

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

JULIANE CRISTINA LESNIOSKI

**MODELO COSMOLÓGICO COM FONTES FERMIÔNICAS E FLUIDO
RELATIVÍSTICO NO FORMALISMO DE SCHUTZ:
UMA ANALISE CLÁSSICA E QUÂNTICA.**

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2022

JULIANE CRISTINA LESNIOSKI

**MODELO COSMOLÓGICO COM FONTES FERMIÔNICAS E
FLUIDO RELATIVÍSTICO NO FORMALISMO DE SCHUTZ:
UMA ANÁLISE CLÁSSICA E QUÂNTICA.**

**Cosmological model with fermionic sources and relativistic fluid in
Schutz's formalism: an classical and quantum analyses**

Dissertação apresentado(a) como requisito
para obtenção do título(grau) de Mestre em
Nome do Curso, do , da Universidade Tec-
nológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador(a): Prof(a). Dr(a). Marlos de Oli-
veira Ribas

Coorientador(a): Prof(a). Dr(a). Fernando
Pablo Devecchi

CURITIBA

2022



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es).

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



JULIANE CRISTINA LESNIOSKI

MODELO COSMOLÓGICO COM FONTES FERMIONICAS E FLUIDO RELATIVÍSTICO NO FORMALISMO DE SCHUTZ: UMA ANALISE CLÁSSICA E QUÂNTICA.

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestra Em Física da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Física .

Data de aprovação: 20 de Junho de 2022

Dr. Marlos De Oliveira Ribas, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Antonio Carlos Amaro De Faria Junior, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Clisthenis Ponce Constantinidis, Doutorado - Universidade Federal do Espírito Santo (Ufes)

Dr. Fernando Pablo Devecchi, Doutorado - Universidade Federal do Paraná (Ufpr)

Dr. Rubens Eduardo Garcia Machado, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 20/06/2022.

Dedico este trabalho aos meus pais, avó,
namorado e aos meus amigos, pelo apoio e
incentivo.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas e a UTFPR às quais presto minha homenagem. Certamente esses parágrafos não irão atender a todas as pessoas que fizeram parte dessa importante fase de minha vida. Portanto, desde já peço desculpas àquelas que não estão presentes entre estas palavras, mas elas podem estar certas que fazem parte do meu pensamento e de minha gratidão.

A minha família, pelo carinho, incentivo e total apoio em todos os momentos da minha vida.

Ao meu orientador, que me mostrou os caminhos a serem seguidos e pela confiança depositada.

A todos os professores e colegas do departamento, que ajudaram de forma direta e indireta na conclusão deste trabalho.

Enfim, a todos os que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Cada uma das culturas humanas concebeu seus próprios conceitos de céu, para Compreender o funcionamento da maquina do universo, como fizeram os gregos, ou antecipar o futuro do tempo. (Ulisses Capozzoli)

RESUMO

LESNIOSKI, Juliane Cristina. **Modelo cosmológico com fontes fermiônicas e fluido relativístico no formalismo de Schutz: uma análise clássica e quântica.** 2022. 106 f. Dissertação (Mestrado em Nome do Curso) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2022.

Neste trabalho propomos um modelo cosmológico para o universo primordial, onde o fluido relativístico de Schutz e o campo fermiônico assumem o "papel" de fonte para o campo gravitacional. Da análise clássica, baseada no formalismo hamiltoniano, juntamente com o método de Dirac para sistemas vinculados, é mostrado que os graus de liberdade do fluido podem ser incorporados pela variável de tempo conforme, e a expressão para o fator de escala em função do tempo conforme é obtida. O valor esperado para o fator de escala na análise quântica, é determinado pela equação de Wheeler-De Witt. A singularidade presente na solução clássica é evitada na solução quântica, a qual apresenta um valor mínimo para o fator de escala, do qual o universo começa a se expandir, e conforme a evolução do tempo ocorre a diluição dos efeitos quânticos, tendo como consequência em altos valores de tempo conforme, a solução clássica e quântica coincidirem. Finalizando nossa análise com a formulação de Bohm na mecânica quântica, vemos que o potencial quântico apresenta valores elevados quando o fator de escala tende a zero, confirmando mais uma vez, que a singularidade é evitada.

Palavras-chave: Cosmologia. Campo fermiônico. Formalismo de Schutz. Mecânica clássica. Mecânica quântica.

ABSTRACT

LESNIOSKI, Juliane Cristina. **Cosmological model with fermionic sources and relativistic fluid in Schutz's formalism: an classical and quantum analises.** 2022. 106 p. Dissertation (Master's in Physics and Astronomy) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2022.

In this work we propose a cosmological model for the eearly universe, where the relativistic Schutz fluid and the fermionic field take the role of the source for the gravitational field. From the classical analysis, based on hamiltonian formalism together with Dirac's method for constrained systems, it is shown that the fluid degrees of freedom can be embodied by a conformal time variable, and an expression for the scale factor as a funtion of the conformal time is obtained. The expected value for the scale factor in quantum analysis, is determined by the Wheeler-De Witt equations. The singularity in the classical solution can be avoided on the quantum solution, which have a minimum value for the scale factor, from which the universe begins to expand, and according to the evolution of time the quantum effects are diluted, resulting for hight levels of conformal time, the quantum and classical solutions coincide. Finishing our analysis with Bohm formulation in quantum mechanics, we can see that the quantum potential assume high values when scale factor goes to zero, confirming again that the singularity can be avoided.

Keywords: Cosmology. Fermionic field. Schutz formalism. Classical mechanics. Quantum mechanics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Curvatura do espaço tempo.	39
Figura 2 – Distância entre dois pontos na superfície de uma esfera, em coordenadas polares.	39
Figura 3 – Três possibilidades de curvatura do espaço tempo.	49
Figura 4 – Evolução do fator de escala para a solução clássica com a escolha de $\omega = 1/3$	84
Figura 5 – Evolução do fator de escala para a solução clássica com a escolha de $\omega = -1/3$	85
Figura 6 – Evolução do fator de escala para a solução quântica com a escolha de $\omega = 1/3$	85
Figura 7 – Evolução do fator de escala para a solução quântica com a escolha de $\omega = -1/3$	86
Figura 8 – Evolução do potencial quântico com a escolha de $\omega = 1/3$	86
Figura 9 – Evolução do potencial quântico com a escolha de $\omega = -1/3$	87
Figura 10 – Evolução do fator de escala para a soluções clássica e quântica com a escolha de $\omega = 1/3$	87
Figura 11 – Evolução do fator de escala para a soluções clássica e quântica com a escolha de $\omega = -1/3$	88

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	MECÂNICA CLÁSSICA	13
2.1	CONCEITOS BÁSICOS	13
2.2	FORMALISMO LAGRANGIANO	13
2.3	FORMALISMO HAMILTONIANO	14
2.4	MULTIPLICADORES DE LAGRANGE	15
2.5	PARÊNTESES DE POISSON	17
2.6	SISTEMAS HAMILTONIANOS VINCULADOS	17
2.6.1	Vínculos de primeira e segunda classe	21
3	ELEMENTOS DA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL	22
3.1	DERIVADAS COVARIANTES	23
3.2	PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA	25
3.3	FORÇAS GRAVITACIONAIS	26
3.4	RELAÇÕES FUNDAMENTAIS	29
3.5	TENSOR ENERGIA-MOMENTO	31
3.6	EQUAÇÕES DE EINSTEIN	33
4	COSMOLOGIA	36
4.1	A MÉTRICA DE ROBERTSON-WALKER E A MEDIDA DE DISTÂNCIA	37
4.2	MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO	43
4.3	PARÂMETROS COSMOLÓGICOS	47
4.3.1	Parâmetro de densidade	47
4.3.2	Parâmetro de desaceleração	48
4.4	PROBLEMAS COM O MODELO PADRÃO E SOLUÇÃO INFLACIONÁRIA	49
4.4.1	Solução inflacionária	50
4.4.2	Solução para os principais problemas do modelo padrão	53
5	MODELOS COSMOLÓGICOS COM FONTES FERMIÔNICAS	56
5.1	O FORMALISMO DAS TETRADAS	56
5.2	O FLUIDO DE SCHUTZ	60
5.3	COSMOLOGIA QUÂNTICA COM FONTES FERMIÔNICAS E O FLUIDO DE SCHUTZ	65
5.3.1	Análise Clássica	69
5.3.2	Análise Quântica	74
5.3.2.1	A Equação de Weeler-De Witt	74
5.3.2.2	Formulação de Bohm na Mecânica Quântica e o Potencial Quântico	79
6	COMPARAÇÃO ENTRE A FORMULAÇÃO CLÁSSICA E A FORMULAÇÃO QUÂNTICA	84
7	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	89

REFERÊNCIAS	90
APÊNDICES	94
APÊNDICE A – O FLUIDO DE SCHUTZ	95
APÊNDICE B – TEOREMA DE PAFF	99
APÊNDICE C – DEDUÇÃO DE 482 E 483	101
APÊNDICE D – DEDUÇÃO DA CONSTANTE 486	102
APÊNDICE E – DEDUÇÃO DA CONSTANTE 492	103
APÊNDICE F – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO 500 .	104
APÊNDICE G – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO 505 .	106

1 INTRODUÇÃO

Muitos modelos cosmológicos que descrevem o período inflacionário do universo, com o principal constituinte sendo os campos fermiônicos, foram propostos nos últimos anos, destes podemos citar, por exemplo, Ribas *et al.* (2005), Ribas *et al.* (2007), Chimento *et al.* (2008), Chimento *et al.* (2011), Armendariz-Picon and Greene (2003). Efeitos quânticos também podem ser considerados em teorias cosmológicas como candidatos para descrever os períodos da era de Planck e da era pré-inflacionária, como explica por exemplo Ribas *et al.* (2017), Ribas *et al.* (2020), Vakili (2008), Jr *et al.* (1998), Alvarenga *et al.* (2002).

Estes trabalhos têm importância fundamental quando analisamos o período pré-inflacionário, uma vez que estes resolvem alguns dos problemas do modelo padrão, e também provam que a teoria do Big Bang sempre esteve correta, visto que o modelo assume os efeitos quântico neste período, e após a era de Planck, voltamos a formulação clássica.

Neste trabalho consideramos fontes fermiônicas com potencial de auto-interação e o fluido relativístico no formalismo de Schutz, como constituintes da teoria pré-inflacionária. Assumimos que a física, no nível quântico, é controlada pelas equações de Wheeler-De Witt, trabalhando com a estrutura hamiltoniana. O objetivo é investigar a relação entre os modelos cosmológicos com domínio da mecânica quântica, e como o campo fermiônico acaba controlando a evolução do universo primordial.

Trabalhando com o conceito de valor esperado para o fator de escala, a física clássica emerge ao fim da era de Planck, onde inicialmente as fontes fermiônicas e do fluido relativístico contribuem com a hamiltoniana com o termo de interação cinético. Como o universo evolui devido a dinâmica particular deste modelo, os graus de liberdade do fluido são absorvidos em uma variável de tempo, que pode ser associada ao tempo conforme.

Este trabalho está dividido em seis partes, sendo os três capítulos iniciais de introdução teórica, e os três últimos, com o desenvolvimento do modelo proposto. No capítulo 2, é apresentado conceitos básicos da mecânica clássica, como o formalismo lagrangiano e hamiltoniano, assim como o comportamento e resolução de sistemas vinculados. No capítulo 3, é apresentado o princípio da equivalência, a qual rege a relatividade geral, assim como formalismos matemáticos necessários para alcançar relações fundamentais, como o tensor de curvatura, o tensor de energia momento e as equações de Einstein, as quais também se encontram neste capítulo. No capítulo 4, é apresentado o modelo cosmológico padrão, e como este necessita da teoria inflacionária. Ainda

neste capítulo também é apresentado a métrica de Robertson-Walker, a qual será utilizada no modelo proposto. No capítulo 5, começamos com uma revisão do formalismo de Tetradas e do fluido relativístico de Schutz, que serão utilizados para desenvolver o modelo proposto, também presente neste capítulo. Além disso, são apresentadas as soluções clássicas e quânticas através do conceito de valor esperado para o fator de escala. O potencial quântico, derivado da formulação Bohmiana, assim como as soluções quânticas evitam a singularidade neste período. Finalmente nos capítulos 6 e 7, é apresentado, respectivamente, uma comparação entre os resultados obtidos do modelo, para a formulação clássica e quântica, e as conclusões finais do trabalho.

2 MECÂNICA CLÁSSICA

2.1 CONCEITOS BÁSICOS

A física sempre fez uso da matemática, que por sua vez, ao longo do tempo, ambas se desenvolveram através de diferentes mentalidades, regiões e contextos históricos. Sendo assim neste tópico serão apresentados as definições de alguns conceitos básicos para melhor entendimento do trabalho.

Primeiramente devemos compreender o que são as coordenadas generalizadas. São definidas como qualquer conjunto de números que caracteriza a configuração de um sistema, sendo que para sistemas em movimento estes números variam com o tempo e são tratados como variáveis algébricas. Este movimento deve ser descrito em um espaço de configuração, o qual apresenta todas as possíveis posições instantâneas de um sistema mecânico.

Alguns destes movimentos descritos no espaço de configurações, podem ter restrições de natureza geométrica e cinemática, que são denominadas como vínculos. Estes podem ser classificados como vínculos holônomos, ou seja, aqueles que possuem restrição em toda a configuração do sistema, ou vínculos não-holônomos, que são aqueles que possuem restrição apenas sobre as velocidades do sistema.

Em um sistema mecânico, para descrever o movimento de uma partícula, também fazemos uso do conceito de graus de liberdade, que são apresentados como quantidades necessárias para descrever a posição de uma partícula, em outras palavras, são as coordenadas utilizadas para configurar um sistema, menos o número de equações independentes de vínculos.

2.2 FORMALISMO LAGRANGIANO

Em homenagem a seu criador, Joseph-Louis Lagrange, a formulação de Lagrange ou Lagrangiana, foi desenvolvida ao combinar a conservação do momento linear com a conservação de energia. Nesta formulação as restrições de um sistema são tratadas como equações adicionais, geralmente utilizando os multiplicadores de Lagrange.

Para encontrar as equações que descrevem um sistema mecânico, como Lemos (2007) explica, vamos considerar este com n graus de liberdade, com as coordenadas generalizadas q_i , e com um parâmetro temporal t que aponta a evolução da trajetória dessa partícula no espaço de

configuração. Logo temos uma função do tipo $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$. Logo a ação deste sistema é

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt. \quad (1)$$

Pelo princípio de Hamilton, a evolução de um sistema é aquela que minimiza a ação, ou seja,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0, \quad (2)$$

desta chegamos em

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad , i = 1, 2, \dots, n; \quad (3)$$

Este conjunto de equações é conhecido como as equações de Euler-Lagrange, que representa a dinâmica associada a uma lagrangiana conhecida.

2.3 FORMALISMO HAMILTONIANO

Desenvolvido no século XIX por Hamilton, o formalismo hamiltoniano é baseado na substituição do conjunto de n equações, ou seja, as equações de Lagrange, por um conjunto duplicado de equações, porém de primeira ordem. Esta formulação escolhe as variáveis p para os momentos canônicos conjugados, e q para as posições. O procedimento adotado por Hamilton para reduzir a ordem das equações de movimento, foi introduzir uma variável adicional p :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad , i = 1, 2, \dots, n; \quad (4)$$

Onde sua garantia de resolução para velocidades generalizadas é explicada pelo teorema da função explícita de Spivak 1965; Protter Morrey Jr. 1985, onde a matriz hessiana é

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}; \quad (5)$$

Esta deve possuir o $\det W \neq 0$, ou seja, ela será não singular, assim podemos resolver (4) para velocidades generalizadas, logo podemos escrever $\dot{q}_i = f(q, p, t)$. O que nos leva a introduzimos uma função do tipo $H(q, p, t)$, no lugar da Lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$, gerando assim a dinâmica do sistema. Esta substituição ocorre através de uma transformação de Legendre, que consiste na mudança entre as velocidades generalizadas e os momentos canônicos. A função de Hamilton ou hamiltoniana é definida como:

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t), \quad (6)$$

tomando a diferencial da hamiltoniana

$$dH = \sum_{i=1}^n (d\dot{q}_i p_i + \dot{q}_i dp_i) - \left(\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right] + \frac{\partial L}{\partial t} dt \right), \quad (7)$$

podemos fazer uma eliminação de termos pelas Equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (8)$$

Que implica em

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (9)$$

logo

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (10)$$

e através da relação de dependência temporal

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad (11)$$

podemos escrever 10 da seguinte forma

$$dH = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (12)$$

Ao compararmos as equações 10 e 12, chegamos às equações de Hamilton que descrevem o movimento de um sistema

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad e \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

Ao contrário da formulação lagrangiana que utiliza um ponto no espaço de configurações, a formulação hamiltoniana irá especificar completamente o estado do sistema mecânico no espaço de fase.

2.4 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Como já foi dito no tópico anterior, é possível deduzir as equações de Euler-Lagrange a partir do princípio de Hamilton, assim deduzimos as equações de Hamilton com vínculos, os quais são descritos como

$$\sum_{i=1}^n a_{mi} dq_i + a_{mt} dt = 0. \quad (14)$$

Neste contexto vamos supor que um sistema seja descrito por n coordenadas e esteja submetido a M vínculos diferenciais e independentes. Sendo assim, pelo princípio de Hamilton, os vínculos ainda não estão inclusos na lagrangiana L

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i dt = 0. \quad (15)$$

Os coeficientes de δq_i não são mais independentes, logo sua nulidade não é mais válida. Cada δq_i é um deslocamento virtual, pois ao executar a variação que leva q_i em $q_i + \delta q_i$, o tempo permanece fixo. Os deslocamentos virtuais devem obedecer à

$$\sum_{i=1}^n a_{mi} dq_i = 0. \quad (16)$$

Para existir compatibilidade com os vínculos, sendo em deslocamentos virtuais $dt = 0$ as n variações $\delta q_1, \dots, \delta q_n$, devem satisfazer as M equações de vínculos, de modo que apenas $(n - M)$ variações de q sejam independentes entre si. Portanto estamos a procura de determinar um extremo condicionado para o funcional S , de acordo com o cálculo diferencial, a equação

$$\int_{t_2}^{t_1} \sum_{m=1}^M \lambda_m \left(\sum_{i=1}^n a_{mi} \delta q_i \right) dt = \int_{t_2}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{m=1}^M \lambda_m a_{mi} \right) \delta q_i dt = 0, \quad (17)$$

é uma consequência de 14, para os valores arbitrários dos multiplicadores de Lagrange. Somando 15 com 17, obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_{m=1}^M \lambda_m a_{mi} \right) \delta q_i dt = 0. \quad (18)$$

Com uma numeração adequada é possível escolher as primeiras variações de q como sendo independentes, e as últimas equações serão aquelas escritas em função das primeiras escolhidas. Também existem M multiplicadores de Lagrange e é possível escolhê-los de tal modo que o coeficientes dos M últimos δq 's em 18 sejam nulos, isto é,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_{m=1}^M \lambda_m a_{mi} = 0, \quad i = n - M + 1, \dots, n. \quad (19)$$

Com os multiplicadores de Lagrange determinados pela equação acima (19), a equação 18 reduz-se à

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n-M} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_{m=1}^M \lambda_m a_{mi} \right) \delta q_i dt = 0, \quad (20)$$

que só envolve as $n - M$ primeiras variações de q independentes entre si, o que implica na equação 19 com a diferença de que os índice i assume, apenas os seguintes valores: $i = 1, \dots, n - M$.

Nesta equação não está incluso as M equações de vínculo, as quais podem ser escritas na forma

$$\sum_{i=1}^n a_{mi} \dot{q}_i + a_{mt} = 0, \quad m = 1, \dots, M; \quad (21)$$

O que completa nosso conjunto de equações, sendo então, possível descrever o movimento do sistema.

2.5 PARÊNTESES DE POISSON

Essenciais para o formalismo hamiltoniano, os parênteses de Poisson são utilizados, principalmente em transformações canônicas, classificação de vínculos e na descrição das equações de movimento de Hamilton. Para determinar os parênteses de Poisson, primeiro devemos imaginar um espaço de fase definido pelos eixos coordenados (q_i, p_i) , com as funções $f(q, p)$ e $g(q, p)$ presentes, conseguimos definir

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right), \quad (22)$$

para um sistema com o número de graus de liberdade finitos.

Os parênteses de Poisson têm as seguintes propriedades:

- i Antissimétrica: $\{f, g\} = - \{g, f\}$;
- ii Linearidade: $\{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\}$;
- iii Regra de Leibniz: $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$;
- iv Identidade de Jacobi: $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$.

Para os casos especiais que possui as variáveis q_i e p_i , escreve-se

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad e \quad \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad (23)$$

que são chamados de parênteses fundamentais de Poisson.

2.6 SISTEMAS HAMILTONIANOS VINCULADOS

Em sua busca por respostas ao trabalhar com teorias que abrangem campos gerais, Dirac percebeu que ao escrever uma teoria clássica na forma hamiltoniana, era possível aplicar uma

série de regras, para chegar à um primeiro passo, para então chegar às teorias quânticas, como ele explica em Dirac (2001).

A quantização de sistemas regulares ocorre de forma direta, primeiramente escrevemos as equações de movimento de Hamilton na forma dos parênteses de Poisson, em seguida substituímos estes pelos comutadores e operadores correspondentes, e dividimos por i . O mesmo não ocorre em sistemas singulares, ou seja, quando um sistema descrito por uma Lagrangiana sem dependência temporal explícita possui sua matriz hessiana (W) com $\det W = 0$. Neste caso, nem todos os momentos canônicos podem ser resolvidos, pois não constituem um conjunto de equações independentes, logo a consequência dessa situação será o surgimento de relações funcionais entre as coordenadas e os momentos do tipo

$$\phi_m(q, p) = 0 \quad , m = 1, 2, \dots, M; \quad (24)$$

Chamados de vínculos primários. Estes vínculos são decorrentes apenas da lagrangiana e tornam as coordenadas e momentos mutuamente dependentes.

Neste caso os vínculos devem ser adicionados a hamiltoniana, resultando em uma hamiltoniana modificada

$$H_T = H + \sum_{m=1}^M \lambda_m \phi_m, \quad (25)$$

que de acordo com o princípio da mínima ação, acrescentamos os vínculos por meio dos multiplicadores de Lagrange λ_m

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H - \sum_m \lambda_m \phi_m \right) dt = 0, \quad (26)$$

logo as equações de movimento podem ser escritas na forma

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_m \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} \quad e \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_m \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i}, \quad (27)$$

com a condição : $\phi_m = 0$.

Para usarmos a notação compacta dos parênteses de Poisson, devemos introduzir a noção de igualdade fraca, denotada pelo símbolo \approx . Este tipo de igualdade não é necessariamente válida em todo o espaço de fase, contrariamente ao que acontece com a igualdade forte ($=$). Assim a equação de vínculo se torna

$$\phi_m(q, p) \approx 0, \quad (28)$$

com isso podemos escrever as equações de movimento de uma função qualquer $F(q, p)$ da seguinte forma:

$$\dot{F} = \{F, H\} + \sum_m \lambda_m \{F, \phi_m\} \approx \{F, H_T\}. \quad (29)$$

Esta equação deixa claro que só podemos utilizar as equações de vínculos, depois de calcular todos os parênteses de Poisson. Se advir de a função (variável dinâmica) $F(q, p)$ for o vínculos então a igualdade fraca deve ser mantida, assim como o vínculos primários devem ser preservados no tempo, o que nos leva à condição de consistência

$$\{\phi_m, H\} + \sum_{m'}^M \lambda_{m'} \{\phi_m, \phi_{m'}\} \approx 0. \quad (30)$$

Ao assumir a condição de consistência, de acordo com o algoritmo de Dirac-Bergman Aguiar (2014), temos a possibilidade de encontrar os três casos descritos a seguir.

1. As condições de consistência são identicamente satisfeitas. Neste caso a dinâmica contém funções arbitrárias do tempo, sendo elas os multiplicadores de Lagrange e os únicos vínculos presentes, são os primários.
2. Os multiplicadores de Lagrange são identificados a partir da condição de consistência

$$\lambda_m \approx \sum_{m'} C_{mm'} \{\phi_{m'}, H\}. \quad (31)$$

Neste caso a equação de movimento para uma função arbitrária $F(q, p)$, pode ser escrita através dos parênteses de Dirac, o qual possui propriedades análogas as propriedades dos parênteses de Poisson, definido como

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} - \sum_{m', m''} \{F, \phi_{m'}\} C_{m'm''} \{\phi_{m''}, G\}, \quad (32)$$

sendo $C_{m'm''}$, a matriz descrita por

$$C_{m'm''} = \begin{pmatrix} \{\phi_{m'}, \phi_{m'}\} & \{\phi_{m'}, \phi_{m''}\} \\ \{\phi_{m''}, \phi_{m'}\} & \{\phi_{m''}, \phi_{m''}\} \end{pmatrix}; \quad (33)$$

Logo a equação de movimento se se reduz à

$$\dot{F} = \{F, H\}_D. \quad (34)$$

3. As condições de consistência geram vínculos secundários. A diferença entre os vínculos primários e secundários, é que os primários originam-se da lagrangiana e da definição dos momentos, enquanto para os secundários é necessário utilizar as equações de movimento. Caso existam vários vínculos secundários, devemos repetir o procedimento criado por Dirac para resolver a equação 30. Este algoritmo parte da equação 30 e impõem a restrição de que, as incógnitas referentes aos multiplicadores de lagrange devem ser solúveis para $M \geq m$, assim a solução geral para 30 é:

$$\lambda_m = U_m + \sum_{a=1}^A v_a V_m^{(a)}, \quad (35)$$

onde U_m é uma solução particular das equações não-homogêneas e $V_m^{(a)}$, com $a = 1, \dots, A$. Estas são soluções linearmente independentes das equações homogêneas, ou seja,

$$\sum_{m=1}^M \{\phi_{m'}, \phi_m\} V_m^{(a)} \approx 0, \quad (36)$$

sendo os coeficientes v_a totalmente arbitrários.

Substituindo 35 em 25 (a hamiltoniana total), chegamos a hamiltoniana final desta teoria,

$$H_T = H + \sum_m U_m \phi_m + \sum_{m,a} v_a V_m^{(a)} \phi_m = H' + \sum_a v_a \phi_a, \quad (37)$$

onde H' tem forma

$$H' = H + \sum_{m=1}^M U_m \phi_m; \quad (38)$$

E definindo ϕ_a como

$$\phi_a = \sum_{m=1}^M V_m^{(a)} \phi_m, \quad (39)$$

logo para a hamiltoniana final, as equações de movimento escrevem-se simplesmente

$$\dot{F} \approx \{F, H_T\}. \quad (40)$$

Como explicado em Junior (2016), os coeficientes v_a são arbitrários, de modo que a solução geral das equações de movimento contém funções arbitrárias ao tempo. O estado físico do sistema deve ser determinado apenas pelas condições iniciais do sistema, o que não ocorre quando falamos de variáveis dinâmicas em tempos futuros, pois não podem ser encontradas univocamente.

2.6.1 Vínculos de primeira e segunda classe

Para Dirac a principal distinção entre os vínculos é, entre vínculos de primeira e de segunda classe, pois eles têm um papel fundamental para a transição à teoria quântica. Como explica Aguiar (2014), uma função $F(q, p)$ é dita de primeira classe se o seu parêntese de Poisson com qualquer um dos vínculos é fracamente zero, ou seja,

$$\{F, \phi_{m'}\} \approx 0 \quad \text{com} \quad m' = 1, \dots, M. \quad (41)$$

Para estes vínculos, as equações de movimento são descritas na forma

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \quad e \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}. \quad (42)$$

Estes vínculos apresentam um significado físico importante, uma vez que geram transformações de calibre, que em outras palavras, são transformações canônicas infinitesimais que mudam os p 's e q 's, mas não alteram o estado físico do sistema.

De acordo com Aguiar (2014), dizemos que F é de segunda classe se o seu parêntese de Poisson com pelo menos um dos vínculos não é fracamente zero, ou seja,

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}_D \quad e \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}_D; \quad (43)$$

Para os vínculos secundários, as equações de movimento são descritas de acordo com a equação acima.

3 ELEMENTOS DA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

No fim do século XIX, os cientistas imaginavam que o universo fosse preenchido por um meio contínuo denominado éter, por esse motivo, acreditavam estar próximos de uma descrição completa do universo, porém problemas nesta teoria começaram a surgir, em particular, com a propagação da luz. Como descrito nos livros de Hawkin, Hawking (2016) e Hawking (2015), a ideia da existência do éter foi totalmente refutada quando, em 1905, Einstein apresentou sua teoria, chamada de teoria da relatividade especial, que considerava dois importantes postulados:

- i As leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais, como ele mesmo explica em Einstein (1997)(p 16).

“If a mass m is moving uniformly in a straight line with respect to a co-ordinate system K , then it will also be moving uniformly and in a straight line relative to a second co-ordinate system K_1 provided that the latter is executing a uniform translatory motion with respect to K .”.

- ii A velocidade da luz, no vácuo tem valor constante e igual a $3 \cdot 10^8 m/s$, para todos os referenciais inerciais. Além disso, nada pode se mover mais rápido que a velocidade da luz.

Seguindo seus estudos, ao divagar sobre as semelhanças entre corpos em queda livre presentes em um campo gravitacional e corpos sendo acelerados, Einstein percebeu uma incompatibilidade em sua teoria, pois, ele possuía apenas uma relação entre massa e energia e não entre massa e peso, já que considerando a física Newtoniana, uma variação nas massas ou na distância entre dois corpos produz uma alteração instantânea na intensidade da força gravitacional entre eles.

A partir de seu pensamento: “se um homem cai livremente, não sente o próprio peso”, ele percebe uma relação estreita entre a aceleração e um campo gravitacional. Alguém dentro de uma caixa fechada, não saberia dizer se esta estaria em repouso em um campo gravitacional, ou se esta estava sendo acelerada por um foguete no espaço livre, assim sistemas acelerados e sistemas sujeitos a campos gravitacionais são fisicamente equivalentes. Mais tarde essa concepção passou a ser chamada de Princípio da equivalência. Assim, em 1915, Einstein apresentou suas novas hipóteses, chamando de teoria da Relatividade geral. Neste trabalho ele apresenta uma nova teoria da gravitação, embasada no princípio da equivalência, princípio da covariância geral

e na teoria dos espaços curvos, desenvolvida anteriormente por George Friedrich Riemann, Einstein encara o espaço e o tempo como entidades unificadas, e aquilo que concebemos como força gravitacional seria uma consequência da curvatura do espaço-tempo devida a presença de matéria-energia, como é explicado em Matsas (2005) e Peduzzi (2015).

3.1 DERIVADAS COVARIANTES

Para que uma mesma equação seja válida em todos os sistemas de coordenadas e referenciais inerciais, devemos escrever está na forma tensorial. As equações contém derivadas que precisam ser definidas em variedades não euclidianas, pois para construir as derivadas necessárias devemos fazer a diferença entre vetores em um mesmo ponto no espaço, o que não é um problema para o espaço Euclidiano, já que podemos transportar o vetor paralelamente a ele mesmo até o ponto em questão, e assim realizar a operação desejada. Já nas variedades curvas, este transporte é afetado, isto é, as componentes são modificadas.

Ao buscar uma relação matemática para a ideia acima, de acordo com Weinberg (1972), Blau (2011) e Custódio (2019), devemos impor que a derivada de um tensor se transforme como um tensor.

Seja o vetor

$$V^\alpha = \Lambda_{\beta'}^\alpha V^{\beta'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\beta'}} V'^{\beta'}, \quad (44)$$

do qual podemos obter um tensor de segunda ordem

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\nu} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^{\beta'} \partial x'^{\theta'}} \frac{\partial x'^{\theta'}}{\partial x^\nu} V'^{\beta'} + \frac{\partial x'^{\theta'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial V'^{\beta'}}{\partial x'^{\theta'}}. \quad (45)$$

Note que o segundo termo da soma define corretamente a lei de transformação de um tensor de ordem 2, mas o primeiro termo da soma não está de acordo com a nossa definição. Nestas circunstâncias, vamos redefinir a derivada de maneira a obter a lei de transformação correta.

Com a finalidade de retificar a definição de derivadas em variedades não euclidianas, vamos olhar para a lei de transformação da conexão afim.

A conexão afim é definida como

$$\Gamma_{\beta\nu}^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\nu}; \quad (46)$$

Considerando a passagem de x para x' , $x(x')$

$$\Gamma_{\beta\nu}^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^{\theta}} \frac{\partial x'^{\theta}}{\partial x^\nu} \right), \quad (47)$$

fazendo a regra do produto e a transformação necessária, temos

$$\Gamma_{\beta\nu}^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial \xi^{\alpha}} \left(\frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x'^{\theta} \partial x'^{\rho}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^{\theta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x'^{\theta}} \frac{\partial^2 x'^{\theta}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\beta}} \right); \quad (48)$$

Novamente fazendo a regra do produto, chegamos em

$$\Gamma_{\beta\nu}^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^{\theta}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\theta\rho}^{\gamma} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\gamma}} \delta_{\theta}^{\gamma} \frac{\partial^2 x'^{\theta}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\beta}}. \quad (49)$$

Trocando o índice pertinente, finalmente temos a lei de transformação da conexão afim

$$\Gamma_{\beta\nu}^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^{\theta}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\theta\rho}^{\gamma} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\gamma}} \frac{\partial^2 x'^{\gamma}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\beta}}. \quad (50)$$

Podemos notar, a partir da equação acima, que a conexão afim não é um tensor.

50 no sistema onde $x \rightarrow x'$, é escrita como

$$\Gamma_{\beta\nu}^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\theta}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\theta\rho}^{\gamma} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial^2 x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\beta}}, \quad (51)$$

donde

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial^2 x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\beta}} = \Gamma_{\beta\nu}^{\mu} - \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\theta}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\theta\rho}^{\gamma}, \quad (52)$$

note que

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}} = \delta_{\nu}^{\mu}. \quad (53)$$

Derivando esta equação em relação a x'^k , temos

$$\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^k} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial^2 x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^k} = 0; \quad (54)$$

Finalmente

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial^2 x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^k} = - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^k} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}}. \quad (55)$$

Substituindo a equação acima no lado direito da lei de transformação da conexão afim (50), já trocado x por x' e reescrito na forma

$$- \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}} = \Gamma_{\beta\nu}^{\mu} - \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\theta}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\theta\rho}^{\gamma}; \quad (56)$$

Multiplicando por $\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^k}$, temos

$$- \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^k} \Gamma_{\beta\nu}^{\mu} - \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\theta}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\theta\rho}^{\gamma}. \quad (57)$$

Trocando os índices através das relações 53, temos

$$+ \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma} \partial x^k} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}} = - \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^k} \Gamma_{\beta\nu}^{\mu} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\theta}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\theta k}^{\gamma}, \quad (58)$$

sendo a sua correspondente em $x \rightarrow x'$ é

$$+\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\gamma \partial x'^k} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\nu} = -\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^k} \Gamma_{\beta\nu}^\mu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x'^\theta}{\partial x^\nu} \Gamma_{\theta k}^{\prime\gamma}. \quad (59)$$

Substituindo esta expressão em $\frac{\partial \vec{V}^\beta}{\partial x^\nu}$, adequando os índices, temos

$$\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\beta \partial x'^\theta} \frac{x'^\theta}{\partial x^\nu} V^{i\beta} = \left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\beta} \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x'^\theta}{\partial x^\nu} \Gamma_{\theta\beta}^{\prime\gamma} \right) V^{i\beta}, \quad (60)$$

assim,

$$\frac{V^\alpha}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x'^\theta}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x'^\theta} - \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\beta} V^{i\beta} \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x'^\theta}{\partial x^\nu} \Gamma_{\theta\beta}^{\prime\gamma} V^{i\beta}, \quad (61)$$

reorganizando os termos, temos

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha V^\sigma = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x'^\theta}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x'^\rho} + \Gamma_{\theta\beta}^{\prime\gamma} V^{i\beta} \right). \quad (62)$$

Podemos perceber que a soma acima é um termo tensorial. Logo basta redefinir nossa derivada como

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha V^\sigma = \nabla_\nu V^\alpha, \quad (63)$$

chamada de derivada covariante. De modo análogo, a derivada para um vetor covariante e um tensor misto de segunda ordem, respectivamente,

$$\nabla_\nu V_\alpha = \frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\nu\alpha}^\beta V_\beta \quad (64)$$

e

$$\nabla_\nu T_\sigma^\mu = \partial_\nu T_\sigma^\mu + \Gamma_{\nu\theta}^\mu T_\sigma^\theta - \Gamma_{\nu\sigma}^\theta T_\theta^\mu. \quad (65)$$

3.2 PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA

Em sua teoria da Relatividade Geral, Einstein, abarca situações em que observadores “caem” livremente em campos gravitacionais. Para ele um observado confinado em uma sala fechada, não notará nenhuma diferença em seus experimentos, caso esta sala estivesse solta livremente no espaço, ou caindo livremente em um campo gravitacional.

Segundo Weinberg (1972) (p. 67) “the Principal of the Equivalence of Gravitation and Inertia tells us how an arbitrary physical system responds to an external gravitational field.”. Este princípio se fundamenta na equivalência entre a massa inercial e a gravitacional, o que seria uma consequência da impossibilidade de detecção de um campo gravitacional homogêneo estático e externo à esta sala caindo, pois todo o sistema (a sala, o material de estudo e os observadores) sentiriam uma mesma aceleração.

Podemos provar as afirmações acima, considerando M como a massa da terra, sendo seu raio e m a massa de uma partícula de teste. Podemos calcular o módulo da força gravitacional entre os corpos da seguinte forma

$$F = G \frac{mM}{r^2}; \quad (66)$$

Mas pela segunda Lei de Newton, esta mesma partícula fica sujeita a uma força dada por

$$F = m'a, \quad (67)$$

onde F é o módulo da força que atua na partícula, e m' é a massa inercial da partícula de teste. Note que existe uma diferença entre m e m' . Enquanto m é fruto de da interação de um campo gravitacional, ou seja, é uma massa gravitacional, m' é a massa inercial, associada a dificuldade de mudança no movimento deste corpo.

Igualando 66 e 67 temos

$$a = \frac{m}{m'} \frac{GM}{r^2} = \text{constante}. \quad (68)$$

Percebemos que $\frac{m}{m'} = \text{constante}$, o que se verifica experimentalmente. Graças a esta igualdade, em toda situação presente em um campo gravitacional arbitrário, é possível escolher um sistema de coordenadas inercial local, que em uma região suficientemente pequena as leis da natureza terão a mesma forma, de um sistema de coordenadas cartesiano acelerado.

3.3 FORÇAS GRAVITACIONAIS

Utilizando a técnica matemática de análise de tensores, vamos demonstrar uma aplicação do princípio da equivalência, considerando uma partícula se movendo livremente sob influências de forças gravitacionais, onde, de acordo com o princípio da equivalência, consideramos um sistema de coordenadas ξ^α localmente inercial. Nestas condições percebemos que a equação de movimento desta partícula é escrita na forma

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (69)$$

com

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta, \quad (70)$$

sendo $d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2}$ o tempo próprio que é medido no referencial da partícula.

Supomos agora, outro sistema de coordenadas x^μ , que pode ser o sistema de coordenadas cartesianas do laboratório, ou este pode estar acelerando o sistema. O sistema de coordenadas ξ^α

é uma função de x^μ , logo a eq. 69 se torna

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right), \quad (71)$$

que através da regra do produto chegamos em

$$0 = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}; \quad (72)$$

Multiplicando 72 por $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$, temos

$$0 = \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (73)$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ é a conexão afim, definida por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (74)$$

A conexão afim é uma relação linear entre espaços tangentes de dois pontos próximos, sendo assim este pode ser utilizado para comparar vetores em diferentes pontos de um espaço curvo. Portanto podemos interpretar a equação 73, como sendo a lei de força para uma partícula caindo livremente em um campo gravitacional.

Nestas condições, podemos demonstrar que g , além de determinar um intervalo de tempo próprio entre 2 eventos com uma separação infinitesimal, também é um potencial gravitacional. Para isso escrevemos o tensor métrico na forma

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}. \quad (75)$$

Diferenciando 75 em relação à x , temos

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}; \quad (76)$$

Podemos fazer uma substituição reescrevendo a equação 74 na forma

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda}, \quad (77)$$

assim chegamos em

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \eta_{\alpha\beta}. \quad (78)$$

Da definição do tensor métrico, encontramos

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu}; \quad (79)$$

Esta é a relação entre o tensor métrico e a conexão afim.

Elegendo agora, um sistema de coordenadas localmente inercial, em um ponto específico X , chamado de $\xi_X^\alpha(x)$, neste as equações 75 e 77 se tornam, respectivamente

$$g_{\mu\nu}(X) = \left(\frac{\partial \xi_X^\alpha(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi_X^\beta(x)}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \right)_{x=X}, \quad (80)$$

e

$$\left(\frac{\partial^2 \xi_X^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right)_{x=X} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(X) \left(\frac{\partial \xi_X^\alpha}{\partial x^\lambda} \right)_{x=X}. \quad (81)$$

Diferenciando a equação 80 em relação a X^λ , temos

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}(X)}{\partial X^\lambda} = \left(\frac{\partial^2 \xi_X^\alpha(x)}{\partial X^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial \xi_X^\beta(x)}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi_X^\alpha(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi_X^\beta(x)}{\partial X^\lambda \partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \right)_{x=X} + \frac{\partial^2 \xi_X^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial \xi_X^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi_X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi_X^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}. \quad (82)$$

Para reescrever o termo entre parênteses com $x = X$, devemos interpretar o princípio da equivalência, como Weinberg (1972) apresenta (p. 74) “the locally inertial coordinates $\xi_X^\alpha(x)$ that we construct at a given point X can be chosen so that the first derivatives of the metric tensor vanish at X' . Logo escolhendo outro ponto: X' no sistema de coordenadas $\xi_X^\alpha(x)$, temos o seguinte tensor métrico

$$g_{\gamma\delta}^X(X') = \left(\frac{\partial \xi_{X'}^\alpha(x)}{\partial \xi_{X'}^\gamma(x)} \frac{\partial \xi_{X'}^\beta(x)}{\partial \xi_{X'}^\delta(x)} \eta_{\alpha\beta} \right)_{x=X'}. \quad (83)$$

Segundo o princípio da equivalência esta quantidade é estacionária em X' quando $X' = X$, logo podemos introduzir um novo sistema de coordenadas x^μ . Neste o tensor métrico se torna

$$g_{\mu\nu}(X') = \left(\frac{\partial \xi_{X'}^\alpha(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi_{X'}^\beta(x)}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \right)_{x=X'} = g_{\gamma\delta}^X(X') \left(\frac{\partial \xi_X^\alpha(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi_X^\beta(x)}{\partial x^\nu} \right)_{x=X}; \quad (84)$$

Diferenciando 84 em relação a X' , e assumindo que $X' = X$ pois $g_{\lambda\sigma}^X(X')$ é estacionária, temos

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}(X)}{\partial X^\lambda} = g_{\gamma\delta}^X(X) \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left[\frac{\partial \xi_X^\gamma(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi_X^\delta(x)}{\partial x^\nu} \right] \right)_{x=X} = \eta_{\gamma\delta} \left(\frac{\partial^2 \xi_X^\gamma(x)}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial \xi_X^\delta(x)}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \xi_X^\gamma(x)}{\partial x^\nu} \frac{\partial^2 \xi_X^\delta(x)}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \right)_{x=X}, \quad (85)$$

e utilizando 80 e 81, fazemos as devidas substituições e chegamos em

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}(X)}{\partial X^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho(X) g_{\rho\nu}(X) + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho(X) g_{\rho\mu}(X), \quad (86)$$

que é exatamente a equação 79.

Com a equação 79 iremos fazer uma soma e uma subtração intercalando a ordem dos índices, da seguinte forma

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\gamma\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = \Gamma_{\lambda\mu}^k g_{k\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^k g_{k\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^k g_{k\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^k g_{k\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^k g_{k\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^k g_{k\mu} = 2g_{k\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^k; \quad (87)$$

Multiplicando este resultado por $g^{\nu\sigma}$, a qual é definida como a inversa de $g_{\nu\sigma}$, sendo possível obter a relação

$$g^{\nu\sigma} g_{k\nu} = \delta_k^\sigma, \quad (88)$$

finalmente chegamos ao símbolo de Christoffel

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right]. \quad (89)$$

Com esta podemos escrever a equação de movimento para partículas caindo livremente, com o intervalo de tempo próprio $d\tau$ sendo conservado

$$0 = \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (90)$$

Uma consequência importante, vinda da relação 89, é o fato de que a aceleração de partículas que estão sujeitas a campos gravitacionais, não é mais obtido pelo conceito de força, usado anteriormente, agora percebemos que esta ocorre devido a deformação na geometria de Minkowski.

3.4 RELAÇÕES FUNDAMENTAIS

Neste tópico apresento algumas equações importantes para construir as equações de Einstein, como afirma Weinberg (1972). Estas estão fundamentadas na aplicação de derivadas covariantes, que por sua vez expressam as leis físicas na forma tensorial, e definidas em variedades não euclidianas, possibilitando seu uso em todos os sistemas de coordenadas e referenciais.

Ao transportar um vetor em um espaço-tempo curvo de uma certa métrica, observamos que a direção, o módulo e o sentido deste é afetada. Matematicamente escrevemos este fenômeno como

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V_\lambda = \nabla_\mu \nabla_\nu V_\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu V_\lambda. \quad (91)$$

Inserindo a definição de derivada covariante em termos da conexão afim, como mostra Blau (2011) p.138, chegamos em

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V_\lambda = \partial_\mu (\nabla_\nu V_\lambda) - \Gamma_{\mu\nu}^\theta (\nabla_\theta V_\lambda) - \Gamma_{\mu\lambda}^\theta (\nabla_\nu V_\theta) - \partial_\nu (\nabla_\mu V_\lambda) + \Gamma_{\nu\mu}^\theta (\nabla_\theta V_\lambda) + \Gamma_{\nu\lambda}^\theta (\nabla_\mu V_\theta); \quad (92)$$

Agrupando termos semelhantes e desenvolvendo as derivadas covariante, temos

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V_\lambda = \partial_\mu (\partial_\nu V_\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho V_\rho) - \Gamma_{\mu\lambda}^\theta (\partial_\nu V_\theta - \Gamma_{\nu\theta}^\rho V_\rho) - \partial_\nu (\partial_\mu V_\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho V_\rho) + \Gamma_{\nu\lambda}^\theta (\partial_\mu V_\theta - \Gamma_{\mu\theta}^\rho V_\rho), \quad (93)$$

fazendo a regra do produto, e em seguida deixando V_ρ em evidência, chegamos em

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V_\lambda = (\partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\rho - \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\theta \Gamma_{\nu\theta}^\rho - \Gamma_{\nu\lambda}^\theta \Gamma_{\mu\theta}^\rho) V_\rho, \quad (94)$$

onde definimos o tensor de Riemann como

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V_\lambda = R_{\lambda\nu\mu}^\rho V_\rho, \quad (95)$$

com

$$R_{\lambda\nu\mu}^\rho = \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\rho - \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\theta \Gamma_{\nu\theta}^\rho - \Gamma_{\nu\lambda}^\theta \Gamma_{\mu\theta}^\rho. \quad (96)$$

Basta apenas uma destas componentes ser diferente de zero, para afirmar que o espaço em questão possui curvatura.

Podemos construir outro tensor de Riemann, fazendo uma contração em 96, assim

$$R_{\lambda\nu\mu}^\rho \implies R_{\lambda\rho\mu}^\rho \equiv R_{\lambda\mu}; \quad (97)$$

Chamado de tensor de Ricci, é simétrico e de segunda ordem. A partir dele podemos calcular um escalar, fazendo outra contração, conhecido como escalar de curvatura, dado por

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \equiv R_\nu^\nu. \quad (98)$$

Outra Equação importante, que usaremos no decorrer do trabalho é a identidade de Bianchi, uma identidade geométrica do tipo

$$\nabla_\eta R_{\lambda\mu\nu k} + \nabla_k R_{\lambda\mu\eta\nu} + \nabla_\nu R_{\lambda\mu k\eta} = 0. \quad (99)$$

Multiplicando esta equação pelo tensor métrico $g^{\lambda\nu}$, que por sua vez fará o trabalho de levantar índices do tensor de Riemann, logo ficamos com o seguinte resultado

$$\nabla_\eta R_{\mu\nu k}^\nu + \nabla_k R_{\mu\eta\nu}^\nu + \nabla_\nu R_{\mu k\eta}^\nu = 0. \quad (100)$$

De acordo com as propriedade dos tensor de Riemann e de Ricci, podemos notar que

$$R_{\mu\nu k}^\nu = R_{\mu k}, \quad (101)$$

$$R_{\mu\eta\nu}^\nu = -R_{\mu\nu\eta}^\nu = -R_{\mu\eta}. \quad (102)$$

Assim 100 se torna

$$\nabla_\eta R_{\mu k} - \nabla_k R_{\mu\eta} + \nabla_\nu R_{\mu k\eta}^\nu = 0; \quad (103)$$

Multiplicando esta por $g^{\mu k}$, e desenvolvendo o levantamento e contrações entre índices, chegamos em

$$\nabla_{\eta} R - \nabla_k R_{\eta}^k - \nabla_{\nu} R_{\eta}^{\nu} = 0. \quad (104)$$

Considerando $k = \mu$ e $\nu = \mu$, e escrevendo o operador nabla de uma forma diferente, temos

$$\delta_{\eta}^{\mu} \nabla_{\mu} R - \nabla_{\mu} R_{\eta}^{\mu} - \nabla_m u R_{\eta}^{\mu} = 0; \quad (105)$$

Colocando ∇_{μ} em evidência, temos

$$\nabla_{\mu} (\delta_{\eta}^{\mu} R - 2R_{\eta}^{\mu}) = 0; \quad (106)$$

Multiplicando esta por $-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}$, nosso resultado é

$$\nabla_{\mu} \left(R_{\nu\eta} - \frac{1}{2}g_{\nu\eta} R \right) = 0. \quad (107)$$

Onde a quadrivergência nula é, exatamente o tensor de Einstein

$$G_{\nu\eta} \equiv R_{\nu\eta} - \frac{1}{2}g_{\nu\eta} R. \quad (108)$$

Este expressa a curvatura de uma variedade de Riemann, e tem um papel fundamental nas equações de Einstein.

3.5 TENSOR ENERGIA-MOMENTO

O tensor energia-momento, em sua estrutura matemática descreve o fluxo de energia e momento de um campo. Somos capazes de deduzir este partindo da densidade de Lagrangiana, via teorema de Noether, isto significa que, estamos supondo que este campo é invariante sob transformações de Lorentz, logo o teorema nos fornece uma quantidade conservada, o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$.

Suas componentes possuem a seguinte interpretação:

T_{00} = densidade de energia.

T_{ij} = tensor pressão do constituinte.

T_{i0} = densidade de fluxo de momento e energia.

A conservação do tensor energia-momento é

$$\partial_{\nu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (109)$$

Podemos generalizar a equação acima para o espaço-tempo curvo, substituindo a derivada ordinária pela derivada covariante

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0; \quad (110)$$

Nesta equação a troca de energia-momento com o campo gravitacional é levado em conta.

O tensor energia-momento para um fluido perfeito pode ser obtido, primeiramente vamos considerar um referencial local ξ^{α} , onde as componentes são

$$T^{00} = \rho, \quad T^{0i} = T^{i0} = 0, \quad T^{ij} = -p\eta^{ij}, \quad (111)$$

sendo η^{ij} o tensor métrico de Minkowski.

Para encontrar o tensor em um sistema de coordenadas arbitrário x^{μ} , aplicamos a seguinte regra de transformação geral de coordenadas

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}} T^{\alpha\beta}; \quad (112)$$

Abrindo esta em soma, e substituindo o valor das componentes, presente em 111, temos

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^0} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^0} \rho - p\eta^{ij} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^j}, \quad (113)$$

como

$$g^{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}} \eta^{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^0} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^0} \eta^{00} + \eta^{ij} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^j}; \quad (114)$$

Multiplicando por pela pressão p , temos

$$pg^{\mu\nu} = p \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^0} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^0} + p\eta^{ij} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^j}; \quad (115)$$

Colocando esta igualdade em 113, e agrupando termos semelhantes, chegamos em

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho) \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^0} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^0} - pg^{\mu\nu}. \quad (116)$$

Para descobrir qual é o significado destas componentes, vamos analisar a quadrivelocidade, U^{μ} quadrivelocidade como um vetor que representa as mudanças de posição de um partícula no tempo próprio, para o referencial local

$$U^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\nu}} \frac{d\xi^{\nu}}{d\tau} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^0} \frac{d\xi^0}{d\tau} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^i} \frac{d\xi^i}{d\tau}, \quad (117)$$

com

$$\frac{d\xi^i}{d\tau} = 0, \quad (118)$$

que representa um gás em repouso no referencial local.

Para o termo

$$\frac{d\xi^0}{d\tau} = \frac{cdt}{d\tau}; \quad (119)$$

Pois pela métrica de Minkowski

$$\xi^0 = ct \quad (120)$$

e

$$\frac{cdt}{d\tau} = \frac{cdt}{dt \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = c, \quad (121)$$

chegamos em

$$\frac{d\xi^0}{d\tau} = c. \quad (122)$$

Logo a quadrivelocidade se torna

$$U^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^0} c; \quad (123)$$

Substituindo em 113, resulta no tensor energia-momento para um fluido perfeito

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho) \frac{1}{c^2} U^\mu U^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad (124)$$

onde p e ρ são funções das coordenadas espaço-temporais que representam, respectivamente, a pressão e a densidade do fluido.

3.6 EQUAÇÕES DE EINSTEIN

As equações de campo de Einstein não foram deduzidas, elas foram construídas a partir de argumentos plausíveis, tendo-se o cuidado de no limite de campos fracos, estarem de acordo com a teoria newtoniana da gravitação.

A relatividade geral é fundamentada na premissa de que o campo gravitacional é uma consequência da geometria não Euclidiana do espaço-tempo. Esta premissa está consolidada no princípio da equivalência, onde como consequência as partículas presentes no campo seguem trajetórias geodésicas descritas por 90, que no limite do campo fraco, as partículas se movem de forma lenta o suficiente para ignorar o termo $\frac{dx}{d\tau}$ respeitando $\frac{dt}{d\tau}$, assim podemos escrever

$$0 = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2. \quad (125)$$

Como o campo é estacionário, todas as derivadas de $g_{\mu\nu}$ em relação ao tempo desaparecem. De 89 chegamos em

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}. \quad (126)$$

Como estamos trabalhando com um campo fraco, podemos adotar um sistema de coordenadas cartesianas aproximadas, do tipo

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1. \quad \text{igual a uma perturbação;} \quad (127)$$

Substituindo esta em 126, temos

$$\Gamma_{00}^{\alpha} = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\beta}} = -\frac{1}{2}\vec{\nabla}h_{00}, \quad (128)$$

que em 125 se torna

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\vec{\nabla}h_{00}, \quad (129)$$

com

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{dt}{d\tau} = \text{constante}. \quad (130)$$

Dividindo a equação 129 por $\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$, temos a solução

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}h_{00}, \quad (131)$$

que corresponde a segunda lei de Newton, pois

$$\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla}\phi, \quad (132)$$

sendo ϕ o potencial gravitacional $\phi = -\frac{GM}{r}$.

Comparando 129 com 132, temos

$$h_{00} = -2\phi + \text{constante}. \quad (133)$$

Como já mencionado acima, no limite de campos fracos, a equação de movimento ?? corresponde à segunda lei de Newton.

A segunda premissa nos diz como as fontes curvam o espaço tempo, devem nos conduzir a equação de Poisson no limite de campo fraco é $\nabla^2\phi \sim \rho$.

As equações que governam a dinâmica do espaço-tempo devido a um conteúdo de matéria-energia, são as equações de campo de Einstein, que veem de 133, e logo se tornam

$$g_{00} = 2\phi + \text{const.} \rightarrow \phi = \frac{1}{2}g_{00}; \quad (134)$$

Assim

$$\nabla^2\frac{1}{2}g_{00} = 4\pi G\rho. \quad (135)$$

Como precisamos de uma equação tensorial, trocamos a densidade de energia pelo tensor energia-momento e multiplicando por 2, temos

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi GT_{\mu\nu}}{c^2}, \quad \text{sendo} \quad \frac{8\pi G}{c^2} = k, \quad (136)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein.

Como precisamos de algo que descreva a curvatura, podemos escrever 135 como

$$R_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (137)$$

com

$$\partial_\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu R_{\mu\nu} \neq 0; \quad (138)$$

Mas escrevendo de forma diferente, temos

$$\nabla_\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad \nabla_\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_\mu g_{\mu\nu} R, \quad (139)$$

e fazendo

$$\nabla_\mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = 0, \quad (140)$$

podemos escrever a igualdade

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = kT_{\mu\nu}. \quad (141)$$

Como $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ podemos introduzir um termo linear com $g_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}. \quad (142)$$

Chegamos a Equação de Einstein, onde Λ é chamado de constante cosmológica, introduzida por Einstein nas equações de campo, que segundo Hawking (2016) “deformava o espaço-tempo no sentido oposto, de modo que os corpos os corpos se afastem uns dos outros. O efeito repulsivo da constante cosmológica poderia contrabalançar o efeito atrativo da matéria, permitindo assim uma solução estática para o universo.

Pode-se mostrar que no limite do campo fraco esta se reduz à equação de poisson, assim teremos 10 equações diferenciais de segunda ordem, não lineares e acopladas para determinar as componentes da métrica $g_{\mu\nu}$.

4 COSMOLOGIA

Sendo uma das ciências mais antigas, segundo Hawking (2015), a astronomia era contemplada e praticada pelos povos pré-históricos, deixando suas marcas com o passar do tempo. Uma das evidências mais famosa é o círculo de Stonehenge, situado na Inglaterra, o qual demarcava o solstício e equinócio, revelando ser um autêntico observatório astronômico. As primeiras tentativas registradas de estudar a terra, o sol, a lua e as estrelas, iniciam-se no século VI a.C., com base na filosofia natural, tendo como pioneiros, os gregos. Os mesmos já apresentavam argumentos plausíveis de que a terra era uma esfera redonda, e através de argumentos geométricos, tentavam determinar a posição dos astros, uma escala para o universo e sua composição.

A história seguiu com altos e baixos, alcançando uma grande evolução com a teoria heliocêntrica de Copérnico, defendida e provada por Galileu Galilei, através de observações das órbitas dos satélites de Júpiter, e por Johannes Kepler, que matematicamente modificou a teoria, sugerindo que os planetas orbitavam o sol de forma elíptica. Mais tarde estas ideias foram comprovadas com a lei da gravitação universal, descrita por Isaac Newton.

Até o início do século XX, muitas questões foram levantadas sobre a órbita e atração dos planetas, assim como a crença de que o universo sempre existirá em um estado inalterado e finito. A primeira foi respondida, segundo Hawking (2016), após a publicação da teoria da relatividade, que conseguia solucionar todos os impasses da física Newtoniana, e descrever com maior precisão a órbita dos planetas. Relacionada ao segundo questionamento, a descoberta feita por Edwin Hubble trouxe a visão moderna do universo. Em 1924 ele provou que nossa galáxia não era a única, mas que havia muitas outras, com uma vasta região de espaço vazio entre elas, ao buscar um valor para suas distâncias através da luminosidade de estrelas específicas, Hubble notou desvios nos comprimentos de onda dessa luz emitida, fazendo com que parecesse mais avermelhada ou azulada. Após suscitar uma analogia entre o efeito Doppler e as ondas eletromagnéticas visíveis, concluiu que quando a galáxia se aproximava era possível ver um desvio para o azul, já que a distância entre as cristas da onda emitida era menor, do mesmo modo, uma galáxia que se afastava apresentava um desvio para o vermelho, pois o comprimento das ondas que recebemos será mais longo. Na época imaginava-se que as galáxias se moviam de modo aleatório, porém após inúmeras observações, constatou-se que a maioria estava se afastando de nós, a surpresa ainda maior veio com a publicação de seu trabalho, evidenciando

que a magnitude do desvio para o vermelho das galáxias não era aleatório, mas sim diretamente proporcional a distância que está galáxias esta de nós. A descoberta de que o universo está em expansão foi uma das grandes revoluções intelectuais do século XX.

Nosso conhecimento e tecnologia cresceu exponencialmente desde então, assim aprendemos a detectar, medir e analisar fluxos de radiação invisível que chega até nós do espaço, como por exemplo a detecção de micro-ondas, ondas que possuem comprimento de onda de cerca de um centímetro. Como afirma Chaisson and McMillan (2014) e Neto (), Arno Pezias e Robert Wilson, manipulavam um detector de micro-ondas muito sensível, quando perceberam que o detector captava mais ruído do que deveria, foi uma surpresa ao perceber que o excesso de ruído era o mesmo em qualquer direção, hora ou época do ano, que o detector fosse apontado, provando que essa radiação vem de algum lugar além do sistema solar, até da galáxia. Na mesma época, Bob Dicke e Jim Peebles também estudavam as micro-ondas. Baseados em uma sugestão feita por um ex-aluno de Alexander Friedmann, George Gamow, de que o universo primitivo portava uma temperatura alta o suficiente para os fótons ionizarem os átomos de hidrogênio, porém a densidade de energia, assim como a temperatura do universo caía com a expansão do mesmo, logo os fótons não mais possuíam energia suficiente para ionizar os átomos, assim os fótons, agora desacoplados da matéria passaram a viajar livremente. Dicke e Peebles acreditavam que era possível ver estes fótons primitivos, porém com a expansão do universo, o desvio para o vermelho seria tão grande que este chegaria até nós como radiação de micro-ondas. Provada esta teoria, hoje chamamos estas micro-ondas detectadas de radiação cósmica de fundo.

A detecção da radiação cósmica, mostra que o universo é altamente homogêneo e isotrópico, exceto em pequenas flutuações, sendo assim uma evidência clara da existência de um início, o Big Bang, quando toda a matéria do universo estava concentrada em um só ponto. Como a distância entre os objetos deve ter sido zero, a densidade e curvatura do espaço tempo deveriam ser infinitas, o que cria uma singularidade, já que pela teoria da relatividade isso não seria possível, no entanto estes efeitos podem desaparecer se levarmos em consideração os efeitos quânticos.

4.1 A MÉTRICA DE ROBERTSON-WALKER E A MEDIDA DE DISTÂNCIA

Quando estudamos objetos que estão muito longe de nós, em distâncias cosmológicas, a aparência destes pode sofrer algumas alterações devido a curvatura do espaço-tempo, realizando pequenos desvios na luz ao viajar por este meio até chegar a Terra. Xiaochun (2010) esclarece

que estas propriedades do universo são descritas pela teoria da relatividade geral de Einstein, onde sua métrica descreve a geometria do espaço-tempo.

como explicado em Pettini (2018), num espaço 3-D, mensuramos a distância ao longo de uma curva entre dois pontos usando a fórmula diferencial para distâncias

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2; \quad (143)$$

Integrando esta, encontramos a distância total

$$\Delta l = \int_A^B \sqrt{dl^2} = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \quad (144)$$

Similarmente, o intervalo ao longo de uma curva que conecta dois eventos no espaço tempo, sem a presença de massa, nós usamos a métrica para o espaço tempo plano, descrita como

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2. \quad (145)$$

A integral da equação acima nos dá o intervalo total ao longo da linha de mundo

$$\Delta s = \int_A^B \sqrt{ds^2} = \int_A^B \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}; \quad (146)$$

Pela definição a distância determinada entre dois eventos A e B , que ocorrem simultaneamente ($t_A = t_B$) e a distância própria

$$\Delta L = \sqrt{-\Delta s^2}. \quad (147)$$

Procuramos uma métrica que descreva o espaço-tempo de um universo homogêneo e isotrópico. Dito isso, começamos analisando a superfície de uma esfera, onde a curvatura é dada por $K = \frac{1}{R^2}$ sendo que sua expressão genérica para uma curvatura no espaço 2-D é

$$K = \frac{3}{\pi} \lim_{D \rightarrow 0} \frac{2\pi D - C}{D^3}, \quad (148)$$

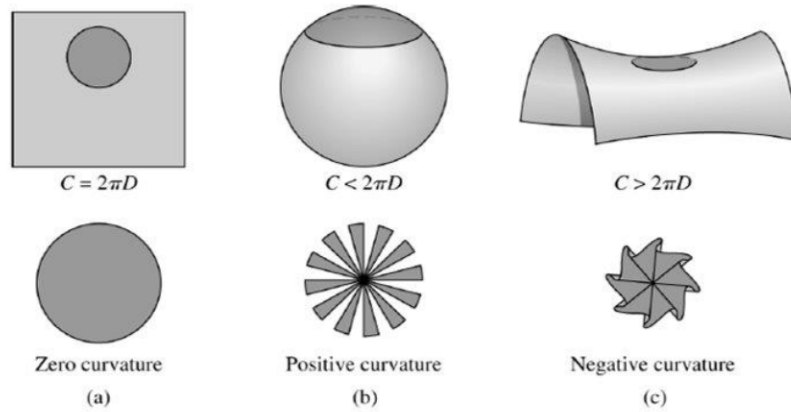
sendo D = raio, conforme a figura 1 nos mostra.

A distância entre dois pontos na superfície de uma esfera, em coordenadas polares é dada por

$$dl^2 = (dD)^2 + r^2 d\phi^2 = R^2 d\theta^2 + r^2 d\phi^2; \quad (149)$$

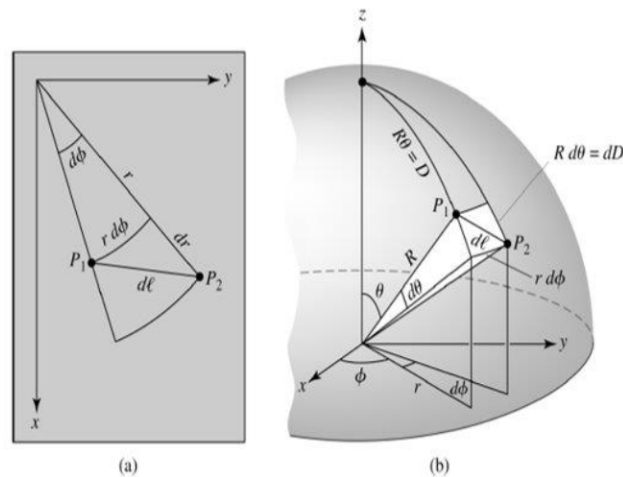
Conforme a figura 2 nos mostra.

Figura 1 – Curvatura do espaço tempo.



Fonte: Trodden and Carroll (2004).

Figura 2 – Distância entre dois pontos na superfície de uma esfera, em coordenadas polares.



Fonte: Trodden and Carroll (2004).

Mas $r = R \sin \theta$, então $dr = R \cos \theta d\theta$, então

$$R d\theta = \frac{dr}{\cos \theta} = \frac{R dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}}; \quad (150)$$

Substituindo esta em 147, temos

$$dl^2 = \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}} \right)^2 + r^2 d\phi^2, \quad (151)$$

que generalizando os termos para a curvatura K , a superfície de duas dimensões se torna

$$dl^2 = \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \right)^2 + r^2 d\phi^2. \quad (152)$$

Esta equação pode ser expandida para o espaço 3-D, trocando as coordenadas polares para coordenadas esféricas, assim chegamos em

$$dl^2 = \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \right)^2 + (rd\theta)^2 + (rsen\theta d\phi)^2, \quad (153)$$

onde r agora é a coordenada radial. Esta equação nos mostra os efeitos da curvatura das 3 dimensões.

Para chegar a métrica, devemos incluir o tempo, mas devido às invariâncias espaciais associadas a isotropia e homogeneidade do universo, não existe razão para este passar de forma diferente em locais diferentes, logo o termo deve ser cdt , chamado de tempo cosmológico é o tempo próprio da partícula, este deve ser o mesmo para todas as demais partículas. Sendo assim, chegamos a métrica

$$ds^2 = (cdt)^2 - \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \right)^2 - (rd\theta)^2 - (rsen\theta d\phi)^2. \quad (154)$$

A métrica deve ser escrita nas chamadas coordenadas comóveis, pois a expansão do universo afeta todas as suas propriedades geométricas.

Como a distância própria na forma diferencial igual à 147, com $dt = 0$, podemos trocar a coordenada radial pela coordenada comóvel, através da relação

$$r(t) = a(t)x. \quad (155)$$

Como a expansão também afeta a curvatura do espaço-tempo, devemos definir

$$K(t) = \frac{K}{a^2(t)}, \quad (156)$$

sendo k uma constante dependente do tempo.

Substituindo 155 e 156 em 154, chegamos a métrica

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\left(\frac{dx}{\sqrt{1 - Kx^2}} \right)^2 - (xd\theta)^2 - (xsen\theta d\phi)^2 \right], \quad (157)$$

que usualmente é escrita como

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} - r^2(d\theta^2 - sen^2\theta d\phi^2) \right], \quad (158)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala e K é a constante de curvatura, indica as seguintes situações

- i $K=0$, o setor espacial é plano;

- ii $K > 0$, o setor espacial é esférico ou fechado;
- iii $K < 0$, o setor espacial é hiperbólico ou aberto.

Como Weinberg (1972) afirma, o sistema comóvel é definido pelo conjunto de pontos (x^i, t) , sendo x^i as coordenadas espaciais fixas e t , o tempo próprio. Um único conjunto de pontos acompanha o movimento coletivo do sistema de partículas, isto se deve ao fato de que as partículas não alteram suas coordenadas, estas sofrem uma reescala no decorrer da expansão, a qual é exercida através da evolução do fator de escala.

Neste contexto devemos tomar algumas precauções ao medir a distância entre dois pontos, pois neste universo a distância percorrida por um fóton não é simplesmente $c\Delta t$, já que o espaço-tempo se expandiu durante a propagação desta luz. Portanto, para que seja possível estimar de forma correta esta distância, definimos inicialmente a separação espacial entre dois pontos no universo, fazendo $dt = 0$ na métrica de Robertson – Walker. Como a direção do nosso referencial é arbitrário, podemos considerar, sem perdas, que $d\theta = d\phi = 0$ e também $K = 0$, assim

$$l = \int_0^r a(t) dr = a(t)r. \quad (159)$$

A distância física, também conhecida como horizonte de partícula, é a distância radial percorrida pelo fóton, assim

$$d = a(t) \int_0^r dr = a(t) \int_0^t \frac{cdt}{a(t)}; \quad (160)$$

Podemos encontrar a lei de Hubble derivando 159 com relação ao tempo, assim

$$v = \dot{a}r, \quad (161)$$

onde o ponto significa a derivada em relação ao tempo.

Mas como $r = \frac{l}{a}$, temos

$$v = \frac{\dot{a}}{a}l, \quad \text{logo } v = Hl, \quad (162)$$

onde a constante de Hubble é identificada como

$$h = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (163)$$

Outra consequência importante do universo em expansão, é o redshift cosmológico, o desvio sofrido pelos comprimentos de onda de objetos observados por Hubble, que ocorre devido

a expansão do fluido cósmico, já que os objetos possuem coordenadas fixas. Para encontrarmos uma relação entre o redshift e o fator de escala, como (RIBAS, 2008) nos mostra, devemos considerar a frente de onda emitida no instante t_e e na posição r_e , detectado no instante $t = 0$ e na origem ($r = 0$), uma segunda frente emitida na mesma coordenada, no instante $t_e + \Delta t_e$, e detectada na mesma coordenada anterior, no instante $t_0 + \Delta t_0$, assim podemos escrever para a emissão e recepção

$$\int_{t_e}^{t_e + \Delta t_e} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{r_e}^0 dr \quad (164)$$

e

$$\int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{r_e}^0 dr; \quad (165)$$

Igualando as duas equações, fazemos

$$\int_{t_e}^{t_e + \Delta t_e} \frac{cdt}{a(t)} - \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} = 0. \quad (166)$$

Como os instantes entre a emissão e a detecção Δt_e e Δt_0 , são muito pequenos, a expansão neste intervalo é praticamente constante, portanto

$$\frac{c\Delta t_e}{a(t_e)} = \frac{c\Delta t_0}{a(t_0)}. \quad (167)$$

Como Δt_e e Δt_0 é o intervalo entre emissão e detecção de duas frentes de onda, que são os períodos da onda emitida e detectada, respectivamente, com isso podemos escrever

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_0} = \frac{a(t_e)}{a(t_0)}; \quad (168)$$

Da definição usual de redshift, temos

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} \quad \text{ou} \quad z = \frac{a(t_e)}{a(t_0)} - 1. \quad (169)$$

As equações acima nos mostram que, quanto mais distante um objeto se encontra de nosso referencial, mais para o passado estamos observando-o, conseqüentemente maior será o redshift do objeto observado. Desta forma podemos relacionar o redshift com a distância que o objeto se encontra de nosso referencial, através da equação

$$a = \frac{1}{z + 1}. \quad (170)$$

Outra forma de realizar medições astronômicas é a partir da definição da distância de luminosidade de um objeto observado, em outras palavras, medimos a quantidade de radiação

recebida de um objeto distante. Assumindo que a intensidade luminosa decresce com o quadrado da distância, temos

$$dl = \sqrt{\frac{P}{4\pi p}}, \quad (171)$$

sendo P a potência total emitida e p é a potência por unidade de área recebida, dada por

$$p = \frac{P}{4\pi d^2(1+z)^2}. \quad (172)$$

A distância física do objeto ao ponto de observação, também chamada de distância própria, $d = a(t)r$, medida no instante de observação ($d = a_0r_0$), levando estas considerações em conta e substituindo 172 em 171, temos

$$dl = a_0r_0(1+z); \quad (173)$$

Para calcular r_0 , fazemos

$$\int_0^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^{r_0} dr, \quad (174)$$

e por convenção fazemos a seguinte mudança de variáveis, sendo $a(z(t))$

$$\frac{da}{dt} = \frac{da}{dz} \frac{dz}{dt}; \quad (175)$$

Assim da equação 170, temos

$$dt = -\frac{1}{a(t)} \frac{1}{(1+z)^2} dz = -\frac{a(t)}{H} dz, \quad (176)$$

calculando r_0 e substituindo em 173, temos

$$dl = c(1+z) \int_0^z \frac{dz}{H(z)}. \quad (177)$$

Outra grandeza utilizada em astronomia, é devido a observações feitas, sendo esta a diferença entre a magnitude aparente m e a magnitude absoluta M , ou seja, $\mu_0 = m - M$, que desenvolvendo chegamos à equação

$$\mu_0 = 25 + 5\log_{10}dl. \quad (178)$$

4.2 MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO

Segundo Weinberg (1972) e Blau (2011), a geometria do espaço-tempo aceito atualmente, é construída a partir das equações de Einstein, o tensor energia-momento para um fluido

perfeito com sua equação de balanço correspondente, e as equações de estado dos constituintes da matéria. Para este capítulo usaremos $8\pi G = c = k = \hbar = 1$.

As equações de campo de Einstein produzem uma distribuição de massa e energia, cuja equação representante é 136, onde o tensor energia momento determina a curvatura do espaço-tempo, dado uma quantidade de matéria-energia, como é descrito no tensor de Einstein, equação 108. Agora faremos uso da métrica de Robertson-Walker, descrita em 158, e através da equação 89 encontraremos as seguintes componentes não nulas da conexão afim

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{a\dot{a}}{1 - Kr^2}, \quad \Gamma_{22}^0 = a\dot{a}r^2, \quad \Gamma_{33}^0 = a\dot{a}r^2 \text{sen}^2\theta, \quad (179)$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^1 = \Gamma_{03}^1 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (180)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{Kr}{1 - Kr^2}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r(1 - Kr^2), \quad \Gamma_{33}^1 = -r(1 - Kr^2)\text{sen}^2\theta, \quad (181)$$

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad (182)$$

$$\Gamma_{32}^3 = \Gamma_{23}^3 = \text{cotg}\theta, \quad \Gamma_{33}^2 = -\text{sen}\theta\text{cos}\theta. \quad (183)$$

Utilizando estes valores da conexão afim, mediante as equações 96 e 98, calculamos os valores não nulos para o tensor de Ricci

$$R_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{11} = -\frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2K}{1 - Kr^2}, \quad (184)$$

$$R_{22} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2K)r^2, \quad R_{33} = -(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2K)r^2\text{sen}^2\theta. \quad (185)$$

E por fim de $R = g^{\mu\nu}R_{\mu k}$, encontramos o escalar de curvatura

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{K}{a^2} \right]. \quad (186)$$

Nesta etapa devemos encontrar a matriz do tensor métrico de energia-momento. Utilizando sua forma dada pela equação 124, consideramos em coordenadas comóveis temos a quadrivelocidade sendo $U^\mu = (1,0,0,0)$, pois: $U^i = dx^i/d\tau = 0$, e $U^0 = dx^0/d\tau = 1$.

Com a normalização $U^\mu U_\mu = 1$, a matriz do tensor energia-momento se torna

$$T_\nu^\mu = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad (187)$$

Fazendo uso da equação 142, considerando $T_\nu^\mu g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$, encontraremos um conjunto de 4 equações para os tensores $:T_{00}, T_{11}, T_{22} e T_{33}$.

Destes obtemos as equações de Einstein

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\rho}{3} - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (188)$$

Esta também é conhecida como equação de Friedmann, sendo proveniente da componente temporal de 142.

Das outras três componentes espaciais, encontramos a mesma equação linearmente independente

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} - \Lambda = -p, \quad (189)$$

substituindo a parte temporal na parte espacial, chegamos à equação da aceleração

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p - 2\Lambda). \quad (190)$$

Com a equação de balanço do tensor energia momento

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (191)$$

temos a equação de fluido

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a} = 0. \quad (192)$$

Podemos notar que esta equação não é independente, pois ela também pode ser encontrada substituindo a equação da aceleração (190) na derivada a equação 189 em relação ao tempo.

Finalmente para determinarmos a evolução temporal do universo, precisamos especificar a equação de estado de seus constituintes, logo assumimos a equação barotrópica de estado $p = \omega\rho$, Sendo a constante ω o que caracteriza o constituinte.

Assim obtemos a solução geral de 192 considerando a normalização $a_0 = 1$, como condição inicial, temos

$$\rho(t) = \rho_0 a^{-3(1+\omega)}, \quad (193)$$

Sendo ρ_0 a densidade de energia inicial do constituinte.

Os casos mais comuns estudados atualmente são

- i Radiação com $\omega = \frac{1}{3}$;
- ii Matéria bariônica ou matéria diluída com $\omega = 0$;
- iii Energia escura com $\omega = -1$.

Podemos obter a equação de evolução para as densidades de energia e pressão para cada constituinte, substituindo os valores de ω em 193

- i Para a Radiação $\rho \propto a^{-4}$;
- ii Para a Matéria bariônica ou matéria diluída com $\rho \propto a^{-3}$;
- iii Para a Energia escura com $\rho = \text{constante}$.

Podemos identificar a energia do vácuo como a constante cosmológica pois passando a mesma para o lado direito da equação 142, temos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{\Lambda}); \quad (194)$$

Comparando com o tensor de energia –momento do fluido perfeito (124), temos que

$$\rho_{\Lambda} = -p_{\Lambda} = \Lambda. \quad (195)$$

Agora podemos determinar a evolução temporal do fator de escala ($a(t)$), substituindo as relações obtidas em i, ii e iii, na equação de Friedmann (188). Ao realizar esta operação supomos que inicialmente a constante cosmológica é nula, pois a princípio no modelo padrão não existe razão para supormos a sua existência, e levando-se em conta que no início do universo, quando o fator de escala é pequeno, temos que

$$\frac{\rho}{3} \gg \frac{K}{a^2}; \quad (196)$$

Deste modo a equação de Friedmann se torna

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \propto \frac{\rho}{3}, \quad (197)$$

substituindo os valores de ρ nesta equação, temos que

- i Para a Radiação $a\alpha t^{1/2}$;
- ii Para a Matéria bariônica ou matéria diluída com $a\alpha t^{2/3}$;
- iii Para a Energia escura com $a\alpha e^{t\sqrt{\rho/3}}$.

Para as eras da matéria e radiação, quando $t \rightarrow 0$, temos que $a(t) \rightarrow 0$, e consequentemente temos uma singularidade nas densidades de energia ($\rho \rightarrow \infty$), a qual é conhecida como Big Bang. Como a matemática da cosmologia clássica, que inclui a relatividade geral e as equações de Friedmann, não consegue prosseguir com números infinitos, a própria teoria previu a existência de um ponto onde ela deixaria de ser válida, os teoremas da singularidade indicam que o campo gravitacional se torna tão forte que os efeitos quânticos passam a ser levados em conta. Neste modelo a densidade, temperatura e curvatura do espaço-tempo teriam sido infinitas, e conforme este se expandiu, resfriou-se, o que está de acordo com todas as evidências observacionais, como a radiação cósmica de fundo e a abundância de elementos leves no universo atual, como o hélio.

4.3 PARÂMETROS COSMOLÓGICOS

4.3.1 Parâmetro de densidade

Como vimos, o universo se expandiu até o momento em que começou a desacelerar, e hoje mantém uma expansão contínua, isso devido ao fato de uma densidade estar presente no espaço-tempo. Esta também determina a curvatura do universo. Iremos definir ρ_c como a densidade crítica, ou seja, um valor para que a curvatura do universo seja plana.

Para que isso seja possível, consideramos uma galáxia à uma distância r de nós, se afastando com uma velocidade $v = H_0 r$, desta podemos escrever

$$v = \dot{r} = \frac{\dot{r}}{r}, \quad (198)$$

lembrando que $r = ax$, temos, em módulo, que

$$v = \frac{\dot{a}}{a} r. \quad (199)$$

Exatamente a lei de Hubble, o que nos informa o quão rápido o universo está se expandindo.

Então

$$\frac{v}{r} = \frac{\dot{a}}{a} = H_0; \quad (200)$$

Podemos escrever a equação de Friedmann (188) como

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 - \frac{Kc^2}{a_0^2}, \quad (201)$$

onde para $K = 0$ e $a_0 = 1$, Logo nossa densidade crítica se torna

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (202)$$

Neste ponto restabelecemos as unidades para estimar a densidade crítica e identificando o valor atual da constante de Hubble, concluímos que a densidade é da ordem de $\rho_c = 10^{-26} \text{kgm}^{-3}$.

Definimos agora o parâmetro de densidade Ω de cada constituinte, como sendo

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}, \quad (203)$$

onde i indica os diversos constituintes.

A partir das informações, temos

$$\rho = \rho_{total}, \quad \rho_c = 3H^2, \quad \text{sendo } H = \frac{\dot{a}}{a}; \quad (204)$$

Substituiremos 204 na equação de Friedmann (188), com $\Lambda = 0$, assim

$$\dot{a}^2(\Omega_{total} - 1) = K, \quad \text{com } \Omega_{total} = \frac{\rho_{total}}{\rho_c}. \quad (205)$$

Com esta relação é possível concluir que se $K = 0$ então $\rho_{total} = \rho_c$, o que indica um universo plano. Se $K < 0$ então $\rho_{total} < \rho_c$, o que indica um universo fechado. Se $K > 0$ então $\rho_{total} > \rho_c$, o que indica um universo aberto. Todos estes formatos de universo estão representados na figura 3.

4.3.2 Parâmetro de desaceleração

Utilizada para avaliar a taxa de expansão do universo, o parâmetro de desaceleração é uma quantidade definida como

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \quad (206)$$

Figura 3 – Três possibilidades de curvatura do espaço tempo.



Fonte: Schneider (2006).

Definimos esta com um sinal negativo pois assim é possível encontrar uma quantidade q positiva, já que esperava-se que o universo seguiria sua evolução com uma taxa q decrescente, em outras palavras, o universo deveria estar em processo de desaceleração em sua expansão.

Para encontrar seu valor estimado em função da pressão e densidade, multiplicaremos a equação 206 por a/a , resultando em

$$q = -\frac{a^2\ddot{a}}{\dot{a}^3} = -\frac{a^2}{\dot{a}^2} \frac{\ddot{a}}{a}. \quad (207)$$

Precisamente, a primeira fração resultante é o inverso da equação de Friedmann (188), e a segunda fração resultante é a equação da aceleração (190). iremos substituir estas em 207, nos resultando

$$q = \frac{1}{2} + \frac{3p}{2\rho}, \quad (208)$$

onde p é a pressão total e ρ a densidade de energia total dos constituintes.

4.4 PROBLEMAS COM O MODELO PADRÃO E SOLUÇÃO INFLACIONÁRIA

Embora o modelo cosmológico padrão tenha fornecido uma série de previsões corretas sobre o universo, com o decorrer de observações e estudos mais aprofundados, como podemos encontrar em Linde (1990), surgiram alguns questionamentos que não conseguem ser respondidos ou resolvidos através deste modelo. Podemos citar:

- i O problema do horizonte, cujo fato observado é de que a radiação cósmica de fundo é altamente homogênea e isotrópica, o que não pode ser explicado pelo modelo padrão, já que no início do universo ocorreu um desacoplamento entre matéria e radiação, o que gerou uma separação angular na esfera celeste, portanto, regiões separadas por 1 não tinham contato casual, sendo assim estas regiões não poderiam evoluir desenvolvendo esta homogeneidade.

- ii O problema da planura, cujo problema se desenrola ao observar que o parâmetro de densidade está muito próximo de seu valor crítico, $\Omega_{tot} = 1$, sendo sua geometria aproximadamente plana. Esta solução indica um equilíbrio instável, pois esta é uma solução particular da equação de Friedmann, já que o parâmetro de densidade é uma função do tempo, no início do universo este valor de Ω pode assumir um valor pouco maior que a unidade, resultando em um crescimento do mesmo, chegando a universo aberto, mas se o valor de Ω assumir um valor pouco menor que a unidade, este tende a decrescer mais, resultando em um universo fechado. Sendo assim, o resultado de $\Omega \sim 1$ é obtido através de um ajuste de precisão no parâmetro de Hubble.

- iii O problema dos monopolos magnéticos, os quais surgiram após uma quebra de simetria que ocorreu em 10^{-35} s após a origem do Big Bang, porém a densidade daquela época diluída pela expansão do universo, hoje chegaria a um colapso.

- iv O problema da coincidência, consiste no fato de que existe uma coincidência aproximada entre a densidade de energia do vácuo e a densidade de matéria no Universo atual. Mas nem sempre foi assim, no universo primordial a densidade de energia de vácuo era desprezível, em comparação com a densidade de matéria, mas com a expansão do universo, o balanço relativo entre estas variou rapidamente.

4.4.1 Solução inflacionária

O modelo do universo inflacionário foi proposto por Alan Guth em 1981, com o intuito de solucionar os problemas apresentados pelo modelo cosmológico padrão. O período

inflacionário ocorre em um curto intervalo de tempo após a era de Planck ($t \sim \hbar/mc^2$), onde assumimos que as equações da relatividade geral são válidas. Neste período o universo sofre uma violenta expansão acelerada, e para explicar a causa desta expansão, podemos atribuir este papel a constante cosmológica ou na área da cosmologia, ao campo escalar .

Ao atribuirmos a expansão a constante cosmológica, podemos fazer uma análise na equação 190, onde se $2\Lambda > \rho + 3p$, então o universo se expande em um regime acelerado. Com isso podemos encontrar a solução para a equação de Friedmann, assumindo que no início o universo é dominado pela energia do vácuo, ou seja, a densidade de energia da matéria é desprezível, assim o fator de escala cresce rapidamente, logo podemos desprezar o termo K/a^2 , presente na equação 188, assim chegamos a solução conhecida como De Sitter.

$$a(t) \sim e^{(\Lambda/3)^{1/2}t}. \quad (209)$$

Esta equação descreve um universo que se expande de forma acelerada para sempre, o que não condiz com o modelo cosmológico realista, conseqüentemente são utilizados alguns mecanismos para encerrar a era inflacionária. Para isto são utilizados propriedades e características dos campos escalares, com um potencial conveniente garantindo a duração correta da era inflacionária.

Partindo de um campo escalar não massivo ϕ em um espaço tempo curvo, cujo apresenta a seguinte ação

$$S = \int \sqrt{-g}d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right); \quad (210)$$

Para o nosso caso o potencial $V(\phi)$ deve ser do tipo exponencial $V(\phi) \sim \phi^4$, assim, não podendo ser identificado como um termo de massa, como explica Guth and Steinhardt (1984), Albrecht *et al.* (1982) e Linde (1990).

Variando a ação descrita acima, em relação a ϕ , chegamos a equação de movimento para o campo escalar

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (211)$$

onde consideramos a métrica de Robertson-Walker, que por descrever um universo homogêneo e isotrópico, nos garante que este campo é uma função unicamente do tempo.

Variando a ação em relação a $g_{\mu\nu}$, chegamos ao tensor energia-momento para o campo

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\theta \phi^\theta \phi - V(\phi) \right). \quad (212)$$

A partir desta equação, vamos calcular as componentes diagonais do tensor de energia-momento, fazendo

$$T_{\nu}^{\mu} g^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}; \quad (213)$$

Encontramos os termos de pressão e densidade de um fluido perfeito em um referencial comóvel, com

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (214)$$

e

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi); \quad (215)$$

Utilizando-se da conservação do tensor energia momento (191), temos a equação de balanço para a densidade de energia do campo

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (216)$$

Note que ao substituir as equações 214 e 215 em 216, encontramos a equação de movimento do campo escalar (211).

Na cosmologia, o responsável pelo regime inflacionário é o campo escalar, que quando quantizado é denominado inflaton. Neste modelo é visível a aceleração positiva ao desprezar a constante cosmológica da equação 190, se $p = -\rho$, sendo pelas equações 214 e 215, possível perceber que a condição é alcançada desde que o termo cinético possa ser desprezado em relação ao termo potencial. Esta condição em que a variação temporal do campo escalar é lenta, é conhecida como aproximação “slow-roll”.

Esta condição é satisfeita caso o potencial verifique a seguinte propriedade

$$\epsilon = \frac{dV/d\phi}{V} \ll 1. \quad (217)$$

Para verificar esta relação basta derivar a constante de Hubble, chegando a

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2, \quad (218)$$

que para um regime acelerado impomos

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} \gg 0; \quad (219)$$

Dividindo por H^2 e rearranjando os termos, temos

$$-\frac{\dot{H}}{H} \ll 1; \quad (220)$$

Por desprezar o termo cinético, $V(\phi) \gg \dot{\phi}^2$, então $dV/d\phi \gg \ddot{\phi}$, assim a equação de Friedmann (188) e a equação para o inflaton (211) tornam-se respectivamente

$$H^2 = \frac{1}{3}V(\phi) \quad (221)$$

e

$$3H\dot{\phi} = -\frac{dV}{d\phi}. \quad (222)$$

Derivando 221 em relação ao tempo, chegamos em

$$\dot{H} = \frac{\dot{\phi}}{6H} \frac{dV}{d\phi}, \quad (223)$$

substituindo 221, 222 e 223 em 220 obtemos a condição 217.

Quando esta condição (217) é satisfeita ao potencial variar lentamente, logo o termo cinético se mantém desprezível, enquanto o inflaton evolui temporalmente a partir de um estado de falso vácuo, onde seu valor esperado é nulo, para um estado mínimo de potencial.

A princípio o universo é dominado pelo inflaton, que inicialmente se encontrava no estado de falso vácuo, onde $p = -\rho = -V_0$, então o inflaton sofre uma transição de fase, atingindo o estado de vácuo verdadeiro quando $\epsilon \sim 1$, encerrando a fase inflacionária. A expansão acelerada resfria o universo, e ao atingir o mínimo potencial, o termo cinético deixa de ser desprezível, e inflaton sofre oscilações amortecidas, devido ao termo de amortecimento presente na equação 211, deste modo, perdendo energia e aquecendo o universo, sendo deste ponto em diante, o modelo padrão, a descrição correta para o universo.

4.4.2 Solução para os principais problemas do modelo padrão

Como explicado em Ribas (2008) e Guth (1981), podemos resolver os problemas com o modelo padrão através da solução inflacionária. Para resolver o problema da planura vamos reescrever a equação 205 na forma

$$|\Omega - 1| = \frac{|K|}{a^2 H^2}. \quad (224)$$

Através desta podemos perceber que devido a inflação, o fator de escala cresce a uma taxa muito grande, sendo assim $|\Omega - 1|$ tende rapidamente a zero, fazendo com que $\Omega \rightarrow 0$.

Para resolver o problema do horizonte utilizamos do espaço-tempo definido pela métrica de Robertson-Walker com $K=0$, assim a distância que a luz percorre desde o início do universo

até um tempo t é dada por

$$d = a(t) \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')}; \quad (225)$$

Esta equação define as regiões que podem estar casualmente em contato. Sabemos que para a luz $ds = 0$, assim a métrica de Robertson-Walker se torna $0 = dt^2 - a^2(t)dr^2$, logo a equação acima (225) se torna

$$d = a(t) \int_0^r dr. \quad (226)$$

Com esta relação vemos que regiões que pensávamos estarem desconectadas casualmente, na verdade entravam em contato casual no início do universo, mas devido a expansão acelerada do universo, estas ultrapassaram seu horizonte, pois estas esticaram com a mesma, devido ao crescimento exponencial do fator de escala $a(t)$.

O problema dos monopolos magnéticos uma vez que estes tenham sido produzidos antes do período de inflação, desse modo durante a expansão acelerada a densidade dos monopolos cai exponencialmente, levando a níveis indetectáveis.

Por fim, a solução para o problema da coincidência também está na expansão, de forma que esta proporcionou rapidamente o balanço relativo entre as densidades de energia presentes no período citado.

Acreditava-se que o universo atual seria dominado pela matéria diluída com pressão nula, porém no atual modelo, mais de um quarto de sua constituição é dominado por um constituinte que não interage com a radiação, chamada de energia escura, podendo ser equacionada como um fluido perfeito de pressão nula, assim, sua introdução no modelo padrão não apresenta grandes dificuldades, sendo descrita, em um dos modelos, pela constante cosmológica, e em outro por um campo escalar.

De acordo com as medidas de flutuação de temperaturas presentes na radiação cósmica de fundo, o parâmetro de densidade total do universo assume valor $\Omega_{total} \sim 1$, sendo que a soma da matéria bariônica, radiação e matéria escura não passam de aproximadamente 0,3, o que indica que a densidade de energia escura está por volta de 0,7, além disso, estudos recentes também indicam que o universo passou de um regime desacelerado para um regime acelerado em $z \sim 0,46$, com o parâmetro de desaceleração do universo hoje igual a $q < -0,4$.

Uma hipótese levantada recentemente, consegue abranger tanto a aceleração da expansão presente no atual universo, como a do início do universo. Ela descreve o universo primordial com a dinâmica de campos fermiônicos, sendo os férmions, partículas elementares. Em um universo primordial, o férmion produz a rápida expansão que dura até que a densidade de energia

da matéria ultrapasse a do férmion, neste momento o férmion atua como inflaton, então o período de aceleração termina e, uma nova fase dominada pela matéria surge. Depois, novamente o campo fermiônico volta a dominar, resultando em uma nova fase acelerada, neste caso o férmion faz o papel da energia escura, assim neste modelo, é dispensável o uso da constante cosmológica e de campos escalares.

5 MODELOS COSMOLÓGICOS COM FONTES FERMIÔNICAS

Um dos tópicos fundamentais da cosmologia, é a procura por constituintes que possam ser responsáveis pelo período de expansão, como já vimos, esta função foi atrelada a constante cosmológica e a ideia de campos escalares, porém ambas apresentam falhas, como a necessidade de ajustes para então, a teoria concordar com a observação, ou então, a presença da singularidade inicial. Para solucionar estes problemas, uma possibilidade eficiente que vem sendo estudada recentemente, é considerar fontes fermiônicas que descrevem o período de expansão acelerada no início do universo. Inicialmente proposto por Ribas *et al.* (2005), seu diferencial é que, esta formulação pode ser testada quando efeitos quânticos são considerados.

De modo geral, as fontes fermiônicas são descritas por um campo fermiônico, o qual descreve partículas cujo spin é relevante em seu estudo, ou seja, $s = 1/2$. Este é um exemplo de um campo espinorial cujas características principais estão em sua representação, a qual é um vetor coluna com quatro componentes, e como obedecem a equação de Dirac.

Neste trabalho consideramos fontes fermiônicas com potencial de auto-interação e o fluido relativístico no formalismo de Schutz, como constituintes da teoria pré-inflacionária. Assumimos que a física, no nível quântico, é controlada pelas equações de Wheeler-De Witt, trabalhando com a estrutura hamiltoniana. O objetivo é investigar a relação entre os modelos cosmológicos com domínio da mecânica quântica, e como o campo fermiônico acaba controlando a evolução do universo primordial.

Neste trabalho, adotamos a convenção para a métrica (+, -, -, -) e as unidades naturais $c = \hbar = 8\pi G = 1$.

5.1 O FORMALISMO DAS TETRADAS

A inclusão dos férmions na relatividade geral, não pode ser feita de forma imediata com as representações tensoriais usuais do grupo de transformações gerais de coordenadas em qualquer dimensão, uma vez que deve existir uma conexão entre a relatividade geral e a equação de Dirac, para que os campos clássicos possam ser escritos em um espaço-tempo curvo. Para realizarmos esta inclusão, utilizaremos o método de tetradas, a qual possui uma relação entre o espaço tempo descrito por um sistema geral de coordenadas e o espaço de Minkowski local, definido a cada ponto P . Segundo Kaku (1993), no espaço de Minkowski as representações

espinoriais são conhecidas de modo que a introdução de campos fermiônicos pode ser feita naturalmente através da relação com as coordenadas gerais.

A tetrada é representada pelo símbolo e_{μ}^a , onde os índices latinos, ou seja, a, b, c, \dots , indicam o espaço plano tangente de Minkowski, definido localmente a cada ponto do espaço curvo. Estes índices seguem a métrica η^{ab} e η_{ab} , podendo mudar de covariante para contravariante conforme a necessidade. Já os índices gregos, ou seja, μ, ν, α, \dots , indicam o sistema de coordenadas geral definido no espaço curvo, sendo que estes índices seguem a métrica $g^{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$, podendo mudar de covariante para contravariante, conforme a necessidade. Ambos os índices assumem valores de 0 à 3. Esta tetrada é um coeficiente de transformação, o qual faz a transição entre o espaço local e o espaço curvo.

Veremos agora, como esta transformação acontece, de acordo com nada (a). Suponha que e_a sejam vetores que formam uma base local do espaço de Minkowski, e que e_{μ} seja uma base associada ao sistema geral de coordenadas, ambas em um ponto P. Suponha também que a transformação entres estas bases (e_a e e_{μ}) sejam inversíveis. Assim podemos escrever

$$e_{\mu} = e_{\mu}^a e_a \quad (227)$$

e

$$e_a = e_a^{\mu} e_{\mu}, \quad (228)$$

onde e_a^{μ} representa a transformação inversa à e_{μ}^a .

Se as bases satisfazem $e_a e_b = \eta_{ab}$ e $e_{\mu} e_{\nu} = g_{\mu\nu}$, temos que

$$e_{\mu} e_{\nu} = g^{\mu\nu} = e_{\mu}^a e_{\nu}^b \eta_{ab} = e_{\mu}^a e_{a\nu} \quad (229)$$

e

$$e_a e_b = \eta_{ab} = e_a^{\mu} e_b^{\nu} g_{\mu\nu} = e_a^{\mu} e_{\mu b}. \quad (230)$$

As relações acima (229 e 230) apresentam as seguinte propriedades

$$e_{\nu}^a e_a^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} \quad (231)$$

e

$$e^{a\mu} e_{\mu b} = \delta_b^a. \quad (232)$$

Em consequência disso, toda a álgebra que obedece a métrica $g_{\mu\nu}$ pode ser obtida de forma equivalente por meio das tetradas e_{μ}^a . Assim as tetradas permitem uma mudança de base, trocando um índice pelo outro.

Outra grandeza importante que deve ser definida é a expressão para a derivada covariante de um vetor e para a conexão afim, que na definição padrão tem forma

$$\nabla_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma_{\tau\nu}^\mu V^\tau, \quad (233)$$

em que as componentes destes vetores (V^μ e V^a) se relacionam com o campo das tetradas por

$$V^\mu = e_a^\mu V^a \quad (234)$$

e

$$V^a = e_\mu^a V^\mu. \quad (235)$$

A derivada covariante de um vetor que possui termos latinos é escrita na forma

$$\nabla_a V^b = \partial_a V^b + \omega_{ca}^b V^c, \quad (236)$$

onde o termo ω_{ca}^b é chamado de conexão de spin.

Assim podemos relacionar a derivada covariante de um vetor no sistema de coordenadas gerais, com a derivada covariante de um vetor no sistema local, através das tetradas

$$\nabla_\nu V^\mu = e_\nu^a e_b^\mu \nabla_a V^b; \quad (237)$$

Substituindo esta equação no lado esquerdo da relação 233, com o lado direito mantido fixo, temos

$$e_\nu^a e_b^\mu \nabla_a V^b = \partial_\nu V^\mu + \Gamma_{\tau\nu}^\mu V^\tau; \quad (238)$$

Substituindo as relações 235 e 236 na equação acima, temos

$$e_\nu^a e_b^\mu (\partial_a V^b + \omega_{ca}^b V^c) = \partial_\nu V^\mu + \Gamma_{\tau\nu}^\mu V^\tau; \quad (239)$$

Fazendo a distributiva, chegamos em

$$e_\nu^a e_b^\mu \partial_a (e_\tau^b V^\tau) + e_\nu^a e_b^\mu e_\lambda^c V^\lambda \omega_{ca}^b = \partial_\nu V^\mu + \Gamma_{\tau\nu}^\mu V^\tau; \quad (240)$$

Utilizando a regra de Leibniz, temos

$$\partial_\nu V^\mu + V^\tau (e_b^\mu \partial_\nu e_\tau^b + e_b^\mu e_\tau^c \omega_{c\nu}^b) = \partial_\nu V^\mu + \Gamma_{\tau\nu}^\mu V^\tau; \quad (241)$$

Comparando os dois membros desta igualdade, deduzimos a expressão para a conexão afim

$$\Gamma_{\tau\nu}^\mu = e_b^\mu \partial_\nu e_\tau^b + e_b^\mu e_\tau^c \omega_{c\nu}^b; \quad (242)$$

Multiplicando ambos os lados desta equação pelo produto das tetradas $e_\mu^a e^{\tau d}$, temos

$$\omega_{d\nu}^a = e_\mu^a e_d^\tau \Gamma_{\tau\nu}^\mu - e_d^\tau \partial_\nu e_\tau^a; \quad (243)$$

Por fim, multiplicamos ambos os lados desta equação por η^{fd} , assim chegando a expressão para a conexão de spin

$$\omega_\nu^{af} = e_\mu^a e^{\tau f} \Gamma_{\tau\nu}^\mu - e^{\tau f} \partial_\nu e_\tau^a. \quad (244)$$

A conexão de spin, como representada acima, é antisimétrica, logo podemos facilmente verificar que $\omega_\nu^{af} + \omega_\nu^{fa} = 0$.

Segundo Yopez (2011), e de acordo com as identidades 229 e 230, devemos escolher as tetradas que satisfazem

$$\nabla_\tau e_b^\mu = 0 \quad (245)$$

e

$$\nabla_\tau e_{\mu b} = 0; \quad (246)$$

Denominada compatibilidade da métrica, essa escolha corresponde à propriedade de metricidade da derivada covariante. Assim

$$\nabla_\tau g_{\mu\nu} = 0. \quad (247)$$

A relação entre as matrizes de Dirac no espaço local e no espaço descrito pelas coordenadas gerais satisfaz a relação usual de anti-comutação da álgebra de Clifford. Utilizando álgebra das matrizes de Dirac no espaço de Minkowski, $[\gamma^a, \gamma^b] = 2\eta^{ab}$, provamos a seguir

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = e_a^\mu \gamma^a e_b^\nu \gamma^b + e_b^\nu \gamma^b e_a^\mu \gamma^a = 2\eta^{ab} e_a^\mu e_b^\nu = 2g^{\mu\nu}; \quad (248)$$

Substituindo a derivada parcial pela derivada covariante na prescrição usual da ação de Dirac, chegamos a sua generalização covariante, a qual é invariante por transformação geral de coordenadas, e tem forma

$$S = i \int d^4x \sqrt{-g} \bar{\psi} (i\gamma^\mu \nabla_\mu - m) \psi, \quad (249)$$

onde a derivada covariante para a representação espinorial é definida por

$$\nabla_\mu \psi \equiv \partial_\mu \psi + \frac{i}{2} \omega_\mu^{ab} \sigma_{ab} \psi, \quad (250)$$

sendo seu conjugado

$$\nabla_\mu \bar{\psi} \equiv \partial_\mu \bar{\psi} - \frac{i}{2} \omega_\mu^{ab} \bar{\psi} \sigma_{ab}, \quad (251)$$

em que

$$\sigma_{ab} = i/2[\gamma_a, \gamma_b]. \quad (252)$$

Note a semelhança entre esta equação e 236, que de fato é a definição da derivada covariante para uma representação vetorial.

Em seguida iremos obter a relação entre as derivadas covariantes e o tensor de curvatura. Primeiramente calculamos o comutador entre as derivadas covariantes, partindo de

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\Psi = \nabla_\mu(\nabla_\nu\Psi) - \nabla_\nu(\nabla_\mu\Psi); \quad (253)$$

Inserimos a definição da derivada covariante (250 e 251), e chegamos em

$$[\nabla_\mu \nabla_\nu]\Psi = -\frac{1}{4}R_{\mu\nu}^{ab}\gamma_a\gamma_b\Psi; \quad (254)$$

Esta expressão é o tensor de curvatura escrito em termos das derivadas da conexão de spin, sendo

$$R_{\mu\nu}^{ab} = \partial_\mu\omega_\nu^{ab} - \partial_\nu\omega_\mu^{ab} + \omega_\mu^{ac}\omega_\nu^b - \omega_\nu^{ac}\omega_\mu^b. \quad (255)$$

Podemos ter uma relação direta com o tensor de Riemann, escrita na forma

$$[\nabla_\mu \nabla_\nu]\Psi = -\frac{1}{4}R_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = 2R. \quad (256)$$

Como Kaku (1993) nos mostra, é possível introduzir localmente representações espinoriais associadas ao grupo de transformação geral de coordenadas, e utilizá-las em um espaço tempo curvo através das tetradas.

5.2 O FLUIDO DE SCHUTZ

No modelo proposto por Jr (1970) e Jr (1971), um fluido perfeito é composto por bárions, já que estes podem sofrer transformação, sendo que a verdadeira massa do grupo de bárions pode não ser conservada, mas o número de bárions N é conservado. Portanto, nós definimos a massa conservada restante como uma simples matéria que possui N bárions, com $m_H N$, sendo m_H a massa do átomo de hidrogênio em seu estado fundamental.

A diferença entre a massa-energia total M e a massa restante $m_H N$ é chamada de energia interna U , em outros termos podemos escrever $U = M - m_H N$. Nesta relação está inclusa a diferença entre $m_H N$, a verdadeira massa restante dos atuais bárions e átomos, a energia dos pares de elétron-pósitron, de mésons, de fótons, vindos de um movimento térmico, e o ponto zero do “movimento” do gás-fermi.

Apontamos para ρ_0 a densidade do resto de massa, assim definimos

$$u = \frac{U}{m_H N}, \quad (257)$$

como a energia interna específica, ambos os parâmetros, ρ_0 e u , foram medidos momentaneamente em um local inercial do fluido. Assim a densidade de massa-energia é definida como

$$\rho = \frac{M}{V}, \quad (258)$$

em que V se refere ao volume ocupado pelo fluido. Se a densidade de massa-energia inicial for

$$\rho_0 = \frac{m_H N}{V}; \quad (259)$$

Da definição de energia interna 257, temos que

$$\rho = \rho_0(1 + u). \quad (260)$$

Assim, Schutz afirma existir uma equação de estado para a forma $p = p(\rho_0, u)$.

De acordo com Fermi (1936), p. 91, a expressão para estes dois parâmetros, ρ e p , é suficiente para qualquer componente do fluido. A aplicabilidade destes resultados para um fluido bariônico, depende em partes, de como as equações para estes dois parâmetros irão caracterizar o fluido. Um exemplo importante se refere a uma quantidade de calor sendo absorvida por unidade de massa restante (δq), em um processo quase estático do fluido, que pela primeira lei da termodinâmica pode ser definido como

$$\delta q = du + pd \left(\frac{1}{\rho_0} \right). \quad (261)$$

Devido as equações de estado para os dois parâmetros citados, e de acordo com o teorema de Pfaff, presente no anexo A, existem funções para a entropia específica (S) e temperatura (T), do tipo $S(\rho_0, u)$ e $T(\rho_0, u)$. Assim podemos escrever

$$du + pd \left(\frac{1}{\rho_0} \right) = TdS = \delta q; \quad (262)$$

Se definirmos a massa específica inercial como

$$\mu = \frac{(\rho + p)}{\rho_0} = 1 + u + \frac{p}{\rho_0}; \quad (263)$$

Reescrevendo a equação 262 na forma

$$du - \frac{1}{\rho_0} dp = TdS, \quad (264)$$

que ocasionalmente podemos usar esta equação na forma

$$dp = \rho_0 du - \rho_0 T dS. \quad (265)$$

Deste modo, claramente podemos expressar ρ_0 e u como funções de μ e S , assim a equação de estado é uma função do tipo $p = p(\mu, S)$.

A partir de agora precisaremos considerar as convenções adotadas Schutz em seu estudo. Ele utiliza as unidades geométricas, como $c=G=1$. Os índices gregos vão de 0 a 3 e os índices em latim vão de 1 a 3. A métrica tem uma assinatura positiva, portanto os intervalos de tempo são negativos, nós definimos o tempo próprio (τ) como

$$d\tau^2 = ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (266)$$

consequentemente $d\tau$ é real e positivo para uma partícula se movendo no espaço tempo.

Além da equação de estado, citada acima, a teoria relativística para o fluido perfeito também necessita do tensor energia-momento, definido como

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu} = \rho_0 u U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (267)$$

sendo U^ν a quadrivelocidade. Devemos lembrar de sua definição, seja a quadrivelocidade $U^\nu = dx^\nu/d\tau$.

Em um quadro comóvel localmente inercial, a matriz de $T^{\mu\nu}$ é diagonal e possui os valores (ρ, p, p, p) . Devido ao fluido perfeito, o tensor stress-energia não apresenta viscosidade em termos de transporte-energia. A conservação do número de bárions, é reescrita em termos da densidade de massa restante ρ_0 , assim

$$\nabla_\nu(\rho_0 U^\nu) = 0; \quad (268)$$

Normalizando a quadrivelocidade, temos

$$U^\nu U_\nu = -1; \quad (269)$$

Assim a derivada covariante nos fornece a equação

$$U^\nu \nabla_\sigma U_\nu = 0. \quad (270)$$

As equações que determinam a dinâmica do fluido são expressas na forma conservativa, sendo o tensor stress-energia uma divergência livre

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (271)$$

Estas 4 equações são complementadas pelas equações 268 e 269, assim determinam o movimento do fluido, que possui uma equação de estado conhecida. O significado físico para as 4 equações vindas da derivada covariante 271, fica clara quando separamos suas componentes entre, paralelo e perpendicular, para a quadrivelocidade. A equação paralela a U é

$$U_\mu \nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (272)$$

que pode ser reduzida pelas equações 268 e 270, à

$$U^\nu \partial_\nu p - \rho_0 U^\nu \partial_\nu \mu = 0. \quad (273)$$

Pela equação 265, a relação acima se torna

$$\rho_0 T U^\nu \partial_\nu S = 0, \quad (274)$$

portanto, o movimento do fluido perfeito conserva a entropia por bárions.

Devido a $\delta q = T dS$, está confirmado que nenhuma onda de calor se propaga, dentro ou fora, de qualquer elemento de um fluido perfeito durante o movimento.

É possível construir outras 3 equações de movimento independentes e perpendiculares a U , usando a projeção do tensor

$$P_\mu^\sigma = \delta_\mu^\sigma + U^\sigma U_\mu. \quad (275)$$

A equação é

$$P_\mu^\sigma \nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0; \quad (276)$$

Utilizando as equações 268, 269 e 270, podemos reduzir isso para

$$-P_\sigma^\nu \partial_\nu p = \mu \rho_0 \nabla_\nu U_\sigma U^\nu = \mu \rho_0 \frac{DU_\sigma}{D\tau}, \quad (277)$$

que em um estado localmente comóvel, P_σ^ν escolhe o gradiente espacial p . Se V é instantaneamente zero, a parte espacial de U , da equação 277 se torna

$$-\nabla p = (\rho + p) \frac{dV}{dt}. \quad (278)$$

Esta relação se refere a familiar lei da força, justificando chamar $(\rho + p)$ de massa inercial por volume.

A equação 278 descreve a resposta dos elementos do fluido em relação ao gradiente da pressão, e as equações 268 e 274 necessitam da conservação do número de bárions e uma quantidade de entropia contida nos elementos do fluido.

Introduzindo a representação de uma velocidade-potencial para a quadrivelocidade de um fluido perfeito na relatividade geral, permite uma nova representação hidrodinâmica, na qual as próprias velocidades potenciais possuem equação de movimento de primeira ordem, nestas mudanças na quadrivelocidade em relação ao tempo são expressos em termos de Euler-Lagrange, que muda com o potencial. As velocidades potenciais não são algo novo para a hidrodinâmica Newtoniana, mas possuem uma limitação em seu uso.

Sabemos que o movimento rotacional é derivado de um único potencial, $V = \nabla\phi$, mas em 1859, Clebsch (1994) mostrou que qualquer movimento newtoniano pode ser representado por 3 potenciais

$$V = \nabla\phi + \alpha\nabla\beta. \quad (279)$$

Esta representação possui uma desvantagem, os potenciais (α, β, ϕ) não apresentam interpretação física individualmente, ou seja, não existem equações de movimento para eles. Em contrapartida a representação da velocidade-potencial newtoniana, foi introduzida por Selinger e Whitham em 1968, como mostra Sieniutycz and Berry (1993), para evitar as dificuldades comentadas anteriormente. Usando cinco potenciais, dois a mais do que o necessário, Selinger e Whitham foram capazes de fornecer a cada potencial uma equação de evolução e uma interpretação física independente. Sendo um dos potenciais, a entropia, por exemplo, o outro é um potencial de temperatura de Van Dantzing. Esta representação é uma generalização relativística do trabalho de Selinger e Whitham.

As 6 velocidades potenciais - aqui Schutz considera uma a mais, em relação ao caso Newtoniano, pois há 4 componentes de velocidade ao invés de 3 - todas têm equações de evolução que determinam como elas variam em relação ao tempo. Estas equações constituem uma forma alternativa das usuais equações da hidrodinâmica, pois são baseadas na divergência do tensor energia-momento, ao invés de simplesmente um complemento.

Selinger e Whitam derivaram suas equações do princípio variacional. Aqui Schutz generaliza este princípio para incluir os efeitos da relatividade geral. Para fazer isso, as equações de evolução para a velocidade-potencial são colocadas em uma base firme à parte do princípio variacional, dando uma rigorosa prova da hidrodinâmica.

A “versão velocidade-potencial” da hidrodinâmica por contraste, presta-se à mais natural interpretação de Euler-Lagrange. Ela interpreta a quadrivelocidade como um campo vetorial no espaço tempo. Como tal, pode ser representado em termos do campo escalar e de seus gradientes. Enquanto a partícula se move pelo espaço, as grandezas escalares em um dado

ponto do espaço, simplesmente mudam seus valores com o tempo.

De acordo com o teorema de Pfaff's, presente no apêndice B, 4 potenciais são suficientes para descrever a quadrivelocidade

$$U_\nu = A\partial_\nu B + C\partial_\nu D. \quad (280)$$

Enquanto estes 4 potenciais são garantidos de existir, eles não podem ser fisicamente úteis. Agora Schutz introduz a representação com 6 potenciais, que possuem uma importante interpretação física. A representação é

$$U_\nu = \frac{1}{\mu}(\partial_\nu \phi + \alpha\partial_\nu \beta + \theta\partial_\nu S). \quad (281)$$

Os potenciais μ e S são apenas a massa inercial específica e a entropia específica, como já definido. As equações de evolução desta equação, assim como a prova da equivalência entre as equações da versão padrão e as equações da versão que introduz a velocidade-potencial se encontram em A.

5.3 COSMOLOGIA QUÂNTICA COM FONTES FERMIÔNICAS E O FLUIDO DE SCHUTZ

Para chegar a uma expressão para a pressão, e a ação de nosso fluido, iremos considerar os formalismos apresentados acima, e com base em Ribas *et al.* (2017), iremos reescrever a relação 260 na forma

$$u = \frac{\rho}{\rho_0} - 1; \quad (282)$$

Substituindo 282 em 262, chegamos a reação

$$d\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) + pd\left(\frac{1}{\rho_0}\right) = TdS. \quad (283)$$

Assumimos que a pressão do fluido é dada pela equação barotrópica de estado $p = \omega\rho$, onde ω é o coeficiente barotrópico, o qual assumimos como constante. Substituindo esta relação em 283, encontramos a igualdade

$$\frac{\rho}{\rho_0} d\left[\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) - \omega\ln(\rho_0)\right] = TdS; \quad (284)$$

Em que, por comparação identificamos as relações de temperatura e entropia respectivamente

$$T = \frac{\rho}{\rho_0} \quad (285)$$

e

$$S = \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0^{1+\omega}} \right). \quad (286)$$

Eliminando o logaritmo neperiano de 286, e considerando a pressão do fluido $p = \omega\rho$, como já mostrado anteriormente, chegamos a relação

$$p = \omega e^S \rho_0^{1+\omega}. \quad (287)$$

Para eliminar ρ_0 desta relação, utilizaremos a entalpia específica como Schutz apresenta, dada pela equação 263, e nesta também iremos substituir a pressão do fluido por $p = \omega\rho$, chegamos a relação

$$\rho_0 = \frac{\rho}{\mu}(1 + \mu); \quad (288)$$

Substituindo esta relação em 287, chegamos em

$$\frac{p}{\rho^{1+\omega}} = \omega e^S \left(\frac{1 + \omega}{\mu} \right)^{1+\omega}; \quad (289)$$

Usando

$$p^{1+\omega} = \omega^{1+\omega} p^{1+\omega}, \quad (290)$$

logo

$$\rho^{1+\omega} = \frac{p^{1+\omega}}{\omega^{1+\omega}}; \quad (291)$$

Substituindo em 289, e realizando a álgebra necessária, alcançamos a relação

$$p = \omega e^{-S/\omega} \left(\frac{\mu}{\omega + 1} \right)^{\frac{1+\omega}{\omega}}, \quad (292)$$

a qual iremos analisar utilizando a métrica de Robertson-Walker. A dinâmica relativística de um fluido perfeito, acoplado à um campo gravitacional, segundo Schutz, é descrito pela relação 281, que por sua vez, é uma função não possui rotação na métrica adotada, deste modo o termo $\alpha\partial_\nu\beta$ se torna nulo. Devido a isto a relação 281 será reescrita na forma

$$U_\nu = \frac{1}{\mu}(\partial_\nu\phi + \theta\partial_\nu S), \quad (293)$$

sendo a sua forma contravariante

$$U^\nu = g^{\nu\sigma} \frac{1}{\mu}(\partial_\sigma\phi + \theta\partial_\sigma S). \quad (294)$$

Considerando a normalização da quadrivelocidade $U^\nu U_\nu = 1$, temos

$$\mu^2 = g^{\nu\sigma}(\partial_\sigma\phi + \theta\partial_\sigma S)(\partial_\nu\phi + \theta\partial_\nu S). \quad (295)$$

Como na métrica de Robertson-Walker, os campo e potenciais são descrito como funções que dependem unicamente do tempo, temos

$$\mu = \dot{\phi} + \theta\dot{S}; \quad (296)$$

Substituindo esta relação em 292, finalmente chegamos a expressão final para descrever a pressão do fluido perfeito de nosso modelo

$$p = \omega e^{S/\omega} \left(\frac{\dot{\phi} + \theta\dot{S}}{\omega + 1} \right)^{\frac{1+\omega}{\omega}}. \quad (297)$$

A ação para nosso modelo assume a forma

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2} + \frac{i}{2} (\bar{\psi} \Gamma^\mu \nabla_\mu \psi - (\nabla_\mu \bar{\psi}) \Gamma^\mu \psi) - \lambda (\bar{\psi} \psi)^n - p \right], \quad (298)$$

onde ψ e $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ representam, respectivamente, o campo fermiônico e o campo adjunto, os quais são adjacentes e hermitianos. Neste modelo consideramos as matrizes de Dirac-Pauli, generalizadas, ou seja, são descritas no espaço tempo curvo da seguinte forma: $\gamma^a \rightarrow \Gamma^\mu = e_a^\mu \gamma^a$, onde e_a^μ é um tetrada que carrega informações sobre o campo gravitacional. Estas matrizes generalizam a álgebra de Clifford, como mostrado a seguir:

$$[\Gamma^\mu, \Gamma^\nu] = 2g^{\mu\nu} \quad (299)$$

e

$$\sigma_{ab} = \frac{1}{2} [\gamma^a, \gamma^b] = 2\eta_{ab}. \quad (300)$$

onde σ_{ab} são os geradores da representação spinorial do grupo de Lorentz, definido por 252

Para preservar a invariância por transformações locais, substituímos as derivadas ordinárias da teoria de campos correspondente, pelas derivadas covariantes 250 e 251, sendo o termo ω_μ^{ab} determinado a partir da definição do termo da conexão afim (242), temos a relação 244.

Para chegar às definições de nosso modelo iremos desenvolver o termo $i/2\omega_\mu^{ab}\sigma_{ab}$ presente nas derivadas covariantes. Para que isto seja possível é necessário realizar um ajuste nos índices da relação 244, assim temos

$$\omega_\mu^{ab} = e_\nu^a e^{b\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^\nu - e^{\lambda b} \partial_\mu e_\lambda^a; \quad (301)$$

Após o ajuste, substituímos esta, e a equação 300 na relação $i/2\omega_\mu^{ab}\sigma_{ab}$, com a álgebra adequada, e aplicando o método de tetradas, chegamos em

$$\frac{i}{2}\omega_\mu^{ab}\sigma_{ab} = \frac{1}{4} (\Gamma_\nu \Gamma^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\nu - \eta_{ab} e_\nu^a e^{b\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^\nu - \gamma_a \Gamma^\lambda \partial_\mu e_\lambda^a + \eta_{ab} e^{\lambda b} \partial_\mu e_\lambda^a); \quad (302)$$

Utilizando as relações $\Gamma_\nu = g_{\theta\nu}\Gamma^\theta$ e $\gamma_a = e_{\theta a}\Gamma^\theta$, temos

$$\frac{i}{2}\omega_\mu^{ab}\sigma_{ab} = \frac{1}{4}(g_{\theta\nu}\Gamma^\theta\Gamma^\lambda\Gamma_{\mu\lambda}^\nu - e_{\theta a}\Gamma^\theta\Gamma^\lambda\partial_\mu e_\lambda^a) - \frac{1}{4}(\eta_{ab}e_\nu^a e^{b\lambda}\Gamma_{\mu\lambda}^\nu - \eta_{ab}e^{\lambda b}\partial_\mu e_\lambda^a); \quad (303)$$

Colocando os semelhantes em evidência, temos

$$\frac{i}{2}\omega_\mu^{ab}\sigma_{ab} = \frac{1}{4}(g_{\theta\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^\nu - e_{\theta a}\partial_\mu e_\lambda^a)\Gamma^\theta\Gamma^\lambda - \frac{1}{4}\eta_{ab}\omega_\mu^{ab}. \quad (304)$$

Como $\eta_{ab}\omega_\mu^{ab} = \omega_{\mu b}^b = 0$ pois é antissimétrico, assim nos resta

$$\frac{1}{4}(g_{\theta\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^\nu - e_{\theta a}\partial_\mu e_\lambda^a)\Gamma^\theta\Gamma^\lambda. \quad (305)$$

Escrevendo o termo como $e_{\theta a} = g_{\theta\nu}e_a^\nu$, temos

$$\frac{1}{4}(g_{\theta\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^\nu - g_{\theta\nu}e_a^\nu\partial_\mu e_\lambda^a)\Gamma^\theta\Gamma^\lambda; \quad (306)$$

Deixando os termos semelhantes em evidência, definimos

$$\Omega_\mu = -\frac{1}{4}g_{\theta\nu}(\Gamma_{\mu\lambda}^\nu - e_a^\nu\partial_\mu e_\lambda^a)\Gamma^\theta\Gamma^\lambda. \quad (307)$$

Deste modo as derivadas covariantes, 250 e 251, se tornam

$$\nabla_\mu\psi = \partial_\mu\psi - \Omega_\mu\psi \quad (308)$$

e

$$\nabla_\mu\bar{\psi} = \partial_\mu\bar{\psi} + \Omega_\mu\bar{\psi}. \quad (309)$$

Um ponto importante a se considerar em nosso modelo, é que o campo fermiônico possui um potencial de auto interação, o qual é uma função de $\bar{\psi}\psi$. Aqui consideramos $V = \lambda(\bar{\psi}\psi)^n$, em que λ controla a intensidade desta contribuição e n é constante.

Para escolhermos a base das tetradas, seguimos a métrica de Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker, temos que

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab}e_\mu^a e_\nu^b; \quad (310)$$

Assumindo que os índices, latinos assumem os valores $a = b = 0,1,2,3$ e os índices gregos assumem os valores $\mu = \nu = 0,1,2,3$. Realizando os cálculos necessários, encontramos os valores não nulos

$$e_0^\mu = \delta_0^\mu \quad (311)$$

e

$$e_i^\mu = \frac{1}{a}\delta_i^\mu, \quad (312)$$

sendo a o fator de escala vindo da métrica. Com estes valores podemos encontrar as matrizes de Dirac generalizadas. Através da equação

$$\Gamma^\mu = e_a^\mu \gamma^a. \quad (313)$$

Assumindo que o índice, latino assume os valores $a = 0,1,2,3$ e o índice grego assume os valores $\mu = 0,1,2,3$. Realizando os cálculos necessários, encontramos os valores não nulos

$$\Gamma^0 = \gamma^0 \quad (314)$$

e

$$\Gamma^i = \frac{1}{a} \gamma^i. \quad (315)$$

Para encontrar a conexão de spin generalizada, iremos utilizar os termos não nulos para a conexão afim, segundo a métrica de Robertson-Walker plana ($K=0$), que são as relações 179 e 180, ajustadas para nosso propósito se tornam

$$\Gamma_{11}^0 = a\dot{a}; \quad (316)$$

$$\Gamma_{22}^0 = a\dot{a}; \quad (317)$$

$$\Gamma_{33}^0 = a\dot{a}; \quad (318)$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (319)$$

Utilizando a relação 307, assumindo os valores para o índice $\mu = 0,1,2,3$, e realizando os cálculos necessários chegamos as relações generalizadas

$$\Omega_0 = 0 \quad (320)$$

e

$$\Omega_i = \frac{1}{2} \dot{a} \gamma^i \gamma^0. \quad (321)$$

5.3.1 Análise Clássica

Supondo que o fluido não tenha nenhum grau de liberdade rotacional, e reconhecendo que o campo depende apenas do tempo, é possível construir uma Lagrangiana para o modelo. Quando o tensor de curvatura (186), o campo fermiônico e a pressão do fluido (297) são incorporadas a ação 298, a Lagrangiana toma a seguinte forma

$$L = 3a\dot{a}^2 - ia^3 \frac{1}{2} (\bar{\psi} \gamma^0 \dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}} \gamma^0 \psi) + \lambda a^3 (\bar{\psi} \psi)^n + a^3 \omega e^{-S/\omega} \left[\frac{\dot{\phi} + \theta \dot{S}}{\omega + 1} \right]^{1+\frac{1}{\omega}}. \quad (322)$$

Em nossa análise clássica iremos trabalhar com o formalismo hamiltoniano, portanto inicialmente encontramos os momentos conjugados

$$\Pi_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = 6a\dot{a}; \quad (323)$$

$$\Pi_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = -\frac{a^3 i}{2} \bar{\psi} \gamma^0; \quad (324)$$

$$\Pi_{\bar{\psi}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = \frac{a^3 i}{2} \gamma^0 \psi; \quad (325)$$

$$\Pi_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = a^3 e^{-S/\omega} \left[\frac{\dot{\phi} + \theta \dot{S}}{\omega + 1} \right]^{\frac{1}{\omega}}; \quad (326)$$

$$\Pi_S = \frac{\partial L}{\partial \dot{S}} = \theta a^3 e^{-S/\omega} \left[\frac{\dot{\phi} + \theta \dot{S}}{\omega + 1} \right]^{\frac{1}{\omega}} = \theta \Pi_\phi. \quad (327)$$

Para montar a função Hamiltoniana, seguimos a relação 6, assim temos

$$H = \Pi_a \dot{a} + \Pi_\psi \dot{\psi} + \Pi_{\bar{\psi}} \dot{\bar{\psi}} + \Pi_\phi \dot{\phi} + \Pi_S \dot{S} - L; \quad (328)$$

Substituindo os resultados encontrados dos momentos conjugados, e a Lagrangiana, temos

$$H = 3a\dot{a}^2 - \lambda a^3 (\bar{\psi} \psi)^n + [\dot{\phi} + \theta \dot{S}] \left[a^3 e^{-S/\omega} \left(\frac{\dot{\phi} + \theta \dot{S}}{\omega + 1} \right)^{\frac{1}{\omega}} \right] - a^3 \omega e^{-S/\omega} \left(\frac{\dot{\phi} + \theta \dot{S}}{\omega + 1} \right)^{1+\frac{1}{\omega}}. \quad (329)$$

Tomando a igualdade 326, temos que

$$\left(\frac{\dot{\phi} + \theta \dot{S}}{\omega + 1} \right) = \frac{\Pi_\phi e^S}{a^{3\omega}}; \quad (330)$$

Substituindo esta relação em 329, temos

$$H = \frac{\Pi_a^3}{12a} - \lambda a^3 (\bar{\psi} \psi)^n + \frac{e^S \Pi_\phi^{1+\omega}}{a^{3\omega}}; \quad (331)$$

Esta pode ser simplificada, utilizando as seguintes transformações canônicas

$$\eta = -\Pi_S e^{-S} \Pi_\phi^{-(\omega+1)} \quad (332)$$

e

$$\Pi_\eta = e^S \Pi_\phi^{(\omega+1)}. \quad (333)$$

Substituindo 333 em 331, chegamos a versão final da Hamiltoniana clássica do sistema

$$H = \frac{\Pi_a^3}{12a} + a^{-3\omega} \Pi_\eta - \lambda a^3 (\bar{\psi} \psi)^n. \quad (334)$$

Nesta relação, o primeiro termo se refere inteiramente à gravidade, enquanto que os dois últimos, correspondem a troca de energia do fluido e do campo fermiônico com o campo gravitacional $a(t)$. Esta densidade de Hamiltoniana controla a dinâmica clássica, e também o ponto inicial para a análise da mecânica Quântica, que será discutida na próxima seção.

Notamos que este sistema possui vínculos, originados da definição de momento, em outros termos das equações 324 e 325. Para identificá-los, utilizamos o método de Dirac para sistemas vinculados, discutido anteriormente (2), e através dos parêntesis de Poisson (22), identificamos os seguintes vínculos

$$T_1 = \Pi_\psi + \frac{i}{2}a^3\bar{\psi}\gamma^0 \approx 0 \quad (335)$$

e

$$T_2 = \Pi_{\bar{\psi}} - \frac{i}{2}a^3\gamma^0\psi \approx 0, \quad (336)$$

onde o termo ≈ 0 significa que a expressão é fracamente igual a zero. Para obter as equações de movimento, devemos substituir os parêntesis de Poisson pelos parêntesis de Dirac (32), assim para cada momento associado, temos

$$\dot{a} = \{a, H\}^* = \{a, H\} - \{a, T_1\}C_{ab}^{-1}\{T_2, H\}; \quad (337)$$

$$\dot{\Pi}_a = \{\Pi_a, H\}^* = \{\Pi_a, H\} - \{\Pi_a, T_1\}C_{ab}^{-1}\{T_2, H\}; \quad (338)$$

$$\dot{\psi} = \{\psi, H\}^* = \{\psi, H\} - \{\psi, T_1\}C_{ab}^{-1}\{T_2, H\}; \quad (339)$$

$$\dot{\bar{\psi}} = \{\bar{\psi}, H\}^* = \{\bar{\psi}, H\} - \{\bar{\psi}, T_1\}C_{ab}^{-1}\{T_2, H\}; \quad (340)$$

$$\dot{\Pi}_\psi = \{\Pi_\psi, H\}^* = \{\Pi_\psi, H\} - \{\Pi_\psi, T_1\}C_{ab}^{-1}\{T_2, H\}; \quad (341)$$

$$\dot{\Pi}_{\bar{\psi}} = \{\Pi_{\bar{\psi}}, H\}^* = \{\Pi_{\bar{\psi}}, H\} - \{\Pi_{\bar{\psi}}, T_1\}C_{ab}^{-1}\{T_2, H\}; \quad (342)$$

$$\dot{\eta} = \{\eta, H\}^* = \{\eta, H\} - \{\eta, T_1\}C_{ab}^{-1}\{T_2, H\}; \quad (343)$$

$$\dot{\Pi}_\eta = \{\Pi_\eta, H\}^* = \{\Pi_\eta, H\} - \{\Pi_\eta, T_1\}C_{ab}^{-1}\{T_2, H\}. \quad (344)$$

Onde a matriz C_{ab} é

$$C_{ab} = \begin{pmatrix} \{T_1, T_1\} & \{T_1, T_2\} \\ \{T_2, T_1\} & \{T_2, T_2\} \end{pmatrix} \quad (345)$$

que construída através de 331, se torna

$$C_{12} = \begin{pmatrix} 0 & ia^3\gamma^0 \\ -ia^3\gamma^0 & 0 \end{pmatrix} \quad (346)$$

Sendo a sua inversa

$$C_{12}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i\gamma^0}{a^3} \\ -\frac{i\gamma^0}{a^3} & 0 \end{pmatrix} \quad (347)$$

Assim as equações de movimento se tornam

$$\dot{a} = \frac{\Pi_a}{6}; \quad (348)$$

$$\dot{\Pi}_a = \frac{\Pi_a^2}{12a^2} + 3\omega a^{-3\omega-1}\Pi_\eta - 3a^2\lambda(\bar{\psi}\psi)^n; \quad (349)$$

$$\dot{\psi} = -\frac{3}{2}\frac{\dot{a}}{a}\psi - ni\lambda(\bar{\psi}\psi)^{n-1}\gamma^0\psi; \quad (350)$$

$$\dot{\bar{\psi}} = -\frac{3}{2}\frac{\dot{a}}{a}\bar{\psi} + ni\lambda(\bar{\psi}\psi)^{n-1}\bar{\psi}\gamma^0; \quad (351)$$

$$\dot{\Pi}_\psi = \frac{i}{2}a^3\dot{\bar{\psi}}\gamma^0 + a^3n\lambda(\bar{\psi}\psi)^{n-1}\bar{\psi}; \quad (352)$$

$$\dot{\Pi}_{\bar{\psi}} = -\frac{i}{2}a^3\gamma^0\dot{\psi} + a^3n\lambda(\bar{\psi}\psi)^{n-1}\psi; \quad (353)$$

$$\dot{\eta} = a^{-3\omega}; \quad (354)$$

$$\dot{\Pi}_\eta = 0. \quad (355)$$

Perceba que as equações 352 e 353 levam as mesmas equações 350 e 351, ou seja, levam as equações de Dirac.

Derivando a relação 348 e substituindo em 349, Encontramos a equação de aceleração para o sistema

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{\omega\Pi_\eta}{a^{3(\omega+1)}} + \lambda(\bar{\psi}\psi)^n \right]. \quad (356)$$

A dependência bilinear do fator de escala escalar $(\bar{\psi}\psi)$ pode ser obtida a partir das equações 350 e 351. Primeiramente igualamos a relação 350 a zero, e em seguida multiplicamos esta por $\bar{\psi}$, chegando o seguinte resultado

$$\bar{\psi}\dot{\psi} + \frac{3}{2}\frac{\dot{a}}{a}\bar{\psi}\psi + in\lambda(\bar{\psi}\psi)^{n-1}\bar{\psi}\gamma^0\psi = 0. \quad (357)$$

Em seguida, igualamos a relação 351 a zero, e em seguida multiplicamos esta por ψ , chegando o seguinte resultado

$$\dot{\bar{\psi}}\psi + \frac{3}{2}\frac{\dot{a}}{a}\bar{\psi}\psi - in\lambda(\bar{\psi}\psi)^{n-1}\bar{\psi}\gamma^0\psi = 0; \quad (358)$$

Somando as relações 357 e 358, temos

$$\dot{\bar{\psi}}\psi + \bar{\psi}\dot{\psi} + \frac{3\dot{a}}{a}\bar{\psi}\psi = 0; \quad (359)$$

Como

$$\frac{d}{dt} (\bar{\psi}\psi) = \frac{d}{dt} (\bar{\psi}) \psi + \bar{\psi} \frac{d}{dt} (\psi); \quad (360)$$

Substituindo esta relação em 359 e integrando o mesmo, encontramos

$$(\bar{\psi}\psi) = \frac{C}{a^3}, \quad (361)$$

que substituindo em 356, temos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{\omega \Pi_\eta}{a^{3(\omega+1)}} + \lambda \left(\frac{C}{a^3} \right)^n \right]. \quad (362)$$

A qual é uma equação diferencial para o fator de escala como função do tempo. Agora podemos escrever esta relação em termos do tempo conforme, para isso, fazemos a seguinte troca de variáveis

$$\dot{a} = \frac{da}{dt} = \frac{da}{d\eta} \frac{d\eta}{dt} = a' \eta'; \quad (363)$$

Substituindo a relação 354, temos

$$\dot{a} = \frac{a'}{a^{3\omega}}; \quad (364)$$

Analogamente temos

$$\ddot{a} = \frac{a''}{a^{6\omega}} - \frac{3\omega a'^2}{a^{6\omega+1}}; \quad (365)$$

Substituindo estes resultados (364 e 365) em 362 e considerando $K = \omega \Pi_\eta$ e $D = \lambda C^n / 2$, temos

$$a'' - \frac{1}{2} \frac{a'^2}{a} (6\omega - 1) - \frac{k}{a^{-3\omega+2}} + \frac{D}{a^{3n-6\omega-1}} = 0. \quad (366)$$

Supondo a seguinte solução:

$$a = c\eta^\alpha. \quad (367)$$

Substituindo 367 em 366, chegamos as relações:

$$\omega = 1 - \frac{2}{3\alpha} \quad (368)$$

e

$$n = 2 - \frac{2}{3\alpha}, \quad (369)$$

como deduzido no apêndice C.

Para cada valor adotado para ω teremos seus correspondentes para n e α . Neste trabalho investigaremos dois cenários relativísticos, assumindo os seguintes valores: $\omega = 1/3$ e $\omega = -1/3$.

Analisando o primeiro caso, onde $\omega = 1/3$, encontramos os parâmetros $\alpha = 1$ e $n = 4/3$. Para que a equação 367 seja solução de 366, utilizamos estes parâmetros, como mostrado no apêndice D, encontrando a seguinte relação para a contante

$$c = \left(\frac{1}{3(D - K)} \right)^{1/2}, \quad (370)$$

que substituído na lei de potência 367 temos

$$a = \left(\frac{1}{3(D - K)} \right)^{1/2} \eta. \quad (371)$$

Já para o segundo caso, onde $\omega = -1/3$, encontramos os seguintes valores para os parâmetros $\alpha = 1/2$ e $n = 2/3$. de forma análoga ao caso anterior, encontramos a seguinte relação para a constante

$$c = [8(K - D)]^{1/4}, \quad (372)$$

que substituído na lei de potência 367 temos

$$a = [8(K - D)]^{1/4} \eta^{1/2}. \quad (373)$$

Como é possível perceber, quando o tempo é levado a um valor nulo, ou seja, $\eta = 0$ o fator de escala a , também apresenta valor nulo, e como a pressão e a densidade são inversamente proporcionais ao fator de escala, neste instante uma singularidade é apresentada. Estes resultados serão comparados com os obtidos na análise quântica, que será realizada no próximo tópico.

5.3.2 Análise Quântica

5.3.2.1 A Equação de Weeler-De Witt

Os fundamentos da cosmologia quântica foram explorados e publicados no final dos anos 60 por DeWitt (1967). Ele compreendeu que o universo primordial, em sua configuração, poderia ser descrito utilizando a teoria quântica, pois neste período, todo o universo foi formado pela rápida expansão de uma minúscula região $l \lesssim M_P^{-1} \sim 10^{-33} \text{cm}$. Os efeitos quânticos desempenharam um papel fundamental durante estes eventos primordiais, sendo a principal ferramenta de estudos a formulação da equação de Weeler-DeWitt para a função de onda do universo $\Psi(h_{ij}, \phi)$, onde h_{ij} representa as três dimensões espaciais da métrica, e ϕ o campo de matéria. Para a função de onda em um estado estacionário, dado por $\partial\Psi/\partial t = 0$. Esta formulação descreve o comportamento da quantidade Ψ em um chamado superespaço, o qual

não é o mesmo usado para escrever teorias supersimétricas. Nossos estudos irão se concentrar em uma abordagem simplificada, como explica Guth (1981), em que apenas uma parte do superespaço é considerado, conhecido como minisuperespaço, nos dando uma descrição de um universo homogêneo de Friedmann, no qual o fator de escala do universo a assumiu o papel de todas as quantidades h_{ij} .

Com esse contexto nós iremos encontrar uma função de onda para o universo, da qual podemos calcular valores esperados para as observáveis do modelo. Seguindo as aproximações do minisuperespaço, começamos com a Hamiltoniana do sistema, montada anteriormente 334. Para passar da Mecânica Clássica para a Mecânica Quântica, toda observável está associada a um operador do tipo Hermitiano, o qual possui autovalores reais, é transformado em um operador e como todo operador atua em estados ou funções de onda, temos

$$\hat{H}\Psi(a,\eta) = 0, \quad (374)$$

sendo o operador hamiltoniano \hat{H} atuando sobre a função de onda $\Psi(a,\eta)$, onde η é associado ao tempo conforme.

Seguindo a prescrição usual da Mecânica Quântica, e adotando $c = \hbar = 8\pi G = 1$, escrevemos as outras observáveis presentes na hamiltoniana em operadores

$$a \rightarrow \hat{a}, \quad (375)$$

$$\Pi_a \rightarrow \hat{\Pi}_a = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = -i \frac{\partial}{\partial a} \quad (376)$$

e

$$\Pi_\eta \rightarrow \hat{\Pi}_\eta = -i \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (377)$$

Substituindo estes no operador hamiltoniano, chegamos a equação de evolução para a função de onda

$$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^2} \frac{a^{3\omega-1}}{12} - \frac{\lambda C^n \Psi}{a^{3(n-3)-3\omega}} = i \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}. \quad (378)$$

Para resolver esta equação nós escrevemos $\Psi(a,\eta) = \Phi(a)T(\eta)$, e utilizando o método de separação de variáveis, temos

$$\frac{a^{3\omega}}{\Phi} \left[-\frac{d^2 \Phi}{da^2} \frac{1}{12a} - \frac{\lambda C^n \Phi}{a^{3(n-1)}} \right] = \frac{i}{T} \frac{dT}{d\eta}, \quad (379)$$

a qual é igual a uma constante de separação E , assim de 379, chegamos a solução de $T(\eta)$

$$T = Ae^{-iE\eta}. \quad (380)$$

Para encontrarmos uma solução para o primeiro termo de 379, é necessário fazer a seguinte mudança de variável $\Phi = \sqrt{a}\xi(a)$, assim realizando os cálculos necessários, chegamos em

$$a^2 \frac{d^2\xi}{da^2} + a \frac{d\xi}{da} + \xi \left(-\frac{1}{4} + 24Da^{6-3n} + 12Ea^{-3\omega+3} \right) = 0. \quad (381)$$

Esta equação não tem uma solução geral, portanto neste ponto iremos definir valores de ω e n , assim encontramos as seguintes soluções:

Para $\omega = 1/3$ e $n = 4/3$, temos

$$\xi(a) = B_1 \frac{\text{sen}(2a\sqrt{6D+3E})}{\sqrt{a}} + B_2 \frac{\text{cos}(2a\sqrt{6D+3E})}{\sqrt{a}}. \quad (382)$$

Como $\Phi = \sqrt{a}\xi(a)$, então $\xi(a) = \Phi(a)/\sqrt{a}$, assim temos

$$\Phi(a) = B_1 \text{sen}(2a\sqrt{6D+3E}) + B_2 \text{cos}(2a\sqrt{6D+3E}), \quad (383)$$

onde B_1 e B_2 são constantes de integração. Combinando as soluções 380 e 383, chegamos a seguinte função de onda

$$\Psi(a, \eta) = Ae^{-iE\eta} [B_1 \text{sen}(2a\sqrt{6D+3E}) + B_2 \text{cos}(2a\sqrt{6D+3E})]. \quad (384)$$

A função de onda $\Psi(a, \eta)$ deve respeitar a condição de contorno $\Psi(0, \eta) = 0$.

A equação 384 precisa ser válida para qualquer η , isso implica que $B_2 = 0$, logo esta relação se torna

$$\Psi(a, \eta) = Ae^{-iE\eta} B_1 \text{sen}(2a\sqrt{6D+3E}); \quad (385)$$

Considerando a superposição de E , integramos a relação 385, temos

$$\Psi = \int_0^\infty e^{-\gamma(6D+3E)} e^{-iE\eta} B_1 \text{sen}(2a\sqrt{6D+3E}) dE; \quad (386)$$

Fazendo uma mudança de variável, onde $r = 6D + 3E$, assim temos

$$\Psi = \int_0^\infty e^{-r(r+i\eta/3)} e^{2i\eta D} B_1 \text{sen}(\sqrt{4a^2 r}) dr; \quad (387)$$

Utilizando a integral tabelada

$$\int_0^\infty e^{-bx} \text{sen}(\sqrt{mx}) dx = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi m} e^{-m/4b}}{b^{3/2}}; \quad (388)$$

Temos o seguinte resultado

$$\Psi = e^{2i\eta D} B_1 \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi 4a^2} e^{\frac{-a^2}{\gamma+i\eta/3}}}{(\gamma+i\eta/3)^{3/2}}. \quad (389)$$

Fazendo a normalização

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \int_0^\infty \Psi \Psi^* a^{1-3\omega} = 1, \quad (390)$$

sendo o termo $a^{1-3\omega}$ incluído para garantir que o operador hamiltoniano seja hermitiano. Como deduzido em E, encontramos o seguinte valor para a constante

$$B_1 = \frac{4}{2^{1/4}} \left(\frac{\gamma}{\pi} \right)^{3/2}, \quad (391)$$

que substituído na função de onda, temos

$$\Psi = \frac{4}{2^{1/4}} \left(\frac{\gamma}{\pi} \right)^{3/4} \frac{a\sqrt{\pi}}{(\gamma+i\eta/3)^{3/2}} e^{2iD\eta} e^{\frac{-a^2}{\gamma+i\eta/3}}. \quad (392)$$

Para encontrar o valor esperado, fazemos

$$\langle \Psi | a | \Psi \rangle = \langle a \rangle = \int_0^\infty a \Psi^* \Psi da. \quad (393)$$

De forma análoga, ajustamos os exponencial de tal forma que possamos combiná-los, assim chegamos ao seguinte valor esperado

$$\langle a \rangle = \frac{2^{1/2}}{\pi^{1/2}} \frac{1}{\gamma^{1/2}} \left(\gamma^2 + \frac{\eta^2}{9} \right)^{1/2}. \quad (394)$$

De maneira semelhante iremos encontrar o valor esperado para o fator de escala para os valores $\omega = -1/3$ e $n = 2/3$. Utilizando a relação genérica 381, temos

$$a^2 \frac{d^2 \xi}{da^2} + a \frac{d\xi}{da} + \xi \left(-\frac{1}{4} + (24D + 12E)a^4 \right) = 0. \quad (395)$$

Fazendo uma mudança de variável onde $r^2 = 24D + 12E$, a relação 395 se torna

$$a^2 \frac{d^2 \xi}{da^2} + a \frac{d\xi}{da} + \xi \left(a^4 r^2 - \frac{1}{4} \right) = 0, \quad (396)$$

sendo a solução para esta

$$\xi(a) = B_1 J_{1/4} \left(\frac{1}{2} r a^2 \right) + B_2 Y_{1/4} \left(\frac{1}{2} r a^2 \right), \quad (397)$$

sendo $J_{1/4}$ e $Y_{1/4}$ funções de Bessel, respectivamente de primeira e segunda espécie.

Como $B_2 = 0$ pois a função de Bessel de segunda espécie é nula na origem, e assumindo que $\xi(a) = \Phi(a)/\sqrt{a}$, então a relação 397 se torna

$$\Phi(a) = B_1 \sqrt{a} J_{1/4} \left(\frac{ra^2}{2} \right); \quad (398)$$

Considerando a mudança de variável feita, a função de onda se torna

$$\Psi(a, \eta) = e^{-i\eta r^2/12} e^{2i\eta D} B_1 \sqrt{a} J_{1/4} \left(\frac{ra^2}{2} \right); \quad (399)$$

Considerando a superposição de onda, temos

$$\Psi = \int_0^\infty A(r) B_1 \sqrt{a} J_{1/4} \left(\frac{ra^2}{2} \right) e^{-i\eta r^2/12} e^{2i\eta D} dr. \quad (400)$$

Escolhe-se $A(r) = e^{-\gamma r^2} r^{5/4}$, assim podemos utilizar a integral tabelada

$$\int_0^\infty x^{\nu+1} e^{-\alpha x^2} J_\nu(\beta x) dx = \frac{\beta^\nu}{(2\alpha)^{\nu+1}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}; \quad (401)$$

Chegamos ao resultado

$$\Psi = \frac{B_1 \sqrt{a} e^{2iD\eta} (a^2/2)^{1/4}}{[2(\gamma + i\eta/12)]^{5/4}} \exp \left[\frac{-(a^2/4)^2}{4(\gamma + i\eta/12)} \right]. \quad (402)$$

Fazendo a normalização

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \int_0^\infty a^{1-3\omega} \Psi \Psi^* = 1, \quad (403)$$

encontramos o seguinte valor da constante B_1

$$B_1 = \sqrt{\frac{8\gamma^{5/4} \Gamma(3/4)}{\pi 2^{1/4}}}. \quad (404)$$

Substituindo o valor encontrado para a constante (404) na função de onda (402), e fazendo o cálculo do valor esperado através da relação

$$\langle \Psi | a | \Psi \rangle = \langle a \rangle = \int_0^\infty a^3 \Psi^* \Psi da; \quad (405)$$

Chegamos ao resultado

$$\langle a \rangle = \frac{1}{3} \frac{2^{1/4} \sqrt{3} \Gamma(3/4)}{\gamma^{1/4} \sqrt{\pi}} (144\gamma^2 + \eta^2)^{1/4}. \quad (406)$$

Em ambas as soluções, 394 e 406, podemos perceber que quando o valor de η se torna muito alto, a solução coincide com o caso clássico, e quando o valor de η se torna nulo, a singularidade é eliminada.

5.3.2.2 Formulação de Bohm na Mecânica Quântica e o Potencial Quântico

Na formulação de Bohm-deBroglie, explicado por DeWitt (1967), Muniz *et al.* (2019) e Manoel *et al.* (2011), admite-se a existência tanto da partícula como ponto material, quanto da onda representada por Ψ . A onda guia o movimento da partícula, ou seja, trata-se de uma onda piloto, assumindo um universo simples e determinístico, diferente da interpretação de Copenhague, ou ainda da interpretação de muitos mundos. Nesta teoria o estado do universo evolui suavemente através do tempo, e mais uma vez diferente da interpretação de Copenhague, não há colapso da função de onda quando mediações ocorrem, entretanto assume-se a existência de um grande número de variáveis ocultas, as quais nunca poderão ser diretamente mensuradas.

Considerando a equação de Schroedinger em uma dimensão

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi; \quad (407)$$

Escrevendo Ψ na forma polar, temos

$$\Psi = R(x,t)e^{iS(x,t)/\hbar}; \quad (408)$$

Fazendo as derivadas presentes na equação de Schroedinger, temos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t} e^{iS/\hbar} + \frac{i}{\hbar} R e^{iS/\hbar} \frac{\partial S}{\partial t} \quad (409)$$

e

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} e^{iS/\hbar} + \frac{i}{\hbar} \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} e^{iS/\hbar} + \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} \frac{i}{\hbar} e^{iS/\hbar} + R \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 e^{iS/\hbar} + R \frac{i}{\hbar} e^{iS/\hbar} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}; \quad (410)$$

Deixando em função de Ψ , temos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\Psi}{R} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \Psi \frac{\partial S}{\partial t} \quad (411)$$

e

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\Psi}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{2i}{\hbar} \frac{\Psi}{R} \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + \Psi \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \Psi \frac{i}{\hbar} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}. \quad (412)$$

Assim a equação de Schroedinger fica

$$i\hbar \frac{\Psi}{R} \frac{\partial R}{\partial t} + \Psi \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\Psi}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{2i}{\hbar} \frac{\Psi}{R} \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\Psi}{\hbar^2} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \Psi \frac{i}{\hbar} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right] + V\Psi. \quad (413)$$

Esta equação pode ser separada em parte imaginária e parte real, assim, respectivamente, temos

$$i \left[\frac{\hbar}{R} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right] + \left[-\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - V \right] = 0. \quad (414)$$

A parte real é a equação de Hamilton-Jacobi com um termo adicional, que se refere ao potencial da teoria. Da parte real, consideramos apenas o termo

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}, \quad (415)$$

o qual corresponde ao Potencial Quântico, sendo a equação de movimento dada por

$$\Pi = \frac{\partial S}{\partial x}. \quad (416)$$

O Potencial Quântico representa uma função no espaço de configuração da mecânica Bohmiana que é determinada por sua própria função de onda. Os efeitos quânticos são gerados por este novo potencial não local, o qual também evita a singularidade. Para os modelos que o utilizam, a fonte de curvatura são fluidos de radiação ou um campo escalar livre, o que se assemelha a nosso modelo, tornando válida sua inclusão na pesquisa.

Tendo em vista as teorias apresentadas acima, iremos desenvolvê-las para o nosso modelo. Inicialmente apenas a formulação de Bohm, e posteriormente iremos desenvolver o Potencial Quântico.

Relembrando que a função de onda para os valores $\omega = 1/3$ e $n = 4/3$, é descrita pela equação 389. Para que este seja escrito na forma polar, ou seja, na forma da relação 408, precisamos fazer com que a parte imaginária do denominador da exponencial não esteja mais presente. Assim faremos uma multiplicação, assim como em 489, nos fornecendo a relação

$$\Psi = \frac{e^{2i\eta D} B \sqrt{4\pi a^2}}{2(\gamma + i\eta/3)^{3/2}} \exp \left[\frac{-a^2\gamma + a^2 i\eta/3}{\gamma^2 + \eta^2/9} \right]. \quad (417)$$

Separando as exponenciais com apenas termos imaginários, e com apenas termos reais, assim como o a dedução acima (414), e realizando outros cálculos necessários, como mostrado em F, chegamos a seguinte equação de movimento

$$\Pi_a = \frac{\partial S}{\partial a} = \frac{2a\eta/3}{\gamma^2 + \eta^2/9}, \quad (418)$$

e lembrando de 323, temos a igualdade

$$\frac{2a\eta/3}{\gamma^2 + \eta^2/9} = 6a\dot{a}; \quad (419)$$

Aplicando a mesma relação de 363, temos

$$\frac{2\eta/3}{\gamma^2 + \eta^2/9} = \frac{6}{a} \frac{da}{d\eta}. \quad (420)$$

Finalmente aplicando a separação de variáveis e integrando, chegamos em

$$a = c\sqrt{\gamma^2 + \frac{\eta^2}{9}}, \quad (421)$$

a qual coincide com 394, sendo c a variável oculta da teoria.

De forma análoga encontramos um resultado semelhante quando assumimos $\omega = -1/3$ e $n = 2/3$. Relembrando do pacote de ondas 402, o qual devemos separar as exponenciais em imaginária e real, como mostrado em G. Analogamente ao caso anterior, iremos escrever o termo $\gamma + i\eta/12$ na forma polar, assim a função de onda se torna

$$\Psi = \frac{B\sqrt{a}}{2^{5/4}} \left(\frac{a^2}{2}\right)^{1/4} \frac{1}{(\gamma^2 + \eta^2/144)^{5/8}} \exp\left[\frac{-9a^4\gamma}{144\gamma^2 + \eta^2}\right] \exp\left[i\left(2\eta D + \frac{3a^4\eta}{4(144\gamma^2 + \eta^2)} - \frac{5}{4}\theta\right)\right], \quad (422)$$

que nos levando a seguinte equação de movimento

$$\Pi_a = \frac{\partial S}{\partial a} = \frac{12a^3\eta}{4(144\gamma^2 + \eta^2)}; \quad (423)$$

E lembrando de 323, temos a igualdade

$$\frac{12a^3\eta}{4(144\gamma^2 + \eta^2)} = 6a\dot{a}; \quad (424)$$

Aplicando a mesma relação de 363, temos

$$\frac{3a^3\eta}{144\gamma^2 + \eta^2} = 6a^2 \frac{da}{d\eta}. \quad (425)$$

Finalmente aplicando a separação de variáveis e integrando, chegamos em

$$a = c(144\gamma^2 + \eta^2)^{1/4}. \quad (426)$$

A qual coincide com 406, sendo c a variável oculta da teoria.

Iremos testar também, a formulação do Potencial Quântico e comparar aos resultados anteriores. Como anteriormente, o primeiro caso a ser analisado, será com a escolha dos valores de $\omega = 1/3$ e $n = 4/3$, assim a equação de evolução para a função de onda, dada pela relação 378, se torna

$$-\frac{1}{12a} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^2} - \frac{i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} - \frac{2D}{a} \Psi = 0; \quad (427)$$

Multiplicando ambos os lados por $-a$, temos

$$\frac{1}{12} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^2} + i \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + 2D\Psi = 0. \quad (428)$$

De acordo com a formulação de Bohm, iremos escrever a função Ψ como mostra a relação 408, seguindo a mesma, é necessário adequar as derivadas parciais obtidas para o tempo e espaço, que respectivamente são 411 e 412, em nossas variáveis de tempo e espaço, que respectivamente são η e a , transformando as relações mencionadas em

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \eta} \Psi + i \frac{\partial S}{\partial \eta} \Psi \quad (429)$$

e

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial a^2} \Psi + \frac{2i}{R} \frac{\partial R}{\partial a} \frac{\partial S}{\partial a} \Psi + \left(\frac{\partial S}{\partial a} \right)^2 \Psi + i \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} \Psi. \quad (430)$$

Substituindo as relações acima (429 e 430) em 428, temos

$$\frac{1}{12} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial a^2} + \frac{2i}{R} \frac{\partial S}{\partial a} \frac{\partial R}{\partial a} + i \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} - \left(\frac{\partial S}{\partial a} \right)^2 \right] \Psi + i \Psi \left[\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \eta} + i \frac{\partial S}{\partial \eta} \right] + 2D\Psi = 0. \quad (431)$$

Ajustando sinais e simplificando termos, temos apenas a parte real para analisarmos

$$\left(\frac{\partial S}{\partial a} \right)^2 + 12 \frac{\partial S}{\partial \eta} + \left(-\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial a^2} - 24D \right) = 0, \quad (432)$$

em que o Potencial Quântico é dado por

$$Q = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial a^2}. \quad (433)$$

Como na formulação de Bohm, separamos a função de onda em parte real e imaginária, como mostra a relação 498. Para facilitar nosso estudo, iremos realizar alguns ajustes na parte real da função de onda, escrevendo assim

$$R = \frac{Ba}{(\gamma^2 + \eta^2/9)^{3/4}} \exp \left[\frac{-a^2 \gamma}{\gamma^2 + \eta^2/9} \right], \quad (434)$$

sendo a constante B dada por

$$B = \frac{4}{2^{1/4}} \left(\frac{\gamma}{\pi} \right)^{3/2} \sqrt{\pi}. \quad (435)$$

Assim obtendo a derivada necessária, e realizando as simplificações, chegamos ao seguinte potencial Quântico

$$Q = -\frac{1}{a} \left[\frac{-6\gamma}{\gamma^2 + \eta^2/9} + \frac{a^3 4\gamma^2}{(\gamma^2 + \eta^2/9)^2} \right], \quad (436)$$

sendo a a ideia de valor esperado, cujo valor na formulação de Bohm é dado por 421, temos

$$Q = \frac{6\gamma}{C} \frac{1}{(\gamma^2 + \eta^2/9)^{3/2}} - \frac{4\gamma^2 C^2}{\gamma^2 + \eta^2/9}. \quad (437)$$

Analogamente, podemos encontrar o Potencial Quântico para o caso em que escolhemos os valores $\omega = -1/3$ e $n = 2/3$, sendo a função de onda com a parte real e a imaginária separada, dada pela equação 503. Desta a parte real já ajustada para nosso cálculo é

$$R = \frac{Ba}{2^{3/2}} \frac{1}{(144\gamma^2 + \eta^2)^{5/8}} \exp \left[\frac{-9a^4\gamma}{144\gamma^2 + \eta^2} \right], \quad (438)$$

sendo a constante B , igual a 404. Obtendo a derivada necessária, e realizando as simplificações, chegamos ao seguinte potencial Quântico

$$Q = \frac{180a^2\gamma}{144\gamma^2 + \eta^2} - \frac{1296a^6\gamma^2}{(144\gamma^2 + \eta^2)^2}, \quad (439)$$

em que a traz a ideia de valor esperado, cujo valor na formulação de Bohm é dado por 426, temos

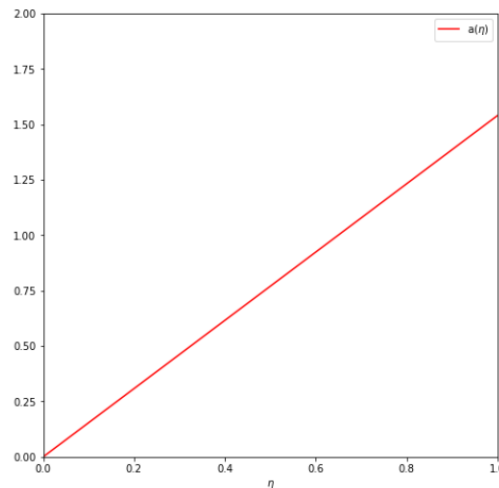
$$Q = \frac{180C^2\gamma - 1286C^6\gamma^2}{(144\gamma^2 + \eta^2)^{1/2}}. \quad (440)$$

Através destas duas relações, 437 e 440, percebemos que em $\eta = 0$ o potencial possui uma intensidade máxima, impedindo que o universo atinja $a = 0$, e a medida que o tempo evolui a decai, e o caso clássico assume o papel da evolução do mesmo.

6 COMPARAÇÃO ENTRE A FORMULAÇÃO CLÁSSICA E A FORMULAÇÃO QUÂNTICA

Começamos nossa análise discutindo a evolução do fator de escala para os casos clássicos. Como discutido no capítulo anterior (5.3.1), inicialmente temos a evolução para o caso onde $\omega = 1/3$. Através da equação 371, obtemos a figura 4, que descreve a evolução para o fator de escala (a) em função do tempo conforme (η). Nesta figura percebemos claramente o momento em a singularidade ocorre, em $\eta = 0$ e $a = 0$.

Figura 4 – Evolução do fator de escala para a solução clássica com a escolha de $\omega = 1/3$.



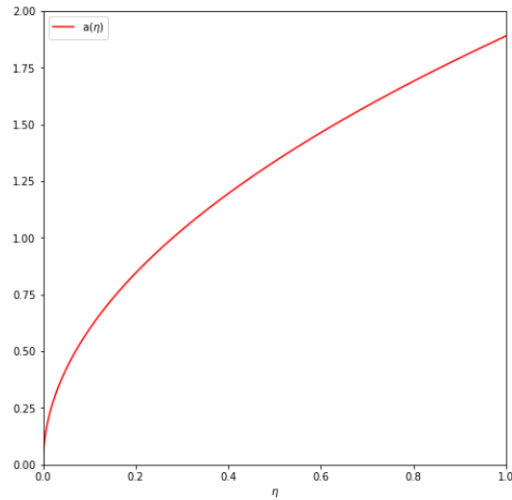
Fonte: Autoria própria.

Seguindo nossa análise, a evolução para o fator de escala em função do tempo conforme, com a escolha de $\omega = -1/3$, regida pela equação 373, nos fornece a figura 5. Nesta também é clara a presença da singularidade em $\eta = 0$ e $a = 0$.

As singularidades nos casos clássicos não dependem das propriedades das fontes escolhidas para a expansão, mas são inerentes às propriedades dos modelos clássicos. Este é o conhecido da singularidade inicial. Nos casos que envolvem os efeitos quânticos, percebemos que esta singularidade é evitada devido ao Efeito Bouncing, explicada por Pinto-Neto (2021). Nestes modelos o universo precede uma fase de contração, atingindo um valor mínimo de raio, o que ocorre em $\eta = 0$, e então volta a se expandir. Neste momento em que o universo apresenta um raio mínimo, ocorre devido ao potencial quântico, o qual gera uma força repulsiva neste ponto, impedindo a passagem pela origem.

Vejam os primeiros casos da solução quântica, cujo $\omega = 1/3$, regido pela equação 394,

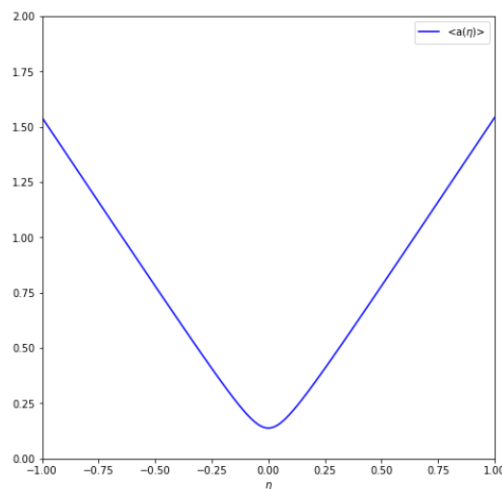
Figura 5 – Evolução do fator de escala para a solução clássica com a escolha de $\omega = -1/3$.



Fonte: Autoria própria.

nos fornece a figura 6.

Figura 6 – Evolução do fator de escala para a solução quântica com a escolha de $\omega = 1/3$.

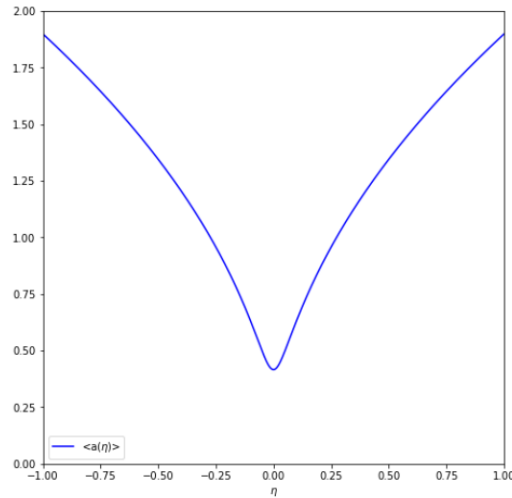


Fonte: Autoria própria.

O segundo caso, cujo $\omega = -1/3$, regido pela equação 406, está representado na figura 7.

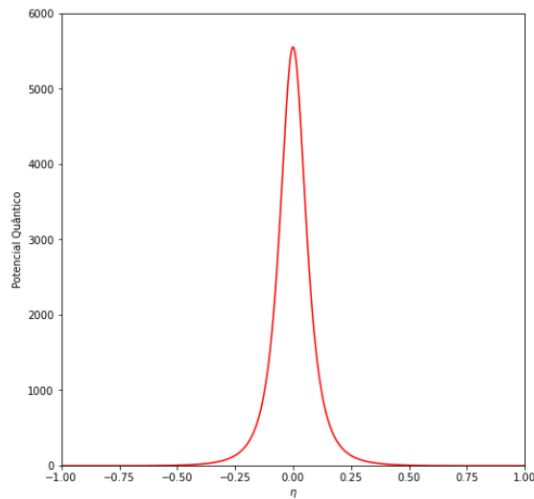
Nos próximos gráficos vemos a evolução do potencial quântico, que é descrito como uma função do tempo conforme η . Para o caso em que $\omega = 1/3$, regido pela equação 437, nos fornece a figura 8, e para o caso em que $\omega = -1/3$, regido pela equação 440, nos fornece a figura 9. Note que em ambos os casos o potencial quântico tem seu valor máximo em $\eta = 0$ gerando uma força de repulsão que impede a passagem pela origem, como já mencionado acima.

Figura 7 – Evolução do fator de escala para a solução quântica com a escolha de $\omega = -1/3$.



Fonte: Autoria própria.

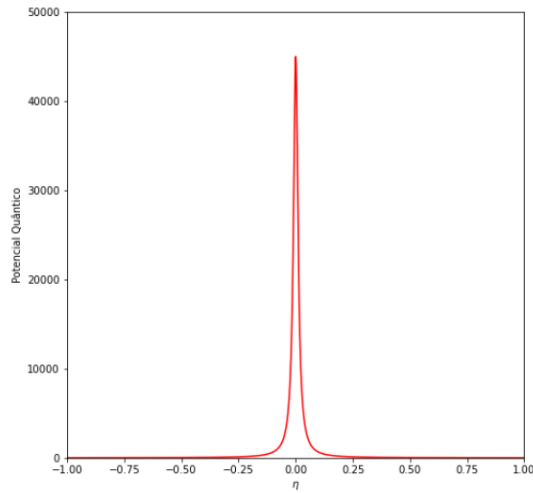
Figura 8 – Evolução do potencial quântico com a escolha de $\omega = 1/3$.



Fonte: Autoria própria.

Nas figuras 6 e 7, apresentamos a evolução para o valor esperado do fator de escala $\langle a \rangle$, para os casos $\omega = 1/3$ e para $\omega = -1/3$ respectivamente. Destaca-se nestas curvas o fato de o universo apresentar uma fase anterior a expansão, ou seja, uma fase de contração a partir da qual ele contrai até um valor mínimo de $\langle a \rangle$, não atingindo o valor $\langle a \rangle = 0$, evitando assim a singularidade. Notamos que para o caso $\omega = 1/3$ o valor mínimo para o valor esperado do fator de escala é menor que o caso em que $\omega = -1/3$. Esse fato pode ser compreendido quando utilizamos a formulação de Bohm para a mecânica quântica. Nesta formulação obtemos o comportamento do potencial quântico, para o caso $\omega = 1/3$ e para $\omega = -1/3$, representados nas figuras 8 e 9 respectivamente. Percebe-se que o caso $\omega = 1/3$ o potencial quântico possui uma

Figura 9 – Evolução do potencial quântico com a escolha de $\omega = -1/3$.

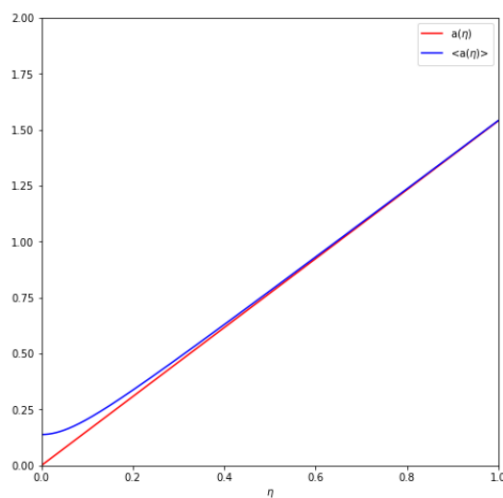


Fonte: Autoria própria.

menor amplitude em relação ao caso $\omega = -1/3$, acarretando assim um menor efeito repulsivo nas proximidades da origem implicando em um raio mínimo menor para $\langle a \rangle$, em relação ao caso $\omega = -1/3$.

Nas figuras 10 e 11, comparamos o fator de escala a clássico com o caso quântico $\langle a \rangle$, para os casos $\omega = 1/3$ e $\omega = -1/3$, respectivamente. Percebemos, a partir destas figuras, que após o decaimento do potencial quântico, os efeitos quânticos são diluídos, e as soluções clássicas e quânticas coincidem.

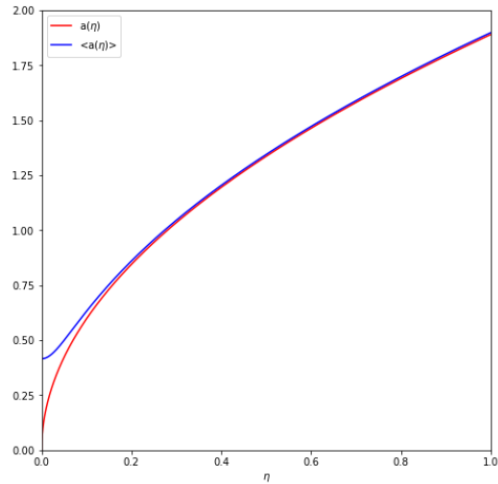
Figura 10 – Evolução do fator de escala para a soluções clássica e quântica com a escolha de $\omega = 1/3$.



Fonte: Autoria própria.

Atente-se ao fato de que as formulações, clássicas e quânticas, coincidem em um η que o valor do respectivo potencial quântico volta a ser nulo. Para o caso em que $\omega = 1/3$, as

Figura 11 – Evolução do fator de escala para a soluções clássica e quântica com a escolha de $\omega = -1/3$.



Fonte: Autoria própria.

formulações coincidem em um $\eta > 0,6$, onde seu respectivo potencial quântico apresenta valor nulo. E por fim, para o caso em que $\omega = -1/3$, as formulações coincidem em um $\eta > 0,4$, onde seu respectivo potencial quântico, também apresenta valor nulo.

7 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste trabalho desenvolvemos um modelo para a fase pré inflacionária do universo, onde o campo fermiônico com potencial de auto interação e o fluido relativístico no formalismo de Schutz fazia o papel da força do campo gravitacional. Para a análise clássica o formalismo hamiltoniano é aplicado a ação, e como apresentado os graus de liberdade do fluido são corporificados ao tempo conforme. Além disso, a expressão clássica para o fator de escala em função do tempo conforme, foi determinada e analisada graficamente. Para a aproximação quântica, utilizamos a equação de Wheeler-DeWitt, assim como o potencial quântico. A ideia de valor esperado para o fator de escala foi obtida, e condiz com as soluções encontradas para o potencial quântico. Enquanto a solução clássica para o fator de escala apresenta uma singularidade conhecida a medida que η se aproxima do valor nulo, na solução quântica vimos que o valor esperado para o fator de escala é precedido de uma fase de contração, chegando a um valor mínimo, ocasionado pelo efeito Bouncing, onde o universo começa a se expandir. Nesta mesma fase, a formulação do potencial quântico, apresenta um valor máximo, gerando uma força de repulsão que impede a passagem pela origem. Ao compararmos ambas as soluções, clássica e quântica, na medida que o universo evolui, os efeitos quânticos são diluídos e ambas as soluções coincidem.

REFERÊNCIAS

YANO, Kentaro.

AGUIAR, Aruã Menezes de. Formalismos de dirac, simplético e bfft aplicados ao modelo de skyrme. 2014.

ALBRECHT, Andreas; STEINHARDT, Paul J; TURNER, Michael S; WILCZEK, Frank. Reheating an inflationary universe. **Physical Review Letters**, APS, v. 48, n. 20, p. 1437–1982.

ALVARENGA, Flávio G; FABRIS, Júlio César; LEMOS, NA; MONERAT, GA. Quantum cosmological perfect fluid models. **General Relativity and Gravitation**, Springer, v. 34, n. 5, p. 651–663, 2002.

ARMENDARIZ-PICON, Christian; GREENE, Patrick B. Spinors, inflation, and non-singular cyclic cosmologies. **General Relativity and Gravitation**, Springer, v. 35, n. 9, p. 1637–1658, 2003.

BLAU, Matthias. **Lecture notes on general relativity**. [S.l.]: Albert Einstein Center for Fundamental Physics Bern, 2011.

CHAISSON, Eric; MCMILLAN, Steve. **Astronomy today**. [S.l.]: Pearson Education, 2014.

CHIMENTO, LP; DEVECCHI, FP; FORTE, M; KREMER, GM; RIBAS, MO; SAMOJEDEN, LL. Fermionic cosmologies. *In*: IOP PUBLISHING. **Journal of Physics: Conference Series**. [S.l.], 2011. v. 306, n. 1, p. 012052.

CHIMENTO, Luis P; DEVECCHI, Fernando P; FORTE, Mónica; KREMER, Gilberto M. Phantom cosmologies and fermions. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 25, n. 8, p. 085007, 2008.

CLEBSCH, Alfred. Selected contributions to ground-water hydrology by cv theis, and a review of his life and work. Citeseer, 1994.

CUSTÓDIO, Paulo Sérgio. **Introdução à Relatividade Gera**. [S.l.]: São Paulo, 2019.

DEWITT, Bryce S. Quantum theory of gravity. i. the canonical theory. **Physical Review**, APS, v. 160, n. 5, p. 1113, 1967.

DIRAC, Paul Adrien Maurice. **Lectures on quantum mechanics**. [S.l.]: Courier Corporation, 2001. v. 2.

EINSTEIN, Albert. On the special and general theory of relativity. **The collected papers of**, 1997.

FERMI, Enrico. **Thermodynamics By Enrico Fermi**. [S.l.]: Dover publications, 1936.

GUTH, Alan H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. **Physical Review D**, APS, v. 23, n. 2, p. 347, 1981.

GUTH, Alan H; STEINHARDT, Paul J. The inflationary universe. **Scientific American**, JSTOR, v. 250, n. 5, p. 116–129, 1984.

HAWKING, Stephen. **Uma breve história do tempo**. [S.l.]: Editora Intrínseca, 2015.

HAWKING, Stephen. **O universo numa casca de noz**. [S.l.]: Editora Intrínseca, 2016.

JR, Bernard F Schutz. Perfect fluids in general relativity: velocity potentials and a variational principle. **Physical Review D**, APS, v. 2, n. 12, p. 2762, 1970.

JR, Bernard F Schutz. Hamiltonian theory of a relativistic perfect fluid. **Physical Review D**, APS, v. 4, n. 12, p. 3559, 1971.

JR, Roberto Colistete; FABRIS, Julio C; PINTO-NETO, Nelson. Singularities and the classical limit in quantum cosmology with scalar fields. **Physical Review D**, APS, v. 57, n. 8, p. 4707, 1998.

JUNIOR, Mariniel Souza Galvão. Gravitação canônica no formalismo simplético. 2016.

KAKU, Michio. **Quantum field theory: a modern introduction**. [S.l.]: Oxford University Press on Demand, 1993.

LEMOS, Nivaldo A. **Mecânica analítica**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007.

LINDE, Andrei. **Particle physics and inflationary cosmology**. [S.l.]: CRC press, 1990. v. 5.

MANOEL, João Paulo Pitelli *et al.* **Singularidades quânticas**. 2011. Phd Thesis (PhD Thesis) — Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Instituto de Matemática . . . , 2011.

MATSAS, George. Relatividade geral. **Revista USP**, n. 66, p. 22–29, 2005.

MUNIZ, Celio Rodrigues; CUNHA, Marcony Silva; BEZERRA, Valdir Barbosa; VIEIRA, Horácio Santana. A cosmologia quântica de wheeler-dewitt e o universo despedaçado. **Conexões-Ciência e Tecnologia**, v. 13, n. 2, p. 70–76, 2019.

NETO, Gastao Bierrenbach Lima. Notas de aula. Citeser.

PEDUZZI, Luiz OQ. A relatividade einsteiniana: uma abordagem conceitual e epistemológica. **Publicação Interna. Florianópolis: Departamento de Física, Universidade Federal de Santa Catarina**, 2015.

PETTINI, M. Introduction to cosmology — lecture 3. 2018.

PINTO-NETO, Nelson. Bouncing quantum cosmology. **Universe**, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 7, n. 4, p. 110, 2021.

RIBAS, MO; DEVECCHI, FP; KREMER, GM. Fermions as sources of accelerated regimes in cosmology. **Physical Review D**, APS, v. 72, n. 12, p. 123502, 2005.

RIBAS, MO; DEVECCHI, FP; KREMER, GM. Cosmological model with non-minimally coupled fermionic field. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 81, n. 1, p. 19001, 2007.

RIBAS, Marlos de Oliveira. Modelos cosmológicos acelerados com campos fermionicos. 2008.

RIBAS, Marlos O; DEVECCHI, Fernando P; KREMER, Gilberto M. Cosmology with fermionic sources and relativistic fluid in schutz's formalism: Classical and quantum solutions. **Modern Physics Letters A**, World Scientific, v. 32, n. 40, p. 1750220, 2017.

RIBAS, Marlos O; DEVECCHI, Fernando P; KREMER, Gilberto M. Fermionic cosmological model with gauge and schutz couplings: Classical and quantum analysis. **International Journal of Modern Physics A**, World Scientific, v. 35, n. 23, p. 2050133, 2020.

SCHNEIDER, Peter. **Extragalactic astronomy and cosmology: an introduction**. [S.l.]: Springer, 2006. v. 146.

SIENIUTYCZ, Stanislaw; BERRY, R Stephen. Canonical formalism, fundamental equation, and generalized thermomechanics for irreversible fluids with heat transfer. **Physical Review E**, APS, v. 47, n. 3, p. 1765, 1993.

TRODDEN, Mark; CARROLL, Sean M. Introduction to cosmology. *In: Particle Physics And Cosmology: The Quest for Physics Beyond the Standard Model (s)(TASI 2002)*. [S.l.]: World Scientific, 2004. p. 703–793.

VAKILI, Babak. Noether symmetric $f(r)$ quantum cosmology and its classical correlations. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 669, n. 3-4, p. 206–211, 2008.

WEINBERG, Steven. Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity. 1972.

XIAOCHUN, Mei. The rw metric has no constant curvature when scalar factor $r(t)$ changes with time. **arXiv preprint arXiv:1006.4433**, 2010.

YANO, Kentaro. **The theory of Lie derivatives and its applications**. [S.l.]: Courier Dover Publications, 2020.

YEPEZ, Jeffrey. Einstein's vierbein field theory of curved space. **arXiv preprint arXiv:1106.2037**, 2011.

APÊNDICES

APÊNDICE A – O FLUIDO DE SCHUTZ

As equações de evolução para a representação de 281 são:

$$\nabla_\nu(\rho_0 U^\nu) = 0; \quad (441)$$

$$U^\nu \partial_\nu S = \frac{dS}{d\tau} = 0; \quad (442)$$

$$U^\nu \partial_\nu \alpha = \frac{d\alpha}{d\tau} = 0; \quad (443)$$

$$U^\nu \partial_\nu \beta = \frac{d\beta}{d\tau} = 0; \quad (444)$$

$$U^\nu \partial_\nu \phi = \frac{d\phi}{d\tau} = -\mu; \quad (445)$$

$$U^\nu \partial_\nu \theta = \frac{d\theta}{d\tau} = T. \quad (446)$$

Das equações 281, 442, 444 e 445, segue o resultado

$$U^\nu U_\nu = -1. \quad (447)$$

Não há uma equação para μ . A evolução pode ser calculada das equações 441, 442 e da equação de estado.

A prova da equivalência entre as equações da versão padrão e as equações da versão que introduz a velocidade-potencial será apresentada utilizando o teorema a seguir. Este é estabelecido para mostrar como as equações de cada versão implicam as das outras. O teorema deve ser considerado como uma identidade algébrica, logo as equações são assumidas diferentes daquelas explicitamente mostradas no teorema.

Seja U a quadri-velocidade como uma componente de um fluido. Definindo o tensor T_ν^σ com as componentes

$$T_\nu^\sigma \equiv \rho_0 \mu U_\nu U^\sigma + p \delta_\nu^\sigma. \quad (448)$$

Definindo as funções escalares ϕ e θ pelas equações diferenciais

$$\frac{d\phi}{d\tau} = -\mu \quad (449)$$

e

$$\frac{d\theta}{d\tau} = T. \quad (450)$$

Definindo a entropia pela equação

$$T dS = d\mu - \frac{1}{\rho_0} dp. \quad (451)$$

Exigindo uma conservação de entropia e bárions durante o movimento do fluido, temos

$$\frac{dS}{d\tau} = 0 \quad (452)$$

e

$$\nabla_\nu(\rho_0 U^\nu) = 0. \quad (453)$$

Não é imposto qualquer outra equação de movimento, portanto a relação apresentada a seguir é uma identidade.

$$L_U(\mu U_\nu - \partial_\nu \phi - \theta \partial_\nu S) = \frac{1}{\rho_0} \nabla_\sigma T_\nu^\sigma, \quad (454)$$

onde L_U denota a derivada de Lie em relação a U .

Schutz aponta que este teorema é verdadeira mesmo se $\nabla_\sigma T_\nu^\sigma \neq 0$. Quando T_ν^σ é definido pela equação 448, este não é o tensor stress-energia completo para o fluido.

A prova deste teorema vem de uma simples derivada de Lie, cujas propriedades podem ser encontradas em muitas referências, como por exemplo em Yano (2020). Note que as definições 451 e 452 levam a

$$L_U(\mu U_\nu - \partial_\nu \phi - \theta \partial_\nu S) = U^\sigma \nabla_\sigma(\mu U_\nu) + \frac{1}{\rho_0} \partial_\nu p; \quad (455)$$

Analogamente, aplicando a equação 453 na divergência de 448, chegamos em

$$\frac{1}{\rho_0} \nabla_\sigma T_\nu^\sigma = U^\sigma \nabla_\sigma(\mu U_\nu) + \frac{1}{\rho_0} \partial_\nu p. \quad (456)$$

A prova da equivalência entre as duas versões será apresentada de duas maneiras, a primeira delas mostra como a versão das equações contendo a velocidade-potencial implica na versão padrão. Para isso, voltamos a representação de U com a velocidade-potencial, 281 que nos leva à

$$\mu U_\nu - \partial_\nu \phi - \theta \partial_\nu S = \alpha \partial_\nu \beta; \quad (457)$$

Consequentemente, temos

$$L_U(\mu U_\nu - \partial_\nu \phi - \theta \partial_\nu S) = L_U(\alpha \partial_\nu \beta) = 0, \quad (458)$$

onde a última igualdade segue de

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{d\beta}{d\tau} = 0; \quad (459)$$

Assim o teorema nos dá

$$\nabla_\sigma T_\nu^\sigma = 0, \quad (460)$$

a qual é a versão padrão das equações de movimento.

A segunda maneira de apresentar a prova entre as versões, mostra como as equações da versão padrão implica nas equações que contém a velocidade-potencial. Já pontuamos 3 equações

$$\frac{d\phi}{d\tau} = -\mu; \frac{d\theta}{d\tau} = T; \frac{dS}{d\tau} = 0. \quad (461)$$

Assim, é necessário apenas mostrar a representação da versão contendo a velocidade-potencial para U é

$$U_\nu = \frac{1}{\mu}(\partial_\nu\phi + \alpha\partial_\nu\beta + \theta\partial_\nu S). \quad (462)$$

Relembrando das duas equações de evolução

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = 0 \quad (463)$$

e

$$\frac{d\beta}{d\tau} = 0. \quad (464)$$

Do teorema mencionado e da equação de movimento da versão padrão, temos

$$\nabla_\sigma T_\nu^\sigma = 0, \quad (465)$$

que juntamente com o teorema, implicam em

$$L_U(\mu U_\nu - \partial_\nu\phi - \theta\partial_\nu S) = 0; \quad (466)$$

Isto nos leva a um segundo teorema: seja uma função de α , β e γ

$$\mu U_\nu - \partial_\nu\phi - \theta\partial_\nu S = \alpha\partial_\nu\beta + \partial_\nu\gamma \quad (467)$$

e

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{d\beta}{d\tau} = \frac{d\gamma}{d\tau} = 0. \quad (468)$$

Para provar esta, nós definimos

$$W_\nu = \mu U_\nu - \partial_\nu\phi - \theta\partial_\nu S, \quad (469)$$

sendo W_ν , ortogonal e Lie-dragged à U^ν (que é a derivada de Lie em U^ν igual a zero), expresso em coordenadas comóveis (τ, y^i de tal modo que $U^\nu = \delta_0^\nu$), isso significa que $W_0 = 0, \partial_0 W_i = 0$.

Do teorema de Pfaff, para $N=3$, temos

$$W_i dy^i = \alpha d\beta + d\gamma, \quad (470)$$

com α , β e γ funções apenas de y^i . Consequentemente as equações 467 e 468 são válidas em qualquer sistema de coordenadas. Note que ϕ é definido apenas pela diferencial $d\phi/d\tau = -\mu$, então qualquer função que não depende de τ pode ser combinada com ϕ sem mudar qualquer resultado, como a função γ , o qual pode ser “absorvido” por ϕ através do segundo teorema, assim a representação da velocidade potencial é

$$(\mu U_\nu \delta x^\nu)_r - (\mu U_\nu \delta x^\nu)_0 = (\delta\phi)_0 + (\theta\delta S)_r - (\theta\delta S)_0. \quad (471)$$

Deste modo finalizamos a demonstração de como as versões padrão e velocidade-potencial são equivalentes.

APÊNDICE B – TEOREMA DE PFAFF

Ocasionalmente tivemos que utilizar o teorema de Pfaff neste trabalho. Uma aplicação deste teorema, familiar aos conceitos da física, é o critério de integrabilidade na forma “Pfaffiana”

$$\sum_{i=1}^N f_i(x^k) dx^i \quad (472)$$

; Este critério é relacionado a segunda lei da termodinâmica e conduz a definição de entropia e temperatura, para as muitas componentes de um sistema, no entanto, o teorema de Pfaff é muito mais geral que a segunda lei da termodinâmica. O teorema diz que se $f_i(x^k)$ são N funções de N variáveis independentes x^k , então existem funções $A_\alpha(x^k)$, $B_\alpha(x^k)$ e $C(x^k)$, de tal modo que

$$\sum_{i=1}^N f_i dx^i = \sum_{\alpha=1}^{N/2} A_\alpha dB_\alpha, \quad \text{Se } N \text{ for par} \quad (473)$$

e

$$\sum_{i=1}^N f_i dx^i = dC + \sum_{\alpha=1}^{(N-1)/2} A_\alpha dB_\alpha, \quad \text{Se } N \text{ for impar} \quad (474)$$

, conseqüentemente temos respectivamente

$$f_i = \sum_{\alpha=1}^{N/2} A_\alpha \frac{\partial B_\alpha}{\partial x^i} \quad \text{ou} \quad f_i = \frac{\partial C}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{(N-1)/2} A_\alpha \frac{\partial B_\alpha}{\partial x^i} \quad (475)$$

O número de funções permanece inalterado, mas o número de diferenciais é cortado essencialmente pela metade. O teorema de Pfaff define um limite superior mínimo no número de diferenciais requeridas, pode-se precisar de um número inferior, mas nunca um número superior. Este limite superior mínimo, depende apenas do número de variáveis independentes, por exemplo, se $\alpha_i(x^k)$ e $\beta_i(x^k)$ são $2N$ funções, com $i = 1, \dots, N$ de $n < N$ variáveis independentes, então

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i d\beta_i = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \alpha_i \frac{\partial \beta_i}{\partial x^k} dx^k \quad (476)$$

A expressão

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \frac{\partial \beta_i}{\partial x^k} \quad (477)$$

, são n funções de n variáveis. Se, por exemplo, n for par, então obtemos

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i d\beta_i = \sum_{\sigma=1}^{n/2} A_\sigma d\beta_\sigma \quad (478)$$

Para $N = 2$, a equação A2 apresenta um aspecto familiar, onde toda forma diferencial com duas variáveis possui um fator de integração.

APÊNDICE C – DEDUÇÃO DE 482 E 483

Substituindo 367 em 366, temos

$$c\alpha(\alpha - 1)\eta^{\alpha-2} - \frac{1}{2}c\alpha^2\eta^{\alpha-2}(6\omega - 1) - \frac{K}{c^{-3\omega+2}\eta^{-3\omega\alpha+2\alpha}} + \frac{D}{c^{3n-6\omega-1}\eta^{3n\alpha-6\omega\alpha-\alpha}} = 0. \quad (479)$$

Para que esta relação seja resolvida, impomos que os expoentes de η tenham a seguinte relação de igualdade

$$3\omega\alpha - 2\alpha = \alpha - 2 \quad (480)$$

e

$$-3n\alpha + 6\omega\alpha + \alpha = \alpha - 2. \quad (481)$$

Assim teremos o fator comum $\eta^{\alpha-2}$. Das relações 480 e 481, chegamos as relações

$$\omega = 1 - \frac{2}{3\alpha} \quad (482)$$

e

$$n = 2 - \frac{2}{3\alpha}. \quad (483)$$

APÊNDICE D – DEDUÇÃO DA CONSTANTE 486

Voltando a relação 479, já com o fator comum $\eta^{\alpha-2}$ substituído. Quando este é colocado em evidência, temos

$$\eta^{\alpha-2} \left[c\alpha(\alpha - 1) - \frac{1}{2}c\alpha^2(6\omega - 1) - \frac{K}{c^{-3\omega+2}} + \frac{D}{c^{3n-6\omega-1}} \right] = 0; \quad (484)$$

Substituindo as relações 482 e 483, temos

$$-\frac{3}{2}c\alpha^2 + c\alpha + c^{-\frac{2}{\alpha}+1}(D - K) = 0. \quad (485)$$

Desta poderemos encontrar o valor da constante c da lei de potência, basta substituir os valores de ω , α e n , assim para $\omega = 1/3$ chegamos a relação

$$c = \left(\frac{1}{3(D - K)} \right)^{1/2}. \quad (486)$$

APÊNDICE E – DEDUÇÃO DA CONSTANTE 492

Fazendo a normalização

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \int_0^\infty \Psi \Psi^* a^{1-3\omega} = 1, \quad (487)$$

sendo o termo $a^{1-3\omega}$ incluído para garantir que o operador hamiltoniano seja hermitiano. Assim temos

$$\int_0^\infty B_1^2 \frac{1}{4} \frac{4a^2 \pi}{(\gamma^2 + \eta^2/9)^{3/2}} e^{\frac{-a^2}{\gamma + i\eta/3}} e^{\frac{-a^2}{\gamma - i\eta/3}} da = 1. \quad (488)$$

Precisamos alterar as exponenciais de forma que seja possível somá-las, assim fazemos as seguintes multiplicações

$$\exp \left[\frac{-a^2}{(\gamma + \frac{i\eta}{3})} \frac{(\gamma - \frac{i\eta}{3})}{(\gamma - \frac{i\eta}{3})} \right] = \exp \left[\frac{-a^2 \gamma + ia^2 \eta/3}{\gamma^2 + \eta^2/9} \right] \quad (489)$$

e

$$\exp \left[\frac{-a^2}{(\gamma - \frac{i\eta}{3})} \frac{(\gamma + \frac{i\eta}{3})}{(\gamma + \frac{i\eta}{3})} \right] = \exp \left[\frac{-a^2 \gamma - ia^2 \eta/3}{\gamma^2 + \eta^2/9} \right]. \quad (490)$$

Encontramos o seguinte resultado

$$\frac{B_1^2 \pi}{(\gamma^2 + \eta^2/9)^{3/2}} \frac{\sqrt{18} \sqrt{\pi}}{1296 \gamma^{3/2}} 9^{3/2} (\gamma^2 + \eta^2/9)^{3/2} = 1; \quad (491)$$

Isolando a constante B_1 , obtemos o seguinte resultado

$$B_1 = \frac{4}{2^{1/4}} \left(\frac{\gamma}{\pi} \right)^{3/2}. \quad (492)$$

APÊNDICE F – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO 500

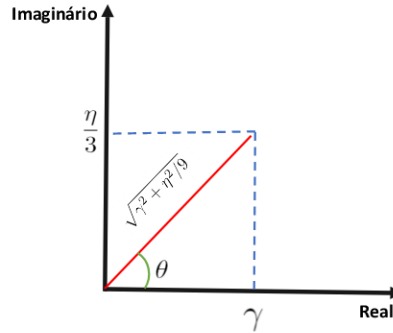
Partindo de:

$$\Psi = \frac{e^{2i\eta D} B \sqrt{4\pi a^2}}{2(\gamma + i\eta/3)^{3/2}} \exp \left[\frac{-a^2\gamma + a^2i\eta/3}{\gamma^2 + \eta^2/9} \right]. \quad (493)$$

Separando as exponenciais com apenas termos imaginários, e com apenas termos reais, temos

$$\Psi = \frac{B \sqrt{4\pi a^2}}{2(\gamma + i\eta/3)^{3/2}} \exp \left[\frac{-a^2\gamma}{\gamma^2 + \eta^2/9} \right] \exp \left[2i\eta D + \frac{a^2i\eta/3}{\gamma^2 + \eta^2/9} \right]. \quad (494)$$

Iremos escrever o termo $\gamma + i\eta/3$ na forma polar. De acordo com a figura



Fonte: Autoria própria.

Chegamos as seguintes relações

$$\text{sen}\theta = \frac{\eta/3}{\sqrt{\gamma^2 + \eta^2/9}} \quad (495)$$

e

$$\text{cos}\theta = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \eta^2/9}}. \quad (496)$$

Assim temos

$$\gamma + \frac{i\eta}{3} = \sqrt{\gamma^2 + \eta^2/9} e^{i\theta}, \quad \text{sendo } \theta = \arctg \frac{\eta/3}{\gamma}; \quad (497)$$

Substituindo este resultado em 494, e agrupando os termos semelhantes, temos

$$\Psi = \frac{B \sqrt{4\pi a^2}}{2(\gamma^2 + \eta^2/9)^{3/4}} \exp \left[\frac{-a^2\gamma}{\gamma^2 + \eta^2/9} \right] \exp \left[i \left(2\eta D + \frac{a^2i\eta/3}{\gamma^2 + \eta^2/9} - \frac{3}{2}\theta \right) \right], \quad (498)$$

onde a função S é

$$S = 2\eta D + \frac{a^2\eta/3}{\gamma^2 + \eta^2/9} - \frac{3}{2}\theta; \quad (499)$$

Assim a equação de movimento é dada por

$$\Pi_a = \frac{\partial S}{\partial a} = \frac{2a\eta/3}{\gamma^2 + \eta^2/9}, \quad (500)$$

APÊNDICE G – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO 505

De forma análoga encontramos um resultado semelhante quando assumimos $\omega = -1/3$ e $n = 2/3$. Relembrando do pacote de ondas 402, o qual devemos separar as exponenciais em imaginária e real, da seguinte forma

$$\Psi = \frac{B\sqrt{a}(a/2)^{1/4}}{[2(\gamma + i\eta/12)]^{5/4}} \exp\left[\frac{-36a^4\gamma}{4(144\gamma^2 + \eta^2)}\right] \exp\left[2i\eta D + \frac{3ia^2\eta}{4(144\gamma^2 + \eta^2)}\right]. \quad (501)$$

Analogamente ao caso anterior, iremos escrever o termo $\gamma + i\eta/12$ na forma polar

$$\gamma + \frac{i\eta}{12} = \sqrt{\gamma^2 + \frac{\eta^2}{144}} e^{i\theta}. \quad (502)$$

Assim a função de onda se torna

$$\Psi = \frac{B\sqrt{a}}{2^{5/4}} \left(\frac{a^2}{2}\right)^{1/4} \frac{1}{(\gamma^2 + \eta^2/144)^{5/8}} \exp\left[\frac{-9a^4\gamma}{144\gamma^2 + \eta^2}\right] \exp\left[i\left(2\eta D + \frac{3a^2\eta}{4(144\gamma^2 + \eta^2)} - \frac{5}{4}\theta\right)\right], \quad (503)$$

sendo a função S

$$S = 2\eta D + \frac{3a^2\eta}{4(144\gamma^2 + \eta^2)} - \frac{5}{4}\theta. \quad (504)$$

Logo a equação de movimento é dada por

$$\Pi_a = \frac{\partial S}{\partial a} = \frac{12a^3\eta}{4(144\gamma^2 + \eta^2)}; \quad (505)$$