

ppgmat

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

MATEUS FELIPES

**ENSINO DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS À LUZ DA RME: UMA PROPOSTA QUE
ENVOLVE CONTEXTO REALÍSTICO E PLANILHAS ELETRÔNICAS**

LONDRINA

2022

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

MATEUS FELIPES

ENSINO DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS À LUZ DA RME: UMA PROPOSTA QUE ENVOLVE CONTEXTO REALÍSTICO E PLANILHAS ELETRÔNICAS

TEACHING NUMERICAL SEQUENCES ACCORDING IN THE OF RME: A PROPOSAL THAT INVOLVES REALISTIC CONTEXT AND ELECTRONIC SPREADSHEETS.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, *campus* Cornélio Procópio e Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dra. Marcele Tavares Mendes

LONDRINA

2022



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho para fins não comerciais, desde que atribuam o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



**Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina**



MATEUS FELIPES

ENSINO DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS À LUZ DA RME: UMA PROPOSTA QUE ENVOLVE CONTEXTO REALÍSTICO E PLANILHAS ELETRÔNICAS

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 27 de Outubro de 2022

Dra. Marcele Tavares, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Adriana Helena Borssoi, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Angela Marques Fontana, Doutorado - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná (Ifpr)

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 09/11/2022.

Dedico essa dissertação a todos os professores do Ensino Básico, lutam pela educação de pessoas em todos os dias e buscam fazer do Brasil um país melhor.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que contribuíram para a elaboração desta pesquisa de mestrado e, sobretudo, para os que fizeram esses anos de estudo tornarem-se mais felizes. Em especial, agradeço:

A Deus, por fornecer a capacidade de realizar essa pesquisa e não deixar me enfraquecer;

A minha mãe Suely, minha primeira professora e alfabetizadora, e ao meu pai Juraci que juntos sempre me apoiaram e lutaram para que eu conseguisse realizar os meus sonhos e em todas as etapas da minha vida;

A minha esposa Paula, por todos os sonhos compartilhados, por cuidar de nossa filha, da casa e do trabalho para que eu pudesse realizar esse trabalho.

A minha filha Luísa, por ser o amor mais puro e sincero, e ser minha fonte de inspiração.

A minha orientadora Marcelle, por não desistir de mim, por ter me oportunizado e me guiado nesse processo de intenso aprendizado a quem, serei eternamente grato por todo o cuidado que sempre teve comigo;

Aos membros da banca, Prof. Dra. Adriana Borssoi e Prof. Dra. Angela Fontana Marques pela leitura cuidadosa e respeitosa que fizeram deste trabalho.

Aos alunos da disciplina de Matemática matriculados em 2020 e 2021, por aceitarem participar desta pesquisa e contribuírem com suas produções;

A professoras Marisa e Tania, por permitirem que esse trabalho fosse realizado na escola.

Aos meus colegas de UTFPR, Maria Fineto, Renata, Talita, Adriana, Giseli e Luiz, por compartilharem ideias e aprendizados por diversas tardes de quinta feira.

Aos meus amigos de profissão, por terem acreditado meus estudos e sempre me motivar.

“A menos que modifiquemos a nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo”. (Albert Einstein)

FELIPES, Mateus. **Ensino de sequências numéricas à luz da RME: Uma proposta que envolve contexto realístico e planilhas eletrônicas**. 2022. 125 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022.

RESUMO

Esta pesquisa em seu desenvolvimento elaborou, aplicou e analisou tarefas com contextos realísticos e que utilizam planilhas eletrônicas enquanto recurso tecnológico para o processo de ensino e aprendizagem de sequências numéricas. As tarefas foram aplicadas a alunos matriculados na 1ª série do Ensino Médio. A pesquisa fundamenta-se nos princípios da Educação Matemática Realística, na experimentação matemática e no pensar-com-tecnologia. Trata-se de uma pesquisa de natureza qualitativa de cunho interpretativo em que se utilizou de dois ciclos de iteração da Pesquisa de Desenvolvimento (*Design Research*) para preparação, experiência de ensino e a análise retrospectiva. Duas das tarefas foram descritas e analisadas a partir de trechos de diálogos e produções dos alunos, evidenciando uma organização de sala de aula em que os alunos assumem o papel de protagonista e o professor assume a posição daquele que guia e orienta o processo de aprendizagem que acontece a partir do lidar com tarefas contextualizadas. As planilhas eletrônicas mostraram-se um recurso propício para o ensino e aprendizagem em um contexto realístico de tarefas. A versão final do processo resultou em cinco tarefas matemáticas, todas trabalham com o conceito de sequência numéricas, com objetivos e conteúdos distintos.

Palavras-chave: Educação Matemática. Educação Matemática Realística. Experimentação Matemática. Planilhas Eletrônicas. Tarefas. Design Research.

FELIPES, Mateus. **Teaching numerical sequences in the light of RME: A proposal that involves realistic context and electronic spreadsheets.** 2022. 125 f. Dissertation (Master's degree in Mathematics Education) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022.

ABSTRACT

This research in its development elaborated, applied and analyzed tasks with realistic contexts and that use electronic spreadsheets as a technological resource for the teaching and learning process of numerical sequences. The tasks were applied to students enrolled in the 1st grade of high school. The research is based on the principles of Realistic Mathematics Education, on mathematical experimentation and on thinking-with-technology. This is a qualitative research with an interpretative nature in which two iteration cycles of the Development Research (Design Research) were used for preparation, teaching experience and retrospective analysis. Two of the tasks were described and analyzed from excerpts of dialogues and students' productions, evidencing a classroom organization in which students assume the role of protagonist and the teacher assumes the position of the one who guides and guides the learning process that happens from dealing with contextualized tasks. Electronic spreadsheets proved to be a suitable resource for teaching and learning in a realistic context of tasks. The final version of the process resulted in five mathematical tasks, all of which work with the concept of numerical sequence, with different objectives and contents.

Keywords: Mathematics Education. Realistic Mathematics Education. Mathematical Experimentation. Electronic Spreadsheets. Tasks. Design Research.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Linha do tempo	14
Figura 2 – Processo cíclico de conhecimento, design, experimento, reflexão e (novo) conhecimento	36
Figura 3 – Drive do professor-pesquisador	78
Figura 4 – Gráfico distância pelo tempo	82
Figura 5 – Tabela: Tempo e distância	84
Figura 6 – Produção dos alunos do grupo de Natal	90
Figura 7 – Paralelepípedo de Felipes	92

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Dissertações do grupo	15
Quadro 2 – Quatro fases das tecnologias digitais	19
Quadro 3 – pensar-com-tecnologia	25
Quadro 4 – Abordagens tradicionais segundo Van den Heuvel-Panhuizen (2010)	30
Quadro 5 – Resumo dos princípios da RME	33
Quadro 6 – Caminho metodológico baseado nas Fases da Design Research	37
Quadro 7 – Características das tarefas	38
Quadro 8 – Tarefas que compõe o produto educacional	41
Quadro 9 – Enunciado da Tarefa 01: Coronavírus no Paraná	41
Quadro 10 – Perguntas norteadoras da Tarefa 01	44
Quadro 11 – Enunciado da Tarefa 02:	45
Quadro 12 – Perguntas norteadoras da Tarefa 02	46
Quadro 13 – Enunciado da Tarefa 03:	47
Quadro 14 – Perguntas norteadoras da Tarefa 03	48
Quadro 15 – Enunciado da Tarefa 04	48
Quadro 16 – Perguntas norteadoras da Tarefa 04	50
Quadro 17 – Enunciado da Tarefa 05	51
Quadro 18 – Perguntas norteadoras da Tarefa 05	53
Quadro 19 – Momentos das tarefas baseados nos princípios da RME	54
Quadro 20 – Trechos 1-2-1-A e 1-2-1-B	57
Quadro 21 – Trecho 1-2-5-A	60
Quadro 22 – Trechos 1-2-5-B	61
Quadro 23 – Trecho 1-2-5-C	61
Quadro 24 – Trecho 1-2-5-F	62
Quadro 25 – Trecho 1-2-5-G	64
Quadro 26 – Trecho 1-2-5-H	65
Quadro 27 – Trecho 1-2-5-I	66
Quadro 28 – Trecho 1-2-5-J	66
Quadro 29 – Trecho 1-2-5-K	67
Quadro 30 – Trecho 1-2-5-N	68
Quadro 31 – Trecho 1-2-5-P	69
Quadro 32 – Trecho 1-2-5-R	69

Quadro 33 – Trecho 1-2-6-A	71
Quadro 34 – Trechos 1-2-6-B e 1-2-6-C	72
Quadro 35 – Trecho 1-2-6-D	73
Quadro 36 – Trecho 1-2-6-E	73
Quadro 37 – Trecho 1-2-6-F	74
Quadro 38 – Trechos 1-2-6-I e 1-2-6-J	75
Quadro 39 – Trechos 2-2-1-A, 2-2-1-B e 2-2-1-C	77
Quadro 40 – Trecho 2-2-1-D	78
Quadro 41 – Trechos 2-2-1-E e 2-2-1-F	79
Quadro 42 – Trecho 2-2-2-A	80
Quadro 43 – Trecho 2-2-2-B e Trecho 2-2-2-D	81
Quadro 44 – Produção dos alunos	83
Quadro 45 – Trecho 2-2-3-A	84
Quadro 46 – Trecho 2-2-3-B	85
Quadro 47 – Trechos 2-2-4-A e 2-2-4-B	86
Quadro 48 – Trecho 2-2-4-C	88
Quadro 49 – Trechos 2-2-5-B e 2-2-5-D	89

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
OECD	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Alunos
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	14
1 PENSAR E FAZER COM TECNOLOGIA	19
1.1 FASES DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS	19
1.2 EXPERIMENTAÇÃO COM TECNOLOGIA	21
1.3 PLANILHAS ELETRÔNICAS	25
1.4 AMBIENTE VIRTUAL DE APRENDIZAGEM	27
2 TAREFAS NA PERSPECTIVA DA RME	29
3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	35
3.1 A DESIGN RESEARCH	35
3.2 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA	37
3.3 O PRODUTO EDUCACIONAL	40
3.3.1 Tarefa 01: Coronavírus no Paraná	41
3.3.2 Tarefa 02: Viagem para praia	45
3.3.3 Tarefa 03: Arquibancada de um estádio de futebol	47
3.3.4 Tarefa 04: Crescimento populacional	48
3.3.5 Tarefa 05: Marketing de rede	50
3.4 FOCO DA ANÁLISE	53
4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS TAREFAS DESENVOLVIDAS	55
4.1 DESENVOLVIMENTO DA TAREFA 01: CORONAVÍRUS NO PARANÁ	55
4.2 DESENVOLVIMENTO DA TAREFA 02: VIAGEM PARA PRAIA	76
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	91

REFERÊNCIAS	93
APÊNDICE A – DIÁLOGO DA 2ª APLICAÇÃO DA TAREFA 01	98
APÊNDICE B – DIÁLOGO DA 2ª APLICAÇÃO DA TAREFA 02	114
ANEXO A – FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL	123

INTRODUÇÃO

Essa pesquisa apresenta um estudo a partir de um conjunto de tarefas com contextos realísticos e que em sua aplicação/desenvolvimento foi utilizado planilhas eletrônicas. A aplicação foi a alunos de turmas do 1ª série do Ensino Médio de uma escola filantrópica de um município da região Noroeste do Paraná, em que o professor responsável é o próprio pesquisador¹.

O interesse pelo desenvolvimento dessa pesquisa está em consonância ao desenvolvimento das pesquisas de mestrado orientadas pela professora Dra. Marcele Tavares Mendes, docente do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, *campi* Cornélio Procópio e Londrina, associada a linha de pesquisa Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática, nas quais as temáticas estão relacionadas a Educação Matemática Realística (RME) e Avaliação da Aprendizagem, Tarefas Matemáticas.

Das pesquisas desenvolvidas toma-se como ponto inicial a própria tese da professora, intitulada “Utilização da Prova em Fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo” (MENDES, 2014), seguido por sete dissertações já finalizadas. A Figura 1 apresenta uma linha de tempo e da autoria dos trabalhos desenvolvidos no contexto em que emerge a pesquisa aqui relatada.

Figura 1 - Linha do tempo



Fonte: Autor.

As dissertações podem ser divididas em dois temas: A Educação Matemática Realística e a Avaliação da aprendizagem, as quais podem ser observadas no Quadro 1.

¹ Denominado no texto por professor-pesquisador, aquele que planeja os passos de sua pesquisa concomitantemente aos passos de planejamento de sala de aula.

Quadro 1 - Dissertações do grupo

Autor	Título da dissertação	Temática Central
Harmuch (2017)	Tarefas para uma educação financeira: um estudo	Educação Matemática Realística (RME)
Marino (2018)	O processo de delineamento de uma trajetória de ensino e de aprendizagem: reflexões para o ensino de matemática	
Antunes (2018)	Design de uma prova escrita de matemática: um processo reflexivo da prática avaliativa	Avaliação da aprendizagem
Marino (2020)	Elementos de uma prática avaliativa enquanto prática social	
Santos (2020)	Práticas avaliativas de seis professores de matemática: uma reflexão para a inclusão escolar	
Weber (2020)	Articulação da avaliação somativa com avaliação formativa em aulas de matemática	
Rodrigues (2021)	Uma prática avaliativa formativa utilizando a prova-com-consulta-ao-caderno em uma disciplina de cálculo	

Fonte: Autor.

Neste contexto, essa pesquisa desenvolveu-se à luz da abordagem de ensino RME, com a qual buscou-se refletir acerca da seguinte questão: “Como utilizar em sala de aula contextos realísticos e planilhas eletrônicas para ensinar matemática, em particular, Sequências Numéricas?”. Sequências Numéricas foi o conteúdo programático escolhido por ser um dos assuntos a ser trabalhado com as turmas de 1ª série do Ensino Médio sob responsabilidade do pesquisador no período de desenvolvimento da pesquisa de mestrado.

A RME é uma abordagem de ensino, que a partir de seus princípios (realidade, interatividade, entrelaçamento, orientação, reinvenção, avaliação), apresenta orientações para a sala de aula (HARMUCH, 2022). Na RME, a matemática é tomada enquanto uma atividade humana (FREUDENTHAL, 1968, 1973, 1979), sendo “entre as primeiras atividades cognitivas conhecidas e a primeira disciplina a ser ensinada, mas que evoluiu e transformou-se sob a influência das modificações sociais” (FREUDENTHAL, 1979, p. 321).

O termo “realística”, da expressão RME, é utilizado para além de referir-se à realidade, mundo real, também no ensino da matemática envolver contextos de situações que fazem sentido para os estudantes, de modo a estarem envolvidos e confortáveis para relacioná-los com os seus conhecimentos e para o desenvolvimento de conceitos matemáticos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

Este trabalho interessa-se por investigar aspectos do contexto pedagógico à luz da RME que podem ser vetores para que as planilhas eletrônicas sejam recursos para os alunos lidarem e interpretarem tarefas que envolvam contextos realísticos. Considera-se que esses aspectos podem ter direções e magnitudes que contribuam para o desenvolvimento de um estudante que faz parte de uma geração que está mais conectada às tecnologias digitais a cada dia, que inventa e desenvolve novas formas de conexões com o conhecimento (BACIDO; TANZI NETO; TREVIZANI, 2015).

A qualidade da utilização das tecnologias em um contexto de sala de aula está intimamente ligada às características das tarefas propostas pelo professor. “Do ponto de vista do estudante, as tarefas devem, portanto, ser acessíveis, convidativas e que vale a pena ser resolvidas” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996 p. 89). Para esse ponto de vista, neste trabalho, realça-se o contexto realístico da tarefa, aquele que emerge do que está sendo vivenciado pelos alunos, de situações que possuem um significado, que podem ser tanto fatores imaginários, quanto fatos do dia a dia do aluno (FREUDENTHAL, 1991).

Tarefas matemáticas com contextos realísticos é uma alternativa para ampliar os conhecimentos dos estudantes, de tal forma que “o ensino de matemática deveria propiciar que os alunos pudessem resolver tarefas com mais referências em sua realidade do que aquelas do tipo “efetue, some, calcule, a seguinte regra de três, apresentadas rotineiramente nas escolas” (FERREIRA, 2013, p. 39-40). Além disso, as tarefas matemáticas com contextos realísticos não devem ser apresentadas apenas em fase de aplicação, mas em fase do desenvolvimento e exploração de novos conhecimentos, servindo assim para constituir e para aplicar conceitos matemáticos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001).

Já com relação a utilização de planilhas eletrônicas, há estudos recentes que evidenciam sua contribuição em relação ao modo de os alunos se expressarem de diferentes maneiras ao lidar com uma tarefa, de explorar ideias, dados numéricos, elaboração de estratégias e a explicação de conhecimentos matemáticos aprendidos e os que precisam ser melhoras simultaneamente (FIGUEIREDO; RECALCATI; GROENWALD, 2020); de apoiar a reflexão sobre os procedimentos empregados e os conceitos matemáticos envolvidos (ABROMOVICH, 2003).

Outra característica destacada em pesquisas que relacionam a utilização de planilhas eletrônicas ao ensino de matemática é o recálculo automático, o que favorece estudar estruturas matemáticas parametrizadas, além de visualizar simultaneamente tabelas, equações e gráficos, que permite aos alunos compreender a relação entre esses diferentes objetos matemáticos (ROCHA, 2014).

O objetivo geral desta pesquisa é: elaborar, aplicar e analisar tarefas com contextos realísticos e que utilizem planilhas eletrônicas enquanto recurso tecnológico para o processo de ensino e aprendizagem de sequências numéricas no Ensino Médio, com fundamento na Educação Matemática Realística e na experimentação matemática². Toma-se como pressuposto que tarefas geram oportunidade para o estudante desenvolver os conceitos matemáticos, explorar ideias, estratégias e seus pensamentos matemáticos. (TREFFERS, 1987; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996; MENDES, 2014). De forma específica, a pesquisa objetiva

- elaborar e discutir tarefas com contextos realísticos para o ensino e a aprendizagem de Sequências Numéricas;
- discutir e explorar planilhas eletrônicas em tarefas matemáticas enquanto experimentação com tecnologia;
- desenvolver uma proposta de ensino e de aprendizagem sobre sequências numéricas para o Ensino Médio organizada à luz da RME.

Diante disso, foi elaborado uma proposta de cinco tarefas em que em seu desenvolvimento utiliza-se de planilha eletrônica, *Google Sheets*³. O *Google Sheets (Google)* foi a planilha eletrônica escolhida para ser utilizada na pesquisa, pois tem funcionalidade muito parecida com o *Excel (Microsoft)* e *Calc (OpenOffice)*. Essa escolha deveu-se, principalmente, ao fato de o *Google Sheets* ser um *software* livre, que pode ser utilizado por qualquer pessoa. Um outro fator para a escolha dessa tecnologia foi a possibilidade de ser compatibilizada com o *Google Sala de Aula*, plataforma utilizada pelos alunos durante o período de pandemia – COVID-19, período dos anos de 2020 e 2021, em que os alunos participaram das aulas em diferentes modalidades e que as tarefas elaboradas foram desenvolvidas.

Neste período houve diferentes formatos de aula⁴: aula gravada (professor gravou um vídeo e colocou à disposição para os alunos assistirem em suas casas), aula síncrona (professor, por meio de uma plataforma, dava a aula e os alunos participavam simultaneamente,

² A ideia de *experimentação com tecnologia* está associada com a utilização uso de tecnologias informáticas no estudo de conceitos ou na exploração dos problemas matemáticos, por meio de experimentos e tentativas que suportem a criação de conjecturas matemáticas; na descoberta de resultados matemáticos previamente desconhecidos; na possibilidade de testar diferentes caminhos para alcançar o objetivo (BORBA; VILLAREAL, 2005). Na experimentação com tecnologia, a tecnologia em si não é uma ferramenta, mas uma atriz no processo de produção de conhecimento (MAZZI, 2014).

³ O *Google Sheets* é um programa de planilhas incluído como parte do pacote gratuito de Editores de Documentos Google baseado na Web oferecido pelo Google. Disponível em: < https://pt.wikipedia.org/wiki/Google_Sheets>.

⁴ Por meio desses diferentes formatos de aula, a escola encontrou uma solução para dar a continuidade ao ensino regular. A aplicação das tarefas foi adaptada a cada um desses formatos, nesse período, por uma necessidade de adaptar a pesquisa ao contexto de ensino durante a pandemia COVID-19.

possibilitando interação professor-aluno e aluno-aluno); aula com sistema escalonado (professor em sala de aula com alguns alunos e, outra parte dos alunos assistiam a aula de sua casa, simultaneamente); aula presencial (professor e alunos em sala de aula).

Já com relação as tarefas, foram elaboradas 5 tarefas em que envolvem contextos diversos (CORONAVIRUS PARANÁ; VIAGEM PARA PRAIA; ARQUIBANCADA DE UM ESTÁDIO DE FUTEBOL; CRESCIMENTO POPULACIONAL; MARKETING DE REDE), sendo por meio delas possível trabalhar os conceitos envolvidos com relação a progressão aritmética (PA) e progressão geométrica (PG).

Para alcançar os objetivos propostos, esta dissertação organiza-se em 5 capítulos. O Capítulo 1 aborda as fases das tecnologias digitais – desde o início das tecnologias digitais na Educação Matemática até os dias atuais; planilhas eletrônicas enquanto recurso tecnológico; uma síntese do que é um ambiente virtual de aprendizagem e de suas possibilidades para o ensino e a aprendizagem; o pensar-com-tecnologia - que será base para a análise de pesquisa. Capítulo 2 trata da ideia de tarefa enquanto recurso e da abordagem em contexto realístico.

Os aspectos metodológicos da pesquisa estão descritos no Capítulo 3 e foram baseados na *Design Reserch*. Além disso, esse capítulo apresenta as tarefas e o foco da discussão e da análise apresentadas no Capítulo 4. O Capítulo 4, apresenta os detalhes da aplicação e a análise de duas tarefas desenvolvidas. Por fim, Capítulo 5 traz considerações finais em relação à pesquisa, na direção de uma síntese reflexiva acerca do objetivo geral proposto.

Este estudo também desenvolveu um produto educacional que consiste em um conjunto de tarefas matemáticas denominado “Planilhas eletrônicas para o ensino de Sequência Numérica no Ensino Médio”. O produto é baseado nas ideias do pensar-com-tecnologia associado a planilhas eletrônicas e à luz da Educação Matemática Realística. Contém cinco tarefas distintas que podem ser utilizadas por professores no ensino de Sequência Numérica para alunos do Ensino Médio.

1 PENSAR E FAZER COM TECNOLOGIA

A sociedade se desenvolve com a inovação e a tecnologia. Isso ocorre nos mais diversos setores: na indústria, no campo, no comércio, e não seria diferente na educação. Deveria o aluno de hoje⁵ ter a tecnologia digital como algo inerente ao seu cotidiano, ou seja, ela fazer parte de sua realidade, portanto ser (ou precisa mesmo) utilizada enquanto recurso/meio que faz parte dos processos de ensino e de aprendizagem vivenciados pelos professores e alunos.

1.1 FASES DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS

Na Educação Matemática, no Brasil, desde da década de 80, há propostas e perspectivas ligadas à tecnologia para a utilização didática e pedagógica no ensino de matemática. Essas propostas foram organizadas em quatro fases por Borba, Silva e Gadanids (2014). O Quadro 2 apresenta uma síntese dessas fases, podendo inferir que uma fase abarca características da anterior, ampliando o modo de reconhecê-la ou de lidar com ela.

Quadro 2 – Quatro fases das tecnologias digitais

Fase	Tecnologias	Natureza ou base tecnológica das atividades	Perspectivas ou noções teóricas	Terminologia
Primeira (1985)	Computadores, calculadoras simples e científicas.	LOGO programação.	Construcionismo; Micromundo.	Tecnologias informáticas (TI).
Segunda (1990)	Computadores (popularização); calculadoras gráficas.	Geometria dinâmica (Cabri Géomètre; Geometriks); múltiplas representações de funções (Winplot, Fun, Mathematica); CAS (Maple); jogos.	Experimentação, visualização e demonstração; zona de risco; conectividade; ciclo de aprendizagem construcionista; seres-humanos-com-mídias.	(TI) <i>software</i> educacional; tecnologia educativa.
Terceira (1999)	Computadores, <i>laptops</i> e Internet.	Teleduc; <i>e-mail</i> ; <i>chat</i> ; fórum; Google.	Educação à distância <i>on-line</i> ; interação e colaboração <i>on-line</i> ; comunidades de aprendizagem.	Tecnologias da informação e comunicação (TIC).

⁵ “Uma pesquisa feita pelo IBGE em 2018, a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílio Contínua –Tecnologia da Informação e Comunicação (Pnad Contínua TIC), expõe que um em cada quatro brasileiros não têm acesso a internet; ou seja, em números absolutos, isso representa cerca de 46 milhões de pessoas. Ademais, para o Comitê Gestor da Internet no Brasil, 58% dos domicílios não possuem computadores em casa.” (BARBOSA; CUNHA, 2020, p.2).

Quarta (2004)	Computadores; <i>laptops</i> ; <i>tablets</i> ; telefones celulares; Internet rápida.	GeoGebra; objetos virtuais de aprendizagem; Applets; vídeos; YouTube; WolframAlpha; Wikipédia; Facebook; ICZ; Second Life; Moodle.	Multimodalidade; telepresença; interatividade; Internet em sala de aula; produção e compartilhamento <i>on-line</i> de vídeos; performance matemática digital.	Tecnologias digitais (TD); tecnologias móveis ou portáteis.
---------------	--	---	--	---

Fonte: (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014, p.39)

Na primeira fase, aparece a ideia de as escolas poderem ter um laboratório de informática próprio, com um olhar para o potencial da tecnologia que fomentava mudanças pedagógicas, considerava-se que, por meio do computador, há a possibilidade de abordagens inovadoras para a educação, tornando os cidadãos mais capacitados na utilização de tecnologia (BORBA, SILVA; GADANIDIS, 2014).

A Segunda Fase, que teve início em 1990, com a difusão do uso de computadores para uma grande parte da população. Nessa fase, vários *softwares* educacionais foram criados, como o Winplot, o Fun, e o Graphmathica para a representação de funções e o Cabri Géometre e o Geometricks para a utilização em geometria dinâmica (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014). Os professores começaram a encontrar, em cursos de formação continuada, apoio e possibilidades para que a tecnologia fosse utilizada em sala de aula, com isso houve a inserção de tecnologias educacionais na escola (BORBA; ZULATTO, 2010).

Já a terceira fase teve início em 1999 com a chegada da Internet, que professores e alunos começam a utilizar como ferramenta de pesquisa e de comunicação, assim como em cursos de formação continuada por meio de recursos como: *e-mails*, fóruns e *chats*. Nesse contexto, houve a ampliação da sigla TI (tecnologia de informação) para TIC, que significa tecnologias da informação e comunicação (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014).

Desde 2004, considerado o início de uma nova fase, com uma Internet mais rápida e com o advento de *tablets*, *laptops*, telefones celulares e outras tecnologias digitais (TD) põe-se uma possibilidade de um cenário inovador de investigação matemática, integrando geometria dinâmica e representações de funções, como, por exemplo, o *software* Geogebra⁶, além de da multimodalidade de vídeos e ferramentas, novos *designs* e interatividade, tecnologias móveis ou portáteis, performance de estar *online*, Internet em sala de aula e a performance matemática digital (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014).

Em 2004, com uma Internet mais rápida e com o advento de *tablets*, *laptops*, telefones celulares e outras tecnologias digitais (TD), inicia-se a quarta fase. A fase quatro é caracterizada

⁶ <https://www.geogebra.org/>

por um cenário inovador de investigação matemática, integrando geometria dinâmica e representações de funções, como, por exemplo, o *software* Geogebra⁷. Outros fatores que caracterizam essa fase é a multimodalidade de vídeos e ferramentas, novos *designs* e interatividade, tecnologias móveis ou portáteis, performance de estar online, Internet em sala de aula e a performance matemática digital (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014).

Chiari (2018) indaga a possibilidade de estarmos caminhando para uma nova fase, uma fase que considera aspectos da robótica, inteligência artificial, realidade aumentada, envolvendo mudanças qualitativas em relação a integração entre geometria dinâmica e representações múltiplas.

A partir da 4ª fase, as tecnologias digitais favoreceram o estabelecimento de aprendizagens com características virtuais que se tornaram “amplificadores cognitivos”, por envolver uma variedade de artefatos midiático-representacionais e uma relação de proximidade entre os participantes (BAIRRAL, 2009).

Esses amplificadores cognitivos superam o status de suportes, pois favorecem a existências de novas mediações entre os elementos do sistema didático – professor, aluno e saber. As novas tecnologias digitais tornam possíveis o uso das capacidades humanas em processos diferenciados de aprendizagem, permitindo “a articulação das redes pessoais de conhecimentos com objetos técnicos, instituições, pessoas e múltiplas realidades... para construção de espaços de inteligência pessoal e coletiva” (KENSKI, 2003, p.5-6).

1.2 EXPERIMENTAÇÃO COM TECNOLOGIA

A compreensão do professor dessas possibilidades é fundamental, o conhecimento matemático será produzido a partir de um coletivo de seres humanos que pensam com/a partir das tecnologias adequadas para às construções cognitivas (BORBA VILLAREAL, 2015). Borba, Silva e Gadani (2014) utilizam o termo pensar-com-tecnologia, para representar a funcionalidade dos recursos digitais na criação de significados e conhecimentos matemáticos.

No âmbito de uma estratégia pedagógica, a lógica de “pensar com” e “fazer com” as tecnologias na escola favorece ao professor “compreender melhor seus estudantes, permitindo, entre outras possibilidades, explorar ambientes dinâmicos, visualizações e experimentações diversificadas” (MARCELINO; OLIVEIRA, 2015, p.819). Ao planejar o encaminhamento

⁷ <https://www.geogebra.org/>

pedagógico, após a proposta didática elaborada, as tecnologias serão selecionadas, e não o contrário (OLIVEIRA, 2013), ainda,

é preciso considerar que a adoção das tecnologias adequadas à estratégia pensada pelo docente implica no domínio, por parte dele, do funcionamento das mesmas, de modo a fornecer elementos para que os estudantes sob sua tutela possam agregar esta dimensão, a de saber trabalhar com as mídias adequadas às construções de conhecimento que efetuam (MARCELINO; OLIVEIRA, 2015, p.820).

Com essa lógica, de um ensino e aprendizagem a partir do “pensar com” e “fazer com” os alunos tem a possibilidade de vivenciar a experimentação matemática com tecnologia. Segundo Borba e Villareal (2005), a ideia de *experimentação com tecnologia* está associada com o uso de tecnologias informáticas no estudo de conceitos ou na exploração dos problemas matemáticos. Os autores ainda defendem que uma atividade matemática baseada na noção de experimentação com tecnologia deve atribuir meios para o aluno:

- criar e simular modelos matemáticos;
- gerar conjecturas matemáticas;
- explorar diversificadas formas de resolução;
- manipular a dinâmica de objetos construídos;
- realizar testes de conjecturas usando um grande número de exemplos, modificar a representação de objetos, simular componentes de construções, etc.;
- convencer-se e argumentar sobre a veracidade de conjecturas;
- elaborar novos tipos de problemas e realizar construções matemáticas;
- criar e conectar diferentes (e múltiplos) tipos de representações de objetos matemáticos;
- explorar o caráter visual, dinâmico e manipulativo de objetos matemáticos;
- incentivar a combinação de raciocínio intuitivo, indutivo ou abduutivo, o que pode contribuir para o desenvolvimento do raciocínio dedutivo;
- criar atividades matemáticas “abertas controladas”, ou seja, com direcionalidade ao seu objetivo;
- ensinar e aprender matemática de forma alternativa;
- compreender conceitos;
- conhecer novas dinâmicas, formas de conectividade e relação de poder em sala de aula;
- envolver-se com um novo tipo de linguagem (informática) na comunicação matemática, além da escrita;
- criar diferentes tipos de símbolo e notações matemáticas;
- aprofundar-se em variados níveis de rigor matemático;

- identificar incoerências conceituais e/ou aprimorar o enunciado.

Os autores propõem uma discussão com relação a *atividades matemáticas investigativas* que procuram mesclar a natureza do pensamento diferencial e as potencialidades e formas de utilização de tecnologia. O termo atividade para esses autores é utilizado, no sentido usual do dicionário, que pode ser um problema, sequência ou atividade propostos ao aluno, que se tornam um componente da voz do professor, que promovem a inserção do professor no coletivo que envolve alunos e professores (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014).

Existe uma grande quantidade de atividades matemáticas direcionadas à exploração de ideias ou conceitos matemáticos apoiados pelo uso de tecnologias. Muitas dessas atividades são caracterizadas como exploratório-investigativas e permitem que o professor, de forma comprometida, investigue e planeje o desenvolvimento de suas aulas de forma que os alunos explorem diversas formas de resolução, a criação de conjecturas em relação às partes que compõem a atividade. Dessa forma, esses autores ressaltam que, para além de professores utilizarem meios inovadores da tecnologia educacional, é preciso que realizem análises de suas potencialidades para a Educação Matemática, explorando um ambiente heurístico, de descobertas, de formulação de conjecturas e à procura de diversas soluções (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014).

Reconhecendo o potencial da atividade matemática com experimentação com tecnologia, põe-se aos desenvolvedores de materiais didáticos organização escolar e aos professores a demanda de buscar tarefas com potencial para uma experimentação com tecnologia. Essa busca é um dos olhares deste trabalho, especificamente para o ensino de sequências numéricas. Para Mendes, Trevisan e Elias (2018), a elaboração de tarefas vem sendo um desafio para muitos professores, principalmente associadas à noção de experimentação com tecnologia, que aumenta as possibilidades de aprendizagem dos estudantes.

Para os estudantes do século XXI, a experimentação com tecnologia em contexto de sala de aula é algo que é desejável de ser explorado e potencializado, uma vez que eles são cidadãos do século XXI, e uma das mais importantes habilidades para esses cidadãos é “transformar teoria e hipóteses em modelos e programas de computador, executá-los, depurá-los, e utilizá-los para redesenhar processos produtivos, realizar pesquisas científicas ou mesmo otimizar rotinas pessoais” (BLIKSTEIN, 2008. p.8).

Além disso, tarefas matemáticas que favorecem essa experimentação com tecnologia podem ajudar os alunos a desenvolverem um pensamento computacional, que consiste em muito mais do que saber executar uma sequência de procedimentos, mas em “saber usar o

computador como um instrumento de aumento do poder cognitivo e operacional humana” (BLIKSTEIN, 2008. p.8).

As tecnologias digitais abarcam uma linguagem informática que tem características visual e experimental, que intensificam a dimensão exploratória na produção de sentidos e conhecimentos matemáticos. Nesse contexto, objetos matemáticos começam a ser caracterizados de nova forma (digital); modelos matemáticos e algoritmos vão sendo melhorados com novas variáveis; simulações são aumentadas devido à visualização; construções matemáticas adquirem dinamicidade e simultaneidade conforme a dependência entre as relações; conjecturas são pesquisadas na sua experimentação, provando sua verdade e se tornando teorema e novos tipos de problemas começam a ser explorados (BORBA; SILVA; GADANADIS, 2014).

Presmeg (1986) argumenta que a visualização desempenha um papel no processo de aprendizagem matemática, de modo específico, nos raciocínio dos estudantes em desenvolver um conceito ou ideia matemática. Essa visualização pode ser caracterizada por imagens em 5 formas distintas, que são: pictórico (fotos-em-mente); imagens padrão (relações puras de um esquema visual-espacial); imagens da memória de fórmulas; imagens cinestésicas (corporeidade, manipulação, uso dos dedos); imagens dinâmicas (em movimento) (PRESMEG, 1986). Os recursos tecnológicos favorecem o desenvolvimento de práticas em que imagens dinâmicas são exploradas.

Borba, Silvia e Gadanidis (2014) realizaram uma aproximação entre experimentação com tecnologia e investigação matemática. Esses autores apontam que a tecnologia possui um caráter experimental para uma determinada atividade, na busca de um *design* experimental, em que:

- admite diversas possibilidades para uma solução;
- possibilita diferentes soluções;
- novas estratégias podem ser executadas para encontrar uma solução;
- possui um diferencial qualitativo em relação ao lápis e o papel;
- em relação ao viés educacional, é exploratória.

Um ambiente de ensino e de aprendizagem que utiliza a investigação matemática⁸ necessita que os alunos reconheçam a situação (tarefa), explorem as inquietações iniciais, criem

⁸ O nosso interesse não é a metodologia em si, mas as tarefas que propiciam tais características investigativas.

conjecturas, realizem testes e aperfeiçoem conjecturas, demonstrem e avaliem o trabalho executado (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2003).

Borba, Silva e Gadanidis (2014) definem o pensar-com-tecnologia e apontam elementos associados a essa ideia que são a aprendizagem matemática, a investigação matemática e a experimentação com tecnologias (Quadro 3).

Quadro 3 – Pensar-com-tecnologia

Aprendizagem matemática	Investigação matemática	Experimentação com tecnologias
<ul style="list-style-type: none"> ● Produção de conhecimentos matemáticos; ● Pensamento matemático; ● Produção de significados matemáticos. 	<ul style="list-style-type: none"> ● Exploração matemática; ● Elaboração de conjecturas; ● Testes e refinamentos de conjecturas; ● Demonstração e Avaliação; ● Caráter investigativo; ● Design investigativo; 	<ul style="list-style-type: none"> ● Uso investigativo de tecnologias; ● Complexidade do pensamento matemático; ● Conexões entre representações; ● Visualização; ● Caráter experimental; ● Design experimental.

Fonte: Borba, Silva e Gadanidis (2014, p. 56).

1.3 PLANILHAS ELETRÔNICAS

As planilhas eletrônicas, nesta pesquisa, foram selecionadas enquanto uma tecnologia digital que permite uma organização pedagógica em que os alunos fazem e pensam com tecnologia. Elas permitem a formulação de tabelas, elaboração de cálculo de fórmulas e a criação de gráficos, com o intuito de promover o ensino e a aprendizagem do conteúdo sequência numérica, atrelado com o pensar-com-tecnologia (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014).

A utilização das planilhas eletrônicas foi fundamentado na experimentação com tecnologia (BORBA, VILLAREAL, 2005), possibilitando aos estudantes a criação de argumentos que validem as suas conjecturas.

O uso das Planilhas Eletrônicas, tem como objetivo as potencialidades do desenvolvimento cognitivo dos estudantes que é utilizada em tarefas investigativas, em que é possível o aumento da capacidade de trabalhar com uma diversidade de dados, juntamente com a articulação e organização dos dados, a verificação de hipóteses e a exploração do software com a criação de diferentes formas de percepção. (MARCHI, 2014).

O “pensar com” Planilhas Eletrônicas pode influenciar no raciocínio dos alunos, possibilitando rápidos feedbacks para a validação de conjecturas matemáticas, a manipulação dos dados, colocando em evidencia a possibilidade da realização de tarefas matemáticas de maneira qualitativa (MARCHI, 2014).

Existem outros recursos tecnológicos que também calculam fórmulas, criam tabelas e apresentam gráficos que poderiam ser utilizados na pesquisa.

Além disso, as planilhas eletrônicas podem ser utilizadas como recurso para o ensino e aprendizagem de maneira adequada, proposta até mesmo pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

A BNCC propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas. Em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Conseqüentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. Nesse contexto, destaca-se ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior. (BRASIL, 2018, p.530).

A partir do endereço <<https://docs.google.com/spreadsheets>>, tem-se a acesso a diferentes meios para o *Google Sheets*, por meio de um computador ou smartphone. O *Google Sheets* é um software de planilhas eletrônicas gratuito e pode ser utilizado em diversas formas de ensino pois combina álgebra, tabelas, gráficos e o cálculo, segundo a Google, algumas características do software são:

- Criação de informações empíricas para os dados da sua planilha on-line, com compartilhamento fácil e edição em tempo real. Utilização de comentários e atribuição de ações necessárias para manter o fluxo de análise;
- Com recursos de ajuda como preenchimento inteligente e sugestões de fórmulas, é possível acelerar a análise e diminuir os erros. Podendo também agilizar a geração de insights fazendo perguntas sobre seus dados em uma linguagem simples;
- O Sheets contribui para economia de tempo, porque está totalmente conectado a outros apps do Google. Permite com que os dados do Google Forms no Sheets ou incorpore gráficos do Sheets no Slides e Docs;

- Pode responder a comentários pelo Gmail e apresentar facilmente suas planilhas no Google Meet;
- Edição de planilhas do Microsoft Excel on-line sem convertê-las e aproveitar os recursos avançados de ajuda e colaboração do *Sheets*, como comentários, ação necessária e preenchimento inteligente.

1.4 AMBIENTE VIRTUAL DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Um caminho de acesso às tecnologias digitais é dado pelos ambientes virtuais de aprendizagem.

Os Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVA), ou Ambientes Virtuais de Ensino e Aprendizagem (AVEA), são softwares que, disponibilizados na internet, agregam ferramentas para a criação, a tutoria e a gestão de atividades que normalmente se apresentam na forma de cursos. Sendo constituídos a partir do uso de diferentes mídias e linguagens, a intenção é proporcionar não só a disponibilização de conteúdos, mas principalmente plena interatividade e interação entre pessoas e grupos, viabilizando, por consequência, a construção do conhecimento (SILVA, 2016, p.53.).

Ambientes virtuais de aprendizagem vêm, a cada dia, sendo mais utilizados pelos professores como recursos pedagógicas em sala de aula, e estão se tornando e sendo tão utilizados quanto giz, lousa, lápis, caneta, borracha e caderno. Um ambiente virtual de aprendizagem permite que o professor regente possa realizar comunicação com os alunos em horário de aula e fora dela. Atividades enviadas pelos professores podem ser apresentadas de maneira organizada, as respostas dos alunos podem ser organizadas em planilhas e armazenadas em nuvens, o que possibilita interação professor e aluno e aluno e aluno. Dúvidas, perguntas e respostas ficam disponíveis para todos os participantes da turma do ambiente virtual de aprendizagem. Além disso, as notas podem ser atribuídas de maneira instantânea.

O Google Sala de Aula (Classroom) é um ambiente virtual de aprendizagem (AVA) livre e gratuito, que permite a interatividade entre estudantes e o professor, em que se compartilham tarefas, textos, vídeos, *links*, possibilitando diversas formas de se organizar a plataforma, além de dar a opção ao professor de fornecer *feedback* ao aluno. A plataforma permite, ainda, que o professor a utilize como ferramenta pedagógica, podendo realizar a aula com a utilização de tecnologias (CERON, 2019).

Um outro exemplo de tecnologia digital, de grande popularidade, é o celular *smartphone*. Além de ser um dispositivo móvel, pode ter capacidade de processamento maior que alguns computadores de mesa. Por meio dos *smartphones* ou *tablets*, professores têm a oportunidade de criar seus espaços pedagógicos com acesso a *softwares* e outros recursos

digitas (edição de imagem, gravar vídeos, áudios) em suas próprias salas de aula, com poucos problemas técnicos (BORBA; LACERDA. 2015).

2 TAREFAS NA PERSPECTIVA DA RME

Uma tarefa pode ser definida como um segmento das atividades de sala de aula, com o objetivo de gerar uma ideia matemática específica. Uma tarefa pode ser um trabalho longo, com um único problema ou com vários problemas associados (STEIN; SMITH, 1998).

As tarefas matemáticas aplicadas em sala de aula formam a base para o aprendizado do estudante. Diversificadas tarefas geram oportunidades para os alunos pensarem, com demandas cognitivas desde um processo de memorização, de maneira rotineira, outras que os que encorajam a fazer conexões. Além disso, têm um efeito acumulativo, diariamente, através da exploração feita em sala de aula, o que proporciona o desenvolvimento de ideias implícitas aos estudantes (STEIN; SMITH, 1998).

Conforme Ferreira (2013), não faz sentido ensinar às crianças apenas os “conteúdos”, mas, sim, dar a elas diferentes oportunidades para experienciar a matemática como uma atividade em que os conteúdos, conceitos, ideias, algoritmos emergem dos fenômenos com os quais os alunos se envolvem.

Um aspecto importante a ser considerado refere-se ao nível de competências que uma tarefa requer de um aluno ao resolvê-la. Para o aluno se envolver com uma tarefa, dele deve ser requerido mais do que apenas reproduzir procedimentos apresentados por um professor, dele deve ser requerido que estabeleça conexões e realize reflexões. De Lange (1999) enquadra as tarefas em três níveis de competências: Nível I (reprodução); Nível II (conexão), Nível III (reflexão).

As tarefas do Nível I demandam competências ligadas à reprodução, como analisar acontecimentos, aprimorar habilidades técnicas, lembrar objetos matemáticos e propriedades, utilizar algoritmos conhecidos, reconhecer equivalências, efetuar processos de rotina. As tarefas desse nível são baseadas em Múltipla Escolha, Múltipla Escolha Complexa e Resposta de Construção Fechada (DE LANGE, 1999).

As tarefas do Nível II demandam competências de conexão. É necessário que os alunos trabalhem com diversas formas de representação, conforme a situação, integrem informações, façam-se aptos para distinguir e relacionar diferentes declarações: decodificar e analisar linguagem simbólica ou formal, como também associar com a linguagem natural, formular e resolver problemas e lidar com situações. Esse tipo de tarefa é analisado dentro de um contexto que envolve o estudante na tomada de decisão matemática (DE LANGE, 1999).

As tarefas de Nível III envolvem competências de reflexão, utilizam a matematização de situações que reside no conhecimento e na extração da matemática envolvida, assim como

se emprega na resolução de problema. Criam análise, interpretação, desenvolvimento de modelos e estratégias, apresentação de argumentos, proposta de questões, generalização, provas, incluem reflexões a respeito do processo (DE LANGE, 1999).

De Lange (1999) aponta que os níveis não possuem uma diferença clara entre eles, pois, em uma tarefa de um determinado nível, podem existir competências relacionadas a outro nível.

Assim como o nível de competência requerido para a tarefa, o contexto em que ela está envolvida pode gerar diferentes experiências e ações que favorecem o aprendizado do estudante. Vale (2012) defende a importância de tarefas de natureza exploratória no contexto de sala de aula, principalmente na propagação de descobertas e na análise de padrões em figuras ou imagens que contribuam para o pensamento algébrico. Tarefas exploratórias favorecem que o professor valorize a criatividade, reconheça a importância das relações de variados temas da matemática em contextos distintos e reconheça que muitos conceitos, antes ensinados sem um contexto realístico e que não tinha significado para os estudantes, podem ser explorados e favorecerem a aprendizagem de uma matemática que permite resolver e analisar problemas da realidade. A sala de aula é o local ideal para investigação e exploração de tarefas que geram experiências didáticas, que auxiliem o professor a ensinar e os alunos a aprenderem.

Peressin e Knuth (2000) reconhecem três processos para sustentar a cultura de tarefas de natureza exploratória na Educação Matemática: trabalhar com tarefas matemáticas ricas; proporcionar um diálogo sobre as tarefas e as resoluções com os alunos; refletir sobre as tarefas e discussões para que se possa potencializar a tarefa matemática.

Freudenthal (1905-1990) foi um dos idealizadores da reforma curricular holandesa do ensino de matemática, com o intuito de abandonar o pensamento mecanicista. A partir de suas ideias, a Holanda não seguiu o pensamento empirista, nem o estruturalista, no que foi seguida por muitos outros países (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010). A partir das ideias colocadas por Freudenthal, foram criadas as bases da Educação Matemática Realística, uma abordagem para o ensino de matemática.

O Quadro 4 apresenta algumas das ideias das correntes de pensamento citadas.

Quadro 4 – Abordagens tradicionais segundo Van den Heuvel – Panhuizen (2010)

Abordagem	Características
Mecanicista	<ul style="list-style-type: none"> ● Foco em cálculos com números simples e a pouca atenção prestada às aplicações. ● Analisar o que é certamente verdade para o início do processo de aprendizagem.

	<ul style="list-style-type: none"> • Matemática é ensinada de uma forma atomizada. • Estudantes aprendem o procedimento de uma maneira passo a passo na qual o professor demonstra como resolver um problema (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010, p.4, tradução Ferreira, 2013).
Empirista	<ul style="list-style-type: none"> • Alunos eram deixados livres para descobrir muito por si próprios. • Eram estimulados a realizar investigações (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010, p.4, tradução Ferreira, 2013).
Estruturalista	<ul style="list-style-type: none"> • Foca em diversos conceitos abstratos, como a teoria dos conjuntos, funções e outras bases diferentes de dez investigações (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010, p.4, tradução Ferreira, 2013).

Fonte: adaptado de Ferreira (2013)

Freudenthal (1971, p. 413-414) define a matemática como atividade humana que pode ser entendida como

uma atividade de resolução de problemas, de procura por problemas, mas é também uma atividade de organização de um determinado assunto. Este pode ser um assunto da realidade que deve ser organizado de acordo com modelos ou padrões matemáticos caso os problemas da realidade devem ser resolvidos. Também pode ser um assunto matemático, resultados novos ou antigos, de próprio país ou de outros, que devem ser organizados (FREUDENTHAL, 1971, p.413-414, apud: Ferreira, 2013, p.31).

Freudenthal (1991) defende a matemática como uma “Atividade Humana” em construção, em que os alunos têm a oportunidade de reinventar a matemática, criando-a, em vez de “tomá-la” pronta e acabada. No contexto escolar, essa construção é realizada por meio da reinvenção guiada, um caminho orientado pelo professor a partir de produções dos estudantes ao lidarem com tarefas realísticas.

A matemática possui a capacidade de eliminar o contexto e colocar outros contextos de uma mesma maneira, fazendo dela uma atividade útil para a alfabetização matemática⁹.

A compreensão da matemática é essencial na formação da vida de um jovem nos dias de hoje. Uma grande quantidade de problemas e situações cotidianas, até mesmo em contextos profissionais, requer um certo nível de compreensão de matemática, raciocínio matemático e ferramentas matemáticas, para que possa ser analisada. A matemática é uma ferramenta que auxilia pessoas no enfrentamento de desafios na vida pessoal, ocupacional, social e científica,

⁹ A alfabetização matemática é a capacidade do indivíduo para formular, empregar e interpretar matemática em uma variedade de contextos. Inclui raciocínio matemático e uso de conceitos matemáticos, procedimentos, fatos e ferramentas para descrever, explicar e prever fenômenos. Ajuda os indivíduos a reconhecerem o papel que a matemática desempenha no mundo e a fazerem julgamentos e decisões bem fundamentados, necessários para cidadãos construtivos, engajados e reflexivos (OECD, 2017, tradução nossa).

por isso, existe a necessidade de o jovem sair preparado para aplicar a matemática em diversos contextos (OECD, 2017).

Pode até parecer inofensivo trabalhar apenas com questões sistematizadas, uma vez que até máquinas conseguem operar, mas não estamos em processo mecanizado, estamos em um processo em que o aluno é também responsável pela construção de seus conhecimentos. O ensino de matemática, a partir do próprio conteúdo matemático para, depois, trabalhar as suas aplicações, é considerado uma inversão antididática. Os alunos devem fazer matemática para produzir conhecimento, resolver problemas, organizar e abordar fenômenos corriqueiros em sala de aula (FREUDENTHAL, 1968).

Para Freudenthal (1991), a aprendizagem matemática deve partir de situações em que o aluno tem a oportunidade de reinventar a matemática, em que o aluno assume a posição de “autor”. Por meio dessa situação, ele pode visualizar a matemática em movimentação e não considerada como algo finalizado. Freudenthal (1991) defende alguns pontos que foram buscados neste trabalho, que são os princípios da reinvenção guiada:

- os alunos assumem papel de protagonista ao lidar com uma tarefa e no contexto da sala de aula;
- o professor atua como mediador e orientador no processo de aprendizagem por meio de intervenções;
- as tarefas são pontos de partida para o processo de aprendizagem e devem ter contextos realísticos;
- a matemática é uma atividade humana;
- a experiência do aluno é o ponto fundamental da aprendizagem, por meio dela tem sempre a oportunidade de reconstruir e construir conhecimento.

Diante das perspectivas da reinvenção guiada, o processo de aprendizagem é pensando em níveis. Em um determinado nível, um objeto de estudo pode ser matematizado, já em outros níveis, pode servir de organização, na iniciativa de matematizar e sistematizar diversos objetos. (FERREIRA, 2013). Freudenthal tinha a ideia de organizar matematicamente a realidade, a qual foi chamada de “matematização” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2003).

Treffers (1987) definiu a matematização como:

Uma atividade organizada. Ela refere-se à essência da atividade matemática, à linha que atravessa toda educação matemática voltada para aquisição de conhecimento factual, à aprendizagem de conceitos, à obtenção de habilidades e ao uso da linguagem e de outras organizações, às habilidades na resolução de problemas que estão, ou não, em um contexto matemático (TREFFERS, 1987, p.51-52, apud FERREIRA, 2013, p.34).

Assim como a ideia de atividade humana, a matematização não tem seu foco associado ao produto e à forma da atividade, mas, sim, à própria atividade e seu efeito. (VAN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

Um vez que a matematização é um processo que pertence aos estudantes, a atividade de organizar assuntos matemáticos, a “didatização”, é uma função do professor a organização dos fenômenos a serem aplicados. (FERREIRA, 2013).

Ferreira e Buriasco (2016, p.37-38) apresentam seis princípios que caracterizam a Educação Matemática Realística, conforme apresentado no Quadro 5.

Quadro 5 - Resumo dos princípios da RME

Princípios e Características	
(1) Da Atividade	<ul style="list-style-type: none"> - refere-se à interpretação matemática como atividade humana (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - aprender é uma atividade construtiva (NES, 2009); - as produções dos estudantes são utilizadas para a construção de conceitos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000).
(2) Da Realidade	<ul style="list-style-type: none"> - a RME tem a função de tornar os alunos capazes de aplicar matemática (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - o processo de matematização ocorre a partir da exploração de contextos ricos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - fenômenos da realidade devem ser organizados por meio da matemática (NES, 2009); - é importante o uso de contextos que sejam significativos para o aluno como ponto de partida para a aprendizagem (WIDJAJA; HECK, 2003).
(3) De Níveis	<ul style="list-style-type: none"> - os alunos passam por vários níveis de compreensão (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - começam de seus procedimentos informais e por meio da matematização progressiva e esquematizações e avançam para a construção de modelos mais formais (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - “os modelos de” são desenvolvidos na direção de se tornarem “modelo para” (STREEFLAND, 1991).

(4) De entrelaçamento	<p>- domínios matemáticos, como geometria, número, medição e manipulação de dados, não são considerados capítulos curriculares isolados, mas fortemente integrados (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010);</p> <p>- os alunos devem desenvolver uma visão integrada da matemática, bem como flexibilidade para se conectar a diferentes subdomínios e/ou a outras disciplinas (WIDJAJA; HECK, 2003);</p> <p>- a resolução de problemas de contextos ricos significa que por vezes se tem de aplicar uma ampla gama de ferramentas matemáticas e entendimentos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000);</p> <p>- a força do princípio entrelaçamento é que traz coerência para o currículo. Este princípio refere-se não só aos diferentes domínios de matemática, mas também podem ser encontradas dentro deles mesmos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000).</p>
(5) Da Interatividade	<p>- a aprendizagem matemática não é apenas uma atividade pessoal, mas também uma atividade social (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010);</p> <p>- os alunos devem ter oportunidades para compartilhar suas estratégias e invenções uns com os outros e com o professor (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010);</p> <p>- a interação entre alunos e professores é uma parte essencial na RME porque a discussão e colaboração oportunizam a reflexão a respeito do trabalho (WIDJAJA; HECK, 2003).</p>
(6) De Orientação	<p>- os estudantes devem contar com uma oportunidade “guiada” para “reinventar” a matemática (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010);</p> <p>- o ensino e os programas devem basear-se num conjunto coerente de trajetórias de ensino-aprendizagem (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010);</p> <p>- os alunos precisam de espaço para construir conhecimentos matemáticos e ferramentas por si só. Para alcançar isso, os professores proporcionam aos alunos um ambiente de aprendizagem em que este processo de construção possa surgir e ser desenvolvido (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000).</p>

Fonte: Ferreira e Buriasco (2016, p.37-38)

Tendo em vista a fundamentação teórica apresentada nos dois primeiros capítulos e o objetivo desta pesquisa - “elaborar, aplicar e analisar tarefas com contextos realísticos e que utilizem planilhas eletrônicas enquanto recurso tecnológico para o processo de ensino e aprendizagem de sequências numéricas no Ensino Médio, com fundamento na Educação Matemática Realística e na experimentação matemática”, estabelecemos e apresentamos um espaço pedagógico com características dos princípios do Quadro 5.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa desenvolveu-se no contexto de uma escola, de forma aplicada, com uma natureza qualitativa e de cunho interpretativo, que busca elaborar, aplicar e analisar tarefas com contextos realísticos e que se utilizem de planilhas eletrônicas enquanto recurso tecnológico para o processo de ensino e aprendizagem de sequências no Ensino Médio. A aplicação se deu em aula de matemática, com um professor-pesquisador e alunos do Ensino Médio, em uma escola filantrópica de Maringá, Paraná.

A pesquisa é de natureza qualitativa de cunho interpretativo pela natureza das questões e pelo fato de se pretender uma descrição dos fenômenos educativos, assim como a sua interpretação. Para fundamentar o trabalho, realizou-se um aprofundamento teórico sobre Educação Matemática Realística e Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação na Educação Matemática em livros, artigos científicos, dissertações, teses e materiais da rede eletrônica. A pesquisa foi aplicada com base na metodologia de Design Research (VAN EERDE, 2013):

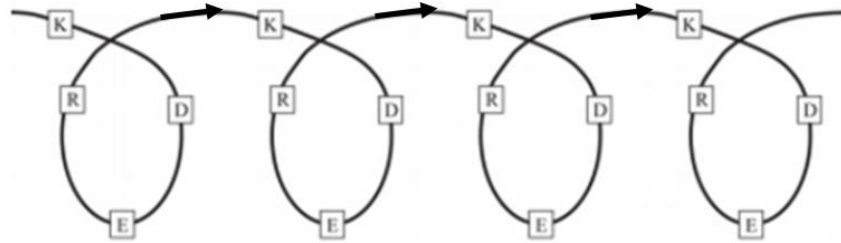
A pesquisa em design tem principalmente um objetivo consultivo, ou seja, fornecer insights teóricos sobre como formas inovadoras de ensino e aprendizagem podem ser promovidas. Pesquisadores de design intervêm nas práticas educacionais atuais com o objetivo de melhorar a duração. Para entender porque a aprendizagem atual dos alunos é um projeto insatisfatório dos pesquisadores e promulgar novos materiais, como atividades de aprendizagem. Em seguida, eles investigam para entender como essas novas atividades levam ao aprendizado (VAN EERDE, 2013, p.2).

3.1 A DESIGN RESEARCH

O objetivo de um experimento de *design* é melhorar o *design* inicial de um produto, testando e revisando conjecturas segundo o informado pela análise contínua do raciocínio dos alunos e do ambiente de aprendizado (COOB; CONFREY; DI SESSA; LEHRER, SCHAUBLE, 2003)

A presente pesquisa utiliza o aspecto cíclico da metodologia de Design Research (VAN EERDE, 2013), que tem, principalmente, um objetivo consultivo. Ou seja, fornecer *insights* teóricos de como formas inovadoras de ensino e aprendizagem podem ser promovidas. A pesquisa de *design* visa à inovação educacional e tem um caráter cíclico (desenvolvimento e previsão, experiências de ensino e reflexão e revisão de um processo iterativo), o qual tem as hipóteses constantemente testadas e revisadas durante todo o processo de aplicação. O caráter cíclico também está relacionado com microciclos (VAN EERDE, 2013).

Figura 2 - Processo cíclico de conhecimento, *design*, experimento, reflexão e (novo) conhecimento



Fonte: adaptado de Van Eerde (2013, p.3)

Dado o conhecimento atual (K), o pesquisador define experimentos mentalmente e projeta problemas e atividades (D), realiza o experimento (E) e, com os resultados e problemas da atividade, reflete (R) no experimento. Isso acaba resultando em um novo conhecimento. No microciclo, o novo conhecimento pode gerar uma necessidade de fazer pequenas mudanças no desenho de uma aula de acompanhamento (VAN EERLE, 2013).

A primeira fase, Fase 1, de uma pesquisa baseada na Design Reserch é denominada de preparação e desenho, na qual são realizadas a revisão da literatura, a formulação do objeto de pesquisa e a questão geral da pesquisa. Na segunda fase, Fase 2, o professor-pesquisador elabora a experiência de ensino, define quais dados serão recolhidos e como serão recolhidos e, após isso, a atividade é aplicada. Por fim, na última fase, Fase 3, acontece uma análise retrospectiva, e é tomada a decisão de recriar ou criar um novo projeto para ser aplicado a um novo ciclo (VAN EERLE, 2013)

Conforme Coob, Confrey, Di Sessa, Lehrer e Schauble (2003), é possível identificar cinco recursos transversais nos experimentos baseados na Design Research.

- Desenvolver uma classe de teorias sobre o processo de aprendizagem e os meios que estão planejados para basear a aprendizagem.
- Ser metodologia de natureza altamente intervencionista, com intenção de investigar as possibilidades de melhoria educacional.
- Criar condições para o desenvolvimento de teorias.
- Provocar um *design* iterativo - conjecturas são geradas e talvez negadas, outras novas conjecturas são desenvolvidas e submetidas a teste.
- Teorizar durante a aplicação.

Nesta pesquisa, a Design Reserach é um recurso para refinar as tarefas que o professor-pesquisador utiliza em sala e, com as experiências obtidas nos ciclos, é criado o produto educacional.

Após à exposição dos aspectos da Design Research, apresenta-se no Quadro 6 o detalhamento da Experiência de Ensino aqui construída, aplicada e analisada, evidenciado passos da pesquisa.

Quadro 6 – Caminho metodológico baseado nas Fases da Design Research

Fase da pesquisa de Design	Tópicos	Passos metodológicos desta Pesquisa
Fase 1: Preparação e desenho das tarefas	Revisão da literatura	Ao decidir a temática da pesquisa, foi feito um estudo da literatura a fim de encontrar indícios relevantes sobre o que era estudado.
	Formulação do objetivo da pesquisa	Decisão em grupo de Pesquisa - orientador e orientandos com foco nas linhas de pesquisa do PPGMAT.
	Questão geral da pesquisa	Como utilizar em sala de aula contextos realísticos e recursos tecnológicos para ensinar matemática, em particular, Sequências Numéricas?
Fase 2: Experiência de ensino	Tipos de dados e como são coletados	- Observações da prática - caderno de campo, vídeo e áudio de cada tarefa. - Diálogo com alunos durante e após a finalização do trabalho. - Produção escrita dos alunos.
	Aplicação das tarefas	ciclo 1: 2020 - 1 turma da 1ª série do Ensino Médio ciclo 2: 2021 - 1 turma da 1ª série do Ensino Médio
Fase 3: Análise retrospectiva	Transcrição de registros de vídeos e áudios	Análise descritiva da prática.
	Análise retrospectiva	Análise Reflexiva fundamentada na Experimentação com tecnologia e na Educação Matemática Realística.

Fonte: autor, adaptado de Van Eerle (2013).

3.2. CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

A ideia de desenvolver tarefas surgiu do interesse do professor-pesquisador e de sua orientadora a partir de uma discussão acerca da práxis, do papel da matemática para lidar e resolver situações problema na primeira reunião de orientação, logo após o ingresso como aluno regular do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática - PPGMAT. A decisão foi

investigar práticas de ensino no contexto da escola por meio de tarefas matemáticas que envolvem recursos tecnológicos e contextos realísticos. A proposta da pesquisa foi apresentada aos gestores da escola, equipe pedagógica e responsáveis pelos alunos participantes, e todos manifestaram de acordo em participar.

Para responder à questão da pesquisa: “Como podemos utilizar contextos realísticos e recursos tecnológicos para ensinar matemática?”, definiu-se, como objetivo geral, “elaborar, aplicar e analisar tarefas com contextos realísticos e que utilizem planilhas eletrônicas enquanto recurso tecnológico para o processo de ensino e aprendizagem de sequências no Ensino Médio, com fundamento na Educação Matemática Realística e na experimentação matemática.

Sequências Numéricas foi o conteúdo programático escolhido por ser um dos assuntos a ser trabalhado com as turmas de 1ª série do Ensino Médio sob responsabilidade do pesquisador no período de desenvolvimento da pesquisa de mestrado.

Com base nos princípios colocados por Ferreira (2013), que estão diretamente ligados ao papel dos contextos realísticos, é que todas as tarefas foram elaboradas e aplicadas.

O Quadro 7 apresenta uma descrição sintetizada de cada uma das 5 tarefas aplicadas em sala de aula.

Quadro 7 - Características das tarefas

	Contextos	Objetivos
Tarefa 01	Coronavírus no Paraná	<ul style="list-style-type: none"> ● Obter uma sequência. ● Interpretar uma sequência. ● Resolver um problema que envolva sequência.
Tarefa 02	Viagem para praia	<ul style="list-style-type: none"> ● Reconhecer e classificar uma PA. ● Reconhecer a razão de uma PA. ● Determinar um termo qualquer de uma PA. ● Escrever o termo geral de uma PA. ● Aplicar o conceito de uma PA em contexto realístico.
Tarefa 03	Arquibancada de um estádio de futebol	<ul style="list-style-type: none"> ● Reconhecer a razão de uma PA. ● Determinar um termo qualquer de uma PA. ● Escrever o termo geral de uma PA. ● Aplicar o conceito de uma PA em contexto realístico.

		<ul style="list-style-type: none"> ● Calcular a soma de termos de uma PA.
Tarefa 04	Crescimento Populacional	<ul style="list-style-type: none"> ● Reconhecer e classificar uma PG. ● Determinar um termo qualquer de uma PG. ● Representar o termo geral de uma PG. ● Representação gráfica de uma PG. ● Aplicar conceito de PG em contexto realístico.
Tarefa 05	Marketing de rede.	<ul style="list-style-type: none"> ● Representar o termo geral de uma PG. ● Calcular a soma de n termos de uma PG. ● Calcular o produto de n termos. ● Aplicar conceito de PG em contexto realístico

Fonte: Autor.

A princípio, a aplicação das tarefas foi planejada para um contexto de sala de aula regular de duas turmas de 1º ano do Ensino Médio de uma escola filantrópica de Maringá, ensino presencial. Devido à Pandemia do Coronavírus em 2020, a aplicação das tarefas teve que ser realizada de maneira remota, com a utilização do *Google Sala de Aula*, *Google Meet* e *Google Sheets*.

A primeira aplicação das tarefas foi realizada no segundo semestre de 2020 em uma turma, com 32 alunos da 1ª série do Ensino Médio de uma escola privada do Paraná na cidade de Maringá. A aplicação ocorreu no período regular de aula, e todos os alunos aceitaram participar das atividades. A período de aplicação das tarefas foi ao longo de em 13 aulas de 45 minutos cada uma.

Os dados para a análise foram coletados através das gravações de vídeo das aulas realizadas por meio do *Google Meet*, do registro no diário do professor-pesquisador e da produção escrita dos alunos. Na descrição da pesquisa, os alunos foram renomeados com um código constituído de uma letra atribuída de maneira aleatória.

Com a análise da produção escrita dos alunos e do diário do professor-pesquisador e com a escuta dos áudios dos alunos, refletiu-se sobre os dados obtidos e, a partir deles, foram feitas algumas alterações para ser realizado um novo ciclo de aplicação das tarefas no segundo semestre letivo do ano de 2021.

A segunda aplicação ocorreu no segundo semestre de 2021, em uma turma da 1ª série do Ensino Médio em que o professor-pesquisador era o docente responsável por ministrar as

aulas de Matemática. Essa etapa ocorreu na cidade de Maringá, na mesma escola do 1º ciclo, porém com a participação 26 alunos de uma turma, de modo híbrido - alguns alunos em casa e outros na escola. A direção e colegiado concedeu a autorização para a utilização dos dados recolhidos para fins da pesquisa. Para a análise dos dados, as produções e áudios dos alunos foram renomeados com uma letra escolhida de maneira aleatória.

Do mesmo modo que na primeira aplicação, os dados coletados foram as produções escritas, as gravações via *Google Meet* e o diário do professor-pesquisador. Após a aplicação das tarefas, foram selecionadas as duas primeiras tarefas para uma descrição detalhada. A partir dessa descrição, foram analisados o papel do coletivo, o papel do professor-pesquisador e o papel do aluno na aplicação das tarefas com contextos realísticos e que utilizaram de planilhas eletrônicas no processo de ensino e aprendizagem de Sequências Numéricas no Ensino Médio.

3.3. O PRODUTO EDUCACIONAL

O produto educacional da pesquisa consiste em um conjunto de tarefas matemáticas com o nome “Planilhas eletrônicas para o ensino de Sequência Numérica no Ensino Médio” elaborado juntamente com esta dissertação. O caderno contém um capítulo que aborda ideias do pensar-com-tecnologia associado a planilhas eletrônicas, em seguida, um segundo capítulo abordando alguns conceitos da Educação Matemática Realística e, por fim, o conjunto de 5 tarefas distintas que podem ser utilizadas por professores durante todo o ensino de Sequência Numérica.

O produto educacional será exposto em um ambiente virtual de ensino e aprendizagem: *Google Classroom*, contendo a descrição de todas as tarefas, os processos de aplicação em cada aula, informações sobre os referenciais teóricos, vídeos explicativos de como utilizar ferramentas no *Google Sheets* e tendo a possibilidade de aplicação das tarefas em diferentes modalidades de aula (ensino remoto, ensino híbrido e presencial).

A ideia é de que o produto educacional apresente orientações acerca de um ensino e de uma aprendizagem matemática apoiados no pensar com tecnologia, em tarefas em contextos realísticos e conhecimento do *software* que será utilizado.

O Quadro 8 traz a ordem da aplicação, título de cada tarefa e a descrição de cada uma.

Quadro 8 - Tarefas que compõem o produto educacional

Tarefa	Nome	Descrição da tarefa
1	Coronavírus no Paraná	Fazer um levantamento dos dados de COVID e analisar o que acontece e o que representa.
2	Viagem para praia	Análise de uma viagem em que são colocados padrões, que possam ser reconhecidos e aplicados.
3	Arquibancada de um estádio de futebol	Levantamento do número de cadeiras que um estádio de futebol pode ter.
4	Crescimento Populacional	Cálculo de uma determinada população envolvendo conceitos de progressão geométrica.
5	Marketing em rede	Análise analítica e crítica desse tipo do <i>marketing</i> de multinível.

Fonte: Autor

3.3.1. TAREFA 01: CORONAVÍRUS NO PARANÁ

Tema: Sequência Numérica e o seu comportamento

Objetivos: de forma intuitiva organizar dados ordenados; desenvolver o conceito de sequência numérica; analisar comportamento de sequências numéricas; lidar com situações contextualizadas.

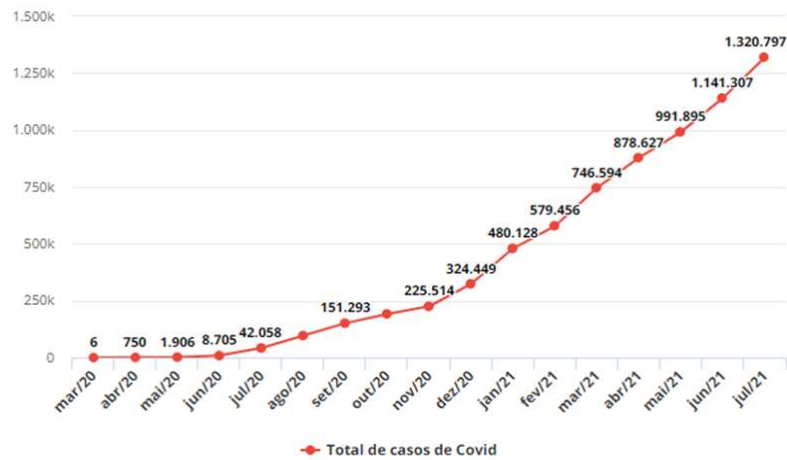
Segue, no Quadro 9, o enunciado da primeira tarefa, seguido de uma descrição do planejamento das aulas em que foi utilizada.

Quadro 9 – Enunciado da Tarefa 01: Coronavírus no Paraná

Mortes pela Covid sobem para 34.076 no Paraná, e secretaria da Saúde confirma 1.352.914 casos
Boletim divulgado neste sábado (24/07/2021) aponta aumento de 83 óbitos e 2.308 diagnósticos, em comparação com o dia anterior; em todo o estado, 1.007.557 pessoas se recuperaram da doença.
Subiu para 34.076 o número de mortes causadas pela Covid-19 no Paraná, conforme boletim publicado neste sábado (24) pela Secretaria de Estado da Saúde (Sesa). Ao todo, são 1.352.914 casos confirmados desde o início da pandemia.
O levantamento aponta que 65% dos leitos de Unidade de Terapia Intensiva (UTI) para adultos reservados para tratamento da doença no Sistema Único de Saúde (SUS) estão ocupados. A taxa de recuperação no estado está de 72%.

Evolução mensal de casos da Covid no Paraná

Dados do dia 12 de cada mês; primeiros registros foram confirmados em 12 de março de 2020

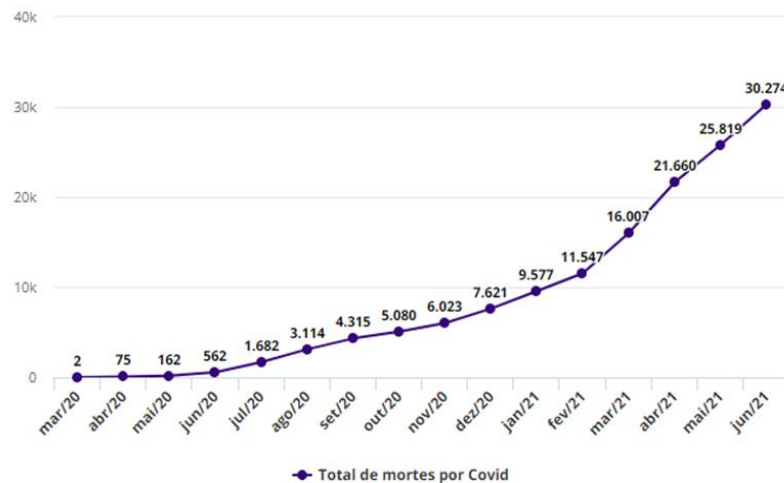


Fonte: Secretaria de Estado da Saúde (Sesa)

As mortes mencionadas são de 37 mulheres e 46 homens que estavam internados. Os pacientes tinham idades entre 21 e 92 anos. Segundo a secretaria, os óbitos ocorreram entre 21 de janeiro e este sábado. A taxa de letalidade da Covid-19 no Paraná está em 2%, segundo o relatório.

Evolução mensal das mortes por Covid no Paraná

Dados do dia 27 de cada mês; primeiros registros foram em 27 de março de 2020



Fonte: Secretaria de Estado da Saúde (Sesa)

Adaptado de <https://g1.globo.com/pr/parana/noticia/2021/07/24/mortes-pela-covid-sobem-para-34076-no-parana-e-secretaria-da-saude-confirma-1352914-casos.ghtml>

Criem uma tabela utilizando o *Google Sheets* e façam um levantamento do número diário de pessoas infectados pelo COVID-19 por dia, de novos casos e casos acumulados, de casos ativos, de óbitos, de óbitos acumulados, de vacinados ao dia e número de vacinados acumulados de uma das cidades dentre Curitiba, Londrina, Maringá, Ponta Grossa, Cascavel ou Foz do Iguaçu.

Seguem abaixo questionamentos que vocês precisam conversar e discutir em seus grupos para então construir um relatório que atenda o ponto de vista de todos. Apesar de algumas perguntas serem diretas, reflitam por quais razões elas se fazem importantes e pertinentes nessa pesquisa.

- A. Qual a população da cidade escolhida? Qual a relevância dessa informação?
- B. Em algum período teve maior aumento de novos casos? Justifique.
- C. Em algum período houve redução do número de novos casos? Justifique.
- D. O que se pode dizer sobre o comportamento do número de casos ativos?
- E. Construa um gráfico com o número total de casos acumulados.
- F. Construa um gráfico com o número de casos ativos ao dia.
- G. Construa um gráfico com o número de óbitos ao dia.
- H. O que pode ser dito sobre os dados coletados? (Use termos: Redução, Aumento e Constante)

Cada grupo terá cerca de 5 min para apresentar as análises feitas e além disso, precisa entregar um relatório da pesquisa realizada (modelo de relatório em anexo) em data agendada.

Fonte: Autor.

Tempo e alunos: tarefa elaborada para aplicação à alunos da 1ª série do Ensino Médio ao longo de 6 aulas de 45 minutos (*Aula 1, Aula 2, Aula 3, Aula 4, Aula 5 e Aula 6*).

Recursos: computador ou smartphone com acesso à internet para cada grupo de alunos.

Organização e planejamento das aulas:

- *Aula 1:*

Inicialmente, a turma será dividida em grupos em torno de 5 alunos por grupo, cada grupo ficará responsável por analisar a situação da doença COVID-19 em uma cidade do Paraná, sendo que nenhuma que cidade deverá ser estudada por mais de um grupo da mesma turma.

Após a divisão dos grupos o professor-pesquisador irá apresentar um panorama dos números da doença no estado do Paraná, incluindo: total de casos ao final de cada dia, novos casos diários, recuperados a cada dia, casos ativos ao dia, novos óbitos ao dia e número de obtidos acumulados de pessoas em um determinado período de tempo.

Após a apresentação dos dados, o professor-pesquisador irá compartilhar uma tabela do *Google Sheets* para cada grupo. Essa tabela será utilizada nas próximas aulas pelos alunos.

- *Aula 2:*

O professor-pesquisador irá explicar algumas ferramentas do *Google Sheets* para que os alunos possam trabalhar com os dados, em seguida, os alunos iniciarão a alimentação da planilha e a análise dos dados. Com isso, o professor irá observar o andamento das atividades e auxiliará os alunos conforme for solicitado.

- *Aula 3 e Aula 4:*

O professor-pesquisador irá apresentar um modelo de relatório que cada grupo deverá fazer, contendo introdução, desenvolvimento e conclusão, em diante, retomarão as atividades da aula anterior e posteriormente a construção do Relatório.

- *Aula 5:*

Cada grupo irá apresentar o trabalho em um tempo de 5 minutos, após as apresentações o professor-pesquisador fará uma conclusão sobre a tarefa e o que foi observado.

- *Aula 6:*

O professor-pesquisador vai conduzir aulas expositivas dialogadas para sistematizar conceitos de sequências numéricas. Por meio de questionamentos o professor-pesquisador vai conduzir uma discussão entre toda a turma para que utilizem a linguagem matemática em relação aos conceitos de sequências utilizados ao lidar com Tarefa 01.

No Quadro 10 é apresentado alguns questionamentos que poderão ser levantados pelo professor-pesquisador.

Quadro 10 – Perguntas norteadoras da Tarefa 01

Porque realizamos essa tarefa sobre a COVID-19 em algumas cidades do Paraná?
Qual relação dessa tarefa com as aulas de matemática?
Depois de realizarem a tarefa, vocês acreditam de qual forma pesquisadores conseguem prever futuros casos de coronavírus?
Alguém tem ideia de como pode ocorrer essa previsão?
Nos dados levantados, algum dia tem relação com outro?
Com os dados levantados, é possível determinarmos um termo geral para essa sequência?
Vocês acreditam que se for estabelecido alguns parâmetros, colocando média móvel ou alguma outra coisa, seria possível fazer projeções a respeito da doença?
É possível determinar os termos da sequência?
Como foi fazer a apresentação em uma aula remota?
Como foi a experiência de utilizar as planilhas eletrônicas?

Acreditam que trabalhar em grupo contribuiu para o aprendizado individual?

Fonte: Autor.

3.3.2. TAREFA 02: VIAGEM PARA PRAIA

Tema: Progressão Aritmética (PA)

Objetivos: de forma intuitiva explorar uma PA; reconhecer a razão de uma PA; Determinar um termo qualquer de uma PA; Escrever o termo geral de na PA; analisar comportamento de sequências numéricas; lidar com situações contextualizadas.

Quadro 11 – Enunciado da Tarefa 02: Viagem para praia.

Tarefa 02 – Viagem para praia.

Um automóvel parte da cidade de Maringá - PR e vai para uma praia do litoral brasileiro em uma velocidade média constante igual a 90 km/h.

Observação: cada grupo de alunos deve escolher uma praia do litoral brasileiro, sendo que as praias escolhidas não poderão se repetir entre os grupos formados em sala.

Pesquise no Google Maps a menor distância entre o ponto de partida e de chegada, sendo que a viagem dever ser realizada de carro. Ao obter o valor da distância, arredonde-a para um número múltiplo de 90.

1. Os itens abaixo devem ser respondidos a partir das informações obtidas no Google Maps.
 - A. Quantos quilômetros o automóvel percorre em uma hora?
 - B. Com o auxílio de uma planilha eletrônica, construa uma tabela e obtenha quantos quilômetros o automóvel percorre em 0h, 1h, 2h, 3h, 4h, 5h, ... de viagem até chegar ao local desejado.
 - C. Expliquem o conceito de sequência a partir da resposta desenvolvida no item B
 - D. O que vocês observam de regular (padrão) entre os termos?
 - E. Qual é o tempo da viagem? Essa informação está na tabela do item B?
 - F. Com o auxílio de uma planilha eletrônica, faça uma representação gráfica da distância em relação ao tempo percorrido.
 - G. O que pode se observar no gráfico?
2. Agora, nos próximos itens, o grupo precisa explorar o conceito de sequência com relação a:
 - Sequência finita ou infinita;
 - Obter a distância percorrida pelo automóvel em n horas;
 - Comportamento da sequência em relação como constante, crescente ou decrescente?

Fonte: Autor.

Tempo e alunos: tarefa elaborada para aplicação à alunos da 1ª série do Ensino Médio ao longo de 6 aulas de 45 minutos (*Aula 1, Aula 2, Aula 3, Aula 4, Aula 5 e Aula 6*).

Recursos: computador ou smartphone com acesso à internet.

Organização e planejamento das aulas:

- *Aula 1:* Inicialmente o professor-pesquisador fará uma breve explicação da atividade, em seguida a sala será dividida em vários grupos, sendo que cada grupo deve conter no máximo 3 integrantes por grupo, a divisão dos grupos será feita pelos alunos, após a divisão dos grupos, cada grupo deverá interpretar e investigar os problemas proposto pelo professor-pesquisador.
- *Aula 2 e Aula 3:* Na segunda e terceira aula os alunos devem desenvolver a atividade proposta e o professor-pesquisador ficará auxiliando os alunos caso solicitem.
- *Aulas 4, Aula 5 e Aula 6:* Nas três próximas aulas, as atividades deve ser entregue um dia antes do início da quarta aula pelos alunos via Google Sala de Aula e o professor-pesquisador fará questionamentos em relação ao problema proposto, durante essas três aulas, não será feito questionamento durante todo tempo da aula, apenas em alguns momentos em que o professor-pesquisador irá sistematizar conceitos que de forma intuitiva foram abordados durante a execução da Tarefa 02.

No Quadro 12 que segue é apresentado alguns questionamentos que poderão ser levantados pelo professor-pesquisador.

Quadro 12 – Perguntas norteadoras da Tarefa 02

Quais os valores que obtidos a cada hora da sequência da viagem para praia?
Qual é o 1º termo definido na sequência?
E o 2º termo?
Qual cálculo foi realizado para encontrar o segundo termo?
E o terceiro termo? Como é feito o cálculo?
Como pode ser representado o terceiro termo em uma fórmula que considera o primeiro termo?
E como poderia representar o n-ésimo termo?
Para uma determinada hora, por quanto é multiplicado para encontrar a distância?
Com o auxílio da planilha conseguiram construir o gráfico? Como foi?
Quais características foram observadas no gráfico?
Como foram formado os pontos no plano cartesiano?
Como podemos obter uma equação da reta que atravessa esses pontos?

Qual relação uma PA tem com o conteúdo de função?

Fonte: Autor.

3.3.3. TAREFA 03: ARQUIBANCADA DE UM ESTÁDIO DE FUTEBOL

Tema: Progressão Aritmética (PA)

Objetivos: de forma intuitiva explorar a razão de uma PA; determinar um termo qualquer de uma PA; escrever o termo geral da PA; determinar soma dos termos de uma PA; analisar comportamento de sequências numéricas; lidar com situações contextualizadas.

Quadro 13 – Enunciado da Tarefa 03: Arquibancada de um estádio de futebol.

Um arquiteto está desenhando a planta de uma arquibancada de um estádio de futebol. A arquibancada do estádio será ao redor do gramado, na região norte e sul (atrás dos gols) a arquibancada será formada por dois trapézios isósceles, já nas regiões leste e oeste essa arquibancada será formada por outros dois trapézios isósceles, mas com medidas diferentes.

- A primeira fileira das arquibancadas norte e sul, contém 100 lugares .
 - A partir da segunda fileira será aumentada 4 cadeiras a mais que a fileira anterior.
 - A primeira fileira das arquibancadas leste e oeste contém 200 cadeiras, em cada setor
 - A partir da segunda fileira será aumentada 4 cadeiras a mais que a fileira anterior.
 - O novo estádio deve ter 40 fileiras em todos os setores.
- A) Com o auxílio do Geogebra, faça uma planta baixa da arquibancada.
 B) Na planilha eletrônica, calcule o número de cadeiras em cada fileira.
 C) Com o auxílio da planilha eletrônica, calcule o número de cadeiras que terá em toda a arquibancada.
 D) Sabe se que a fórmula da área de um trapézio é $A = ((B + b) \cdot h) / 2$, essa fórmula possui alguma relação com o número de cadeiras que a arquibancada possui? Se sim, demonstre.
 E) Em n cadeiras, teremos quantas fileiras?
 F) Como poderia expressar a soma dos n primeiras cadeiras?

Fonte: Autor.

Tempo e alunos: tarefa elaborada para aplicação à alunos da 1ª série do Ensino Médio ao longo de 3 aulas de 45 minutos (*Aula 1, Aula 2, Aula 3*).

Recursos: computador ou smartphone com acesso à internet.

Organização e planejamento das aulas:

- *Aula 1:* Inicialmente o professor regente fará uma breve explicação da atividade, em seguida a sala será dividida em vários grupos, sendo que cada grupo deve conter no máximo 3 integrantes por grupo, a divisão dos grupos será feita pelo professor de maneira aleatória, após a divisão dos grupos, cada grupo deverá interpretar e investigar os problemas proposto pelo professor.

- *Aula 2:* Na segunda aula os alunos devem desenvolver a atividade proposta e o professor ficará auxiliando os alunos caso solicitem.
- *Aula 3:* Na terceira aula as atividades serão entregues e o professor fará o questionamento em relação ao problema proposto, no quadro que segue é apresentado algumas perguntas que podem ser feitas na Aula 3.

No Quadro 14 é apresentado alguns questionamentos que poderão ser levantados pelo professor.

Quadro 14 – Perguntas norteadoras da Tarefa 03

Como calcularam o número de cadeiras em cada fileira?
E a soma de todas as cadeiras do estádio?
Qual relação vocês encontram entre o trapézio e a soma de todas as cadeiras?
Qual o termo geral da equação?
O que representa o número de cadeiras em cada fileira?
O que representa o número de cadeiras na 1ª fileira?
O que representa o número de fileiras?
Como posso representar o aumento de cadeiras?
Qual a soma dos n primeiros termos?

Fonte: Autor.

3.3.4. TAREFA 04: CRESCIMENTO POPULACIONAL

Tema: Progressão Geométrica

Objetivos: de forma intuitiva explorar uma progressão geométrica; determinar um termo qualquer de uma PG; escrever o termo geral de uma PG; explorar representações gráficas de uma PG; analisar comportamento de sequências numéricas; lidar com situações contextualizadas.

Quadro 15 – Enunciado da Tarefa 04: Crescimento populacional.

A primeira contagem da população brasileira foi realizada em 1872, ainda durante o Império, mas foi a partir de 1890, já sob a República, que os censos se tornaram decenais. O Brasil mantém um excelente retrospecto dos censos regulares e inovadores; foi, por exemplo, o primeiro País a incluir o tema fecundidade e o único da América Latina a colher informações sobre renda.

Os Censos Demográficos são a única forma de informação sobre a situação de vida da população em cada um dos municípios e localidades do País. As demais pesquisas domiciliares são levantamentos por amostragem, que não são representativas para todos esses níveis geográficos.

Não só o governo federal e a sociedade civil se beneficiam de informações do censo; a descentralização político-administrativa reinstaurada com a Constituição de 1988 aumentou enormemente a demanda por informações mais desagregadas. Prefeitos, governadores, órgãos municipais e estaduais de planejamento,

investidos de maior autonomia e de novas responsabilidades, dependem hoje, como nunca, dos Censos Demográficos para realizarem suas escolhas com base em informações atualizadas sobre a população.

A partir de 1960 os recenseamentos passaram a adotar a técnica de amostragem na coleta das informações e os resultados divulgados classificados em 2 grupos: Resultados do Universo, que abrange os dados comuns aos dois tipos de questionários, e Resultados da Amostra.

Para a operação do Censo 1990, o IBGE precisava contratar mais de 180 mil pessoas em caráter temporário. Quando a contratação desse contingente foi autorizada, em julho de 1990, não havia mais tempo hábil para se realizar o processo seletivo público dos recursos humanos destinados ao censo, cuja coleta de dados estava programada para se iniciar no mês de setembro. Por tal motivo, o IBGE decidiu realizar o Censo Demográfico de 1990 em 1991.

A partir do Censo de 1991, utilizou-se pela primeira vez disquetes e sistemas informatizados de consulta aos microdados e dados agregados como forma de disseminação das informações censitárias.

O Censo Demográfico tem por objetivo contar os habitantes do território nacional, identificar suas características e revelar como vivem os brasileiros, produzindo informações imprescindíveis para a definição de políticas públicas e a tomada de decisões de investimentos da iniciativa privada ou de qualquer nível de governo. E também constituem a única fonte de referência sobre a situação de vida da população nos municípios e em seus recortes internos, como distritos, bairros e localidades, rurais ou urbanas, cujas realidades dependem de seus resultados para serem conhecidas e terem seus dados atualizados.

Fonte: <https://ces.ibge.gov.br/apresentacao/portarias/200-comite-de-estatisticas-sociais/base-de-dados/1146-censo-demografico.html>

O Censo é realizado normalmente a cada 10 anos, o último estava agendado para 2020, mas devido a pandemia do coronavírus precisou ser adiado. E para efeito de estudo do crescimento populacional, considere um município do interior paranaense, com uma população em torno de X habitantes em 1990, Y habitantes em 2000 e Z habitantes em 2010, sendo que esses dados foram obtidos em coletas anteriores.

- A. O aumento ou declínio de habitantes do município analisado foi o mesmo em todos os intervalos?
- B. Pode-se reconhecer um padrão nos anos analisados? No caso afirmativo, utilize linguagem matemática para descrevê-lo.
- C. Com o auxílio de uma planilha eletrônica, realize projeções dessa população para os próximos 50 anos.
- D. Construa um gráfico com as projeções realizadas. (Usar opção gráfico de linhas suaves).
- E. O conteúdo de sequência pode ser reconhecido nessa tarefa? Argumente explorando o seu conhecimento sobre o tema.
- F. Qual o comportamento que essa sequência tem? (Em sua respostas utilize termos como crescente, decrescente, constante, oscilante, ou quase nula)
- G. Determine um termo geral que demonstre o comportamento dessa sequência.
- H. Em qual década a população passará de Q habitantes?
- I. A sequência analisada é qual função?

Fonte: Autor.

Tempo e alunos: tarefa elaborada para aplicação à alunos da 1ª série do Ensino Médio ao longo de 4 aulas de 45 minutos (*Aula 1, Aula 2, Aula 3 e Aula 4*).

Recursos: computador ou smartphone com acesso a internet.

Organização e planejamento das aulas:

- *Aula 1:* Inicialmente o professor fará uma breve explicação da tarefa, em seguida a sala será dividida em vários grupos, sendo que cada grupo deve conter no máximo 3 integrantes por grupo, a divisão dos grupos será feita pelo professor de maneira aleatória, após a divisão dos grupos, cada grupo deverá interpretar e investigar os problemas propostos pelo professor.
- *Aula 2:* Na segunda aula os alunos devem desenvolver a tarefa proposta e o professor ficará auxiliando os alunos caso solicitem.
- *Aula 3 e Aula 4:* Na terceira e quarta aula as tarefas serão entregues e o professor fará o questionamento em relação ao problema proposto, no quadro que segue é apresentado algumas perguntas que podem ser feitas durante as aulas.

No Quadro 16 que segue é apresentado alguns questionamentos que poderão ser levantados pelo professor.

Quadro 16 – Perguntas norteadoras da Tarefa 04

Como foi a tarefa sobre o crescimento populacional?
O aumento ou declínio foi o mesmo?
Qual padrão pode ser notado?
Como projetaram a população para anos futuros?
Qual comportamento a sequência teve?
É possível determinar um termo geral?
O que é o termo geral na tarefa?
O que é a_1 ?
O que é a razão?
O que é n ?
Como podemos obter projeções futuras, quando se ultrapassa uma determinada população pré-estabelecida?
Qual tipo de função é uma Progressão geométrica?

Fonte: Autor

3.3.5. TAREFA 05: **MARKETING DE REDE**

Tema: Progressão Geométrica (PG)

Objetivos: de forma intuitiva explorar uma progressão geométrica; determinar um termo qualquer de uma PG; escrever o termo geral de uma PG; calcular soma dos termos de uma PG; explorar representações gráficas de uma PG; analisar comportamento de sequências numéricas; lidar com situações contextualizadas.

Quadro 17 – Enunciado da Tarefa 05: Marketing de rede.

A matemática é uma ciência fantástica que resolve problemas e desmente a falácia de espertalhões que tentam ganhar dinheiro fácil. Um exemplo é o fato de pessoas que detêm conhecimentos matemáticos e, por meio de cálculos e discussões, esclarecem outras pessoas e contribui para informar sobre mecanismos de funcionamento de, por exemplo, redes de negócios. Pense na oportunidade de ganhar dinheiro comprando um título de um comércio que funciona baseado numa proposta de Marketing de Rede. Hoje é um negócio que está no nosso meio e pode ser que você tenha recebido propostas de entrar nesse meio de ganhar dinheiro. Para muitos, é tentador. Um meio para divulgar informações é a Internet.

O marketing de rede é uma forma de vender produtos e serviços diretamente aos consumidores sem intermediários, dispensando campanhas publicitárias. O método é montar uma estrutura disposta em camadas de distribuidores independentes que, além de vender, distribuem os produtos a outras camadas de pessoas, sendo que, cada pessoa que adquire um destes títulos, tem como meta conquistar mais pessoas, normalmente um número mínimo exigido, para entrarem no negócio. Assim, cria-se uma organização de vendedores independentes com o sonho de multiplicar seus ganhos salariais, uma vez que, sempre que ocorrem vendas, há pessoas ganhando comissões e, quanto mais você vender, mais ganha comissão, ou seja, dinheiro.

Segundo o sociólogo Castells (1999), esses arranjos aparecem, desaparecem e reaparecem de acordo com as variações do mercado. Muitas vezes, em épocas diferentes, a mesma pessoa é empresário e trabalhador assalariado. O que determina se será empresário ou empregado são as circunstâncias do ciclo de negócios e amplitude da rede de relações estabelecidas por essa pessoa, ou seja, quanto maior a rede de relações sociais ou de pessoas inseridas na rede, maior a probabilidade de vendas e negócios a serem realizados.

Entretanto, para que as pessoas decidam entrar numa dessas organizações de vendas, normalmente, exigem que assine um contrato e assumam o compromisso de levar o negócio adiante para que o funcionamento em rede e a lucratividade não sejam prejudicados. Há muitas promessas para os iniciantes no negócio que apontam vantagens que, imediatamente, podem não ser tão perceptíveis e até pouco lucrativas, mas se houver dedicação nas vendas e um trabalho árduo e esforço pessoal persistente, resultados significativos aparecerão e, num futuro próximo, estará recebendo grandes quantidades de dinheiro.

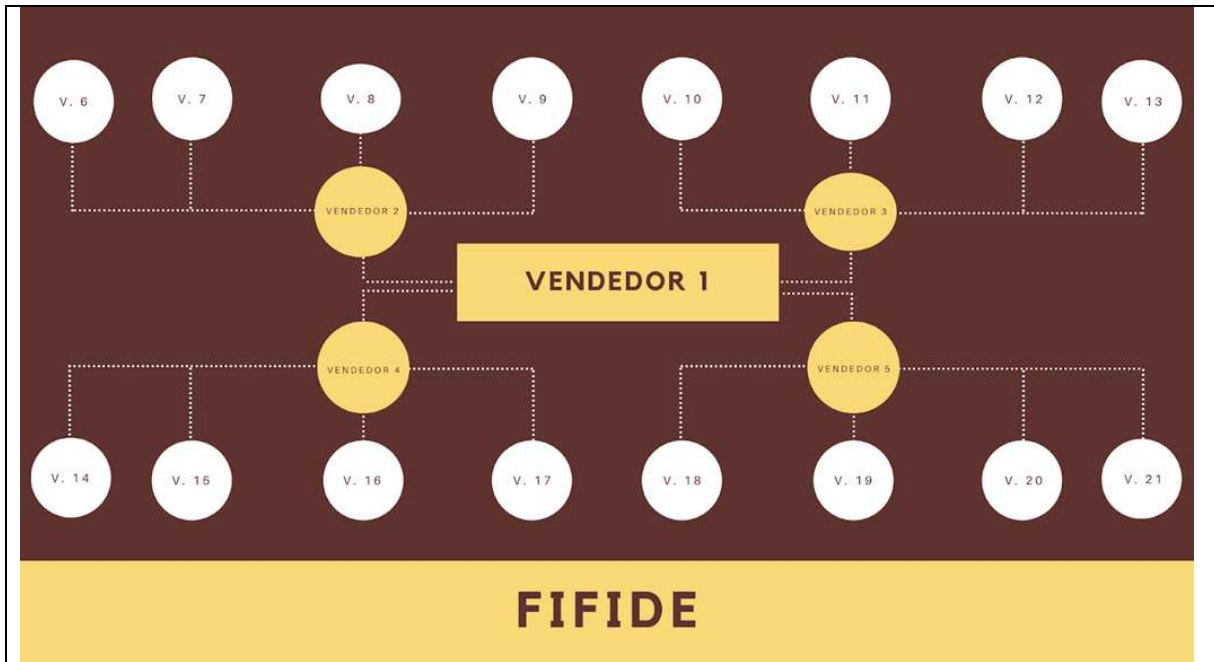
fonte: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/livro_didatico/matematica.pdf

Estudo de caso

Você é proprietário da empresa FIFIDE, sendo um negocio em rede, na qual você precisa convencer quatro pessoas para comprar produtos da sua empresa em um mês. Cada pessoa que você vendeu o seu produto precisa encontrar mais quatro pessoas para comprar produtos da FIFIDE, em um mesmo intervalo de tempo. E essas novas pessoas precisam fazer a mesma coisa e assim sucessivamente.

Considere que seis pessoas compram o produto FIFIDE, sendo que você, pelos seis produtos, recebe R \$1.200,00. A comissão que cada vendedor recebe é de 10% sobre o valor da venda. Porém precisa dar 10% do que o vendedor ganha para o seu vendedor anterior.

O esquema FIFIDE mostra o negócio em rede, em que o vendedor 1, que é o proprietário vende para o 2, 3, 4 e 5, que são chamadas de nível A. O vendedor 2 vende para o 6, 7, 8 e 9, o vendedor 3, vende para o 10, 11, 12 e 13, já o vendedor 4 vende para o 14, 15, 16 e 17 no qual são chamados de nível B assim por diante.



Agora, com o auxílio de uma planilha eletrônica, calcule.

- A. Quantas pessoas devem entrar no seu negócio a cada mês em um intervalo de 2 anos?
- B. Qual o número total de pessoas envolvidas em seu negócio em um intervalo de 2 anos?
- C. Quanto o proprietário da FIFIDE deve ganhar nesses dois anos?
- D. Quantas pessoas devem entrar no seu negócio a cada mês em um intervalo de n meses?
- E. Qual o número total de pessoas envolvidas em seu negócio em um intervalo de n meses?
- F. Se o vendedor entrar na rede após 1 ano, qual a possibilidade de obter sucesso no negócio?

Fonte: Autor.

Tempo e alunos: tarefa elaborada para aplicação à alunos da 1ª série do Ensino Médio ao longo de 3 aulas de 45 minutos (*Aula 1, Aula 2, Aula 3*).

Recursos: computador ou smartphone com acesso à internet.

Organização e planejamento das aulas:

- *Aula 1:* Inicialmente o professor fará uma breve explicação da atividade, em seguida a sala será dividida em vários grupos, sendo que cada grupo deve conter no máximo 3 integrantes por grupo, a divisão dos grupos será feita pelo professor de maneira aleatória, após a divisão dos grupos, cada grupo deverá interpretar e investigar os problemas proposto pelo professor.
- *Aula 2:* Na segunda aula os alunos devem desenvolver a atividade proposta e o professor ficará auxiliando os alunos caso solicitem.

- *Aula 3*: Na terceira aula as tarefas serão entregues e o professor fará o questionamento em relação ao problema proposto, no quadro que segue é apresentado algumas perguntas que podem ser feitas durante as aulas.

No Quadro 18 que segue é apresentado alguns questionamentos que poderão ser levantados pelo professor.

Quadro 18 – Perguntas norteadoras da Tarefa 05

Quais termos podemos levantar no intervalo de 2 anos?
Como posso representar o número de meses?
Como posso representar o número de pessoas envolvidas no primeiro mês?
Como posso representar o número de pessoas envolvidas nos meses seguintes?
Qual é o padrão de crescimento?
Porque preciso levantar os dados dos meses anteriores para encontrar o número de pessoas envolvidas no marketing em rede?
Qual a viabilidade do marketing em rede? Para quem ele é viável?

Fonte: Autor.

3.4 FOCO DA ANÁLISE

O próximo capítulo, apresenta uma discussão e a exploração de tarefas matemáticas enquanto experimentação com tecnologia, em aulas organizadas à luz da Educação Matemática Realística.

Tem-se a RME como base para a preparação e a execução das aulas, nas quais se buscou a organização de uma ambiente em que os alunos são ativos e o professor aquele que guia a aprendizagem. As tarefas têm enunciados baseados em contextos que fazem parte da realidade do aluno, favorecendo que, ao desenvolver suas produções, construam seus próprios conhecimentos. Nesse ambiente, é rotineiro ter grupos para a discussão e a realização da tarefa, com autonomia para o levantamento de dados e, em alguns casos, para a escolha do que se quer calcular.

Para além de uma descrição dos aspectos da RME, é interesse evidenciar o pensar-com-tecnologia dos alunos, tendo a RME como orientadora de um espaço pedagógico no desenvolvimento das tarefas. O Quadro 19 apresenta recursos que foram utilizados na organização pedagógica e que permitiram recolher dados para nortear a reflexão e a discussão

dos resultados da pesquisa, tendo, em toda organização, o professor como aquele que interpreta em sua prática o pensar-com-tecnologia de seus alunos e discute possibilidades para potencializar esse modo de organização de aulas.

Quadro 19 – Momentos das tarefas baseados nos princípios da RME

Recursos utilizados na organização pedagógica e recolha de dados		Princípios da RME
Tarefa	Utiliza de contexto realístico.	Da Realidade
Relatório	Possibilita ao professor recolher informação por meio da produção escrita acerca de como os alunos lidam com a tarefa e os conceitos matemáticos de forma intuitiva.	De entrelaçamento
Seminário	Possibilita ao professor observar e recolher informações de como os alunos conseguem se expressar a partir dos dados levantados ao lidar com a tarefa.	Da interatividade
Aulas de aplicação	Permite ao professor discutir com os alunos dúvidas que eles encontraram na tarefa e que podem contribuir para o aprendizado dos estudantes.	Da orientação
Diálogo e sistematização de conceitos	Favorece ao professor aproveitar o contexto realístico e a linguagem específica de sequências numéricas, permitindo que os alunos sistematizem o reconhecimento de sequência numéricas enquanto recurso ou ferramenta para lidar com situações.	Da interatividade Da atividade

Fonte: Autor

4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE TAREFAS DESENVOLVIDAS

Nesse capítulo, com um vistas a analisar o segundo ciclo de experiências de ensino desenvolvido em 2021 de duas das tarefas elaboradas e aplicadas. Essa análise é apresentada da Tarefa 01 e da Tarefa 02 a partir de recortes de diálogos das aulas (Apêndice A e Apêndice B), produções de estudantes, evidenciando a tecnologia digital enquanto experimentação em aulas organizadas à luz da RME. As evidências diretamente relacionadas aos princípios da RME e da experimentação com tecnologia ao longo da análise são destacadas em *itálico*. Na qual pretende fazer o reconhecimento desses aspectos.

Fragments das aulas foram representadas em trechos que identificam a tarefa, a aplicação, a aula e o momento da aula nessa ordem respectivamente. Por exemplo, o Trecho 1-2-6-B, significa que está se referindo a Tarefa 01: Coronavírus no estado do Paraná (1), no seu segundo ciclo de aplicação (2), na sexta aula do planejamento aplicação (6) e uma letra do alfabeto representando a ordem do recorte do trecho do diálogo analisado (B).

4.1 O DESENVOLVIMENTO DA TAREFA 01: CORONAVÍRUS NO PARANÁ

Da aplicação em 2021, em um contexto escalonado de ensino (alguns alunos estavam em sala de aula presencialmente com o professor-pesquisador e, de forma concomitante, outros participavam da aula via *Google Meet*), é destacado trechos das aulas *Aula 1*, *Aula 5* e *Aula 6* no sentido de evidenciar a tecnologia digital em tarefas matemáticas baseada na experimentação com tecnologia em um contexto de ensino organizado à luz da RME. A aplicação foi feita para uma turmas de 26 alunos e divididos em 6 grupos cada turma.

A segunda aplicação além de ter sido desenvolvida em um contexto escalonado (a primeira foi remota), envolve um professor-pesquisador que leva para sala de aula a experiência da primeira aplicação. Já no planejamento há alterações em relação as intervenções realizadas no desenvolvimento da tarefa, ao modo em que os conteúdos em relação ao conceito de sequência numérica são sistematizados com a turma, uma vez que na primeira aplicação o professor-pesquisador gravou aulas teóricas para os alunos assistirem (seguindo exigência da escola) e na segunda teve toda sistematização em aula síncrona escalonada (alguns alunos em sala, outros em casa, mas todos participando junto).

Uma outra mudança no professor-pesquisador que desenvolve essa tarefa é a atitude consciente em relação a sua função enquanto aquele que guia o processo de aprendizagem de seus estudantes. Essa atitude é influenciada não só pela experiência vivenciada com a primeira

aplicação, mas também pelos estudos teóricos realizados acerca da abordagem da RME. O professor-pesquisador em seu planejamento já toma enquanto pressuposto uma sala de aula em que os alunos são guiados por meio das intervenções do professor-pesquisador e da interação e diálogo entre os alunos em seus pequenos grupos ao lidarem com uma tarefa que envolve contexto realístico. Apesar do recurso tecnológico ser o mesmo (planilhas tecnológicas), a prática foi outra, e conseqüentemente a experiência com tecnologia oportunizada aos alunos também foi outra.

No processo de planejamento o professor-pesquisador com aspectos da Educação Matemática Realística uma vez que seu intuito era investigar aspectos do pensar-com-tecnologia em um espaço pedagógico em que os alunos são ativos e o professor-pesquisador orienta seus alunos por meio de tarefas contextualizadas e intervenções não diretivas à luz dos princípios da RME. A escolha do contexto da Tarefa 01 remete ao princípio *da Realidade*, tendo um fenômeno da realidade (COVID-19 no Paraná). Com os dados organizados, por meio de ferramentas da matemática o contexto COVID-19 se fez significativo para o processo de aprendizado desses estudantes.

Dessa aplicação interessa-nos discutir, de forma específica, a tecnologia digital em tarefas matemáticas enquanto experimentação com tecnologia em um contexto de ensino organizado à luz da RME e evidenciar as oportunidades geradas de os estudantes desenvolverem conceitos matemáticos, explorar ideias, estratégias e seus pensamentos matemáticos ao lidar com a Tarefa 01. No Apêndice A é apresentado a transcrição de trechos selecionados das aulas e organizados em um quadro.

No Quadro 20 é apresentado os dois primeiros trechos recortados do Apêndice A.

Quadro 20 – Trechos 1-2-1-A e 1-2-1-B

Trecho 1-2-1-A	<p>Professor-pesquisador: Bom dia pessoal, hoje vamos fazer uma atividade em grupo, sendo que os grupos já estão divididos, conforme o sistema de escalonamento no ensino híbrido, então os grupos ficaram divididos na seguinte forma:</p> <p>Cascavel: Aluno A, Aluno B, Aluno C, Aluno D e Aluno E.</p> <p>Curitiba: Aluno F, Aluno G, Aluno H e Aluno I</p> <p>Foz do Iguaçu: Aluno J, Aluno K, Aluno L e Aluno M</p> <p>Londrina: Aluno N, Aluno O, Aluno P, Aluno Q e Aluno R.</p> <p>Maringá: Aluno S, Aluno T, Aluno U e Aluno V.</p> <p>Ponta Grossa: Aluno W, Aluno X, Aluno Y e Aluno Z</p> <p>Professor-pesquisador: Vocês terão 4 aulas para executar a tarefa, em que estarei à disposição para ajuda-los.</p>
Trecho 1-2-1-B	<p>Vamos para a tarefa</p> <p>(Professor-pesquisador apresenta o roteiro)</p> <p>(Faz a leitura do texto de apoio.)</p> <p>Professor-pesquisador começa a leitura e pergunta aos alunos:</p> <p>Vocês conhecem o Google Sheets?</p> <p>Aluno Z: Mais ou Menos</p> <p>Professor-pesquisador: Vamos trabalhar com essa plataforma, pois todos vocês têm acesso a ela, já que a escola fornece o todas as vantagens do Google For Education, aqui é alimentada uma planilha pode ser preenchida por todos os membros do grupo, trabalhando de maneira conjunta e, posso também orientá-los por lá.</p> <p>O trabalho é em grupo, então tem que se trabalhar em grupo, não pode deixar tarefa para outro, cada um precisa fazer a sua parte. Perguntas a serem respondidas e discutidas pelos grupos.</p> <p>Vamos fazer em aula e lembrem que estou aqui para ajudar vocês, vamos fazer cálculos com as planilhas</p>

Fonte: Protocolos da pesquisa.

Ao entrar na sala o professor-pesquisador organizou a turma em grupos para o desenvolvimento dos trabalhos conforme Trecho 1-2-1-A. Organizar a turma em pequenos grupos foi uma estratégia escolhida pelo professor-pesquisador para que os alunos escutem e discutam suas descobertas, leituras e interpretações geradas com o lidar com os dados recolhidos da cidade do Paraná por eles escolhida. Esse escutar e discutir tem relação direta com princípio da *Interatividade* da RME, em pequenos grupos cada aluno tem a oportunidade de expor suas ideias e de o professor-pesquisador acompanhar e de intervir de forma específica.

Em seguida, Trecho 1-2-1-B, o professor-pesquisador apresentou e explicou a respeito da utilização de alguns recursos e ferramentas tecnológicas das quais os alunos tem acesso e que contribuiriam para o desenvolvimento do trabalho. Agir desse modo é dar oportunidade aos alunos em lidar com a tecnologia enquanto recurso e, não permitindo tornar-se um obstáculo para o desenvolvimento da tarefa.

Essa orientação relacionada a recurso também é uma responsabilidade do professor-pesquisador, o não saber utilizar ou lidar com um recurso tecnológico pode ser um impeditivo de um aluno participar do desenvolvimento de uma tarefa. O princípio da *Orientação* da RME não é restrito a orientações de organização, de intervenções ou do que fazer, essas orientações também devem garantir que a equidade prevaleça no espaço pedagógico.

Ainda com essa preocupação, o professor-pesquisador planeja as aulas *Aula 02*, *Aula 03* e *Aula 04*. Dessas aulas não serão analisadas transcrições, uma vez que se distanciam do objetivo maior que é discutir e explorar a tecnologia digital em tarefas matemáticas enquanto experimentação com tecnologia.

A Tarefa 01 envolvia uma demanda de ferramentas matemáticas relacionadas ao lidar com dados estatísticos, leitura gráfica, busca por informações em sites confiáveis, ou seja, um entrelaçamento de habilidades que não se restringem ao currículo da disciplina de matemática e que por meio do relatório, assim como seminário, seriam manifestados ao professor-pesquisador. Durante as aulas de desenvolvimento da Tarefa 01, o professor-pesquisador apresentou um modelo de relatório para guiar a produção dos alunos a partir dos dados levantados com a situação apresentada.

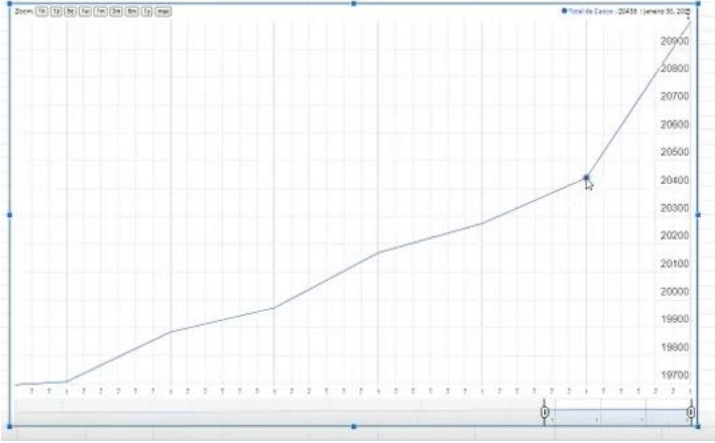
Esse entrelaçamento e o desenvolvimento da Tarefa 01 enquanto aquela que fomenta uma discussão intuitiva de conceitos relacionados a Sequência numérica vão ao encontro das ideias da RME, em que “os conteúdos são tratados não como metas de aprendizagem, mais sim como propulsores, ferramentas de aprendizagem” (FERREIRA, CIANI, OLIVEIRA, 2014, p. 133).

Na *Aula 5*, os alunos apresentaram seus seminários e, cada grupo entregou uma versão do relatório. Nessa apresentação, mais uma vez os alunos tiveram oportunidade para compartilhar suas estratégias e modos de lidar com a tarefa, uma apresentação que envolve seus pares (uns com os outros) e o professor-pesquisador. Ainda que cada grupo tenha sido responsável por seus processos de aprendizagem, a comunicação de seus resultados se faz mais um momento de compreensão e exploração do assunto trabalhado e, para o professor-pesquisador, para recolha de informação sobre o processo de aprendizagem.

É possível reconhecer nas apresentações dos alunos diferentes formas de lidar com a Tarefa 01, alguns alunos apresentam de forma mais direta como os grupos das cidades de Curitiba, Maringá e Ponta Grossa, outros de um modo mais descritivo como os grupos de Londrina, Cascavel e Foz do Iguaçu, alguns utilizam de relações entre gráficos, taxas em variação, custos de vacinas. Esses modos de lidar foi uma expectativa alcançada pelo professor-pesquisador, uma vez que boas tarefas precisam permitir que os alunos lidem de um algum modo com elas, de modo que sua complexidade e dificuldade não impeçam a participação de todos, tendo essa flexibilidade no modo de lidar. Apesar de maneiras de lidar diferentes, todas utilizaram recursos automáticos do *Google Sheets*.

No Quadro 21 é apresentado um trecho destacado no Apêndice A.

Quadro 21 – Trecho 1-2-5-A

Trecho 1-2-5-A	<p>Professor-pesquisador: Pessoal, vamos lá então? Vamos começar as apresentações já, para a gente não perder tempo. Então a gente vai seguir em ordem alfabética, o primeiro grupo é o grupo de Cascavel, formado pelos integrantes Aluno B, Aluno A, Aluno C, Aludo D e Aluno E.</p> <p>Aluno A: Ok, então vamos começar. No nosso trabalho, nós decidimos diluir em meses e utilizamos os dados: total de casos, novos casos, casos ativos, casos recuperados, novos óbitos, número de vacinados, doses disponíveis, investimento por dose e investimento total. Essas duas variáveis a gente pensou em colocar porque estava no site da Transparência da prefeitura, e também por ser um valor acumulado ele pode ser utilizado para investigação de corrupção, entre outros tipos de esquema, assim como investimento por dose.</p> <p>Aluno A: Cascavel possui uma população entre 332000 a 336000 no último censo do IBGE. Os totais dos casos, sendo 20000 no primeiro mês é algo muito alarmante, e também nós tivemos uma vacinação tardia e um número de lotes muito exclusivo, apenas para as primeiras faixas etárias que seriam os idosos e pessoas com alguma como comorbidade, e mesmo assim os lotes foram mal distribuídos como vocês podem notar.</p> <p>Aluno A: Em questão de novos óbitos não foi muito alarmante comparado a outras cidades, teve uma média bem estável. Em questão da situação geral, se você teve casos recuperados no dia 27 de janeiro, batendo no mesmo número de casos ativos, o que é algo um pouco diferente. Essa é a comparação entre novos casos e casos ativos e esse é um infográfico, que é um gráfico interativo onde a gente consegue colocar os dias aqui embaixo e ele vai mostrar qual o número correspondente daquele dia. Então, por exemplo, 30 de janeiro de 2021, 20443. Se a gente quiser vir aqui pelo primeiro, nós podemos ver que no dia 01 de janeiro de 2021, 16696.</p> 
-------------------	---

Fonte: Protocolos da pesquisa.

No Trecho 1-2-5-A, Aluno A apresenta a utilização de um infográfico, que é um gráfico interativo para demonstração de dados. O recurso permitiu uma construção matemática dinâmica, além de ter uma *manipulação do objeto*, existe a possibilidade de alterar, variar e manipular os componentes da tabela e com isso se tem as alterações no gráfico. Com a aproximação do mouse ao gráfico, envolve uma visualização mais nítida e pertinente sobre o dia em relação aos dados da pandemia. Essa *experimentação com tecnologia* permite que os

alunos se convençam acerca de informações sobre a situação da Pandemia, levantem conjecturas sobre as possibilidades e decisões governamentais relacionadas ao tema.

No Quadro 22 é apresentado um trecho destacado no Apêndice A.

Quadro 22 – Trecho 1-2-5-B

Trecho 1-2-5-B	Aluno D: Com isso, o trabalho inteiro serviu para a gente perceber que em certos momentos teve altas e baixas, mas a gente começou a perceber que a partir do momento em que grande parte da população começou a ser vacinada, os casos confirmados, os casos ativos e até os óbitos, começaram a diminuir significativamente.
-------------------	--

Fonte: Protocolos da pesquisa.

No Trecho 1-2-5-B, o aluno D apresenta uma visão holística dos dados, *conjecturando uma relação dos dados* da pandemia, do número de casos e número de vacinados. Esse modo de leitura de um contexto permite desenvolver uma visão integrada da matemática, bem como flexibilidade para se conectar a diferentes subdomínios e/ou a outras disciplinas (WIDJAJA; HECK, 2003).

Além disso, os alunos realizaram leituras gráficas a partir da análise de seus comportamentos, como por exemplo no Trecho 1-2-5-A, o Aluno D, ao mencionar que durante o período analisado em seu trabalho teve momentos de altas e baixas, e que a população começou a ser vacinada houve alteração dos casos confirmados, já que os casos ativos e até os óbitos começaram a diminuir significativamente. Essa leitura permite inferir que o aluno compreendeu que os dados levantados tiveram certas variações, e que a sequência não teve um padrão de crescimento ou decrescimento monótono, ou um termo geral bem definido (uma única lei de formação, não definido por partes).

No Quadro 23 é apresentado no trecho destacado Apêndice A.

Quadro 23 – Trecho 1-2-5-C

Trecho 1-2-5-C	Aluno A: O período em que teve maior quantidade de casos foi nesse pico. O período em que nós tivemos um declínio no número de casos foi logo correspondente onde nós tivemos um aumento substancial, que foi entre os dias 26 até 28 de fevereiro, como vocês podem ver. As possíveis causas desse aumento substancial após uma diminuição dos casos seria a falsa sensação de melhora no quadro de covid-19 em Cascavel, e pela intensa atividade comercial da cidade que depende fortemente do comércio e da circulação de bens e pessoas, o que facilita a proliferação do vírus. Já em março nós tivemos um declínio no número de casos que não foi acompanhado por um aumento, e isso se deve basicamente ao número de vacinação que foi maior proporcionalmente ao número de casos recuperados, e novamente nós tivemos um leve declínio no total de casos no mês de março. No mês de abril nós voltamos a ter essa constante de crescimento que nós avaliamos em janeiro e fevereiro, número de óbitos continua normal e normalizado, e nós só tivemos um número de óbitos no mês de junho, e é isso.
-------------------	---

Fonte: Protocolos da pesquisa.

No Trecho 1-2-5-C é possível reconhecer uma leitura funcional de dados, uma vez que estabelece relações entre os dias e o número de casos das pessoas infectadas pelo coronavírus, ressaltando o motivo do aumento dos números de casos foram relacionados, em seguida, a relação de vacinados com a diminuição dos casos. Além disso, apresentam em suas falas ideia de taxa de variação ao relacionar a proporção entre número de casos recuperados e número de pessoas vacinadas. Com essa tarefa, os alunos tiveram a oportunidade de *conjecturar usando um grande número de exemplos, modificar a representação de objetos, simular componentes de construções e explorar maneiras de resolução*.

No Quadro 24 é apresentado um trecho destacado no Apêndice A.

Quadro 24 – Trecho 1-2-5-F

Trecho 1-2-5-F	<p>Aluno I: Ah então a nossa apresentação é dos casos de Curitiba. Primeiro, a introdução. O objetivo desta pesquisa é estabelecer os dados sobre como está a pandemia do covid-19 na cidade de Curitiba, nos 7 primeiros meses do ano de 2021, trazendo estatísticas sobre novos casos diários, casos acumulados, casos ativos, óbitos ao dia, óbitos acumulados, vacinados ao dia, vacinados acumulados e os casos de recuperados, em forma de tabelas e gráficos. A pesquisa coletou os dados diários informados no Instagram da prefeitura de Curitiba, que mostra como estão os casos de covid-19 no município. Segue a tabela com os dados levantados na pesquisa. Aí aqui tem o período do tempo, os casos acumulados, novos casos diários, casos ativos ao dia, óbitos ao dia, óbitos acumulados, a vacinação e os recuperados, aí aqui em janeiro os óbitos são praticamente constante, não tem nenhum aumento drástico e nenhuma redução drástica, vacinação não começou ainda nesses primeiros dias e os casos acumulados iam só aumentando, e os novos casos também. Aí a vacinação começa aqui no dia 20/01 e ela vai aumentando até dar uma parada nesses dias aqui do dia 06/02 até 15/02 que deu uma reduzida por falta de vacina e os óbitos também caíram nesta semana. Aí a vacina parou bastante aqui do dia 19 até o dia 28 de fevereiro, por falta de vacina e os casos acumulados também foram só aumentando. E aí vai seguindo assim, a vacina vai também, começa de novo e aí para, porque Curitiba também não estava recebendo muita vacina do governo e os casos foram aumentando e os óbitos aumentaram bastante esses dias aqui 07/03 até mais ou menos 23/03, e os casos diários também começaram a ter muitos e aí vai seguindo assim, até a vacinação, acho que tem o maior pico de vacinação no dia 15/06, teve 22934 vacinações da primeira dose, a segunda dose ela não conta aqui né, a gente só contou a primeira dose. E é isso, agora o Aluno F vai falar das perguntas.</p>									
	tempo	acumulados	diários	ao dia	ao dia	acumulados	ao dia	acumulados	ao dia	ao dia
	01/01/2021	111.693	1.797	7.201	26	2.249	0	0	0	102.243
	02/01/2021	111.693	1.797	7.201	26	2.249	0	0	0	102.243
	03/01/2021	112.419	726	5.961	23	2.272	0	0	0	104.186
	04/01/2021	112.419	726	5.961	23	2.272	0	0	0	104.186
	05/01/2021	113.163	744	5.989	15	2.287	0	0	0	104.887
	06/01/2021	113.956	793	6.213	17	2.304	0	0	0	105.439
	07/01/2021	114.760	804	6.410	19	2.323	0	0	0	106.027
	08/01/2021	115.546	786	6.719	17	2.340	0	0	0	106.487
	09/01/2021	116.190	644	6.970	16	2.356	0	0	0	106.864
	10/01/2021	117.301	1.111	7.605	21	2.377	0	0	0	107.319
	11/01/2021	117.301	1.111	7.605	21	2.377	0	0	0	107.319
	12/01/2021	118.044	743	7.319	12	2.389	0	0	0	108.336
	13/01/2021	118.846	802	7.546	15	2.404	0	0	0	108.896
14/01/2021	119.722	876	7.888	19	2.423	0	0	0	109.411	

Fonte: Protocolos da pesquisa.

No Trecho 1-2-5-F o Aluno I traz que o objetivo desse trabalho é lidar com dados da pandemia do Covid-19 por meio de tabelas e gráficos. Dessa forma, a utilização de representações matemáticas são meios de leitura da realidade, ou seja, o propósito não é as representações em si, mas as informações, interpretações realizadas por meio delas.

Nesse mesmo trecho, o Aluno I, elabora uma relação de causa e consequência ao mencionar que devido à falta de vacina os casos na cidade vão aumentando. Em um contexto de sala de aula à luz da RME o professor-pesquisador aproveita do que é apresentado pelo aluno para sistematizar novos conceitos, neste caso por exemplo, o professor-pesquisador poderia explorar o conceito intuitivo de sequências monótonas por meio de intervenções de possíveis comportamentos a medida que supõe-se aumento de vacinas, de número vacinados. Em que a vivência do aluno é essencial para o processo de aprendizagem, podendo construir ou reconstruir o seu conhecimento (FREUDENTHAL, 1991).

Outra relação de causa consequência levantada pelo Aluno I refere-se ao fato de se ter uma vacinação tardia ter resultado em um aumento de casos e óbitos. Neste caso, uma análise crítica de ordem pública por meio dos dados levantados na pesquisa.

Outro aspecto desse trecho é o fato do grupo após apresentar as construções realizadas para alcançar o objetivo do trabalho sentir necessidade de responder as perguntas orientadoras apresentadas no enunciado da Tarefa 01. É necessário que se explore a autonomia dos alunos por meio de tarefas, dando liberdade para que as informações e respostas sejam feitas sem um roteiro ou protótipo definido. Nessa aplicação, os alunos assumem papel de protagonista ao lidar com uma tarefa e no contexto da sala de aula, mas ainda, por ser rotineiro, buscam por apresentar a resposta esperada pelo professor-pesquisador.

No Quadro 25 é apresentado o trecho destacado no Apêndice A.

Quadro 25 – Trecho 1-2-5-G

Trecho 1-2-5-G	<p>Aluno F: Bom dia, professor. Eu vou falar sobre as respostas das perguntas. Na questão A, segundo o IBGE, Curitiba tem 1.948.626 pessoas, essa informação é relevante para analisar a quantidade de pessoas contaminadas, vacinadas, recuperadas e óbitos, e comparar com a população total. Na questão B, o período dos dias 07/03/2021 a 17/03/2021 foi o período com maior aumento de novos casos, chegando em 2757 casos nos dias 14 e 15. Na questão C, no período do mês 7, houve redução de novos casos. Na questão D, podemos observar que no mesmo período do maior aumento de novos casos, tivemos a maior quantidade de casos ativos. Aqui no gráfico E, vai mostrar os casos acumulados versus período do tempo, no gráfico da questão F casos ativos ao dia versus período do tempo, no gráfico G óbitos ao dia versus período do tempo, e na questão H, ao analisarmos os dados coletados podemos notar um grande aumento de novos casos e nos casos ativos do mês de março e até o mês de junho, notamos uma constância de casos e no mês de julho uma considerável redução dos casos, podendo supor que este fato se deve ao aumento do número de pessoas vacinadas. Aí na conclusão podemos concluir que o período com maior incidência de casos foi entre 7 e 17 de março, quando iniciaram-se as campanhas de vacinação da população, e o mês de julho foi o que apresentou o menor índice de novos casos, podendo sugerir que a vacinação já tinha atingido grande parte da população. Pesquisando no Instagram na prefeitura de Curitiba percebemos a ênfase no cuidado que as pessoas devem ter quanto aos hábitos de higiene, como lavar as mãos, usar álcool em gel, uso continuado das máscaras, evitando ambientes com aglomeração de pessoas, como sendo as medidas efetivas e protetivas a longo prazo. A referência é o Instagram da prefeitura de Curitiba.</p>

Fonte: Protocolos da pesquisa.

No Trecho 1-2-5-G, o Aluno F responde as questões orientadoras. Mais uma vez, esse grupo de Curitiba ressalta a relevância da vacina e o impacto que ela traz na redução de casos óbitos. Ainda, traz medidas protetivas como lavar as mãos, usar álcool em gel, uso continuado das máscaras, evitar ambientes com aglomeração de pessoas, sendo assim, a tarefa um meio para discussões que refletem a realidade e na realidade desses estudantes.

No Quadro 26 é apresentado um trecho destacado do Apêndice A.

Quadro 26 – Trecho 1-2-5-H

Trecho 1-2-5-H	<p>Professor-pesquisador: Beleza. Muito boa a apresentação de vocês, gostei bastante também, assim como do grupo 1, beleza então. Agora é o grupo 3, que é o grupo de Foz né?</p> <p>Aluno M: Sim, eu vou apresentar. Tá todo mundo vendo? Vou começar. Bom dia, então ficamos responsáveis pela cidade de Foz do Iguaçu, meu grupo é composto por mim, a Aluno K e a Aluno Z. Com essa pesquisa tivemos o objetivo de monitorar os casos de coronavírus e os óbitos gerados por essa doença, além de acompanhar a vacinação. Os dados dessa pesquisa foram obtidos no site da prefeitura. A respeito do mês de abril, nós temos uma irregularidade dos números de casos novos, sendo maior no final de semana. O número de óbitos neste mês é irregular. Os dados desta vacinação foram feitos de maneira instável, então somente podemos fazer uma média que varia de 100 pessoas por dia. No mês de maio, tivemos um aumento do número de novos casos e uma redução dos óbitos. A média da vacinação varia entre 500 e 3800 pessoas.</p>
-------------------	---

Fonte: Protocolos da pesquisa.

No Trecho 1-2-5-H é apontado pelo Aluno M a irregularidade nos números, com justificativa que pode ter sido influenciado pelos finais de semanas ou por algum outro fator. Com essa hipótese o professor-pesquisador pode discutir a respeito de padrão, lei de formação de uma sequência numérica, aproveitando da situação para os alunos reconhecerem que nem sempre uma sequência tem um padrão.

Ainda, no Trecho 1-2-5-H, é colocado que a vacinação é instável, em alguns períodos tem vacina e em outros não, com isso os alunos optaram por fazerem um cálculo de vacinados em média por dia, conforme fórmula apresentada na equação (1).

$$\text{Média de vacinados por dia} = \frac{\text{Número total de vacinados}}{\text{Intervalo de dias em analize}} \quad (1)$$

O cálculo de média de vacinados por dia não foi solicitado pelo professor-pesquisador, sendo a estratégia escolhida pelos alunos para fazer o tratamento dos dados. Conforme Van den Heuvel-Panhuizen (2010), em uma sala de aula é preciso que matematização ocorra a partir da exploração de contextos ricos, a pandemia se fez um contexto pertinente para o objetivo do planejamento do professor-pesquisador.

No Quadro 27 é apresentado um trecho recortado do Apêndice A.

Quadro 27 – Trecho 1-2-5-I

Trecho 1-2-5-I	Aluno K: Agora eu vou falar a respeito dos meses de junho e julho. Durante o mês de junho tivemos o maior registro de novos casos por dia, sendo em média 100 casos. O número de óbitos se manteve de maneira estável entre 0 e 10 pessoas, sendo um número relativamente alto. Os registros de vacinação continuam sendo feitos de maneira descuidada, por isso não conseguimos calcular a média exata. Porém concluímos que foram de 100 a 1000 pessoas por dia vacinadas. Agora no mês de julho, tivemos poucos casos por dia, além de uma redução do número de óbitos e os dados a respeito da vacinação se mantêm a mesma. Agora vamos apresentar as tabelas que foram feitas individualmente, contendo os três tópicos: Casos acumulados, casos ativos e novos óbitos.
-------------------	--

Fonte: Protocolos da pesquisa.

O Trecho 1-2-5-I é uma continuidade do Trecho 1-2-5-H, nesse recorte o Aluno K aponta o motivo por terem calculado a média de vacinados - a falta de cuidados no registro dos dados de pessoas vacinadas. Logo em seguida, os alunos apresentam a tabela com os dados, e o professor-pesquisador pode observar/analisar os dizeres de seus alunos para organizar/orientar suas práticas. A produção do aluno é o que guia o caminhar das aulas em aulas à luz da RME.

No Quadro 28 é apresentado um trecho destacado no Apêndice A.

Quadro 28 – Trecho 1-2-5-J

Trecho 1-2-5-J	Aluno M: Aqui temos a respeito do mês de abril, mês de maio, junho e julho. E agora a respeito das perguntas. Foz do Iguaçu tem 258.248 habitantes, a importância desse dado se dá para o monitoramento dos casos de covid-19. Durante o mês de junho houve um maior número de aumento dos novos casos de acordo com o site da Prefeitura e o monitoramento diário. No mês de julho houve uma significativa redução do número de novos casos de acordo com a tabela feita pela estudante Aluno K. Ao longo dos meses os casos tiveram uma grande diminuição e se tornaram mais controlados. Aqui um gráfico a respeito dos casos acumulados, casos ativos e óbitos ao dia. Durante o mês de abril o aumento de óbitos foi evidente e no decorrer dos demais meses houve uma clara diminuição. Os casos se mantiveram constantes no decorrer do mês de abril e sofreram brusco aumento no mês de maio e junho e voltaram a se estabilizar em julho e o número de pessoas vacinadas só aumentou no decorrer dos meses. Bom, esse foi o nosso trabalho.
-------------------	--

Fonte: Protocolos da pesquisa.

No Quadro 28 é apresentado dizeres de alunos que evidenciam que esse grupo seguiu mais uma leitura direta dos dados, sem deles construir conjecturas. Isso não tem problema, o importante é o professor-pesquisador conhecer seus alunos, suas singularidades para elaborar intervenções adequadas para que evoluam e construam seus conhecimentos. As produções dos estudantes são utilizadas para a construção de conceitos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000), independentemente de ser de maneira mais direta ou mais subjetiva, pode ser utilizada pelo professor-pesquisador.

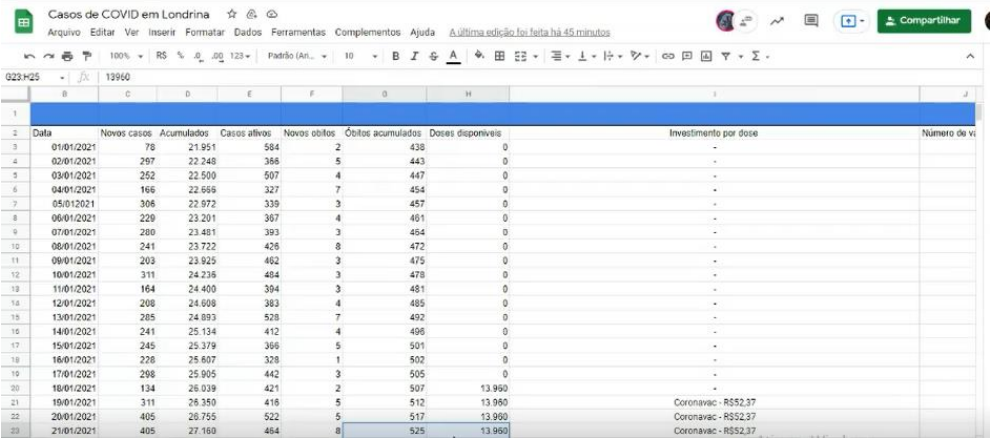
No Quadro 29 é apresentado um trecho destacado no Apêndice A.

Quadro 29 – Trecho 1-2-5-K

Trecho 1-2-5-K

Professor-pesquisador: Beleza então. Pessoal de Foz finalizaram então? Vamos lá, o próximo grupo é o grupo de Londrina: Aluno N, Aluno O, Aluno P, Aluno Q e Aluno R.

Aluno O: A nossa cidade de Londrina, e acho que muitas pessoas já falaram aqui o objetivo do trabalho. Então eu vou falar sobre os dados que a gente pesquisou, a gente dividiu os dados para cada pessoa, as informações mais importantes são os números de casos e óbitos e pessoas vacinadas, porque eu acho que dá para saber mais sobre a pandemia. Então aqui a gente fez os gráficos de acordo com os dados mais importantes, são os acumulados que dá para ver que tem bastante acumulados, os casos ativos, as doses disponíveis e os óbitos acumulados. A gente também falou muito sobre as vacinas, porque acho que o que é mais importante para gente acabar com a pandemia, e a gente colocou investimentos por dose, a gente quis colocar investimento por dose para não ter um tipo de corrupção e desvio de dinheiro, e também para saber qual vacina tá sendo mais aplicada na cidade, que no caso é a CoronaVac. As doses disponíveis tem bastante, só que as pessoas vacinadas por dia, eu achei pouco, mas tem pessoas que acham bastante. E é isso, no trabalho eu vou falando já, porque no desenvolvimento a gente colocou um texto falando das perguntas que você fez, a gente não separou uma parte só com as perguntas, a gente fez um texto com o desenvolvimento.



Data	Novos casos	Acumulados	Casos ativos	Novos óbitos	Óbitos acumulados	Doses disponíveis	Investimento por dose	Número de vi
01/01/2021	78	21.951	564	2	438	0	-	
02/01/2021	297	22.248	366	5	443	0	-	
03/01/2021	252	22.500	507	4	447	0	-	
04/01/2021	166	22.666	327	7	454	0	-	
05/01/2021	306	22.972	339	3	457	0	-	
06/01/2021	229	23.201	367	4	461	0	-	
07/01/2021	280	23.481	393	3	464	0	-	
08/01/2021	241	23.722	426	8	472	0	-	
09/01/2021	203	23.925	462	3	475	0	-	
10/01/2021	311	24.236	494	3	478	0	-	
11/01/2021	164	24.400	394	3	481	0	-	
12/01/2021	208	24.608	383	4	485	0	-	
13/01/2021	285	24.893	528	7	492	0	-	
14/01/2021	241	25.134	412	4	496	0	-	
15/01/2021	245	25.379	366	5	501	0	-	
16/01/2021	228	25.607	328	1	502	0	-	
17/01/2021	298	25.905	442	3	505	0	-	
18/01/2021	134	26.039	421	2	507	13.980	-	
19/01/2021	311	26.350	416	5	512	13.980	Coronavac - R\$52,37	
20/01/2021	405	26.755	522	5	517	13.980	Coronavac - R\$52,37	
21/01/2021	405	27.160	464	8	525	13.980	Coronavac - R\$52,37	

Fonte: Protocolos da pesquisa.

Apesar da proposta ser uma “*atividade aberta controlada*”, *direcionada a um objeto*, pode-se notar que no Trecho 1-2-5-K, o Aluno O, acaba *criando um outro problema*, ao se referir dos custos da vacinação e aponta os pontos de fiscalização de recursos financeiros que são distribuídos, colocando o seu ponto de vista e argumentando por meio de *construções matemáticas*.

No Quadro 30 é apresentado um trecho destacado no Apêndice A.

Quadro 30 – Trecho 1-2-5-N

Trecho 1-2-5-N	<p>Professor-pesquisador: Beleza, obrigado Aluno Q. Parabéns para o grupo, vamos lá então. Pessoal de Maringá. Vocês querem vir aqui então? Pessoal de Maringá vai vir aqui na frente apresentar. Vocês querem que eu vá passando os slides?</p> <p>Aluno S: Então a primeira coisa que eu queria falar em relação aos casos ativos é que nos dois primeiros dias de janeiro, não há formação então por isso que tem esse aumento muito brusco. Outra coisa no período ali de março e de maio houve primeiro um aumento bem intenso, provavelmente por causa da onda de calor, do afrouxamento das medidas restritivas e também porque a vacinação ainda não estava tão eficiente, porém depois houve uma grande redução porque aí começou a vacinação, porém mais para frente assim como eu já falei, também teve essa outra onda de calor, e também houve aquele sentimento das pessoas de pensar “ah já estamos vacinados, vamos sair”, e aí houve um aumento novamente. Depois quando o Aluno V for falar, vocês vão perceber que os casos ativos eles também estão proporcionais aos números de óbitos, novos óbitos ao dia.</p> <div data-bbox="336 757 1200 1263"> </div>
----------------	--

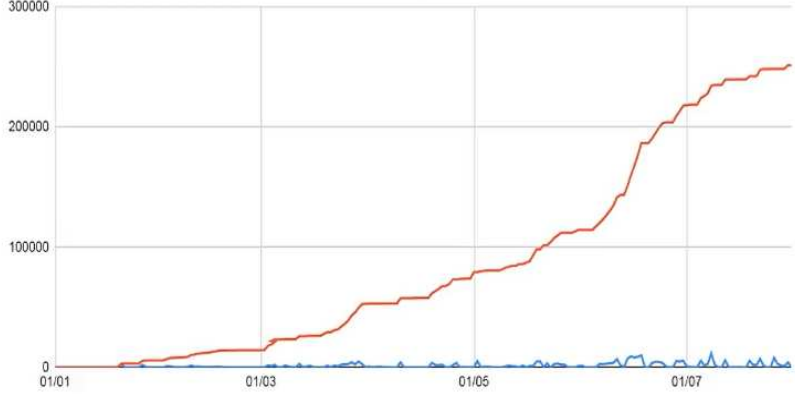
Fonte: Protocolos da pesquisa.

No Trecho 1-2-5-N, o Aluno K apresenta os dados por meio de gráficos e por meio de deles traz fatos externos como as medidas de isolamento e como elas estavam sendo praticadas. As tarefas em sala de aula precisam permitir que os alunos lidem com suas realidades, sendo, a realidade o que é vivenciado como real pelos estudantes, ou seja, as situações que eles compreendem e atribuem sentido, podendo ser circunstâncias puramente matemáticas, ao lado de situações extra matemáticas, que se podem referir a prática da vida.

O Aluno S menciona uma relação de proporção – o número de casos ativos estão proporcionais aos números de óbitos, novos óbitos ao dia. Essa leitura, apesar de não ser uma constante de proporção, evidencia um a conjectura de que quanto mais casos de COVID-19 tem, mais óbitos pela doença é confirmado.

No Quadro 31 é apresentado um trecho destacado no Apêndice A.

Quadro 31 – Trecho 1-2-5-P

Trecho 1-2-5-P	<p>Aluno V: Vou falar sobre o número de vacinados. No começo do ano foram poucas vacinas, por causa da demora pela compra delas. Conforme podemos ver, teve um aumento bem maior do número de vacinados após o mês 05.</p> <p>Aluno S: Outra coisa que eu queria falar também é, como você pode ver aqui, no começo a vacinação tava muito baixa, então os casos ativos tava lá em cima, só que depois aqui mais para o mês de abril, a vacinação começou a aumentar, e aí os casos começaram a reduzir.</p> <div style="text-align: center;"> <p>Vacinados ao dia e total de vacinados</p>  </div>
-------------------	--

Fonte: Protocolos da pesquisa.

Outro exemplo de leitura de uma leitura funcional é realizada no Trecho 1-2-5-P, em relação ao número de vacinados em cada dia e o número de acumulados, sendo um processo de longa duração para se obter um resultado significativo. Na qual, foi observado a redução do número de casos de pessoas contaminadas e de óbitos por complicações da doença.

No Quadro 32 é apresentado um trecho destacado no Apêndice A.

Quadro 32 – Trecho 1-2-5-R

Trecho 1-2-5-R	<p>Aluno Z: Com o seguinte gráfico podemos perceber que os casos ativos aumentaram bastante entre os meses de maio e julho. Sobre os dados coletados podemos perceber que houve um aumento dos casos acumulados principalmente durante os meses de maio e julho, também houve uma redução durante os meses de janeiro e março, relacionada aos casos ativos. Além disso também ocorreu um aumento de óbitos ao dia entre os meses de março e maio, o gráfico de recuperados só correu aumentos, por último temos os gráficos de vacinados ao dia, que apresentou um aumento principalmente no mês de julho. E com isso concluímos, após os levantamentos e hipóteses realizadas através das pesquisas e gráficos, a importância do trabalho em equipe bem como a iniciação científica para entendermos melhor nossa realidade atual. No momento é necessário cuidados de prevenção e proteção da população. As referências são do Instagram da prefeitura.</p>
-------------------	--

Fonte: Protocolos da pesquisa.

Com base na fala do Aluno Z no Trecho 1-2-5-N, ressalta-se a importância do trabalho em equipe para entender a realidade, sendo a organização em sala de aula fundamental, conforme Ponte e Quaresma (2012), um espaço marcado por circunstâncias favoráveis ao aprendizado do aluno, por meio da interação construtiva entre eles, tendo o professor-pesquisador como um orientador e que os alunos sintam se a vontade para explicar suas ideias e opiniões.

Em diversos trechos da *Aula 5* da aplicação da Tarefa 01, foi possível reconhecer que os alunos se *envolveram com um novo tipo de linguagem (informática) na comunicação matemática, além da escrita* e ao mesmo tempo que se depararam com essa nova linguagem, fizeram uma *exploração de caráter visual, dinâmico e manipulativo* no qual pode ser notado pelos gráficos e tabelas construídos.

Ainda, no desenvolvimento da *Aula 5*, de modo particular nos trechos do Apêndice B, houve a *realização de testes de conjecturas usadas pelos alunos, usando diversos exemplos*, visto que cada grupo trouxe a realidade de uma cidade distinta, e dado que traduziam a situação da cidade estudada.

Lidar com a Tarefa 01 tornou-se um meio para o pensar-com-tecnologia dos alunos. Nas produções dos alunos, seja no relatório escrito ou na apresentação do seminário, reconheceu-se similaridades em relação as leituras, escolhas gráficas. As produções dos alunos viabilizaram ao professor-pesquisador aproveitar do contexto e da exploração das produções dos alunos para discutir o conceito de uma sequência numérica a partir dos dados da pandemia COVID-19, dados que apesar de não possuírem uma razão fixa de crescimento, decréscimo ou constância. Os itens que seguem são exemplos de trechos que podem ser explorados pelo professor-pesquisador:

- É apontado pelo Aluno F, no Trecho 1-2-5-G, uma constância de casos e no mês de julho uma considerável redução dos casos, supondo que este fato se deve ao aumento do número de pessoas vacinadas.
- O Aluno M, no Trecho 1-2-5-J, aponta que, no mês de abril, o aumento de óbitos foi evidente e, no decorrer dos demais meses houve uma clara diminuição.
- O Aluno Q, no Trecho 1-2-5-L, menciona que de acordo com as novas pesquisas, os números de casos foi mantendo um padrão específico, alguns dias tinham mais casos e outros menos, em alguns meses os casos subiram muito e em outros caíram bastante.
- O Aluno S, no Trecho 1-2-5-K, mencionou que no começo a vacinação foi muito baixa, então os casos ativos eram altos, após o mês de abril, a vacinação começou a aumentar, e aí os casos começaram a reduzir.

- O Aluno X, no Trecho 1-2-5-Q, mencionou que entre os meses de março e maio, o número de novos casos aumentaram drasticamente a partir da análise do gráfico.

Além de produções dos alunos servirem para a sistematização dos conceitos, associando diferentes representações para uma sequência numérica, lidar com a tarefa favoreceu uma experiência em “dois cliques” ter uma representação gráfica para os dados, conforme mencionado pelo Aluno W, Trecho 1-2-6-A do Quadro 33.

Quadro 33 – Trecho 1-2-6-A

Trecho 1-2-6-A	<p>Bom dia, turma. Gostei bastante da apresentação de vocês e vamos conversar um pouco sobre. E preciso muito de vocês para dar continuidade ao conteúdo.</p> <p>O que vocês acharam do trabalho? O que vocês aprenderam?</p> <p>Aluno A: Muito bom.</p> <p>Aluno Z: Muitos dados</p> <p>Aluno I: Criar gráficos e tabelas.</p> <p>Aluno W: Aprendi que com dois cliques resolve muita coisa.</p>
-------------------	---

Fonte: Protocolos da pesquisa.

O dinamismo de planilhas eletrônicas para representação de situações oferece aos alunos uma *nova linguagem (informática)*. De forma específica, a maior parte desses alunos não tinham até essa tarefa trabalhado com essa ferramenta para resolver um problema, tornando-se uma maneira alternativa *de ensinar e de aprender matemática*.

O professor-pesquisador desde o seu planejamento tinha clareza da necessidade de se ter na sala de aula tarefas contextualizadas, haja visto o objetivo de seu projeto de pesquisa. Mas e os alunos? Será que para ele há clareza da importância do contexto analisado na situação e que por meio dele pode-se aprender e utilizar-se da matemática. No Quadro 34, é apresentado as respostas dos alunos ao serem questionados sobre a temática Covid 19.

Quadro 34 – Trechos 1-2-6-B e 1-2-6-C

Trecho 1-2-6-B	<p>Porque trabalhamos com os casos de COVID no Paraná?</p> <p>Aluno Z: A porque moramos no Paraná</p> <p>Aluno A: Acredito que serve de conscientização.</p> <p>Professor-pesquisador: Muito bom Aluno A, de fato estamos em uma realidade de pandemia e precisamos ter noção da realidade dela.</p>
Trecho 1-2-6-C	<p>Aluno W: A professor, achei legal a parte dos gráficos.</p> <p>Professor-pesquisador: Legal, vocês já sabiam construir gráfico de maneira digital?</p> <p>Maior parte dos alunos responderam que não.</p> <p>Aluno W: Só de maneira manual eu sabia.</p> <p>Professor-pesquisador: Quem aprendeu fazer gráficos forma digital?</p> <p>Maior parte dos alunos responderam que sim</p> <p>Aluno X: No começo foi mais difícil entender, mas depois foi tranquilo, fomos nos ajudando e deu certo.</p>

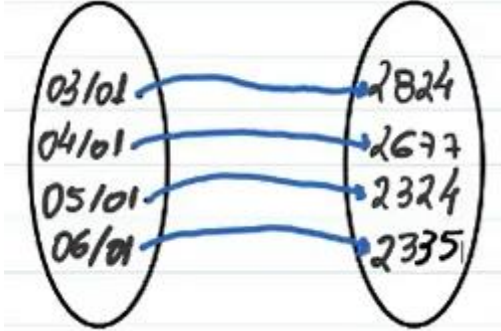
Fonte: Protocolos da pesquisa.

No Trecho 1-2-6-B, o professor-pesquisador ressalta a importância de entendermos o contexto em que se vive, neste caso, por meio de uma tarefa em que a matemática é utilizada como ferramenta para leituras da realidade, não um ente matemático desconectado da realidade.

No Trecho 1-2-6-C, os alunos mencionam que não sabiam construir gráficos e que se ajudaram para trabalhar com as ferramentas do software, esse trabalho em grupo permitiu *explorar de caráter visual* os dados levantados e por eles organizados.

No Quadro 35 é apresentado um trecho destacado no Apêndice A.

Quadro 35 – Trecho 1-2-6-D

Trecho 1-2-6-D	<p>Professor-pesquisador: Pessoal, vamos relembrar algumas da teoria dos conjuntos e aqui temos um conjunto que representa o domínio e um outro que representa o contra-domínio.</p> <p>Então no domínio vou colocar as primeiras datas da nossa pesquisa de COVID-19 no Paraná. E vamos imaginar que os resultados do contradomínio são o número de casos ativos referentes a cada dia analisado. Então, vamos pegar os dados da cidade de Maringá, pode ser?</p> 
-------------------	---

Fonte: Protocolos da pesquisa.

Com o objetivo de que os alunos aprendessem conceitos de sequência numérica por meio de uma exploração intuitiva, o professor-pesquisador começou a fazer algumas perguntas aos alunos para que juntos pudessem *compreender conceitos matemáticos*. No Trecho 1-2-6-D foi feita a associação dos dados levantados na tarefa com o conceito de relação entre dois conjuntos.

No Quadro 36 é apresentado um trecho destacado no Apêndice A.

Quadro 36 – Trecho 1-2-6-E

Trecho 1-2-6-E	<p>Professor-pesquisador: O nosso levantamento de dados teve um fim?</p> <p>Aluno X: Sim</p> <p>Professor-pesquisador: Porque?</p> <p>Aluno I: Porque estava no enunciado da tarefa.</p> <p>Aluno A: Porque restringimos o período de análise.</p> <p>Professor-pesquisador: Legal turma, como restringimos o nosso domínio, podemos afirmar que tivemos um fim, com isso, podemos afirmar que o número de casos ativos é uma sequência finita.</p> <p>Com isso, o professor-pesquisador apresenta a seguinte definição aos alunos:</p> <p><i>SEQUÊNCIA FINITA É TODA FUNÇÃO DE DOMÍNIO $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ COM ACN^* E CONTRADOMÍNIO B, SENDO B UM CONJUNTO NÃO VAZIO.</i></p>
-------------------	---

Fonte: Protocolos da pesquisa.

Logo em seguida, nos Trechos 1-2-6-E, o Aluno I, aponta que a restrição da sequência foi delimitada pelo enunciado da tarefa e, o Aluno A aborda que a sequência de dados tem um fim, pois o período de análise de dados foi restringido. A partir disso o professor-pesquisador apresenta o conceito de sequência finita. Outra possibilidade, seria pedir para que eles escrevessem suas definições de sequência e a partir dela irem refinando.

Ainda de forma intuitiva, no Quadro 37, é apresentado um trecho destacado no Apêndice A em que o professor-pesquisador explora o conceito de sequência infinita, sem ainda explorar o caráter de ordenação dos termos.

Quadro 37 – Trecho 1-2-6-F

Trecho 1-2-6-F	<p>Professor-pesquisador: Turma, mas se quiséssemos projetar dados de datas futuras seria possível? Porque?</p> <p>Aluno V: Depende</p> <p>Aluno Z: Acho que com base nos dados anteriores, poderia fazer um levantamento. Até porque um dia tem relação com outro.</p> <p>Aluno A: Deu pra perceber na tarefa que conforme aumenta os vacinados, diminui os casos, então acho que dá.</p> <p>Professor-pesquisador: Ótimo, então podemos fazer o levantamento por diversos dias, sem apresentar um fim. Com isso turma, podemos dizer que existe uma sequência infinita.</p> <p style="text-align: center;"><i>SEQUÊNCIA INFINITA: É TODA FUNÇÃO DE DOMÍNIO $A = \{1, 2, 3, \dots\}$ E UM CONTRA-DOMÍNIO B, SENDO UM CONJUNTO NÃO VAZIO</i></p>
-------------------	--

Fonte: Protocolos da pesquisa.

Da mesma forma que a sequência finita foi fundamentada, a sequência infinita também foi, no Trecho 1-2-6-F, inicialmente o professor-pesquisador pergunta se é possível encontrar dados futuros e o Aluno Z argumenta que com base nos dados anteriores, pode-se fazer projeções futuras, porque um dia possui relação com o anterior, podendo levantar inúmeros dados com base em parâmetros e fazendo um *levantamento hipóteses*.

No Quadro 38 é apresentado um trecho destacado no Apêndice A em que o professor-pesquisador busca explorar a característica de ordenação de uma sequência numérica.

Quadro 38 – Trechos 1-2-6-I e 1-2-6-J

Trecho 1-2-6-I	<p>Professor-pesquisador: Com os dados levantados, é possível determinar o n-ésimo termo?</p> <p>Aluno Z: Acho que é possível sim, mas não dá pra saber de cara</p> <p>Professor-pesquisador: Como vocês levantaram o número total de casos acumulados ou o número total de vacinados?</p> <p>Aluno V: Usava as fórmulas pegava os dados acumulados do dia anterior e somava com os novos dados do dia.</p> <p>Professor-pesquisador: Como foi usar as fórmulas?</p> <p>Aluno Q: Foi melhor, as planilhas ajudaram muito, porque foi mais rápido e mais fácil.</p> <p>Professor-pesquisador: E porque a planilha é uma boa ferramenta?</p> <p>Aluno W: Mais organizado</p> <p>Aluno A: Mais eficiente</p> <p>Aluno Q: O gráfico e fica mais fácil de visualizar.</p> <p>Aluno S: Os dados são bem mais precisos para se trabalhar.</p>
Trecho 1-2-6-J	<p>Professor-pesquisador: Se a gente consegue criar parâmetros, se organizar e visualizar, com tudo isso podemos dizer que temos uma lei de formação de uma sequência que é um conjunto de informações que determina todos os termos da sequência e a ordem.</p> <p>Professor-pesquisador: o que essa lei tem a ver com as informações que levantaram?</p> <p>Aluno U: Precisamos levantar vários dados e organizamos em uma ordem.</p> <p>Professor-pesquisador: Ótimo Aluno U. Vamos pegar o número de vacinados pra analisar, então temos o numero de vacinados no primeiro dia é 155 e assim vou somando com os próximos dias. Se eu pegar um determinado dia A_n, ele vai ser igual aos dados dia anterior mais o número de vacinados no dia, por exemplo, no segundo dia tivemos 3000 vacinados, logo o número de vacinados acumulados serão $155 + 3000$, que é 3155.</p> <p>⇒ LEI DE FORMAÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA</p> <p>É UM CONJUNTO DE INFORMAÇÕES QUE DETERMINA TODOS OS TERMOS DA SEQUÊNCIA E A ORDEM</p> <p>EX: $a_1 = 155$</p> <p style="text-align: center;">:</p> <p style="text-align: center;">$a_n = a_{n-1} + \text{Novos vacinados}$</p> <p>$a_2 = 155 + 3000 = 3.155$</p> <p>$a_3 = 3155 + 100 = 3.255$</p>

Fonte: Protocolos da pesquisa.

Com o fragmento de diversas ideias apresentadas pelos alunos no Trecho 1-2-6-I, o Aluno V faz a criação de parâmetros, ao montar um condição de cálculo de casos acumulados de COVID, o Aluno W, aponta a ideia de organização e ordenação. O Aluno U argumenta, no Trecho 1-2-6-J, a necessidade de levantar dados e organizar em uma determinada ordem, ou seja, a lei de formação de uma sequência, é um conjunto de informações que determina todos os termos da sequência e a ordem de cada termo.

No Trecho 1-2-6-I, os alunos também reconhecem o potencial do recurso tecnológico para o pensar-com-tecnologia, ao caracterizam a planilha eletrônica como rápida, de fácil manuseio, eficiente, precisa, possibilita a *exploração de caráter visual e organização dos dados*, reconhecendo alguns aspectos da experimentação com tecnologia.

4.2. O DESENVOLVIMENTO DA TAREFA 02: VIAGEM PARA PRAIA

O segundo ciclo de experiência de ensino desenvolvimento a partir da Tarefa 02 se deu nas mesmas duas turmas da 1ª série da aplicação da Tarefa 01, no ano de 2021, no formato escalonado (alguns alunos em sala e outros em casa, todos síncronos). A experiência de ensino, aplicação e discussão da Tarefa 02, teve a duração de 6 aulas de 45 minutos, sendo três aulas de desenvolvimento e outras 3 de discussão, conforme previsto no planejamento da tarefa. Durante a realização da tarefa foram utilizados a plataforma *Google for Education*, com as ferramentas *Google sala de aula*, *Google Sheets*, *Google Documentos* e *Google Meet*.

Desde o planejamento dessa tarefa o professor-pesquisador buscou trazer à tona os princípios da Educação Matemática Realística, uma vez que objetivou elaborar, aplicar e analisar essa tarefa com base na vivência do pensar-com-tecnologia por meio de planilhas eletrônicas à luz dos princípios da RME. O contexto da Tarefa 02 é realístico, Princípio da Realidade. Viagem para praia é um contexto rotineiro na vida dos alunos que faziam parte da aplicação das tarefas da pesquisa. O professor-pesquisador mais uma vez, como nas outras tarefas, partiu de um contexto que é significativo para os estudantes para iniciar, guiar e orientar a aprendizagem de seus estudantes.

Na primeira aula o professor-pesquisador apresentou a tarefa aos estudantes (26 alunos) que se organizaram em duplas ou trios, contabilizando 11 grupos no total. Em seguida, cada grupo escolheu uma praia diferente, sendo: Itapema, Pontal do Paraná, Guaratuba, Matinhos, Bombinhas, Ipanema, Praia Grande, Porto Seguro, Florianópolis, Maceió e Natal.

No Quadro 39 é apresentado os primeiros trechos do Apêndice C que trazem as recomendações do professor-pesquisador.

Quadro 39 – Trechos 2-2-1-A, 2-2-1-B e 2-2-1-C.

Trecho 2-2-1-A	Professor-pesquisador: Bom dia turma, hoje faremos um trabalho que irá compor uma parte da nota do 3º Trimestre, no caso 30% da nota será de algumas atividades que realizaremos e a que iremos iniciar hoje faz parte disso. O trabalho será em grupo com 2 ou 3 pessoas no máximo, e dessa vez vocês poderão escolher os grupos, diferente do trabalho de Covid que no caso foi eu que defini. (Vibração da sala)
Trecho 2-2-1-B	Vão utilizar o Google Sheets e lembrem que a planilha está do lado de vocês. Aluno I: Mas como vou usar a planilha se estou vindo no presencial agora? (Aluno I estava assistindo as aulas de casa e usava o computador antes) Professor-pesquisador: Vocês podem utilizar o celular de vocês para o preenchimento da tabela e no caso quem não tem internet no celular ou não tem celular tem a possibilidade de utilizar os tablets do colégio. (4 alunos pediram para utilizar os tablets).

Fonte: Protocolos da pesquisa.

Dar a liberdade para os alunos escolherem seus próprios grupos foi uma ação com intenção de dar maior autonomia em escolherem seus pares por afinidade, e de ser uma estratégia para contribuir com a motivação deles em realizar a tarefa de um modo ativo e interativo, visto que o aprendizado matemático é uma atividade social e não apenas pessoal. (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010). Sendo que essa atitude pode ser um fator que potencializa o princípio da *Interatividade da RME*.

Diante da realidade da escola, nem todos os alunos tinham recursos tecnológicos necessários para a realização da tarefa, com isso, o professor-pesquisador teve que oportunizar aos alunos condições na realização da tarefa, oferecendo os tablets da instituição, visto que, diante do princípio da *Interatividade*, os alunos devem ter oportunidades para compartilhar suas estratégias e intervenções uns com os outros e com o professor-pesquisador (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010) e neste caso, se o recurso é necessário, é preciso o professor-pesquisador se organizar para as possíveis necessidades dos alunos.























Após a divisão dos grupos, o professor-pesquisador compartilhou uma planilha (*Google Sheets*) em branco para o e-mail institucional de cada aluno para que fosse alimentada durante as três aulas de aplicação, esse compartilhamento permitiu que o professor-pesquisador acompanhasse as realizações e alterações realizadas por cada grupo, possibilitando aos estudantes a criação de informações na planilha *on-line*, com compartilhamento fácil e edição em tempo real. Por se tratar de uma *atividade matemática “aberta controlada”*, o professor-pesquisador consegue acompanhar o desenvolvimento da tarefa, atuando como aquele que guia,

e orientada o processo de aprendizagem com possíveis intervenções. (BORBA; VILLAREAL, 2005); (FREDENTHAL; 1991).

A Figura 3 demonstra o drive do professor-pesquisador, os arquivos foram disponibilizados aos alunos, que à princípio era uma planilha em branco.

Figura 3 – Drive do professor-pesquisador

Meu Drive > TAREFAS 2021 [1ª Série] > Tarefa 02: Viagem para praia > 1ª EM

Nome ↑	Proprietário
 Bombinhas 	eu
 Florianópolis 	eu
 Guaratuba 	eu
 Ipanema 	eu
 Itapema 	eu
 Maceió 	eu
 Matinhos 	eu
 Natal 	eu
 Pontal do Paraná 	eu
 Porto Seguro 	eu
 Praia Grande 	eu

Fonte: Protocolos da pesquisa.

No Quadro 40, é apresentado um trecho destacado no Apêndice B.

Quadro 40 – Trecho 2-2-1-D

Trecho 2-2-1-D	<p>Professor-pesquisador: A data de entrega é na quinta (02/09) e vocês precisam me entregar um documento no Word ou Google Documentos respondendo as questões da tarefa e a planilha que estou compartilhando com vocês também será avaliada.</p> <p>Na planilha é necessário que vocês utilizem as fórmulas, construam a tabela e gerem os gráficos.</p>
-------------------	--

Fonte: Protocolos da pesquisa.

No Trecho 2-2-1-D, o professor-pesquisador comenta que a planilha eletrônica será compartilhada conforme a divisão de cada grupo, podendo ser alimentadas com as informações para os dados da sua planilha, com compartilhamento fácil e edição em tempo real. Além da

possibilidade da utilização de comentários no decorrer da tarefa. Esses direcionamentos do professor-pesquisador são para expressar a intenção de oportunizar aos alunos lidarem com planilhas eletrônicas (primeiras aulas do planejamento) e compartilhem suas reflexões a partir do envolvimento com uma tarefa matemática em um contexto realístico. No Trecho 2-2-1-B o professor-pesquisador ressalta a importância de usarem as planilhas eletrônicas, visto que podem influenciar no raciocínio dos alunos, com feedbacks para a validação de conjecturas matemáticas e o trabalho com os dados. (MARCHI, 2014).

No caso, oportunizar ao aluno *criar e simular modelos matemáticos* a partir de uma planilha em branco, traz o objetivo de que seja realizado *construções matemáticas* por meio das fórmulas e que seja *explorado o caráter visual, dinâmico e manipulativo de objetos matemáticos* com construção de tabelas e geração de gráficos (BORBA; VILLAREAL, 2005). Nos dias atuais as planilhas eletrônicas são recursos para a atividades de diversos profissionais, inclusive dos matemáticos. Mais uma vez, destaca-se a busca por fazer da Tarefa um meio de os alunos lidarem com uma matemática que se desenvolve enquanto ferramenta, no qual a formalização é o estágio final e não o ponto inicial do processo de aprendizagem.

No Quadro 41 é apresentado dois trechos de diálogo da aula, aula em que os alunos iniciaram suas produções.

Quadro 41 – Trechos 2-2-1-E e 2-2-1-F

Trecho 2-2-1-E	<p>Aluno M: Professor, a distância até bombinhas foi de 685 km, é preciso fazer arredondamento para 720 km, pois é mais próximo?</p> <p>Professor-pesquisador: Sim Aluno M, é necessário que vocês observem qual é o melhor valor para se arredondar, se é para cima ou para baixo, muito boa sua observação.</p>
Trecho 2-2-1-F	<p>Professor-pesquisador: Como vocês podem calcular através das planilhas? Como posso utilizar uma tabela?</p> <p>Vamos imaginar que iremos pedalar a 20 km/h, com isso precisamos calcular a distância, como faremos isso?</p> <p>Aluno T: Calcula a velocidade vezes o tempo.</p> <p>Professor-pesquisador: Perfeito Aluno T, é isso mesmo.</p>

Fonte: Protocolos da pesquisa.

A matemática é uma *atividade humana* em que é preciso no contexto escolar ser vivenciada, de um modo que se perceba que escolhas podem ser realizadas, uma matemática em movimentação e não considerada como pronta e finalizada. No Trecho 2-2-1-E o aluno M, consegue analisar o dado real e busca parametrizar/matematizar essa realidade. O professor-pesquisador, quando levanta perguntas aos seus alunos, atua como orientador no processo de

validação do questionamento do aluno, processo necessário para a aprendizagem (FREUDENTHAL, 1991), que gera um feedback para terem a confiança em dar continuidade nos trabalhos.

Ainda no Trecho 2-2-1-F, é possível notar que a experiência do aluno com elementos envolvidos na tarefa é um aspecto essencial para o seu modo de lidar com ela, para o desenvolvimento de seu grupo. O aluno T traz as grandezas velocidade e tempo enquanto aquelas necessárias para se encontrar a distância. Conforme Mendes (2014), em um contexto em que os alunos são protagonistas dos processos de aprendizagem, é papel do professor-pesquisador buscar, investigar e organizar fenômenos (situações) significativos e realísticas para fomentar o processo. Para esses alunos lidar com distância entre cidades se fez realístico e pertinente para aprenderem matemática, sendo a matemática um meio, uma ferramenta para analisar a situação da Viagem para a Praia.

No Quadro 42, é apresentado um trecho destacado no Apêndice B.

Quadro 42 – Trecho 2-2-2-A

Trecho 2-2-2-A	<p>Aluno M: Professor, você pode dar uma olhada na tabela.</p> <p>Olha a tabela e pergunta</p> <p>Professor-pesquisador: Como vocês chegaram a esses resultados de distância?</p> <p>Aluno M: Fiz os cálculos manualmente e digitei os dados aqui.</p> <p>Professor-pesquisador: Tá, mas eu quero os resultados via planilha eletrônica, como que você calculou isso? O que você percebeu com seus dados?</p> <p>Aluno M: Que em cada hora aumentava 90.</p> <p>Professor-pesquisador: Se você está aumentando 90, qual a conta que você fez?</p> <p>Aluno G: A gente multiplicou a hora por 90.</p> <p>Professor-pesquisador: Vocês concordam comigo que se eu pegar o termo anterior e somar 90, vai dar a minha nova distância?</p> <p>Aluno M: Sim</p> <p>Professor-pesquisador: Acha que conseguem fazer com fórmulas?</p> <p>Aluno M: Sim</p>
-------------------	---

Fonte: Protocolos da pesquisa.

Como pode-se observar no Trecho 2-2-2-A, o aluno M inicialmente decidiu por realizar manualmente os cálculos, o que é um desvio da proposta do professor-pesquisador, apesar dos resultados estarem corretos. Com o intuito de que o aluno se envolva com uma nova linguagem na comunicação matemática, e não apenas a linguagem escrita, o professor-pesquisador solicita ao aluno que faça a tarefa na planilha. Neste momento, em um paralelo a

questões levantadas por Bittar (2000), levanta-se as questões “Porque usar uma planilha eletrônica e não papel e lápis?” É para motivar os alunos, para cumprir uma exigência da escola ou para tratar de forma diferente (talvez mais adequada) certo conteúdo? Qual o ganho (em termos de aprendizagem) obtido com a utilização de planilhas eletrônicas?

Alguns argumentos para elaborações de respostas a essas questões podem são construídos ao pressupor a tecnologia enquanto parte integrante das construções cognitivas como uma reorganizadora da maneira de pensar das pessoas (MARCELINO; OLIVEIRA, 2015); ao conceber o construto seres-humanos-com-mídias, uma integração entre a atividade intelectual das pessoas e as ferramentas de natureza midiática, como entidades indissociáveis (BORBA; VILLARREAL, 2005). Sendo para além de uma exigência do professor-pesquisador o pedido em utilizar uma planilha, mas sim, uma proposição enquanto oportunidade de o aluno descobrir uma nova forma de lidar, reorganizar sua maneira de pensar.

Logo após a intervenção o professor-pesquisador atua como mediador perguntando como os alunos encontraram os resultados validando a ideia e indicando a maneira que a ideia pode ser representada em um algoritmo.

No Quadro 43, é apresentado um trecho destacado no Apêndice B.

Quadro 43 – Trecho 2-2-2-B

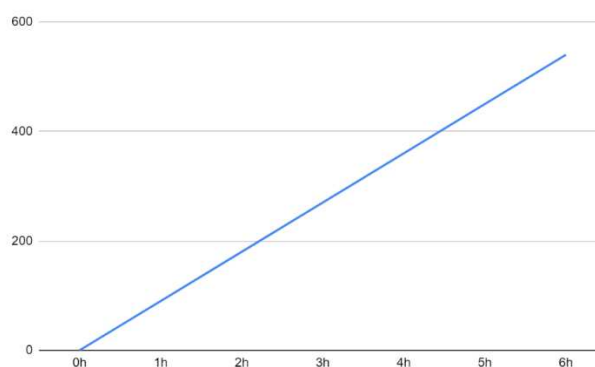
Trecho 2-2-2-B	<p>Aluno X pede pra olhar a tabela dele</p> <p>Professor-pesquisador: Um gráfico de distância, ele pode ser em barras ou em linhas?</p> <p>Aluno V: Em linhas.</p> <p>Professor-pesquisador: Qual você acha que faz mais sentido?</p> <p>Aluno X: Eu fiz em barras porque achava mais bonito mesmo, mas acho que é melhor fazer em linhas.</p> <p>Professor-pesquisador: Eu também acho, mas porquê?</p> <p>Aluno X: Porque é continua e crescente.</p> <p>Professor-pesquisador: Ótimo, isso ai Aluno X.</p>
Trecho 2-2-2-D	<p>Professor-pesquisador abre a planilha e observa que o gráfico inicia com a distância igual a 90 km.</p> <p>Professor-pesquisador: Quando inicia a viagem?</p> <p>Aluno Q: A precisa começar com 0.</p> <p>Professor-pesquisador: Isso mesmo. Qual a distância que vocês percorreram na primeira hora?</p> <p>Aluno D: 90 km.</p> <p>Professor-pesquisador: E depois de mais 1 hora?</p> <p>Aluno W: Vamos andar mais 90 km.</p> <p>Professor-pesquisador: Então precisamos representar isso na planilha.</p>

Fonte: Protocolos da pesquisa.

Já no Trecho 2-2-2-B, é *identificado um incoerência de um conceito* relacionado a criação do gráfico, o aluno X pede um feedback ao professor-pesquisador do que havia feito até o momento e percebe que o gráfico em barras elaborado pelo grupo em barras pode não ser o mais adequado. O professor-pesquisador pergunta qual gráfico faria mais sentido, o aluno a princípio não havia pensando na função em si, mas na estética, ao ser questionado traz características do gráfico de linhas, relacionando-o com o comportamento de algo em função do tempo e apresenta uma continuidade que cada gráfico representa. Além de ter a oportunidade de intervir no durante, no momento em que os alunos estão realizando a tarefa, o professor-pesquisador tem a oportunidade de recolher informações sobre o modo de lidar dos estudantes, por exemplo, essa discussão sobre o gráfico mais adequado pode ser retomada com toda a turma de modo a também discutir que gráfico em barras é utilizado para a comparação de elementos distintos.

No Trecho 2-2-2-D, a partir da orientação do professor-pesquisador o aluno consegue *testar sua conjectura*, usando os dados levantados da viagem para realizar os testes e modifica a representação dos dados. Na Figura 4 é apresentado o gráfico elaborado pelo aluno após a intervenção realizada pelo professor-pesquisador, na qual a imagem é *explorada pelo caráter visual, dinâmico e manipulativo do objeto matemático*.

Figura 4 – Gráfico distância pelo tempo.

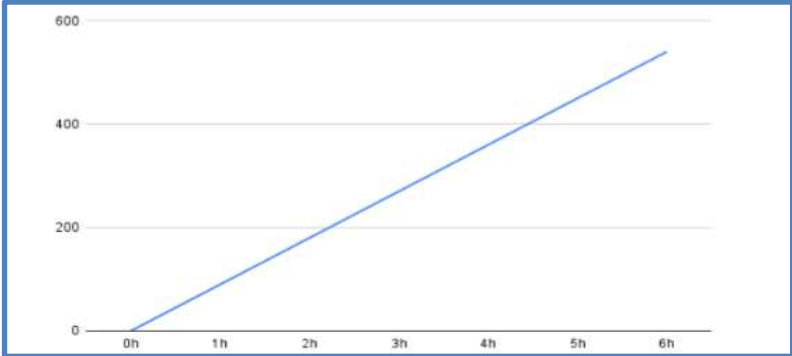


Fonte: Protocolos da pesquisa.

Os alunos tiveram duas aulas para lidarem com a tarefa e elaborarem o relatório escrito a ser entregue ao professor-pesquisador em que tinham que responder as questões da Tarefa 02. Algumas das respostas são apresentadas e destacadas em moldura azul no Quadro 44 enquanto exemplo de recolha de informações que o professor-pesquisador fez e para que as usou. O professor-pesquisador fez uma análise da produção escrita dos alunos e, em seguida iniciou um

diálogo com os alunos a respeito das experiências que eles tiveram ao realizar a tarefa, transcrição Apêndice B.

Quadro 44 – Produção de alunos

Produção de alunos à itens da Tarefa	Análise																				
<p>D. O que vocês observam de regular (padrão) entre os termos? A cada 1h adiciona-se 90 km a distância percorrida</p>	<p>A partir desse reconhecimento de padrão o professor-pesquisador sistematizou razão de uma progressão aritmética.</p>																				
<p>B) Com o auxílio de uma planilha eletrônica, construa uma tabela e obtenha quantos quilômetros o automóvel percorre em 0h, 1h, 2h, 3h, 4h, 5h, 6h, 7h, 8h, de viagem até chegar ao local desejado.</p> <table border="1" data-bbox="256 674 616 987"> <thead> <tr> <th>Tempo (h)</th> <th>Distância (km)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>90</td></tr> <tr><td>2</td><td>180</td></tr> <tr><td>3</td><td>270</td></tr> <tr><td>4</td><td>360</td></tr> <tr><td>5</td><td>450</td></tr> <tr><td>6</td><td>540</td></tr> <tr><td>7</td><td>630</td></tr> <tr><td>8</td><td>720</td></tr> </tbody> </table>	Tempo (h)	Distância (km)	0	0	1	90	2	180	3	270	4	360	5	450	6	540	7	630	8	720	<p>A partir dessa organização (representação) o professor-pesquisador retoma a ordenação dos termos de uma sequência.</p>
Tempo (h)	Distância (km)																				
0	0																				
1	90																				
2	180																				
3	270																				
4	360																				
5	450																				
6	540																				
7	630																				
8	720																				
<p>F. Com o auxílio de uma planilha eletrônica, faça uma representação gráfica da distância em relação ao tempo percorrido.</p> 	<p>A partir dessa representação o professor-pesquisador tem a oportunidade de destacar o “olhar” discreto dos termos de uma sequência na representação de uma função afim, realizando conexões com outros conceitos e discutir com os alunos o que isso representa.</p>																				
<p>2. Agora, nos próximos itens, o grupo precisa explorar o conceito de sequência com relação a:</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Sequência finita ou infinita: a sequência apresentada é finita, pois acaba em um determinado momento, nesse caso, acaba quando chega ao destino; ● Obter a distância percorrida pelo automóvel em n horas: $a_n = n \times 90$ ● Comportamento da sequência em relação como constante, crescente ou decrescente? O comportamento da sequência é crescente, pois é uma viagem sendo feita e por isso não teria como diminuir uma distância ou tempo. Também não teria como essas variáveis serem constantes porque elas vão mudando. 	<p>Com essa produção o professor sistematiza os elementos de uma progressão aritmética.</p>																				

Fonte: Protocolos da pesquisa.

Na terceira aula, inicia-se um diálogo mediado pelo professor-pesquisador para que se formalize conceitos a partir da prática realizada pelos alunos. Na viagem para praia cada grupo tinha um destino, porém nem todas as respostas seriam iguais, porém pelo fato de se adotar 90

km/h como a velocidade média, o comportamento da sequência seria similar de todos os grupos. No Quadro 45, é apresentado um trecho destacado no Apêndice B.

Quadro 45 – Trecho 2-2-3-A

Trecho 2-2-3-A	<p>Professor-pesquisador: Bom dia pessoal, para começarmos a trabalhar o conceito de Progressão Aritmética, vamos pensar no nosso trabalho de viagem para praia, Qual sequência montamos?</p> <p>Aluno I: (0, 90, 180, 270, 360, 450, 540, 630, 720).</p> <p>Professor-pesquisador: Que padrão vocês puderam notar?</p> <p>Aluno I: Aumenta de 90 em 90.</p> <p>Professor-pesquisador: Ótimo Aluno I, esse padrão de aumento chamamos de razão.</p>
-------------------	---

Fonte: Protocolos da pesquisa.

A sequência foi demonstrada pelo Aluno I, tendo como primeiro termo o ponto de partida do início da viagem, que no caso foi considerado o número 0. Cada um dos termos seguintes é a distância que o automóvel percorreu em quilômetros, ao final de cada hora. Essa sequência numérica é chamada de Progressão Aritmética, termo que o professor-pesquisador havia dito aos estudantes no início da aula.

A princípio os alunos levantaram os dados de hora em hora, e montaram uma tabela com os dados de tempo e distância (Figura 5), que é notado aspectos da *Experimentação com tecnologia, como as conexões entre as representações e a visualização*.

Figura 5 – Tabela: Tempo e Distância

Tempo (h)	Distância (km)
0	0
1	90
2	180
3	270
4	360
5	450
6	540
7	630
8	720

Fonte: Protocolos da pesquisa.

Além disso, no Trecho 2-2-3-A o estudante I consegue notar um padrão de aumento da sequência, ou seja, ao adicionar a cada um de seus termos uma mesma constante, se encontra o próximo termo, no exemplo da viagem, sempre é adicionado 90 a cada termo, no qual essa

soma de cada termo é intitulada como razão. O conceito de razão foi observado pelos alunos, mesmo não sabendo ao certo como denominar, já que a primeira pergunta a ser respondida no relatório era quantos quilômetros o automóvel percorria em uma hora, e a partir do questionamento do professor-pesquisador o aluno consegue sistematizar e *compreender o conceito*.

No Quadro 46, é apresentado um trecho destacado no Apêndice B.

Quadro 46 – Trecho 2-2-3-B

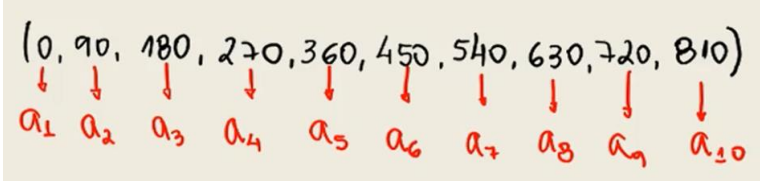
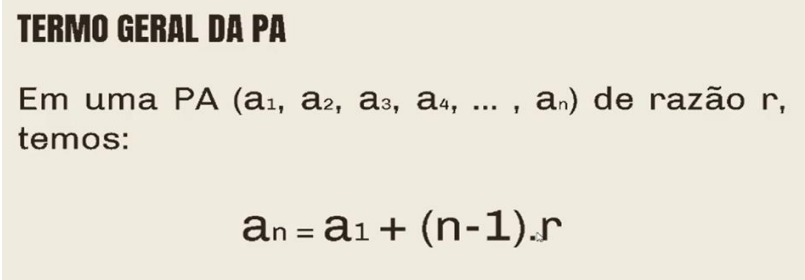
Trecho 2-2-3-B	<p>Professor-pesquisador: No trabalho, como vocês poderiam classificar a PA de vocês?</p> <p>TURMA: Crescente</p> <p>Aluno Z: Depende, se for a do COVID nem sempre.</p> <p>Professor-pesquisador: É a da praia?</p> <p>Aluno Z: Da praia é crescente.</p>
-------------------	--

Fonte: Protocolos da pesquisa.

As progressões aritméticas podem ser classificadas como crescentes, decrescentes, monótonas ou constantes. No Trecho 2-2-3-B, nota-se que vários alunos reconheceram que o comportamento da sequência numérica era crescente. Além disso, o Aluno Z retoma a Tarefa 01 ao citar que naquela experiência o comportamento da sequência não era o mesmo que da Tarefa 02. O professor-pesquisador neste momento de sistematização não aprofundou a análise da Tarefa 01, Covid -19, entretanto reconhece-se que esse contexto poderia ter sido por ele aproveitado para discutir outros comportamentos, como de sequências monótonas.

No Quadro 47, é apresentado um trecho destacado no Apêndice B.

Quadro 47 – Trecho 2-2-4-A e 2-2-4-B

Trecho 2-2-4-A	<p>Professor-pesquisador: Qual os valores da sequência da viagem para a praia.</p> <p>Aluno Z: Ah professor, minha sequência foi (0, 90, 180, 270, 360, 450, 540, 630, 720, 810)</p> <p>Professor-pesquisador: Quem é o 1º termo da sequência?</p> <p>Aluno W: É zero.</p> <p>Professor-pesquisador: E o meu 2º termo?</p> <p>Aluno W: 90</p> <p>Professor-pesquisador: Dessa forma, vamos atribuindo a ordem para cada termo da equação, nessa sequência que vai até o décimo termo.</p> 
Trecho 2-2-4-B	<p>Professor-pesquisador: Como que vocês calcularam o segundo termo?</p> <p>Aluno Z: Multiplicamos a hora por 90.</p> <p>Professor-pesquisador: O cálculo está certo, mas tem outra forma que daria para fazer.</p> <p>Aluno X: A professor, pega o termo anterior e soma 90.</p> <p>Professor-pesquisador: ótimo, estamos sempre somando 90. Se eu pego o termo anterior, e somo 90. Posso dizer que tenho meu a_1 mais o que?</p> <p>Professor-pesquisador: O que é meu 90?</p> <p>Aluno T: A razão</p> <p>Professor-pesquisador: Então estou somando meu primeiro termo mais a minha razão. E para calcular o a_3?</p> <p>Aluno T: $a_2 + razão$</p> <p>Professor-pesquisador: Então posse dizer que o meu $a_3 = a_1 + r + r$, logo meu $a_3 = a_1 + 2r$.</p> <p>Professor-pesquisador: Então posso dizer qual o meu n-ésimo termo?</p> <p>Aluno X: $a_n = a_1 + (n - 1)r$.</p> <p>Professor-pesquisador: ótimo Aluno X, e como você chegou a essa conclusão?</p> <p>Aluno X: Toda vez que pego um determinado termo, eu tenho um número menor multiplicando a razão.</p> <p>Apresentação do slide:</p> 

Fonte: Protocolos da pesquisa.

Já na quarta aula, o professor-pesquisador retoma a situação descrita na terceira aula, como pode ser observado no Trecho 2-2-4-A, inicia com as perguntas de qual seria o primeiro termo, questiona qual seria o segundo termo e a partir disso tem-se a ordem dos termos. Toda sistematização leva em conta a produção dos estudantes nas tarefas, ação que remete ao *princípio da Atividade*. (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000).

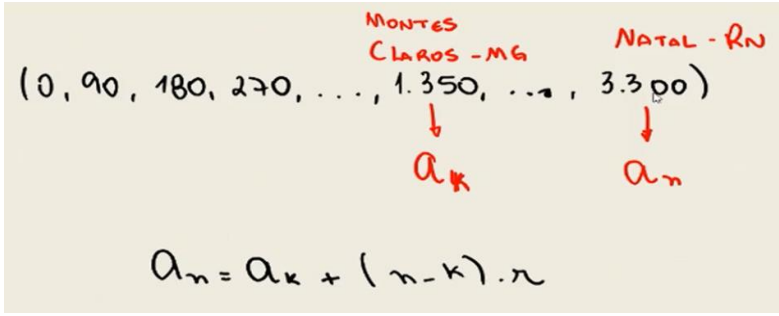
No Trecho 2-2-4-B os alunos reconhecem que se pode calcular a distância percorrida pelo automóvel, em quilômetros, e que ao final de cada hora de percurso é adicionado à quantidade inicial um número $k \cdot 90$, com $k \in \mathbb{N}^*$. Além disso, é colocado por outro aluno uma maneira diferente de resolução, fazendo o cálculo pela soma da razão pelo termo anterior. Ou seja, *explorando diversificadas formas de resolução*. Por se tratar de um contexto rico, permitiu que os alunos encontrassem soluções por meio de ferramentas matemáticas distintas, sendo uma característica do *princípio de Entrelaçamento*. (BORBA; VILLAREAL, 2005) (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010).

Entretanto, em uma progressão aritmética, um determinado termo que é representado por a_n , pode ser representado em função do primeiro termo (a_1) e a razão (r), como foi observado pelo aluno X no Trecho 2-2-4-B. Para se ter o entendimento dessa fórmula matemática, associasse as distâncias percorridas aos termos $a_1, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ em relação ao tempo percorrido em horas, como foi descrito no Trecho 2-2-4-A. E pode ser observado pelo aluno X que em cada igualdade, o coeficiente que multiplica a razão tem uma unidade menor que o termo anterior, assim se conclui que $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, sendo então desenvolvida a ideia de termo geral de um progressão aritmética.

Toda a definição do termo geral é notada o *princípio da Interatividade*, em que foi construída por meio da interação do professor-pesquisador e os alunos, já que a colaboração e oportunizam a reflexão a respeito do trabalho. Além disso, os alunos conseguiram *compreender um conceito*, com auxílio da *experimentação com tecnologia*. (WIDJAJA; HECK, 2003) (BORBA; VILLAREAL, 2005).

No Quadro 48, é apresentado um trecho destacado no Apêndice B.

Quadro 48 – Trecho 2-2-4-C

Trecho 2-2-4-C	<p>Professor-pesquisador: Vamos lá Aluno W, vamos pegar a praia de Natal agora.</p> <p>Professor-pesquisador: Vamos imaginar que o pessoal que vai para Natal-RN, vai fazer uma parada em Montes Claros-MG. Como podemos calcular o ultimo termo da sequência a partir do elemento que representa a cidade de Natal?</p> <p>Vamos imaginar a seguinte sequência (0, 90, 180, 270, 360, 450, ..., 1350, ..., 3600), sendo que 1350, corresponde a distância até Montes Claros-MG, no qual é o meu K-termo e a distância 3300 km é o ponto de chegada em Natal e corresponde ao n-ésimo termo.</p> <p>Como podemos indicar uma equação que represente essa equação a partir de Montes Claros?</p> <p>Aluno X: O a_k será o a_1?</p> <p>Professor-pesquisador: Bom, se considerar que o termo pode ser substituído o a_1 por a_k e o -1 ser substituído por -k</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>Aluno Z: O que seria o n professor?</p> <p>Professor-pesquisador: Seria a quantidade de termos, como o k também seria.</p>
-------------------	---

Fonte: Protocolos da pesquisa.

No início do Trecho 2-2-4-C, o professor-pesquisador intervém solicitando dados aos alunos do grupo que realizou a maior viagem, no caso, foi o grupo que selecionou a praia de Natal-RN, com isso o professor-pesquisador coloca uma condição de parada na cidade de Montes Claros-MG. Nessa situação, o professor-pesquisador *aprofunda-se em variados níveis de rigor matemático e elabora um novo tipo de problema e realiza construções matemáticas*, iniciando a aula com questionamentos informais e que diante de construções matemáticas, avança e sistematiza na construção de conceitos formais, passando por diversos níveis de compreensão. Nesse caso é mais uma vez evidenciado que a aprendizagem se deu a partir do lidar com a tarefa, que o contexto não foi um contexto de aplicação de um conteúdo previamente apresentado para os alunos.

Se o aluno considerar a distância percorrida até Montes Claros-MG que era de 1350 km e quiser se deslocar até a cidade de Natal-RN, que era de 3300 km, precisa subtrair 3300 de 1350. Sendo que tanto esses valores podem ser representados por a_k , sendo a_k e a_n a distância e k a n posição da sequência, respectivamente. Com isso, pode-se articular juntamente com os

alunos que em uma PA: $(a_1, a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots, a_n)$, de razão r , tem-se que $a_n = a_k + (n - k) \cdot r$. Nessa situação, destacada no Trecho 2-2-4-C, o professor-pesquisador demonstra *diferentes tipos de símbolos e notações matemáticas* que começam a ser desenvolvidas pelos alunos.

No Quadro 49, é apresentado um trecho destacado no Apêndice B.

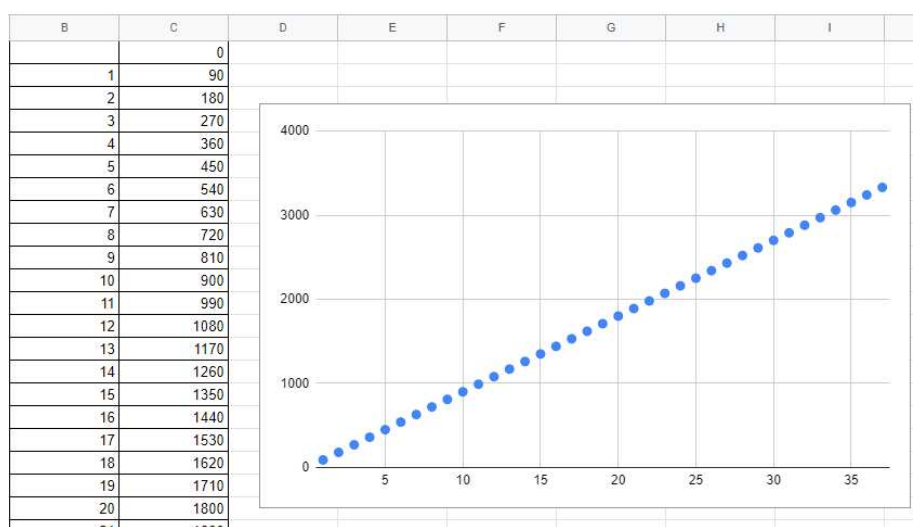
Quadro 49 – Trecho 2-2-5-B e 2-2-5-D

Trecho 2-2-5-B	<p>Professor-pesquisador: E que tipo de progressão que temos?</p> <p>Aluno Z: Não sei</p> <p>Professor-pesquisador: Você me disse que o gráfico é linear, isso é característica de qual função?</p> <p>Aluno I: Função Afim.</p> <p>Professor-pesquisador: Logo, podemos dizer que a função afim é o que?</p> <p>Aluno Z: Uma PA</p>
Trecho 2-2-5-D	<p>Professor-pesquisador: E como vocês formaram os pontos do plano cartesiano?</p> <p>Aluno X: Utilizamos o tempo em relação a distância.</p> <p>Professor-pesquisador: Agora Aluno X, no plano cartesiano, vamos pensar no nosso gráfico a relação de tempo x distância, qual relação tenho o tempo com a minha progressão aritmética?</p> <p>Aluno I: A razão?</p> <p>Professor-pesquisador: Não, seria outra coisa.</p> <p>Aluno T: Os valores de n.</p> <p>Professor-pesquisador: ótimo Aluno T. E agora a distância? Qual relação tem com a PA? Se você atribui valores para n, quais os resultados que você encontra?</p> <p>Aluno Z: An.</p> <p>Professor-pesquisador: Então tenho os valores de n, associado ao tempo e já os valores de a_n associados a distância.</p> <p>Professor-pesquisador: Vocês me falaram que o gráfico é linear, crescente e com a razão positiva e tem mais ou menos essa cara.</p> <div data-bbox="660 1585 1129 1888" data-label="Figure"> </div>

Fonte: Protocolos da pesquisa.

No Trecho 2-2-4-B, os alunos conseguem fazer associação de dois conceitos distintos que foram desenvolvidos em aulas de matemática, em que relacionam o termo geral de uma PA com uma função afim, no qual pode ser representada por $a_n = 90 \cdot n$, quando se assume valores naturais de n , ou seja, os termos de uma PA são parte de uma função linear definida nos reais. Esse entendimento tem respaldo no reconhecimento que os alunos conseguem fazer por meio de uma representação gráfica da PA, elaboradas em suas planilhas eletrônicas (Figura 6, exemplo de uma produção).

Figura 6 – Produção do grupo de Natal.



Fonte: Protocolos da pesquisa.

Ou seja, os alunos conseguem notar que conteúdos matemáticos, como a sequência numérica e a função afim não considerados conceitos isolados, mas fortemente integrados - *Princípio do Entrelaçamento*. Além disso, é explorado *uma forma de resolução diversificada, sendo uma nova dinâmica, tendo uma forma de conectividade* com o conteúdo proposto (BORBA; VILLAREAL, 2005).

De modo geral, no Trecho 2-2-4-D, pode-se reconhecer os valores de n e a_n , sendo que o aluno T associa o termo n ao tempo, e o aluno Z reconhece a_n associado a distância, no qual a representação gráfica de uma PA ($a_1, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$), é formado pelos conjunto dos pontos (n, a_n) do plano cartesiano.

Contudo, nesse ciclo de aplicação da tarefa mais uma vez foi possível reconhecer o pensar-com-tecnologia, a experimentação matemática e aulas à luz da RME organizadas a partir do lidar com uma tarefa realística.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Finalizar uma dissertação traz à tona reflexões que expressar em considerações finais não é uma tarefa simples, uma vez que ela é oriunda de um campo complexo – o campo de um professor em formação, que carrega consigo desde as experiências e reflexões provocadas na primeira orientação, assim como as vivências em sala de aula e análise crítica durante o percurso de aplicação das tarefas, tanto quanto professor de Matemática do Ensino Básico e pesquisador da área de Educação de Matemática.

Retomando o objetivo central dessa pesquisa reconhecemos que foi possível elaborar, aplicar e analisar tarefas em contextos realísticos e que utilizou-se planilhas eletrônicas enquanto recurso tecnológico para o processo de ensino e aprendizagem de sequências numéricas no Ensino Médio, na qual foi fundamentada na Educação Matemática Realística e na experimentação matemática.

Essa pesquisa teve como pressuposto que tarefas geram oportunidade de o estudante desenvolver os conceitos matemáticos, explorar ideias, estratégias e seu pensamento matemático. De forma específica, foram elaboradas tarefas para o ensino e a aprendizagem acerca de Sequências Numéricas, foi discutido e explorado tecnologia digital em tarefas matemáticas enquanto experimentação com tecnologia e desenvolvido uma proposta de ensino e de aprendizagem sobre sequências numéricas.

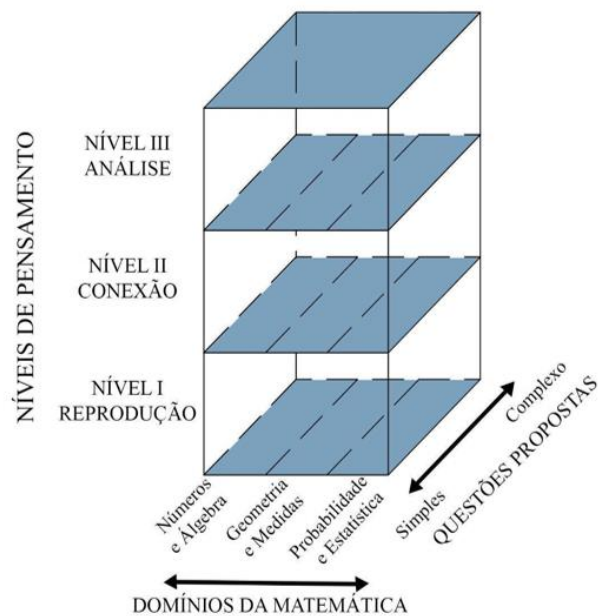
Além dos aspectos tecnológicos analisados, existe um destaque a ser dado às tarefas que foram desenvolvidas, houve equipes que apresentaram a construção do próprio conhecimento matemático, criando a sua matemática ao longo das aulas. Porém, alguns grupos apresentaram uma passividade em relação ao processo de investigação da tarefa, no pensar-com-tecnologia, ou seja, em vários momentos aguardavam o professor-pesquisador apresentar o caminho para dar os primeiros passos na realização da tarefa. Essas características de passividade dos alunos, não é de total responsabilidade deles, talvez de uma cultura educacional, em que o professor é o responsável de todo o conhecimento e deve ser repassado ao aluno. Diante desse quadro, ao professor-pesquisador foi gerada muitas reflexões, analisa a responsabilidade dessa passividade dos alunos, sendo que poderiam ser tomadas algumas atitudes diferenciadas em sala de aula.

Outro elemento de reflexão é sobre a complexidade das tarefas. É um construto dessa pesquisa para o professor-pesquisador que esteve em formação que em sala de aula devem ser propostas tarefas em todos os níveis de pensamento, com um nível de dificuldade que vai do simples ao complexo, relacionando todos os objetivos do currículo, permitindo por meio delas

que os alunos desenvolvam seus conhecimentos, sempre guiados e orientados pelo professor-pesquisador.

Esse construto é representado na Figura 7, inspirado na Pirâmide de De Lange (1999), elaborada para representar tarefas distribuídas em uma prova escrita. Os níveis propostos por De Lange são colocados, a princípio, em uma pirâmide. Em situação de avaliação, a quantidade de tarefas de cada nível deve ser distinta, tendo que ter uma quantidade maior de tarefas no nível I, depois tarefas do nível II e uma quantidade menor de tarefas do nível III, pois lidar com tarefas de nível III exige mais tempo que as demais. (DE LANGE, 1999).

Figura 7: Paralelepípedo de Felipes



Fonte: Autor.

A Figura 7, porém, o paralelepípedo de Felipes, considera que não existe necessidade de se ter mais tarefas no nível I e menos no nível III. A ideia é que uma tarefa contemple todos os níveis, visto que uma tarefa pode incorporar competências de níveis distintos. Os domínios da matemática são propostos com base em objetivos que os estudantes podem desenvolver durante a aplicação da tarefa.

Por fim, durante o processo tomou-se consciência do papel de professor está em um momento de formação, e que esse processo não termina por aqui. Essa pesquisa consegue gerar uma grande quantidade de informações e que pode ser analisada com base em diferentes perspectivas teóricas e metodológicas.

REFERÊNCIAS

- ABRAMOVICH, S. **Spreadsheet-Enhanced Problem Solving in Context as Modeling**. Journal of Spreadsheets in Education. v. 1, n. 1, p. 1-17. 2003.
- ANTUNES, T. P. **Design de uma prova escrita de matemática: um processo reflexivo da prática avaliativa**. 2018. 120 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2018.
- BACICH, L.; TANZI NETO, A; TREVISANI, F. de M. **Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação**. Porto Alegre: Penso, 2015.
- BAIRRAL, M.A. **Tecnologias da Informação e Comunicação na Formação e Educação Matemática**. 1. Ed. Rio de Janeiro: Edur, 2009. v.1.
- BITTAR, M. **Informática na educação e formação de professores no Brasil**. Série Estudos: Periódicos do Mestrado em Educação da UCDB, Campo Grande: n. 10, p. 91- 105, 2000.
- BLIKSTEIN, P. **“O Pensamento Computacional e a Reinvenção do Computador na Educação”**. Disponível em: < <http://bit.ly/1IXlbNn>>. Acesso em: 13 out. 2021.
- BORBA, M. C.; LACERDA; H. D. G. **Políticas públicas e tecnologias digitais: um celular por aluno**. In: III Fórum de Discussão: Parâmetros Balizadores da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil. v.17, p.490-507, 2015.
- BORBA, M. de C.; SILVA, R. S. R. da; GADANIDIS, G.; **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: Sala de aula e internet em movimento**. 1. Ed, Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2014. – (Coleção Tendências em Educação Matemática)
- BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization**. v. 39, New York: Springer, 2005.
- BORBA, M.C.; ZULATTO, R.B.A. Dialogical Education and Learning Mathematics Online from teachers. In: LEIKIN, R; ZAZKIS, R. (Org.). **Learning Through Teaching Mathematics: Development of Teachers Knowledge and Expertise in Practice**. Mathematics Teacher Education. 1. Ed. New York: Springer, 2010. V. 5. p.111-125.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- CERON, C. G. da S. **O pensamento funcional nos anos iniciais em aulas de matemática na perspectiva do ensino híbrido**. 2019. 219 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina. 2019.
- COBB P.; CONFREY J.; DISESSA A.; LEHRER R.; SCHAUBLE L.; Design Experiments in Educational Research. **Educational Researcher**, v. 32, n. 1, p. 9–13, jan/fev. 2003.

DE LANGE, J. **Framework for classroom assessment in mathematics**. Utrecht: Freudenthal Institute and National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, 1999.

EERDE, D. V. Design Research: Looking into the heart of Mathematics Education. In: **Proceeding of the First Southeast Asian Design/Development Research Conference**, 1. Palembang. Sea-dr conference, Palembang: Sriwijaya University, 2013.

FARIA, R. W. S. de C., ROMANELLO, L. A., DOMINGUES, N.S., Fases das tecnologias digitais na exploração matemática em sala de aula: das calculadoras gráficas aos celulares inteligentes. **Amazônia – Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, Belém, v.14, n.30, p. 105-122, Jan-Jul 2018.

FERREIRA, P.E.A. **Enunciados de Tarefas de Matemática: um estudo sob a perspectiva da Educação Matemática Realística**. 2013. 121 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2013.

FERREIRA, P. E. A.; BURIASCO, R. L. C. Educação matemática realística: uma abordagem para os processos de ensino e de aprendizagem. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 237-252, jan. 2016.

FERREIRA, P. E. A.; CIANI, A. B.; OLIVEIRA, R. C. Educação Matemática Realística: uma abordagem para o ensino. In: BURIASCO, R. L. C. (Org.) **GPEMA: espaço e contexto de aprendizagem**. Curitiba: CRV, 2014. p. 113-141.

FREUDENTHAL, H. Why to Teach Mathematics so as to Be Useful. **Educational Studies in Mathematics**. v. 1, n. 1-2, p. 3-8, 1968.

FREUDENTHAL, H. Geometry between the devil and the deep sea. **Educational Studies in Mathematics**. v. 3, n. 3-4, p. 413-435, 1971.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting Mathematics Education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

HARMUCH, D. **Tarefas para uma educação financeira: um estudo**. 2017. 116 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2017.

MARCHI, V. M. **Atividades investigativas no ensino da matemática financeira: as estratégias empregadas com uso de planilhas eletrônicas**. 2014. 141 p. Dissertação - (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2014. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/123158>>.

MARINO, C. A. **O processo de delineamento de uma trajetória de ensino e de aprendizagem: reflexões para o ensino de matemática**. 2018. 148 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2018.

MARINO, D. R. **Elementos de uma prática avaliativa enquanto prática social**. 2020. 74 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2020.

MENDES, M.T., TREVISAN, A.L., ELIAS, H.R., A utilização de TDIC em tarefas de avaliação: uma possibilidade para o ensino de cálculo diferencial e integral. **Debates em Educação**, Maceió, v. 10, n. 22, p140-163. Set/dez. 2018.

MENDES, M. T. **Utilização da prova em fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo**. 2014. 274 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

NES, F. T. V. **Young children's spatial structuring ability and emerging number sense**. 2009. 360f. Dissertação (Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education) – Instituto Freudenthal, Utrecht, 2009.

OECD. **Pisa 2015**. Mathematics Framework, in PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic, Financial, Literacy and Collaborative Problem Solving. 2017. Disponível em: < <https://www.oecd-ilibrary.org/docserver/9789264281820-5-en.pdf?expires=1650811056&id=id&accname=guest&checksum=134EF4EE3BBFED1D2BD746427F84A90A>>. Acesso em: 24 de abril de 2022.

OLIVEIRA, G. P. Tecnologias digitais na formação docente: estratégias didáticas com uso do superlogo e do geogebra. In: CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 7, 2013, Montevideo. **Programa y resúmenes del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática**. Montevideo: Sociedad de Educación Matemática Uruguay, 2013. v. 1, p.359

OLIVEIRA, G. P. de; MARCELINO, S. de B.; Adquirir Fluência e Pensar com Tecnologias em Educação Matemática: Uma Proposta com o Software Superlogo. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.17, n.4, p.816-842, dez. 2015.

PERESSIN, D.; KNUTH, E.; The role of tasks in developing communities of mathematical inquiry. **Teaching Children Mathematics**, v.6, n.6, p.391-397, fev. 2000.

PONTE, J.P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 1. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. (Coleção tendências em Educação Matemática)

PONTE, J. P. da; QUARESMA, M.; O papel do contexto nas tarefas matemáticas. **Interacções**, Lisboa, n.22, p.196-216, 2012

PRESMEG, N.C. Visualization in high school mathematics. For the Learning of Mathematics. **For the Learning of mathematics**, v.6, n.3, p. 42-46, 1986.

ROCHA, J. M. **A Planilha Eletrônica Como Recurso Didático: Um Exemplo Com Multiplicação de Matrizes**. 2014. 43f. Dissertação (PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora. 2014.

RODRIGUES, R. G. B. **Uma prática avaliativa formativa utilizando a prova-com-consulta-ao-caderno em uma disciplina de cálculo.** 2021. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2021.

ROSA, M.; MALTEMPI, M.V. RPG Maker: uma proposta para unir jogo, informática e educação matemática. In: VALENTE, VR (Org.) **Anais do II SIPEM.** São Paulo. SBEM, 2003. Disponível em: <http://tecmat-ufpr.pbwiki.com/f/GT6_T12.pdf.> Acesso em: 22 abr. 2022.

SANTOS, C. A. S. dos. **Práticas avaliativas de seis professores de matemática: uma reflexão para a inclusão escolar.** 2020. 74 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2020.

SANTOS, E. R. dos. **Análise da produção escrita em matemática: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino.** 2014. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014

SILVA, R. S. da. **Moodle 3 Para Gestores, Autores e Tutores.** 1 ed. São Paulo: Novatec, 2016.

STEIN, M. H., SMITH, M. S. Tarefas Matemáticas como quadro para a reflexão. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v.3 n.4. p. 268 – 275, 1998.

STREEFLAND, L. **Fractions in Realistic Mathematics Education.** Dordrecht: Kluwer, 1991.

TAVARES, N. R. B. **História da informática educacional no Brasil observada a partir de três projetos públicos.** São Paulo: Escola do Futuro, 2002. Disponível em: <<http://www.lapeq.fe.usp.br/textos/te/tepdf/neide.pdf>>. Acesso em: 22 abr. 2022.

TREFFERS, A. **Three Dimensions: a model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas Project.** Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1987.

VALE, I. As tarefas de padrões na aula de matemática: Um desafio para professores e alunos. **Interações**, Lisboa, n.20, p.181-207, 2012

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. **Assessment and Realistic Mathematics Education.** Utrecht: CD-β Press/Freudenthal Institute, Utrecht University. 1996.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. **Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9.** Utrecht: Utrecht University, 2000. CD ROM.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. Realistic Mathematics Education as work in progress. In: LIN, F. L. (Ed.) **Common Sense in Mathematics Education**, Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics. Taipei, Taiwan, p. 1-43, nov. 2001.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. **Educational Studies in Mathematics**. v. 54, n. 1, p. 09-35, nov. 2003.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. Reform under attack – Forty Years of Working on Better Mathematics Education thrown on the Scrapheap? No Way! In: SPARROW, L.; KISSANE, B.; HURST, C. (Eds.). **Proceedings of the 33th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**. Fremantle: MERGA. 2010.

WEBER, T. C. **Articulação da avaliação somativa com avaliação formativa em aulas de matemática**. 2020. 91 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2020.

WIDJAJA, Y. B.; HECK, A. How a Realistic Mathematics Education approach and microcomputer-based laboratory worked in lessons on graphing at an Indonesian Junior High School. **Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia**. Amsterdam, v.26, n. 2, p. 1-51, 2003.

APÊNDICE A – DIÁLOGO DA 2ª APLICAÇÃO DA TAREFA 01

Trechos transcritos de aulas desenvolvidas em 2021

Aula 01	
Trecho 1-2-1-A	<p>Professor-pesquisador: Bom dia pessoal, hoje vamos fazer uma atividade em grupo, sendo que os grupos já estão divididos, conforme o sistema de escalonamento no ensino híbrido, então os grupos ficaram divididos na seguinte forma:</p> <p>Cascavel: Aluno A, Aluno B, Aluno C, Aluno D e Aluno E.</p> <p>Curitiba: Aluno F, Aluno G, Aluno H e Aluno I.</p> <p>Foz do Iguaçu: Aluno J, Aluno K, Aluno L e Aluno M.</p> <p>Londrina: Aluno N, Aluno O, Aluno P, Aluno Q e Aluno R.</p> <p>Maringá: Aluno S, Aluno T, Aluno U e Aluno V</p> <p>Ponta Grossa: Aluno W, Aluno X, Aluno Y e Aluno Z</p> <p>Professor-pesquisador: Vocês terão 4 aulas para executar a tarefa, em que estarei à disposição para ajuda-los.</p>
Trecho 1-2-1-B	<p>Professor-pesquisador: Vamos para a tarefa</p> <p>(Professor-pesquisador apresenta o roteiro)</p> <p>(Faz a leitura do texto de apoio.)</p> <p>Professor-pesquisador começa a leitura e pergunta aos alunos:</p> <p>Vocês conhecem o Google Sheets?</p> <p>Aluno Z: Mais ou Menos</p> <p>Professor-pesquisador: Vamos trabalhar com essa plataforma, pois todos vocês têm acesso a ela, já que a escola fornece o todas as vantagens do Google For Education, aqui é alimentada uma planilha pode ser preenchida por todos os membros do grupo, trabalhando de maneira conjunta e, posso também orientá-los por lá.</p> <p>O trabalho é em grupo, então tem que se trabalhar em grupo, não pode deixar tarefa para outro, cada um precisa fazer a sua parte. Perguntas a serem respondidas e discutidas pelos grupos.</p> <p>Vamos fazer em aula e lembrem que estou aqui para ajudar vocês, vamos fazer cálculos com as planilhas</p>
Aula 05 (Seminário)	

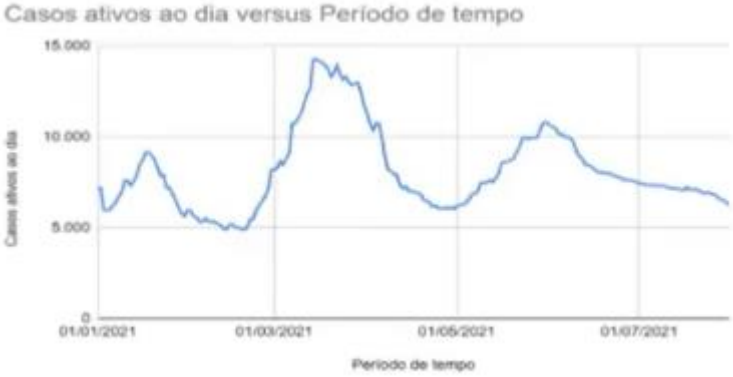
<p>Trecho 1-2-5-A</p>	<p>Professor-pesquisador: Pessoal, vamos lá então? Vamos começar as apresentações já, para a gente não perder tempo. Então a gente vai seguir em ordem alfabética, o primeiro grupo é o grupo de Cascavel, formado pelos integrantes Aluno B, Aluno A, Aluno C, Aludo D e Aluno E.</p> <p>Aluno A: Ok, então vamos começar. No nosso trabalho, nós decidimos diluir em meses e utilizamos os dados: total de casos, novos casos, casos ativos, casos recuperados, novos óbitos, número de vacinados, doses disponíveis, investimento por dose e investimento total. Essas duas variáveis a gente pensou em colocar porque estava no site da Transparência da prefeitura, e também por ser um valor acumulado ele pode ser utilizado para investigação de corrupção, entre outros tipos de esquema, assim como investimento por dose. Cascavel possui uma população entre 332000 a 336000 no último censo do IBGE. Os totais dos casos, sendo 20000 no primeiro mês é algo muito alarmante, e também nós tivemos uma vacinação tardia e um número de lotes muito exclusivo, apenas para as primeiras faixas etárias que seriam os idosos e pessoas com alguma comorbidade, e mesmo assim os lotes foram mal distribuídos como vocês podem notar. Em questão de novos óbitos não foi muito alarmante comparado a outras cidades, teve uma média bem estável. Em questão da situação geral, se você teve casos recuperados no dia 27 de janeiro, batendo no mesmo número de casos ativos, o que é algo um pouco diferente. Essa é a comparação entre novos casos e casos ativos e esse é um infográfico, que é um gráfico interativo onde a gente consegue colocar os dias aqui embaixo e ele vai mostrar qual o número correspondente daquele dia. Então, por exemplo, 30 de janeiro de 2021, 20443. Se a gente quiser vir aqui pelo primeiro, nós podemos ver que no dia 01 de janeiro de 2021, 16696.</p> 
<p>Trecho 1-2-5-B</p>	<p>Aluno D: Com isso, o trabalho inteiro serviu para a gente perceber que em certos momentos teve altas e baixas, mas a gente começou a perceber que a partir do momento em que grande parte da população começou a ser vacinada, os casos confirmados, os casos ativos e até os óbitos, começaram a diminuir significativamente.</p>

<p>Trecho 1-2-5-C</p>	<p>Aluno A: O período em que teve maior quantidade de casos foi nesse pico. O período em que nós tivemos um declínio no número de casos foi logo correspondente onde nós tivemos um aumento substancial, que foi entre os dias 26 até 28 de fevereiro, como vocês podem ver. As possíveis causas desse aumento substancial após uma diminuição dos casos seria a falsa sensação de melhora no quadro de covid-19 em Cascavel, e pela intensa atividade comercial da cidade que depende fortemente do comércio e da circulação de bens e pessoas, o que facilita a proliferação do vírus. Já em março nós tivemos um declínio no número de casos que não foi acompanhado por um aumento, e isso se deve basicamente ao número de vacinação que foi maior proporcionalmente ao número de casos recuperados, e novamente nós tivemos um leve declínio no total de casos no mês de março. No mês de abril nós voltamos a ter essa constante de crescimento que nós avaliamos em janeiro e fevereiro, número de óbitos continua normal e normalizado, e nós só tivemos um número de óbitos no mês de junho, e é isso.</p>
<p>Trecho 1-2-5-D</p>	<p>Professor-pesquisador: Muito obrigado Aluno A. Só uma pergunta que eu queria fazer para vocês. Em janeiro vocês colocaram que os casos ativos foram iguais ao número de casos recuperados. Por que que aconteceu isso?</p> <p>Aluno D: Ah, professor. Eu posso pesquisar?</p> <p>Professor-pesquisador: Por que o número de casos ativos e o número de casos recuperados foram iguais em janeiro?</p> <p>Aluno A: Nós não conseguimos essa informação no Portal da Transparência, mas nós acreditamos que foi acompanhado pelo número de vacinação, que excepcionalmente no mês de janeiro todos os lotes foram recebidos no mesmo momento em que o número de casos recuperados subiram, mas claro, tem outros fatores assim como o investimento em infraestrutura médica que foi maior nesse dia.</p>
<p>Trecho 1-2-5-E</p>	<p>Professor-pesquisador: É que é assim Aluno A, esse dado eu acho que talvez ele possa estar errado, eu acho que seria interessante vocês se reavaliarem aí em janeiro, porque como assim o número de recuperados e o número de casos ativos é o mesmo? Teve ali um pico que se juntou ali os dois pontos, é possível isso? Por que vocês destacaram isso?</p> <p>Aluno A: Porque nós encontramos os dados do Portal da Transparência da prefeitura de Cascavel, e ao construir o gráfico, nós tivemos esse pico.</p> <p>Professor-pesquisador: Obrigado Aluno A.</p>

Trecho
1-2-5-F

Aluno I: Ah então a nossa apresentação é dos casos de Curitiba. Primeiro, a introdução. O objetivo desta pesquisa é estabelecer os dados sobre como está a pandemia do covid-19 na cidade de Curitiba, nos 7 primeiros meses do ano de 2021, trazendo estatísticas sobre novos casos diários, casos acumulados, casos ativos, óbitos ao dia, óbitos acumulados, vacinados ao dia, vacinados acumulados e os casos de recuperados, em forma de tabelas e gráficos. A pesquisa coletou os dados diários informados no Instagram da prefeitura de Curitiba, que mostra como estão os casos de covid-19 no município. Segue a tabela com os dados levantados na pesquisa. Aí aqui tem o período do tempo, os casos acumulados, novos casos diários, casos ativos ao dia, óbitos ao dia, óbitos acumulados, a vacinação e os recuperados, aí aqui em janeiro os óbitos são praticamente constante, não tem nenhum aumento drástico e nenhuma redução drástica, vacinação não começou ainda nesses primeiros dias e os casos acumulados iam só aumentando, e os novos casos também. Aí a vacinação começa aqui no dia 20/01 e ela vai aumentando até dar uma parada nesses dias aqui do dia 06/02 até 15/02 que deu uma reduzida por falta de vacina e os óbitos também caíram nesta semana. Aí a vacina parou bastante aqui do dia 19 até o dia 28 de fevereiro, por falta de vacina e os casos acumulados também foram só aumentando. E aí vai seguindo assim, a vacina vai também, começa de novo e aí para, porque Curitiba também não estava recebendo muita vacina do governo e os casos foram aumentando e os óbitos aumentaram bastante esses dias aqui 07/03 até mais ou menos 23/03, e os casos diários também começaram a ter muitos e aí vai seguindo assim, até a vacinação, acho que tem o maior pico de vacinação no dia 15/06, teve 22934 vacinações da primeira dose, a segunda dose ela não conta aqui né, a gente só contou a primeira dose. E é isso, agora o Aluno F vai falar das perguntas.

tempo	acumulados	diários	ao dia	ao dia	acumulados	ao dia	acumulados	
01/01/2021	111.693	1.797	7.201	26	2.249	0	0	102.243
02/01/2021	111.693	1.797	7.201	26	2.249	0	0	102.243
03/01/2021	112.419	726	5.961	23	2.272	0	0	104.186
04/01/2021	112.419	726	5.961	23	2.272	0	0	104.186
05/01/2021	113.163	744	5.989	15	2.287	0	0	104.887
06/01/2021	113.956	793	6.213	17	2.304	0	0	105.439
07/01/2021	114.760	804	6.410	19	2.323	0	0	106.027
08/01/2021	115.546	786	6.719	17	2.340	0	0	106.487
09/01/2021	116.190	644	6.970	16	2.356	0	0	106.864
10/01/2021	117.301	1.111	7.605	21	2.377	0	0	107.319
11/01/2021	117.301	1.111	7.605	21	2.377	0	0	107.319
12/01/2021	118.044	743	7.319	12	2.389	0	0	108.336
13/01/2021	118.846	802	7.546	15	2.404	0	0	108.896
14/01/2021	119.722	876	7.888	19	2.423	0	0	109.411

<p>Trecho 1-2-5-G</p>	<p>Aluno F: Bom dia, professor. Eu vou falar sobre as respostas das perguntas. Na questão A, segundo o IBGE, Curitiba tem 1.948.626 pessoas, essa informação é relevante para analisar a quantidade de pessoas contaminadas, vacinadas, recuperadas e óbitos, e comparar com a população total. Na questão B, o período dos dias 07/03/2021 a 17/03/2021 foi o período com maior aumento de novos casos, chegando em 2757 casos nos dias 14 e 15. Na questão C, no período do mês 7, houve redução de novos casos. Na questão D, podemos observar que no mesmo período do maior aumento de novos casos, tivemos a maior quantidade de casos ativos. Aqui no gráfico E, vai mostrar os casos acumulados versus período do tempo, no gráfico da questão F casos ativos ao dia versus período do tempo, no gráfico G óbitos ao dia versus período do tempo, e na questão H, ao analisarmos os dados coletados podemos notar um grande aumento de novos casos e nos casos ativos do mês de março e até o mês de junho, notamos uma constância de casos e no mês de julho uma considerável redução dos casos, podendo supor que este fato se deve ao aumento do número de pessoas vacinadas. Aí na conclusão podemos concluir que o período com maior incidência de casos foi entre 7 e 17 de março, quando iniciaram-se as campanhas de vacinação da população, e o mês de julho foi o que apresentou o menor índice de novos casos, podendo sugerir que a vacinação já tinha atingido grande parte da população. Pesquisando no Instagram na prefeitura de Curitiba percebemos a ênfase no cuidado que as pessoas devem ter quanto aos hábitos de higiene, como lavar as mãos, usar álcool em gel, uso continuado das máscaras, evitando ambientes com aglomeração de pessoas, como sendo as medidas efetivas e protetivas a longo prazo. A referência é o Instagram da prefeitura de Curitiba.</p>  <p>Casos ativos ao dia versus Período de tempo</p>
<p>Trecho 1-2-5-H</p>	<p>Professor-pesquisador: Beleza. Muito boa a apresentação de vocês, gostei bastante também, assim como do grupo 1, beleza então. Agora é o grupo 3, que é o grupo de Foz né?</p> <p>Aluno M: Sim, eu vou apresentar. Tá todo mundo vendo? Vou começar. Bom dia, então ficamos responsáveis pela cidade de Foz do Iguaçu, meu grupo é composto por mim, a Giovana e a Aluno Z. Com essa pesquisa tivemos o objetivo de monitorar os casos de coronavírus e os óbitos gerados por essa doença, além de acompanhar a vacinação. Os dados dessa pesquisa foram obtidos no site da prefeitura. A respeito do mês de abril, nós temos uma irregularidade dos números de casos novos, sendo maior no final de semana. O número de óbitos neste mês é irregular. Os dados desta vacinação foram feitos de maneira instável, então somente podemos fazer uma média que varia de 100 pessoas por dia. No mês de maio, tivemos um aumento do número de novos casos e uma redução dos óbitos. A média da vacinação varia entre 500 e 3800 pessoas.</p>

<p>Trecho 1-2-5-I</p>	<p>Aluno K: Agora eu vou falar a respeito dos meses de junho e julho. Durante o mês de junho tivemos o maior registro de novos casos por dia, sendo em média 100 casos. O número de óbitos se manteve de maneira estável entre 0 e 10 pessoas, sendo um número relativamente alto. Os registros de vacinação continuam sendo feitos de maneira descuidada, por isso não conseguimos calcular a média exata. Porém concluímos que foram de 100 a 1000 pessoas por dia vacinadas. Agora no mês de julho, tivemos poucos casos por dia, além de uma redução do número de óbitos e os dados a respeito da vacinação se mantêm a mesma. Agora vamos apresentar as tabelas que foram feitas individualmente, contendo os três tópicos: Casos acumulados, casos ativos e novos óbitos.</p>
<p>Trecho 1-2-5-J</p>	<p>Aluno M: Aqui temos a respeito do mês de abril, mês de maio, junho e julho. E agora a respeito das perguntas. Foz do Iguaçu tem 258.248 habitantes, a importância desse dado se dá para o monitoramento dos casos de covid-19. Durante o mês de junho houve um maior número de aumento dos novos casos de acordo com o site da Prefeitura e o monitoramento diário. No mês de julho houve uma significativa redução do número de novos casos de acordo com a tabela feita pela estudante Aluno K. Ao longo dos meses os casos tiveram uma grande diminuição e se tornaram mais controlados. Aqui um gráfico a respeito dos casos acumulados, casos ativos e óbitos ao dia. Durante o mês de abril o aumento de óbitos foi evidente e no decorrer dos demais meses houve uma clara diminuição. Os casos se mantiveram constantes no decorrer do mês de abril e sofreram brusco aumento no mês de maio e junho e voltaram a se estabilizar em julho e o número de pessoas vacinadas só aumentou no decorrer dos meses. Bom, esse foi o nosso trabalho.</p>

Trecho
I-2-5-K

Professor-pesquisador: Beleza então. Pessoal de Foz finalizaram então? Vamos lá, o próximo grupo é o grupo de Londrina: Aluno N, Aluno O, Aluno P, Aluno Q e Aluno R.

Aluno O: A nossa cidade de Londrina, e acho que muitas pessoas já falaram aqui o objetivo do trabalho. Então eu vou falar sobre os dados que a gente pesquisou, a gente dividiu os dados para cada pessoa, as informações mais importantes são os números de casos e óbitos e pessoas vacinadas, porque eu acho que dá para saber mais sobre a pandemia. Então aqui a gente fez os gráficos de acordo com os dados mais importantes, são os acumulados que dá para ver que tem bastante acumulados, os casos ativos, as doses disponíveis e os óbitos acumulados. A gente também falou muito sobre as vacinas, porque acho que o que é mais importante para gente acabar com a pandemia, e a gente colocou investimentos por dose, a gente quis colocar investimento por dose para não ter um tipo de corrupção e desvio de dinheiro, e também para saber qual vacina tá sendo mais aplicada na cidade, que no caso é a CoronaVac. As doses disponíveis tem bastante, só que as pessoas vacinadas por dia, eu achei pouco, mas tem pessoas que acham bastante. E é isso, no trabalho eu vou falando já, porque no desenvolvimento a gente colocou um texto falando das perguntas que você fez, a gente não separou uma parte só com as perguntas, a gente fez um texto com o desenvolvimento.

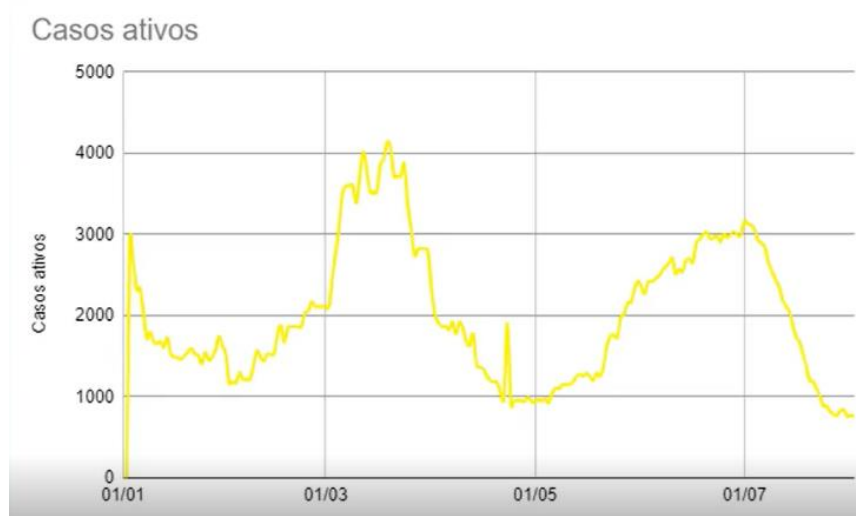
	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1									
2	Data	Novos casos	Acumulados	Casos ativos	Novos óbitos	Óbitos acumulados	Doses disponíveis	Investimento por dose	Número de v
3	01/01/2021	78	21.951	584	2	438	0	-	
4	02/01/2021	297	22.248	386	5	443	0	-	
5	03/01/2021	252	22.500	507	4	447	0	-	
6	04/01/2021	166	22.666	327	7	454	0	-	
7	05/01/2021	306	22.972	339	3	457	0	-	
8	06/01/2021	229	23.201	367	4	461	0	-	
9	07/01/2021	280	23.481	393	3	464	0	-	
10	08/01/2021	241	23.722	426	8	472	0	-	
11	09/01/2021	203	23.925	462	3	475	0	-	
12	10/01/2021	311	24.236	464	3	478	0	-	
13	11/01/2021	164	24.400	394	3	481	0	-	
14	12/01/2021	208	24.608	383	4	485	0	-	
15	13/01/2021	285	24.893	528	7	492	0	-	
16	14/01/2021	241	25.134	412	4	498	0	-	
17	15/01/2021	245	25.379	366	5	501	0	-	
18	16/01/2021	228	25.607	328	1	502	0	-	
19	17/01/2021	298	25.905	442	3	505	0	-	
20	18/01/2021	134	26.039	421	2	507	13.990	-	
21	19/01/2021	311	26.350	416	5	512	13.990	Coronavac - R\$52,37	
22	20/01/2021	405	26.755	522	5	517	13.990	Coronavac - R\$52,37	
23	21/01/2021	405	27.160	484	8	525	13.990	Coronavac - R\$52,37	

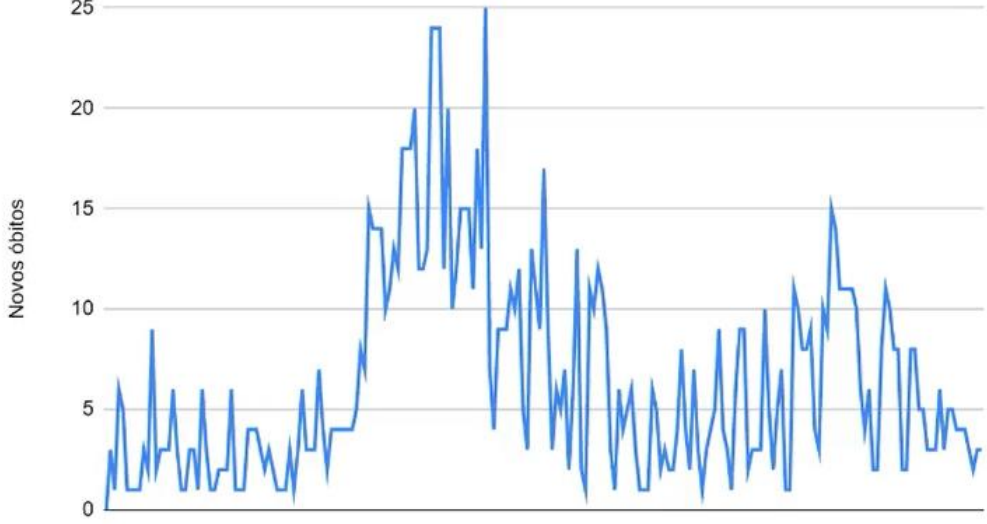
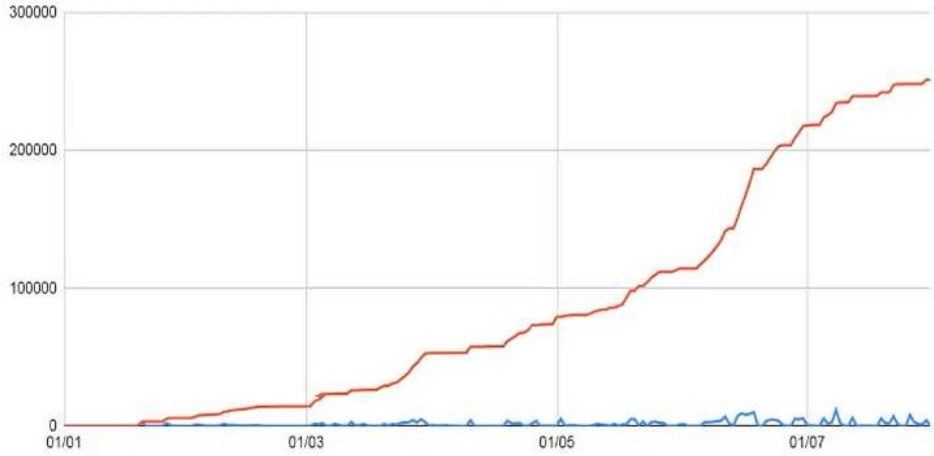
<p>Treco 1-2-5-L</p>	<p>Professor-pesquisador: Você quer falar um pouco do texto que você fez?</p> <p>Aluno O: É que o texto tá ruim, quando eu fui colar o gráfico no relatório, ele deu um problema que não colava de jeito nenhum, eu tinha que fazer um monte de coisa para conseguir colar o gráfico no Word, só que ficou bem estranho, mas aí você vê o da tabela que tá bem mais bonito.</p> <p>Professor-pesquisador: Entendi, e as questões você conseguiu responder elas?</p> <p>Aluno O: Como eu falei, eu fiz no relatório, as perguntas estão no desenvolvimento, eu respondi de acordo com o texto, então está tudo no desenvolvimento, as perguntas, eu não separei uma por uma, tá no texto. Se a Aluno Q quiser ler o desenvolvimento ou falar um pouco do que ela pesquisou, ou as outras pessoas também, porque cada uma pesquisou uma coisa diferente.</p> <p>Professor-pesquisador: Quer falar Aluno Q?</p> <p>Aluno Q: O desenvolvimento do trabalho foi pesquisar primeiro sobre os casos de covid e os números de óbitos por dia. De acordo com as novas pesquisas, os números de casos foi mantendo um padrão específico, alguns dias tinham mais casos e outros menos, em alguns meses os casos subiram muito e em outros caíram bastante, como por exemplo no dia 11 de junho de 2021 registraram 888 casos novos de covid, já no dia 13 de junho de 2021 teve apenas 40 casos novos. Nos casos ativos em média foi de 500 a 700 casos durante esses sete meses, em alguns dias os casos passaram de 1000.</p>
<p>Trecho 1-2-5-M</p>	<p>Aluno Q: Os números de óbitos ficam na média de 5 a 15 casos por dia. Colocamos também os investimentos por dose da vacina para mostrar qual vacina está tendo mais na cidade de Londrina. As doses disponíveis variam bastante, em alguns dias tem bastante dose e em outros não.</p>

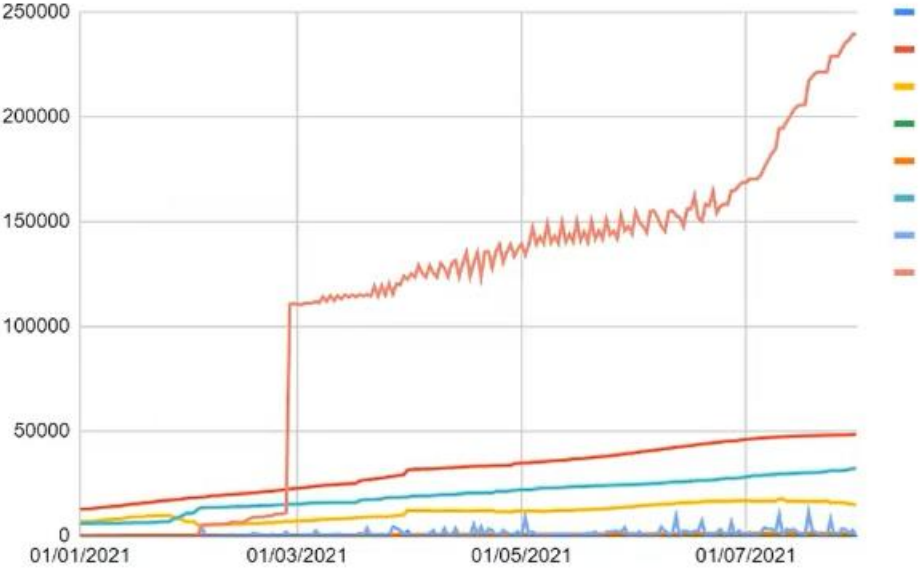
Professor-pesquisador: Beleza, obrigado Aluno Q. Parabéns para o grupo, vamos lá então. Pessoal de Maringá. Vocês querem vir aqui então? Pessoal de Maringá vai vir aqui na frente apresentar. Vocês querem que eu vá passando os slides?

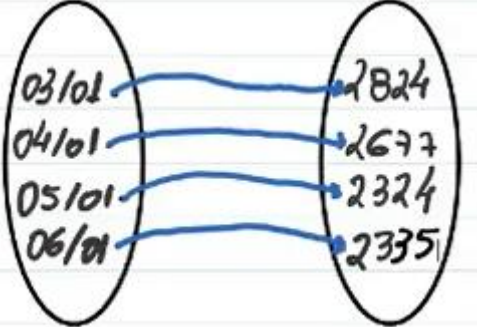
Aluno S: Então a primeira coisa que eu queria falar em relação aos casos ativos é que nos dois primeiros dias de janeiro, não há formação então por isso que tem esse aumento muito brusco. Outra coisa no período ali de março e de maio houve primeiro um aumento bem intenso, provavelmente por causa da onda de calor, do afrouxamento das medidas restritivas e também porque a vacinação ainda não estava tão eficiente, porém depois houve uma grande redução porque aí começou a vacinação, porém mais para frente assim como eu já falei, também teve essa outra onda de calor, e também houve aquele sentimento das pessoas de pensar “ah já estamos vacinados, vamos sair”, e aí houve um aumento novamente. Depois quando o Aluno V for falar, vocês vão perceber que os casos ativos eles também estão proporcionais aos números de óbitos, novos óbitos ao dia.

Trecho
1-2-5-N

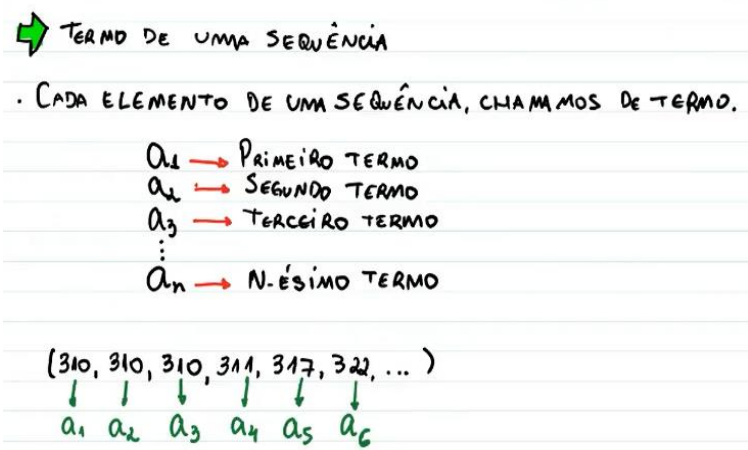


<p>Trecho 1-2-5-O</p>	<p>Aluno U: O maior número por dia foi de 25 óbitos, e muitos dias não houve óbitos, a maioria das pessoas que foram mais afetadas com essa doença foram pessoas idosas e com comorbidades, porque no site da prefeitura eles sempre passam as datas de cada pessoa que vai ser. E dá para perceber também que depois do início da vacinação, os números não baixaram, porque é muita diferença em relação aos dias, mas estão gradativamente diminuindo.</p> <p>Novos óbitos</p> 
<p>Trecho 1-2-5-P</p>	<p>Aluno V: Vou falar sobre o número de vacinados. No começo do ano foram poucas vacinas, por causa da demora pela compra delas. Conforme podemos ver, teve um aumento bem maior do número de vacinados após o mês 05.</p> <p>Aluno S: Outra coisa que eu queria falar também é, como você pode ver aqui, no começo a vacinação tava muito baixa, então os casos ativos tava lá em cima, só que depois aqui mais para o mês de abril, a vacinação começou a aumentar, e aí os casos começaram a reduzir.</p> <p>Vacinados ao dia e total de vacinados</p> 

<p>Trecho 1-2-5-Q</p>	<p>Professor-pesquisador: Beleza galera, show de bola, parabéns pela apresentação. Pessoal de Ponta Grossa, vamos lá finalizar?</p> <p>Aluno Z: Então a apresentação desse trabalho tem como objetivo melhorar o trabalho em equipe e a iniciação de pesquisa sobre o covid-19 que como consequência irá trazer mais conhecimento e disciplina diante do assunto, pois é o que vivemos nesse momento. Então nesse relatório a gente apresenta o número de casos novos ao dia, casos acumulados, casos ativos, casos ao dia, acumulados, recuperados, vacinados ao dia e vacinados acumulados, aqui a gente tem a tabela do mês de janeiro.</p> <p>Aluno W: A população de Ponta Grossa tem aproximadamente 355336 habitantes, com isso e com as estatísticas do covid-19, podemos analisar o quão grave estaria a situação da cidade.</p> <p>Aluno X: Entre os meses de março e maio, o número de novos casos aumentaram drasticamente como podemos observar no gráfico a seguir.</p> 
<p>Trecho 1-2-5-R</p>	<p>Aluno Z: Com o seguinte gráfico podemos perceber que os casos ativos aumentaram bastante entre os meses de maio e julho. Sobre os dados coletados podemos perceber que houve um aumento dos casos acumulados principalmente durante os meses de maio e julho, também houve uma redução durante os meses de janeiro e março, relacionada aos casos ativos. Além disso também ocorreu um aumento de óbitos ao dia entre os meses de março e maio, o gráfico de recuperados só correu aumentos, por último temos os gráficos de vacinados ao dia, que apresentou um aumento principalmente no mês de julho. E com isso concluímos, após os levantamentos e hipóteses realizadas através das pesquisas e gráficos, a importância do trabalho em equipe bem como a iniciação científica para entendermos melhor nossa realidade atual. No momento é necessário cuidados de prevenção e proteção da população. As referências são do Instagram da prefeitura.</p>
<p>Aula 6 (Diálogo)</p>	

<p>Trecho 1-2-6-A</p>	<p>Bom dia, turma. Gostei bastante da apresentação de vocês e vamos conversar um pouco sobre. E preciso muito de vocês para dar continuidade ao conteúdo.</p> <p>O que vocês acharam do trabalho? O que vocês aprenderam?</p> <p>Aluno A: Muito bom.</p> <p>Aluno Z: Muitos dados</p> <p>Aluno I: Criar gráficos e tabelas.</p> <p>Aluno W: Aprendi que com dois cliques resolve muita coisa.</p>								
<p>Trecho 1-2-6-B</p>	<p>Porque trabalhamos com os casos de COVID no Paraná?</p> <p>Aluno Z: A porque moramos no Paraná</p> <p>Aluno A: Acredito que serve de conscientização.</p> <p>Professor-pesquisador: Muito bom Aluno A, de fato estamos em uma realidade de pandemia e precisamos ter noção da realidade dela.</p>								
<p>Trecho 1-2-6-C</p>	<p>Aluno W: A professor, achei legal a parte dos gráficos.</p> <p>Professor-pesquisador: Legal, vocês já sabiam construir gráfico de maneira digital?</p> <p>Maior parte dos alunos responderam que não.</p> <p>Aluno W: Só de maneira manual eu sabia.</p> <p>Professor-pesquisador: Quem aprendeu fazer gráficos forma digital?</p> <p>Maior parte dos alunos responderam que sim</p> <p>Aluno X: No começo foi mais difícil entender, mas depois foi tranquilo, fomos nos ajudando e deu certo.</p>								
<p>Trecho 1-2-6-D</p>	<p>Professor-pesquisador: Pessoal, vamos relembrar algumas da teoria dos conjuntos e aqui temos um conjunto que representa o meu domínio e um outro que representa o meu contra-domínio.</p> <p>Então no meu domínio foi colocar as primeiras datas da nossa pesquisa de COVID-19 no Paraná. E vamos imaginar que os resultados do meu contradomínio são o número de casos ativos referentes a cada dia analisado. Então vamos pegar os dados da cidade de Maringá, pode ser?</p>  <table border="1" data-bbox="359 1668 837 1993"> <tr> <td>03/01</td> <td>2824</td> </tr> <tr> <td>04/01</td> <td>2677</td> </tr> <tr> <td>05/01</td> <td>2324</td> </tr> <tr> <td>06/01</td> <td>2335</td> </tr> </table>	03/01	2824	04/01	2677	05/01	2324	06/01	2335
03/01	2824								
04/01	2677								
05/01	2324								
06/01	2335								

<p>Trecho 1-2-6-E</p>	<p>Professor-pesquisador: O nosso levantamento de dados teve um fim?</p> <p>Aluno X: Sim</p> <p>Professor-pesquisador: Porque?</p> <p>Aluno I: Porque estava no enunciado da tarefa.</p> <p>Aluno A: Porque restringimos o período de análise.</p> <p>Professor-pesquisador: Legal turma, como restringimos o nosso domínio, podemos afirmar que tivemos um fim, com isso, podemos afirmar que o número de casos ativos é uma sequência finita.</p> <p>Com isso, o professor apresenta a seguinte definição aos alunos:</p> <p><i>SEQUÊNCIA FINITA É TODA FUNÇÃO DE DOMÍNIO $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ COM ACN^* E CONTRADOMÍNIO B, SENDO B UM CONJUNTO NÃO VAZIO.</i></p>
<p>Trecho 1-2-6-F</p>	<p>Professor-pesquisador: Turma, mas se quiséssemos projetar dados de datas futuras seria possível? Porque?</p> <p>Aluno V: Depende</p> <p>Aluno Z: Acho que com base nos dados anteriores, poderia fazer um levantamento. Até porque um dia tem relação com outro.</p> <p>Aluno A: Deu pra perceber na tarefa que conforme aumenta os vacinados, diminui os casos, então acho que dá.</p> <p>Professor-pesquisador: Ótimo, então podemos fazer o levantamento por diversos dias, sem apresentar um fim. Com isso turma, podemos dizer que existe uma sequência infinita.</p> <p><i>SEQUÊNCIA INFINITA: É TODA FUNÇÃO DE DOMÍNIO $A = \{1, 2, 3, \dots\}$ E UM CONTRA-DOMÍNIO B, SENDO UM CONJUNTO NÃO VAZIO</i></p>

<p>Trecho 1-2-6-G</p>	<p>Professor-pesquisador: Turma, a Aluno Z me disse que um dia tem relação com outro e que eles estão de maneira ordenada, se eu analisar o dia 01 de Janeiro, qual a posição?</p> <p>Aluno Z: Primeiro</p> <p>Professor-pesquisador: E o dia 02 de janeiro?</p> <p>Aluno A: Segundo</p> <p>Professor-pesquisador: E o dia 10 de Junho?</p> <p>Aluno Z: Ai teria que ver</p> <p>Professor-pesquisador: Mas daí existem algumas ideias na matemática que podem representar essa situação que na qual chamamos de n-ésimo termo. Primeiro, temos que cada elemento de uma sequência chamamos de termo, então para representar isso, temos: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Esse a_n, podemos chamar também de termo geral.</p> <p>Professor-pesquisador: Então pessoal, vamos montar uma sequência do número de óbitos de COVID acumulado ao decorrer dos dias, então temos a seguinte sequência (310, 310, 310, 311, 317, 322, ...) Então 310 é meu a_1, o outro 310 é meu a_2 e assim sucessivamente.</p> <p></p>
<p>Trecho 1-2-6-H</p>	<p>Professor-pesquisador: Eu posso dizer que essa sequência pode ser decrescente em algum momento?</p> <p>Aluno W: Não professor, porque são casos acumulados, se morreu já foi contabilizado e não tem como mudar isso</p>

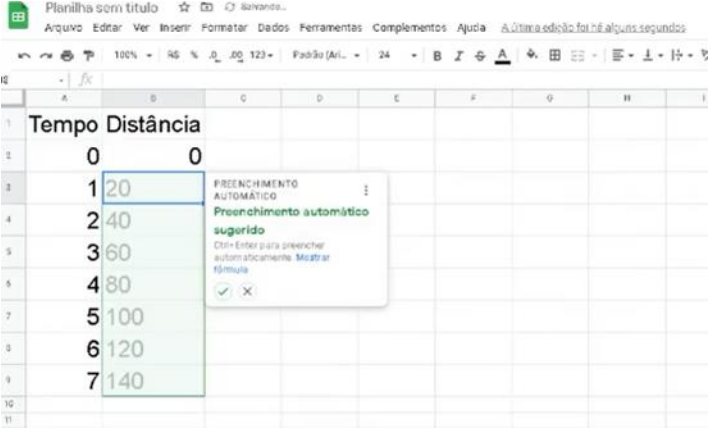
<p>Trecho 1-2-6-I</p>	<p>Professor-pesquisador: Com os dados levantados, é possível determinar o n-ésimo termo?</p> <p>Aluno Z: Acho que é possível sim, mas não dá pra saber de cara</p> <p>Professor-pesquisador: Como vocês levantaram o número total de casos acumulados ou o número total de vacinados?</p> <p>Aluno V: Usava as fórmulas pegava os dados acumulados do dia anterior e somava com os novos dados do dia.</p> <p>Professor-pesquisador: Como foi usar as fórmulas?</p> <p>Aluno Q: Foi melhor, as planilhas ajudaram muito, porque foi mais rápido e mais rápido.</p> <p>Professor-pesquisador: E porque a planilha é uma boa ferramenta?</p> <p>Aluno W: Mais organizado</p> <p>Aluno A: Mais eficiente</p> <p>Aluno Q: O gráfico e fica mais fácil de visualizar.</p> <p>Aluno S: Os dados são bem mais precisos para se trabalhar.</p>
<p>Trecho 1-2-6-J</p>	<p>Professor-pesquisador: Se a gente consegue criar parâmetros, se organizar e visualizar, com tudo isso podemos dizer que temos uma lei de formação de uma sequência que é um conjunto de informações que determina todos os termos da sequência e a ordem.</p> <p>Professor-pesquisador: o que essa lei tem a ver com as informações que levantaram?</p> <p>Aluno U: Precisamos levantar vários dados e organizamos em uma ordem.</p> <p>Professor-pesquisador: Ótimo Aluno U. Vamos pegar o número de vacinados pra analisar, então temos o numero de vacinados no primeiro dia é 155 e assim vou somando com os próximos dias. Se eu pegar um determinado dia A_n, ele vai ser igual aos dados dia anterior mais o número de vacinados no dia, por exemplo, no segundo dia tivemos 3000 vacinados, logo o número de vacinados acumulados serão $155 + 3000$, que é 3155.</p> <p>⇒ LEI DE FORMAÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA</p> <p>É UM CONJUNTO DE INFORMAÇÕES QUE DETERMINA TODOS OS TERMOS DA SEQUÊNCIA E A ORDEM</p> <p>EX: $a_1 = 155$</p> <p style="text-align: center;">i</p> <p>$a_n = a_{n-1} + \text{Novos VACINADOS}$</p> <p>$a_2 = 155 + 3000 = 3.155$</p> <p>$a_3 = 3155 + 100 = 3255$</p>
<p>Trecho 1-2-6-K</p>	<p>Professor-pesquisador: Como foi apresentar o trabalho no sistema híbrido?</p> <p>Aluno O: Foi igual no presencial</p> <p>Aluno Q: Eu achei um pouco confuso</p>

Trecho 1-2-6-L	Professor-pesquisador: Como foi trabalhar em grupo? Deu pra aprender Quase todos da sala responderam que sim
Trecho 1-2-6-M	Professor-pesquisador: E experiência de se trabalhar com planilhas eletrônicas foi boa? Quase todos responderam que sim Aluno W: Foi muito bom, sai do convencional

Fonte: Autor.

APÊNDICE B – DIÁLOGO DA 2ª APLICAÇÃO DA TAREFA 02

Aula 1	
Trecho 2-2-1-A	<p>Professor-pesquisador: Bom dia turma, hoje faremos um trabalho que irá compor uma parte da nota do 3º Trimestre, no caso 30% da nota será de algumas atividades que realizaremos e a que iremos iniciar hoje faz parte disso.</p> <p>O trabalho será em grupo com 2 ou 3 pessoas no máximo, e dessa vez vocês poderão escolher os grupos, diferente do trabalho de Covid que no caso foi eu que defini.</p> <p>(Vibração da sala)</p>
Trecho 2-2-1-B	<p>Vão utilizar o Google Sheets e lembrem que a planilha está do lado de vocês.</p> <p>Aluno I: Mas como vou usar a planilha se estou vindo no presencial agora?</p> <p>(Aluno I estava assistindo as aulas de casa e usava o computador antes)</p> <p>Professor-pesquisador: Vocês podem utilizar o celular de vocês para o preenchimento da tabela e no caso quem não tem internet no celular ou não tem celular tem a possibilidade de utilizar os tablets do colégio.</p> <p>(A escola não disponibiliza o Wi-Fi para os alunos para não sobrecarregar a rede e não prejudicar as transmissões dos professores, além disso os tablets são obsoletos e geram muitos problemas.)</p> <p>(4 alunos pediram para utilizar os tablets).</p>
Trecho 2-2-1-C	<p>Professor-pesquisador faz a divisão dos grupos conforme a praia desejada pelos integrantes</p> <p>Praia: Integrantes</p> <p>Itapema: Aluno Z, Aluno A e Aluno N.</p> <p>Pontal do Paraná: Aluno I, Aluno S e Aluno Y.</p> <p>Guaratuba: Aluno D e Aluno C</p> <p>Matinhos: Aluno B e Aluno T</p> <p>Bombinhas: Aluno M e Aluno G</p> <p>Ipanema: Aluno U e Aluno R.</p> <p>Praia Grande: Aluno V e Aluno X</p> <p>Porto Seguro: Aluno K e Aluno K.</p> <p>Florianópolis: Aluno P, Aluno E e Aluno F.</p> <p>Maceió: Aluno H e Aluno L.</p> <p>Natal: Aluno O, Aluno W e Aluno Q.</p>

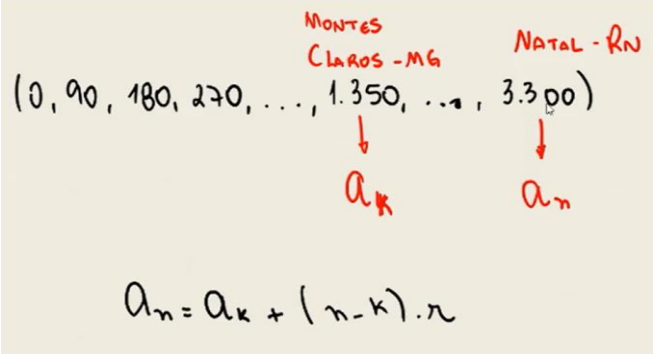
Trecho 2-2-1-D	<p>Professor-pesquisador: A data de entrega é na quinta (02/09) e vocês precisam me entregar um documento no Word ou Google Documentos respondendo as questões da tarefa e a planilha que estou compartilhando com vocês também será avaliada.</p> <p>Na planilha é necessário que vocês utilizem as fórmulas, construam a tabela e gerem os gráficos.</p>
Trecho 2-2-1-E	<p>Aluno M: Professor, a distância até bombinhas foi de 685 km, se preciso fazer arredondamento para 720 km, pois é mais próximo?</p> <p>Professor-pesquisador: Sim Aluno M, é necessário que vocês observem qual é o melhor valor para se arredondar, se é para cima ou para baixo, muito boa sua observação.</p>
Trecho 2-2-1-F	<p>Professor-pesquisador: Como vocês podem calcular através das planilhas? Como posso utilizar uma tabela?</p> <p>Vamos imaginar que iremos pedalar a 20 km/h, com isso precisamos calcular a distância, como faremos isso?</p> <p>Aluno T: Calcula a velocidade vezes o tempo.</p> <p>Professor-pesquisador: Perfeito Aluno T, é isso mesmo.</p>
Trecho 2-2-1-G	<p>Professor-pesquisador: E Vocês tem ideia de como podemos representar esse cálculo no Google Sheets?</p> <p>(Professor-pesquisador não espera os alunos responderem)</p> <p>Professor-pesquisador: Basta colocar o sinal de =, e colocar a velocidade o sinal de multiplicação e clicar na célula que corresponde ao tempo. Depois que fizer isso, já aparece a opção de preenchimento automático para todos os tempos que foram pré-definidos, ou então seleciono a célula, clica no quadrado azul no canto inferior direito e arrasta pra baixo. Pronto, temos todos os resultados.</p>  <p>Professor-pesquisador: Clico em inserir gráfico para finalizar.</p>
Aula 02	

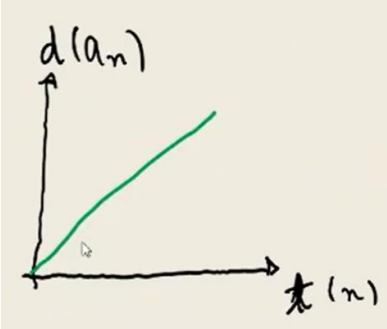
<p>Trecho 2-2-2-A</p>	<p>Aluno M: Professor, você pode dar uma olhada na tabela.</p> <p>Olha a tabela e pergunta</p> <p>Professor-pesquisador: Como vocês chegaram a esses resultados de distância?</p> <p>Aluno M: Fiz os cálculos manualmente e digitei os dados aqui.</p> <p>(Mostrou resistência em utilizar tecnologia)</p> <p>Professor-pesquisador: Tá, mas eu quero os resultados via planilha eletrônica, como que você calculou isso? O que você percebeu com seus dados?</p> <p>Aluno M: Que em cada hora aumentava 90.</p> <p>Professor-pesquisador: Se você está aumentando 90, qual a conta que você fez?</p> <p>Aluno G: A gente multiplicou a hora por 90.</p> <p>Professor-pesquisador: Vocês concordam comigo que se eu pegar o termo anterior e somar 90, vai dar a minha nova distância?</p> <p>Aluno M: Sim</p> <p>Professor-pesquisador: Acha que conseguem fazer com fórmulas?</p> <p>Aluno M: Sim</p>
<p>Trecho 2-2-2-B</p>	<p>Aluno X pede pra olhar a tabela dele</p> <p>Professor-pesquisador: Um gráfico de distância, ele pode ser em barras ou em linhas?</p> <p>Aluno V: Em linhas.</p> <p>Professor-pesquisador: Qual você acha que faz mais sentido?</p> <p>Aluno X: Eu fiz em barras porque achava mais bonito mesmo, mas acho que é melhor fazer em linhas.</p> <p>Professor-pesquisador: Eu também acho, mas porquê?</p> <p>Aluno X: Porque é contínua e crescente.</p> <p>Professor-pesquisador: Ótimo, isso ai Aluno X.</p>

<p>Trecho 2-2-2-C</p>	<p>Aluno D: Não consegui fazer a 2.</p> <p>Professor-pesquisador: A sequência é finita ou infinita?</p> <p>Aluno W: Finita.</p> <p>Professor-pesquisador: Porquê?</p> <p>Aluno W: Porque temos uma distância final.</p> <p>Professor-pesquisador: Qual fórmula vocês utilizaram para obter as distâncias?</p> <p>Aluno W: Fomos contando nos dedos.</p> <p>Alunos fizeram o cálculo manual, resistência.</p> <p>Aluno Q: Professor, vi vários manuais na internet sobre como fazer o cálculo, mas não dava certo na planilha.</p> <p>Aluno D: Dava números gigantescos.</p> <p>Professor-pesquisador abre a planilha e observa que o gráfico inicia com a distância igual a 90 km.</p> <p>Professor-pesquisador: Quando inicia a viagem?</p> <p>Aluno Q: A precisa começar com 0.</p> <p>Professor-pesquisador: Isso mesmo. Qual a distância que vocês percorreram na primeira hora?</p> <p>Aluno D: 90 km.</p> <p>Professor-pesquisador: E depois de mais 1 hora?</p> <p>Aluno W: Vamos andar mais 90 km.</p> <p>Professor-pesquisador: Então precisamos representar isso na planilha.</p>
<p>Trecho 2-2-2-D</p>	<p>Professor-pesquisador abre a planilha e observa que o gráfico inicia com a distância igual a 90 km.</p> <p>Professor-pesquisador: Quando inicia a viagem?</p> <p>Aluno Q: A precisa começar com 0.</p> <p>Professor-pesquisador: Isso mesmo. Qual a distância que vocês percorreram na primeira hora?</p> <p>Aluno D: 90 km.</p> <p>Professor-pesquisador: E depois de mais 1 hora?</p> <p>Aluno W: Vamos andar mais 90 km.</p> <p>Professor-pesquisador: Então precisamos representar isso na planilha.</p>
<p>Aula 03 (Explicação e exercícios do livro sobre razão)</p>	

Trecho 2-2-3-A	<p>Professor-pesquisador: Bom dia pessoal, para começarmos a trabalhar o conceito de Progressão Aritmética, vamos pensar no nosso trabalho de viagem para praia, Qual sequência montamos?</p> <p>Aluno I: (0, 90, 180, 270, 360, 450, 540, 630, 720).</p> <p>Professor-pesquisador: Que padrão vocês puderam notar?</p> <p>Aluno I: Aumenta de 90 em 90.</p> <p>(Reconheceu a razão)</p> <p>Professor-pesquisador: Ótimo Aluno I, esse padrão de aumento chamamos de razão.</p>
Trecho 2-2-3-B	<p>Professor-pesquisador: No trabalho, como vocês poderiam classificar a PA de vocês?</p> <p>TURMA: Crescente</p> <p>Aluno Z: Depende, se for a do COVID nem sempre.</p> <p>Professor-pesquisador: É a da praia?</p> <p>Aluno Z: Da praia é crescente.</p>
Aula 04	
Trecho 2-2-4-A	<p>Professor-pesquisador: Qual os valores da sequência da viagem para a praia.</p> <p>Aluno Z: Ah professor, minha sequência foi (0, 90, 180, 270, 360, 450, 540, 630, 720, 810)</p> <p>Professor-pesquisador: Quem é o 1º termo da sequência?</p> <p>Aluno W: É zero.</p> <p>Professor-pesquisador: E o meu 2º termo?</p> <p>Aluno W: 90</p> <p>Professor-pesquisador: Dessa forma, vamos atribuindo a ordem para cada termo da equação, nessa sequência que vai até o décimo termo.</p> <div data-bbox="347 1509 1059 1697" style="background-color: #f0f0f0; padding: 10px; margin-top: 10px;"> $(0, 90, 180, 270, 360, 450, 540, 630, 720, 810)$ $\begin{array}{cccccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \end{array}$ </div>

Trecho 2-2-4-B	<p>Professor-pesquisador: Como que vocês calcularam o segundo termo?</p> <p>Aluno Z: Multiplicamos a hora por 90.</p> <p>Professor-pesquisador: O cálculo está certo, mas tem outra forma que daria para fazer.</p> <p>Aluno X: A professor, pega o termo anterior e soma 90.</p> <p>Professor-pesquisador: ótimo, estamos sempre somando 90.</p> <p>Se eu pego o termo anterior, e somo 90. Posso dizer que tenho meu a_1 mais o que?</p> <p>Professor-pesquisador: O que é meu 90?</p> <p>Aluno T: A razão</p> <p>Professor-pesquisador: Então estou somando meu primeiro termo mais a minha razão.</p> <p>E para calcular o a_3?</p> <p>Aluno T: $a_2 +$ razão</p> <p>Professor-pesquisador: Então posso dizer que o meu $a_3 = a_1 + r + r$, logo meu $a_3 = a_1 + 2r$.</p> <p>Professor-pesquisador: Então posso dizer qual o meu n-ésimo termo?</p> <p>Aluno X: $a_n = a_1 + (n-1).r$</p> <p>Professor-pesquisador: ótimo Aluno X, e como você chegou a essa conclusão?</p> <p>Aluno X: Toda vez que pego um determinado termo, eu tenho um número menor multiplicando a razão.</p> <p>Apresentação do slide:</p> <div data-bbox="347 1301 1062 1563" style="background-color: #f0f0f0; padding: 10px;"><p>TERMO GERAL DA PA</p><p>Em uma PA ($a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$) de razão r, temos:</p>$a_n = a_1 + (n-1).r$</div>
-------------------	--

<p>Trecho 2-2-4-C</p>	<p>Professor-pesquisador: Vamos lá Aluno W, vamos pegar a praia de Natal agora.</p> <p>(Professor-pesquisador optou por pegar a equipe que teve a maior viagem para determinar o termo geral sem considerar o primeiro termo)</p> <p>Professor-pesquisador: Vamos imaginar que o pessoal que vai para Natal-RN, vai fazer uma parada em Montes Claros-MG. Como podemos calcular o ultimo termo da sequência a partir do elemento que representa a cidade de Natal?</p> <p>Vamos imaginar a seguinte sequência (0, 90, 180, 270, 360, 450, ..., 1350, ..., 3600), sendo que 1350, corresponde a distância até Montes Claros-MG, no qual é o meu K-termo e a distância 3300 km é o ponto de chegada em Natal e corresponde ao n-ésimo termo.</p> <p>Como podemos indicar uma equação que represente essa equação a partir de Montes Claros?</p> <p>Aluno X: O Ak será o A1?</p> <p>Professor-pesquisador: Bom, se considerar que o termo pode ser substituído por o A1 por Ak e o -1 ser substituído por -k</p> <p>(Alunos não conseguiram responder).</p>  <p>Aluno Z: O que seria o n professor?</p> <p>Professor-pesquisador: Seria a quantidade de termos, como o k também seria.</p>
<p>Aula 05 (Aula de gráfico)</p>	
<p>Trecho 2-2-5-A</p>	<p>Professor-pesquisador: No trabalho da viagem para praia, como que foi montar o gráfico?</p> <p>Aluno Z: Foi tranquilo</p> <p>Professor-pesquisador: Quais características vocês conseguiram perceber?</p> <p>Aluno Z: Linear e crescente.</p> <p>Professor-pesquisador: E mais o que podemos perceber?</p> <p>Aluno Z: Relação distância e tempo</p>

<p>Trecho 2-2-5-B</p>	<p>Professor-pesquisador: E que tipo de progressão que temos?</p> <p>Aluno Z: Não sei</p> <p>Professor-pesquisador: Você me disse que o gráfico é linear, isso é característica de qual função?</p> <p>Aluno I: Função Afim.</p> <p>Professor-pesquisador: Logo, podemos dizer que a função afim é o que?</p> <p>Aluno Z: Uma PA</p>
<p>Trecho 2-2-5-C</p>	<p>Professor-pesquisador: Temos também que a reta é crescente, logo podemos dizer o que dá razão?</p> <p>Aluno X: Positiva</p>
<p>Trecho 2-2-5-D</p>	<p>Professor-pesquisador: E como vocês formaram os pontos do plano cartesiano?</p> <p>Aluno X: Utilizamos o tempo em relação a distância.</p> <p>Professor-pesquisador: Agora Aluno X, no plano cartesiano, vamos pensar no nosso gráfico a relação de tempo x distância, qual relação tenho o tempo com a minha progressão aritmética?</p> <p>Aluno I: A razão?</p> <p>Professor-pesquisador: Não, seria outra coisa.</p> <p>Aluno T: Os valores de n.</p> <p>Professor-pesquisador: ótimo Aluno T. E agora a distância? Qual relação tem com a PA? Se você atribui valores para n, quais os resultados que você encontra?</p> <p>Aluno Z: An.</p> <p>Professor-pesquisador: Então tenho os valores de n, associado ao tempo e já os valores de An associados a distância.</p> <p>Professor-pesquisador: Vocês me falaram que o gráfico é linear, crescente e com a razão positiva e tem mais ou menos essa cara.</p> 

Trecho 2-2-5-E	<p>E onde aparece a razão no meu gráfico?</p> <p>Aluno X: Preciso pegar dois pontos consecutivos e encontro os dados.</p> <p>Aluno T: Basta eu subtrair os valores de 270 e 180 que foram encontrados e encontro a razão. E para cada valor de n que atribuímos, aumenta de 90 em 90.</p> <div data-bbox="347 454 1050 763"><p>$r = a_3 - a_2 = 90$</p></div> <p>Professor-pesquisador: Com isso turma, podemos definir que: a representação gráfica da PA $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n)$, formado pelos pontos (n, a_n) do plano cartesiano</p>
-------------------	---

ANEXO A – FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL

Adaptado de: Rizzatti, I. M. *et al.* Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. *ACTIO*, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657>. Acesso em 14 de dezembro de 2020.

Instituição de Ensino Superior	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)
Título da Dissertação	Ensino de sequências numéricas à luz da RME: Uma proposta que envolve Contexto Realístico e Planilhas Eletrônicas
Título do Produto/Processo Educacional	Contexto Realístico e Planilhas Eletrônicas no ensino de Sequência Numérica.
Autores do Produto/Processo Educacional	Discente: Mateus Felipes
	Orientador/Orientadora: Marcele Tavares Mendes
	Outros (se houver):
Data da Defesa	27/10/2022

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)	
Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.	
<p>Aderência: avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação.</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado.</u></p> <p>Linhas de Pesquisa do PPGMAT:</p> <p><i>L1: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático</i> (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito das potencialidades de cada uma no processo de construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade);</p> <p><i>L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática</i> (trata da análise e do desenvolvimento de recursos educacionais para os processos de ensino e de aprendizagem</p>	<p>() Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.</p> <p>(X) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.</p>

matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).	
<p>Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade: refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas.</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado.</u></p> <p>A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis:</p> <p>1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado; 2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo; 3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação.</p> <p>Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.</p>	<p>() PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa.</p> <p>() PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade.</p> <p>() PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).</p> <p>(X) PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).</p>
<p>Abrangência territorial: refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente.</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória.</u></p>	<p>() Local () Regional (X) Nacional () Internacional</p> <p>Justificativa (<i>obrigatória</i>): O PE estará disponibilizado em repositório institucional, diante disso, tem um alcance nacional</p>
<p>Impacto: considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional do discente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho).</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado.</u></p>	<p>() PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto).</p> <p>(X) PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.</p>
<p>Área impactada</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado.</u></p>	<p>() Econômica; () Saúde;</p>

	<input checked="" type="checkbox"/> Ensino; <input type="checkbox"/> Cultural; <input type="checkbox"/> Ambiental; <input type="checkbox"/> Científica; <input type="checkbox"/> Aprendizagem.
<p>Complexidade: compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE.</p> <p><u>*Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.</u></p>	<input checked="" type="checkbox"/> O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação. <input type="checkbox"/> A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE. <input type="checkbox"/> Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação. <input type="checkbox"/> Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.
<p>Inovação: considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.</p>	<input type="checkbox"/> PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito). <input checked="" type="checkbox"/> PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos). <input type="checkbox"/> PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).
Membros da banca examinadora de defesa	
Nome	Instituição
Dra. Marcele Tavares Mendes	UTFPR – Londrina
Dra. Adriana Helena Borssoi	UTFPR – Londrina
Dra. Angela Marques Fontana	IFPR – Paranavaí