UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

JULIANO PORTOLAN

A IMPORTÂNCIA DO ENSINO DE NÚMEROS COMPLEXOS NO ENSINO MÉDIO, NA VISÃO DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA, EM ALGUNS MUNICÍPIOS DA REGIÃO OESTE DO PARANÁ

DISSERTAÇÃO

PATO BRANCO
2017

JULIANO PORTOLAN

A IMPORTÂNCIA DO ENSINO DE NÚMEROS COMPLEXOS NO ENSINO MÉDIO, NA VISÃO DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA, EM ALGUNS MUNICÍPIOS DA REGIÃO OESTE DO PARANÁ

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, polo Pato Branco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alexandre Ribeiro Martins.

PATO BRANCO

2017

P853i Portolan, Juliano.

A importância do ensino de números complexos no ensino médio, na visão dos professores de matemática, em alguns municípios da região oeste do Paraná / Juliano Portolan. -- 2017.

96 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alexandre Ribeiro Martins

Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Pato Branco, PR, 2017.

Bibliografia: f. 86 - 90.

1. Números complexos. 2. Matemática - Estudo e ensino. 3. Professores de ensino médio. 4. Matemática - Ensino médio. I. Martins, Carlos Alexandre Ribeiro, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD (22. ed.) 510

Ficha Catalográfica elaborada por
Suélem Belmudes Cardoso CRB9/1630
Biblioteca da UTFPR Campus Pato Branco

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Câmpus Pato Branco

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Título da Dissertação No. 022

"A importância do Ensino de Números Complexos no Ensino Médio, na visão dos professores de Matemática, em alguns municípios da região Oeste do Paraná."

por

Juliano Portolan

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Pato Branco, às 09h do dia 20 de outubro de 2017. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. Carlos Alexandre Ribeiro Martins, Dr.
(Presidente - UTFPR/Pato Branco)

Prof. André Pereira Pedroso, Dr.
(UNIOESTE/Francisco Beltrão)

Profª. Marlova Estela Caldatto, Dra.
(UTFPR/Branco)

Prof. Rômel da Rosa da Silva, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR"

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha esposa Fabiana Kaninoski Portolan à minha filha Luiza Kaninoski Portolan e aos meus pais, Luiz Carlos Portolan e Inermes Maria Sotoriva Portolan. Ao meu irmão Wiliam Portolan. À todos que me ajudaram sem medir esforços, para chegar à conclusão deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer primeiramente a Deus pela vida, proteção e bênçãos alcançadas nessa árdua caminhada.

À minha esposa e à minha filha, por compreenderem a importância da dedicação à pesquisa, mesmo em minha ausência, me apoiando e ajudando a concretizar esse sonho.

Aos meus pais pelas orações e pelas palavras de conforto, que me ajudaram nesta caminhada.

À família de minha esposa pelo apoio na hora da minha ausência, pela dedicação e pelos cuidados de minha filha.

Ao professor Dr. Carlos Alexandre Ribeiro Martins pelos conselhos e direcionamentos que apontaram sempre ao melhor caminho.

À CAPES, pela concessão da bolsa durante o período de estudos, o que contribuiu significativamente para a conclusão desta pesquisa.

Aos professores de todas as disciplinas do Programa, que contribuíram para efetivação deste trabalho.

Aos colegas, com quem muito aprendi, por meio de exemplos, de suas práticas, compartilhei angústias e dificuldades e busquei alternativas.

Aos colegas professores que participaram da pesquisa e aos diretores dos colégios onde apliquei a pesquisa.

Aos meus amigos e familiares em geral, pelas palavras de incentivo, fazendo-me renovar as forças a cada dia.

[...] por vossa sabedoria, formastes o homem para ser o senhor de todas as vossas criaturas, governar o mundo na santidade e na justiça, e proferir seu julgamento na retidão de sua alma [...].

(Sb 9: 2 -3)

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo identificar a visão dos professores de matemática do Ensino Médio em relação à importância do ensino do conteúdo de Números Complexos no Ensino Médio. Na abordagem metodológica foi optado pela pesquisa qualitativa por meio de análise de questionários aplicados aos professores de matemática que atuam na Rede Estadual de Ensino em alguns Municípios da região Oeste do Paraná. Por meio dessa pesquisa, observamos que a maioria dos pesquisados acham relevante lecionar o conjunto dos Números Complexos para os alunos do Ensino Médio, pois caso não seja trabalhado, acarretará algum tipo de prejuízo ao educando. Foi possível observar que o conjunto dos Números Complexos não aparece na matriz de conteúdos do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), mas faz parte do currículo de ensino e está presente na maioria dos vestibulares pesquisados. Eventualmente a despreocupação desse repasse de conteúdo é contestada pelos professores, devido sua pouca aplicabilidade no cotidiano do aluno.

Palavras-Chaves: Números Complexos, Professores, Ensino Médio.

ABSTRACT

This work aims to identify the view of high school mathematics teachers in relation to the importance of teaching the content of Complex Numbers in High School. In the methodological approach, qualitative research was chosen through the analysis of questionnaires applied to mathematics teachers who work in the State Education Network in some municipalities in the western region of Paraná. Through this research, we observed that the majority of respondents consider it relevant to teach the set of Complex Numbers for high school students, because if it is not worked, it will cause some kind of prejudice to the student. It was possible to observe that the set of Complex Numbers does not appear in the content matrix of the National High School Examination (ENEM), but it is part of the teaching curriculum and is present in most vestibular studies. Eventually the unconcern of this transfer of content is contested by the teachers, due to its little applicability in the daily life of the student.

Keywords: Complex Numbers, Teachers, High School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

DCE	Diretrizes Curriculares da Educação do Estado do Paraná
ENEM	Exame Nacional Do Ensino Médio
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PDE	Programa de Desenvolvimento Educacional
PPC	Proposta Pedagógica Curricular
PSS	Processo Seletivo Simplificado
PTD	Plano de Trabalho Docente
QPM	Quadro Próprio do Magistério
SEED	Secretaria do Estado da Educação
UEL	Universidade Estadual de Londrina
UEM	Universidade Estadual de Maringá
UEPG	Universidade Estadual de Ponta Grossa
UFPR	Universidade Federal do Paraná
UNICENTRO	Universidade Estadual do Centro-Oeste do Paraná
UNILA	Universidade Federal da Integração Latino-Americana
UNIOESTE	Universidade Estadual do Oeste do Paraná
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Historicamente, o desenvolvimento dos Conjuntos Numéricos mostra a necessidade que o homem teve de construir novos conjuntos numéricos, pois suas descobertas e suas aplicações favoreceram o desenvolvimento humano. Ao se obter o conjunto dos Números Reais, os matemáticos perceberam que ainda não era o suficiente, pois o conjunto não conseguia desenvolver certas operações, como raiz quadrada de números negativos.

Com muitos estudos conseguiram desenvolver resultados que antes não eram possíveis, conceitos que serão apresentados no decorrer desse trabalho. O conjunto dos Números Complexos é um conjunto de grande importância para o desenvolvimento do ensino da matemática, pois o mesmo desvendará o resultado da raiz quadrada de um número negativo e muitos outros resultados de raízes quando o índice for par e o radicando for negativo, também no estudo de Polinômios e Equações Algébricas, diante disso, o Conjunto Complexo deve ser repassado e explorado no ensino médio.

Tal repasse, porém torna-se alvo de discussões entre professores do Ensino Médio de matemática, pois sua relevância diverge opiniões entre os docentes, mas sabemos que, caso não revelado ao aluno que raiz quadrada de número negativo não existe, conceito implantado ao discente no período do ensino fundamental II, o mesmo sairá do Ensino Médio sem saber tal conceito, projetando dificuldades no Ensino Superior.

Além disso, o conjunto dos Números Complexo é parte integral no currículo da Matemática do Ensino Médio, porém “[...] pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas [...]” (BRASIL, 2007, p.122), e estão contemplados nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná (DCE). Contudo, o conjunto dos Números Complexos não aparece na matriz de conteúdos do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), sendo que o mesmo oportuniza muitos alunos a entrarem em cursos do ensino superior.

Neste trabalho identificamos a visão dos professores de matemática do Ensino Médio, de alguns municípios do Oeste do Paraná, sobre a importância do ensino dos Números Complexos no Ensino Médio conforme consta nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica (DCE), pois, como esse conjunto numérico não aparece na matriz de conteúdos do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), há a impressão de que o mesmo não seja importante para o aluno de Ensino Médio.

Durante o levantamento bibliográfico, encontramos algumas pesquisas sobre o assunto de Números Complexos.

Lopes (2014) pesquisou sobre a metodologia baseada na história para a obtenção de conceito sobre Números Complexos.

Chagas (2013) analisou sobre a relevância do ensino de Números Complexos no ensino médio na opinião dos professores de matemática.

Costa (2016) investigou os Números Complexos como uma abordagem com ênfase em aplicações na matemática e em outras áreas.

Neto (2013) pesquisou sobre o ensino de Números Complexos.

Nobre (2013) analisou os Números Complexos e algumas aplicações.

De modo a apresentarem metodologias com maior ênfase na parte histórica para o ensino do conjunto dos Números Complexos, aplicabilidade desse conjunto em outras áreas, assim como estratégias de ensino para facilitar a transmissão de conteúdo.

Como professor da Rede Estadual de Ensino, com o passar dos tempos, observei que o conteúdo dos Números Complexos gerava conversas entre os professores de matemática, principalmente em algumas reuniões pedagógicas, nas quais eram elaborados o Plano de Trabalho Docente (PTD) e a Proposta Pedagógica Curricular (PPC). De certa forma esse conjunto numérico não era contemplado nas aulas de alguns professores, mesmo estando presente nos conteúdos direcionados para o ensino médio.

Nas reuniões ou até mesmo nas conversas entre colegas professores, sempre havia opiniões contrárias sobre a relevância do ensino dos Números Complexos para os alunos da 3ª série do ensino médio, começou então a surgir à curiosidade sobre a aplicação desse conjunto e a maneira que os docentes repassavam aos seus alunos tal conteúdo.

Direcionamos essa pesquisa aos professores de matemática, de alguns municípios do Oeste do Paraná, da rede Estadual de Ensino, na qual apenas os professores do Ensino Médio foram convidados a participar deste trabalho, por se tratar de conteúdo desse nível de ensino.

O principal objetivo desta pesquisa será identificar a visão dos professores de matemática pesquisados, sobre a importância do ensino de Números Complexos para os alunos do Ensino Médio. Ainda, explanamos perante visão profissional, se o educando terá ou não algum prejuízo ao sair do Ensino Médio, caso não receba determinado conceito.

Veremos ainda, em alguns documentos oficiais, como Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná (DCE) a presença do conteúdo que analisamos. Também averiguamos a matriz de conteúdos do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), para confirmarmos se os Números Complexos fazem partes do rol de conteúdos.

Algumas aplicabilidades dos Números Complexos em outras Ciências também estão contidas nessa pesquisa. Tais aplicabilidades foram encontradas ao explorarmos as grades de conteúdos de alguns vestibulares de Universidades Públicas do Paraná e de algumas Universidades Federais, para verificar se realmente é relevante para o educando o conceito de Complexos.

2 O CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Neste capítulo apresentamos alguns fatos históricos que auxiliam na compreensão do desenvolvimento da área da matemática que estuda o conjunto dos Números Complexos. Na sequência apresentaremos uma discussão sobre aspectos conceituais relacionados ao conjunto dos Números Complexos.

2.1 HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Ao ser introduzido qualquer conteúdo matemático nas salas de aula, convém ao professor falar um pouco da história relacionada ao mesmo, para que o aluno consiga se localizar no período histórico e também como forma motivacional.

A evolução numérica na civilização iniciou-se nos tempos mais remotos da humanidade, no qual nossos antepassados já possuíam uma noção de número, eram capazes de ver a diferença entre variações de quantidade, tanto para mais quanto para menos (LOPES, 2014).

Relatos do método mais universalmente atestado na história da "contabilidade", e um dos mais velhos também, é o osso ou pedaço de madeira entalhado. Testemunhos arqueológicos conhecidos dessa prática datam do período da pré-história (35.000 a 20.000 a. C.) são, portanto, aproximados contemporâneos do homem *Cro-Magnon* (IFRAH,1997).

Com a evolução gradual da sociedade, tornaram-se indispensáveis a contagem simples (EVES, 2004). Para numerar grupos também eram utilizadas palavras que podem ter sofrido influência daquele período, com o aumento da quantidade existente em cada grupo, passou então a organização no processo de contagem, no qual relatos do tempo primitivo sobre o homem dessa época utilizava um sistema de numeração com base 5 (LOPES, 2014).

Passado o tempo em que o pensamento do homem era puramente rudimentar, teve uma evolução nas capacidades de raciocínio, lhe permitindo a ideia de divisão juntamente com as demais operações matemáticas. Após o primeiro conceito de divisão, encontraram-se casos de frações que o homem daquela época demonstrou excelentes habilidades computacionais ao se deparar com divisões não exatas, conservando a ordem da divisão, contudo sem efetuá-la. Cada população, de acordo com sua cultura, representou a fração de maneira bem pessoal (EVES, 2004).

No processo evolutivo da matemática, nos deparamos com os números negativos, os quais demandaram um tempo significativo para serem percebidos. Sabe-se apenas que o surgimento dos números negativos aconteceu na China (BOYER, 2012). Posteriormente, os povos hindus utilizaram os negativos, logo após foram os árabes, mas os números negativos demoraram a ser admitidos, bom como no restante dos povos, havendo uma grande rejeição por parte dos matemáticos até meados do século XII (LOPES, 2014).

Em seguida, outro fato foi aceito aos poucos, foi o caso do conjunto dos números irracionais, no qual causou grandes mistérios ao redor da matemática, devido sua contagem em expansão decimal infinita e não periódica.

> Somente na metade do século XIX que o caso dos números irracionais foi solucionado em termos aritméticos. Desde então ficou claro que a matemática não poderia mais prescindir dos processos infinitos, incorporando, dessa forma, os números irracionais na matemática. (LOPES, 2014, p.17).

Como a necessidade matemática foi maior em situações que envolvem a radiciação, a criação de um novo conjunto foi alcançada.

> Estamos mais uma vez em um ponto crítico. O conjunto dos Reais não é suficiente para efetuarmos a radiciação, pois no conjunto dos Reais não existem raízes quadradas, quartas, sextas, etc. de números negativos. Para que esses resultados sejam possíveis, devemos ampliar mais uma vez o conceito de número. (PAIVA, 1995, p.266)

O método de construção dos Números Complexos foi feito de maneira longa, segundo Araújo (2006, p.24) “[...] Conforme historiadores da Matemática, o primeiro exemplo de radical de número negativo foi publicado, aproximadamente, em 75 d.C. por Heron de Alexandria[1] num cálculo sobre o desenho de uma pirâmide [...]”,e ainda Araújo (2006, p.24) relata que “[...] Os número complexos, na forma como são apresentados hoje, começam a aparecer por volta de 1500, quando o pensamento corrente entre ao matemáticos surgiu [...]”.

---

[1] Heron de Alexandria foi um geômetra e engenheiro grego que realizou excelentes trabalhos em Física e Geometria (www.biografias.netsaber.com.br).

Ao analisarmos as Diretrizes Curriculares da Educação Básica para termos uma linha de desenvolvimento a ser seguido no sentido de melhorar o atendimento dos alunos sobre os conteúdos matemáticos, nos deparamos com conceitos históricos.

> A história da Matemática é um elemento orientador na elaboração de atividades, na criação das situações-problema, na busca de referências para compreender melhor os conceitos matemáticos. Possibilita ao aluno analisar e discutir razões para aceitação de determinados fatos, raciocínios e procedimentos. (BRASIL, 2008, p.66)

Santos (2008, p.03) define Números Complexos como sendo “[...] o conjunto que possui maior cardinalidade, afinal ele contém todos os outros conjuntos [...]”. E ainda refere Santos (2008, p.03) “[...] é necessário, pois, compreender os processos das operações (aritméticas, trigonométricas, algébricas) envolvendo elementos desse conjunto, assim como a representação geométrica dos números complexos”.

As equações quadráticas surgidas da matemática grega, eram encontradas através de investigações geométricas que usavam círculos e parábolas, no entanto algumas soluções não eram possíveis através de construções, o que caracterizava a inexistência de uma solução de equações quadráticas. Os matemáticos árabes não admitiam soluções não reais para as equações quadráticas, pois herdaram dos gregos a necessidade de justificar a veracidade de seus métodos algébricos.

O conceito de números complexos progrediu gradualmente, como ocorreu com os demais conjuntos. Para algumas equações do grau 2, como $x^2 + 1 = 0$ não existiam soluções até o século XVI, pois nessa época os matemáticos não haviam conseguido resolver uma raiz negativa. Mas não por esse motivo que os Números Complexos apareceram, nos anos seguintes alguns matemáticos se depararam com o mesmo problema nas equações de grau 3, visto que o conjunto dos Números Reais não era o suficiente para resolver certos tipos de equações.

Segundo (JÚNIOR, 2009):

> “[...] na matemática grega já há registro de situações que envolvem soluções de equações cúbicas. Um exemplo disso é um problema clássico da antiguidade, o problema da duplicação do cubo, que consistia em encontrar duas médias proporcionais entre o comprimento da aresta de um cubo dado e o dobro da medida dessa aresta. Esta situação pode ser traduzida por: $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$ [...]”. (JÚNIOR, 2009, p.12).

Alguns matemáticos europeus, principalmente italianos expandiram algumas pesquisas, acarretando em grandes disputas. Antes das lutas, os Números Complexos tiveram seu desenvolvimento por Scipione Del Ferro[2] (1465-1526) professor da Universidade de Bolonha, que resolveu algebricamente a equação cúbica $x^3 + mx = n$, baseando seus trabalhos provavelmente em fontes árabes. Não publicou seu resultado, mas revelou seu segredo para seu discípulo Antonio Maria Del Fior[3] (JÚNIOR, 2009).

Por volta de 1535, Nicolo Fontana de Brescia, também conhecido como Tartaglia[4], vítima de lesões físicas sofridas de quando na infância e que afetaram sua fala, noticiou ter descoberto uma solução algébrica para uma equação cúbica $x^3 + px^2 = n$. Indignado, pensando que era um blefe, Fior desafiou Tartaglia para um duelo em público, abrangendo as resoluções de equações cúbicas. Faltando poucos dias para a disputa, Tartaglia conseguiu resolver a equação cubica desprovida do termo quadrático. No dia da disputa, Tartaglia sabia resolver dois tipos de equações, enquanto que Fior conseguia resolver apenas um, Tartaglia triunfou plenamente (JÚNIOR, 2009).

Mais tarde, Girolamo Cardano[5], um gênio que ensinava matemática e também praticava medicina em Milão, implorou a “fórmula” para resolver as equações o que Tartaglia, a princípio recusou, sendo acusado de mesquinhez e egoísmo. Depois de um juramento solene de segredo, Girolamo conseguiu arrancar de Tartaglia a chave da resolução das equações cúbicas (JÚNIOR, 2009).

> A resolução de equações cúbicas e quárticas não foi em nenhum sentido motivada por considerações práticas, nem tinham valor para os engenheiros ou praticantes de matemática. Soluções aproximadas de algumas equações cúbicas já eram conhecidas na antiguidade, e Al-Kashi, um século antes de Cardano, podia resolver com qualquer grau de aproximação qualquer equação cúbica resultante de um problema prático. A fórmula de Tartaglia-Cardano é de grande importância lógica, mas não é nem de longe tão útil para as aplicações quanto os métodos de aproximações sucessivas (BOYER, 2001, p. 197).

---

[2] Professor de matemática italiano nascido em Bologna, que descobriu a resolução das equações de terceiro grau (http://www.dec.ufcg.edu.br).
[3] Antonio Maria Del Fior foi um matemático italiano aluno de Scipione Dele Ferro, com quem aprendeu a resolver equações cúbicas (http://brasilescola.uol.com.br).
[4] Tartaglia significa “gago” em italiano (http://desciclopedia.org).
[5] Foi um físico e matemático italiano, que dedicou-se a Matemática, Física, Astronomia, Filosofia, Medicina e Astrologia (http://www.matematiques.com.br).

Em 1545 em Nuremberg, apareceu a *Ars Magna*[6] de Cardano, que por sua vez era um grande tratado em latim de álgebra, lá se encontrava a resolução da cúbica de Tartaglia. Grandes foram as reclamações de Tartaglia, mas retrucadas por Ludovico Ferrari, o mais rútilo dos discípulos de Cardano, que alegou que seu mestre tinha recebido tais informações de Scipione Del Ferro, que ao mesmo tempo acusava Tartaglia de ter plagiado informações da mesma fonte.

Já na obra de Eves encontramos que:

> "[...] a resolução da cúbica $x^3 + mx = n$ dada por Cardano em sua *Ars Magna* é essencialmente o seguinte. Considere a identidade $(a-b)^3 + 3ab(a-b) = a^3 - b^3$ se escolhermos *a* e *b* de modo que $3ab = m$, $a^3 - b^3 = n$, então *x* é dado por $a - b$. Resolvendo para *a* e *b* o sistema formado pelas duas últimas equações obtemos $a = \sqrt[3]{\left(\frac{n}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}$, $b = \sqrt[3]{-\left(\frac{n}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}$ e assim fica determinado". (EVES, 2008, p.303).

Em meados de 1572 Rafael Bombelli publicou L'A*lgebra,* uma obra na qual tratava dos mesmos assuntos do livro de Cardano, *Ars Magna*. Durante o desenvolvimento de seus estudos, Bombelli realizou operações utilizando números "fictícios", almejando os resultados desejados, que eram as raízes das equações.

Em uma das equações que Bombelli resolveu, no qual aplicou a fórmula de Tartaglia-Cardano, em que $x^3 = 15x + 4$ e obteve como solução $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Percebeu de imediato que x = 4 era uma das soluções da equação, deste modo, mesmo existindo raízes "imaginárias" no método de resolução da equação o resultado encontrado foi um número real.

De acordo com Costa (2016, p.08), "[...] Bombelli reconhece a existência das raízes negativas e faz uso delas em seus cálculos, contudo segue armando que tais expressões são mais sofísticas que reais".

Temos as regras enunciadas por Bombelli e sua escrita em notação atual:

- *Piú via piú di meno fa piú di meno;* $+.(+i) = +i$
- *Meno via piú di meno fa meno di meno;* $-.(+i) = -i$
- *Piú via meno di meno fa meno di meno;* $+.(-i) = -i$

[6] *Ars Magna* foi o primeiro livro de álgebra da Renascença (https://pt.wikipedia.org).

- *Meno via meno di meno fa piú di meno;* $-.(-i) = +i$
- *Piú di meno via piú di meno fa meno;* $(+i).(+i) = -$
- *Meno di meno via piú di meno fa piú;* $(-i).(+i) = +$
- *Meno di meno via meno di meno fa meno;* $(-i).(-i) = -$

A Geometria e a Aritmética tiveram princípios distintos, mas com o passar dos tempos foram encontradas relações entre formas e números. A ideia de utilizar sistemas de coordenadas para definir pontos no plano e no espaço, já tinha sido empregada por Apolônio[7] no século III a.C., com seus trabalhos sobre secção cônicas. Todavia, na metade do século XVII, os matemáticos franceses Pierre de Fermat[8] e René Descartes[9], independentes, mas quase sincronicamente, desenvolveram o que atualmente conhecemos como Geometria Analítica (CERRI e MONTEIRO, 2001).

> Com o domínio da geometria Analítica Descartes estudou, entre outras coisas, as equações algébricas. Em uma passagem do Discurso do Método Descartes escreveu a seguinte frase: “Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são imaginárias”. (CERRI e MONTEIRO, 2001, p.05).

Consequentemente, temos o número $\sqrt{-1}$ que é chamado de número *imaginário*, termo que se emprega a expressão “Número Complexo”.

Outros personagens da História da Matemática contribuíram no desenvolvimento dos Complexos depois de Bombelli. Tivemos o matemático francês Abraham de Moivre, amigo de Isaac Newton, bem como os irmãos Jacques e Jean Bernoulli. O mais importante matemático que ajudou com os trabalhos dos Complexos foi Euler (CERRI e MONTEIRO, 2001).

Abraham De Moivre (1667-1754) nasceu na França, e aos 18 anos foi morar na Inglaterra onde realizou os estudos matemáticos sozinho, porém baseado na obra Principia de Newton, focou mais seus trabalhos em trigonometria, probabilidade e cálculos de anuidades. Suas primeiras publicações aconteceram no ano de 1707, apenas em 1722 retornou aos seus antigos estudos, chegando a fórmulas usadas em livros didáticos atuais, utilizadas na radiciação e potenciação dos Números Complexos, a Primeira e Segunda fórmula de De Moivre (JÚNIOR, 2009). Tais fórmulas enunciaremos nos casos gerais.

---

[7] Apolônio grande filósofo neo-pitagórico e professor de origem grega (http://www.geocities.ws)
[8] Pierre de Fermat, matemático e cientista francês (1607-1665) (https://edukavita.blogspot.com.br).
[9] René Descartes , filósofo, fisico e matemático francês (1596-1650) (https://www.ebiografia.com).

Euler[10] foi um escritor prolífico, sem dúvida, único ao se relatar em história da matemática, aparece em todos os ramos de tal ciência. São grandes as contribuições de Euler para a matemática, de modo que apontamos apenas as necessárias, como a unidade imaginária $\sqrt{-1} = i$, também deve-se a ele a notabilíssima fórmula $e^{ix} = \cos x + isen\, x$, que para $x = \pi$ transforma em $e^{i\pi} + 1 = 0$, uma igualdade que relaciona cinco dos mais importantes números da matemática. Por processos evidentes, Euler conseguiu uma quantidade grande de relações curiosas, como $i^i = e^{-\pi/2}$. Passou a estudar números da forma $z = a + bi$ onde a e b são números reais e $i^2 = -1$.

Em 1797, Gaspar Wessel[11] trabalhou com os Números Complexos na forma geométrica, de maneira a fazer uma relação objetiva entre os pontos e o plano, porém foi publicada apenas em 1806 por Jean Argand, no qual atualmente recebe os méritos por essa representação.

A contribuição de Gauss[12] se encontra numa memória apresentada à Sociedade Real De Gottingen em 1831, com Gauss a representação geométrica dos Números Complexos foi realmente aceita. Foi o primeiro matemático de status a defender os Números Complexos em público, já conhecia a representação gráfica dos Complexos embasada pelo seu conhecimento em relação à demonstração do Teorema fundamental da Álgebra (CHAGAS, 2013).

Ao investigar a parte histórica dos Números Complexos, buscamos os principais matemáticos envolvidos e suas contribuições, algumas originais, outras nem tanto, mas todos os resultados ensejaram avanços na matemática.

2.2 O CONJUNTO DOS COMPLEXOS

Existem definições variadas do conjunto dos Números Complexos trazidas nos livros didáticos. Primeiramente, para ampliar nosso conceito de número, de modo que a radiciação seja possível, definimos o número i, não-real, denominada como unidade imaginária, como:

---

[10] Leonhard Euler (1707-1783) foi um importante matemático e cientista suíço, foi considerado um dos maiores estudiosos da matemática, em sua época (https://www.ebiografia.com).

[11] Caspar Wessel – Matemático dinamarquês-norueguês, que descobriu a representação gráfica dos números complexos (https://www.ebiografia.com).

[12] Matemático, astrónomo e físico alemão, criador da geometria diferencial, conhecido como o "Príncipe dos Matemáticos", a ele se devem importantíssimos estudos de matemática, física, geometria e astronomia (https://www.uc.pt).

$$i = \sqrt{-1}$$

Consideramos a representação geométrica muito importante no estudo dos Complexos no Ensino Médio, permitindo combinar relações com outros assuntos da matemática nesse nível de escolaridade.

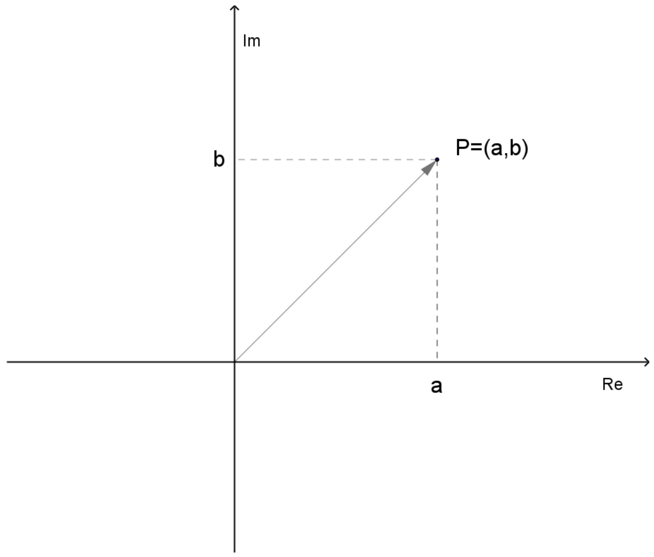
O conjunto dos Números Complexos $\mathbb{C}$ pode ser definido como conjunto de pares ordenados de Números Reais (a, b), $z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = (a,b)$, com a$\in \mathbb{R}$ e b$\in \mathbb{R}$. (SOUZA, 2013).

O conjunto dos Números Complexos é munido das operações:

- adição (a,b) + (c,d) = (a+b, c+d)
- multiplicação: (a,b).(c,d) = (ac-bd,ad+bc)

Cada Número Complexo (a, b) pode ser identificado como um ponto P(a,b) do plano, também como sendo um vetor que possui, norma, direção e sentido (segmento orientado) no plano cujo ponto de partida é a origem do sistema e coordenadas e seu final o ponto P, que será identificado como *afixo* ou *imagem* do Número Complexo. No sistema de coordenadas consideramos o eixo horizontal como eixo real (Re), e o eixo na vertical, consideramos como o eixo imaginário (Im), e o plano chamamos de Plano Complexo ou Plano de *Argand-Gauss*.

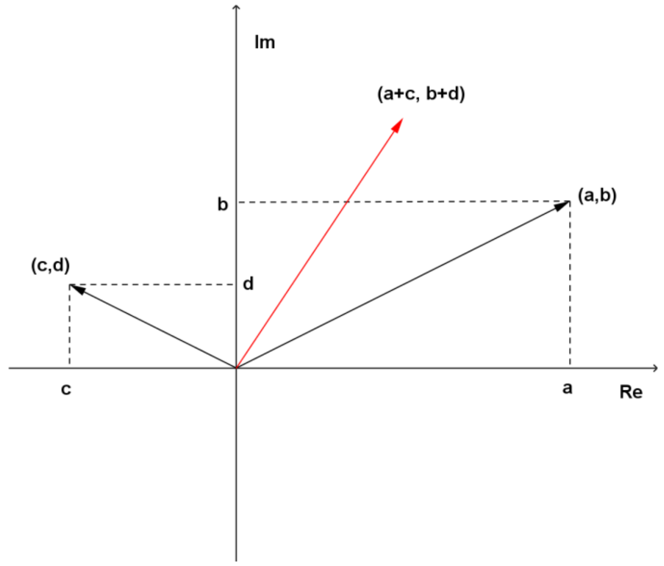
Figura 1: Representação geométrica do número complexo



Fonte: autor

A soma (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) corresponde a adição usual de vetores no $\mathbb{R}^2$, que será desenvolvida também na parte algébrica.

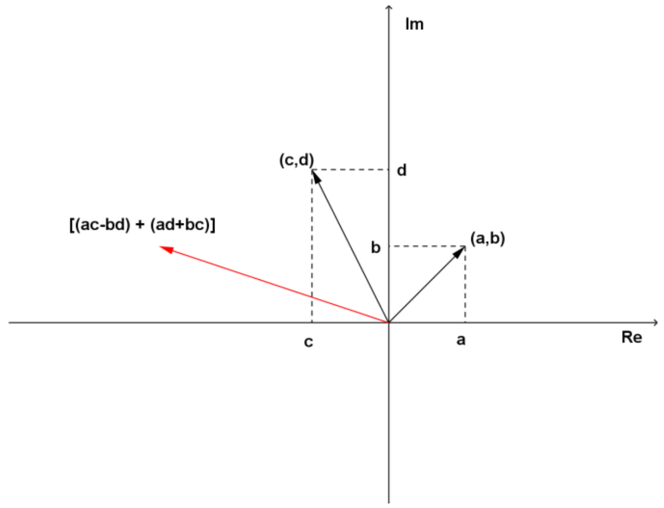
Figura 2: Representação geométrica da soma (a,b) + (c,d)



Fonte: autor

O produto (a,b).(c,d) = (ac-bd,ad+bc) está representado na figura abaixo, que mostraremos também na parte algébrica.

Figura 3: Representação geométrica do produto (a,b).(c,d)



Fonte: autor

2.2.1 Forma algébrica

Como já definimos a unidade imaginária, podemos definir o Número Complexo como todo número da forma $a + bi$ tal que a e b são Números Reais quaisquer e i é a unidade imaginária. A expressão $a + bi$, $\{a,b\} \subset \mathbb{R}$ é denominada **forma algébrica** do Número Complexo, em que a e b são respectivamente, a **parte real** e a **parte imaginária** do Complexo.

O conjunto dos Números Complexos é denotado pelo símbolo $\mathbb{C}$ e assim definimos:

$$\mathbb{C} = \{a + bi/\{a, b\} \subset \mathbb{R}\}$$

A partir desse momento quando mencionarmos um Número Complexo qualquer, usaremos a notação z.

Todo Número Complexo possui uma parte real (a) e uma parte imaginária (bi). Observe que todo Número Real é Complexo, basta tomar b = 0, logo teremos um número do tipo:

$$z = a + 0i = a \in \mathbb{R}$$

então temos que, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Um Número Complexo da forma $a + bi$, $\{a,b\} \subset \mathbb{R}$, é **imaginário** se, e somente se, $b \neq 0$.

Por outro lado, se considerarmos $a = 0$, obtemos:

$$z = a + bi = bi,\ b \neq 0$$

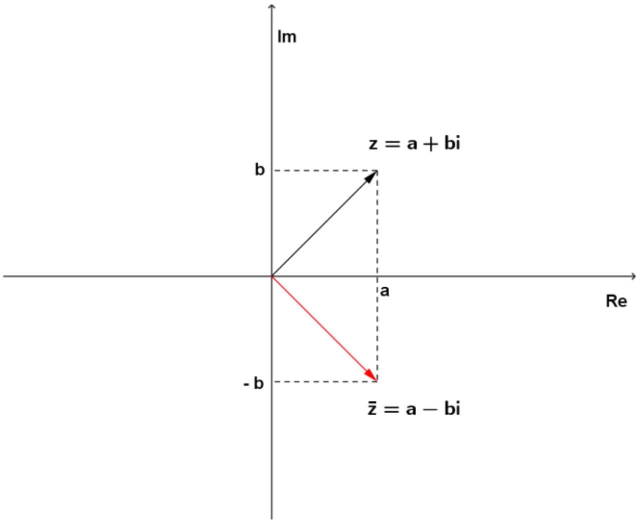
que chamaremos de imaginário puro.

Dados dois Números Complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, expressamos que $z_1 = z_2$ se $a = c$ e $b = d$. Logo dois Números Complexos são iguais se suas partes reais e suas partes imaginárias também forem respectivamente iguais.

2.2.2 Conjugado

O conjugado de um Número Complexo $z = a + bi$, $\{a,b\} \subset \mathbb{R}$ é o número $\bar{z}$ (lê-se "conjugado de z") tal que $\bar{z} = a - bi$, que geometricamente corresponde a simetria reflexiva de z no eixo dos Reais, eixo (Re).

Figura 4: O conjugado de z



.

Fonte: autor.

Seja o número complexo *z* = *x* + *yi*, $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$. Denotamos a parte real por Re(z), a parte imaginária y por Im(z) e o conjugado de z por $\overline{z}$, sendo válidas as seguintes propriedades:

Propriedades

P1 $\overline{\overline{z}} = z$;

P2 $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$;

P3 $z + \overline{z} = 2.\text{Re}(z)$

P4 $z - \overline{z} = 2.\text{Im}(z).i$

P5 $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

P6 $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

P7 $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$

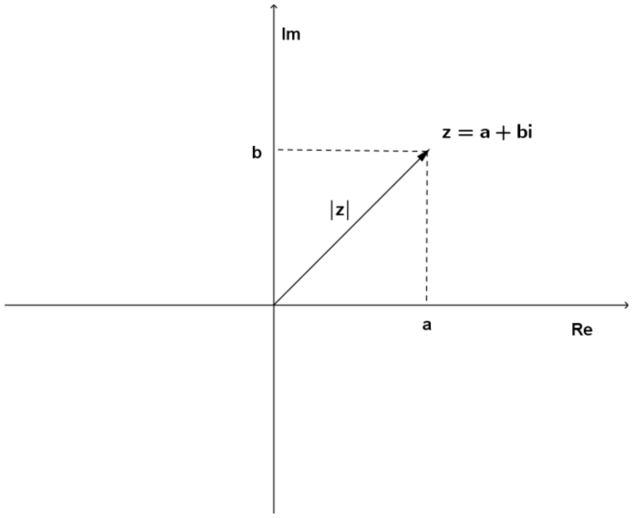
P8 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, z_2 \neq 0$

P9 $\left(\overline{z}\right)^n = \overline{z^n}, n \in \mathbb{N}$

2.2.3 Módulo

O módulo de um Número Complexo z = a + bi, $\{a,b\} \subset \mathbb{R}$**,** é a distância do ponto (a,b) ao ponto (0,0) do Plano de Argand-Gauss, esse Número Real é definido como $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Figura 5: Módulo de z



.

Fonte: autor.

2.2.4 Operações na forma algébrica

Consideramos dois Números Complexos, $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, definimos as seguintes operações no conjunto $\mathbb{C}$.

2.2.4.1 Adição

Consideramos os pares ordenados (a,b) como o número $z_1 = a + bi$ e (c,d) como o número $z_2 = c + di$ onde, $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, temos:

(a,b) + (c,d) = $z_1 + z_2$ = (a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i, portanto (a,b) + (c,d) = (a + c ,b + d). Define-se $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$.

Munida das seguintes propriedades:

a) Associativa

$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad \forall \ \{z_1, z_2, z_3\} \subset \mathbb{C}$

b) Comutativa

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \forall \{z_1, z_2\} \subset \mathbb{C}$

c) Elemento neutro

Existe *e*, $e \in \mathbb{C}$ tal que z + e = e + z = z, $\forall$ $z \in \mathbb{C}$, logo *e = 0*.

d) Elemento oposto

Para cada número complexo z existe o Número Complexo w tal que z + w = w + z = 0 + 0i.

2.2.4.2 Subtração

Sendo $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, define-se $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a - c) + (b - d)i$.

2.2.4.3 Multiplicação

Sendo $(a,b) = z_1 = a + bi$ e $(c,d) = z_2 = c + di$, $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, define-se $z_1 . z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$. Ao definir a adição e a multiplicação em $\mathbb{C}$, pretende-se que os conceitos de adição e multiplicação em $\mathbb{R}$ sejam estendidos aos Complexos e que as propriedades associativa, comutativa, elemento neutro, elemento oposto, elemento inverso e distributiva sejam preservados. Para que isso aconteça, deve-se ter:

$(a,b).(c,d) = z_1 . z_2 = (a + bi).(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$. Temos que $(a,b).(c,d) = (ac - bd , ad + bc)$.

Na multiplicação observamos as propriedades:

a) Associativa

$(z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3), \ \forall \{z_1, z_2, z_3\} \subset \mathbb{C}$

b) Comutativa

$z_1 .z_2 = z_2.z_1,$

c) Elemento neutro

Existe *u*, $u \in \mathbb{C}$, tal que $z.u = u.z = z$, $\forall$ $z \in \mathbb{C}$, logo *u = 1*.

d) Elemento inverso

Para cada Número Complexo z, $z \neq 0 + 0i$, existe o Número Complexo v tal que z.v = v.z = 1 + 0i.

2.2.4.4 Divisão

Podemos definir a divisão entre dois Números Complexos, como o quociente de um Complexo *z* por um Complexo não-nulo *w,* no qual o resultado será o Número Complexo *k* se e somente se, *kw* = *z*. Indicamos esse quociente por $\frac{z}{w}$ ou por z : w. Assim, temos:

$$\frac{z}{w} = k \Leftrightarrow kw = z$$

Temos a propriedade da divisão dos Números Complexos, no qual facilita o processo de divisão entre os números.

Sendo *z, w* e *c* Números Complexos tais que $w \neq 0$ e $c \neq 0$, tem-se $\frac{z}{w} = \frac{zc}{wc}$.

A propriedade mostrada acima, garante que o quociente $\frac{z}{w}$ não será alterado ao multiplicarmos o numerador e o denominador por um Número Complexo não-nulo *c*.

2.2.4.5 Potência

Sendo *w* um Número Complexo qualquer, definem-se:

I. $w^0 = 1$;

II. $w^1 = w$;

III. $w^n = w.w.w.....w, \forall n \in \mathbb{Z},\ n \geq 2$;

IV. $w^{-n} = \frac{1}{w}, w \neq 0, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Para trabalharmos com potências de Números Complexos, consideramos as definições de potência e das propriedades de multiplicação do conjunto dos Números Reais, no qual definimos:

P₁. $w^n . w^m = w^{n+m}$;

P₂. $w^n : w^m = w^{n-m}$;

P₃. $(w^n)^m = w^{n.m}$;

P$_4$. $(w.v)^n = w^n.v^n$

P$_5$. $\left(\dfrac{w}{v}\right)^n = \dfrac{w^n}{v^n}$

Para quaisquer Complexos *w* e *v* quaisquer inteiros *m* e *n*, obedecidas as condições de existência.

2.2.5 Potências de *i*

Existem quatro e somente quatro valores para potências de *i* com expoentes inteiros, são eles:

$$i^0 = 1;$$
$$i^1 = i;$$
$$i^2 = -1;$$
$$i^3 = -i$$

Para demonstrar a existência dessas quatro potências com expoentes inteiros, consideramos a potência i^n com n inteiro e dividiremos em duas partes, para $n \geq 4$ e para $n < 0$, logo temos:

Parte I, $n \geq 4$

Dividindo *n* por 4, obtemos um quociente inteiro *q* e resto *r*, *r* inteiro e $0 \leq r < 4$, isto é, $n = 4q + r$. Assim, temos que $i^n = i^{4q+r} = i^{4q}.i^r = \left(i^4\right)^q.i^r = 1^q.i^r = 1.i^r = i^r$.

Como *r* é inteiro e $0 \leq r < 4$, temos que i^n é u dos quatro valores i^0, i^1, i^2 ou i^3.

Parte II, $n < 0$

$i^n = \left(i^{-1}\right)^{-n}$

Note que $i^{-1} = \dfrac{1}{i}$. Multiplicando o numerador e o denominador dessa fração por – *i*:

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1.(-i)}{i.(-i)} = \frac{-i}{-i^2} = -i$$

Assim temos que $i^n = (-i)^{-n} = (-1)^{-n}.i^{-n}$.

Como $n<0$ temos que $-n>0$, logo i^{-n} é um dos quatro valores, $i^0=1, i^1=i, i^2=-1$ ou $i^3=-i$ e, portanto, $(-1)^{-n}.i^{-n}$ também assumem esses quatro valores.

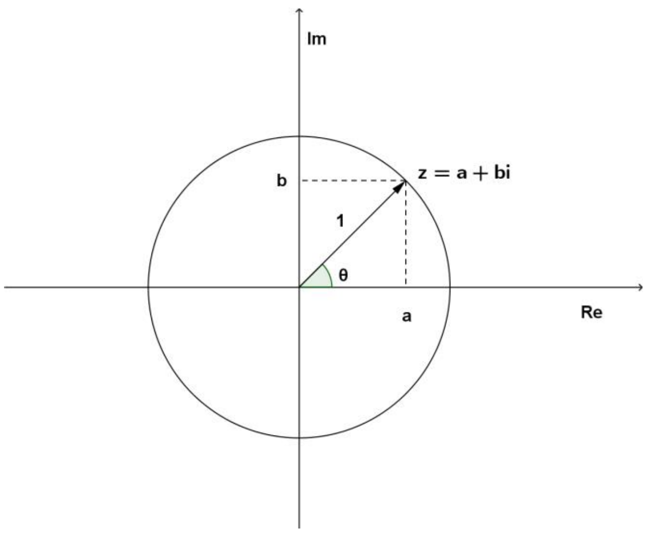
Podemos ter como consequência dessa demonstração que para o cálculo da potência de i^n com *n* inteiro $n \geq 4$, divide-se *n* por 4, obtém-se resto inteiro *r*. Tem-se então $i^n = i^r$.

2.2.6 Forma trigonométrica

Dado o Número Complexo $z = a + bi$, cujo módulo é $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, θ é o ângulo que *z* forma com o eixo Real Re(z). Esse ângulo θ é chamado de "argumento" de *z*.

Para obtermos um Número Complexo unitário, devemos ter como módulo desse número o valor 1, ou seja, este número é encontrado em uma circunferência de raio unitário, cujo número tem centro na origem.

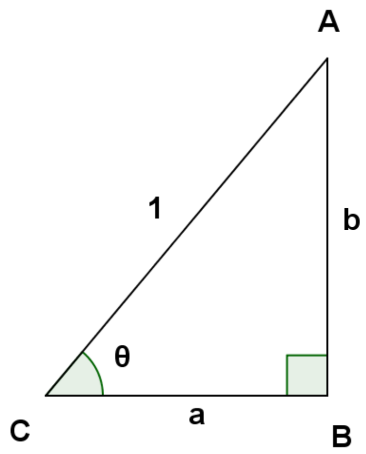
Figura 6: Circunferência de raio unitário



Fonte: autor

Ao observar a figura 6, podemos retirar um triângulo retângulo, que nomearemos de ABC, para relacionarmos o valor de θ em função de *a* e *b*, no qual utilizaremos as relações trigonométricas de seno e cosseno.

Figura 7: Triângulo retângulo ABC, com ângulo $A\hat{C}B = \theta$



Fonte: autor

Através das relações trigonométricas no triângulo retângulo podemos obter:

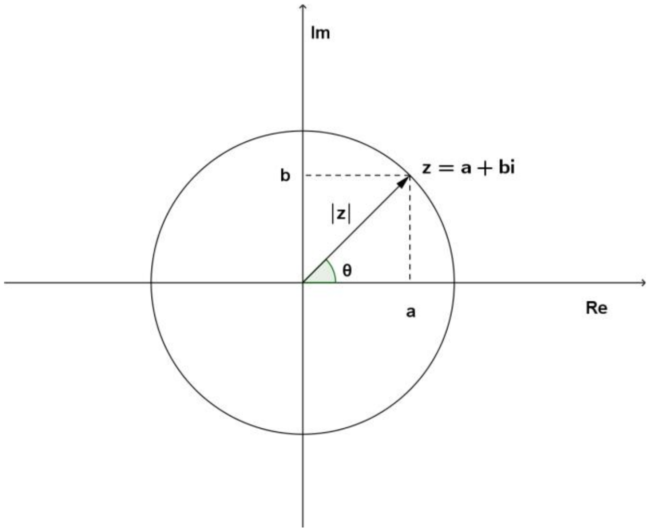
$$sen\theta = \frac{b}{1} \Rightarrow b = sen\theta$$

$$\cos\theta = \frac{a}{1} \Rightarrow a = \cos\theta$$

Com esses resultados podemos reescrever o número *z* = *a* + *bi*, que também pode ser da forma *z* = *(a,b)*. Substituindo *a* e *b* pelos valores encontrados nas relações, temos *z*=$(\cos\theta, sen\theta)$.

Como sabemos θ é o ângulo formado entre o eixo real Re(z) e o Número Complexo no sentido positivo (anti-horário) do eixo. Observamos abaixo uma representação para um número *z* qualquer, considerando $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

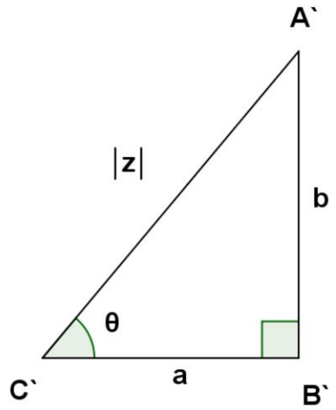
Figura 8: Circunferência de raio $|z|$



Fonte: autor

Ao observar a figura 8, podemos formar um triângulo retângulo cujos vértices coincidem com a projeção do ponto (a,b) no eixo Re(z) no qual nomearemos de B', outro vértice estará na origem do sistema que nomearemos de C' e o outro vértice estará no ponto (a,b) que chamamos de A', logo formamos o triângulo A\`B\`C\`, representado na figura 9, que ao aplicar as relações trigonométricas temos:

Figura 9: Triângulo retângulo A\`B\`C\`, com ângulo $A`\hat{C}`B` = \theta$.



Fonte: autor

$$sen\theta = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z| sen\theta$$

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z|\cos\theta$$

Para todo Número Complexo não nulo *z* = *a* + *bi*, {a, b} $\subset \mathbb{R}$, de módulo $\rho = |z|$ e argumento θ, temos:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \\ sen\theta = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \rho\cos\theta \\ b = \rho sen\theta \end{cases}$$

Assim, podemos escrever o número *z* = *a* + *bi* sob a forma z = $\rho\cos\theta + (\rho.sen\theta)i$ ou, ainda:

$$z = \rho(\cos\theta + isen\theta)$$

que é chamada de **forma trigonométrica** ou **forma polar do Número Complexo** *z.*

2.2.6.1 Multiplicação de Números Complexos na forma trigonométrica

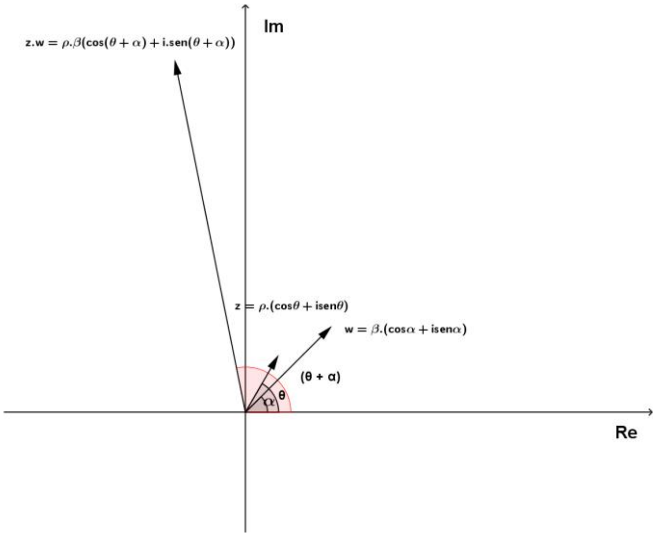
Considere dois Números Complexos *z* = $\rho(\cos\theta + isen\theta)$ e *w* = $\beta(\cos\alpha + i.sen\alpha)$ são as formas trigonométricas dos Complexos *z* e *w*, então o produto entre eles é dado por:

$$z.w = \rho\beta(\cos.(\theta+\alpha) + isen.(\theta+\alpha))$$

Geometricamente o produto *z.w* representa sobre *z* uma rotação positiva de ângulo α do Complexo *w* e uma homotetia[13] de fator β. (Figura10).

[13] Homotetia é a ampliação ou a redução de distâncias e áreas a partir de um ponto fixo (http://www.dmm.im.ufrj.br).

Figura 10: Representação geométrica de z.w.



Fonte: autor

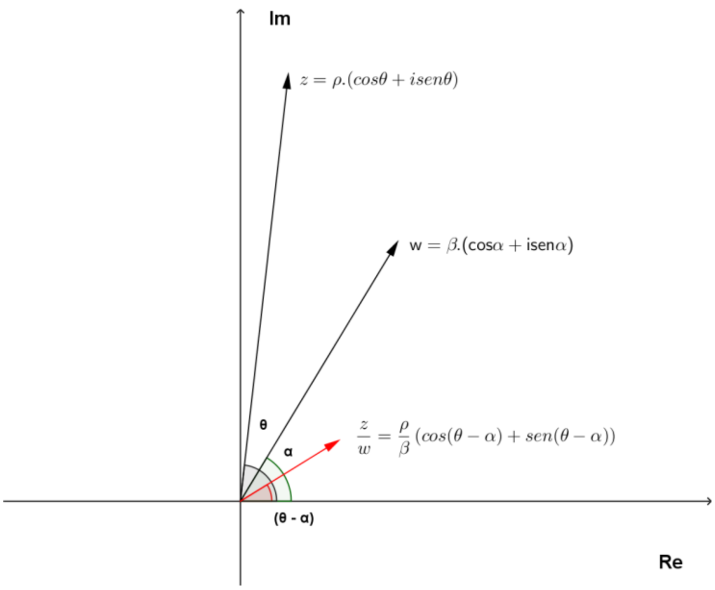
2.2.6.2 Divisão de Números Complexos na forma trigonométrica

Considere dois Números Complexos *z* = $\rho(\cos\theta + isen\theta)$ e *w* = $\beta(\cos\alpha + isen\alpha)$ são as formas trigonométricas dos Complexos *z* e *w*, então o quociente entre eles é dado por:

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{\beta}\left(\cos.(\theta-\alpha) + isen.(\theta-\alpha)\right)$$

Geometricamente o quociente $\frac{z}{w}$ representa sobre *z* uma rotação negativa de ângulo α do Complexo *w* e uma homotetia de fator $\frac{1}{\beta}$. (Figura11).

Figura 11: Representação geométrica de $\frac{z}{w}$



Fonte: autor

2.2.6.3 Potência n-ésima de um Número Complexo

Para resolvermos as potências de Números Complexos na forma trigonométrica, usamos o método resolutivo que é uma consequência do produto dos Complexos, conhecido como a primeira fórmula de De Moivre.

$$z^n = \rho^n.(\cos n\theta + isenn\theta)$$

2.2.6.4 Raiz n-ésima de um Número Complexo

Se $z = \rho\ (\cos\theta + isen\theta)$ é a forma trigonométrica do Número Complexo *z* e *n* é um inteiro positivo, então as raízes n-ésimas do Complexo *z* são dadas por:

$w_k = \rho^{\frac{1}{n}}.\left(\cos\frac{\theta + k.2\pi}{n} + isen\frac{\theta + k.2\pi}{n}\right)$, com *k* inteiro e $0 \le k < n$ (segunda fórmula de De Moivre)

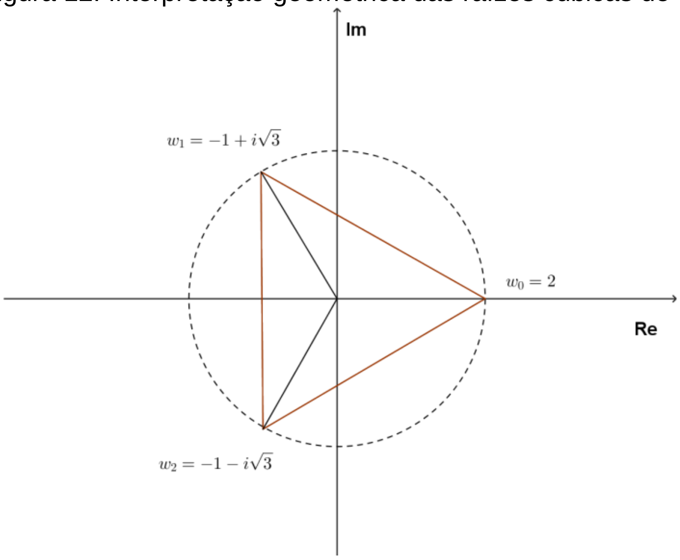
Os argumentos das raízes $w_0, w_1, w_2, ..., w_{n-1}$, que são $\frac{\theta}{n}, \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}, \frac{\theta}{n} + \frac{4\pi}{n}, ..., \frac{\theta}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}$, respectivamente, estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$.

As imagens das raízes $w_0, w_1, w_2, ..., w_{n-1}$, pertencem a uma mesma circunferência de centro (0,0) e raio $\rho^{\frac{1}{n}}$ e dividem a circunferência em *n* partes iguais.

Todas as raízes n-ésimas de *z* têm o mesmo módulo $\rho^{\frac{1}{n}}$.

A figura 12 traz um exemplo de raiz cúbica de 8 com seu respectivo polígono.

Figura 12: Interpretação geométrica das raízes cúbicas de 8.



Fonte: autor.

3 A IMPORTÂNCIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS NA MATEMÁTICA E OUTRAS CIÊNCIAS

Os conjuntos dos Números Complexos, apesar de se provar sua existência, continuam sendo singulares para algumas pessoas, pois sua relação com o mundo real não se destaca como os demais conjuntos numéricos. Não os utilizamos para medir a quantidade de água em um copo ou contar a quantidade dos dedos que temos. Todavia, existem algumas medidas em nosso mundo que os Números Complexos se encaixam perfeitamente. Um campo eletromagnético é um exemplo: possui uma componente elétrica e outra magnética, por isso, é preciso um par de números reais para descrevê-lo, portanto esse par pode ser visto como Números Complexos, no qual encontramos assim uma aplicação direta na Física.

Mesmo com poucas aplicações diretas dos Números Complexos no dia-a-dia, há muitas aplicações indiretas. Propriedades dos números reais só se tornam conhecidas quando são vistas como parte do Conjunto dos Números Complexos. Os Números Complexos surgiram a fim de tornar possível a raiz quadrada de um número negativo. Por exemplo: $\sqrt{-9} = 3i$. Consequentemente, toda equação do segundo grau passou a ter raízes. Por exemplo: $x^2 - 2x + 5 = 0$ possui raízes complexas $1+2i$ e $1-2i$.

Os Números Complexos quando introduzidos na Matemática, foram responsáveis para que raízes algébricas do segundo grau tivessem resultados, assim como raízes das equações do terceiro, quarto, quinto, e todos os demais graus. Fato esse, já é responsável, em boa parte, pela relevância dos Números Complexos, indispensáveis em Álgebra Linear, Equações Diferenciais e em várias situações nas quais, mesmo que se desejem estudar apenas questões relativas a números reais, é indispensável considerar Números Complexos para se obter a solução real desejada (LIMA,1991).

> Não se julgue, entretanto, que a importância dos Números Complexos resulta apenas do Teorema Fundamental da Álgebra. Eles se fazem presentes em praticamente todos os grandes ramos da Matemática como Álgebra, Teoria dos Números, Topologia, Geometria (Analítica, Diferencial ou Algébrica), Análise, Equações Diferenciais e em aplicações como Física Matemática, Dinâmica dos Fluidos, Eletromagnetismo, etc. A Teoria das Funções de Variável Complexa é uma área nobre, de grande tradição

> matemática e, ao mesmo tempo, com notável vitalidade, refletida na intensa atividade de pesquisa que se desenvolve nos dias atuais. (LIMA,1991, p.01)

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), a matemática tem papel fundamental para a formação de ideias, hábitos investigativos, aquisição de atitudes, dentre outros aspectos, “[...] propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais”. (BRASIL, 2000, p. 40).

Considerada de suma importância pra a sociedade, a Matemática no Ensino Médio, estabelece alguns objetivos que de certa forma traz para o educando um real e significativo aprendizado, alguns objetivos são:

> • compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
> • aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
> • desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
> • estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo. (BRASIL, 2000, p. 42).

A Matemática do Ensino Médio não está voltada somente para o treinamento de pessoas interessadas no acesso a universidades, seu objetivo é muito maior que isso, a matemática está presente para a formação do cidadão, trazendo a ele o conhecimento para que possa utilizá-lo em seu cotidiano. E ao se tratar do conjunto dos Números Complexos, podemos relacioná-lo a parte cultural da humanidade, pois foi ela que o desenvolveu, logo faz parte de nossa cultura.

Como a escola é uma instituição de ensino, local onde o estudante tem acesso a cultura, então como forma de contribuir com a formação desse educando, poderá ser transmitido o conteúdo dos Complexos, pois poderá ser a única vez que o aluno terá contato com os Complexos, sendo assim o estudante teve acréscimo de conhecimento, tanto da matemática quanto cultural.

Pois segundo Kuenzer:

> [...] os compromissos do Ensino Médio referem-se a todos os adolescentes, independentemente de sua origem de classe, é preciso destacar o papel da escola pública na construção de uma proposta pedagógica que propicie

> situações de aprendizagem variadas e significativas a seus estudantes, de modo geral pauperizados economicamente, e, em consequência, cultural e socialmente (KUENZER, 2000, p.29)

No desenvolvimento histórico e cultural dos conjuntos numéricos, chegamos ao conjunto dos Números Complexos, os quais nos auxiliam a desvendar situações que o conjunto dos Números Reais não nos mostra, devido ao seu campo de interação ser muito restrito, atinge algumas Ciências, que às vezes não são vistas no Ensino Médio, devido a essa restrição só poderão ser estudadas em alguns cursos de ensino superior ou até mesmo em situações muito particulares na matemática.

3.1 OS COMPLEXOS E AS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Ao se trabalhar no Ensino Médio com o conjunto dos Números Complexos, consequentemente temos que trabalhar os polinômios, que por sua vez utilizam resultados contidos no conjunto $\mathbb{C}$.

Denomina-se equação polinomial ou algébrica toda equação escrita na forma

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ (com $a_n \neq 0$)

$a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, 2, ..., n, n \in \mathbb{N}$. n é o grau da equação.

Denomina-se raiz ou zero da equação algébrica o valor α que substituído no lugar de *x* satisfaz a igualdade, ou seja, o valor α tal que

$a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_1 \alpha + a_0 = 0$

O Teorema Fundamental da Álgebra afirma que:

Toda equação polinomial de grau *n* $(n \geq 1)$ com coeficientes Complexos possui pelo menos uma raiz complexa.

Como consequência do teorema fundamental da álgebra tem-se:

Todo polinômio com coeficientes Complexos $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ com $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$ pode ser decomposto num produto de n fatores de 1º grau, ou seja:

$$p(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)...(x - x_n).$$

Portanto, toda equação polinomial de grau *n* tem exatamente *n* raízes complexas.

Caso a equação polinomial de coeficientes reais admitirem como raiz o número complexo $z = a + bi \ (b \neq 0)$, admitirá como raiz o seu conjugado, ou seja, $\bar{z} = a - bi$.

Ao considerar $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$, $a_n \neq 0$ com coeficientes reais. Por hipótese, temos que $z = a + bi \ (b \neq 0)$ é raiz da equação, ou seja, $p(z) = 0$.

Portanto

$$a_z x^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$$

Aplicando o conjugado em ambos os membros da equação, temos:

$$\overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0} = \bar{0}$$

Aplicando a propriedade da adição de conjugados $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, temos:

$$\overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + ... + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = 0$$

Com a propriedade do produto de conjugado $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$ e o fato de que os coeficientes a_n serem reais, ou seja, $a_n = \overline{a_n}$ para todo *n* termos

$$a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + ... + a_1 \bar{z} + a_0 = 0$$

Ao utilizarmos a propriedade das potencias de conjugado $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$, temos

$$a_n \left(\bar{z}\right)^n a_{n-1} \left(\bar{z}\right)^{n-1} + ... + a_1 \left(\bar{z}\right) + a_0 = 0$$

Ou seja, $p\left(\bar{z}\right) = 0$, de modo que $\bar{z}$ também é raiz da equação $p(x) = 0$.

3.2 FRACTAIS

É uma estrutura geométrica ou física, que geralmente são muito similares em diferentes níveis de escala, na natureza, essas características são limitadas em função de sua escala. O nome deriva do Latim *Fractus*, que tem como significado, quebrado ou fraturado.

A ideia de fractal se originou no trabalho de alguns cientistas entre 1857 e 1913, trabalhos que deram a conhecer alguns objetos que foram catalogados como “demônios”, que por sua vez não tinham muito valor científico.

Em meados de 1872, Karl Weierstrass[14], encontrou um exemplo de uma função com propriedades de ser contínua em todo seu domínio, porém em nenhuma parte diferenciável, atualmente essa função é chamada de fractal. Posteriormente, em 1904 Helge Von Koch[15], não agradado com tal definição de Weiestrass, por sua vez deu uma definição mais geométrica de uma função similar, que hoje é conhecida como *Koch Snowflake* , que é o resultado de infinitas adições de triângulos ao perímetro inicial.

Contudo essa ciência só foi bem desenvolvida a partir da década de 60, com o auxílio da computação. Um dos pioneiros em usar essa técnica foi Benoît Mandelbrot[16], que por sua vez já havia estudado tais figuras. Mandelbrot foi o responsável por criar o termo fractal e executor de um dos fractais mais conhecidas, o conjunto de Mandelbrot.

Esse conjunto é um fractal, que segue um conjunto de parâmetros, cuja a imagem no plano complexo é construída a partir da função $z_{n+1} = z_n^2 + c$, onde $z_n (n \in N)$ e *c* são números complexos e $z_0 = 0$.

Logo é formada a sequência: $c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \dots$.

Observamos alguns exemplos numéricos:

Para $c = 1$:

1, 2, 5, 26, ...

Para $c = i$:

$i, -1 + i, -i, -1 + i$, ...

O conjunto de Mandelbrot é definido como o conjunto de todos os números complexos *c* no qual $z_{n+1} = z_n^2 + c$ não tende a infinito, ou seja, as partes real e imaginária de *z* não tendem para o infinito. Temos abaixo a representação da região limitada por um fractal.

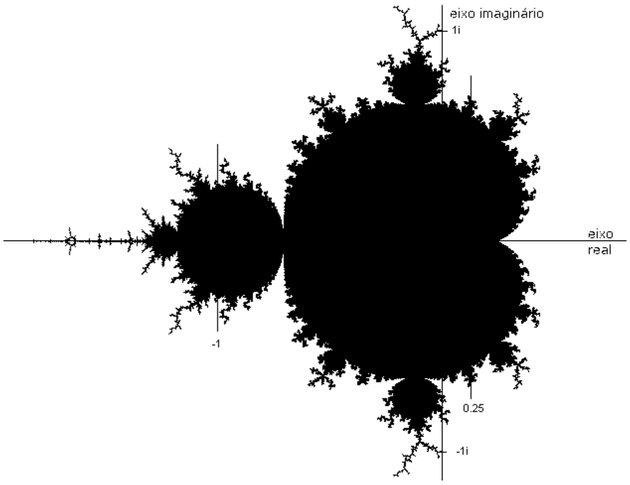
---

[14] Karl Weierstrass, brilhante matemático alemão que nasceu a 31 de outubro de 1815, em Ostenfelde, em 1834, entrou para a universidade de Bonn e em 1839, entrou para a Academia de Münster, com o objetivo de realizar os exames necessários para se tornar professor de ensino secundário (http://matematicaonline.pt/matematicos/).

[15] Hejge Von Koch, matemático sueco que deu seu nome ao famoso fractal conhecido como “floco de neve Koch”, que foi um dos primeiros fractais de curvas a ser descrito (http://www.fecilcam.br/nupem/anais_iv_epct/PDF/ciencias_exatas/).

[16] Matemático Francês de origem judaico-polonesa. É conhecido principalmente por suas contribuições no campo da geometria *fractal* (https://pt.wikipedia.org/wiki/Beno%C3%AEt_Mandelbrot).

Figura 13: Representação do Conjunto de Mandelbrot



Fonte: http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico10.php

3.3 NÚMEROS COMPLEXOS NA ENGENHARIA ELÉTRICA

Ao trabalhar com circuitos elétricos, que são formados por um gerador, um condutor em circuito fechado e um elemento capaz de utilizar a energia produzida por esse gerador, podemos encontrar correntes elétricas de maneira a ser contínuas ou alternadas. Corrente elétrica é o movimento ordenado entre as cargas elétricas presentes em um condutor metálico.

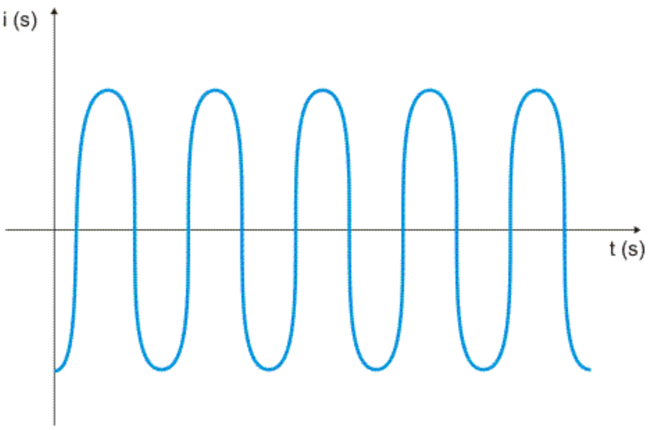
Corrente contínua é considerada quando não se altera seu sentido, ou seja, é sempre positiva ou sempre negativa.

Figura 14: Representação da corrente contínua

Fonte: http://www.sofisica.com.br/conteudos/Eletromagnetismo/Eletrodinamica/caecc.php

Corrente alternada depende da forma como é gerada, esta é invertida periodicamente, ou seja, é positiva e ora negativa, de maneira que os elétrons executem um movimento de vai-e-vem.

Figura 15: Representação da corrente alternada



Fonte: http://www.sofisica.com.br/conteudos/Eletromagnetismo/Eletrodinamica/caecc.php

Em alguns circuitos de corrente alternada, por exemplo, em certas instalações residenciais, as grandezas elétricas são analisadas com o amparo dos números complexos, de modo a facilitar os cálculos. Quando estudada a relação *U = R.i* na disciplina de Física no Ensino Médio, de maneira a utilizar os números Reais, é transformada em *U = Z.i* , de maneira em que *U* é a tensão do circuito e *Z* é a impedância (oposição ou resistência) e *i* é a corrente elétrica, de tal maneira que essas grandezas passam a ser representadas com o conjunto dos Números Complexos.

Para não haver confusão entre os símbolos da unidade imaginária *i* e a corrente elétrica *i*, na engenharia elétrica usa-se *j* como símbolo da unidade imaginária, na qual se representa a forma algébrica *a + bj*, para a forma trigonométrica $|\omega|(\cos\theta + isen\theta)$ de um número complexo ω usam $|\omega| < \theta$.

Também ao analisar circuitos de corrente alternadas, usa-se o formalismo da impedância complexa, no qual são usadas propriedades imaginárias para simplificar a análise de problemas que envolvam valore (tensão e correntes) que variam de forma senoidal. Na notação complexa, tensão e corrente alternadas senoidais são representadas como:

$V(t) = V_0 e^{i\omega t}$

$I(t) = I_0 e^{i\omega t}$

V_0 e I_0 podem assumir valores complexos.

Nesse caso de corrente elétrica foi encontrado relações envolvendo Números Complexos, porém dentro da Física na parte de eletricidade encontraremos mais situações sobre a utilização dos Números Complexos.

3.4 NÚMEROS COMPLEXOS NA AERODINÂMICA

A aerodinâmica é uma parte da mecânica dos fluidos que estuda os gases em movimento, e em particular o movimento relativo entre o ar e os corpos sólidos. Ao construir um avião os engenheiros se fundamentaram nos princípios da aerodinâmica, principalmente na elaboração do aerofólio.

Um aerofólio é projetado para causar certa variação da velocidade de um fluido, acarretando uma diferença de pressão. Nas aeronaves os aerofólios se encontram nas asas e no leme, proporcionando a sustentação e direção do avião, logo o mantendo no ar, cuja explicação está na conservação de energia enunciada pelo Princípio de Bernoulli.

O primeiro cientista a explicar matematicamente a sustentação gerada por um corpo em movimento foi o russo Nicolai Joukowski (1847-1921), o qual criou uma curva fechada no plano Complexo, tal como aparenta a asa de um avião, através de transformações geométricas, consequentemente ficou conhecida como aerofólio de Joukowski. Usou o Princípio de Bernoulli[17] e a Teoria das Funções Complexas para deduzir uma fórmula de uma variável complexa $f(z) = z + \frac{1}{z}$, com $z = a + bi$ cujo conjunto $S = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ pode ser considerado seu domínio $\mathbb{C}$.

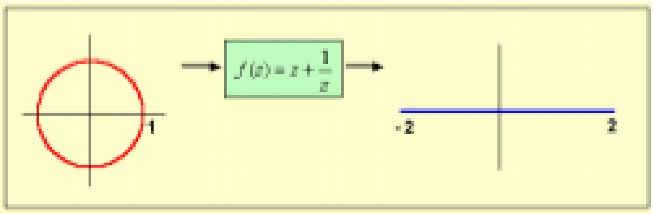
A função f com domínio S pode ser representada da seguinte forma:

$$f(z) = f(a+bi) = a + bi + \frac{1}{a+bi} = a + bi + a - bi = 2a$$

[17] Principio de Bernoulli descreve o comportamento de um fluido movendo-se ao longo de uma linha de corrente no qual traduz para os fluidos o principio da conservação de energia (https://pt.scribd.com/document/342917118/Principio-de-Bernoulli).

Que geometricamente esta função transforma uma circunferência unitária em um segmento no eixo real do plano complexo.

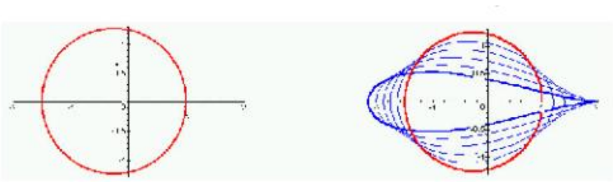
Figura 16: Transformação do círculo unitário num segmento mediante a função $f(z) = z + \frac{1}{z}$



Fonte: ALMEIDA e PAZOS, 2005, p.2

Ao supor que o círculo unitário sofra uma pequena dilatação e uma pequena mudança do centro ao longo do eixo real. Definimos então uma função $p(\delta, t) = -\delta + (1+\delta).e^{i.t}$ que está representada no plano complexo através de um gráfico, cujo centro da circunferência teve um deslocamento de δ unidades à esquerda sobre o eixo real e com raio $1+\delta$. Esse conjunto transformado juntamente com a função de Joukoswki é o aerofólio. (ALMEIDA e PAZOS, 2005).

Figura 17: Transformação do círculo unitário deslocado e dilatado apropriadamente no aerofólio.



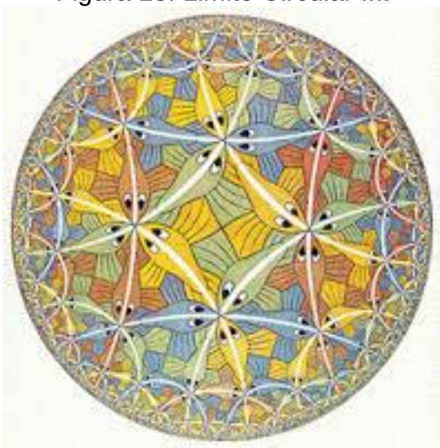
Fonte: ALMEIDA e PAZOS, 2005, p.2

3.5 NÚMEROS COMPLEXOS APLICADOS NA ARTE

Podemos encontrar algumas aplicações dos Números Complexos na Arte, pois associamos movimentos no plano com operações com Números Complexos. Particularmente com rotação e reflexão em torno de uma reta relacionamos à operação de multiplicação. Podemos citar algumas obras que apresentam tais aplicações.

O artista Maurits Cornelius Escher[18] usou as simetrias de reflexão e rotação em algumas de suas obras. Ao analisar a obra Limite Circular III, os peixes do centro do quadrado, correspondem a uma rotação de 90º com relação à origem dos pontos de cada figura. (CAON, 2013)

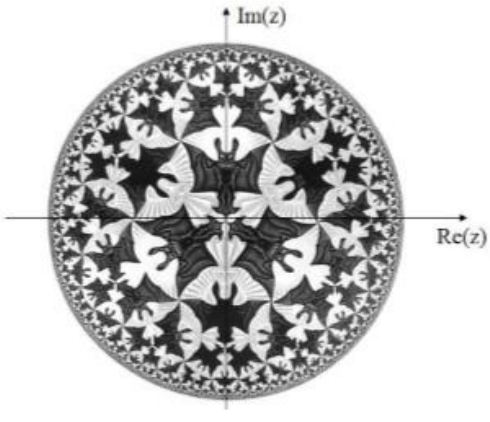
Figura 18: Limite Circular III.



Fonte: www.mcescher.com

Na obra Limite Circular IV, os três demônios negros que se situam no centro, correspondem a uma simetria de rotação de 120º em torno da origem de cada figura, nessa obra um dos demônios é simétrico em relação a reta x = 0, no qual cada ponto de uma das metades desse demônio pode ser obtido como o produto do conjugado de um ponto da outra metade por $z = \cos\pi + isen\pi$. (CAON, 2013).

Figura 19: Limite Circular IV.



Fonte: www.mcescher.com

[18] Escher foi um artista gráfico holandês conhecido pelas xilogravuras, litografias e meios-tons que tendem a representar construções impossíveis, com preenchimento regular do plano, explorações do infinito e padrões geométricos (http://www.escher.eng.br/index_arquivos/Page345.htm).

4 OS NÚMEROS COMPLEXOS EM DOCUMENTOS OFICIAS E NOS PROGRAMAS DE VESTIBULARES EM ALGUMAS UNIVERSIDADES

No presente capítulo relatamos os documentos oficiais que conduzem a elaboração do currículo de Matemática do Ensino Médio. Buscamos constatar nas orientações a importância e o foco atribuído aos Números Complexos, também verificaremos se o assunto está presente nos programas de algumas universidades no momento do seu acesso.

Inicialmente serão analisadas as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), o qual é um documento que norteia a elaboração dos demais. Posteriormente analisaremos as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná, pois os pesquisados pertencem a esse Estado. Também analisaremos a matriz de referência do ENEM, para constatar se o conjunto dos Números Complexos está presente em tais documentos.

Segue abaixo tabela com a relação dos documentos oficiais pesquisados e os programas de vestibulares, para analisar quais contemplam ou não o conteúdo de Números Complexos.

Tabela 1: Conteúdo de Números Complexos nos Documentos Oficiais e Programas de Acesso a Universidades

Documentos e Universidades Pesquisadas	Números Complexos
PCN	Contempla
DCE	Contempla
ENEM	Não Contempla
UEL	Contempla
UEPG	Contempla
UNIOESTE	Contempla
UNICENTRO	Contempla
UFPR	Contempla
UEM	Contempla
UTFPR	Não Contempla
UNILA	Não Contempla

Fonte: autor (2017)

4.1 OS NÚMEROS COMPLEXOS NAS ORIENTAÇÕES EDUCACIONAIS COMPLEMENTARES AOS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

Os Parâmetros Curriculares Nacionais tem por finalidade nortear e organizar o trabalho escolar, no qual são apresentadas sugestões de práticas educativas e de organização dos currículos, de tal forma que estabelece temas estruturadores do ensino disciplinar em cada área. De maneira a apresentar uma organização disciplinar em três áreas, Ciências da Natureza e Matemática, Ciências Humanas, Linguagem e Códigos, em que organizam e interligam disciplinas, mas não com o objetivo de diluírem ou eliminarem as mesmas.

O Ensino Médio deixou de ser preparatório para o Ensino Superior ou estritamente profissionalizante, para assumir a responsabilidade de completar a educação básica, logo tem como objetivo, Brasil (2007, p.08) “[...] preparar para a vida, qualificar para a cidadania e capacitar para o aprendizado permanente, em eventual prosseguimento dos estudos ou diretamente no mundo do trabalho”.

Na disciplina de matemática o conjunto que possibilitam o desenvolvimento das competências enfocadas com importância científica ou cultural nos conteúdos matemáticos, foi harmonizado em três eixos ou temas estruturadores, Álgebra (números e funções), Geometria e medidas e Análise de dados, desenvolvidos simultaneamente nas três séries do Ensino Médio.

No eixo Álgebra (números e funções) no ensino médio, o tema aborda os números e variáveis em conjuntos infinitos na maior parte dos casos contínuos. De maneira a estudar, Brasil (2007, p.120) “[...] os campos numéricos dos números reais e, eventualmente, os números complexos e as funções e equações de variáveis ou incógnitas reais”.

O conjunto dos números Complexos em tal documento é referido como:

> Tradicionalmente, a Matemática do ensino médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. Como esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área, ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas. (BRASIL, 2007, p.122).

Dessa forma, pode-se inferir que o professor do ensino médio pode aplicar ou não o conteúdo de Complexos, pelo fato de o conteúdo ser parte flexível do currículo, de maneira que o mesmo tenha a opção de empregar ou não tal conteúdo.

Por outro lado, na continuidade do documento, vemos que ao estudar equações polinomiais, o educando precisa ter o conhecimento sobre conjunto Complexo. Objetivando um estreitamento do conhecimento desse conjunto apenas para a parte algébrica.

Sobre as competências e habilidades propostas no documento citado, podemos observar:

Quanto à investigação e compreensão. (p.30)

- Identificar em dada situação-problema as informações ou variáveis relevantes e possíveis estratégias para resolvê-la.
- Reconhecer, utilizar, interpretar e propor modelos explicativos para fenômenos ou sistemas naturais ou tecnológicos.
- Articular, integrar e sistematizar fenômenos e teorias dentro de uma ciência, entre as várias ciências e áreas de conhecimento.

Quanto à contextualização sociocultural. (p.32)

- Compreender o conhecimento científico e o tecnológico como resultados de uma construção humana, inseridos em um processo histórico e social.
- Compreender a ciência e a tecnologia como partes integrantes da cultura humana contemporânea.
- Reconhecer e avaliar o desenvolvimento tecnológico contemporâneo, suas relações com as ciências, seu papel na vida humana, sua presença no mundo cotidiano e seus impactos na vida social.
- Reconhecer e avaliar o caráter ético do conhecimento científico e tecnológico e utilizar esses conhecimentos no exercício da cidadania.

4.2 OS NÚMEROS COMPLEXOS NAS DIRETRIZES CURRICULARES DA EDUCAÇÃO BÁSICA DO ESTADO DO PARANÁ

As Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná apresentam formulação do currículo para a educação básica e as disciplinas aderidas pela Secretaria de Educação do Estado do Paraná de maneira a destacar a importância dos conteúdos disciplinares e do professor como elaborador de seu plano de ensino, pois:

O documento relata (PARANÁ, 2008, p.38) "[...] é necessário compreender a Matemática desde suas origens até sua constituição como campo científico e como disciplina no currículo escolar brasileiro para ampliar a discussão acerca dessas duas dimensões". Oferecer ao educando a concepção histórica dos conteúdos agrega significados à aprendizagem e promove ainda uma compreensão global sobre os conceitos científicos.

> É imprescindível que o estudante se aproprie do conhecimento de forma que "compreenda os conceitos e princípios matemáticos, raciocine claramente e comunique ideias matemáticas, reconheça suas aplicações e aborde problemas matemáticos com segurança" (PARANÁ, 2008, P.47)

Conteúdos estruturantes são aqueles que têm grande relevância de conceitos, teoria ou práticas, nos quais são selecionados a partir de uma análise histórica da ciência e da disciplina, e trazidos para a escola para ser socializado, apropriado pelos estudantes através das técnicas de ensino-aprendizagem. Nos conteúdos estruturantes são organizados os temas básicos a serem trabalhados por série, nos básicos temos os conteúdos específicos fundamentados pelas orientações teórico-metodológicas.

Os conteúdos estruturantes apresentados nestas Diretrizes Curriculares (p.49), indicadas para a Educação Básica da Rede Pública Estadual são:

- Números e Álgebra
- Grandezas e Medidas
- Geometrias
- Funções
- Tratamento da Informação.

Encontramos os Números Complexos em um dos conteúdos estruturantes no Ensino Médio (p.50), em Números e Álgebra há a presença do assunto, vejamos:

- Números Reais
- Números Complexos
- Sistemas lineares
- Matrizes e Determinantes
- Equações e Inequações Exponenciais, Logarítmicas e Modulares
- Polinômios

No Brasil o ensino da álgebra e dos números fazem parte da consciência escolar, seu ensino foi influenciado pelas produções europeias do século XVIII na forma de aulas isoladas em matérias nomeadas Aritmética e Álgebra (PARANÁ, 2008).

Quanto às expectativas de ensino e de aprendizagem desse conteúdo estruturante espera-se no Ensino Médio que aconteça um aprofundamento de estudos dos números de maneira que:

- O educando compreenda e interprete os números complexos e suas operações;
- Identifique e realize operações com polinômios.

Figura 20: Recorte dos conteúdos estruturantes

CONTEÚDOS ESTRUTURANTES	CONTEÚDOS BÁSICOS	AVALIAÇÃO
NÚMEROS E ÁLGEBRA	• Números Reais; • Números Complexos; • Sistemas lineares; • Matrizes e Determinantes; • Polinômios; • Equações e Inequações Exponenciais, Logarítmicas e Modulares.	• Amplie os conhecimentos sobre conjuntos numéricos e aplique em diferentes contextos; • Compreenda os números complexos e suas operações; • Conceitue e interprete matrizes e suas operações; • Conheça e domine o conceito e as soluções de problemas que se realizam por meio de determinante; • Identifique e realize operações com polinômios; • Identifique e resolva equações, sistemas de equações e inequações, inclusive as exponenciais, logarítmicas e modulares.

Fonte: Diretrizes Curriculares do Paraná, 2008, p.80.

Perante a proposta de currículo, compreendemos que a ensino dos Números Complexos deve acontecer, e ainda, trará para o educando um aprendizado no contexto histórico da matemática, e proporcionar o mesmo a operar com esse conjunto e estender seus conceitos a outros campos da matemática e de outras ciências.

4.3 OS NÚMEROS COMPLEXOS NO ENEM

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) surgiu em 1998 com o objetivo de avaliar o desempenho dos alunos concluintes do ensino médio. Desta data até a atualidade, sofreu algumas mudanças, com relação à prova e também a relevância para os alunos e para as escolas e universidades.

A matriz de referência de Matemática e suas Tecnologias, incluídas na Matriz referência do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), foi dividida em sete competências para os candidatos ao exame analisar e compreender sobre os contextos que serão cobrados. Como nosso foco de pesquisa está nos Números complexos, veremos apenas a competência de área 1, pois está inclusa nos conteúdos estruturantes na parte de Números e Álgebra.

> Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.
> H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.
> H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
> H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
> H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
> H5 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos. (BRASIL, 2012, p.5)

No exame estão propostos os seguintes conteúdos:

> Conhecimentos numéricos: operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem. (BRASIL, 2012, p.16)

Ao observar os conteúdos propostos e competências da disciplina de Matemática para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), observamos que o conteúdo do Conjunto Complexo não está presente nos conteúdos indicados, pois o exame está de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais.

> O primeiro tema ou eixo estruturador, Álgebra, na vivência cotidiana se apresenta com enorme importância enquanto linguagem, como na variedade de gráficos presentes diariamente nos noticiários e jornais, e também enquanto instrumento de cálculos de natureza financeira e prática, em geral. No ensino médio, esse tema trata de números e variáveis em conjuntos infinitos e quase sempre contínuos, no sentido de serem completos. Os objetos de estudo são os campos numéricos dos números reais e, eventualmente, os números complexos e as funções e equações de variáveis ou incógnitas reais (BRASIL, 2007, p.120).

Verificamos que o exame segue criteriosamente os Parâmetros Curriculares Nacionais, pois os Números Complexos encontram-se na parte flexível do Currículo Básico, que de certa forma deixa esse conteúdo arbitrário para o docente trabalhar em sala de aula, por consequência, não é cobrado no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

4.4 OS NÚMEROS COMPLEXOS EM ALGUNS VESTIBULARES

Procuramos analisar os conteúdos programáticos dos vestibulares de algumas universidades do Estado do Paraná, para constatar se o assunto de Números Complexos está realmente presente nas provas que poderão ser feitas pelos alunos no Ensino Médio dos colégios da rede pública de ensino.

Buscamos os conteúdos programáticos dos vestibulares em algumas universidades, como: Universidade Estadual de Londrina - UEL, Universidade Estadual de Ponta Grossa - UEPG, Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE, Universidades Estadual do Centro-Oeste do Paraná - UNICENTRO, Universidade Federal do Paraná - UFPR, Universidade Estadual de Maringá - UEM.

Procuramos nos conteúdos programáticos da UEL, e encontramos a presença dos Números Complexos.

> Números naturais e números inteiros: operações e propriedades, divisibilidade, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, decomposição em fatores primos. Números racionais e noções de números reais: operações e propriedades, ordem, valor absoluto e desigualdades. Razão, proporção, regra de três e porcentagem. Noções elementares de números complexos: operações simples. (UEL, 2016, p.32)

Ao investigar os conteúdos programáticos da UEPG, constatamos a presença do conteúdo de Números Complexos.

> “[...] 12 – Números complexos
> - Representação e operações nas formas algébricas e trigonométricas;
> - potencia de i;
> - raízes complexas da unidade
> - fórmula de Moivre [...]”.(UEPG, 2017, p.27).

Na Unioeste também encontramos os conteúdo dos Números Complexos presente em seus conteúdos programáticos do vestibular.

> Conjuntos Numéricos: Números naturais e números inteiros: divisibilidade; máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum; decomposição em fatores primos. Números reais: operações, propriedades, ordem, intervalos, valor absoluto, desigualdades. Números complexos: representação e operações

> nas formas algébrica e trigonométrica, módulo, potenciação e radiciação. (UNIOESTE, 2017, p.10)

Pesquisado nos conteúdos programáticos da UNICENTRO sobre os Números Complexos, certificamos que o assunto está presente no programa de provas.

> Álgebra: Relações e funções. Progressões aritméticas e geométricas. Logaritmos e exponencial. Análise combinatória e probabilidades. Binômio de Newton. Polinômios e Equações algébricas. Matrizes e determinantes. Sistemas de equações lineares. Números complexos. (UNICENTRO, 2018, p.5).

Não foi diferente ao pesquisarmos os conteúdos para as provas do vestibular da UFPR, encontramos a presença dos Números Complexos na programação.

> “[...] - Propriedades dos números reais e das operações fundamentais com números reais.
> - Representações algébrica e geométrica dos números complexos. Operações com números complexos. Potências de números complexos. Conjugado e módulo de um número complexo. Forma trigonométrica.[...]” (UFPR, 2017, p.3).

Da mesma forma, nos conteúdos programáticos da UEM, encontramos o conjunto dos Números Complexos, de tal maneira cobrado:

> “[...] conjunto dos números reais; representação decimal de frações ordinárias; dízimas periódicas e sua conversão em frações ordinárias; sistemas de numeração de base qualquer; conversão de números de um sistema a outro.
> Números complexos: representação e operações nas formas algébrica e trigonométrica; raízes complexas da unidade e fórmula de De Moivre [...]”. (UEM, 2016, p.36).

Buscamos em alguns vestibulares de Universidades Estaduais e Federais, analisar o conteúdo programático, para verificar a presença do conjunto dos Números Complexos, assunto esse que está nos Parâmetros Curriculares e nas Diretrizes Estaduais. Entre os pesquisados, encontramos em uma grande parte sua frequência, apenas na Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR e na Universidade Federal da Integração Latino-Americana - UNILA que não encontramos, pois o processo de seleção dos candidatos é por meio do Sisu[19], sistema que utiliza a nota do Enem feito pelo candidato.

[19] O Sistema de Seleção Unificada (Sisu) é o sistema informativo, gerenciado pelo Ministério da Educação (MEC), pelo qual instituições de educação superior oferecem vagas a candidatos participantes do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) (http://sisu.mec.gov.br/sisu).

5 SOBRE A PESQUISA

Esta pesquisa tem por objetivo saber o ponto de vista dos professores de matemática de alguns municípios da região Oeste do Estado do Paraná, com relação à importância do conteúdo dos Números Complexos para os educandos. Analisamos a metodologia de ensino usada por cada professor e quais bibliografias utilizam para introduzir e desenvolver o assunto. Seguimos este objetivo através de um relato sobre a metodologia de pesquisa qualitativa de forma exploratória, também buscamos informações nas bibliografias apresentadas por cada professor pesquisado e, em seguida, apresentamos um questionário e o que esperamos com cada questão, finalizamos o capítulo com a discussão do questionário presente no apêndice.

5.1 ASPECTOS METODOLOGICOS DA PESQUISA

A pesquisa caracteriza-se em uma pesquisa qualitativa, de forma a compreender a importância da abordagem desse assunto, revelando pontos positivos e negativos. Esta pesquisa será feita através de coleta de dados com aplicação de questionário, bem como, será feita uma explicação relacionada a essa coleta do referido público alvo.

Esta pesquisa teve como incentivo o cotidiano de sala de aula, muitas conversas entre docentes da disciplina de matemática que atuam no ensino médio, pois as opiniões de cada professor foram fundamentais para dar início a essa pesquisa. Muitas frustrações e muitos desabafos que de certa forma promoveram uma curiosidade sobre o processo de ensino-aprendizagem relacionado ao tema proposto.

Temos como elemento principal dessa investigação, o docente de matemática do ensino médio para obtermos respostas que não sejam meramente numéricas, mas que ofereçam certa relevância nos resultados, pois precisamos ressaltar e interpretar o processo que o docente desenvolve em seu cotidiano em sala de aula.

A escola é considerada um espaço no qual acontece à intervenção pedagógica, e o agente causador dessa intervenção é o professor, pois o mesmo é mediador no processo ensino/aprendizagem. O professor deve estar envolvido com a difusão do conhecimento, sempre voltado para a pesquisa, interagindo suas experiências durante a prática educativa na melhoria da qualidade de ensino (OLIVEIRA, 2006).

Os educadores assumem uma importância crucial perante as transformações atual no mundo. Em um mundo globalizado, transnacional, nossos educandos precisam estar preparados para leituras críticas das mudanças que acontecem em escala mundial, pois o mundo está sobre intensa transformação científica e tecnológica, logo precisam de uma formação sólida, capaz de ajudá-lo a pensar cientificamente e de colocar cientificamente os problemas humanos (LIBÂNEO, 1998).

Atualmente o professor não é mero transmissor de informações, precisa ser uma pessoa que saiba repassar o conhecimento em sintonia com o aluno, pois necessita saber o que ensinar, para que e para quem, projetando esse ensino de uma forma que seu aluno utilize os conhecimentos científicos da escola em sua prática social (OLIVEIRA, 2006).

A escola segundo Libâneo (1998):

> [...] é aquela que assegura a todos a formação cultural e científica para a vida pessoal, profissional e cidadã, possibilitando uma relação autônoma, crítica e construtiva com a cultura em suas várias manifestações: a cultura provida pela ciência, pela técnica, pela estética, pela ética, bem como pela cultura paralela (meios de comunicação de massa) e pela cultura cotidiana. E para quê? Para formar cidadãos participantes em todas as instâncias da vida social contemporânea, o que implica articular os objetivos convencionais da escola - transmissão-assimilação ativa dos conteúdos escolares, desenvolvimento do pensamento autônomo, crítico e criativo, formação de qualidades morais, atitudes, convicções - às exigências postas pela sociedade comunicacional, informática e globalizada: maior competência reflexiva, interação crítica com as mídias e multimídias, conjunção da escola com outros universos culturais, conhecimento e uso da informática, formação continuada (aprender a aprender), capacidade de diálogo e comunicação com os outros, reconhecimento das diferenças, solidariedade, qualidade de vida, preservação ambiental (LIBÂNEO, 1998, p.03).

Segundo Malhotra (2006, p.156), *apud* Oliveira, Filho e Rodrigues (2007), a pesquisa qualitativa "[...] é uma metodologia de pesquisa não-estruturada e exploratória baseada em pequenas amostras que proporciona percepções e compreensão do contexto do problema". Capelin (2017), por sua vez, comenta que dentro de uma pesquisa qualitativa há vários ramos a seguir: coleta documental, observação, entrevista, questionário, formulário, testes, análise de conteúdo, estudo de caso, entre outros. Para cada ramo pode ser usado um enfoque.

Sobre a pesquisa qualitativa, Rosso (2016), complementa:

> "[...] a pesquisa qualitativa envolve uma abordagem interpretativa do mundo, uma vez que os pesquisadores estudam os fenômenos em seus cenários naturais e buscam compreendê-los ou interpretá-los de acordo com os significados que as pessoas a eles conferem". (ROSSO, 2016, p.80).

É através da pesquisa qualitativa que vamos ao encontro da realidade que não pode ser quantificada, concentrando-nos de maneira a compreender e explicar o dinamismo das relações sociais, ou seja, não podemos reduzir-nos à operacionalização de variáveis.

A seleção de um processo de pesquisa vai depender das hipóteses que norteiam o pesquisador para enfrentar o tema da pesquisa. De acordo com Morgan e Smircich (1980), *apud* Zanelli (2002), "[...] advogam que a pesquisa qualitativa é mais que um conjunto particular de técnicas; está implícita no modo de encarar o fenômeno social investigado".

O pesquisador deve tomar cuidado para não deixar transparecer sua opinião sobre o assunto, não pode influenciar o pesquisado de maneira que direcione a pesquisa. Nesse caso quem deve concluir o tema investigado, que vem exposto através de um questionário, será o professor de matemática, que com liberdade de expressão e tempo hábil, transmitirá sua visão do contexto da pesquisa.

Para Zanelli (2002),

> "[...] pesquisas qualitativas preocupam-se em desenvolver conceitos mais que aplicar conceitos pré-existentes, estudar casos particulares mais que abarcar populações extensas e descrever os significados das ações para os atores mais que codificar eventos [...]". (ZANELLI, 2002, p. 80).

A pesquisa bibliográfica utiliza materiais elaborados, como livros, revista e artigos. Para Gil (2008), uma pesquisa bibliográfica oferece vantagens ao pesquisador:

> A principal vantagem da pesquisa bibliográfica reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente. Esta vantagem se torna particularmente importante quando o problema de pesquisa requer dados muito dispersos pelo espaço. (GIL, 2008 p. 50)

Nesta pesquisa será elaborado um questionário direcionado aos professores, contendo questões objetivas e descritivas, tal questionário será entregue impresso em mãos dos professores que serão convidados para participar da pesquisa, todos os professores do ensino médio, das escolas escolhidas, têm a liberdade de aceitar ou não participar da mesma, ou seja, é facultativa sua participação.

Esse questionário tem o intuito de coletar dados que serão comentados pelo pesquisador a fim de desvendar a visão dos professores de matemática do Ensino Médio, de alguns municípios do Oeste do Paraná, sobre a importância do ensino dos Números Complexos no Ensino Médio. Um questionário pode ser definido segundo Gil (2008) como uma técnica de investigação, que contém um conjunto de questões com o propósito de se obter certas informações sobre determinado assunto pesquisado em uma determinada amostra, além disso:

> As respostas a essas questões é que irão proporcionar os dados requeridos para descrever as características da população pesquisada ou testar as hipóteses que foram construídas durante o planejamento da pesquisa. Assim, a construção de um questionário precisa ser reconhecida como um procedimento técnico cuja elaboração requer uma série de cuidados, tais como: constatação de sua eficácia para verificação dos objetivos; determinação da forma e do conteúdo das questões; quantidade e ordenação das questões; construção das alternativas; apresentação do questionário e pré-teste do questionário. (GIL, 2008 p. 121)

Através desse questionário, buscamos interpretar as opiniões dos professores, pois no questionário envolvemos situações que são de seu cotidiano, e através dessa coleta de dados, buscamos obter respostas que posteriormente possam ser aplicadas na comunidade escolar.

Segundo Marconi e Lakatos (2003, p.201) “[...] questionário é um instrumento de coleta de dados, constituído por uma série ordenada de perguntas, que devem ser respondidas por escrito e sem a presença do entrevistador”. Apontam ainda, que o questionário deve ser atraente, de fácil preenchimento, para que possamos ter êxito na devolução, e que, junto ao questionário deve ser anexada uma nota ou carta explicando a natureza da pesquisa.

No momento em que o pesquisador entrega o questionário para o convidado, também entregará uma nota em que constará o TCLE (Termo de Consentimento Livre e Esclarecido), que será assinado pelo convidado e pelo pesquisador, garantindo assim todas as suas informações e integridades na pesquisa.

O questionário foi constituído por questões de fácil interpretação, pois almejamos uma quantidade de participante que se seja igual à amostra desejada, de 15 professores do ensino médio, pois queremos que todos participem e transmitam suas sugestões e visões sobre o tema colocado em questão. Além disso, queremos que a participação do docente seja confortável, não trazendo nenhum desconforto ou constrangimento ao mesmo.

Para a elaboração de um questionário o pesquisador deve conhecer bem o assunto, pois segundo Marconi e Lakatos (2003, p.202), "[...] requer a observância de normas, a fim de aumentar sua eficácia e validade. Em sua organização, devem-se levar em conta os tipos, os grupos de perguntas, a formulação das mesmas[...]".

O questionário como técnica de coleta de dados pode trazer vantagens para a pesquisa, como afirmam Marconi e Lakatos (2003):

- Atinge maior número de pessoas simultaneamente.
- Abrange uma área geográfica mais ampla.
- Economiza pessoal, tanto em adestramento quanto em trabalho de campo.
- Obtém respostas mais rápidas e mais precisas.
- Há menos risco de distorção, pela não influência do pesquisador.

Na construção de um questionário, podemos ter alguns tipos de perguntas, como perguntas abertas, que por sua vez, são as que permitem que o pesquisado possa responder livremente, através de uma linguagem própria, possibilitando uma investigação mais rigorosa e precisa. Já nas perguntas fechadas ou dicotômicas, temos alternativas fixas que de certa forma restringe a liberdades de resposta, porém são mais objetivas.

O questionário que aplicaremos, de certa forma tem uma mescla de questões, tanto objetivas, abertas e de múltipla escolha, pois oferecendo o mesmo dessa forma não implica ao pesquisado um questionário cansativo, pois terá diferentes formas de responder.

Com relação às questões de múltipla escolha, segundo Marconi e Lakatos (2003, p.206), "[...] são perguntas fechadas, mas que apresentam uma grande série de possíveis respostas, englobando várias partes do mesmo assunto".

As questões contidas no questionário seguem três veios. São eles:

I – A formação do professor e sua experiência profissional (questões: 1, 2, 3, 5).

Nesse primeiro momento queremos deixar esclarecido quanto:

- A formação do docente, com relação ao nível de sua graduação;
- Sua experiência profissional com alunos do ensino médio;
- Nível de aprofundamento do conhecimento no período acadêmico.

II – Metodologia de ensino do professor e o conjunto dos Números Complexos (questões: 4, 6, 8, 9 e 11).

Já no segundo momento queremos responder o propósito da pesquisa:

- A visão do professor com relação ao ensino dos Números Complexos para os alunos do ensino médio,
- Metodologia aplicada pelos docentes em sala de aula;
- Importância do conjunto Complexo para o educando.

III – Nível de interesse e aprendizado dos alunos (questões: 7 e 10).

Buscamos saber o posicionamento do professor com relação ao interesse e o aprendizado do educando.

5.2 O QUESTIONÁRIO

Logo abaixo serão apresentadas as questões do referido questionário que será aplicado para os professores do ensino médio das cidades de Céu Azul, Matelândia e Medianeira, cidades localizadas no Oeste do Estado do Paraná. Para cada questão faremos uma breve observação sobre os aspectos pesquisados.

Questão1: Qual sua maior titulação?

( ) Graduação

( ) Especialização

( ) Mestrado

( ) Doutorado

( ) Outro[20]____________________

[20] Por se tratar de uma pesquisa realizada no Estado do Paraná, essa alternativa "outro", está relacionada à formação de professores chamada PDE, titulação essa criada pelo sistema do Paraná.

Questão 2: Em que ano obteve sua maior titulação?____________________

Nas duas primeiras questões nosso objetivo foi focar apenas na maior titulação do pesquisado, para obtermos seu mais alto nível de estudos, não nos detemos em saber quais foram suas titulações, pois nosso interesse está na maior formação do professor que participará da pesquisa.

Questão 3: Quanto tempo atua no Ensino Médio?

( ) Menos de 1 ano

( ) entre 1 e 4 anos

( ) entre 4 e 8 anos

( ) acima de 8 anos

Nessa questão analisamos o quanto o profissional de matemática trabalhou com turmas de ensino médio.

Questão 4: Para o preparo de suas aulas, quais os recursos citados abaixo você utiliza?

( ) Livros didáticos.

( ) Revistas de matemática.

( ) Jornais.

( ) Internet (sites, revistas digitais, etc.)

( ) Outros:____

O interesse nessa questão é saber qual a maneira e quais recursos o docente busca para preparar suas aulas, para que possa repassar o contexto dos números complexos de uma maneira clara e objetiva, nas alternativas temos a opção de revistas de matemática, que podem ser encontradas em alguns colégios, pois os mesmos possuem assinaturas dessas revistas, como a revista da SBM.

Questão 5: Quando fez sua graduação, qual o nível de aprofundamento sobre o conjunto dos números complexos teve?

( ) Superficial

( ) Mediano

( ) Aprofundado

( ) Não estudei números complexos na graduação

Ao responder essa questão o professor do ensino médio mostrará qual foi a base oferecida em sua graduação sobre os números complexos.

Questão 6: Como docente da disciplina de matemática, qual sua visão na importância do estudo dos números complexos no Ensino Médio?

( ) Pouco importante

( ) Importante

( ) Importantíssimo

( ) Não costumo passar para os alunos esse conteúdo.

Nessa questão buscamos saber junto aos professores de matemática suas opiniões sobre a importância do ensino do conjunto dos complexos no ensino médio, pergunta que tem posição central no questionário, pois é nosso maior interesse de estudo.

Questão 7: Na visão de docente da disciplina de matemática, os alunos teriam algum prejuízo, caso não tenham recebido essas informações sobre o conjunto dos números complexos?

( ) sim

Justifique:____

____

____

( ) não

Justifique:____

____

____

Nessa questão o professor de matemática do ensino médio esclarecerá através de justificativas, se caso não for repassado o conteúdo dos Números Complexos para o aluno de ensino médio, implicará ou não em algum prejuízo, tanto para a vida acadêmica, vida social e vida cultural do educando.

Questão 8: Qual sua metodologia de ensino para o conjunto dos números complexos? Caso você aplique o assunto para seus alunos.

____

____

Buscamos saber de qual forma é introduzido o conteúdo de Números Complexos para os alunos do ensino médio, ou seja, de que maneira o professor repassa esse conteúdo para seus alunos.

Questão 9 : Sabendo que o conteúdo dos números complexos está contido nas Diretrizes Curriculares e também aparece em seu Plano de Trabalho Docente, qual sua opinião em saber que o mesmo não está contido na grade de conteúdos do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), sabendo que atualmente é a principal porta de entrada para universidades Federais e Estaduais?

Procuramos saber com essa questão, a opinião dos professores pesquisados, se é necessário o repasse de conteúdo para os alunos, caso o mesmo não esteja na grade de conteúdos do ENEM, pois se encontra na parte flexível do currículo de ensino. Contudo sabemos que o objetivo do ensino médio, não é ensinar apenas para o ingresso no ensino superior com o auxílio do ENEM, ou vestibular, mas sim para formar pessoas para a sociedade.

Questão 10: Como você, docente da disciplina de matemática do ensino médio, observa e analisa o interesse dos educandos com relação ao aprendizado do conteúdo de números complexos?

( ) Baixo

( ) Razoável

( ) Alto

( ) Não estão preocupados em aprender

Essa questão demostrará, na visão dos professores do ensino médio, de uma maneira geral, como os alunos estão absorvendo o conteúdo de Números Complexos.

Questão 11: Em sua visão, a quantidade de aulas destinadas a 3ª série do ensino médio é suficiente para conseguir vencer os conteúdos propostos no cronograma, principalmente o do conjunto dos números complexos?

____

____

____

____

____

Espera-se com essa questão saber a opinião do professor sobre o número de aulas destinadas a 3ª série do Ensino Médio, se são o suficiente ou não para que possam repassar todos os conteúdos que constam na proposta de sua escola.

Na parte que finaliza o questionário há um espaço direcionado ao professor que, caso queira, deixar algum comentário ou sugestão que julgue importante no conjunto dos Números Complexos.

6 COLETA E ANÁLISE DE DADOS

Essa pesquisa é constituída por um questionário que foi aplicado aos professores de Matemática do ensino médio da rede estadual de ensino em alguns Municípios do Oeste do Paraná, pois como atuante na rede estadual de ensino, tivemos uma facilidade maior em conversar com os colegas da disciplina de matemática para que os mesmos participassem da pesquisa. Tal questionário é composto por questões objetivas, abertas e de múltipla escolha, sua formulação foi elaborada de forma a deixar o pesquisado confortável, não sendo cansativo seu preenchimento, pois tentamos alcançar a amostra desejada de 15 participantes.

No questionário encontramos três eixos de perguntas, o primeiro eixo está relacionado à formação e a experiência profissional do docente, o segundo eixo busca relatar a metodologia de ensino do docente e a importância do conjunto dos Números Complexos para a formação do educando, e no terceiro e último eixo, buscamos relatar o interesse e o nível de aprendizado do aluno.

O questionário foi entregue e respondido pelos professores no mês de junho de 2017, todos tiveram um tempo hábil estipulado pelo pesquisador, que os recolheu com os diretores dos colégios. A pesquisa incluiu um público de treze professores, quase alcançando a amostra desejada, que lecionam Matemática com vínculo com a Secretaria do Estado da Educação (SEED).

A análise dos questionários, aplicados na pesquisa, foi realizada através de uma leitura geral do material coletado e de forma aleatória, foram denominados P1, P2,...,P13, para manter a integridade e não causar nenhum desconforto. Os questionários foram classificados por meio de semelhança de respostas. Como já citado, o questionário foi dividido em três eixos, primeiramente buscamos a formação e experiência do docente, depois, sua metodologia e visão sobre a importância do conteúdo dos Números Complexos para os discentes, por fim buscamos saber dos docentes pesquisados o interesse e aprendizado dos alunos.

Ao analisar o eixo de formação dos docentes, observamos que um dos professores pesquisados não tem graduação em matemática, fato relatado no questionário pelo docente, o nomeamos de P13, logo os demais possuem graduação em matemática. Em seguida fomos à busca da maior titulação dos docentes, que corresponde a primeira e a segunda questão do questionário, para sabermos como estão as formações dos professores.

Na primeira questão encontramos as seguintes respostas:

- Com apenas graduação o professor P4;

- Com especialização temos os docentes P1, P2, P3, P5, P6, P7, P8, P9, P11, P12 e P13;

- Com mestrado apenas o professor P10.

- Com doutorado não obtivemos nenhum professor;

- Com PDE[21], titulação oferecida pelo sistema do Paraná, o professor P2;

- Com uma formação em Administração de Empresas temos o professor P13;

Na segunda questão, que busca saber o ano em que o pesquisado obteve a maior titulação, encontramos as seguintes respostas:

- P1 e P6 concluíram no ano de 2015;

- P2 concluiu sua especialização em 2006 e seu PDE em 2014;

- P3 concluiu no ano de 2010;

- P4 concluiu no ano de 1984;

- P5 concluiu no ano de 2000;

- P7 e P11 concluíram no ano de 2011;

- P8 concluiu no ano de 2001;

- P9 concluiu no ano de 2009;

- P10 concluiu no ano de 2005;

- P12 concluiu no ano de 2012;

- P13 não relatou a data da conclusão de sua maior titulação.

No fechamento dessa parte da pesquisa relacionada à titulação, onde o professor procura melhorar sua formação, relatamos que a maioria se preocupou em fazer especializações, apenas uma pequena minoria não se especializou e também poucos concluíram o mestrado e nenhum pesquisado tem doutorado.

Segundo SOUZA (2007, p.42), “A formação continuada de professores é necessária para que os docentes construam uma preparação profissional para ler o

[21] PDE – Programa de Desenvolvimento Educacional é uma política pública de Estado regulamentado pela Lei Complementar nº 130, de 14 de julho de 2010 que estabelece o diálogo entre professores de ensino superior e os da educação básica, através de atividades teórico-práticas orientadas, tendo como resultado a produção de conhecimento e mudanças qualitativas na prática escolar da escola pública paranaense.

mundo, junto com os outros e principalmente com seus alunos”. Já Kuenzer (2011) traz o seguinte relato sobre a formação dos professores:

> [...] formação de professores permanece nos limites da lógica da reprodução capitalista, sem a necessária compreensão do seu caráter ideológico; a consequência mais imediata desta compreensão parcial é a crença de que, com um bom percurso formativo, inevitavelmente teremos bons professores (KUENZER, 2011, p.676).

Ao observar a terceira questão do questionário que diz respeito ao tempo de atuação em sala de aula do ensino médio, verificamos que as respostas dos docentes sofreram algumas variações, que através de uma pergunta fechada obtivemos os seguintes resultados:

- Não obtivemos respostas dos entrevistados que possuem menos de 01 ano de atuação no ensino médio;

- Entre 01 ano e 04 anos de atuação no ensino médio, os professores: P1 e P6;

- Entre 04 anos e 08 anos de atuação no ensino médio, os professores: P2, P3, P7 e P8;

- Acima de 08 anos de atuação no ensino médio, os professores: P4, P5, P9, P10, P11, P12 e P13.

Na experiência profissional dois professores possuem tempo lecionado no ensino médio entre 01 a 04 anos, quatro professores com experiência de ensino médio entre 04 a 08 anos e sete professores com experiência de mais de 08 anos no ensino médio, de maneira geral, os docentes são experientes em se tratando de ensino médio.

A experiência profissional do professor, estrutura ao longo do processo de construção de seu percurso profissional que expressa o saber de seu ofício, em razão daquilo que acontece no espaço escolar onde atua. Saberes esses produzidos pelo seu cotidiano docente, num processo permanente sobre sua prática (LOPES, 2010). Ainda de acordo com Lopes (2010):

> [...] prática pedagógica, faz-se necessária a compreensão de que não há uma prática sem teoria, nem o contrário, teoria sem prática, teoria sem conhecimento, visto que, para se conhecer algo, é necessário ter havido a prática de uma experiência anterior. É nesse sentido que há uma teoria pedagógica e uma prática pedagógica que são resultantes não só do acúmulo de experiências como também do campo perceptivo das

> interrelações que o professor vai acessando e das ações de estudo e de pesquisa que vai realizando (LOPES, 2010, p.02).

Ao adentrarmos no contexto sobre a preparação das aulas, que se referem à questão quatro do questionário, os mesmos tiveram que responder uma pergunta de múltipla escolha, sobre quais recursos didáticos utilizam para prepararem suas aulas. Todos os pesquisados de P1 a P13, escolheram duas opções, sendo elas, os livros didáticos e a internet (sites, revistas digitais, etc.). Na opção de escolha sobre revistas de matemática, apenas os professores P1, P2, P5, P7, P8 e P12 marcaram essa alternativa como uma opção para o auxílio no preparo de suas aulas. Entre as opções de escolha para o auxílio na preparação das aulas, a pesquisa em jornais também estava presente, nesse caso os professores que utilizam essa ferramenta são os docentes P2, P5 e P8.

Para o conforto dos pesquisados, foi deixada uma opção para colocarem alguma maneira diferente de pesquisa para prepararem suas aulas, apenas os professores P10 e P13 deixaram suas contribuições de alternativas para o preparo de suas aulas, sendo que, o docente P10, utiliza faturas de água e luz, tabloides, etc., o docente P13, utiliza uma coletânea de apostilas de autores variados, que o auxilia no preparo de suas aulas, o entrevistado P12 marcou também essa opção, porém acrescentou nada para contribuir.

Vimos que todos os docentes pesquisados utilizam de formas variadas de pesquisas para organizarem suas aulas, isso apresenta um reflexo positivo para o repasse de conteúdos, no qual possibilita o docente em diversificar suas técnicas expositoras nesse repasse, fazendo com que tenha um aumento na capacidade cognitiva, deixando-o confiante em suas aulas, projetando um ensino de qualidade para os educandos.

De acordo com Moreira (2014):

> [...] para ensinar, o professor precisa planejar, orientar e controlar a aprendizagem do aluno. As estratégias de ensino a que os profissionais recorrem devem estimular diversas capacidades do aprendiz como, por exemplo: a observação, a liderança, a teorização e a síntese (MOREIRA, 2014, p.20).

Para intensificar a qualidade de ensino, Almeida (2004) *apud* Cortela (2000), afirma que para alcançar a qualidade social na educação, é preciso uma base sólida, capaz de oferecer uma formação crítica de cidadania desenvolvendo a solidariedade de classe social. Almeida (2004) ainda relata:

> [...] professor capaz de desenvolver uma nova forma de relacionamento com seus alunos, preparando-os para entrar em contato com o mundo do conhecimento, de modo a apropriar-se dele, articulando as novas aprendizagens com as anteriores, e a tornar-se um produtor de conhecimentos numa perspectiva interdisciplinar. Uma outra dimensão, também muito valorizada da prática docente, é a capacidade do professor empenhar-se na formação de seus alunos para a democracia, o que requer disposição para uma convivência com eles enquanto pessoas e enquanto cidadãos, contribuindo para que tenham uma melhor inserção em nosso mundo (ALMEIDA, 2004, p.171)

Na questão cinco do questionário buscamos investigar o nível de aprofundamento sobre o conjunto dos Números Complexos que cada docente pesquisado obteve em sua graduação. Pergunta essa que possibilita ao pesquisado escolher entre quatro alternativas, sendo: Superficial, Mediano, Aprofundado ou simplesmente não estudou em sua graduação.

Novamente buscamos fazer o agrupamento de respostas, para facilitar a coleta de dados. Encontramos apenas três docentes que em sua graduação estudou superficialmente o conjunto dos complexos, são os docentes P6, P8 e P9. Com oito docentes, indicando a maior parte dos pesquisados, obtivemos um nível mediano de aprofundamento no conjunto dos números complexos, então os docentes P1, P2, P3, P4, P5, P10, P11 e P12 estudaram de forma mediana o conjunto. Apenas o docente P7 estudou de maneira aprofundada o conjunto e o docente P13, não estudou, por ter graduação em Administração de Empresas.

Aparenta que os cursos de graduação não estão dando muita ênfase no conjunto dos Números Complexos, percebemos que apenas um dos pesquisados estudou aprofundado a base do tema proposto em nossa pesquisa, estão deixando os profissionais saírem das graduações com uma base mediana de absorção nos contextos repassados.

De acordo com Brasil (2007), o conjunto dos Números Complexos encontra-se na parte flexível do currículo, de certa forma o aprofundamento do conteúdo dos Números Complexos será conforme a necessidade do curso superior, pois o mesmo não está presente em nosso cotidiano, no qual pode apresentar-se de forma indireta em nosso meio (LIMA, 1991).

Adentrando no segundo eixo que trata da metodologia de ensino do docente e a importância do conjunto dos Números Complexos para a formação do educando, na questão seis de nossa pesquisa em que a questão é a base, ou seja, é a questão que nos levou a fazer esse trabalho.

Observamos que quatro professores (P8, P9, P12 e P13) acham pouco importante esse conteúdo para o ensino médio. Por outro lado, seis professores (P2, P5, P6, P7, P10 e P11) acham importante esse conteúdo para aplicar no ensino médio. Apenas em dois questionários (P1 e P4) encontramos que os docentes acreditam ser importantíssimo para os alunos esse conteúdo do conjunto dos complexos. E temos os docentes P2 e P3 que não costumam passar o conteúdo dos complexos para os educandos, embora P2 acha importante.

Essa questão direciona as opiniões dos docentes com relação à importância da aplicação dos Complexos no ensino médio, vemos que a grande maioria concorda que esse conjunto é importante para a vida do educando.

O conteúdo dos Números Complexos não está apenas relacionado à parte de resolução de atividades, temos com os mesmos uma parte histórica e cultural, pois fazem parte da evolução dos conjuntos numéricos, que de certa forma convém seu estudo para que o aluno tenha um contato para participar dessa cultura que a matemática lhe proporciona. De acordo com D'Ambrósio (2005):

> [...] cultura é identificada pelos seus sistemas de explicações, filosofias, teorias, e ações e pelos comportamentos cotidianos. Tudo isso se apoia em processos de comunicação, de representações, de classificação, de comparação, de quantificação, de contagem, de medição, de inferências. Esses processos se dão de maneiras diferentes nas diversas culturas e se transformam ao longo do tempo. Eles sempre revelam as influências do meio e se organizam com uma lógica interna, se codificam e se formalizam. Assim nasce o conhecimento (D'AMBRÓSIO, 2005, p.101)

O ensino de Números Complexos para os alunos do ensino médio faz com que os mesmos adquiram o conhecimento científico, contudo, participam de uma cultura que a humanidade adquiriu através dos tempos. Esse conhecimento é necessário, pois faz parte do papel da escola transmitir conhecimentos aos alunos. Assim D'AMBRÓSIO (2005, p.103) relata que "As disciplinas dão origem a métodos específicos para conhecer objetos de estudo bem definidos. Os métodos e os resultados assim obtidos, que se referem a questionamentos claramente identificados, constituem um corpo nomeado de conhecimento".

De acordo com NETO (2013, p.07), “[...] a utilização dos números complexos no ensino médio visa ajudar a reverter o processo de fracasso na aprendizagem, de modo que o aluno supere a visão fragmentada da Matemática. O que justifica sua manutenção e o valida como conteúdo que interliga saberes”.

A questão sete busca revelar na visão do docente, se os alunos do ensino médio teriam algum prejuízo, caso não recebessem as informações sobre o conjunto dos Números Complexos. Dentre os treze docentes pesquisados, obtivemos nove (P1, P2, P4, P5, P6, P7, P8, P10, P11) que concordaram que os alunos teriam algum prejuízo em não receber o conteúdo, enquanto quatro (P3, P9, P12, P13) docentes disseram que os educandos não teriam algum prejuízo caso deixassem de receber esse conteúdo.

Prejuízo este que pode estar relacionado ao meio cultural e histórico da matemática, o educando pode deixar de aprender uma parte da história dos conjuntos numéricos, também pode deixar de carregar o conhecimento científico relacionado a esse conjunto numérico. Segundo Libâneo (2011):

> O ensino é meio pelo qual os alunos se apropriam das capacidades humanas formadas historicamente e objetivadas na cultura material e espiritual. (Essa apropriação se dá pela aprendizagem de conteúdos, habilidades, atitudes, formadas pela humanidade ao longo da história (LIBÂNEO, 2011, p.03)

Nessa questão, cada docente deixou sua contribuição na justificativa de sua escolha. Primeiramente citaremos as justificativas dos docentes que concordaram que há algum prejuízo em não receber esse conteúdo.

P1 Os alunos atualmente estudam os números até chegarem ao conjunto dos Reais, ou seja, sabem que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ deixando de fora os $\mathbb{C}$. E os Números Complexos são importantes para a resolução de equações do 2º grau em que $\Delta < 0$ ($x^2 + 4 = 0$). Mas Raffaeli Bombeli falou sobre raízes quadradas de números negativos, foi “onde” surgiu o conjunto dos números Complexos. (S.I.C)

P2 O seu uso serve para melhor entendermos uma situação do mundo real, compreender vários acontecimentos que também se relacionam com números Reais.

P4 Criou-se os números complexos $\mathbb{C}$ para que as equações fossem sempre possíveis, auxiliando também no estudo da Geometria e Trigonometria.

P5 “Pois” os números complexos “é” o fechamento dos conjuntos como um todo e a conclusão do não existir raízes negativas no conjunto dos Reais, e também cobrança em alguns vestibulares. (S.I.C)

P6 O aluno ficará com a visão que não existe raiz negativa, e assim o mesmo não irá resolver situações problemas que envolva raiz negativa.

P7 Algumas instituições do Estado realizam vestibulares e este item é cobrado dos alunos.

P8 Creio que é bom, que os alunos consigam verificar em que situações é possível $\sqrt{-9}$, uma vez que no conjunto do números Reais.

P10 Assim como todos os objetos/conceitos matemáticos, os números complexos têm uma estrutura, regramento próprio e aplicabilidades que fazem parte de alguns campos da Ciência. Se o aluno não teve oportunidade de se apropriar de tais objetos, poderá fazer falta no ensino superior e/ou especializações.

P11 Para conhecimento de raiz quadrada negativa e consequentemente prejuízo para ingressar em uma Universidade Federal ou Estadual.

Os professores apresentados acima estão em consonância com os PCNs e também com a parte histórica da matemática, que por sua vez foi citada em uma seção de nosso trabalho, tem uma visão positiva relacionada ao ensino dos Números Complexos no ensino médio, também estão em concordância com a utilização do mesmo em outras ciências, fato esse encontrado em outra seção de nossa pesquisa.

Nesse momento citaremos as justificativas dos docentes que tiveram a visão que o educando do ensino médio não será prejudicado caso não tenha visto o conteúdo dos números complexos.

P3 Grande maioria dos alunos nem sabe que esse conjunto numérico existe e não compreenderiam onde seu uso é necessário.

P9 Faz muitos anos que não trabalho os Números Complexos. Esse conteúdo é o único que não existe contextualização.

P12 As informações sobre o conjunto dos números complexos não são relevantes para a entrada dos alunos nas universidades. Portanto minimizar esse conteúdo e dar ênfase a outros conteúdos com mais relevância do seu dia-a-dia.

P13 Temos que ser os mais claros e objetivos possível, a quantidade de aulas oferecidas de matemática no ensino médio é pouca, por isso estar atentos aos conteúdos que serão mais cobrados no ENEM e concursos, e dar mais ênfase a esses conteúdos, para dar maior oportunidade ao aluno de aprender e se sair bem (poder concorrer).

A maioria dos professores reconhece que o conteúdo do conjunto dos Números Complexos traz de uma forma ou de outra, prejuízos para o educando, pois o conjunto é sequência dos demais conjuntos, uma complementação do conjunto dos Reais, pois certas respostas como raízes quadradas de números negativos, não são obtidas nesse conjunto. Consequentemente o educando ficaria em déficit de conteúdos, acarretando um agravo em seus estudos posteriores ao ensino médio.

Já a menor parte dos docentes que obtiveram a conclusão que não traria prejuízo algum aos discentes, entendeu que outros conteúdos são mais relevantes que os Números Complexos, pois os alunos não utilizam em seu cotidiano, focando em conteúdos para o dia-a-dia e também para ENEM e concursos. Até mesmo alguns docentes pararam de trabalhar esse conteúdo, pois não acham necessário para o ensino médio.

Se afirmarmos que certos conteúdos não são interessantes para os alunos, sem termos analisado detalhadamente, empobrecemos a gama de possibilidades e de representações matemáticas no ensino aprendizagem (NETO, 2013).

Ao investigar a questão oito que tem como foco relatar a metodologia de ensino do conjunto dos Números Complexos pelos docentes pesquisados, caso os mesmos apliquem esse conteúdo em sala de aula, encontramos as seguintes situações:

P1 Sempre que possível ao explicar equação do 2º grau e o $\Delta < 0$, digo que há solução de raiz quadrada de número negativo, porém seus livros didáticos não possuem esse tópico.

P2 Não aplico esse conteúdo (assunto) para os alunos, assim como outros tão importantes quanto esse, não são trabalhados, pois a carga horária destinada a nossa disciplina é insuficiente para contemplar números complexos e outros conteúdos.

O entrevistado P3 não comentou nada, pois na questão sete relatou que os discentes não teriam prejuízo algum caso o conteúdo não fosse visto.

P4 Pesquisa sobre os números complexos, discussão do assunto, expor os itens principais, qual o beneficio e suas aplicações.

P5 Apresentação do conjunto, explicação teórica e resolução de atividades com correção no quadro e conclusões coletivas.

P6 Retomo o conteúdo de equações do 2º grau, analisando as raízes negativas e complementando com a história do surgimento dos números complexos, o porquê da sua necessidade.

P7 Explanação sobre o assunto, destacando a origem histórica deste conjunto numérico, exemplos das operações na forma algébrica e exercícios.

O entrevistado P8 comentou que só atua no 1º série do ensino médio.

P9 Geralmente é a título de informação, eles têm curiosidade quando às raízes com índices pares e radicando negativo, pois no conjunto dos reais essa operação não teria solução.

P10 Quando consigo trabalhar esse conteúdo, sigo a estrutura do livro didático.

P11 Começo explicando a raiz quadrada negativa que não podemos resolver nos números $\mathbb{Z}$, chegando à parte real e a parte imaginária que define o número complexo, após as operações e o plano de *Argand-Gauss* para entender melhor o número.

P12 Para iniciar eu retomo as equações do 2º grau parar “iniciar” o assunto. (S.I.C)

P13 Eu começo falando que é um número imaginário, que faz existir o que não existe, “no” caso “de” uma raiz quadrada der um número negativo, a partir daí, fala-se da forma algébrica, conjugado, operações, etc., dando atividades após uma explicação com exemplos. (S.I.C)

De maneira geral os professores começam as explicações com a parte histórica, apresentam a indeterminação no conjunto dos números Reais, uma raiz de índice par cujo radicando é negativo, expõe que existe um novo conjunto numérico que satisfaça essa indeterminação, conjunto este, chamado de conjunto dos Números Complexos, que traz como símbolo representativo $\mathbb{C}$.

O primeiro contato que o educando tem com essa indeterminação acontece no 8º ano do ensino fundamental II, depois se deparam no 9º ano do ensino fundamental II com a resolução de equações do 2º grau, oportunidade que os docentes têm para fazer a introdução do conjunto Complexo, através da retomada de conteúdos na 3ª série do ensino médio. Relatam a parte imaginária ao aluno, de modo a esclarecer a indeterminação encontrada no ensino fundamental II, consecutivamente apresentam os demais contextos sobre o novo conjunto.

Alguns entrevistados não apresentam esse conteúdo aos educandos, por falta de tempo, apontando que a carga horária de matemática é insuficiente para vencer todos os conteúdos propostos, outros referem que precisam selecionar os conteúdos, acreditam que esse é menos importante que os demais. E outra parte não trabalha o conteúdo em sala pois não considera necessário.

Na questão nove, indagamos ao professor pesquisado da seguinte maneira: Sabendo que o conteúdo dos Números Complexos está contido nas Diretrizes Curriculares e também aparece em seu Plano de Trabalho Docente, qual sua opinião em saber que o mesmo não está contido na grade de conteúdos do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), sabendo que atualmente é a principal porta de entrada para universidades Federais e Estaduais?

O pesquisado P1 não apresentou sua opinião a respeito do tema referido na questão nove.

P2 É lamentável que por decisões governamentais alguns conteúdos como números complexos não entram na grade, bem como, é lamentável a forma como decisões e mudanças na educação vêm sendo tomadas.

P3 Tenho a impressão que o Ensino Médio futuramente será apenas a matemática básica (básica mesmo), o que não vai acompanhar o ensino nas universidades federais, havendo muitas reprovações em disciplinas exatas nas universidades.

P4 É considerado um conteúdo isolado, o qual deveria ser trabalhado no fundamental e dar sequência no Ensino Médio para aplicar de forma geral e generalizar além do vestibular no ENEM devido à visão que esse conteúdo nos dá.

P5 Falta de coerência entre as mantenedoras da educação do país.

P6 Realmente eu vejo a aplicação de questões envolvendo os números complexos somente em vestibulares. Como o ENEM é do ensino médio, e o conteúdo estudado no mesmo, deve ser cobrado no ENEM.

P7 Entendo que deve ser trabalhado e discutido o assunto, mesmo que não esteja na grade do ENEM, pois não devemos preparar nosso aluno para este exame diretamente e sem uma formação ampla.

P8 Do meu ponto de vista não é fundamental para o Ensino Médio.

P9 Quando tenho tempo, gosto de mostrar que existe um novo conjunto e que esse conjunto é chamado de “conjunto dos números complexos”.

P10 Não vejo grandes problemas no fato do ENEM não abordar questões envolvendo números complexos. O grande problema, na minha compreensão, é o número reduzido de aulas de matemática no Ensino Médio.

P11Isso está errado, a grade deveria ser igual para todos: ENEM e universidades, pois o aluno que presta o exame do ENEM é o mesmo que faz o vestibular para a entrada nas universidades, terá que estudar do mesmo jeito.

P12 Que é uma incompatibilidade no que temos que ensinar e nos conteúdos que são importantes.

P13 É lamentável, porque ele precisa entrar numa universidade e no caso dos nossos alunos da rede pública, muitos precisam passar numa universidade pública também, por isso devemos ter consciência do que estou priorizando (matéria) em minhas aulas, se estou favorecendo o futuro estudantil do meu aluno ou não.

Ao analisar os comentários dos docentes pesquisados, encontramos diversificadas opiniões, uma delas relatada por P2 e P5, que discorrem sobre o problema na parte de quem rege as leis educacionais, apresentam certa incoerência no sistema. Para P1, P8 e P12, P1 não discorreu nada de sua opinião, já P8 e P12 acreditam que o assunto não é fundamental para o ensino médio.

De imediato temos as opiniões de P4, P6, P7, P11 e P13, que de maneira generalizada, acreditam que mesmo o conteúdo não estando na grade do ENEM, deve ser passado aos educandos, pois os mesmos irão utilizá-lo ao prestar vestibulares para ingressarem em universidades, também relatam que o ensino não deve ser focado apenas no ENEM, mas para que o educando tenha uma visão mais ampla de vida. Nesse grupo de pesquisados, alguns concordam que o conteúdo de complexos deve sim estar na grade do ENEM, em razão de que o mesmo educando que presta o vestibular, também fará o ENEM.

Por outo lado P10, descreve que o problema não é pelo conteúdo estar na grade e sim o número reduzido de aulas, acarretando o atraso da abordagem dos conteúdos, P3 acredita que futuramente o ensino médio será apenas para um repasse da matemática básica, projetando um aluno com muita deficiência na parte de exatas na universidade, por fim P9 alega que se sobrar tempo ensinará o conteúdo.

No terceiro eixo da pesquisa, buscamos relatar o interesse e o nível de aprendizado do aluno, que na questão dez do nosso questionário coletamos as observações e análises de cada professor pesquisado sobre o interesse do aluno em aprender o conjunto dos Números Complexos.

O intuito dessa questão se direciona ao conjunto dos educandos, pois dificilmente conseguimos saber o interesse de cada discente refletida no professor, então para deixar mais transparente o objetivo dessa questão, nos detemos no geral de cada turma. Logo as alternativas encontradas na questão relacionam a turma que o docente trabalha, no qual essa questão foi dividida em quatro alternativas, que determina os níveis de interesse por parte dos educandos em: baixo, razoável, alto ou o educando não está preocupado em aprender.

Ao verificar os questionários obtivemos dos professores P1, P6, P8 e P10, uma análise de que os educandos estão com um baixo interesse em aprender o conteúdo dos Números Complexos, para os professores P4, P5, P7, P9, P11, P12 e P13, o nível de interesse dos alunos é razoável. Nenhum dos pesquisados respondeu que os alunos têm um alto nível de interesse em aprender esse conteúdo. Para o professor P3, os alunos não estão preocupados em aprender o conteúdo proposto, o professor P2 não respondeu esta questão.

De maneira geral, percebemos nas respostas dos pesquisados, que os educandos estão com um nível razoável de interesse, mas percebemos de alguns professores que os educandos estão com baixo índice de interesse em aprender, até mesmo nenhum interesse. Por não aparecer em nenhum questionário que os estudantes estão com alto nível de interesse, houve um surgimento de certa indagação, por qual motivo isso está acontecendo? Pergunta essa que pode ser destinada a um novo trabalho de pesquisa.

Em sua visão, a quantidades de aulas destinadas a 3ª série do ensino médio é suficiente para conseguir vencer os conteúdos propostos no cronograma, principalmente o do conjunto dos Números Complexos? Questão onze do questionário, que tem por interesse saber dos docentes, se os mesmos estão satisfeitos com o número de aulas destinadas a 3ª série do ensino médio. Apresentaremos a opinião de cada docente.

P1 Não é suficiente a quantidade de aulas, e como muitas vezes tem feriados, recessos, paralisações e greves, nem sempre se é terminado o conteúdo básico.

Deveria ter mais aulas na 3ª série e estudar além dos Números Complexos outros tópicos que se exclui do PTD[22].

P2 Não é o suficiente tanto na 3ª série do ensino médio como nas demais séries 1ª e 2ª.

P3 Não. Os conteúdos que são propostos para a 3ª série são muitos, e como professor, tenho que escolher entre vencer o conteúdo e os alunos aprenderem superficialmente ou passar o conteúdo que os alunos mais podem encontrar no dia-a-dia.

P4 Não. Mesmo simplificando os conteúdos não conseguimos trabalhar adequadamente os assuntos propostos.

P5 Não, muitas vezes pelo número pequeno de aulas alguns conteúdos são passados de maneira reduzida e com relação aos complexos básico por não fazer parte do ENEM.

P6 Depende a escola, algumas tem 04 aulas na 3ª "ano", o que é o suficiente, já outras destinam 2 ou 3 aulas. No ensino médio no geral deveria ser no mínimo 3 aulas. (S.I.C)

P7 Infelizmente não temos tempo suficiente para explorar mais este assunto e também outros, a forma trigonométrica não pode ser abordada por exemplo.

P8 O número de aulas, tanto no primeiro, como no terceiro ano, não são suficientes para que os alunos tenham domínio sobre estes e outros conteúdos do ensino médio.

P9 Depende muito da turma, não dou muita ênfase no ensino de números complexos, comento, cito conteúdo dentro da história da matemática, não como assunto de prova e nem como conteúdo do trimestre.

P10 Não. Todo ensino médio tem carga horária insuficiente para contemplar os conteúdos presentes nas Diretrizes Curriculares e/ou no Plano de Trabalho Docente.

P11 Não é o suficiente o número de aulas, pois o número complexo é um dos conteúdos que fica a desejar, pois dependendo do rendimento da turma não é possível estudar pela falta de tempo (aulas).

P12 Não, tendo em vista que geometria fica "tudo" para o 3º ano e é um conteúdo importante, as aulas não são suficiente.

---

[22] PTD ou Plano de Trabalho Docente é um documento que registra tudo o que o professor pretende dar na prática, dentro da sala de aula.

P13 De maneira alguma, deveríamos ter pelo menos umas 6 aulas semanais e ainda acho que deveriam ter aulas aos sábados para o aluno que quisesse, tirar suas dúvidas e aprofundar seus conhecimentos.

Ao averiguar as respostas dos professores, tivemos quase uma unanimidade sobre a insuficiência de aulas, também percebemos que os professores estão de certa forma insatisfeitos com a quantidade de aulas, pois não estão conseguindo vencer os conteúdos propostos, tendo que optar entre o entendimento superficial do aluno para vencer o conteúdo ou fazer com que o mesmo consiga abstrair o contexto e deixar certos conteúdos sem apresentar aos educandos.

Dois dos pesquisados tiveram uma resposta um pouco divergente dos demais, pesquisado P6 concorda se a quantidade de aula for 04 h/a semanais é possível vencer o conteúdo, sendo o suficiente, mas isso varia de colégio para colégio, pois em alguns colégios, segundo “ele”, tem apenas 02 h/a semanais, o que é pouco. O professor P9 explana que depende muito do rendimento da turma, mas conforme expõe, aplica o conteúdo superficialmente.

Ao focar em nosso objetivo de pesquisa, saber o ponto de vista do professor de matemática com relação à importância dos Números Complexos para os alunos de ensino médio, encontramos uma divergência de opiniões, alguns concordam plenamente que é de suma importância à aplicação do conjunto, pois caso contrário estaria interrompendo um ciclo de conteúdos, limitando os educandos ao conjunto de números Reais. Dessa forma deixaria os alunos sem saber o resultado de uma raiz quadrada de um número negativo, por exemplo.

Mesmo contido nas Diretrizes Curriculares e nos Planos de Trabalhos Docentes, alguns professores não encontram importância em ensinar esse conjunto numérico no ensino médio, no qual deixam os educandos sem ter no mínimo a base sobre Complexos e sem ter um contato com a parte histórica e cultural que a matemática oferece. Focam em conteúdos do cotidiano, dão prioridades a conteúdos que estão na grade do ENEM, desta forma o educando não encontrará uma resposta para a dúvida que surgiu no ensino fundamental na parte de radiciação de números Inteiros, raiz com radicando negativo e índice par.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O conjunto dos Números Complexos teve processo histórico desenvolvido graças ao empenho de grandes matemáticos, que por sua vez proporcionaram benefícios para a matemática, principalmente na resolução das equações, mas não apenas nas equações, seus conceitos podem ser aplicados em diversos ramos da matemática assim como em algumas ciências, não deixando de considerar sua importância histórico/cultural.

Contudo ao pesquisarmos os documentos que direcionam os conteúdos da escola Pública do Paraná, observamos que os Números Complexos estão contidos na grade de conteúdos, mas entra na parte flexível o currículo básico, de forma a complementar os conteúdos propostos. Também notamos que não estão presentes na grade de conteúdos do ENEM, pois o mesmo segue rigorosamente os Parâmetros Curriculares em contrapartida está na maioria das grades de conteúdos dos vestibulares de algumas universidades pesquisadas.

O conteúdo de Números Complexos aparece em alguns vestibulares, por esse motivo as escolas deveriam trabalhar o conteúdo, pois caso contrário estaria prejudicando o educando com relação à carga de conceitos necessários para o mesmo concorrer a uma vaga de universidade, mas a escola em sua função tem o papel de formar o cidadão, esse conteúdo não deve ser repassado apenas para isso, mas para que o aluno tenha além do conhecimento científico o conceito cultural. Algumas Instituições de Ensino Federais pesquisadas não oferecem problemas para o aluno com relação ao conceito de Números Complexos, pois aderiram à nota do ENEM para a seleção dos candidatos.

Na pesquisa, constatamos que a maioria dos professores desenvolveu uma formação após sua graduação, o que permite uma ampliação em suas linhas de estudos, que de certa forma pode ser convertida em benefícios aos educandos, pois o profissional necessita de uma formação continuada para que possa renovar e fortalecer os seus conhecimentos. E ainda podemos observar, todos os pesquisados têm uma significativa experiência, Lopes (2010) relata que a experiência fortalece sua prática e teoria pedagógica.

A formação do profissional é de fundamental importância, pois o mesmo terá maior facilidade em desenvolver seu papel, buscando sempre o caminho que favoreça o aprendizado. Mesmo que nosso foco não tenha sido graduação do pesquisado e sim sua maior titulação, obtivemos um pesquisado que não tem sua graduação especificamente em matemática uma vez que, outras formações permitem a atuação na área.

A pesquisa mostrou a metodologia e a visão sobre a importância dos Números Complexos, parte de grande destaque em nossa pesquisa, pois se encontra nosso objetivo, ou seja, qual visão do docente com relação ao conteúdo de Números Complexos no Ensino Médio. Notou-se que grande parte dos pesquisados concordam que é fundamental a aplicação desse conteúdo, pois agrega valores científicos, históricos e culturais aos educandos, pois segundo os PCNs, devemos formar cidadãos, para serem inseridos na sociedade, não apenas condicioná-los a resolução de testes classificatórios.

O conteúdo de Números Complexos faz parte dos documentos oficiais pesquisados, fazem parte do PCN e da DCE, porém, sua flexibilidade deixa o profissional com a liberdade de trabalhá-lo ou não com seus alunos. De certa forma alguns educandos estão perdendo com isso, pois acabam enfraquecendo sua carga de conhecimentos, tanto científicos quantos culturais. O profissional que repassa esse conteúdo consegue englobar os conceitos históricos e científicos, com o auxílio dos livros didáticos, internet e materiais de apoio.

A amostra apresentada foi de 13 pesquisados de uma parte da região Oeste da Paraná, na qual 06 participantes acham pouco importante ou não transmitem esse conteúdo aos alunos. Por se tratar de um valor alto perante a amostra apresentada, isso sinaliza uma possível exclusão futura desse conteúdo na grade de ensino, no qual o mesmo pode ser importante para algumas aplicações futuras, assim como outros conteúdos se pesquisados, poderão apresentar resultados semelhantes.

Entretanto, de maneira geral, mesmo com questões de insuficiência da carga horária ou outros fatores que desfavorecem o ensino dos Números Complexos, os resultados apontam que seu estudo no Ensino Médio é indicado como relevante pelos docentes participantes, e que, de certa forma, leva os educandos a terem uma visão diferenciada de mundo real.

Ao desenvolver a pesquisa, encontramos algumas indagações sobre o conjunto dos Números Complexos, uma delas é, será que o conteúdo deve estar no Ensino Médio, ou deveria estar no Ensino Superior em cursos direcionados a exatas? Tema esse que poderia ser iniciado em uma nova pesquisa, que de certa forma auxiliaria na construção do planejamento escolar e também nas metodologias usadas pelos professores, de modo a proporcionar uma melhora na qualidade de ensino.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. I de. **Docentes para uma educação de qualidade:** uma questão de desenvolvimento profissional. Artigo. Curitiba, n. 24, p.165 – 176, 2004. Editora UFPR. Disponível em : < http://www.scielo.br/pdf/er/n24/n24a08.pdf >. Acesso em: 21 nov. 2017.

ALMEIDA, P. F. D.; PAZOS, R. P. **Análise de aerofólios gerados pela transformação generalizada de Joukowski.** Santa Cruz do Sul. RS 2005. Disponível em: < http://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/xxx_cnmac/PDF/667.pdf >. Acesso em: 17 jul.2017.

ARAÚJO, N. B. F. **Números complexos: uma proposta de mudança metodológica para uma aprendizagem significativa no ensino médio.** 2006.111 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal 2006 Disponível em: < https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/16025/1/NanciBFA.pdf> . Acesso em: 28 jun. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação**. Matriz de referência ENEM** - Matemática. Brasília (DF), 2012. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2012/matriz_referencia_enem.pdf>. Acesso em 23 abr. 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio - Parte III**. Brasília (DF), 2000. Disponível em: <http://portal.mec. gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 23 jun. 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília (DF), 2007. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 18 jun. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Básico: Ciência da Natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília, 2008. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 15 jun. 2017.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 2001.

CAON, F. **Números complexos: Inter-relação entre conteúdos e aplicações.** 2013. 74 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Estadual de Ponta

Grossa. Ponta Grossa, 2013. Disponível em: < https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=29819 >. Acesso em :12 jun. 2017.

CAPELIN, E. T. **O ensino da lógica na educação básica: Uma pesquisa com professores sobre os conhecimentos e a aplicação da lógica da Rede Estadual de ensino em um município do sudoeste do Paraná.** 2016. 99 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – PROFMAT- Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal Tecnológica do Paraná. Pato Branco. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=95543>. Acesso em: 10 mar. 2017.

CERRI, C.; MONTEIRO, M. S. **História dos números complexos**. CAEM – Centro de Aperfeiçoamento de Ensino de Matemática. São Paulo. Set 2001 . Disponível em: < https://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf >. Acesso em: 15 jun. 2017.

COSTA, J. C. **Números complexos: Uma abordagem com ênfase em aplicações na matemática e em outras áreas.** 2016. 72 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2016. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=81411>. Acesso em: 05 abr. 2017.

D'AMBRÓSIO, U. **Sociedade, cultura, matemática e seu ensino.** Artigo. São Paulo, v.31, n.1, p. 99 – 120, jan./abr. 2005. Disponível em: < http://www.scielo.br/pdf/ep/v31n1/a08v31n1.pdf > Acesso: 19 nov. 2017.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e aplicações** - Manual do professor. v.3. São Paulo: Ática, 2010b.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, SP: UNICAMP, 2004.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008. Disponível em:< https://ayanrafael.files.wordpress.com/2011/08/gil-a-c-mc3a9todos-e-tc3a9cnicas-de-pesquisa-social.pdf>. Acesso em: 15 mai. 2017.

IFRAH, G. **História universal dos algarismos**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997, v.2. Disponível em: < https://edmatematica1.files.wordpress.com/2014/07/georges-ifrah-historia-universal-dos-algarismos-vol1-11.pdf>. Acesso em : 08 nov. 2017.

INFOESCOLA, **Geometria fractal**, 2017. Disponível em: < http://www.infoescola.com/matematica/geometria-fractal/>. Acesso em: 02 ago. 2017.

JUNIOR, U. P. **A história dos números complexos: "das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand".** 2009. 94 f.. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009. Disponível em: <http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/12%20Ulicio%20Pinto.pdf>. Acesso em: 19 mar. 2017.

KUENZER, A. Z.. **A formação de professores para o Ensino Médio: velhos problemas, novos desafios.** Artigo. Campinas, v. 32, n.116, p. 667-688, jul.-set. 2011. Disponível em: < http://cedes.unicamp.br>. Acesso em: 20 nov. 2017.

KUENZER, A. Z.. **O Ensino Médio agora é para a vida: entre o pretendido, o dito e o feito**. Educação & Sociedade, Artigo. Campinas, v. 1, p. 15-39, 2000. Disponível em:< http://www.scielo.br/pdf/es/v21n70/a03v2170.pdf>. Acesso em: 10 nov. 2017.

LIBÂNEO, J. C. **Adeus professor, adeus professora?** Novas exigências educacionais e profissão docente. São Paulo: Cortez, 1998. Disponível em: < http://musicaetic.com.br/acervo/Leitura-AdeusProfessorAdeusProfessora(LIBANEO).pdf> Acesso em: 18 nov.2017.

LIBÂNEO, J. C. **Didática e trabalho docente**: A mediação didática do professor nas aulas. Artigo. 2011. Disponível em: < http://professor.pucgoias.edu.br/SiteDocente/admin/arquivosUpload/5146/material/DID%C3%81TICA%20E%20TRABALHO%20DOCENTE%202011.doc.> Acesso em: 22 nov. 2017.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. Sociedade Brasileira de Matemática.1991. Disponível em: < http://www.ebah.com.br/content/ABAAABo-gAJ/numeros-complexos>. Acesso em: 07 nov. 2017.

LOPES, L. da S. **A construção da prática pedagógica do professor**: saberes e experiência profissional. Piauí. Artigo. 2010. Programa de Pós-Graduação em Educação UFPI. Disponível em < http://leg.ufpi.br/subsiteFiles/ppged/arquivos/files/VI.encontro.2010/GT_02_01_2010.pdf> . Acesso em : 20 nov. 2017.

MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M, **Fundamentos de metodologia científica**. São Paulo : 5 ed. Atlas 2003. Disponível em : < https://docente.ifrn.edu.br/olivianeta/disciplinas/copy_of_historia-i/historia-ii/china-e-india>. Acesso em: 19 mar. 2017.

MOREIRA, A. E. da C. **Relações entre as estratégias de ensino do professor, com as estratégias de aprendizagem e a motivação para aprender de alunos do ensino fundamental 1.** 2014. 120 f. Dissertação. Programa de Mestrado em Educação da Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2014. Disponível em: <http://www.uel.br/pos/mestredu/images/stories/downloads/dissertacoes/2014/2014_-_MOREIRA_Ana_Elisa_Costa.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2007.

NETO, R.V. **O ensino de números complexos**. Artigo. 2013. Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba, jul. 2013. Disponível em: < http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/3669_2071_ID.pdf. >. Acesso em: 22 nov. 2017.

OLIVEIRA, A.A.R.; FILHO, C.A.P.L.; RODRIGUES, C.M.C. **O processo de construção dos grupos focais na pesquisa qualitativa e suas exigências metodológicas.** Rio de Janeiro. Artigo, 2007. Disponível em: < http://www.anpad.org.br/admin/pdf/EPQ-A2615.pdf >. Acesso em: 10 mai. 2017.

OLIVEIRA, W. M. de. **Uma abordagem sobre o papel do professor no processo de ensino/aprendizagem.** Monografia. 2006 Disponível em : < https://www.inesul.edu.br/revista/arquivos/arq-idvol_28_1391209402.pdf>. Acesso em: 14 nov.2017.

PAIVA, M. **Matemática: Paiva**, v.3. 1 ed., São Paulo: Moderna, 1995.

PARANÁ. Secretaria de Estado de Educação do Paraná. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica** – Matemática. Paraná, 2008. Disponível em: <http://www.educadores. diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf>. Acesso em: 20 abr. 2017.

ROSSO, D. S. **Do *rap* aos "contos crespos", de Luiz Silva (CUTI): A voz da resistência em sala de aula.** 2016. 200 f. Dissertação (Mestrado em Letras) – PROFLETRAS – Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Letras – Nível de Mestrado Profissional. Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2016. Disponível em: < http://portalpos.unioeste.br/media/File/cristina.nicolau/cd%20Donete%20S%20Rosso%20-%20DISSERTA%C3%87%C3%82O%20DONETE%20%20%20C.pdf> Acesso em: 10 mai. 2017.

SANTOS, G. T. **Números Complexos**. Campinas. Artigo. UNICAMP. Disponível em : <http://www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/NC5.docx.pdf>. Acesso em: 19 mar. 2017.

SOUZA, J. R. **Novo olhar matemática.** v. 3, 2 ed. São Paulo: FTD, 2013.

SOUZA, R.L.L. de. **Formação continuada dos professores e professoras do município de Barueri**: compreendendo para poder atuar. 2007. 236f. Dissertação – Programa de Pós-graduação em Educação na Área de Ensino de Ciências e Matemática da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo – FE/USP. São Paulo, 2007. Disponível em: http://www2.fe.usp.br/~etnomat/teses/FormaoContinuadadeProfessores.pdf Acesso em: 20 nov.2017.

UNICENTRO - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CENTRO-OESTE DO PARANÁ. **Programa de provas – Vestibular de 2018.** 2017.p.5. Disponível em: < http://www2.unicentro.br/vestibular/files/2017/04/PROGRAMA_DAS_PROVAS_VESTIBULAR_2018_58ff54f899024.pdf?x74243 >. Acesso em: 03 jul. 2017.

UEL - UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA. **Manual do candidato** – 2016. Paraná, p. 32. Disponível em: <

http://www.cops.uel.br/v2/download.php?Acesso=YzlmNzU2YTBiMWIzYTM4MDZiM2RmN2FiYWEzZDdkMWE2N2Y1M2UzYWIzMDVlMTEwMGViM2YwYzU3ZGQ1NDVjZTMxYjNlOTg5ZDkzMjI5MmVlMjkzZDhlNTBkMjZjOTY3MzQ5YzcwMmJkNjM0ZTdiMTc4MDJiZmE5MDI3OTIyN2U2Y2JlMTM0NDVjOTM0MTRkYjg0YjE4OGE3MzcwNTI3YWUxYmE0ZDY4MzU5OTIzNDU3YTMxNDQyNjk2N2ZkYWNk>. Acesso em: 03 jul. 2017.

UEM - UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGA. **Manual do candidato** – 2016. Paraná, p. 36. Disponível em: < https://www.npd.uem.br/cvu/relatorios/manual_candidato_10.pdf >. Acesso em: 03 jul. 2017.

UNIOESTE - UNIVERSIDADE ESTADUAL DE OESTE DO PARANÁ. **Conteúdos programático das provas triênio 2018/2019/2020** – 2017. Paraná, p. 10. Disponível em: < http://www5.unioeste.br/portal/images/654/Vestibular_2018/Conte%C3%BAdo_Program%C3%A1tico.pdf >. Acesso em: 03 jul. 2017.

UNILA - UNIVERSIDADE FEDERAL DA INTEGRAÇÃO LATINO-AMERICANA. **Ingresso Brasileiros.** Disponível em: <https://www.unila.edu.br/ingresso>. Acesso em: 20 jul. 2017.

UTFPR - UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ. **Como ingressar.** Disponível em: < http://www.utfpr.edu.br>. Acesso em: 20 jul. 2017.

UFPR - UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ. **Programa de provas para o processo seletivo UFPR 2017/2018.** 2017. P.3. Disponível em: < http://www.nc.ufpr.br/concursos_institucionais/ufpr/ps2018/documentos/programa_geral_ps_2017_2018_ufpr.pdf >. Acesso em: 03 jul. 2017.

UEPG - UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA. **Manual do candidato** – 2017. Paraná, p. 27. Disponível em: < https://cps.uepg.br/vestibular/documentos/2017/2017_MANUAL_VESTIBULAR_INVERNO.pdf >. Acesso em: 03 jul. 2017.

ZANELLI, J. C. **Pesquisa qualitativa em estudos da gestão de pessoas.** Florianópolis. p. 79-88, 2002. Disponível em: < http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1413-294X2002000300009&script=sci_abstract&tlng=pt >.Acesso em : 12 maio 2017.

APÊNDICES

APÊNDICE A: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

Título da pesquisa: A importância do ensino de números complexos no ensino médio, na visão dos professores de matemática, em alguns municípios da região oeste do Paraná

Pesquisador: Juliano Portolan
Endereços: Vila Nova União, Céu Azul - PR
Telefones: (45) – 99961-9701
Local de realização da pesquisa: Colégios de alguns munícipios da região oeste do Paraná.

Endereço, telefone do local:
Colégio Estadual Monteiro Lobato, Rua Rubino Pasquetti 555, Centro – Céu Azul – PR. Telefone (45) 3266 - 1178.
Colégio Estadual Euclides da Cunha, Rua Napoleão Laureano, 578, Centro, Matelândia – PR. Telefone**:** (45) 3262-1487.
Colégio Estadual Belo Horizonte, Rua Olavo Bilac, 690, Jardim Belo Horizonte, Medianeira – PR. Telefone: (45) 3264 – 7442.
Colégio Estadual Artur da Costa e Silva, Rua Paraguai, 1545 - Centro, Medianeira – PR. Telefone: (45) 3264 -1902.
Colégio Estadual João Manuel Mondrone, Rua Mato Grosso, 2233 - Cidade Alta, Medianeira – PR. Telefone**:** (45) 3264-1507.
Colégio Estadual Naira Fellini, Rua Três, 172 - Jardim Irene, Medianeira – PR.
Telefone: (45) 3264-3808.
Colégio Estadual Tancredo Neves, Rua Paraná – Parque Independência, Medianeira – PR. Telefone: (45) 3264-4042.

A) INFORMAÇÕES AO PARTICIPANTE

O senhor (a) está sendo convidado a participar de uma pesquisa onde envolverá professores de matemática do ensino médio de alguns municípios do oeste da Paraná.

1. Apresentação da pesquisa.
Por aparentar não ter muito significado a aplicação do conjunto dos números complexos para os alunos do ensino médio, esta pesquisa visa verificar junto aos professores de matemática a relevância da explanação do conteúdo.

2. Objetivos da pesquisa.
Esta pesquisa tem por finalidade analisar o ponto de vista do professor de matemática do ensino médio com relação à aplicação do conjunto dos números complexos.

3. Participação na pesquisa.
Será entregue ao convidado (a) da pesquisa um questionário com perguntas descritivas e objetivas, relacionados à formação profissional do mesmo e também sobre metodologias e importância do ensino dos números complexos no ensino médio, para que o convidado responda em um determinado tempo, estipulado pelo pesquisador.

4. Confidencialidade.

Os dados levantados junto à pesquisa serão analisados de modo a assegurar o anonimato dos participantes. O questionário a ser observado e analisado, não trará nenhuma forma de identificação pessoal, apenas buscando evidenciar os benefícios ou malefícios.

5. Riscos e Benefícios.

5a) Riscos: A participação na pesquisa não envolve risco físico, mas pode ocorrer algum tipo de constrangimento ou desconforto ao responder o questionário e revelar dados pessoais. Sua identidade será preservada em todas as fases da investigação e todos os participantes terão pleno direito de censura sobre o questionário.

5b) Benefícios:

O benefício de tal pesquisa consta em saber se realmente é importante a aplicação do conteúdo dos números complexos na 3ª série do ensino médio em alguns municípios do oeste do Paraná.

6. Critérios de inclusão e exclusão.

6a) Inclusão: Para participar da pesquisa é preciso ser professor de matemática do ensino médio dos municípios escolhidos.

6b) Exclusão: Nenhum dos professores será excluído.

7. Direito de sair da pesquisa e a esclarecimentos durante o processo.

O senhor(a) tem o direito de deixar a pesquisa a qualquer momento, também tem direito de receber esclarecimentos em qualquer etapa. Bem como, evidenciar a liberdade de recusar ou retirar o seu consentimento a qualquer momento sem penalização

Você pode assinalar o campo a seguir, para receber o resultado desta pesquisa, caso seja de seu interesse :

( ) quero receber os resultados da pesquisa (email para envio :____________________)

( ) não quero receber os resultados da pesquisa

8. Ressarcimento e indenização.

Você não terá nenhum gasto ou ganho financeiro, caso tenha, terá direito a ser indenizado por qualquer dano, desde que comprovado, conforme Resolução 466/12.

ESCLARECIMENTOS SOBRE O COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA:

O Comitê de Ética em Pesquisa envolvendo Seres Humanos (CEP) é constituído por uma equipe de profissionais com formação multidisciplinar que está trabalhando para assegurar o respeito aos seus direitos como participante de pesquisa. Ele tem por objetivo avaliar se a pesquisa foi planejada e se será executada de forma ética. Se você considerar que a pesquisa não está sendo realizada da forma como você foi informado ou que você está sendo prejudicado de alguma forma, entre em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa envolvendo Seres Humanos da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (CEP/UTFPR). **Endereço:** Av. Sete de Setembro, 3165, Bloco N, Térreo, Bairro Rebouças, CEP 80230-901, Curitiba-PR, **Telefone:** (41) 3310-4494, **e-mail:** coep@utfpr.edu.br.

B) CONSENTIMENTO

Eu declaro ter conhecimento das informações contidas neste documento e ter recebido respostas claras às minhas questões a propósito da minha participação direta (ou indireta) na pesquisa e, adicionalmente, declaro ter compreendido o objetivo, a natureza, os riscos, benefícios, ressarcimento e indenização relacionados a este estudo.

Após reflexão e um tempo razoável, eu decidi, livre e voluntariamente, participar deste estudo. Estou consciente que posso deixar o projeto a qualquer momento, sem nenhum prejuízo.

Nome Completo: ____
RG:______________Data de Nascimento:___/___/_____Telefone:_______________
Endereço: ____
CEP: ________________ Cidade:____________________ Estado: _______________
Assinatura: ______________________________ Data: ___/___/______

Eu declaro ter apresentado o estudo, explicado seus objetivos, natureza, riscos e benefícios e ter respondido da melhor forma possível às questões formuladas.

Nome completo: ____
Assinatura pesquisador (a): __________________ Data:___/___/__
(ou seu representante)

Para todas as questões relativas ao estudo ou para se retirar do mesmo, poderão se comunicar com ___________, via e-mail: ______________ou telefone: ____________.

Contato do Comitê de Ética em Pesquisa que envolve seres humanos para denúncia, recurso ou reclamações do participante pesquisado:
Comitê de Ética em Pesquisa que envolve seres humanos da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (CEP/UTFPR).
Endereço: Av. Sete de Setembro, 3165, Bloco N, Térreo, Rebouças, CEP 80230-901, Curitiba-PR, **Telefone:** 3310-4494,**E-mail:**coep@utfpr.edu.br

APÊNDICE B: COLETA DE DADOS (QUESTIONÁRIO DE PESQUISA)

Questionário de Pesquisa

Questão1: Qual sua maior titulação?
( ) Graduação
( ) Especialização
( ) Mestrado
( ) Doutorado
( ) Outro____________________

Questão 2: Em que ano obteve sua maior titulação?_________________________

Questão 3: Quanto tempo atua no Ensino Médio?
( ) Menos de 1 ano
( ) entre 1 e 4 anos
( ) entre 4 e 8 anos
( ) acima de 8 anos

Questão 4: Para o preparo de suas aulas, quais os recursos citados abaixo você utiliza?
( ) Livros didáticos.
( ) Revistas de matemática.
( ) Jornais.
( ) Internet (sites, revistas digitais, etc.)
( ) Outros:____

Questão 5: Quando fez sua graduação, qual o nível de aprofundamento sobre o conjunto dos números complexos teve?
( ) Superficial
( ) Mediano
( ) Aprofundado
( ) Não estudei números complexos na graduação

Questão 6: Como docente da disciplina de matemática, qual sua visão na importância do estudo dos números complexos no Ensino Médio?
( ) Pouco importante
( ) Importante
( ) Importantíssimo
( ) Não costumo passar para os alunos esse conteúdo.

Questão 7: Na visão de docente da disciplina de matemática, os alunos teriam algum prejuízo, caso não tenham recebido essas informações sobre o conjunto dos números complexos?
( ) sim
Justifique:____
____
____

( ) não
Justifique:____
____
____

Questão 8: Qual sua metodologia de ensino para o conjunto dos números complexos? Caso você aplique o assunto para seus alunos.

____
____
____
____
____

Questão 9 : Sabendo que o conteúdo dos números complexos está contido nas Diretrizes Curriculares e também aparece em seu Plano de Trabalho Docente, qual sua opinião em saber que o mesmo não está contido na grade de conteúdos do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), sabendo que atualmente é a principal porta de entrada para universidades Federais e Estaduais?

____
____
____
____
____

Questão 10: Como você, docente da disciplina de matemática do ensino médio, observa e analisa o interesse dos educandos com relação ao aprendizado do conteúdo de números complexos?
( ) Baixo
( ) Razoável
( ) Alto
( ) Não estão preocupados em aprender

Questão 11: Em sua visão, a quantidade de aulas destinadas a 3ª série do ensino médio é suficiente para conseguir vencer os conteúdos propostos no cronograma, principalmente o do conjunto dos números complexos?

____
____
____
____
____

Caso queira deixar alguma sugestão ou opinião sobre o assunto envolvido no questionário, escreva no espaço abaixo:

____
____
____
____
____