

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**

**LUIS FERNANDO SALLA DE SOUZA**

**A CONJECTURA DE TOEPLITZ PARA POLÍGONOS REGULARES**

**PATO BRANCO**

**2022**

**LUIS FERNANDO SALLA DE SOUZA**

**A CONJECTURA DE TOEPLITZ PARA POLÍGONOS REGULARES**

**The Toeplitz conjecture for regular polygons**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. André Guerino Castoldi

**PATO BRANCO**

**2022**



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)

Esta licença permite download e compartilhamento do trabalho desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es), sem a possibilidade de alterá-lo ou utilizá-lo para fins comerciais. Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

**LUIS FERNANDO SALLA DE SOUZA**

**A CONJECTURA DE TOEPLITZ PARA POLÍGONOS REGULARES**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Data de aprovação: 21 de novembro de 2022

---

Prof. Dr. André Guerino Castoldi  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Prof. Dr. Waldir Silva Soares Junior  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Prof. Dr. Rodrigo Ribeiro Lopes  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dedico este trabalho à minha família, em especial ao meu pai, que apesar de não está mais nesse plano, olha por mim de onde estiver.

## **AGRADECIMENTOS**

Em primeiro lugar, gostaria de expressar minha sincera gratidão ao meu orientador Prof. Dr. André Guerino Castoldi, pela sabedoria com que me guiou nesta trajetória e pelo apoio nesta etapa importante da graduação.

Também tenho muito à agradecer a minha família: minha mãe e meu irmão, pois acredito que sem o apoio deles seria difícil vencer esse desafio.

Aos meus colegas de sala e amigos, por compartilharem comigo tantos momentos de descobertas e aprendizado e por todo o companheirismo ao longo deste percurso.

Meu agradecimento a UTFPR por ter me proporcionado a estrutura necessária para que pudesse crescer academicamente e pessoalmente.

A todos que participaram, direta ou indiretamente do desenvolvimento deste trabalho de pesquisa, enriquecendo o meu processo de aprendizado.

“A persistência é o caminho do êxito.”  
(Charles Chaplin)

## RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo demonstrar a conjectura de Toeplitz, que é um problema matemático em aberto até os dias atuais que propõe a seguinte sentença a respeito de curvas planas: "qualquer curva plana simples fechada (Curva de Jordan) contém os quatro vértices de um quadrado", especificamente para polígonos regulares utilizando somente a Geometria Euclidiana Plana. A primeira parte do desenvolvimento deste trabalho consiste nas demonstrações do quadrado inscrito no triângulo equilátero, no quadrado, no pentágono regular e no hexágono regular. Com base nestes casos e nas construções geométricas utilizando o software de geometria dinâmica (GeoGebra), demonstramos a Conjectura de Toeplitz para polígonos regulares com o número de lados par. Além disso, apresentamos uma forma de escolher os quatro lados de um polígono regular com um número ímpar de lados que contém os vértices de um quadrado inscrito. Assim, concluímos que os resultados apresentados neste trabalho contribuem para a resolução do problema do quadrado inscrito em um polígono regular com um número par de lados.

**Palavras-chave:** conjectura de toeplitz; polígonos regulares; quadrado inscrito; geometria euclidiana plana.

## ABSTRACT

This work aims to demonstrate the Toeplitz conjecture, an open mathematical problem that proposes the following sentence about plane curves: "any closed simple plane curve (Jordan Curve) contains the four vertices of a square", specifically for regular polygons using only Euclidean Euclidean plane geometry. The first part of the development of this work consists of demonstrations of the square inscribed in the equilateral triangle, the square, the regular pentagon and the regular hexagon. Based on these cases and geometric constructions using the dynamic geometry software (GeoGebra), we demonstrate the Toeplitz Conjecture for regular polygons with even numbers of sides. Furthermore, we present a way to choose the four sides of a regular polygon with an odd number of sides that contains the vertices of an inscribed square. Thus, we conclude that the results presented in this paper contribute to solving the problem of the square inscribed in a regular polygon with an even number of sides.

**Keywords:** toeplitz conjecture; regular polygons; inscribed square; euclidean plane geometry.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ângulo $\widehat{CAB}$ . . . . .	14
Figura 2 – Ângulos suplementares . . . . .	15
Figura 3 – Ângulo central . . . . .	16
Figura 4 – Ângulo inscrito . . . . .	16
Figura 5 – Ângulos alternos internos . . . . .	17
Figura 6 – Relações trigonométricas . . . . .	18
Figura 7 – Diagonais do quadrado . . . . .	20
Figura 8 – Quadrilátero inscrito com os ângulos opostos $\alpha$ e $\gamma$ . . . . .	21
Figura 9 – Quadrado inscrito na circunferência . . . . .	21
Figura 10 – Circunferência inscrita e circunscrita no pentágono regular . . . . .	23
Figura 11 – Quadrado inscrito em um triângulo equilátero . . . . .	25
Figura 12 – Quadrado inscrito em um quadrado . . . . .	27
Figura 13 – Pentágono regular . . . . .	28
Figura 14 – Quadrado inscrito em um pentágono regular . . . . .	28
Figura 15 – Hexágono regular . . . . .	31
Figura 16 – Polígono regular de $4k$ lados . . . . .	34
Figura 17 – Polígono regular com $4k + 2$ lados . . . . .	35
Figura 18 – Quadrado inscrito no Polígono regular com $4k + 2$ lados . . . . .	36
Figura 19 – Polígono regular com $4k + 1$ lados . . . . .	39
Figura 20 – Polígono regular com $4k + 3$ lados . . . . .	40

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras Gregas

$\alpha$	Letra grega alpha
$\beta$	Letra grega beta
$\gamma$	Letra grega gama

### Notações

$\overline{AB}$	Segmento de reta com extremidade nos pontos $A$ e $B$
$\overline{AB}$	Medida do segmento de reta $AB$
$\widehat{AOB}$	Ângulo de vértice em $O$ e lados $OA$ e $OB$
$\operatorname{tg} \alpha$	Tangente do ângulo $\alpha$
$\operatorname{sen} \alpha$	Seno do ângulo $\alpha$
$\operatorname{cos} \alpha$	Cosseno do ângulo $\alpha$
$\cong$	Congruência
$n$	Número de lados de um polígono
$L$	Medida do lado de um polígono
$r$	Raio da circunferência inscrita em um polígono regular
$R$	Raio da circunferência circunscrita em um polígono regular
$l$	Medida do lado do quadrado inscrito em um polígono

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	10
1.1	Objetivo geral . . . . .	11
1.2	Justificativa . . . . .	11
1.3	Estrutura do trabalho . . . . .	11
2	PRELIMINARES DA GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA . . . . .	13
2.1	Ângulos e suas propriedades . . . . .	14
2.2	O Axioma das Paralelas . . . . .	16
2.3	Trigonometria . . . . .	17
2.4	Polígonos e suas propriedades . . . . .	18
2.5	Polígonos inscritos e circunscritos a uma circunferência . . . . .	20
3	RESOLUÇÃO DA CONJECTURA DE TOEPLITZ PARA OS POLÍGONOS REGULARES . . . . .	24
3.1	O triângulo equilátero . . . . .	24
3.2	O quadrado . . . . .	26
3.3	Pentágono regular . . . . .	27
3.4	Hexágono regular . . . . .	31
3.5	Polígonos regulares com $4k$ lados . . . . .	33
3.6	Polígonos regulares com $4k + 2$ lados . . . . .	35
3.7	Polígonos regulares com número ímpar de lados . . . . .	39
4	CONCLUSÃO . . . . .	41
	REFERÊNCIAS . . . . .	42

## 1 INTRODUÇÃO

Um dos problemas matemáticos que ainda não possui resolução de forma geral é a conjectura de Toeplitz, popularmente conhecida como problema do quadrado inscrito. Esse problema foi relatado pela primeira vez em 1911 por Otto Toeplitz em uma conferência.

Segundo Köthe (1982), Otto Toeplitz é descendente de uma família judia de matemáticos e cresceu em Breslau na Alemanha. Toeplitz estudou matemática na Universidade de Breslau e obteve em 1905 doutorado em geometria algébrica. Passou por algumas universidades renomadas da época, como a Universidade de Göttingen que era o principal centro de pesquisa matemática no mundo. O principal interesse de Toeplitz era a teoria das formas lineares, bilineares e quadráticas em espaços  $n$ -dimensionais para espaços dimensionais infinitos. Em 1911 Toeplitz ministrou uma palestra e em uma das partes tinha como título “sobre alguns problemas em topologia”. Neste breve relato Toeplitz cita um problema em topologia, denominado como o problema do quadrado inscrito que é enunciado da seguinte forma: “qualquer curva plana simples fechada contém quatro vértices de algum quadrado”. O próprio Toeplitz encontrou a solução apenas para curvas convexas, porém não chegou a publicar.

A conjectura de Toeplitz é apresentada de uma forma simples, mas a complexidade em solucionar para uma curva qualquer é o que faz o problema estar em aberto até os dias atuais. Uma curva de Jordan é uma curva que é fechada, contínua e não possui autointerseção. A conjectura de Toeplitz foi provada para casos de curvas suaves através de aproximação de uma determinada curva contínua. Emch (1913) mostrou quando a curva é convexa e quando é analítica por partes, Hebbert (1914) provou para quando a curva é um quadrilátero, Jerrard (1961) para curvas analíticas, Nielsen-Wright (1995) para curvas que são simétricas através de uma linha ou um ponto, Stromquist (1989) mostrou para a classe de curvas monótonas localmente.

Um dos últimos trabalhos realizados referentes a conjectura de Toeplitz é “An Integration Approach to the Toeplitz Square Peg Problem”(TAO, 2017) e foi escrito pelo matemático australiano Terence Tao, mostrando uma abordagem quando a curva é a união de dois gráficos de Lipschitz que concordam nos pontos finais, e cujas constantes de Lipschitz são estritamente inferiores a um. Tao recebeu a prestigiosa Medalha Fields em 2006 pelas suas contribuições em equações diferenciais, combinatória, análise harmônica e teoria aditiva dos números, e é considerado, por muitos, um dos maiores matemáticos vivos da atualidade.

As pesquisas acadêmicas encontradas a respeito da conjectura de Toeplitz na língua nacional brasileira são poucas. De fato, os únicos trabalhos encontrados são o artigo “A Conjectura de Toeplitz no ensino básico” (OTHECHAR, 2017) e a dissertação “As Conjecturas como Instrumentos de Ensino de Matemática”(ALVES, 2021). Ambos os trabalhos citam a resolução da conjectura de Toeplitz no triângulo equilátero, quadrado, pentágono regular e na elipse, e também ambos apresentam sugestões de aplicação da conjectura de Toeplitz no ensino básico. O artigo de Makita (1915) apresenta a quantidade de quadrados inscritos que é possível inscrever

nos polígonos regulares e também determina, de forma enumerada, os lados do polígono regular em que estão localizados os vértices do quadrado inscrito. Neste trabalho, demonstramos a conjectura de Toeplitz para o triângulo equilátero, o quadrado, o pentágono regular, o hexágono regular e para polígonos regulares com um número par de lados tomando como base as referências citadas anteriormente.

Tomando como ponto de partida os objetivos deste trabalho, é viável utilizar o método de pesquisa qualitativa, com enfoque exploratório. Quanto aos procedimentos de coleta de dados, a presente pesquisa caracteriza-se como bibliográfica, na qual realizamos um levantamento de referências sobre a conjectura de Toeplitz, de forma a agregar mais conhecimento com a mesma. O levantamento das referências foi feito pelo Google acadêmico e pelo MathScinet.

### **1.1 Objetivo geral**

O principal objetivo deste trabalho é demonstrar a conjectura de Toeplitz para polígonos regulares utilizando somente a Geometria Euclidiana Plana.

### **1.2 Justificativa**

Um dos primeiros motivos que instigou a elaboração desse projeto de pesquisa sobre o tema escolhido foi o interesse pessoal no aprofundamento em algum assunto da área de geometria e topologia. Em relação ao problema, não foi encontrado, a partir das pesquisas feitas, demonstrações da conjectura de Toeplitz, para polígonos regulares com  $n \geq 6$  lados, que utilize somente conceitos da Geometria Euclidiana Plana.

A abordagem feita por Alves (2021) mostra que é possível apresentar a conjectura de Toeplitz no ensino da matemática sugerindo sequências didáticas para serem aplicadas. Alves (2021) diz que a Conjectura de Toeplitz apesar de ter se mostrado extremamente complexa para demonstrá-la ou refutá-la, apresenta enunciado de simples compreensão e possui propriedades que permitem explorar um pouco alguns conceitos que podem ser usados nas aulas de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio. Desta maneira, o esperado é contribuir com a solução da conjectura de Toeplitz para polígonos regulares.

### **1.3 Estrutura do trabalho**

Este trabalho está organizado como descrito a seguir. No Capítulo 2, apresenta-se uma seleção de definições, proposições e teoremas da geometria euclidiana plana que são relevantes para o desenvolvimento deste trabalho. No Capítulo 3, é demonstrado que o quadrado é inscrivível no triângulo equilátero, no quadrado, no pentágono regular, no hexágono regular, nos polígonos regulares com  $4k$  lados, e nos polígonos regulares com  $4k + 2$  lados. Quando

o número de lados do polígono regular é ímpar, não apresentamos uma demonstração da conjectura de Toeplitz, somente em quais lados do polígono os vértices do quadrado inscrito estão localizados.

## 2 PRELIMINARES DA GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA

A geometria mais conhecida hoje em dia se deve a Euclides, conhecido como o “pai da Geometria”. Euclides foi um matemático grego que viveu em Alexandria, no Egito, durante aproximadamente entre 323-283 a.C., no reinado de Ptolomeu I. Euclides escreveu treze volumes em sua obra principal, chamada Os Elementos, é considerada como uma das mais influentes e bem sucedidas obras da história da matemática, é usada por mais de 2000 anos, até os dias de hoje. Ele reuniu tudo que se sabia sobre matemática em seu tempo, como por exemplo a parte de aritmética, geometria plana, teoria das proporções e geometria sólida. Sistematizando a grande massa de conhecimentos que os egípcios haviam adquirido desordenadamente através do tempo, o matemático grego deu ordem lógica e esmiuçou a fundo as propriedades das figuras geométricas, das áreas e volumes, e estabeleceu o conceito de lugar geométrico.

Euclides construiu a Geometria Euclidiana Plana utilizando 10 axiomas separados em dois grupos, conforme (BARBOSA, 1985). Cinco foram considerados como “noções comuns” e os outros como “postulados”.

As cinco noções comuns são:

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si.
2. Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais.
3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem com outras coisas são iguais uma a outra.
5. O todo é maior do que qualquer de suas partes.

Os cinco postulados de Euclides são:

1. Pode-se traçar uma única reta por dois pontos quaisquer.
2. Pode-se continuar uma reta infinitamente.
3. Pode-se descrever uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio.
4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. Se uma reta corta duas outras retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor que dois retos, então, as duas retas, se continuadas infinitamente, encontram-se no lado no qual estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos.

Por vários séculos, a grande maioria dos matemáticos pensaram que fosse possível deduzir o quinto postulado a partir de postulados anteriores. Porém, todas as tentativas falharam. No início do século XIX, os matemáticos János Bolyai (húngaro) e Nikolai Lobatchevsky (russo) mostraram de forma independente que era necessário assumir a unicidade da paralela como

um postulado. Para isso, eles construíram outro tipo de geometria na qual ainda são válidos os quatro primeiros postulados de Euclides, mas que por um ponto  $P$  fora de uma reta  $r$  é possível traçar infinitas retas paralelas a reta  $r$ . Essa geometria é conhecida como Geometria Hiperbólica.

A discussão sobre o quinto postulado de Euclides foi encerrada pelo matemático alemão David Hilbert (1862-1943) que reconstruiu a Geometria Euclidiana. Os axiomas de Hilbert são um conjunto de 20 afirmações propostas por David Hilbert em 1899 em seu livro *Grundlagen der Geometrie* (Os Fundamentos da Geometria) (HILBERT, 2013) como um tratamento moderno da Geometria Euclidiana. Outras axiomatizações modernas da Geometria Euclidiana bem conhecidas foram propostas por Alfred Tarski (1923-1983) e por George Birkhoff (1884-1944). No livro “Geometria Euclidiana Plana” de Barbosa (1985), os axiomas adotados são aqueles apresentados pelo matemático Aleksei V. Pogorelov (1919-2002) no seu livro “Geometria Elemental”. Estes axiomas têm a vantagem de levarem o leitor rapidamente aos teoremas mais importantes da Geometria Euclidiana Plana.

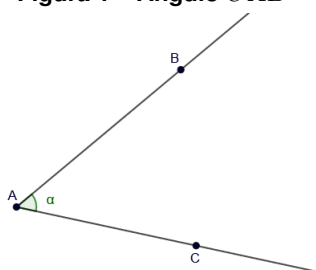
Euclides cita em seu livro uma pequena definição de quadrilátero, em específico um quadrado, segue a definição “Das figuras quadriláteras, por um lado, quadrado é aquela que é tanto equilátera quanto retangular[...]”. Para que seja possível compreender o problema do quadrado inscrito mais profundamente, é preciso resgatar algumas definições e proposições da Geometria Euclidiana Plana. Neste capítulo, é apresentado as definições e resultados da Geometria Euclidiana Plana necessários para o desenvolvimento deste trabalho e, assim, ressaltamos que não é um texto completo sobre o tema. As demonstrações dos resultados em sua maioria são omitidas e podem ser encontradas no livro “Geometria Euclidiana Plana” de Barbosa (1985).

## 2.1 Ângulos e suas propriedades

Nesta seção, apresentamos o conceito de ângulos e suas propriedades. Além disso, definimos alguns ângulos especiais relacionados a circunferência.

**Definição 2.1.** Um **ângulo** é a união de duas semirretas com a mesma origem. A origem é chamada de vértice e as semirretas de lados do ângulo.

Figura 1 – Ângulo  $\widehat{CAB}$



Fonte: Autoria própria (2021).

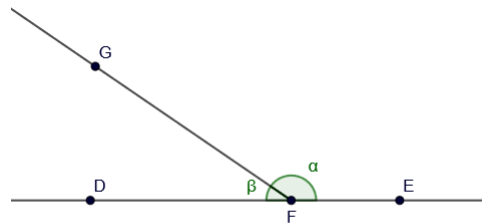


**Definição 2.2.** Dois ângulos são **adjacentes** se possuem um lado em comum.

**Definição 2.3.** Dois ângulos são ditos **suplementares** se a soma de suas medidas é  $180^\circ$ .

O suplemento de um ângulo é o ângulo adjacente ao ângulo dado obtido pelo prolongamento de um de seus lados. Veja a Figura 2.

**Figura 2 – Ângulos suplementares**



**Fonte: Autoria própria (2021).**

Quando dois ângulos possuem a mesma medida, então ocorre o mesmo com seus suplementares.

- Definição 2.4.**
1. Um ângulo cuja a medida é  $90^\circ$  é chamado de **ângulo reto**.
  2. Dois ângulos são **opostos pelo vértice** se os lados de um são as semirretas opostas aos lados do outro.
  3. Duas retas com um ponto de interseção são ditas **perpendiculares** se as retas determinam um ângulo reto.

É notável que quando um ângulo e seu suplemento tenham a mesma medida então eles serão ambos ângulos retos, pelo fato de a soma das medidas ser  $180^\circ$ .

Uma propriedade relacionada a ângulos opostos pelo vértice é dada a seguir.

**Proposição 2.1.** Dois ângulos opostos pelo vértice têm mesma medida.

A existência e unicidade de uma reta perpendicular a uma reta  $r$  dada passando por um ponto  $P$  é garantida no seguinte resultado.

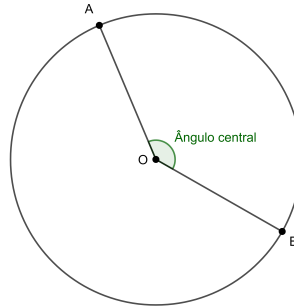
**Teorema 2.1.** Dada uma reta  $r$  e um ponto  $P$  qualquer, existe uma única reta perpendicular a  $r$  passando pelo ponto  $P$ .

Por fim, apresentamos a definição de circunferência, alguns de seus elementos e dois tipos de ângulos que podem ser definidos na circunferência.

- Definição 2.5.**
1. Seja  $A$  um ponto qualquer do plano e  $r$  um número real positivo. A **circunferência** de centro  $A$  e raio  $r$  é o conjunto constituído por todos os pontos  $B$  equidistantes do ponto  $A$  que satisfaz  $\overline{AB} = r$ .

2. Uma **corda** de uma circunferência é qualquer segmento cujas extremidades sejam pontos pertencentes a circunferência. Qualquer corda que contenha o centro da circunferência é chamado **diâmetro**.
3. Seja  $AB$  uma corda da circunferência de centro em  $O$ . O ângulo  $\widehat{AOB}$  é chamado de **ângulo central**.

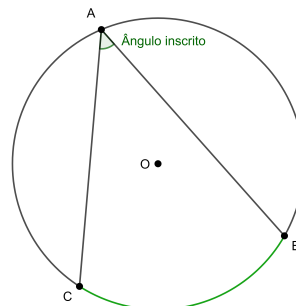
**Figura 3 – Ângulo central**



Fonte: Autoria própria (2022).

4. Dizemos que um ângulo é **inscrito** em uma circunferência se seu vértice  $A$  é um ponto da circunferência e seus lados cortam a circunferência em pontos  $B$  e  $C$  distintos do ponto  $A$ .

**Figura 4 – Ângulo inscrito**



Fonte: Autoria própria (2022).

## 2.2 O Axioma das Paralelas

As principais propriedades sobre retas paralelas na Geometria Euclidiana Plana são apresentadas nesta seção.

**Definição 2.6.** Duas retas que não tem pontos de interseção são ditas **paralelas**.

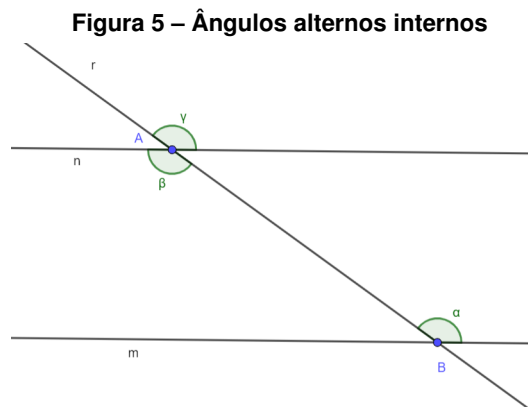
Dada uma reta  $m$  e um ponto  $P$  fora da reta  $m$ , pelo Teorema 2.1 é possível mostrar que existe uma reta paralela a reta  $m$  passando por  $P$ . A unicidade desta reta paralela é dada pelo seguinte axioma, conhecido como o quinto postulado de Euclides.

**Axioma 2.1.** (Axioma das Paralelas) Por um ponto não pertencente a uma reta dada, existe uma única reta paralela a essa reta.

Sejam  $m$  e  $n$  duas retas e  $r$  uma reta concorrente as retas  $m$  e  $n$ . Essa reta  $r$  é denominada de uma **transversal** as retas  $m$  e  $n$ . Nessa situação, definimos os seguintes ângulos.

**Definição 2.7.** Seja  $r$  uma transversal às retas  $m$  e  $n$ .

1. Os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  representados na Figura 5 são chamados **ângulos alternos internos** formados por  $m$ ,  $n$  e a transversal  $r$ .
2. Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  ângulos alternos internos formados por duas retas  $m$  e  $n$  cortadas por uma transversal  $r$ . Se  $\gamma$  é o ângulo oposto pelo vértice ao ângulo  $\beta$ , dizemos que  $\alpha$  e  $\gamma$  são **ângulos correspondentes**.



**Fonte: Autoria própria (2022).**

O teorema seguinte mostra uma forma equivalente de mostrar que duas retas são paralelas que não seja pela definição de retas paralelas.

- Teorema 2.2.**
1. Se duas retas cortadas por uma transversal formam dois ângulos alternos internos (ângulos correspondentes) congruentes, então as retas são paralelas.
  2. Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternos internos (ângulos correspondentes) são congruentes.

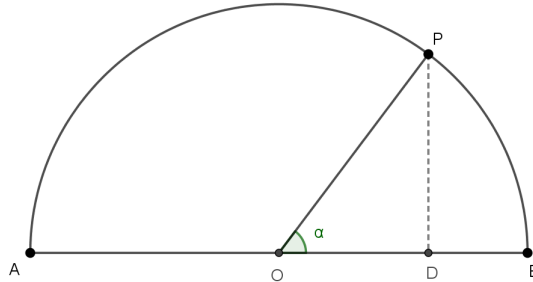
### 2.3 Trigonometria

O estudo das funções trigonométricas e de suas aplicações é chamado de trigonometria. A trigonometria teve início com o estudo de problemas práticos envolvendo as relações entre os lados e ângulos de um triângulo.

Nesta seção, iremos definir as relações trigonométricas: seno, cosseno e tangente. Além disso, enunciamos a Lei dos Senos.

Seja uma circunferência de centro  $O$  e nela um diâmetro  $AB$ . Consideremos uma das semicircunferências determinadas por  $AB$ . Por um ponto  $P$  da semicircunferência, seja  $\alpha$  o ângulo  $\widehat{POB}$  e trace uma reta perpendicular a  $AB$  passando por  $P$ . Seja  $D$  o pé desta perpendicular. Veja a Figura 6.

Figura 6 – Relações trigonométricas



Fonte: Autoria própria (2022).

- Definição 2.8.**
1. O seno do ângulo  $\alpha$  é  $\text{sen } \alpha = \frac{\overline{PD}}{\overline{OP}}$ ;
  2. O cosseno do ângulo  $\alpha$  é:  $\text{cos } \alpha = \frac{\overline{OD}}{\overline{OP}}$  se  $\alpha$  é agudo e  $\text{cos } \alpha = -\frac{\overline{OD}}{\overline{OP}}$  se  $\alpha$  é obtuso;
  3. O tangente do ângulo  $\alpha \neq 90^\circ$  é  $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$ .

Os valores de seno e cosseno de um ângulo  $\alpha$  independem da semicircunferência utilizada para defini-los. Uma relação útil entre as medidas de lados e ângulos de um triângulo é a Lei dos Senos enunciada abaixo.

**Teorema 2.3.** (Lei dos Senos). Para qualquer triângulo  $ABC$ , tem-se:

$$\frac{\text{sen } \widehat{A}}{BC} = \frac{\text{sen } \widehat{B}}{AC} = \frac{\text{sen } \widehat{C}}{AB}.$$

## 2.4 Polígonos e suas propriedades

A definição de polígono e as suas propriedades são apresentadas nesta seção. Além disso, destacamos algumas propriedades de um quadrado.

**Definição 2.9.** Um **polígono** é uma figura formada por uma sequência de pontos  $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_n$  e pelos segmentos  $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{n-1}A_n$ . Os pontos são os **vértices** e os segmentos são os seus **lados**. As seguintes condições devem ser satisfeitas:

1.  $A_n = A_1$ ;
2. os lados se interceptam somente em suas extremidades;
3. cada vértice é extremidade de dois lados;

- dois lados com mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

Alguns elementos e características de um polígono são definidos a seguir.

- Definição 2.10.**
- O segmento ligando vértices não consecutivos de um polígono é chamado uma **diagonal** do polígono.
  - Um polígono é **convexo** se está sempre contido em um dos semiplanos determinados pelas retas que contêm os seus lados.
  - Os ângulos formados pelas semirretas de um polígono convexo são chamados de **ângulos do polígono**.
  - Um **polígono regular** é um polígono convexo que possui seus lados dois a dois congruentes e seus ângulos dois a dois congruentes.

Podemos determinar a medida de cada um dos ângulos internos de um polígono regular a partir da soma de todos os ângulos internos.

- Proposição 2.2.**
- Seja um polígono de  $n$  lados. A soma de seus ângulos internos é

$$(n - 2) \cdot 180^\circ.$$

- Seja um polígono regular de  $n$  lados. A medida de cada ângulo interno é

$$\frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}.$$

As propriedades de um quadrado são apresentadas no restante desta seção.

**Definição 2.11.** Um **quadrilátero** é um polígono de quatro lados. Um **quadrado** é um polígono regular de quatro lados.

Como consequência do Teorema 2.2, os lados opostos de um quadrado são paralelos. Uma outra forma de verificar se um quadrilátero é um quadrado é apresentado no resultado abaixo.

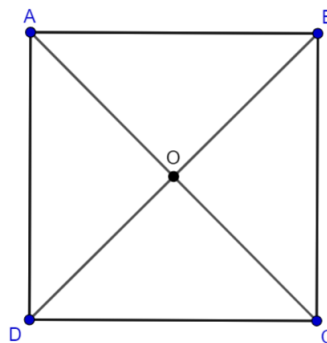
**Proposição 2.3.** As diagonais de um quadrilátero são congruentes e perpendiculares uma à outra cortando-se em um ponto que é o ponto médio de ambas se e somente se o quadrilátero é um quadrado.

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Seja o quadrilátero  $ABCD$  e suas diagonais  $AC$  e  $BD$ , sendo  $O$  a interseção entre as diagonais. Como as diagonais são congruentes e perpendiculares, pelo caso  $LAL$  os triângulos  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$  e  $DOA$  são congruentes, logo  $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$ . Agora é preciso mostrar que os ângulos do quadrilátero são retos. Pode-se observar que os

triângulos retângulos  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$  e  $DOA$  são isósceles, assim os ângulos da base dos triângulos medem  $45^\circ$ , logo cada ângulo do quadrilátero mede  $90^\circ$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja o quadrado  $ABCD$ , primeiramente mostraremos que as diagonais são congruentes. Como pode-se ver na Figura 7, os triângulos  $ADC$  e  $BCD$  são congruentes pelo caso  $LAL$ , assim  $AC \cong BD$ . E para mostrar que as diagonais são perpendiculares, considere os triângulos  $DOC$ , é isósceles pois os ângulos da base (sendo o lado do quadrado) são congruentes medindo  $45^\circ$ , logo o ângulo  $\widehat{DOC}$  mede  $90^\circ$ . Agora, considere os triângulos  $DOC$  e  $AOB$ , é possível notar que são triângulos congruentes pelo caso  $ALA$ , assim  $O$  é ponto médio dos segmentos  $AC$  e  $BD$ .  $\square$

Figura 7 – Diagonais do quadrado



Fonte: Autoria própria (2022).

## 2.5 Polígonos inscritos e circunscritos a uma circunferência

Nesta seção, exploramos as relações entre polígonos e a circunferência.

- Definição 2.12.**
1. Um polígono está inscrito numa circunferência se seus vértices pertencem a circunferência.
  2. Um polígono está circunscrito numa circunferência se seus lados são tangentes a circunferência.

No item 1 da definição anterior, também dizemos que a circunferência está circunscrita no polígono. No item 2, dizemos que a circunferência está inscrita no polígono.

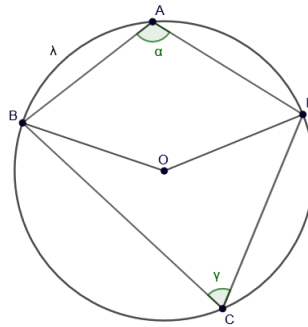
No caso dos triângulos, sempre é possível inscrever e circunscrever um triângulo em uma circunferência. A proposição a seguir enfatiza o conceito de inscrição de um quadrilátero em uma circunferência. Para a demonstração da Proposição 2.4 é utilizado o Teorema do Ângulo Inscrito enunciado a seguir.

**Teorema 2.4.** (Teorema do Ângulo Inscrito) Seja uma circunferência de centro  $O$ . A medida de um ângulo inscrito  $\widehat{BAC}$  na circunferência é metade da medida do ângulo central correspondente  $\widehat{BOC}$ .

**Proposição 2.4.** Um quadrilátero pode ser inscrito em uma circunferência se e somente se possui um par de ângulos opostos suplementares.

*Demonstração.* Seja  $ABCD$  um quadrilátero inscrito na circunferência  $\lambda$ . Sejam  $\alpha$  e  $\gamma$  ângulos opostos no quadrilátero  $ABCD$ . Deve-se demonstrar que  $\alpha + \gamma = 180^\circ$ . Veja a Figura 8.

**Figura 8 – Quadrilátero inscrito com os ângulos opostos  $\alpha$  e  $\gamma$**



**Fonte: Autoria própria (2021).**

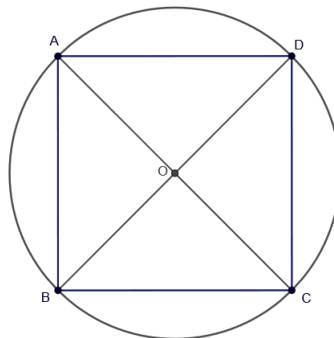
Pelo Teorema 2.4 temos que  $\alpha = \frac{\widehat{BOD}}{2}$  e  $\gamma = \frac{\widehat{DOB}}{2}$ . Assim,

$$\alpha + \gamma = \frac{\widehat{BOD} + \widehat{DOB}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

Reciprocamente, se o quadrilátero  $ABCD$  tem um par de ângulos opostos suplementares, então o outro par de ângulos opostos também é suplementar. Pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  considere o triângulo  $ABC$  e a circunferência em que o triângulo  $ABC$  está inscrito. O ponto  $D$  pode estar interno, sobre ou externo a circunferência. A demonstração consiste em supor que  $D$  é externo ou interno a circunferência e chegar a uma contradição.  $\square$

Com isso é possível determinar que um quadrado está inscrito em uma circunferência, pois a definição de quadrado diz que todos os seus lados são congruentes e os ângulos internos medem  $90^\circ$ , logo cada par de ângulos opostos são suplementares. Veja a Figura 9.

**Figura 9 – Quadrado inscrito na circunferência**



**Fonte: Autoria própria (2021).**

Considerando esse resultado clássico da geometria euclidiana plana, neste projeto de trabalho de conclusão de curso abordamos as possíveis respostas para o problema: É possível que todo polígono regular contenha os quatro vértices de algum quadrado?

De maneira geral, os polígonos regulares podem ser inscritos e circunscritos a uma circunferência.

**Teorema 2.5.** 1. Todo polígono regular está inscrito em uma circunferência.

2. Todo polígono regular está circunscrito em uma circunferência.

O centro da circunferência em que um polígono regular está inscrito é o circuncentro do triângulo determinado por três vértices consecutivos do polígono. Além disso, os centros das circunferências em que o polígono regular está inscrito e circunscrito coincidem. O vértice do ângulo central do polígono regular é o ponto central da circunferência inscrita e seus lados passam pelos vértices do polígono. Para calcular o valor do ângulo central, basta dividir o ângulo total da circunferência pelo número de lados ( $n$ ) do polígono.

Em relação ao raio  $r$  da circunferência em que um polígono regular está circunscrito, é possível determiná-lo em função da medida  $L$  do lado de um polígono regular.

**Proposição 2.5.** Se um polígono regular com  $n$  lados medindo  $L$  está circunscrito a uma circunferência de raio  $r$ , então  $r = \frac{L}{2 \operatorname{tg} \frac{360}{2n}}$ .

*Demonstração.* Seja um polígono regular de  $n$  lados e a circunferência inscrita ao polígono de centro  $O$  e raio  $r$ . Considere  $AB$  um lado do polígono e seu ponto médio  $M$  tem-se o triângulo retângulo  $OMA$  com o ângulo  $\widehat{AOM}$  medindo  $\frac{360}{2n}$  pelo fato de ser metade do ângulo central. Assim, a tangente do ângulo  $\widehat{AOM}$  é dado por

$$\operatorname{tg} \frac{360}{2n} = \frac{L}{r}.$$

Isolando o  $r$  tem-se que

$$r = \frac{L}{2 \operatorname{tg} \frac{360}{2n}}.$$

□

O mesmo pode ser feito em relação ao raio  $R$  da circunferência em que um polígono regular está inscrito.

**Proposição 2.6.** Se um polígono regular com  $n$  lados medindo  $L$  está inscrito a uma circunferência de raio  $R$ , então  $R = \frac{L}{2 \operatorname{sen} \frac{360}{2n}}$ .

*Demonstração.* Seja um polígono regular de  $n$  lados e a circunferência de centro  $O$  e raio  $R$  circunscrita ao polígono. Considere  $AB$  um lado do polígono e seu ponto médio  $M$  tem-se o



triângulo retângulo  $OMA$  com o ângulo  $\widehat{AOM}$  medindo  $\frac{360}{2n}$  pelo fato de ser metade do ângulo central. Assim, o seno do ângulo  $\widehat{AOM}$  é dado por

$$\operatorname{sen} \frac{360}{2n} = \frac{L}{2R}.$$

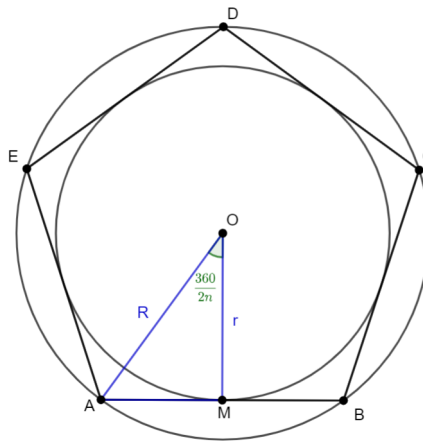
Isolando o  $R$  tem-se que

$$R = \frac{L}{2 \operatorname{sen} \frac{360}{2n}}.$$

□

Segue na Figura 10 um exemplo do pentágono regular.

**Figura 10 – Circunferência inscrita e circunscrita no pentágono regular**



**Fonte: Autoria própria (2021).**

Fazendo a razão entre os raios das circunferências em que um polígono regular está inscrito e circunscrito, obtemos que  $r = R \cos \frac{360}{2n}$ .

### 3 RESOLUÇÃO DA CONJECTURA DE TOEPLITZ PARA OS POLÍGONOS REGULARES

Neste capítulo, a conjectura de Toeplitz é resolvida para um polígono regular, dividindo em casos referente ao número de lados do polígono. Na primeira seção é apresentado o caso do quadrado inscrito no triângulo equilátero, na segunda seção é comentado sobre o caso do quadrado inscrito em um quadrado qualquer. As demonstrações dessas duas seções são adaptações de resultados do artigo de Othechar (2017) e da dissertação de Alves (2021). Na seção 3.3 e 3.4 é demonstrado o caso do quadrado inscrito no pentágono regular e no hexágono regular, sendo as duas demonstrações feitas pelos autores. As duas seções que seguem no capítulo, é resolvido a conjectura de Toeplitz para polígonos regulares com o número de lados igual a  $4k$  e  $4k + 2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Tais demonstrações foram desenvolvidas pelos autores do trabalho. Por fim, o caso em que o número de lados do polígono regular é ímpar não foi possível apresentar uma demonstração, mas Makita (1915) mostra que é possível determinar os lados do polígono regular em que estão localizados os vértices do quadrado inscrito e também o número de quadrados inscritos em cada polígono regular.

#### 3.1 O triângulo equilátero

Nesta seção, demonstraremos a conjectura de Toeplitz quando o polígono é um triângulo equilátero, com base na construção feita e na localização dos vértices do quadrado inscrito. Um triângulo equilátero possui três lados e o quadrado possui quatro vértices. Se um quadrado é inscrito em um triângulo equilátero, então dois de seus vértices pertencem a um mesmo lado do triângulo.

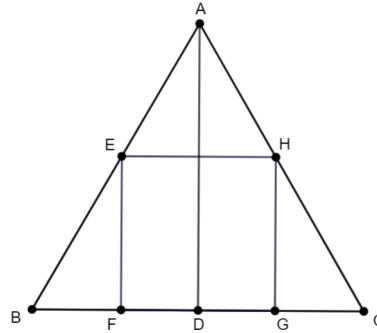
**Proposição 3.1.** Seja  $ABC$  um triângulo equilátero de lado  $L$ . Então existe um quadrado inscrito no triângulo  $ABC$ . O lado deste quadrado é  $l = L(2\sqrt{3} - 3)$ .

*Demonstração.* Primeiramente faremos a construção de um quadrilátero inscrito no triângulo equilátero  $ABC$ . Considere o ponto médio  $D$  do lado  $BC$  e a altura  $AD$  do triângulo  $ABC$ . Seja  $G$  um ponto em  $DC$ , marcamos um ponto  $F$  em  $DB$  tal que  $FD = DG$ . Com isso, traçamos duas perpendiculares a  $BC$ , uma passando por  $G$  e outra passando por  $F$  e marcamos os pontos  $E$  e  $H$  de interseções das perpendiculares com o triângulo  $ABC$ . A Figura 11 mostra o quadrilátero  $EFGH$  inscrito no triângulo  $ABC$ .

A partir da simetria do triângulo equilátero  $ABC$  em relação a  $AD$ , podemos concluir, pela construção feita que esse quadrilátero  $EFGH$  é um retângulo. Agora é necessário localizar o ponto  $G$  em  $DC$  tal que  $EFGH$  seja um quadrado.

Como o lado  $BC$  é paralelo a  $EH$ , então há duas retas paralelas ( $BC$  e  $EH$ ) cortadas pelas transversais ( $AB$  e  $AC$ ). Como, de fato, o triângulo  $ABC$  é equilátero, então os ângulos  $\widehat{ABC}$  e  $\widehat{ACB}$  medem  $60^\circ$ . Deste modo, temos que os ângulos  $\widehat{ABC}$  e  $\widehat{AEH}$  são

Figura 11 – Quadrado inscrito em um triângulo equilátero



Fonte: Autoria própria (2021).

correspondentes e  $\widehat{ACB}$  e  $\widehat{AHE}$  são correspondentes. Pelo Teorema 2.2,  $\widehat{ABC} \cong \widehat{AEH}$  e  $\widehat{ACB} \cong \widehat{AHE}$

Assim, pelo caso de semelhança  $AA$ , o triângulo  $AEH$  é um triângulo equilátero e é semelhante ao triângulo  $ABC$ . Por serem semelhantes, a razão das medidas das alturas referentes aos lados  $BC$  e  $EH$  é igual à razão dos lados  $BC$  e  $EH$ , ou seja,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AD} - \overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EH}}. \quad (1)$$

Determinando  $L$  sendo o lado do triângulo  $ABC$ , suponhamos que o quadrilátero  $EFGH$  seja uma quadrado, então,  $\overline{EH} = \overline{EF} = l$ . Assim podemos reescrever Eq. (1) da forma:

$$\frac{L}{l} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AD} - l}. \quad (2)$$

Como  $AD$  representa a altura do triângulo  $ABC$ , por ser equilátero a altura é dada por  $\overline{AD} = \frac{L\sqrt{3}}{2}$ . Substituindo em Eq. (2), tem-se:

$$\frac{L}{l} = \frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{\frac{L\sqrt{3}}{2} - l}. \quad (3)$$

Em seguida, colocando  $l$  em evidência na Eq. (3), obtemos:

$$l \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) = \frac{L\sqrt{3}}{2}.$$

Desenvolvendo os cálculos e isolando  $l$  em função de  $L$ , tem-se:

$$l = \frac{L\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2}. \quad (4)$$

Multiplicando o numerador e o denominador da Eq. (4) por  $\sqrt{3} - 2$ , obtem-se

$$l = L(2\sqrt{3} - 3).$$

Portanto, se  $G$  é um ponto em  $DC$  tal que  $\overline{DG} = \frac{L(2\sqrt{3}-3)}{2}$ , então o quadrilátero  $EFGH$  é um quadrado de lado  $l = L(2\sqrt{3} - 3)$ .

Definido que o valor  $l = L(2\sqrt{3}-3)$  é o lado do quadrado inscrito no triângulo equilátero, por fim para inscrever um quadrado em um triângulo equilátero de lado  $L$ , basta localizar o ponto médio  $D$  de um dos lados, marcar, na reta que contém esse lado, os pontos  $F$  e  $G$  que equidistam

$$\frac{L(2\sqrt{3} - 3)}{2}$$

de  $D$  e, a partir desses pontos, traçar as retas perpendiculares ao lado do triângulo que passam pelos pontos  $F$  e  $G$ . As interseções das retas com o triângulo determinam os outros dois vértices do quadrado,  $E$  e  $H$ . Logo  $EFGH$  é o quadrado inscrito no triângulo equilátero  $ABC$ .  $\square$

Uma observação a se fazer é que a medida de  $l$  é menor do que a medida de  $BC$ , pois  $0 < 2\sqrt{3} - 3 < 1$ . É possível inscrever três quadrados distintos no triângulo equilátero, basta considerar os três lados do triângulo equilátero como sendo a base que contém um lado do quadrado.

### 3.2 O quadrado

Nesta seção, mostraremos que é possível inscrever infinitos quadrados em um quadrado qualquer  $ABCD$ . Para que um quadrado esteja inscrito em outro quadrado  $ABCD$ , ou é o próprio quadrado  $ABCD$  ou cada vértice do quadrado inscrito está sobre um lado diferente do quadrado  $ABCD$ .

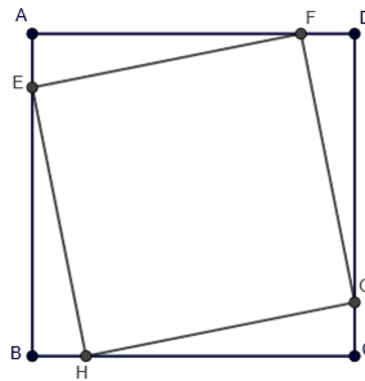
**Proposição 3.2.** Seja  $ABCD$  um quadrado de lado  $L$ . Para cada  $0 \leq x < L$ , existe um quadrado inscrito no quadrado  $ABCD$  de lado  $l = \sqrt{x^2 + (L - x)^2}$ .

*Demonstração.* Suponhamos que os vértices  $E, F, G$  e  $H$  de um quadrilátero esteja inscrito no quadrado  $ABCD$ , de modo que  $\overline{BE} = \overline{AF} = \overline{DG} = \overline{CH}$ . Veja a Figura 12.

Por consequência, dividiu-se cada lado do quadrado  $ABCD$  em dois segmentos, então  $\overline{AE} = \overline{DF} = \overline{CG} = \overline{BH}$ . Deste modo, os triângulos  $AEF, DFG, CGH$  e  $BHE$  são congruentes, pois são triângulos retângulos com os catetos respectivamente congruentes. Logo,  $\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HE}$ .

Os ângulos agudos dos triângulos  $AEF, DFG, CGH$  e  $BHE$  são complementares, ou seja, somam  $90^\circ$ , de tal forma que os ângulos internos do quadrilátero  $EFGH$  sejam todos ângulos retos, concluindo que  $EFGH$  é um quadrado.

Figura 12 – Quadrado inscrito em um quadrado



Fonte: Autoria própria (2021).

Então, para inscrever e encontrar o valor do lado do quadrado inscrito, basta marcar sobre os lados de  $ABCD$  os pontos  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$  de tal maneira que  $\overline{BE} = \overline{AF} = \overline{DG} = \overline{CH} = x$ . Se  $L$  é a medida do lado do quadrado  $ABCD$ , tem-se também que  $\overline{AE} = \overline{DF} = \overline{CG} = \overline{BH} = (L - x)$ .

Pelo Teorema de Pitágoras podemos concluir que a medida do lado do quadrado inscrito  $EFGH$  no quadrado  $ABCD$  é:

$$\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HE} = \sqrt{x^2 + (L - x)^2}$$

□

Considerando o segmento  $AB$  do quadrado  $ABCD$  existem infinitos pontos em  $AB$ . Podemos concluir que existem infinitos quadrados inscritos no quadrado  $ABCD$ , pois cada ponto que considerarmos do lado  $AB$  será um vértice de um quadrado inscrito no quadrado  $ABCD$ .

### 3.3 Pentágono regular

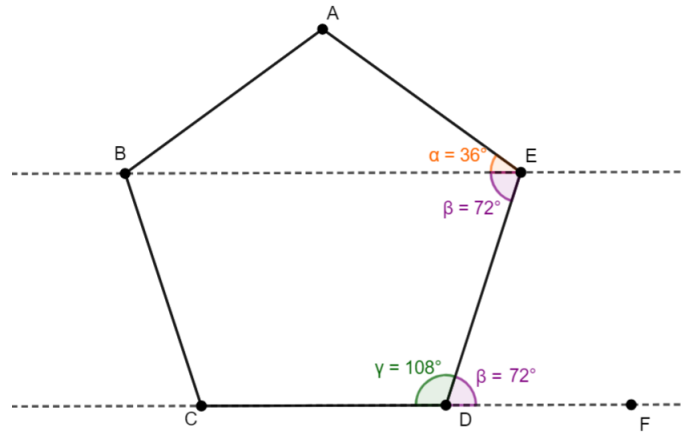
Nesta seção, demonstraremos a conjectura de Toeplitz no pentágono regular, ou seja, localiza-se no pentágono os quatro vértices que formam um quadrado. Othechar (2017) demonstra esse caso em seu artigo, mas a construção feita na demonstração utiliza Geometria Analítica, já a construção nesta seção é utilizando Geometria Euclidiana Plana.

**Proposição 3.3.** Seja  $ABCDE$  o pentágono regular de lado  $L$ . Então, existe um quadrado inscrito no pentágono regular  $ABCDE$  de lado  $l = \frac{L \operatorname{sen} 108^\circ}{\operatorname{sen} 36^\circ + \operatorname{sen} 18^\circ}$ .

*Demonstração.* Considere a Figura 13 abaixo ilustrando o pentágono regular  $ABCDE$ . Sabe-se, pela Proposição 2.2 definindo o  $n = 5$ , que cada ângulo interno de um pentágono regular mede  $108^\circ$ . Na reta que passa pelos pontos  $CD$ , marcamos um ponto  $F$  de tal forma que

o ângulo  $\beta = \widehat{EDF}$  seja suplementar do ângulo  $\gamma = \widehat{CDE}$ , logo se  $\gamma$  mede  $108^\circ$  então  $\beta = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$ . Como a reta  $CD$  é paralela a  $BE$  e possui a transversal  $DE$ , é possível notar que os ângulos  $\widehat{BED}$  e  $\widehat{EDF}$  são alternos internos. Pelo Teorema 2.2, os ângulos  $\widehat{BED}$  e  $\widehat{EDF}$  são congruentes. Seja  $\alpha$  a medida do ângulo  $\widehat{BEA}$ , sabemos que  $\widehat{DEA} = 108^\circ = \alpha + \beta$ . Logo,  $\alpha + 72^\circ = 108^\circ$  e obtem-se  $\alpha = 108^\circ - 72^\circ = 36^\circ$ .

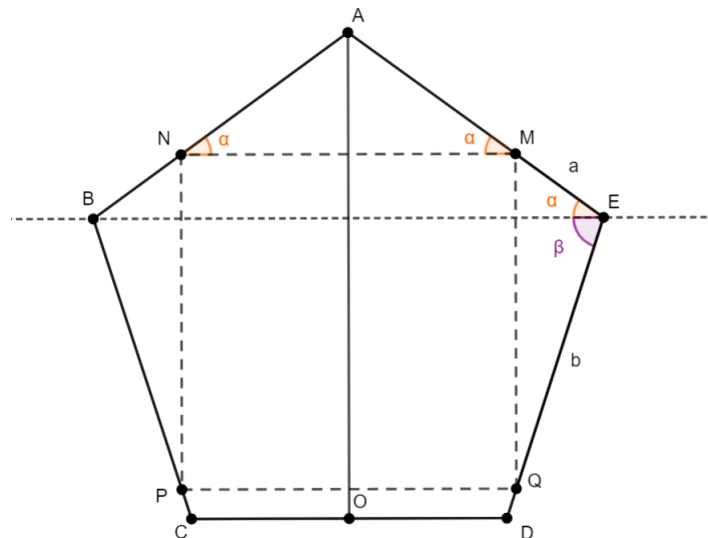
Figura 13 – Pentágono regular



Fonte: Autoria própria (2022).

Queremos determinar quatro pontos  $M, N, P$  e  $Q$  sobre os lados  $AE, AB, BC$  e  $DE$  do pentágono regular  $ABCDE$ , respectivamente, de tal forma que o quadrilátero  $MNPQ$  seja um quadrado de lado  $l$ . Suponhamos que o quadrilátero  $MNPQ$  é um quadrado de lado  $l$  inscrito no pentágono regular  $ABCDE$ . Então  $\overline{MN} = \overline{NP} = \overline{PQ} = \overline{QM} = l$  e os ângulos internos medem  $90^\circ$ .

Figura 14 – Quadrado inscrito em um pentágono regular



Fonte: Autoria própria (2022).

A distância de  $M$  até o vértice  $E$  chamamos de  $a$  e a distância de  $Q$  até o vértice  $E$  chamaremos de  $b$ . Considere o segmento  $AO$ , onde  $O$  é ponto médio de  $CD$  conforme a Figura 14. Pela simetria do pentágono em relação ao segmento  $AO$ , a partir dos pontos  $M$  e  $Q$  é possível marcar os pontos  $N$  e  $P$ . Desta forma, os segmentos  $MN$ ,  $QP$ ,  $CD$  e  $BE$  são paralelos entre si. Como  $BE$  é paralelo a  $MN$  temos que o ângulo  $\widehat{NMA}$  é correspondente ao ângulo  $\widehat{BEA} = \alpha$ , como pode-se observar na Figura 14, logo  $\widehat{NMA}$  mede  $36^\circ$ . Da mesma forma, o ângulo  $\widehat{MNA}$  mede  $36^\circ$ . Assim o triângulo  $AMN$  é isósceles de base  $MN$ . Considere o ponto  $M$  no segmento  $AE$ , tem-se:

$$\widehat{NMA} + \widehat{NMQ} + \widehat{QME} = 180^\circ \quad (5)$$

Como  $\widehat{NMA} = 36^\circ$  e  $\widehat{NMQ} = 90^\circ$ , então isolando  $\widehat{QME}$  na Eq. (5) obtem-se que  $\widehat{QME} = 54^\circ$ .

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ , no triângulo  $MQE$  obtemos que  $\widehat{MQE} = 18^\circ$ . Outro resultado importante utilizado é a Lei dos Senos (Teorema 2.3), aplicada aos triângulos  $AMN$  e  $EMQ$ . No triângulo  $AMN$ , definindo  $l = \overline{MN}$  e  $L - a = \overline{AM}$ , temos que:

$$\frac{\text{sen } 108^\circ}{l} = \frac{\text{sen } 36^\circ}{L - a}. \quad (6)$$

No triângulo  $EMQ$ , sendo  $a = \overline{EM}$ ,  $l = \overline{MQ}$  e  $b = \overline{EQ}$ , pelo Teorema 2.3 tem-se:

$$\frac{\text{sen } 18^\circ}{a} = \frac{\text{sen } 108^\circ}{l} = \frac{\text{sen } 54^\circ}{b}. \quad (7)$$

As Eq. (6) e Eq. (7) tem  $\frac{\text{sen } 108^\circ}{l}$  em comum. Assim,

$$\frac{\text{sen } 36^\circ}{L - a} = \frac{\text{sen } 18^\circ}{a}.$$

Isolando  $a$  em função de  $L$  na equação acima, obtemos:

$$a = \frac{L \text{sen } 18^\circ}{\text{sen } 36^\circ + \text{sen } 18^\circ}. \quad (8)$$

Tendo  $a$  em função de  $L$ , podemos usar a primeira e a segunda parte da Eq. (7) e obter o valor de  $l$  em função de  $L$ :

$$\frac{\text{sen } 18^\circ}{a} = \frac{\text{sen } 108^\circ}{l} \Rightarrow l = a \frac{\text{sen } 108^\circ}{\text{sen } 18^\circ}.$$

Substituindo o valor de  $a$  dado na Eq.(8), na equação anterior, temos então

$$l = \frac{L \operatorname{sen} 108^\circ}{\operatorname{sen} 36^\circ + \operatorname{sen} 18^\circ}.$$

Da mesma maneira, tendo  $a$  em função de  $L$ , podemos usar a primeira e a terceira parte da Eq. (7) e determinar o valor de  $b$  em função de  $L$ .

$$\frac{\operatorname{sen} 18^\circ}{a} = \frac{\operatorname{sen} 54^\circ}{b} \Rightarrow b = \frac{a \operatorname{sen} 54^\circ}{\operatorname{sen} 18^\circ}.$$

Substituindo o valor de  $a$  dado na Eq.(8), temos então

$$b = \frac{L \operatorname{sen} 54^\circ}{\operatorname{sen} 36^\circ + \operatorname{sen} 18^\circ}.$$

Portanto é determinado as medidas de  $a$ ,  $b$  e  $l$  em função do lado  $L$  do pentágono regular  $ABCDE$  de tal forma que os pontos  $M$ ,  $N$ ,  $P$  e  $Q$ , satisfazendo  $\overline{ME} = a$ ,  $\overline{EQ} = b$ ,  $\overline{NB} = a$  e  $\overline{PB} = b$ , formam um quadrado de lado  $l$  inscrito no pentágono. Então, para inscrever e encontrar o valor do lado do quadrado inscrito, basta considerar o segmento  $CD$  do pentágono regular como a base e marcar sobre os outros quatro lados de  $ABCDE$  os pontos  $M$  e  $N$  que distam  $a$  de  $E$  e  $B$ , respectivamente, também marcar os pontos  $Q$  e  $P$  de tal maneira que  $\overline{EQ} = \overline{BP} = b$ . Portanto,  $MNPQ$  é um quadrado inscrito no pentágono regular  $ABCDE$ .  $\square$

Uma observação a se fazer é que os valores de  $a$  e  $b$  são sempre menores que  $L$ , caso contrário não estariam sobre o lado do pentágono regular. Um modo de mostrar que  $a < L$  é provar que  $\frac{\operatorname{sen} 18^\circ}{\operatorname{sen} 36^\circ + \operatorname{sen} 18^\circ} < 1$ . De fato, é fácil ver que  $\operatorname{sen} 18^\circ < \operatorname{sen} 36^\circ + \operatorname{sen} 18^\circ$ , mostrando que  $a < L$ . Para que  $b$  seja menor que  $L$  é preciso que  $\frac{\operatorname{sen} 54^\circ}{\operatorname{sen} 36^\circ + \operatorname{sen} 18^\circ} < 1$ . De fato, pela identidade trigonométrica  $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x$  tem-se

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 54^\circ &= \operatorname{sen}(18^\circ + 36^\circ) \\ &= \operatorname{sen} 18^\circ \cos 36^\circ + \operatorname{sen} 36^\circ \cos 18^\circ. \end{aligned}$$

Como  $\cos 36^\circ < 1$  e  $\cos 18^\circ < 1$ , então

$$\operatorname{sen} 54^\circ < \operatorname{sen} 36^\circ + \operatorname{sen} 18^\circ.$$

Em relação da quantidade de quadrados inscritos é possível inscrever cinco quadrados no pentágono regular, pois para cada lado que se considerar uma base, teremos um quadrado inscrito.



### 3.4 Hexágono regular

Nesta seção, apresentaremos uma forma de localizar os quatro vértices de um quadrado inscrito no hexágono regular.

**Proposição 3.4.** Seja  $ABCDEF$  um hexágono regular de lado  $L$ . Então, existe um quadrado inscrito no hexágono regular  $ABCDEF$  de lado  $l = \frac{\sqrt{6}}{2} \sec 15^\circ \cdot L$ .

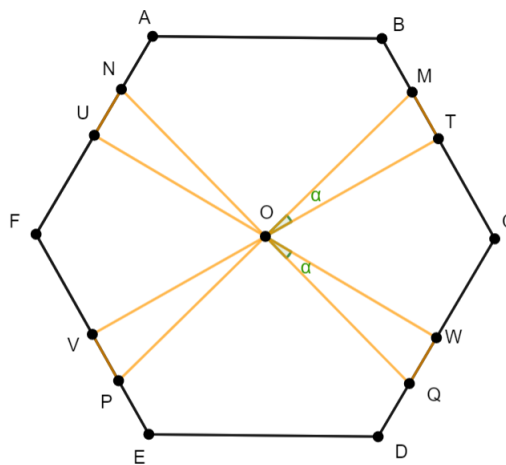
*Demonstração.* Sejam  $T, U, V$  e  $W$  pontos médios dos segmentos  $BC, AF, FE$  e  $DC$  respectivamente. O objetivo é determinar o valor  $a$  tal que os pontos  $M, N, P$  e  $Q$  estejam a uma certa distância  $a$ , dos pontos médios de seus respectivos lados, no sentido mostrado na Figura 15, assim formando um quadrado  $MNPQ$ .

Seja  $O$  o incentro da circunferência inscrita no hexágono regular. Então  $\overline{OU} = \overline{OT} = \overline{OV} = \overline{OW} = r$  são raios, pois  $O$  é incentro da circunferência inscrita no hexágono. Também  $OT, OU, OV$  e  $OW$  são perpendiculares aos lados  $CB, AF, FE$  e  $DC$ , respectivamente, pelo fato dos lados serem tangentes a circunferência inscrita. Assim temos que

$$\begin{aligned}\overline{OU} = \overline{OT} = \overline{OV} = \overline{OW} &= r \\ \widehat{OTM} = \widehat{OUN} = \widehat{OVP} = \widehat{OWQ} &= 90^\circ \\ \overline{TM} = \overline{UN} = \overline{VP} = \overline{QW} &= a.\end{aligned}$$

Pelo caso de congruência de triângulos  $LAL$ , os triângulos  $OTM, OUN, OVP$  e  $OWQ$  são dois a dois congruentes, com isso, os ângulos  $\widehat{TOM}, \widehat{UNO}, \widehat{VOP}$  e  $\widehat{WOQ}$  são congruentes medindo  $\alpha$ , representado na Figura 15.

Figura 15 – Hexágono regular



Fonte: Autoria própria (2022).

Sabe-se que a medida do ângulo central  $\widehat{AOF} = 60^\circ$ . Como  $U$  é ponto médio de  $AF$  e  $O$  é o centro, então  $\widehat{AOU} = 30^\circ$  pois  $OU$  é bissetriz do ângulo  $\widehat{AOF}$ . Da mesma forma  $\widehat{BOT} = 30^\circ$ .

Assim,

$$\widehat{AOU} + \widehat{AOB} + \widehat{BOT} = 120^\circ. \quad (9)$$

Podemos escrever  $\widehat{AOU} = \alpha + \widehat{NOA}$  e  $\widehat{BOT} = \alpha + \widehat{BOM}$ , substituindo na Eq. (9) obtemos,

$$\alpha + \widehat{NOA} + \widehat{AOB} + \alpha + \widehat{BOM} = 120^\circ.$$

Como queremos que  $MNPQ$  seja um quadrado, então deve-se ter que  $\widehat{NOM} = 90^\circ$ . Mas  $\widehat{NOM} = \widehat{NOA} + \widehat{AOB} + \widehat{BOM}$ . Assim,

$$2\alpha + 90^\circ = 120^\circ \Rightarrow \alpha = 15^\circ.$$

Pelas relações trigonométricas no triângulo retângulo  $OTM$  temos que

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\overline{TM}}{\overline{OT}} \quad (10)$$

Como  $\overline{TM} = a$  e  $OT$  é o raio da circunferência inscrita no hexágono regular, assim pela Proposição 2.5 com  $n = 6$ , tem-se:

$$\overline{OT} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L.$$

Substituindo os valores encontrados na Eq. (10) e isolando  $a$  em função de  $L$  temos,

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} 15^\circ \cdot L.$$

Agora, vamos determinar a medida  $l$  do lado do quadrado  $MNPQ$  em função de  $L$ . Para isso, vamos aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo  $OTM$  e determinar  $\overline{OM}$ . De fato,

$$\begin{aligned} \overline{OM}^2 &= \overline{OT}^2 + \overline{TM}^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} 15^\circ \cdot L\right)^2 \\ &= \frac{3}{4}(1 + \operatorname{tg}^2 15^\circ) \cdot L^2. \end{aligned}$$

Como  $1 + \operatorname{tg}^2 15^\circ = \sec^2 15^\circ$ , então:

$$\overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sec 15^\circ \cdot L. \quad (11)$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo  $OMN$ , obtemos:

$$\overline{MN}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 = 2 \cdot \overline{OM}^2$$

Substituindo  $\overline{OM}$  pela medida encontrada na Eq. (11), temos:

$$\overline{MN}^2 = 2 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sec 15^\circ \cdot L \right)^2 \Rightarrow l = \overline{MN} = \frac{\sqrt{6}}{2} \sec 15^\circ \cdot L.$$

Assim, é determinado o valor de  $a$  e  $l$  em função de  $L$  de tal forma que o quadrilátero  $MNPQ$  seja um quadrado. Portanto, para inscrever um quadrado no hexágono regular  $ABCDE$ , desconsidera-se os lados  $AB$  e  $DE$  marcando-se os pontos médios  $U, T, W$  e  $V$  nos quatro lados restantes. Em seguida, localiza-se os vértices  $M, N, P$  e  $Q$  nos lados do hexágono regular a uma distância  $a = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} 15^\circ \cdot L$  dos pontos médios, conforme a Figura 15. □

É notável que a quantidade de quadrados inscritos no hexágono regular é três, pois se considerarmos os lados que não possuem vértices do quadrado é possível rotacionar o quadrado três vezes obtendo assim, três quadrados inscritos distintos. Para que o segmento de comprimento  $a$  esteja sobre o lado do hexágono é necessário que o valor de  $a$  seja menor que  $\frac{L}{2}$ . De fato,

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} 15^\circ \cdot L \approx 0,23 \cdot L < \frac{1}{2} \cdot L.$$

### 3.5 Polígonos regulares com $4k$ lados

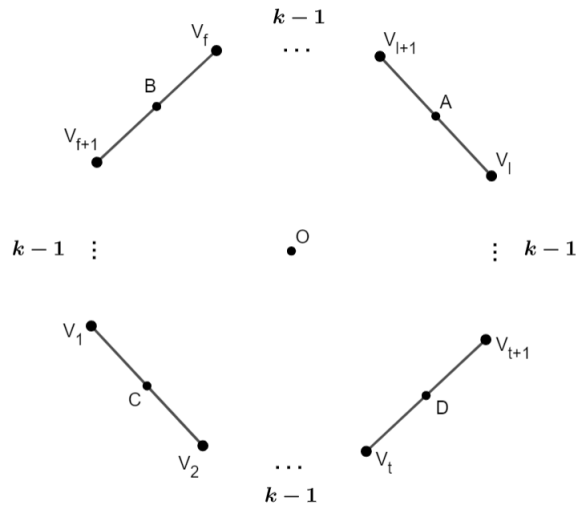
Nesta seção, é provado que há um quadrado inscrito nos polígonos regulares com o número de lados igual a  $n = 4k$ .

**Proposição 3.5.** Seja um polígono regular com  $n = 4k$  lados,  $k \in \mathbb{N}$ . Então existe um quadrado inscrito neste polígono regular com o lado medindo  $l = \sqrt{2} \cdot \frac{L}{2 \operatorname{tg} \frac{360^\circ}{2n}}$ .

*Demonstração.* Considere um polígono regular de lado  $L$  e com  $4k$  lados, onde  $k \in \mathbb{N}$ . Seja  $C$  a circunferência inscrita no polígono regular. Para mostrar que o polígono regular possui os quatro vértices de um quadrado é necessário, primeiramente, escolher os lados do polígono regular a se fixar os vértices do quadrilátero tendo uma distância de  $k - 1$  lados dois a dois no sentido antihorário (ou horário), tal que os lados opostos fiquem a uma distância  $2k - 1$  como mostra na Figura 16.

Em seguida marcamos os pontos médios,  $A, B, C$  e  $D$ , dos lados escolhidos. Um ângulo central, por exemplo  $\widehat{V_1OV_2}$ , desse polígono mede  $\frac{360}{4k} = \frac{90}{k}$ . Ao olhar para o ângulo  $\widehat{AOB}$

Figura 16 – Polígono regular de  $4k$  lados



Fonte: Autoria própria (2022).

percebe-se que pode ser escrito como a soma dos ângulos centrais,

$$\widehat{AOB} = (k - 1) \cdot \frac{90}{k} + 2 \cdot \frac{90}{2k} = 90^\circ$$

Da mesma forma, os ângulos  $\widehat{BOC}$ ,  $\widehat{COD}$  e  $\widehat{DOA}$  são ângulos retos.

Como os pontos  $A, B, C$  e  $D$  são pontos médios, então os segmentos  $AC$  e  $BD$  são diâmetros da circunferência inscrita no polígono regular e, conseqüentemente, são congruentes. Logo, pela Proposição 2.3,  $ABCD$  é um quadrado, com o lado medindo  $l$ . Para determinar  $l$  em função de  $L$  é necessário aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo  $AOB$ , tendo:

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2.$$

Como  $\overline{AB} = l$  e  $\overline{OA} = \overline{OB} = r$ , sendo  $r$  o raio da circunferência inscrita no polígono regular

$$\begin{aligned} l^2 &= 2 \cdot r^2 \\ l &= \sqrt{2} \cdot r. \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.5, concluímos que:

$$l = \sqrt{2} \cdot \frac{L}{2 \operatorname{tg} \frac{360^\circ}{2n}}.$$

□

Na demonstração acima são utilizados os pontos médios dos lados determinados para construção do quadrado inscrito, mas é possível determinar infinitos quadrados inscritos em um

polígono regular com  $4k$  lados, movendo seus vértices sobre os lados em um mesmo sentido e preservando uma distância fixa do ponto médio do lado.

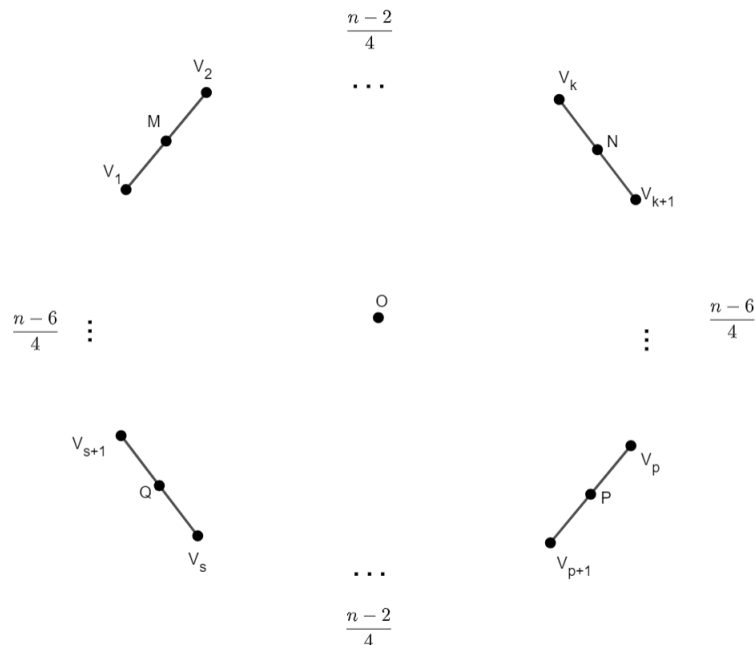
### 3.6 Polígonos regulares com $4k + 2$ lados

A demonstração feita na seção 3.4 é um caso particular que, ao generaliza-la para polígonos regulares com  $4k + 2$  lados obtem-se a resolução da conjectura de Toeplitz apresentada a seguir.

**Teorema 3.1.** Seja um polígono regular de  $n$  lados, onde  $n = 4k + 2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Existe um quadrado inscrito no polígono regular, com o lado medindo  $l = \frac{\sec \frac{360}{4n}}{\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{360}{2n}} \cdot L$ .

*Demonstração.* Sejam  $V_j$ , com  $j = 1, \dots, n$ , os vértices do polígono regular e  $O$  o centro da circunferência inscrita no polígono. Fixando os lados  $V_1V_2$ ,  $V_kV_{k+1}$ ,  $V_pV_{p+1}$ , e  $V_sV_{s+1}$  do polígono regular, de tal maneira que entre  $V_1V_2$  e  $V_kV_{k+1}$  há um intervalo de  $\frac{n-2}{4}$  lados, entre  $V_kV_{k+1}$  e  $V_pV_{p+1}$  um intervalo de  $\frac{n-6}{4}$  lados, entre  $V_pV_{p+1}$  e  $V_sV_{s+1}$  um intervalo de  $\frac{n-2}{4}$  lados e por fim, os lados  $V_sV_{s+1}$  e  $V_1V_2$  possuem  $\frac{n-6}{4}$  lados entre eles, como segue na Figura 17 abaixo. Denotando  $M$ ,  $N$ ,  $P$  e  $Q$ , como sendo os pontos médios dos lados  $V_1V_2$ ,  $V_kV_{k+1}$ ,  $V_pV_{p+1}$ ,  $V_sV_{s+1}$  respectivamente.

**Figura 17 – Polígono regular com  $4k + 2$  lados**

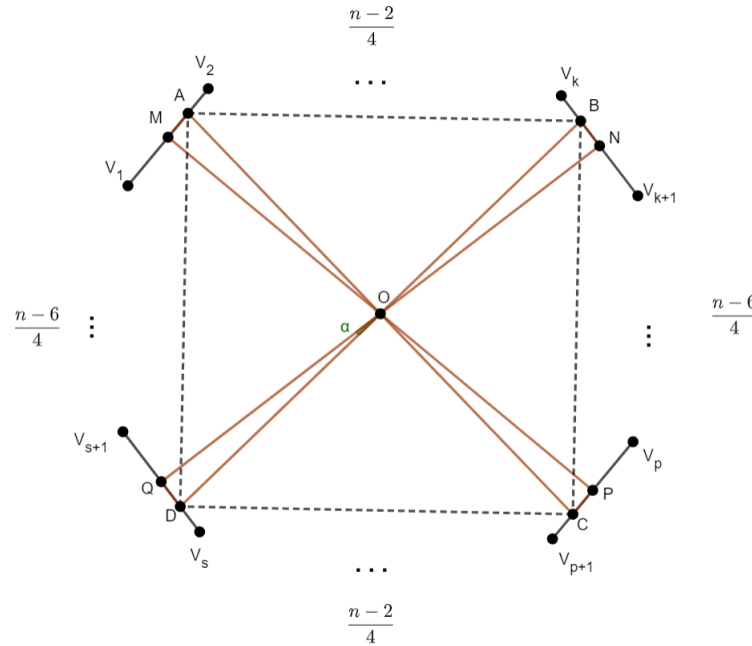


Fonte: Autoria própria (2022).

O ângulo central correspondente a cada lado mede  $\varphi = \frac{360}{n}$ . A partir do segmento  $OM$  e o ângulo  $\alpha = \frac{360}{4n}$ , em  $O$  realizamos uma abertura  $\alpha$  no sentido horário, onde a semirreta formada interceptará o lado  $V_1V_2$  num ponto  $A$ . Da mesma maneira, com o segmento  $ON$  e a

abertura  $\alpha$  em  $O$  para o sentido anti-horário, obtemos o ponto  $B \in V_k V_{k+1}$ . Seguindo o mesmo raciocínio com o ponto  $P$  e o segmento  $OP$ , em  $O$  realizamos a abertura com o ângulo  $\alpha$  no sentido horário, obtendo o ponto  $C \in V_p V_{p+1}$ . Com o segmento  $OQ$  com a abertura  $\alpha$  em  $O$  para o sentido anti-horário, tem-se  $D \in V_s V_{s+1}$ . O quadrilátero  $ABCD$  assim construído é um quadrado de lado  $l$ . Para mostrar isso, provaremos que  $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$  e  $\overline{OD}$  são iguais e  $\widehat{AOB} = \widehat{AOD} = 90^\circ$ . Veja a Figura 18.

**Figura 18 – Quadrado inscrito no Polígono regular com  $4k + 2$  lados**



**Fonte: Autoria própria (2022).**

Começamos mostrando que  $\widehat{AOB} = \widehat{AOD} = 90^\circ$ . Sabemos que o ângulo central respectivo a cada lado do polígono regular mede  $\frac{360}{n}$ , então considerando o ângulo  $\widehat{MON}$ , pode-se perceber que entre  $V_2$  e  $V_k$  possui  $\frac{n-2}{4}$  lados e a soma de  $\overline{MV_2} + \overline{V_kN}$  temos mais um lado. Logo, podemos escrever o ângulo  $\widehat{MON}$  como sendo  $\frac{n-2}{4} + 1$  ângulos centrais. Observe também que  $\widehat{MON}$  pode ser escrito como a soma do ângulo  $\widehat{AOB}$  com dois ângulos que medem  $\alpha$ . Ou seja,

$$\widehat{MON} = \widehat{AOB} + 2\alpha.$$

Substituindo  $\widehat{MON} = (\frac{n-2}{4} + 1) \cdot \frac{360}{n}$ ,  $\alpha = \frac{360}{4n}$  e isolando  $\widehat{AOB}$ , temos

$$\begin{aligned}
\widehat{AOB} &= \left(\frac{n-2}{4} + 1\right) \cdot \frac{360}{n} - 2\alpha \\
&= \frac{n+2}{4} \cdot \frac{360}{n} - 2 \cdot \frac{360}{4n} \\
&= \left(\frac{n+2}{4} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{360}{n} \\
&= 90^\circ.
\end{aligned}$$

Logo,  $\widehat{AOB} = 90^\circ$ .

Agora, considerando o ângulo  $\widehat{MOQ}$  podemos observar que entre  $V_1$  e  $V_{s+1}$  há  $\frac{n-6}{4}$  ângulos centrais e a soma de  $\widehat{MOV}_1$  e  $\widehat{QOV}_{s+1}$  tem-se mais um ângulo central. Assim, podemos escrever  $\widehat{MOQ}$  como

$$\widehat{MOQ} = \left(\frac{n-6}{4} + 1\right) \cdot \frac{360}{n}.$$

E o ângulo  $\widehat{AOD}$  pode ser expressando como a soma do ângulo  $\widehat{MOQ}$  com  $2\alpha$ , ou seja,

$$\begin{aligned}
\widehat{AOD} &= \left(\frac{n-6}{4} + 1\right) \cdot \frac{360}{n} + 2\alpha \\
&= \frac{n-2}{4} \cdot \frac{360}{n} + 2 \cdot \frac{360}{4n} \\
&= \left(\frac{n-2}{4} + \frac{2}{4}\right) \frac{360}{n} \\
&= 90^\circ.
\end{aligned}$$

Portanto, provamos que  $\widehat{AOB} = \widehat{AOD} = 90^\circ$ .

Agora, considerando os triângulos  $OQD$ ,  $OPC$ ,  $ONB$  e  $OMA$ , mostrado na Figura 18, o ângulo  $\alpha$  é comum em todos, os lados  $OQ$ ,  $OP$ ,  $ON$  e  $OM$  dos triângulos são raios da circunferência inscrita no polígono e os ângulos  $\widehat{OQD}$ ,  $\widehat{ONB}$ ,  $\widehat{OPC}$  e  $\widehat{OMA}$  são ângulos retos. Logo, pelo caso de congruência  $ALA$ , os triângulos são, dois a dois, congruentes. Com isso, temos que  $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$  e, pela Proposição 2.3, o quadrilátero  $ABCD$  é um quadrado. Além disso,  $\overline{MA} = \overline{NB} = \overline{PC} = \overline{QD} = a$ . Iremos determinar  $a$  e  $l$  em função de  $L$ .

De fato, olhando especificamente para o triângulo  $OMA$ , temos que  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{\overline{OM}}$ . Como  $OM$  é raio da circunferência inscrita no polígono regular, pela Proposição 2.5 tem-se

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{\frac{L}{2 \operatorname{tg} \frac{360}{2n}}} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{a \cdot 2 \operatorname{tg} \frac{360}{2n}}{L}.$$

Substituindo  $\alpha = \frac{360}{4n}$  e isolando  $a$ , temos

$$a = \frac{\operatorname{tg} \frac{360}{4n}}{2 \operatorname{tg} \frac{360}{2n}} \cdot L \quad (12)$$

Determinando assim o valor de  $a$  em função da medida de  $L$  e o número  $n$  de lados do polígono regular.

Para encontrar o valor de  $l$  em função de  $L$ , utilizaremos o Teorema de Pitágoras no triângulo  $OMA$ , para encontrar o valor de  $\overline{OA}$ , e no triângulo  $AOB$ , para encontrar a medida de  $\overline{AB} = l$ . Então considere o triângulo  $OMA$ , tem-se

$$\overline{OA}^2 = a^2 + \overline{OM}^2 \quad (13)$$

Pela Proposição 2.5, sabe-se o valor de  $\overline{OM}$  em função de  $L$  e na Eq. (12) temos o valor de  $a$ . Substituindo esses valores na Eq. (13),

$$\begin{aligned} \overline{OA}^2 &= \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{360}{4n} L^2}{4 \operatorname{tg}^2 \frac{360}{2n}} + \frac{L^2}{4 \operatorname{tg}^2 \frac{360}{2n}} \\ &= L^2 \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{360}{4n}}{4 \operatorname{tg}^2 \frac{360}{2n}}. \end{aligned}$$

Como  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$ , então:

$$\overline{OA}^2 = L^2 \cdot \frac{\sec^2 \frac{360}{4n}}{4 \operatorname{tg}^2 \frac{360}{2n}}. \quad (14)$$

Como  $\overline{OA} = \overline{OB}$  e aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo  $AOB$  tem-se:

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = 2\overline{OA}^2.$$

Substituindo  $\overline{OA}^2$  pelo valor encontrado na Eq. (14), obtem-se

$$\overline{AB}^2 = L^2 \cdot \frac{\sec^2 \frac{360}{4n}}{2 \operatorname{tg}^2 \frac{360}{2n}}$$



Portanto, o lado  $l$  do quadrado inscrito em um polígono regular com  $4k + 2$  lados é:

$$\overline{AB} = L \cdot \frac{\sec \frac{360}{4n}}{\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{360}{2n}} = l.$$

Como já visto anteriormente, os segmentos  $\overline{AO}$ ,  $\overline{BO}$ ,  $\overline{CO}$  e  $\overline{DO}$  são congruentes. Portanto, pela Proposição 2.3, o quadrilátero  $ABCD$  é um quadrado.

□

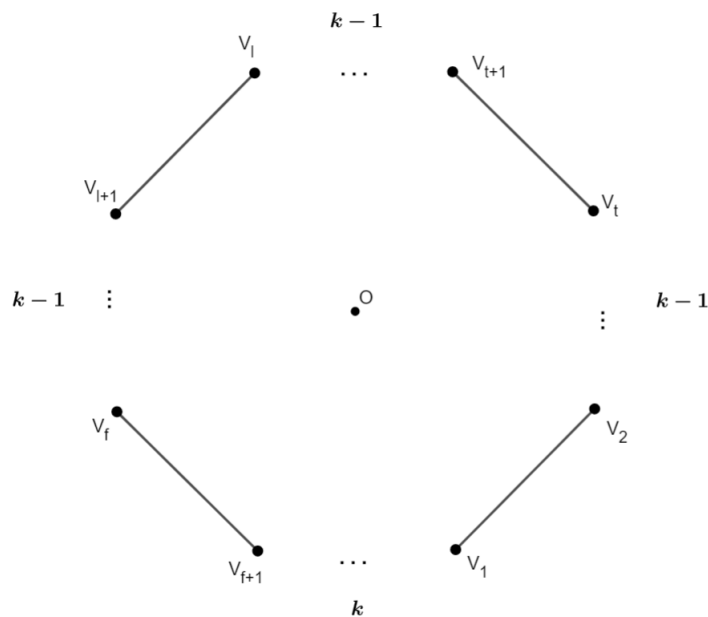
Em questão da quantidade de quadrado inscrito, Makita (1915) mostra que é possível inscrever  $\frac{n}{2}$  quadrados em um polígono regular com número de lados igual a  $n = 4k + 2$ .

### 3.7 Polígonos regulares com número ímpar de lados

Nesta seção não é apresentada a demonstração da conjectura de Toeplitz para polígonos regulares com número ímpar de lados. Porém é localizado em quais lados do polígono os vértices do quadrado inscrito estão dispostos de acordo com Makita (1915).

Primeiramente para os polígonos regulares com  $n = 4k + 1$  lados. Denotando como  $1, 2, \dots, n$  os lados do polígono regular no sentido anti-horário, os vértices do quadrado inscrito estão dispostos nos lados  $1, k + 1, 2k + 1$  e  $3k + 1$ , sendo  $k - 1$  o intervalo entre esses lados, menos entre  $3k + 1$  e  $1$ , que é  $k$  lados, como segue na Figura 19.

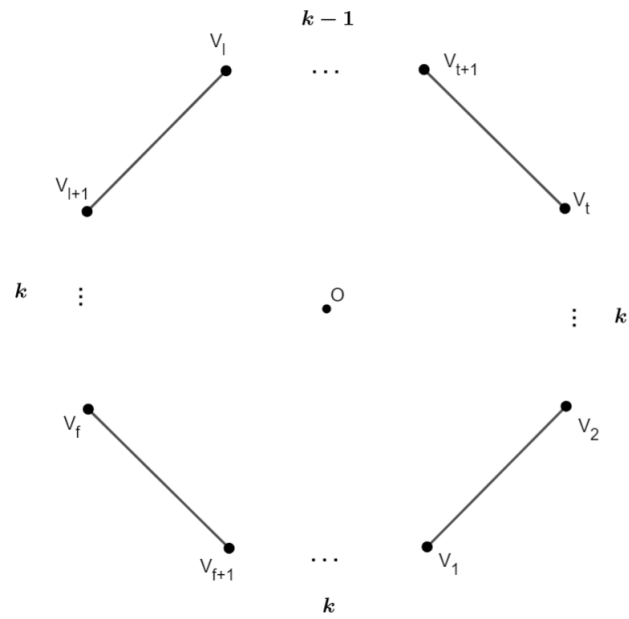
**Figura 19 – Polígono regular com  $4k + 1$  lados**



**Fonte: Autoria própria (2022).**

Agora para os polígonos regulares com  $n = 4k + 3$  lados. Os vértices do quadrado inscrito estão dispostos nos lados  $1, k + 2, 2k + 2$  e  $3k + 3$ , sendo  $k$  o intervalo entre esses lados, menos entre  $k + 2$  e  $2k + 2$ , que é  $k - 1$  lados, como segue na Figura 20.

**Figura 20 – Polígono regular com  $4k + 3$  lados**



**Fonte: Autoria própria (2022).**

Por fim, no polígono regular com número ímpar de lados, é possível inscrever  $n$  quadrados, pois se fixarmos o lado 1 por exemplo e rotacionarmos o quadrado no polígono regular, o lado 1 passará pelos  $n$  lados.

## 4 CONCLUSÃO

Foi realizado, neste trabalho, um estudo sobre a veracidade da conjectura de Toeplitz para polígonos regulares. Especificamente foram abordadas as formas de se inscrever um quadrado no triângulo equilátero, quadrado, pentágono regular, hexágono regular, e, de modo generalizado, em polígonos regulares com número par de lados. Além disso, também foi apresentado a medida do lado do quadrado inscrito em função da medida do lado do polígono regular e do número de lados do polígono estudado em cada caso.

A demonstração do caso em que o polígono regular possui um número ímpar de lados não foi concluída com êxito, porém visualizamos no GeoGebra que a conjectura de Toeplitz é válida para este caso e foi apresentado a localização dos lados em que os vértices do quadrado estão dispostos. Mas em um futuro próximo, o estudo deste caso pode ser concluído.

Assim, através das demonstrações apresentadas se tornou notável a importância dos conceitos básicos estudados na Geometria Euclidiana Plana e trigonometria. Com isso, fica evidente que mesmo com os conceitos simples que se aplicam nas demonstrações que podem ser mais rigorosas, devem ser plenamente entendidos e aplicados. Portanto, existe essa ligação entre o que se é estudado no ensino básico sobre Geometria Euclidiana Plana e trigonometria com um problema matemático em aberto, e a importância destes tipos de atividades estarem presentes dentro da sala de aula e na formação do professor de matemática.

## REFERÊNCIAS

- ALVES, D. B. **As Conjecturas como Instrumentos de Ensino de Matemática**. 2021. Dissertação (Mestrado) — PROFMAT, 2021.
- BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 1. ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 1985.
- EMCH, A. Some properties of closed convex curves in a plane. *American Journal of Mathematics*, vol. 35, p. 407–412., 1913.
- HEBBERT, C. M. The inscribed and circumscribed squares of a quadrilateral and their significance in kinematic geometry. **The Annals of Mathematics**, JSTOR, v. 16, n. 1/4, p. 38–42, 1914.
- HILBERT, D. **Grundlagen der geometrie**. Göttingen: Springer-Verlag, 2013.
- JERRARD, R. P. Inscribed squares in plane curves. **Transactions of the American Mathematical Society**, JSTOR, v. 98, n. 2, p. 234–241, 1961.
- KÖTHER, G. In memory of otto toeplitz. *In: Toeplitz Centennial*. Basel: Springer, 1982. p. 545–556.
- MAKITA, R. The squares in a regular polygon. **Tohoku Mathematical Journal, First Series**, Mathematical Institute, Tohoku University, v. 8, p. 88–92, 1915.
- NIELSEN, M. J.; WRIGHT, S. E. Rectangles inscribed in symmetric continua. **Geometriae Dedicata**, Springer, v. 56, n. 3, p. 285–297, 1995.
- OTHECHAR, P. F. S. A conjectura de toeplitz no ensino básico. **Revista do Professor de Matemática**, v.93, p. 36-41, 2017.
- STROMQUIST, W. Inscribed squares and square-like quadrilaterals in closed curves. **Mathematika**, London Mathematical Society, v. 36, n. 2, p. 187–197, 1989.
- TAO, T. An integration approach to the toeplitz square peg problem. **Forum of Mathematics, Sigma**, Cambridge University Press, v. 5, p. e30, 2017.