\} - [K]\{u\} = \{0\} \quad (41)$$

Combinando as duas equações tem-se a equação de modelo de estados que é expressa como

$$[A]\{\dot{U}\} + [B]\{U\} = \{P\} \quad (42)$$

As matrizes  $[A]$  e  $[B]$  e o vetor  $\{U\}$  são as matrizes e o vetor de estado do sistema. A equação resultante tem sua ordem dobrada, ou seja, para um sistema de  $n$  graus de liberdade temos ordem  $2n$ .

A solução para o modelo de espaço de estados é da forma:

$$[s[A] + [B]]\{\bar{\Psi}\} = \{0\} \quad (43)$$

A expressão (38) representa um autoproblema generalizado, cuja solução fornece um conjunto com  $2n$  autovalores que podem ser reais ou complexos. Os autovetores são escritos como

$$\{\bar{\Psi}_r\} = \left\{ \begin{array}{l} \{\Psi_r\} \\ \{\Psi_r\}s_r \end{array} \right\} \quad (44)$$

O autovetor complexo  $\psi_r$  apresenta ordem  $n$  e corresponde ao espaço de estados das coordenadas físicas. Temos  $\{u(t)\} = [\psi']\{q(t)\}$ , logo, o conjunto de equações desacopladas é

$$[a_r]\{\dot{q}(t)\} + [b_r]\{q(t)\} = \{0\} \quad (45)$$

A solução, por superposição modal é dada por:

$$u(t) = \sum_{r=1}^{2n} \{\psi'_r\} \bar{Q}_r e^{s_r t} \quad (46)$$

Assim,

$$\omega_r^2 = \frac{\psi_r^{*T} [K] \psi_r}{\psi_r^{*T} [M] \psi_r} = \frac{k_r}{m_r} \quad (47)$$

Para o caso da resposta forçada, utilizando a transformação das coordenadas, temos

$$[a_r]\{\dot{q}(t)\} + [b_r]\{q(t)\} = [\psi']^T \{f'(t)\} \quad (48)$$

A equação diferencial para o r-ésimo termo é da forma

$$[\dot{q}_r(t) - s_r q_r(t) = \frac{1}{a_r} [\psi']^T \begin{Bmatrix} f'(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (49)$$

Sendo  $f(t) = \{\bar{F}\} e^{i\omega t}$  e  $q(t) = \{\bar{Q}\} e^{i\omega t}$ , temos como solução

$$\{u(t)\} = \sum_{r=1}^{2N} \psi'_r \left( \frac{1}{i\omega - s_r} \right) \frac{1}{a_r} \{\psi'\}_r^T \begin{Bmatrix} \{\bar{F}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} e^{i\omega t} \quad (50)$$

Considerando  $\{\phi'_r\} = 1/\sqrt{a_r} \{\psi'_r\}$  pode-se extrair a FRF do sistema

$$a_{ij}(\omega) = \frac{\bar{Q}_r}{F_k}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left( \frac{\phi_{jk} \phi_{kr}}{i\omega - s_r} + \frac{\phi^*_{jk} \phi^*_{kr}}{i\omega - s_r^*} \right) \quad (51)$$

## 2.2 AUTOVALORES E AUTOVETORES

Em engenharia, a maioria dos sistemas estruturais são discretizados em elementos finitos. Ao se realizar uma análise dinâmica da estrutura torna-se necessária a determinação de suas frequências naturais e seus modos de vibrar.

Os autovalores representam as frequências naturais e os autovetores representam os modos de vibração. Quando um sistema é submetido a uma excitação na frequência fundamental ou em frequências próximas, o fenômeno da ressonância pode provocar falhas na estrutura ao amplificar seu movimento.

Considerando um sistema livre com múltiplos graus de liberdade, cuja equação de movimento é dada pela equação (1) o problema de autovalor e autovetor é dado por:

$$([K] - \lambda_i [M]) \{\phi_i\} = [0] \quad (52)$$

onde  $\lambda_i$  e  $\phi_i$  representam o autovalor e o autovetor, respectivamente.

Os autovalores são determinados através da equação:

$$\det([K] - \lambda_i [M]) = 0 \quad (53)$$

A partir da determinação dos valores de  $\lambda_i$  os autovetores podem ser determinados. Com os valores  $\lambda_i$  e  $\phi_i$  obtidos é possível determinar as frequências naturais e os modos de vibrar do sistema em estudo.

## 2.3 MÉTODOS ITERATIVOS DE DETERMINAÇÃO DOS MODOS E FREQUÊNCIAS NATURAIS

Os métodos iterativos têm o objetivo de melhorar a correlação entre os dados medidos e os dados previstos no modelo numérico. O desenvolvimento dessas técnicas é baseado em uma análise de sensibilidade que requer um processo iterativo

visando a determinação dos parâmetros estruturais que reproduzem os dados modais. Uma boa estimativa do modelo é obtida quando a variação dos parâmetros na iteração é pequena.

Os métodos iterativos de determinação dos modos e frequências naturais que serão abordados neste trabalho são o método de Iteração Inversa, o método de Iteração Subespacial e o método QR.

O método de Iteração Subespacial foi desenvolvido para solução de frequências e modos de vibrar de estruturas. De acordo com BATHE (2012) este método apresenta duas propriedades atrativas: a robustez e a eficiência. O fato de utilizar um subespaço começando perto do subespaço de interesse leva a uma solução muito rápida.

O método da Iteração Inversa converge para o par associado ao valor próprio de menor valor absoluto, sendo assim, se o par de interesse não estiver nos extremos este método não fornecerá a solução pretendida. Quando há interesse em obter um par próprio associado a um valor próprio próximo de um determinado valor pré-definido, deve-se efetuar a operação de deslocamento espectral antes da aplicação do método da iteração inversa. A Iteração Inversa com deslocamento espectral provoca uma translação no espectro do problema de modo a tornar próximo de zero o valor próprio mais próximo do valor pré-definido. Em seguida, inverte-se o novo espectro, passando assim o valor próprio desejado do meio para o limite superior do espectro.

O Método QR apresenta um elevado custo computacional em termos do número de operações. Assim, o método tem grande utilidade quando se trata de matrizes pequenas, não sendo adequado para uso em matrizes de grandes dimensões.

Estes métodos iterativos são largamente utilizados para problemas de valores próprios na análise de elementos finitos.

### 2.3.1 Método da Iteração Inversa

Craig (2006) afirma que o método da Iteração Inversa é um dos procedimentos mais eficientes quando se deseja encontrar os autovalores e autovetores de um siste-

ma de baixa ordem.

Tomando a equação (53) e rearranjando os termos:

$$[K] \cdot [\phi] = \lambda \cdot [M] \cdot [\phi] \quad (54)$$

Os autovalores  $\lambda_i$  são ordenados de forma que  $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_N$ . Ao satisfazer a igualdade da equação (54), obtém-se o autovalor  $\lambda_i$  e seu respectivo autovetor  $\phi_i$ .

A equação (55) representa um procedimento iterativo baseado na equação (54).

$$[K] \cdot \{v_{s+1}\} = [M] \cdot \{u_s\} \quad (55)$$

ou ainda,

$$\{v_{s+1}\} = [D] \cdot \{u_s\} \quad (56)$$

Onde [D] é a matriz dinâmica dada pela equação (57).

$$[D] = [K]^{-1} \cdot [M] \quad (57)$$

A equação (58) representa uma expressão para  $\{u_{s+1}\}$ .

$$\{u_{s+1}\} = \lambda_{s+1} \cdot v_{s+1} \quad (58)$$

Uma estimativa para o valor de  $\lambda_{s+1}$  pode ser obtida através do coeficiente de Rayleigh

$$\lambda_{s+1} = \frac{\{v_{s+1}\}^T \cdot [K] \cdot \{v_{s+1}\}}{\{v_{s+1}\}^T \cdot [M] \cdot \{v_{s+1}\}} \quad (59)$$

substituindo a equação (59) na equação (58),  $\{u_{s+1}\}$  passa a ser expresso pela equação (60).



$$\{u_{s+1}\} = \frac{\{v_{s+1}\}}{\sqrt{\{v_{s+1}\}^T \cdot [M] \cdot \{v_{s+1}\}}} \quad (60)$$

### 2.3.2 Algoritmo do Método da Iteração Inversa

1º passo: Dados de entrada  $[M]$ ,  $[K]$ ,  $\{u_0\}$ ,  $\lambda_0$  e tolerância;

Cálculo da matriz dinâmica  $[D]$ ;

Para  $k=1$ ;

2º passo: Calcule  $\{v_k\} = [D] \cdot \{u_{k-1}\}$ ;

3º passo: Cálculo de  $\lambda_k$ ;

4º passo: Cálculo de  $\{u_k\}$

5º passo: Verificar a convergência, erro =  $\lambda_k - \lambda_{k-1}$

6º passo: Se erro < tolerância,  $\lambda_k$  é o autovalor e  $\{u_k\}$  é o autovetor

Senão,  $k=k+1$  e retorne ao 2º passo.

## 2.4 MÉTODO DE ITERAÇÃO SUBESPACIAL

O Método de Iteração Subespacial se mostra prático e eficiente na determinação dos autovalores e autovetores de sistemas estruturais com milhares de graus de liberdade.

O algoritmo da Iteração Subespacial inicia-se pela solução simultânea dos  $N_s$  vetores soluções estáticos  $[R] = [r_1 \dots r_{N_s}]$  para  $N_s$  carregamentos padrões linearmente independentes definidos pelo usuário  $[F] = [f_1 \dots f_n]$ .

$$[K] \cdot [R] = [F] \quad (61)$$

Os autovetores aproximados  $v_1 \dots v_{N_s}$  são escritos como uma combinação linear dos vetores de Ritz.

$$v_i = [r_1 \dots r_{N_s}] \cdot \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_{N_s} \end{Bmatrix} = [R] \cdot \{\psi_i\} \quad (62)$$

Substituindo a aproximação dada pela Eq. (62) no problema original de autovalor dado pela equação (53), obtém-se:

$$[E(\lambda)] \cdot [\psi] = [[K] - \lambda \cdot [M]] [R] [\psi] \quad (63)$$

Este sistema de equações apresenta mais linhas  $N$  do que às desconhecidas  $N_s$ . Requerendo-se que o resíduo  $[E(\lambda)] \cdot \{\psi\}$  seja feito ortogonal para o espaço estendido sobre os vetores de Ritz, obtém-se um menor problema de autovalor. Assim:

$$([R]^T \cdot [K] \cdot [R] - \lambda \cdot [R]^T \cdot [M] \cdot [R]) \cdot [\psi] = [0] \quad (64)$$

Da Eq. (64) é observada uma redução do problema de autovalor dado pela Eq. (52) para o novo problema de autovalor:

$$([\hat{K}] - \hat{\lambda}_i \cdot [\hat{M}]) \cdot \{\psi_i\} = [0], \quad i = 1, \dots, N_s \quad (65)$$

no qual,

$$[\hat{K}] = [R]^T \cdot [K] \cdot [R]$$

$$[\hat{M}] = [R]^T \cdot [M] \cdot [R]$$

e

$$[\psi] = [\psi_1 \dots \psi_{N_s}], \quad \{\hat{\Lambda}\} = \text{diag}(\hat{\lambda}_i) \quad (66)$$

O algoritmo representado pelas equações (62) a (66) fornecem a aproximação de Ritz. O Método de Iteração Subespacial insere mais um passo ao algoritmo dado acima. Seguindo a solução do problema de autovalor reduzido dado pelas equações

(66), os autovetores aproximados do problema original dado pela equação (52) podem ser escritos como:

$$[\hat{V}] = [R] \cdot [\psi] \quad (67)$$

Com estes autovetores aproximados, uma melhora do vetor carregamento é calculada pela relação:

$$[\hat{F}] = [M] \cdot [R] \cdot [\psi] = [M] \cdot [\hat{V}] \quad (68)$$

E o vetor carregamento dado pela equação (68) pode ser usado para reinicializar o algoritmo.

#### 2.4.1. Algoritmo do Método de Iteração Subespacial

1º passo: Dados de entrada  $[M]$ ,  $[K]$ ,  $N_s$ , tolerância

$$\text{Decomponha } [K] = [L] \cdot [U]$$

Adote  $j = 0$

2º passo: Resolva para os vetores de Ritz  $[R_j]$

$$[L] \cdot [U] \cdot [R_j] = [F_j]$$

3º passo: Forme as matrizes reduzidas

$$[\hat{K}_j] = [R_j]^T \cdot [K] \cdot [R_j], \quad [\hat{M}_j] = [R_j]^T \cdot [M] \cdot [R_j]$$

4º passo: Resolva o problema de autovalor reduzido

$$\left( [\hat{K}_j] - \hat{\lambda}_m \cdot [\hat{M}_j] \right) \cdot \{\psi_m\} = [0], \quad m = 1, \dots, N_s$$

5º passo: Calcule os autovetores aproximados

$$[\hat{V}_j] = [R_j] \cdot [\psi_j]$$

6º passo: Checar a convergência

7º passo: Calcule o carregamento melhorado

$$[\hat{F}_{j+1}] = [M] \cdot [R_j] \cdot [\psi_j] = [M] \cdot [\hat{V}_j]$$

8º passo: Faça  $j=j+1$  e retorne ao 1º passo.

## 2.5 MÉTODO QR

O Método QR é um exemplo de Métodos de Transformação Matricial, muito utilizado no cálculo de autovalores, porém não geram diretamente os autovetores correspondente.

Considere o problema de autovalor na forma padrão:

$$[[A] - \lambda_i \cdot [I]] \cdot \phi_i = \{0\} \quad (69)$$

A decomposição QR da matriz  $[A_k]$  é escrita como  $[A_k] = [Q_k] \cdot [R_k]$ , que é o produto de uma matriz ortogonal  $[Q_k]$ :

$$[Q_k] \cdot [Q_k]^T = [Q_k]^T \cdot [Q_k] = [I] \quad (70)$$

e uma matriz triangular superior  $[R_k]$ .

A seguir, calcula-se a matriz  $[\bar{A}]$  dada por:

$$[\bar{A}] = [\bar{Q}]^T \cdot [A] \cdot [\bar{Q}] \quad (71)$$

na qual,

$$[\bar{Q}] = [Q_k]^T \cdot [Q_{k-1}]^T \cdot \dots \cdot [Q_1]^T$$

Por fim, resolve-se o problema de autovalor transformado:

$$[[\bar{A}] - \gamma_i \cdot [I]] \cdot \psi_i = \{0\} \quad (72)$$

Resolvendo o problema de autovalor dado pela equação (72), obtêm-se os pares de autovalor e autovetor  $(\gamma_i, \{\psi_i\})$ , através dos quais pode-se determinar o autovalor e autovetor do problema original.

$$(\lambda_i, \{\phi_i\}) = (\gamma_i, [\overline{Q}]\{\psi_i\}) \quad (73)$$

### 2.5.1 Algoritmo do Método QR

1º passo:  $[A_0] \equiv [A]$

2º passo: Calcule a decomposição QR de  $[A_k]$

$$[A_k] = [Q_k] \cdot [R_k]$$

3º passo: Atualize a matriz transformada

$$[A_{k+1}] = [R_k] \cdot [Q_k]$$

4º passo: Faça  $j=j+1$  e retorne ao 1º passo.

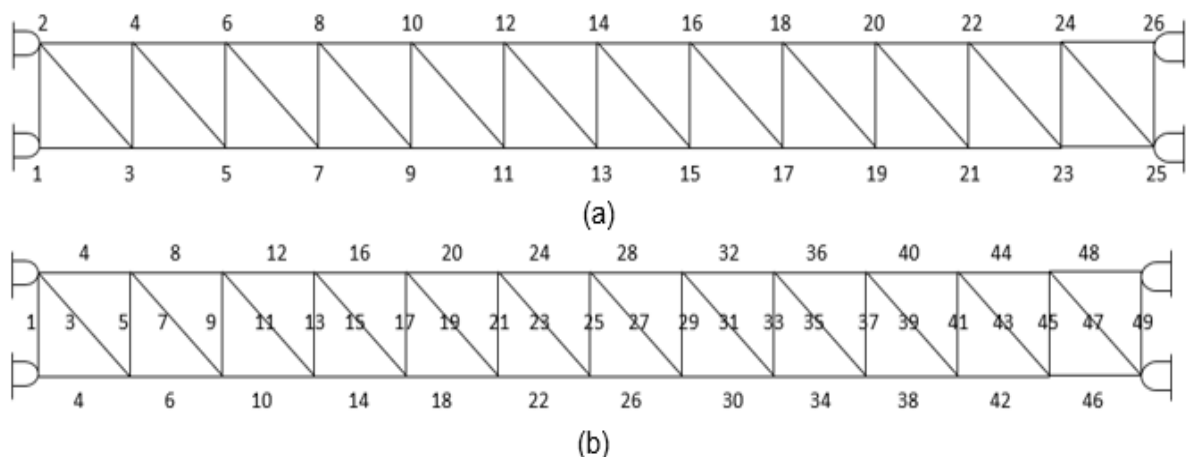
### 3 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL E RESULTADOS

Com o objetivo de verificar a eficácia dos métodos apresentados neste trabalho, desenvolveu-se uma rotina computacional utilizando o software *Matlab®* para encontrar os autovalores e autovetores de um sistema.

Serão abordados dois problemas para a verificação dos métodos. No primeiro, calcula-se as frequências naturais e plota os modos de vibrar de uma viga plana. No segundo, a partir de um sistema com 4 graus de liberdade encontra-se as frequências naturais, os modos de vibrar e aplica o método de superposição modal.

#### 3.1 SIMULAÇÃO DOS MODOS DE VIBRAR DE UMA VIGA

A viga mostrada na figura (2) apresenta, em cada nó, três graus de liberdade, sendo dois graus de translação e um de rotação. O material é o alumínio 6063-T83, com  $E=69 \times 10^9 \text{ Pa}$ ,  $\rho=2700 \text{ Kg/m}^3$ . Os membros da estrutura têm as seguintes propriedades transversais:  $A= 21.2 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  e  $I=349.0 \times 10^{-8} \text{ m}^4$ .



**Figura 2: Viga: (a) número de nós; (b) número de elementos.**  
**Fonte: Autoria própria**

Através da utilização dos algoritmos de iteração inversa com deslocamento espectral, iteração subespacial e método QR, encontram-se os oito primeiros valores próprios para a treliça. Os resultados obtidos para as frequências naturais são apresentados pela tabela (1).

**Tabela 1: Frequências naturais para a viga (rad/s).**

Modo	Iteração Inversa com deslocamento espectral	Iteração Subespacial	Método QR
1	412588,22564362	412505,72449896	412505,72449844
2	2687519,75009782	2686982,35362628	2686982,35362608
3	8647684,07278049	8645954,88180427	8645954,88180403
4	11993006,12562255	11990608,00402154	11990608,00402159
5	20397907,34506636	20393828,57935052	20393828,57935074
6	39338170,70543383	39330304,64450407	39330304,64450368
7	47625567,18534574	47616043,97655232	47616043,97655095
8	67129578,50916001	67116155,27810421	67116155,27810267

**Fonte: Autoria própria**

A tabela (1) mostra que os valores encontrados pelos três métodos para as frequências naturais são bem próximos. O método da Iteração Subespacial e o método QR apresentaram resultados muito semelhantes, já o método da iteração inversa com deslocamento espectral apresenta valores mais distantes.

A solução do problema através da utilização do método QR apresentou um tempo bem elevado em relação aos outros dois métodos, o que já era esperado pelo fato do método apresentar um maior custo computacional devido ao maior número de iterações necessárias para alcançar a convergência. Os valores do tempo decorrido para a solução do problema para cada um dos três métodos são dados pela tabela (2).

O computador utilizado apresenta as seguintes características: processador Intel® Pentium® P6200, 2,13 GHz, 4,00 GB RAM, sistema operacional de 64 bits.

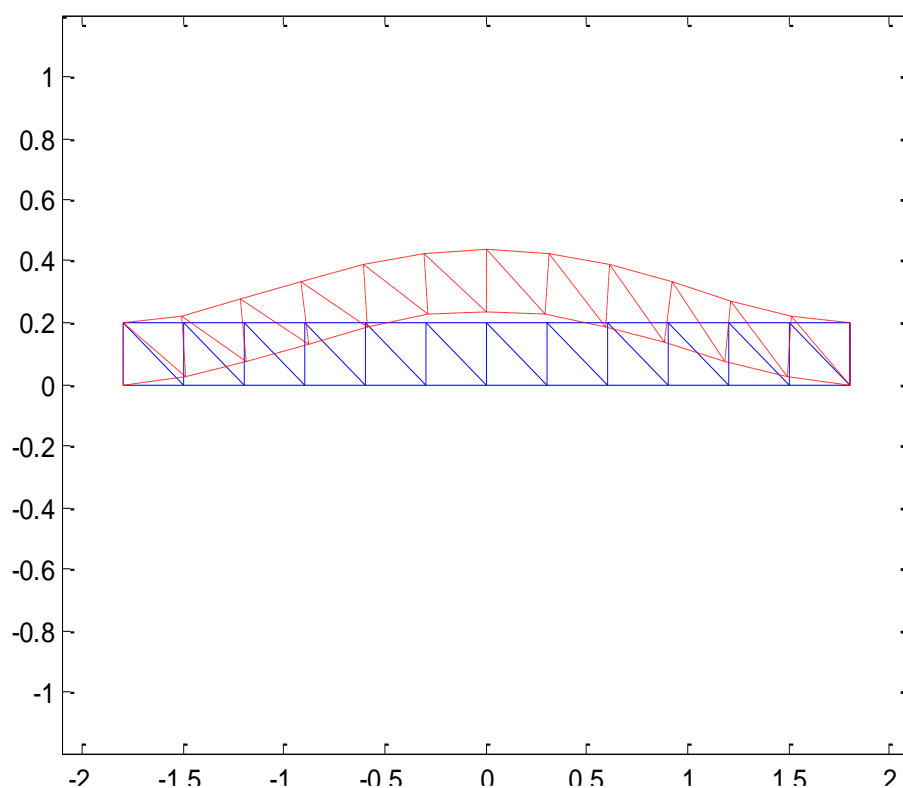
**Tabela 2: Tempo decorrido para a solução do problema.**

	<b>Iteração Inversa com deslocamento espectral</b>	<b>Iteração Subspacial</b>	<b>Método QR</b>
<b>Tempo (s)</b>	21.124681	31.387411	2209.632404

Fonte: Autoria própria

A solução pelo método QR fez uso de um tempo computacional de aproximadamente 36,83 minutos. O valor é cerca de 70 vezes maior que o tempo gasto pela Iteração Subspacial e 104 vezes maior que o tempo gasto pela Iteração Inversa com deslocamento espectral.

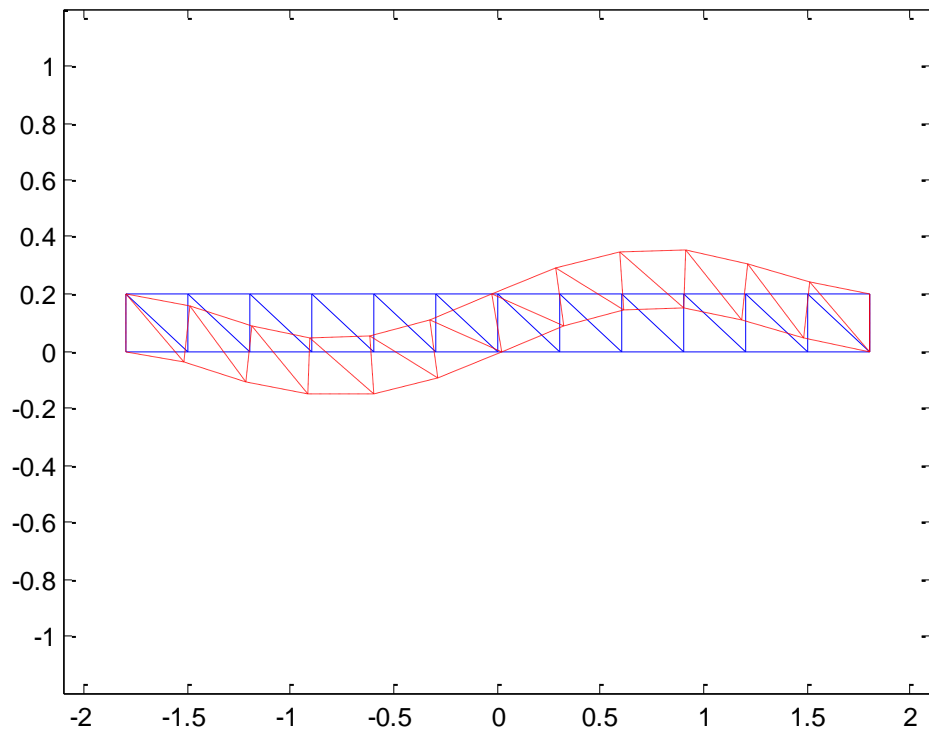
Os gráficos dos oito primeiros modos de vibrar da treliça utilizando o método da Iteração Subspacial são apresentados nas figuras (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9) e (10).



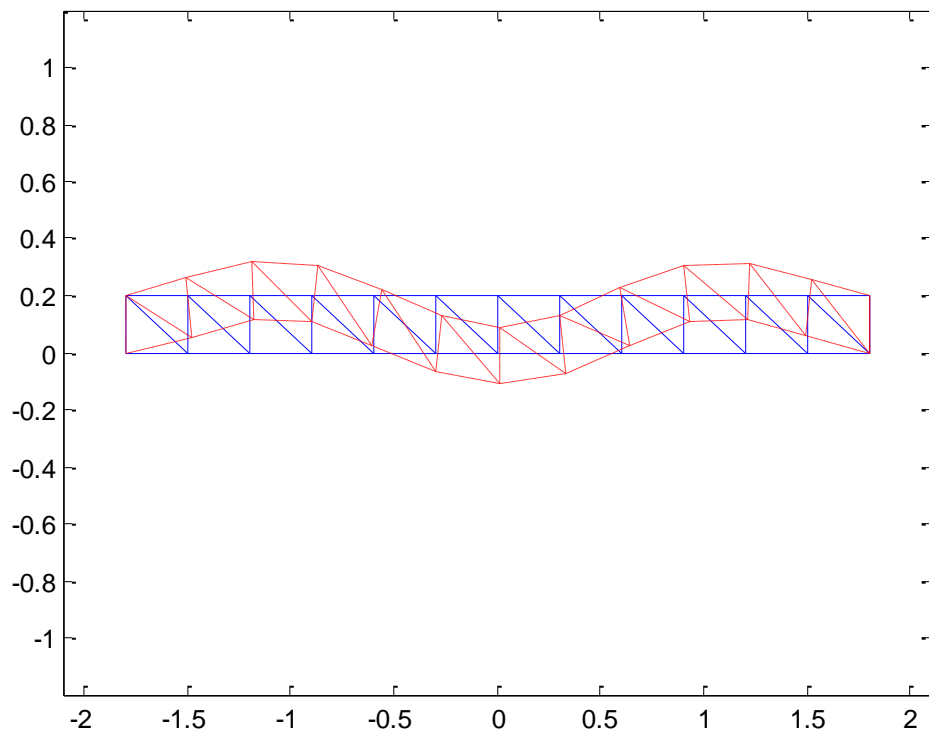
**Figura 3: 1º modo de vibrar.**

Fonte: Autoria própria

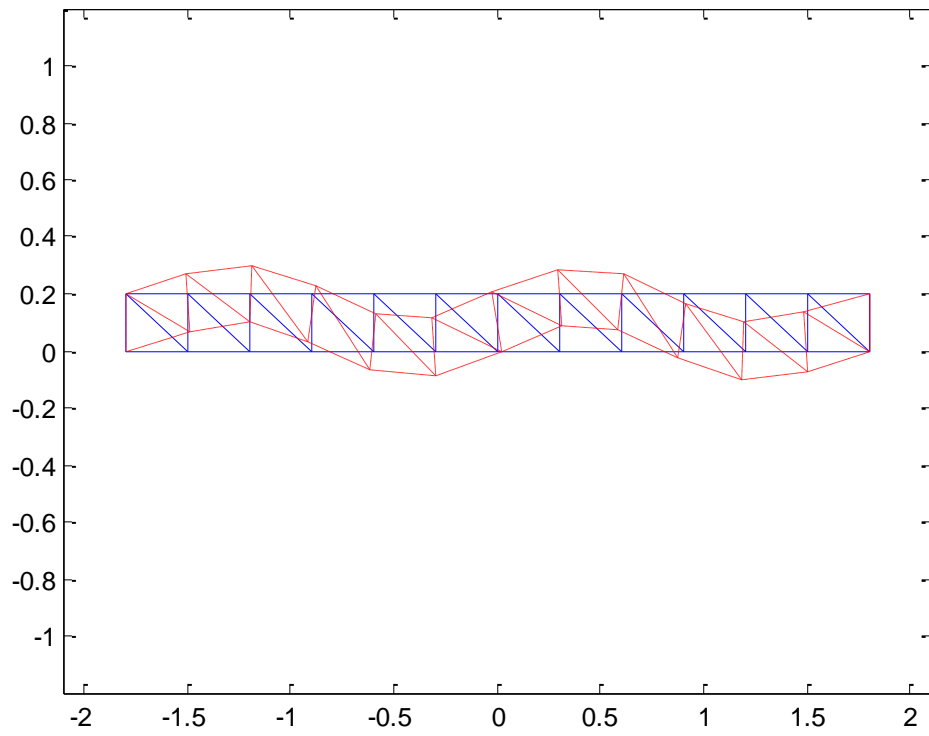




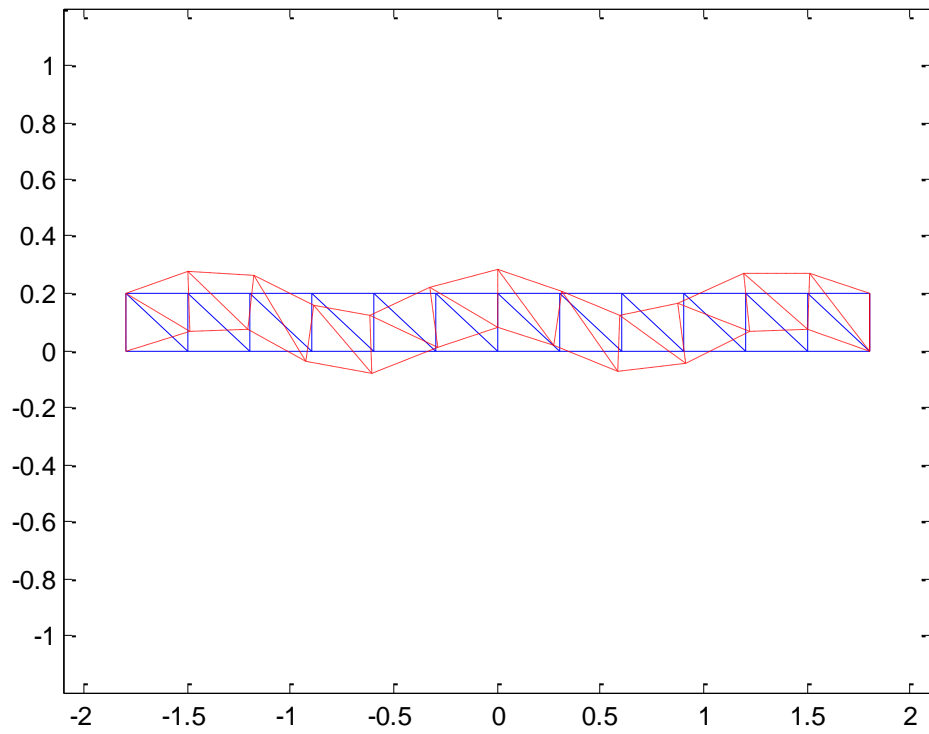
**Figura 4: 2º modo de vibrar**  
**Fonte: Autoria própria**



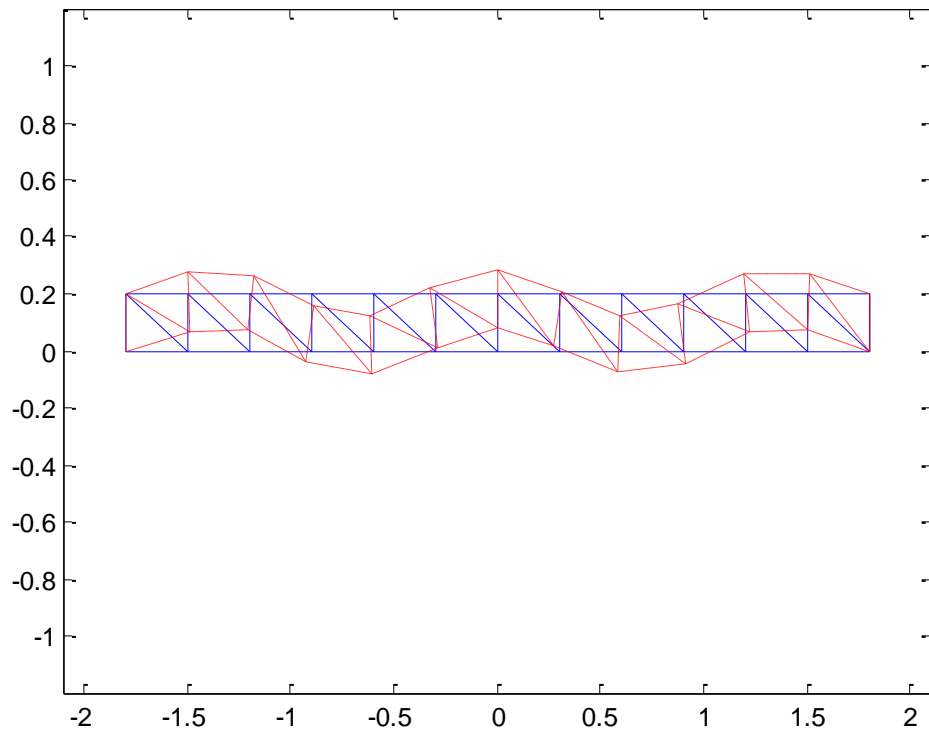
**Figura 5: 3º modo de vibrar**  
**Fonte: Autoria própria**



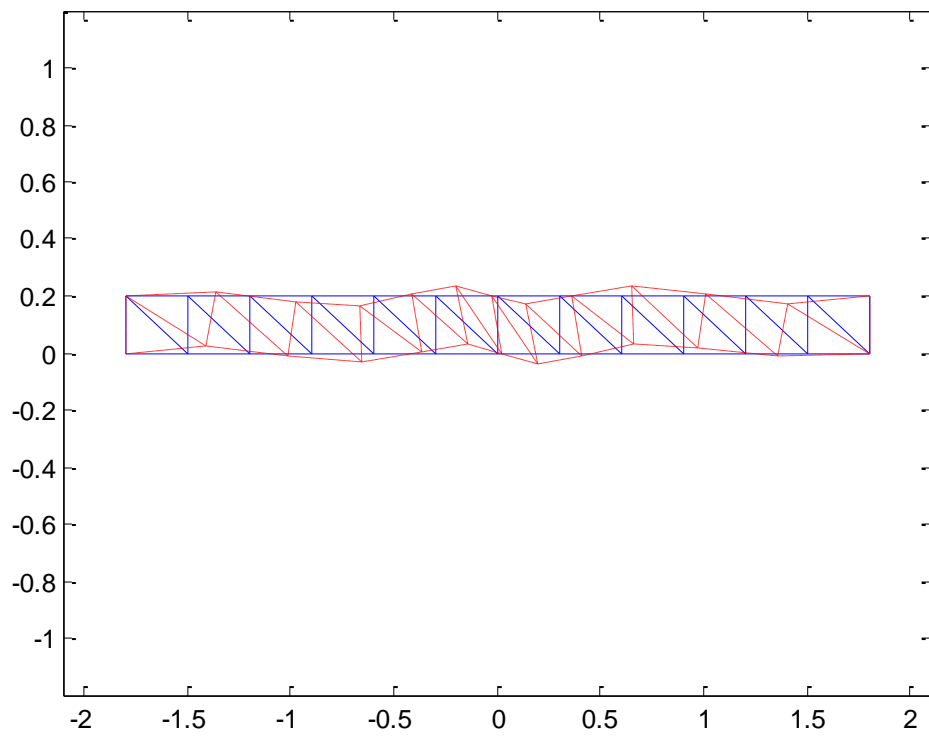
**Figura 6: 4º modo de vibrar**  
**Fonte: Autoria própria**



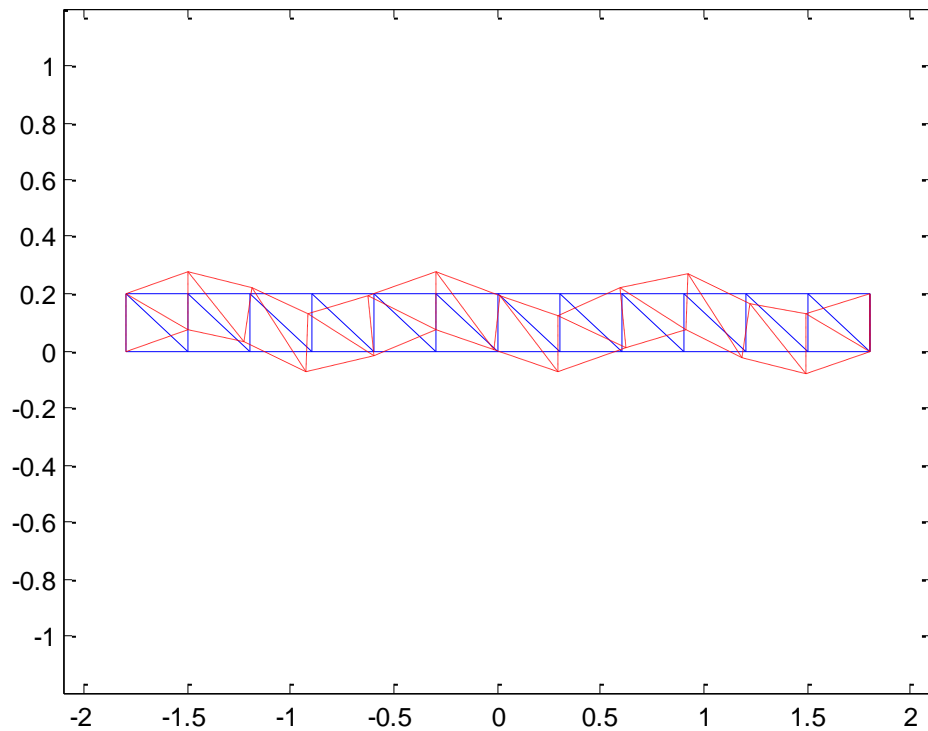
**Figura 7: 5º modo de vibrar**  
**Fonte: Autoria própria**



**Figura 8: 6º modo de vibrar**  
**Fonte: Autoria própria**



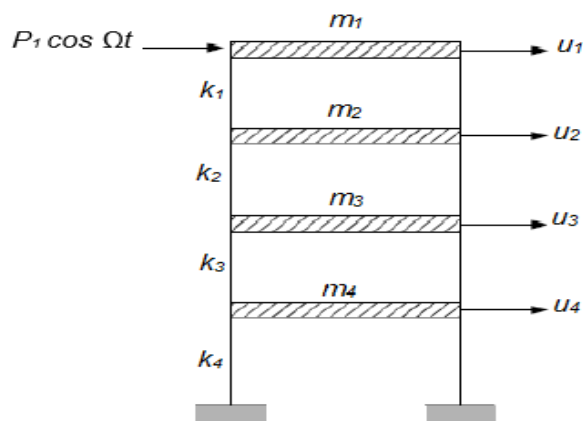
**Figura 9: 7º modo de vibrar**  
**Fonte: Autoria própria**



**Figura 10: 8º modo de vibrar**  
**Fonte: Autoria própria**

### 3.2 SIMULAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS DE VIBRAR DE UM SISTEMA COM 4 GRAUS DE LIBERDADE.

Considere o sistema representado na figura (11), cujos parâmetros físicos são dados pela tabela (3).



**Figura 11: Sistema mecânico com 4 graus de liberdade.**  
**Fonte: Autoria própria**

**Tabela 3: Parâmetros físicos do sistema.**

Modo	Massa (Kg)	Rigidez (N/m)
1	1,0	800
2	2,0	1600
3	2,0	2400
4	3,0	3200

Fonte: Autoria própria

Para o sistema descrito na figura (11) foi desenvolvida uma rotina computacional que calcula as frequências naturais, os modos de vibração e plota o gráfico dos modos de vibrar do sistema. O programa calcula os modos e as frequências naturais utilizando o comando Eig, que é usado como referência para uma posterior análise dos resultados, o método de iteração inversa com deslocamento espectral, o método da Iteração Subespacial e o método QR. Para este caso, o sistema apresenta quatro graus de liberdade.

Após a obtenção dos modos é aplicado o método de superposição modal. São encontradas a massa, a rigidez e a força modal. Fazendo uso da equação (26) é determinada uma expressão para  $u_r(t)$ , para  $N=1$ ,  $N=2$ ,  $N=3$  e  $N=4$  para as frequências de excitação  $\Omega = 0$ ,  $\Omega = 0,5\omega_1$ ,  $\Omega = 1,3\omega_3$ .

A rotina computacional desenvolvida para o sistema da figura (3) calcula as frequências naturais e os modos de vibrar através de cada um dos métodos empregados neste trabalho. A tabela (4) apresentada as frequências naturais obtidas com a utilização do comando Eig, o Método de Iteração Inversa com Deslocamento Espectral, o Método de Iteração Subespacial e o Método QR.

Analisando os resultados dados pela tabela (4), nota-se a proximidade dos valores obtidos para as frequências naturais para todos os métodos. A maior diferença está na primeira frequência obtida pelo método de iteração inversa com deslocamento espectral. A tabela (5) fornece uma análise mais detalhada, apresentando a diferença percentual das frequências naturais obtidas através dos métodos em relação aos valores obtidos com o comando Eig do *MATLAB*®.

**Tabela 4: Frequências naturais do sistema (rad/s).**

<b>Modo</b>	<b>Comando Eig</b>	<b>It. Inv. com deslocamento espectral</b>	<b>Iteração Subespacial</b>	<b>Método QR</b>
1	13,293515	15,273747	13,293515	13,293515
2	29,659734	29,849278	29,659734	29,659734
3	41,078665	41,148683	41,078665	41,078665
4	55,881952	55,907804	55,881952	55,881952

Fonte: Autoria própria

**Tabela 5: Diferença das frequências naturais obtidas comparadas as obtidas com o comando Eig (%).**

<b>Modo</b>	<b>It. Inv. com deslocamento espectral</b>	<b>Iteração Subespacial</b>	<b>Método QR</b>
1	0,263242444481663	0,0000000000065593	0,0000000000065593
2	0,056218085326393	0,000000000001675	0,000000000001675
3	0,028762148580505	0,0000000000084967	0,0000000000084967
4	0,014446572280135	0,0000000000230139	0,0000000000230139

Fonte: Autoria própria

Da tabela (6), observa-se que os Métodos de Iteração Subespacial e método QR mostram uma maior eficiência comparada com o Método de Iteração Inversa com Deslocamento Espectral, apresentando uma diferença percentual praticamente nula em relação aos dados do comando Eig.

As tabelas (7), (8), (9) e (10) apresentam o primeiro modo, segundo modo, terceiro modo e quarto modo do sistema, respectivamente.

**Tabela 6: 1º modo de vibrar do sistema.**

<b>Comando Eig</b>	<b>lt. Inv. com deslocamento espectral</b>	<b>Iteração Subespacial</b>	<b>Método QR</b>
1,0000000000000000	0,641763603615891	1,0000000000000000	0,907590792071025
0,779103079674273	1,0000000000000000	0,779103079674253	1,0000000000000000
0,496553148595072	0,637339476058381	0,496553148595045	0,637339476058381
0,235061820340475	0,452562362682644	0,235061820340453	0,369515621786952

Fonte: Autoria própria

**Tabela 7: 2º modo de vibrar do sistema.**

<b>Comando Eig</b>	<b>lt. Inv. com deslocamento espectral</b>	<b>Iteração Subespacial</b>	<b>Método QR</b>
1,0000000000000000	0,761707454796649	1,0000000000000000	1,0000000000000000
-0,099624795035886	-0,151769898122844	-0,099624795035981	-0,140890736288389
-0,539887297732001	-0,822472358864966	-0,539887297732123	-0,763515938605557
-0,437613326788725	-1,0000000000000000	-0,437613326788792	-0,757968516067313

Fonte: Autoria própria

**Tabela 8: 3º modo de vibrar do sistema.**

<b>Comando Eig</b>	<b>lt. Inv. com deslocamento espectral</b>	<b>Iteração Subespacial</b>	<b>Método QR</b>
-0,9014523795664	-0,42442873491083	-0,9014523795644	-0,76351593860555
1,0000000000000000	0,94165536534492	1,0000000000000000	1,0000000000000000
-0,1585947490344	-0,14934159634380	-0,1585947490332	-0,14089073628838
-0,7079730984408	-1,0000000000000000	-0,7079730984397	-0,75796851606731

Fonte: Autoria própria

**Tabela 9: 4º modo de vibrar do sistema.**

<b>Comando Eig</b>	<b>It. Inv. com deslocamento espectral</b>	<b>Iteração de Subespaço</b>	<b>Método QR</b>
0,1543564137767	0,07717820688835	0,15435641377772	0,109146466901147
-0,4481724086683	-0,44817240866832	-0,44817240866727	-0,44817240866832
1,00000000000000	1,00000000000000	1,00000000000000	1,00000000000000
-0,6368788469905	-0,95531827048576	-0,63687884698951	-0,78001410154941

**Fonte: Autoria própria**

Observando-se os valores dos modos de vibrar, o método de Iteração Subespacial foi o que demonstrou maior eficiência para este caso, apresentando os valores mais próximos dos obtidos pelo comando Eig para os quatro modos. Enquanto que o método de Iteração Inversa com deslocamento espectral foi o que apresentou os piores resultados.

Para este caso, por se tratar de um sistema pequeno, o método QR se mostrou bastante eficiente em relação ao tempo computacional, diferentemente do caso da treliça.

Os modos de vibrar obtidos pelos diferentes métodos foram plotados em uma mesma tela para que se possa observar a diferença entre eles. As figuras (12), (13), (14) e (15) representam o primeiro, segundo, terceiro e quarto modos de vibrar, respectivamente.

A legenda que aparece nas figuras recebe a seguinte nomenclatura:

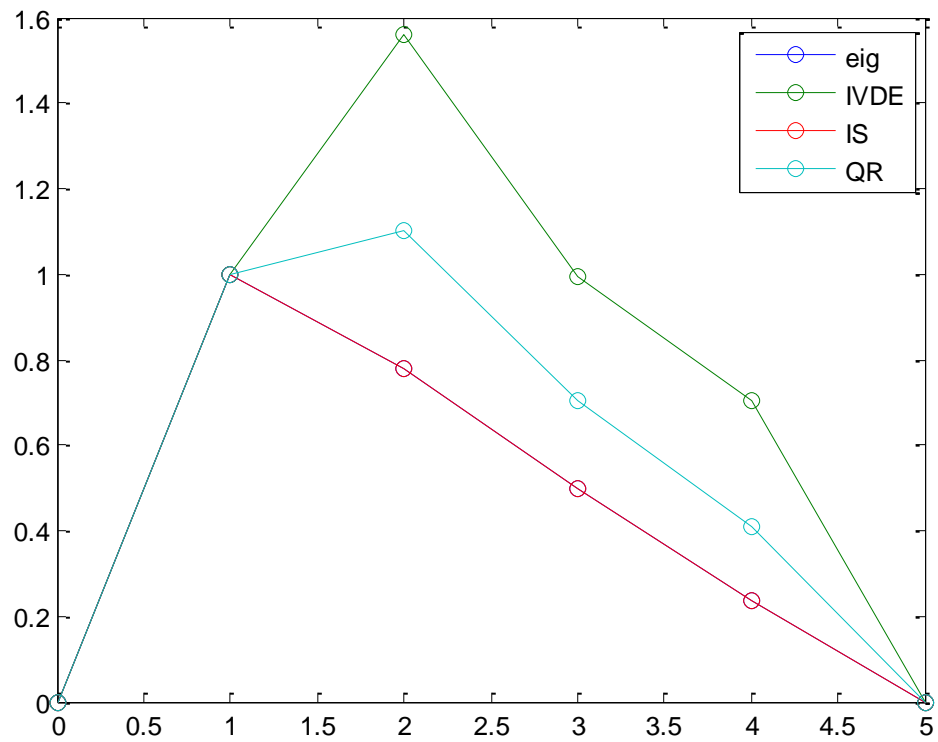
Eig: comando Eig do software *Matlab*®;

IVDE: Iteração Inversa com Deslocamento Espectral;

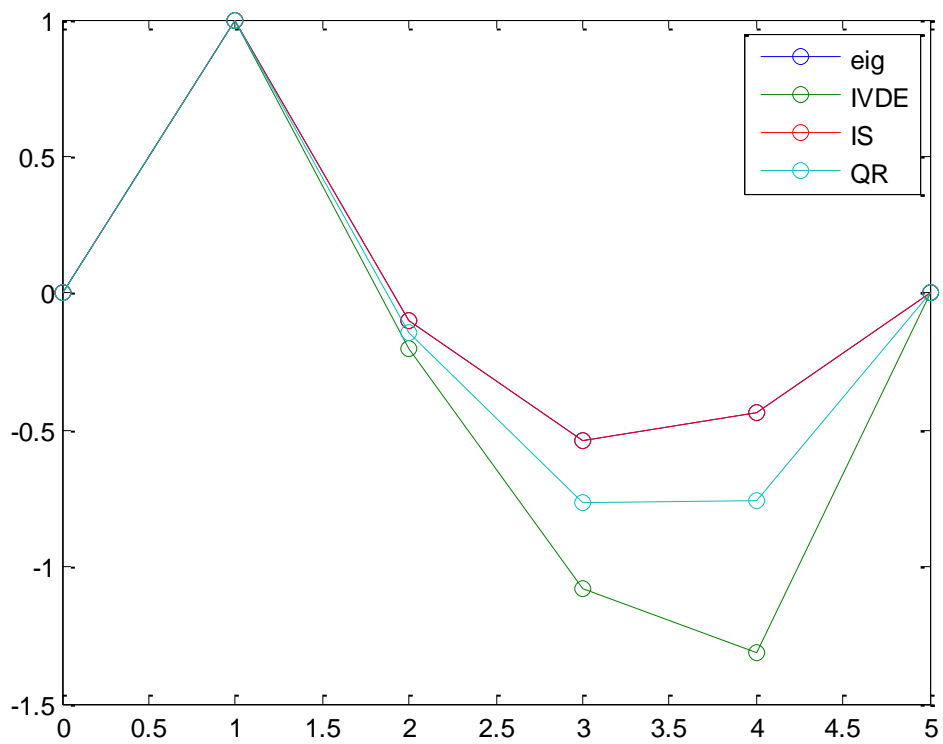
IS: Iteração Subespacial;

QR: Método QR;





**Figura 11: 1º modo de vibrar do sistema**  
**Fonte: Autoria própria**



**Figura 12: 2º modo de vibrar do sistema**  
**Fonte: Autoria própria**

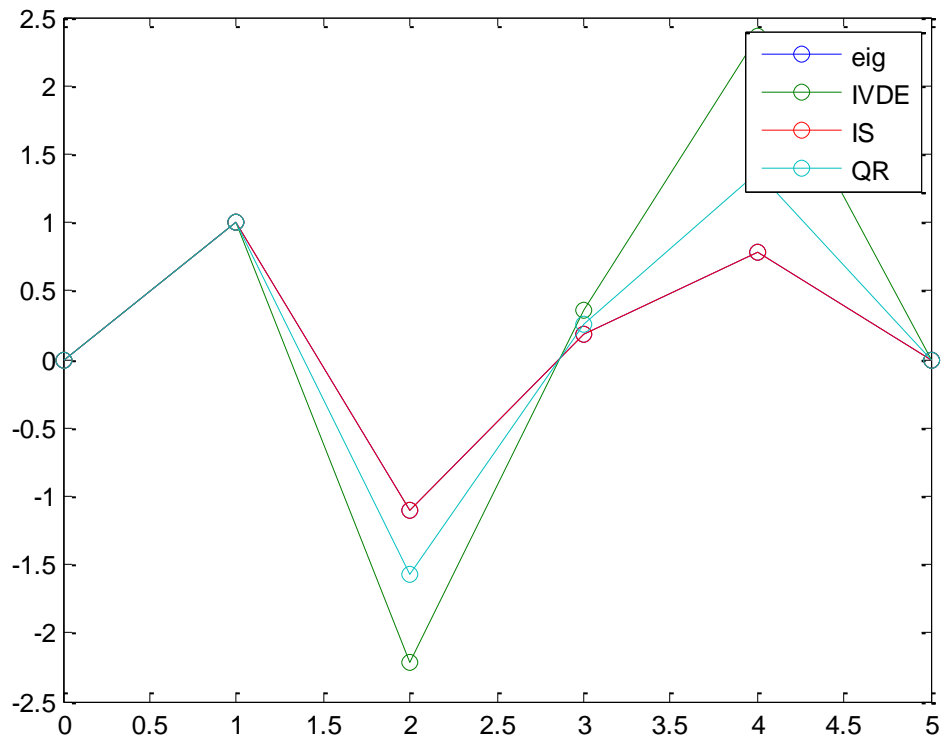


Figura 13: 3º modo de vibrar do sistema  
Fonte: Autoria própria

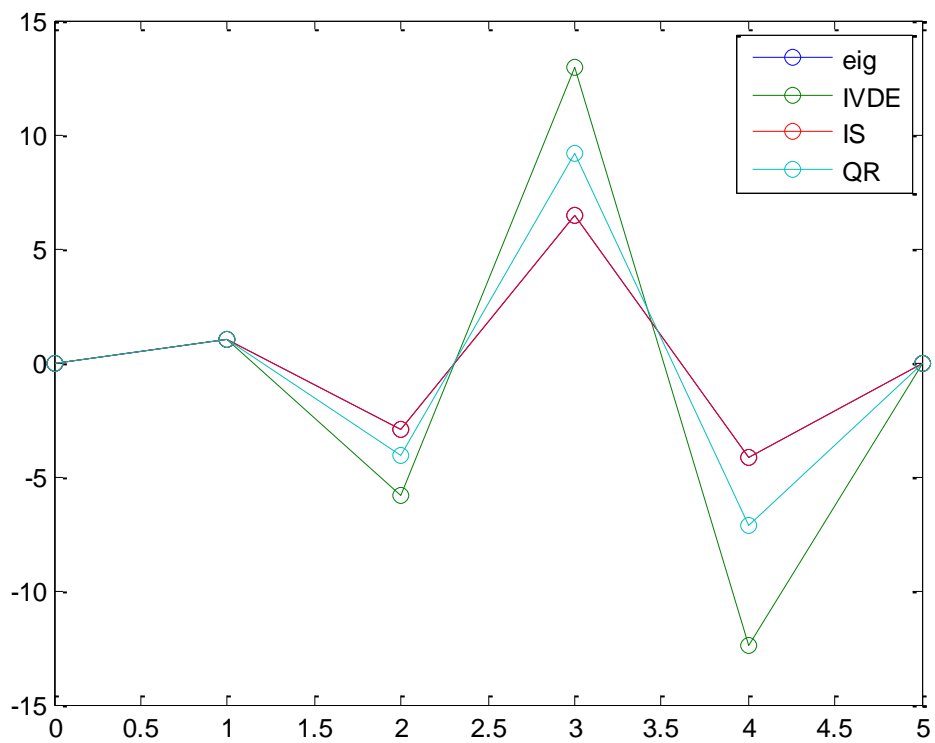


Figura 14: 4º modo de vibrar do sistema  
Fonte: Autoria própria

Para os quatro modos de vibrar, nota-se que o gráfico do comando Eig não aparece nas figuras, isso se deve ao fato de que os valores do comando Eig e Iteração Subspacial apresentarem uma diferença quase nula, assim se mostram coincidentes.

Com base nas tabelas e gráficos é possível observar que o método da iteração inversa com deslocamento espectral é o que se mostrou menos eficiente para o caso estudado.

O gráfico dos modos de vibração podem levar a uma interpretação equivocada dos valores obtidos, então a correlação dos vetores neste caso é avaliada a partir do valor do coeficiente MAC-valor (Alemang, 82).

O MAC é um coeficiente de correlação entre dois autovetores e seu valor varia de 0 a 1,0. Valores entre 0,9 e 1,0 representam uma boa proximidade entre os modos comparados.

A tabela (10) apresenta o valor de MAC comparando os modos obtidos através do Eig e os demais métodos.

**Tabela 10:Valores de MAC.**

Modo	Iteração Inversa com Deslocamento Espectral	Iteração Subespacial	Método QR
1	0,880350603650358	1,0000000000000000	0,967026061991343
2	0,808188158003117	1,0000000000000000	0,950724863892562
3	0,864988122425077	1,0000000000000000	0,991622742347737
4	0,959891439723764	1,0000000000000000	0,990014849922821

Fonte: Aatoria própria

Baseando-se nos valores de MAC dados pela tabela (10) nota-se que a proximidade entre os modos comparados é grande.

Com os modos e frequências naturais obtidas foram encontradas a massa, rigidez, força e o deslocamento modal da estrutura.

**Tabela 11: Massa modal.**

<b>Modo</b>	<b>Comando Eig</b>	<b>It. Inv. com deslocamento espectral</b>	<b>Iteração Subespacial</b>	<b>Método QR</b>
1	2,872895454420565	3,838701814761489	2,872895454420418	4,045749645570647
2	2,177323059425895	4,979188012839029	2,177323059424356	3,929162390201071
3	4,366598705816195	4,998175229980818	4,366598705807466	4,346205801696347
4	3,642386915489025	5,145572485173370	3,642386915483851	3,908887917880744

Fonte: Aatoria própria

**Tabela 12: Rigidez modal ( $10^4$ ).**

<b>Modo</b>	<b>Comando Eig</b>	<b>It. Inv. com deslocamento espectral</b>	<b>Iteração Subespacial</b>	<b>Método QR</b>
1	0,050769100663943	0,067021015081676	0,050769100664179	0,071495490969237
2	0,191539073835849	0,443635384766496	0,191539073836941	0,345648351039005
3	0,736844646527365	0,846298068962690	0,736844646513699	0,733403432154302
4	1,137441869958737	1,608342600369980	1,137441869952710	1,220664604264440

Fonte: Aatoria própria

**Tabela 13: Constante C da força modal em  $F=CP_1$** 

<b>Modo</b>	<b>Comando Eig</b>	<b>It. Inv. com deslocamento espectral</b>	<b>Iteração Subespacial</b>	<b>Método QR</b>
1	1,000000000000000	0,641763603615891	1,000000000000000	0,907590792071025
2	1,000000000000000	0,761707454796649	1,000000000000000	1,000000000000000
3	-0,90145237956641	-0,424428734910832	-0,90145237956447	-0,76351593860555
4	0,154356413776708	0,077178206888354	0,154356413777727	0,109146466901147

Fonte: Aatoria própria

**Tabela 14: Constante C em  $u(t) = CP_t \cos(\Omega t)$ , para o comando Eig**

$\Omega$	N=1	N=2	N=3	N=4
$\Omega=0$	0,001969702017	0,002491788701	0,002602071974	0,002604166666
$\Omega=0,5\omega_1$	0,002626269356	0,003175962149	0,003289210379	0,003291335131
$\Omega=1,3\omega_3$	-0,000130119592	-0,000363007928	-0,000522838758	-0,000498700329

Fonte: Autoria própria

**Tabela 15: Constante C em  $u(t) = CP_t \cos(\Omega t)$ , para Iteração Subespacial**

$\Omega$	N=1	N=2	N=3	N=4
$\Omega=0$	0,001969702017	0,002491788701	0,002602071974	0,002604166666
$\Omega=0,5\omega_1$	0,002626269356	0,003175962149	0,003289210379	0,003291335131
$\Omega=1,3\omega_3$	-0,000130119592	-0,000363007928	-0,000522838758	-0,000498700329

Fonte: Autoria própria

**Tabela 16: Constante C em  $u(t) = CP_t \cos(\Omega t)$ , para o Método QR**

$\Omega$	N=1	N=2	N=3	N=4
$\Omega=0$	0,001923395977	0,001441441439	0,001520927922	0,001521903861
$\Omega=0,5\omega_1$	0,001536173418	0,001840782562	0,001922406033	0,001923395977
$\Omega=1,3\omega_3$	-0,000761103419	-0,000205164092	-0,000320361893	-0,000309115536

Fonte: Autoria própria

**Tabela 17: Constante C em  $u(t) = CP_i \cos(\Omega t)$ , para Iteração Inversa com deslocamento espectral.**

$\Omega$	N=1	N=2	N=3	N=4
$\Omega=0$	0,006145244479	0,007453071281	0,007665927434	0,007669630921
$\Omega=0.5\omega_1$	0,008193659305	0,009593090226	0,009813539639	0,009817313542
$\Omega=1.3\omega_3$	-0,000547488940	-0,000114175318	-0,000145283105	-0,000141056474

Fonte: Autoria própria

Na análise por superposição modal, os modos de vibração constituem padrões de deslocamento cujas amplitudes servem para descrever a deformação da estrutura.

Observa-se pela tabela (11) que o maior valor de massa modal se encontra no terceiro modo para três métodos e no quarto modo para os valores calculados com a Iteração Inversa com deslocamento espectral. Ao comparar as tabelas (14) e (15), nota-se que os valores da constante C utilizando os modos de vibrar calculados pelo método de Iteração Subespacial e pelo comando Eig são iguais, devido ao fato de que a diferença entre as frequências naturais e modos de vibrar para estas duas formas apresentarem valores muito próximos de zero.

A solução para um modo é bastante imprecisa para qualquer uma das três frequências adotadas. A solução considerando três modos se torna mais precisa para o caso em que  $\Omega=0$  e  $\Omega=0,5\omega_1$ , já para o caso em que  $\Omega=1,3\omega_3$ , esse valor é bem próximo da frequência  $\omega_4$ , assim o quarto modo exerce uma contribuição importante nesta frequência.

## 4 CONCLUSÃO

A partir dos dados apresentados neste trabalho pode-se concluir que a aplicação do método computacional adequado pode implicar em um menor custo computacional e também em um resultado mais preciso.

O método da Iteração Subespacial foi o que demonstrou maior eficácia para a solução do problema de autovalores e autovetores para os dois casos estudados. Já o método da iteração inversa com deslocamento espectral apresentou os piores resultados.

A utilização do método QR apresentou resultados satisfatórios em relação as frequências naturais e os modos de vibrar, porém o custo computacional se torna muito elevado quando se trata de matrizes grandes, assim ele obteve um melhor desempenho para o segundo caso, que se tratava de uma matriz pequena.

A superposição modal fornece uma boa aproximação para o deslocamento nodal, cujas amplitudes servem para descrever a deformação da estrutura, sendo assim, é válida sua aplicação para avaliação do comportamento de sistemas dinâmicos.

## REFERÊNCIAS

ALLEMANG, R., 1982. Experimental Modal Analysis Bibliography. Proceedings of the I-IMAC.

ARAUJO, A. A. **Ajuste de modelo de elementos finitos segundo método da função objetivo.** In: Nono Simpósio de Mecânica Computacional, 26-28, 2010, São João Del-Rei, MG.

ARGENTA, M. A. **Análise de torres de transmissão submetidas a cargas dinâmicas.** Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. 2007.

BATHE, Klaus-Jürgen. The subspace iteration method – Revisited. **Computers and structures**, 2012.

BENFRATELLO, Salvatore; MUSCOLINO, Giuseppe. Mode- superposition correction method for deterministic and stochastic analysis of structural systems. **Computers&structures**v.79, p. 2471-2480, 2001.

CHAPRA, Steven C. **Métodos numéricos aplicados com MATLAB para engenheiros e cientistas.** 5. ed. Porto Alegre, RS: AMGH, 2008.

CRAIG, R. R.; KURDILA, A. J. **Fundamentals of structural dynamics.** [S.l.]: John Wiley& Sons, 2006.

MACIEL, S. T. R. **Fatoração QR como ferramenta para a determinação de poços principais em redes de monitoramento de aquíferos freáticos.** Dissertação (Mestrado)-Universidade de Brasília, Brasília, 2008.

MAMEDE, A. L.G.Z. **Simulações de modelos dinâmicos com amortecimento não-proporcional.** Dissertação (Mestrado)-Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

PARISENTI, Ronaldo. **Estudo de análise dinâmica e métodos da NBR 15421 para projeto de edifícios submetidos a sismos.** Florianópolis, 2011.



QIU, Zhiping; NI Zao. Interval modal superposition method for impulsive response of structures with uncertain-but-bounded external loads. **Applied mathematical modelling** v.35, p.1538-1550, 2011.

RAO, Singiresu. **Vibrações mecânicas**. 4. ed. São Paulo: Pearson, 2008.

TSAI, Hsiang-Chuan. Modal superposition method for dynamica analysis of structures excited by prescribed support displacements. **Computers & Structures** v. 66, n. 5, p. 675-683, 1998.

WAN *et. al.* Structural response reconstruction based on the modal superposition method in the presence of closely spaced modes. **Mechanical systems and signal processing** v.42, p.14-30, 2014.