

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**

**GLAUCO CLAUS REZENDE**

**OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL TOPOLÓGICA CONTÍNUA UTILIZANDO UMA  
MICROESTRUTURA SÓLIDA ISOTRÓPICA E PENALIZADA APLICADA EM  
PROBLEMAS DE VIBRAÇÕES LIVRES NÃO AMORTECIDAS**

**LONDRINA**

**2022**

**GLAUCO CLAUS REZENDE**

**OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL TOPOLÓGICA CONTÍNUA UTILIZANDO UMA  
MICROESTRUTURA SÓLIDA ISOTRÓPICA E PENALIZADA APLICADA EM  
PROBLEMAS DE VIBRAÇÕES LIVRES NÃO AMORTECIDAS**

**Continuous Structural Topology Optimization using a Solid Isotropic Material  
with Penalization Microstructure apply to undamped free vibrations problems**

Trabalho de conclusão de curso de graduação  
apresentado como requisito para obtenção do título de  
Bacharel em Engenharia Mecânica da Universidade  
Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Jéderson da Silva

Coorientador: João Luiz do Vale

**LONDRINA**

**2022**



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

**GLAUCO CLAUS REZENDE**

**OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL TOPOLÓGICA CONTÍNUA UTILIZANDO UMA  
MICROESTRUTURA SÓLIDA ISOTRÓPICA E PENALIZADA APLICADA EM  
PROBLEMAS DE VIBRAÇÕES LIVRES NÃO AMORTECIDAS**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação  
apresentado como requisito para obtenção do título de  
Bacharel em Engenharia Mecânica da Universidade  
Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Data de aprovação: 28/novembro/2022

---

Jéderson da Silva  
Doutorado em Engenharia Mecânica  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Jucélio Tomás Pereira  
Doutorado em Engenharia Mecânica  
Universidade Federal do Paraná

---

Juliano Gonçalves Iossaqui  
Doutorado em Engenharia Mecânica  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

**LONDRINA**

**2022**

“A dúvida é o princípio da sabedoria.”  
Aristóteles

“A jornada do herói não é subir até o topo mais alto  
Mas descer até o submundo de si  
E conseguir voltar de lá mais forte”  
Fabio Brazza

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente aos meus pais por toda a contribuição, apoio e ensinamentos proporcionados e que ainda me proporcionam, mesmo que em outro plano. Em especial agradeço a minha mãe por sempre me incentivar a estudar e continuar lutando. Agradeço à minha irmã Anne Gabrielle Claus Rezende por ser meu exemplo de sabedoria e pessoa.

Um agradecimento especial aos meus queridos amigos Renan Monteiro de Faria, Guilherme Luiz Vicente Guerra, Gabryel Almeida dos Santos Venzel, Leonardo Veggi e Luiz Felipe Mesquita por todo apoio e ajuda durante essa caminhada, pelo crescimento pessoal que me proporcionaram. Vocês são como irmãos para mim, obrigado por tudo até aqui.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Jéderson da Silva e meu coorientador Prof. Dr. João Luís do Vale, por me guiarem no caminho.

Gostaria de agradecer, também, a todos os professores por todo o conhecimento concedido durante toda a graduação.

## RESUMO

O presente trabalho tem enfoque na solução de um problema de Otimização Estrutural Topológica Contínua utilizando uma abordagem material baseada em uma Microestrutura Sólida Isotrópica e Penalizada. O problema visa a maximização da frequência fundamental de uma formulação de vibrações livres não amortecidas com restrição sobre o volume material. O Método dos Elementos Finitos é utilizado para a discretização do domínio de análise nos modelos mecânicos. O Método do Lagrangiano Aumentado é aplicado para a solução do problema de otimização. Ademais, são utilizados dois funcionais regularizadores, um penalizando regiões com densidades intermediárias e outro penalizando os gradientes de densidades. Esses funcionais têm o intuito de mitigar problemas recorrentes nas topologias ótimas obtidas, por exemplo, extensas regiões de cinza e instabilidades numéricas como o tabuleiro de xadrez e a dependência de malha. A implementação computacional é realizada pelo software Matlab®. São analisados dois problemas físicos com características de simetria diferentes. Os resultados obtidos são comparados qualitativamente e quantitativamente com trabalhos presentes na literatura, analisando aspectos de independência de malha e a ocorrência tanto do fenômeno do tabuleiro de xadrez como regiões com densidades intermediárias. As topologias ótimas obtidas apresentam a mitigação dos problemas de tabuleiro de xadrez e de regiões com densidades relativas por influência dos funcionais penalizadores, apresentam, também, uma tendência ao fenômeno de independência de malha. Assim, quanto a metodologia proposta, é possível afirmar que esta se mostra adequada com vistas a problemas de vibrações livres não amortecidas.

**Palavras-chave:** densidades intermediárias; frequência fundamental; Método dos Elementos Finitos; método do Lagrangiano Aumentado; tabuleiro de xadrez.

## ABSTRACT

The present work focuses on solving a Continuous Topology Optimization of Continuum Structures problem using a material approach based on a Solid Isotropic Microstructure with Penalization. The problem aims at maximizing the fundamental frequency of a formulation of undamped free vibrations with constraint on the material volume. The Finite Element Method is used for discretization of the analysis domain in mechanical models. The Augmented Lagrangian Method is applied to solve the optimization problem. Furthermore, two regularizing functionals are used, one penalizing regions with intermediate densities and the other penalizing density gradients. These functional features, for example the complexity intent of possible meshes, for example, can be defined as the gray board and have a mesh dependency. The computational implementation is performed by Matlab® software. Two physical problems with different symmetry characteristics are analyzed. The results obtained are qualitatively and quantitatively compared with works present in the literature, analyzing aspects of mesh independence and the occurrence of both the chessboard phenomenon and regions with intermediate densities. The optimal topologies obtained, considering the comparisons already present, had the problems mitigated using functionals. The optimal topologies obtained present the mitigation of checkerboard problems and regions with relative densities under the influence of the penalizing functionals, they also present show a tendency to the phenomenon of mesh independence. Therefore, regarding the proposed methodology, it is possible to affirm that it is adequate with a view to the problems of undamped free vibrations.

**Keywords:** intermediate densities; fundamental eigenfrequency; Finite Element Method; Augmented Lagrangian method; chessboard.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Dependência de malha. OETC visando a minimização de flexibilidade com restrição sobre o volume material. a) Modelo mecânico. Topologia resultante considerando uma discretização uniforme com b) 2700, c) 4800 e d) 7200 elementos .....	24
Figura 2 - Solução para um problema de minimização de flexibilidade com restrição sobre volume material. a) Modelo Mecânico: Viga bi-apoiada. b) Topologia ótima obtida via SIMP: Fenômeno de tabuleiro de xadrez. c) Topologia ótima obtida via SIMP: Regiões de cinza .....	25
Figura 3 - Topologia ótima obtida de uma OETC de um problema de vibrações livres com restrição sobre volume material a) Viga bi-engastada; b) Viga engastada e com apoio.....	33
Figura 4 - Históricos de convergência das frequências fundamentais em um problema de OETC visando a maximização da frequência fundamental. Retratação do fenômeno de Multiplicidade de Frequências Naturais. a) Viga bi-engastada; b) Viga engastada e com apoio .....	34
Figura 5 - Elemento finito empregado no processo de OETC .....	35
Figura 6 - Modelo mecânico de uma viga em balanço .....	42
Figura 7 - Discretização das malhas com elementos do tipo CST.....	43
Figura 8 - Procedimento para solução da OETC em um problema de vibrações livres não amortecidas com restrição sobre o volume material .....	45
Figura 9 - Modelo Mecânico: a) Viga bi-engastada; b) Viga engastada e com apoio.....	46
Figura 10 - Cinco primeiras frequências naturais e modos de vibrar da estrutura para a malha A .....	49
Figura 11 - Cinco primeiras frequências naturais e modos de vibrar da estrutura para malha B: comparação com Yang, Xu e Zheng (2016) .....	50
Figura 12 - Cinco primeiras frequências naturais e modos de vibrar da estrutura para a malha C .....	51
Figura 13 - Histórico de convergência para a viga bi-engastada: a) Frequências naturais. b) Erros em função do refino da malha com razão de aspecto constante .....	53



Figura 14 - Viga bi-engastada: Topologias ótimas para malha de 4608 elementos.....	54
Figura 15 - Viga bi-engastada: Topologias ótimas para a malha de 8192 elementos, comparação entre os pares de parâmetros mais adequados .....	55
Figura 16 - Viga bi-engastada: Modo de vibrar fundamental da topologia ótima gerada com $r_m = 20000$ e $r_\rho = 120$ para a malha de 4608 elementos.....	55
Figura 17 - Viga bi-engastada: Histórico das frequências naturais ao longo das iterações com $r_m = 20000$ e $r_\rho = 120$ para a malha de 4608 elementos.....	56
Figura 18 - Viga bi-engastada: Histórico dos funcionais de densidades intermediárias para malha de 4608 elementos .....	57
Figura 19 - Viga bi-engastada: Histórico dos funcionais de gradiente de densidades para malha de 4608 elementos .....	58
Figura 20 - Viga bi-engastada: Histórico das frequências fundamentais para malha de 4608 elementos .....	58
Figura 21 - Viga bi-engastada: Histórico dos funcionais Lagrangiano Aumentado para malha de 4608 elementos .....	59
Figura 22 - Viga bi-engastada: Histórico das restrições de volume para malha de 4608 elementos .....	60
Figura 23 - Viga engastada-apoiada: a) Frequências naturais. b) Erros em função do refino da malha com razão de aspecto constante.....	60
Figura 24 - Viga engastada-apoiada: Topologias ótimas para malha de 4608 elementos.....	61
Figura 25 - Viga engastada-apoiada: Topologias ótimas para malha de 8192 elementos, comparação entre os pares de parâmetros mais adequados.	62
Figura 26 - Viga engastada-apoiada: modo de vibrar fundamental da topologia ótima com $r_m = 20000$ e $r_\rho = 10$ para a malha de 4608 elementos .....	63
Figura 27 - Viga engastada-apoiada: Histórico das frequências naturais ao longo das iterações com $r_m = 20000$ e $r_\rho = 10$ para a malha de 4608 elementos .....	63
Figura 28 - Viga engastada-apoiada: Histórico de convergência dos termos do funcional Lagrangiano Aumentado, malha de 4608 elementos, parâmetros $r_m = 20000$ e $r_\rho = 10$ .....	64

**Figura 29 - Viga engastada-apoiada: Histogramas de variáveis de projeto por faixas de densidades relativas para a malha de 4680 elementos para os pares de parâmetros a)  $r_m = 0$  e  $r_\rho = 0$ , b)  $r_m = 10000$  e  $r_\rho = 0$ , c)  $r_m = 10000$  e  $r_\rho = 10$ , d)  $r_m = 10000$  e  $r_\rho = 120$  e e)  $r_m = 10000$  e  $r_\rho = 500$ . 65**

**Figura 30 - Viga engastada-apoiada: Histórico das restrições de volume para malha de 4608 elementos comparação entre os 5 pares de parâmetros, viga engastada apoiada-engastada ..... 66**

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1 - Planejamento numérico para validação do MEF aplicado à problemas de vibrações livres .....</b>	<b>43</b>
<b>Tabela 2 - Planejamento Numérico, OETC vibrações livres .....</b>	<b>46</b>
<b>Tabela 3 - Parâmetros penalizadores, OETC vibrações livres .....</b>	<b>47</b>
<b>Tabela 4 - Comparação das cinco primeiras frequências naturais de vibração</b>	<b>51</b>

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BESO	<i>Bidirecional Evolutionary Structural Optimization</i> (Otimização Estrutural Evolucionária Bidirecional).
CST	<i>Constant Strain Triangle</i> (Elemento Triangular de Deformação Constante).
MEF	Método dos Elementos Finitos.
MFN	Multiplicidade de Frequências Naturais.
OETC	Otimização Estrutural Topológica Contínua.
OMD	<i>Optimal Material Distribution</i> (Distribuição Ótima de Material).
SIMP	<i>Solid Isotropic Microstructure with Penalization</i> (Microestrutura Sólida Isotrópica com Penalização).

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Alfabeto Latino

$B_e$	Matriz de derivadas das funções de forma.
D	Altura da viga.
$D_e$	Matriz de rigidez constitutiva considerando uma microestrutura SIMP.
$D_e^*$	Matriz de rigidez constitutiva de um elemento com material sólido.
E	Módulo de elasticidade longitudinal.
$f_p$	Funções objetivo.
$F_m$	Funcional penalizador de densidades intermediárias.
$F_\rho$	Funcional penalizador de gradientes de densidade.
$g_i$	Restrição de desigualdade genérica.
$h_j$	Restrição de igualdade genérica.
$h_V$	Restrição de igualdade sobre o volume.
Hz	Hertz.
$K$	Matriz de rigidez global.
$K_e$	Matriz de rigidez elementar considerando uma microestrutura SIMP.
$K_e^*$	Matriz de rigidez elementar com material sólido.
$(K)_{\rho_e}'$	Sensibilidade da matriz de rigidez elementar em relação a densidade elementar.
L	Comprimento da viga.
$\bar{L}_1$	Funcional Lagrangiano Aumentado associado ao primeiro subproblema.
$\bar{L}_k$	Funcional Lagrangiano Aumentado associado ao k-ésimo subproblema.
$L^\infty$	Espaço de funções essencialmente limitadas.
$M$	Matriz de massa global.
$M_e$	Matriz de massa elementar considerando uma microestrutura SIMP.
$M_e^*$	Matriz de massa elementar com material sólido.
$(M)_{\rho_e}'$	Sensibilidade da matriz de massa elementar em relação a densidade elementar.
$n_f$	Número de funções objetivos.
$n_g$	Número de restrições de desigualdade.
$n_h$	Número de restrições de igualdade.

$N_e$	Matriz das funções de forma.
$N_e$	Número de elementos do domínio.
$nvp$	Número de variáveis de projeto.
$p$	Relação de potência da matriz de massa.
$q$	Relação de potência da matriz de rigidez.
$r_1$	Parâmetro penalizador quadrático associado ao primeiro subproblema.
$r_k$	Parâmetro penalizador quadrático associado ao k-ésimo subproblema.
$r_k^{max}$	Parâmetro penalizador quadrático máximo.
$r_m$	Parâmetro penalizador de densidades intermediárias.
$r_\rho$	Parâmetro penalizador de gradientes de densidade.
$t$	Espessura da viga.
$V$	Volume corrente.
$V_0$	Volume inicial.
$\mathbf{x}$	Vetor de coordenadas das densidades relativas.
$\mathbf{y}$	Vetor de variáveis de projeto.
$y_1$	Primeira variável de projeto.
$y_2$	Segunda variável de projeto.
$y_{nvp}$	Última variável de projeto.
$z$	Taxa de aumento do parâmetro penalizador quadrático.

### Alfabeto Grego

$\alpha$	Parcela da restrição de volume.
$\nabla()$	Operador gradiente.
$\eta_1$	Multiplicador de Lagrange associado ao primeiro subproblema.
$\eta_k$	Multiplicador de Lagrange associado ao k-ésimo subproblema.
$\lambda_1$	Primeiro autovalor associado à frequência fundamental.
$\lambda_2$	Segundo autovalor associado à segunda frequência natural.
$(\lambda_n)'_{\rho_e}$	Sensibilidade do n-ésimo autovalor em relação a densidade elementar.
$(\lambda_n)'_{\rho_e^j}$	Sensibilidade do n-ésimo autovalor em relação a densidade nodal.
$\lambda_n$	n-ésimo autovalor.
$\mu_1$	Parâmetro de ponderação aplicado a frequência fundamental.

$\mu_2$	Parâmetro de ponderação aplicado a segunda frequência natural.
$\nu$	Coefficiente de Poisson.
$\rho$	Densidade relativa.
$\rho_e$	Vetor das densidades nodais no e-ésimo elemento.
$\rho_e^j$	Componentes nodais das densidades no elemento.
$\rho_k$	Vetor de densidades nodais do k-ésimo subproblema.
$\rho_{material}$	Densidade material.
$\rho_{min}$	Densidade relativa mínima.
$\phi_1$	Autovetor associado ao primeiro autovalor.
$\phi_n$	n-ésimo modo de vibrar.
$(\phi_n)'_{\rho_e}$	Sensibilidade do n-ésimo modo de vibrar em relação a densidade elementar.
$\psi$	Vetor das funções de interpolação linear.
$\omega_1$	Frequência fundamental.
$\omega_2$	Segunda frequência natural.
$\omega_n$	n-ésima frequência natural de vibração.
$\omega_{nm}$	n-ésima frequência natural de vibração associado a m-ésima malha.
$\Omega$	Domínio global de análise.
$\Omega_e$	Domínio elementar de análise.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>17</b>
<b>1.1</b>	<b>Estrutura do texto</b> .....	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>OBJETIVOS</b> .....	<b>20</b>
<b>2.1</b>	<b>Objetivos específicos</b> .....	<b>20</b>
<b>3</b>	<b>JUSTIFICATIVA</b> .....	<b>21</b>
<b>4</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>22</b>
<b>4.1</b>	<b>Otimização estrutural</b> .....	<b>22</b>
4.1.1	Definição do problema matemático de otimização .....	22
4.1.2	Tipos de otimização estrutural .....	23
<b>4.2</b>	<b>Métodos de Otimização Estrutural Topológica Contínua</b> .....	<b>24</b>
4.2.1	<i>Level set</i> .....	25
4.2.2	Derivada topológica .....	26
4.2.3	Analogia com modelos de remodelação de tecido ósseo .....	27
4.2.4	Métodos baseados no conceito de microestruturas.....	28
<b>4.3</b>	<b>OETC aplicada em problemas de vibrações livres</b> .....	<b>30</b>
<b>5</b>	<b>REVISÃO CONCEITUAL</b> .....	<b>35</b>
<b>5.1</b>	<b>Definição do elemento finito e da descrição do campo de densidades</b>	<b>35</b>
<b>5.2</b>	<b>Formulação para maximização da frequência fundamental</b> .....	<b>36</b>
<b>5.3</b>	<b>Análise de sensibilidade do funcional lagrangiano aumentado</b> .....	<b>40</b>
<b>6</b>	<b>METODOLOGIA</b> .....	<b>42</b>
<b>6.1</b>	<b>Validação do MEF para um problema de vibrações livres</b> .....	<b>42</b>
<b>6.2</b>	<b>Aspectos de implementação computacional e análise do problema de OETC associado ao problema de vibrações livres não amortecidas</b> .....	<b>44</b>
<b>7</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b> .....	<b>49</b>
<b>7.1</b>	<b>Validação do MEF: análise de vibrações livres para uma viga em balanço</b> .....	<b>49</b>
<b>7.2</b>	<b>OETC: maximização da frequência fundamental com restrição sobre o volume material</b> .....	<b>52</b>
7.2.1	Viga bi-engastada.....	52
7.2.2	Viga engastada-apoiada.....	60
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES</b> .....	<b>67</b>
<b>8.1</b>	<b>Trabalhos futuros</b> .....	<b>68</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>69</b>



## 1 INTRODUÇÃO

Nos dias atuais há uma grande procura por redução de custos e aumento de produtividade. No setor industrial, essa demanda está concentrada principalmente nos componentes mecânicos produzidos. Desde a fase de projeto até a fase de distribuição existem muitos processos e etapas, porém pode-se assumir que a mais influente é a fase de projeto, na qual é definido os processos de fabricação, os dimensionamentos, os materiais e os tratamentos térmicos e superficiais. Uma alternativa é a aplicação de uma metodologia relacionada a fase de projeto, visando redução de custos.

Neste contexto, uma opção é o emprego de técnicas de Otimização Estrutural durante a fase de projeto. Tais técnicas visam obter o projeto estrutural mais eficiente possível, satisfazendo um determinado conjunto de condições limitantes e minimizando ou maximizando uma ou mais funções. A otimização estrutural pode ser realizada modificando as dimensões, a forma e/ou a topologia da estrutura (LOPEZ; MIGUEL, 2013).

A Otimização Estrutural Topológica se baseia em modificar as formas e a conectividade da estrutura possibilitando a criação de furos e rasgos ao longo da topologia (BENDSØE, 1995). A Otimização Estrutural Topológica pode ser realizada em estruturas discretas, como treliças, determinando o número, tamanho, posição e conectividade dos elementos (SILVA, 2015), ou em estruturas contínuas, definindo a forma, a quantidade e a posição dos furos ou vazios ao longo do domínio da estrutura (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

Entre os métodos utilizados para a resolução de problemas de Otimização Estrutural Topológica Contínua (OETC), evidenciam-se aqueles que utilizam microestruturas. Uma das microestruturas amplamente utilizada é a Sólida Isotrópica com Penalização (*Solid Isotropic Microstructure with Penalization* – SIMP) (BENDSØE, 1989; BENDSØE; SIGMUND, 1999), na qual as variáveis de projeto são as densidades relativas dos materiais,  $\rho$ , onde  $\rho = 0$  representa a ausência de material (vazio) e  $\rho = 1$  a existência de material.

São muitas as funções objetivo que podem ser otimizadas em um problema de OETC. No presente trabalho é abordado problemas de vibração livre não

amortecida com uma única restrição aplicada ao volume total do material, sendo a frequência fundamental de vibração a função objetivo (DU; OLHOFF, 2007). Tendo em vistas essa formulação um problema recorrente é o de Multiplicidade de Frequência Naturais (MFN), o qual inviabiliza a solução ótima obtida a partir do processo de OETC. Para contornar isto, é proposto um método semelhante ao encontrado em Ma et. al (1995) nomeado de autovalor médio.

Para a solução do problema de OETC em questão é necessário o auxílio de um método numérico que possibilite a avaliação das frequências naturais e modos de vibrar associados a uma dada estrutura e condições de contorno. Dentre os métodos numéricos de aproximação é utilizado o Método dos Elementos Finitos (MEF).

Embora o MEF seja uma ótima alternativa para a discretização do problema, há fatores que limitam a eficiência de sua aplicabilidade no contexto de problemas de OETC. Um desses fatores é a instabilidade numérica, nomeada como tabuleiro de xadrez. Adicionalmente, pode-se citar problemas de dependência de malha, ou seja, diferentes topologias ótimas podem ser encontradas dependendo da discretização empregada. Outro fator, associado à aplicação do método SIMP, é o aparecimento de regiões com densidades intermediárias,  $0 < \rho < 1$ , também chamadas de regiões de cinza (SIGMUND; PETERSSON, 1998). Essas adversidades podem ser mitigadas ou evitadas adicionando funcionais penalizadores à função objetivo (PEREIRA, 2001; FANCELLO; PEREIRA, 2003; PEREIRA; FANCELLO; BARCELLOS, 2004; SILVA, 2017; PACHECO; SILVA; VALE, 2020; SILVA; PEREIRA; TORRES, 2020).

Adicionalmente, uma das alternativas para a determinação matemática da solução estrutural ótima de um problema de OETC é o Método do Lagrangiano Aumentado (BERTSEKAS, 1996; BERTSEKAS, 1999; ARORA, 2017). Este método é baseado em transformar um problema originalmente com restrições em uma sequência de subproblemas sem restrições. Neste, as restrições originais são adicionadas à função objetivo, sendo ponderadas por multiplicadores de Lagrange e fatores de penalização externa quadrática.

## 1.1 Estrutura do texto

No corrente Capítulo é apresentado o problema de OETC e sua importância e relevância para o desenvolvimento de projetos estruturais.

No Capítulo 2 são relatados os objetivos gerais e específicos deste trabalho.

No Capítulo 3 é desenvolvida a justificativa para tal estudo.

No Capítulo 4 é realizada uma revisão bibliográfica.

No Capítulo 5 é mostrada uma revisão conceitual sobre o equacionamento utilizado para cumprir o que é proposto nos objetivos.

No Capítulo 6 é apresentada a metodologia, ou seja, a forma como os experimentos numéricos, para comprovação do método, são realizados e analisados.

No Capítulo 7 são expostos os resultados e discussões referentes à aplicação dos funcionais regularizadores em problemas Otimização Estrutural Topológica Contínua visando a maximização de frequência fundamental com restrição sobre o volume material.

No Capítulo 8 são apresentadas as considerações finais acerca deste trabalho.

## 2 OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo a implementação numérica e análise de uma solução de um problema regularizado de OETC via SIMP, com vistas à maximização da frequência fundamental de uma estrutura considerando uma restrição sobre o seu volume.

Com isso é esperado analisar a influência dos funcionais penalizadores nas topologias ótimas, levando em conta aspectos relacionados ao aparecimento de extensas regiões com densidades intermediárias e a existência de instabilidades numéricas, como por exemplo, o fenômeno de tabuleiro de xadrez e a dependência de malha.

### 2.1 Objetivos específicos

O objetivo geral do presente trabalho pode ser sumarizado nos seguintes objetivos específicos:

- Implementar computacionalmente e validar um problema de vibrações livres não amortecidas para uma estrutura continua sem variação de densidade através do MEF utilizando um código criado em Matlab®;
- Aplicar funcionais penalizadores ao problema de OETC em pauta, com o objetivo de mitigar ou evitar o aparecimento de regiões com densidades intermediárias, do fenômeno de tabuleiro de xadrez e da dependência de malha;
- Propor método para evitar o problema de MFN no processo de otimização da frequência fundamental;
- Avaliar qualitativamente e quantitativamente a topologia otimizada quanto a regiões de densidades intermediárias, tabuleiro de xadrez e dependência de malha.
- Analisar quantitativamente a influência dos funcionais penalizadores no valor da frequência fundamental otimizada;
- Validar a metodologia comparando o método SIMP aplicado em uma OETC com casos apresentados na literatura.

### 3 JUSTIFICATIVA

No âmbito industrial, há uma grande demanda por produtos com um custo reduzido, mais eficientes e com um menor tempo de produção. Essa demanda está principalmente envolvida com componentes mecânicos e estruturais. Como a indústria tem evoluído continuamente, a produção de uma mesma dada peça pode ser realizada de inúmeras formas, como por exemplo, forjamento, fundição, injeção, estampagem etc., também por processos de alta precisão, como usinagem por Comando Numérico por Computador, corte a laser e impressão 3D. Assim, o projeto de peças complexas se torna viável. Frente a este contexto, técnicas de otimização estrutural, que visam o projeto estrutural mais eficiente possível, o que muitas vezes geram peças com geometrias complexas, podem ser aplicadas.

Portanto, o estudo sobre técnicas de Otimização Estrutural Topológica tem crescido amplamente. Muitas destas técnicas utilizam microestruturas, sendo a microestrutura do tipo SIMP uma das mais abordadas. Via de regra, a aplicação de microestruturas em problemas de OETC resulta em alguns problemas nas topologias geradas e/ou geram instabilidades numéricas. Dessa forma, o conhecimento de técnicas que regularizem esses problemas se torna importante. Além da prática dessas soluções, se torna relevante a análise para determinar qual é mais adequada em termos da regularização do problema de otimização. Assim, o presente trabalho aborda a influência de funcionais regularizadores os quais buscam mitigar ou evitar os problemas frequentemente encontrados nas topologias geradas pela OETC.

Um dos objetivos mais comuns em projeto de estruturas submetidas a carregamentos dinâmicos é evitar a ressonância. Este fenômeno resulta em uma menor vida útil ou até mesmo na falha catastrófica da estrutura. Uma das formas utilizadas para evitar a ressonância é maximizar a frequência fundamental de vibração. Assim, realizar uma OETC em um problema de vibrações livres não amortecidas à fim de maximizar a frequência fundamental, primeira frequência natural de vibração, da estrutura é muito influente para realizar o projeto desta.

## 4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este Capítulo apresenta a revisão bibliográfica dos tópicos mais relevantes deste trabalho. Em particular, são debatidas as teorias e o histórico de estudos sobre OETC, a microestrutura SIMP, além de trabalhos os quais envolvem a solução de problemas de vibrações livres não amortecidas a partir de métodos de otimização estrutural.

### 4.1 Otimização estrutural

Como já apresentado, a aplicação de metodologias de otimização estrutural pode ser amplamente utilizada no projeto de componentes mecânicos e estruturais. No caso, o intuito é obter o projeto estrutural mais eficiente, satisfazendo as condições limitantes, sendo possível minimizar ou maximizar as funções objetivo.

#### 4.1.1 Definição do problema matemático de otimização

A definição matemática geral de problemas de otimização pode ser descrita a partir dos seguintes passos (ARORA, 2017):

Obter as variáveis de projeto e apresentá-las em um vetor  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{nvp})$ , sendo  $nvp$  o número de variáveis de projeto, minimizando um  $nf$  número de funções objetivos:

$$f_p(\mathbf{y}) = f_p(y_1, y_2, \dots, y_{nvp}) \quad (p = 1, 2, \dots, nf), \quad (1)$$

estando sujeito a  $nh$  restrições de igualdade,

$$h_j(\mathbf{y}) = h_j(y_1, y_2, \dots, y_{nvp}) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, nh), \quad (2)$$

e a  $ng$  restrições de desigualdade,

$$g_i(\mathbf{y}) = g_i(y_1, y_2, \dots, y_{nvp}) \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, ng). \quad (3)$$

Todo esse processo é descrito por Arora (2017). O conjunto de variáveis de projeto desejáveis é o conjunto denominado como viável, o qual satisfaz todas as restrições.

#### 4.1.2 Tipos de otimização estrutural

Problemas de otimização estrutural podem ser divididos conforme o tipo do domínio no qual são descritos. Tal divisão pode ser realizada a partir da quantidade de dimensões em que esse domínio é definido, ou seja, unidimensional, bidimensional ou tridimensional (BENDSØE; 1999).

Entre os métodos de otimização estrutural pode ser realizada outra divisão por categorias: paramétrica ou dimensional, de forma e de topologia (BENDSØE; SIGMUND, 2003, LOPEZ; MIGUEL, 2013). A categoria dimensional não altera a continuidade estrutura ao longo da otimização e as variáveis de projeto podem ser, por exemplo, a espessura, a área e o volume (NUÑEZ, 2014; SILVA, 2015). Já a otimização de forma tem como objetivo obter a melhor configuração dos contornos da estrutura (ROBALINHO,1998; BENDSØE; SIGMUND, 2003). Por fim, a otimização topológica se baseia em alterar as formas e as conectividades da estrutura admitindo no decorrer do processo furos e rasgos ao longo da topologia otimizada (BENDSØE, 1995; BENDSØE; SIGMUND, 2003; PACHECO; SILVA; VALE, 2020).

O problema de otimização estrutural topológica pode ser abordado com diferentes funções objetivo e restrições aplicadas a esta, como exemplos presentes na literatura tem-se:

- Minimização de massa/volume com restrição na tensão do material. Alguns trabalhos que apresentam essa formulação são Pereira (2001), Pereira, Fancello e Barcellos (2004), Wang, Kang e He (2013), Porcher (2016) e Correa (2020);
- Minimização de flexibilidade com restrição em massa/volume, onde podem-se citar Bendsøe e Kikuchi (1988), Souza (2003), Bahia (2005), Traldi (2010) e Silva, Pereira e Torres (2020);
- Outra formulação abordada na literatura é referente aos problemas de otimização estrutural topológica de vibrações livres, como alguns exemplos pode ser mencionados os trabalhos de Ma et al. (1995), Ma,

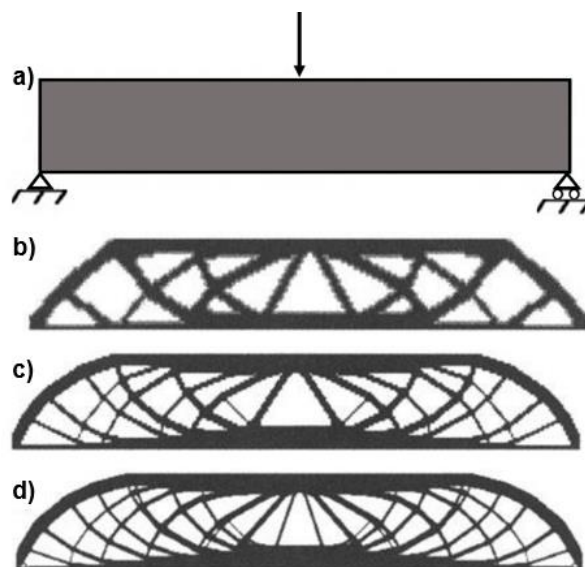
Kikuchi e Cheng (1995), Pedersen (2000), Tcherniak (2002), Maeda et al. (2006), Du e Olhoff (2007), Bogomolny (2009) e Brittain, Silva e Tortorell (2012).

#### 4.2 Métodos de Otimização Estrutural Topológica Contínua

O problema de OETC visa encontrar a topologia ótima da estrutura a partir da definição, em cada variável de projeto, da densidade relativa considerando se há material (elemento sólido) ou não (elemento vazio). Com isso, é necessária a utilização de métodos numéricos de otimização discreta para a solução do problema, porém, esse processo pode gerar instabilidades nas topologias (COSTA JR., 2003).

Como exemplos de instabilidades numéricas, podem-se citar a dependência de malha (Figura 1) e o fenômeno do tabuleiro de xadrez (Figura 2b). Tal fenômeno refere-se à formação de um padrão similar a um tabuleiro de xadrez na topologia resultante em razão da alternância entre valores de regiões sólidas e vazias (SIGMUND; PETERSSON, 1998a; BENDSØE; SIGMUND, 2003). Um outro problema que é recorrente nas topologias ótimas é a presença de regiões com densidades intermediárias, chamadas regiões de cinza (Figura 2c).

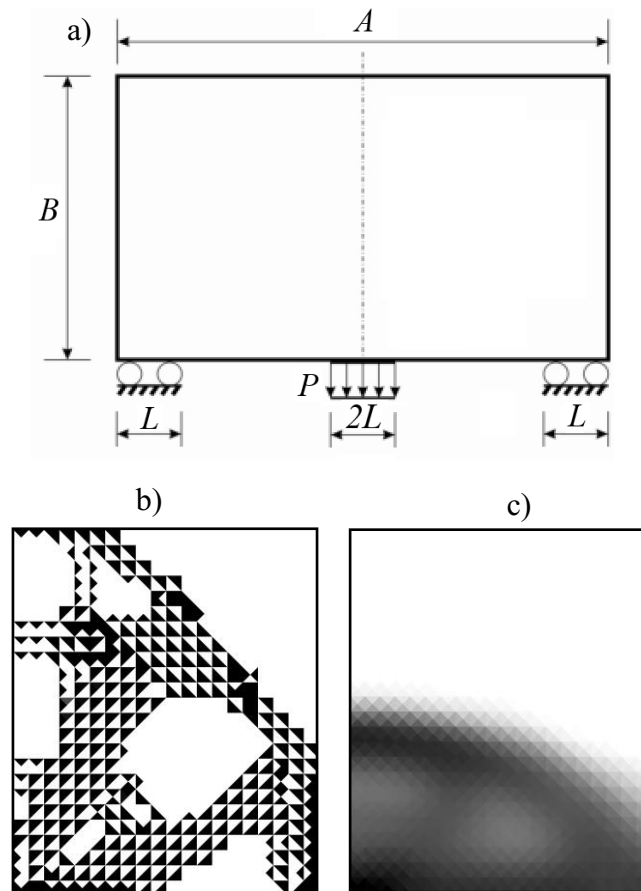
**Figura 1 - Dependência de malha. OETC visando a minimização de flexibilidade com restrição sobre o volume material. a) Modelo mecânico. Topologia resultante considerando uma discretização uniforme com b) 2700, c) 4800 e d) 7200 elementos**



Fonte: Adaptado de Bendsøe e Sigmund (2003)



**Figura 2 - Solução para um problema de minimização de flexibilidade com restrição sobre volume material. a) Modelo Mecânico: Viga bi-apoiada. b) Topologia ótima obtida via SIMP: Fenômeno de tabuleiro de xadrez. c) Topologia ótima obtida via SIMP: Regiões de cinza**



Fonte: Adaptado de Silva (2017)

#### 4.2.1 *Level set*

Uma das soluções utilizadas em problemas de OETC é a metodologia *level set*. Esta fundamenta-se na representação dos limites de uma topologia através da curva de nível zero de uma função escalar formulada sobre o domínio analisado. Com isso, a minimização da função objetivo ocorre movendo a fronteira desse corpo (EMMENDOERFER JR., 2011). Há muitos trabalhos que utilizam a técnica *level set* na literatura. Como exemplo temos os trabalhos descritos abaixo:

- Emmendoerfer Jr. (2011) resolve um problema de minimização de massa com restrição baseada em níveis de tensão. Utiliza a restrição baseada na técnica do Lagrangiano Aumentado e a técnica da função *level set* para o controle da topologia.

- O trabalho realizado por Vitorio Jr. (2014) utiliza o Método dos Elementos de Contorno para o cálculo das tensões e deformações atuantes na estrutura e posteriormente, para a inserção dos furos na topologia, seguindo o critério de tensão de von Mises, utiliza o método *level set* para o tratamento das instabilidades geradas na topologia da peça.
- Seungmin, Sunghoon e Seungjae (2016) abordam um problema de otimização topológica baseado em *level set* com fim de projetar um atuador magnético utilizando de metodologias de refinamento de malha aplicadas nos limites estruturais exatos com o intuito de melhorar a precisão do MEF.
- Xianbao, Feifei e Xinqiang (2016) apresentam a função *level set* aplicada em um método de malha adaptativa, para a resolução de um problema de otimização topológica abordando uma formulação a qual envolve equações que descrevem o escoamento de fluidos.
- Utilizando uma abordagem de análise de sensibilidade (BESO) adaptada ao método de representação pela função *level set*, tem-se o trabalho de Duarte (2021). Neste, o autor busca solucionar problemas de otimização topológica a fim de analisar a eficiência e a aplicabilidade da combinação dessas metodologias.

#### 4.2.2 Derivada topológica

A técnica de derivada topológica se baseia em medir, a partir de um funcional de forma, a sensibilidade proveniente de uma perturbação localizada infinitesimal, um furo muito pequeno, aplicada em um ponto específico do domínio (NOVOTNY; SOKOLOWSKI, 2013). Em problemas de OETC, a derivada topológica é fundamentada na sensibilidade do funcional aplicado a função objetivo e das restrições criadas devido à existência dessa perturbação no domínio. Existem muitos trabalhos que utilizam esse conceito, como por exemplo:

- Um trabalho que aplica o conceito da derivada topológica em conjunto com uma otimização estrutural evolutiva é descrito por Cordeiro (2007). Nesse caso, o intuito é minimizar a energia interna de deformação com restrição nas tensões materiais, e por fim comparar a eficiência do método de derivada topológica com outras formulações.

- No trabalho de Amstutz e Novotny (2010) é aplicada a metodologia de derivada topológica em problemas bidimensionais que visam minimizar uma função objetivo que combina área e flexibilidade tendo restrições locais de tensão de von Mises, para isso é empregado um algoritmo de otimização topológica.
- Santos, Novotny e Torii (2017) propõem uma nova formulação para um problema de otimização topológica estrutural baseada em confiabilidade com restrição em tensão. Buscam-se então estruturas de volume mínimo que atendam simultaneamente aos critérios de resistência e confiabilidade estruturais.
- Oliveira (2018) propõe uma técnica alternativa, baseada na metodologia de derivada topológica, para resolver um problema de otimização topológica com domínio plano, utilizando malhas de elementos finitos poligonais. Inicialmente, são apresentados conceitos básicos da expansão assintótica topológica na solução de problemas de elasticidade linear em um domínio com pequenas perturbações.

#### 4.2.3 Analogia com modelos de remodelação de tecido ósseo

Essa metodologia de remodelação de tecido ósseo se baseia na ideia de que este tipo de tecido possui a capacidade de autoconstrução, ou seja, possui a capacidade de edificar estruturas muito resistentes que se remodelam e reparam a si próprias, conforme os estímulos mecânicos em que está exposta. Com isso, o módulo de rigidez altera significativamente de região para região, ao longo do domínio da estrutura analisada. Entre teorias que exploram a analogia com modelos de remodelação óssea para solucionar problemas de otimização topológica estão:

- Uma teoria que busca prever o comportamento do tecido ósseo de um fêmur humano é abordada por Bagge (2000). Esta emprega um algoritmo de otimização topológica, cuja função objetivo é minimizar a flexibilidade da estrutura para uma dada fração de volume e múltiplas condições de carregamento.
- Corso (2006) aborda a simulação numérica de problemas relacionados ao comportamento de tecidos ósseos. A metodologia é empregada em

conjunto com o MEF para obter a posição ótima dos implantes ortodônticos, buscando uma homogeneização da tensão mecânica no osso, na região onde é aplicado o implante. Por fim, é realizada uma comparação entre dois modelos de simulação do remodelamento ósseo, isotrópico e isotrópico transversal.

- Nowak (2006) cria um algoritmo que é baseado no fenômeno de adaptação óssea à estimulação mecânica. Utiliza o conceito de remodelação para resolver o problema de otimização da rede trabecular no osso e, posteriormente, discute a possibilidade de aplicar a metodologia do sistema em projetos mecânicos. Por fim, os resultados computacionais obtidos são comparados com o método de otimização topológica utilizando uma microestrutura do tipo SIMP.
- Coutinho (2014) avalia a osseointegração e resistência mecânica de amostras compostas de titânio grau II e nitretadas, utilizando a configuração de descarga em cátodo oco. Para mais, propõe uma formulação para determinar a topologia ótima estrutural do implante dentário estudado, se baseando no método de otimização topológica tridimensional combinado a um processo de refino h-adaptativo.

#### 4.2.4 Métodos baseados no conceito de microestruturas

Os métodos baseados em microestruturas são formulados por uma função de densidade do material que é posta com base na definição de um material compósito (BENDSOE; KIKUCHI, 1988; HASSANI; HINTON, 1999). Um material compósito pode ser interpretado como um meio poroso, sendo constituído por infinitos vazios, infinitesimais, distribuídos periodicamente ao longo do domínio. Os modelos de microestrutura podem ser subdivididos em três grupos: modelos de laminados tipo rank, modelos de micro células e modelos artificiais (COSTA JR., 2003).

Materiais laminados são um tipo de microestrutura que, ao serem adotados, geram uma forma relaxada do problema de otimização topológica. Cada uma das células da microestrutura periódica é formada a partir de camadas de diferentes materiais e vazios. Alguns trabalhos que empregam esse tipo de microestrutura são Bendsøe e Kikuchi (1988) e Allaire, Jouve e Maillot (2004).

O modelo de micro células com vazios internos apoia-se em inserir vazios internos em micro células da microestrutura, assim, permitindo que a densidade do material abranja todos os valores entre o zero (vazio) e um (material sólido). Por exemplo, uma das maneiras de visualizar o modelo é o uso de células quadradas com orifícios retangulares centralmente localizados (HASSANI; HINTON, 1998b).

Como principal exemplo de uma microestrutura artificial temos a microestrutura do tipo SIMP, a qual se baseia em um método numérico que utiliza a penalização de elementos com densidades relativas,  $0 < \rho < 1$ , para se chegar na solução discreta do problema. Essa ideia foi proposta por Bendsøe (1989) e a partir desse método foram desenvolvidos diversos trabalhos. Podem-se citar, por exemplo, Bendsøe e Sigmund (1999), Fancello e Pereira (2003), Rozvany (2009), Kang e Wang (2011), Bruggi e Duysinx (2012), Silva (2017), Li, Wu e Yvonnet (2021) e Xu *et al.* (2021).

O corrente trabalho aplica uma microestrutura do tipo SIMP, sendo escolhida dada sua simplicidade de utilização, sua vasta aplicabilidade e das inúmeras referências existentes as quais empregam esta técnica. Porém, a utilização de métodos baseados em microestruturas para problemas de otimização envolvendo a avaliação de funções através de métodos numéricos, podem gerar instabilidades numéricas e problemas, como por exemplo, a dependência de malha, o fenômeno do tabuleiro de xadrez e mínimos locais (SIGMUND; PETERSSON, 1998a; BENDSØE; SIGMUND, 2003). Para superar tais adversidades, diferentes abordagens são propostas.

Allaire e Kohn (1993) propõem em um problema de otimização que visa a minimização de flexibilidade e do peso de uma estrutura, tendo como restrição o limite de resistência seguindo a Lei de Hooke. Um termo penalizador de valores intermediários de densidade é adicionado junto ao funcional de energia, reduzindo, assim, regiões com microestrutura porosa, também chamadas de regiões de cinza.

Haber, Jog e Bendsøe (1996) resolvem um problema de otimização de minimização de flexibilidade de uma estrutura no qual utilizam o método do perímetro para regular a aparição de perfurações microscópicas (*chattering*), algo semelhante ao tabuleiro de xadrez. O método do perímetro se baseia em aplicar uma restrição ao perímetro da topologia permitindo, assim, o controle do número de furos no projeto ideal e estabelece uma escala de comprimento característica. Adicionalmente, a

abordagem proposta pelos autores conduz a soluções convergentes independente do refino da malha.

Sigmund (1997) em seu trabalho realiza o projeto de um mecanismo flexível utilizando OETC. Para proporcionar a independência de malha é proposto um filtro que modifica a sensibilidade de um dado elemento através de uma média ponderada considerando as sensibilidades em uma pequena vizinhança.

Petersson e Sigmund (1998b) acrescentam, ao clássico problema de minimização de flexibilidade com restrição no volume do material, restrições localizadas nos elementos do gradiente do campo de densidade. Tais restrições são controladas por um parâmetro de ponderação, o qual permite alterar a complexidade da topologia final e reduz a ocorrência do fenômeno de tabuleiro de xadrez, fornecendo uma solução independente de malha.

Pereira, Fancello e Barcellos (2004) têm como foco da otimização estrutural topológica um problema de minimização de massa com restrições locais sobre a tensão material, resolvidas numericamente via Método do Lagrangiano Aumentado. Com isso, os autores propõem uma modificação do problema de otimização topológica adicionando dois funcionais penalizadores ao funcional objetivo. Um deles penaliza as densidades intermediárias, regularizando o aparecimento de regiões de cinza, e o outro penaliza os gradientes de campo de densidade, regularizando a instabilidade de tabuleiro de xadrez. A utilização destes funcionais com uma análise de múltiplos carregamentos está presente em Fancello e Pereira (2003).

Essa mesma abordagem é utilizada neste trabalho, mas também há outros autores que a aplicam, como por exemplo Silva (2017) e Silva, Pereira e Torres (2020) na solução de um problema de minimização de flexibilidade sujeito a uma restrição sobre volume material com uma análise principal relacionada ao controle dos erros de discretização a partir do MEF h-adaptativo.

### **4.3 OETC aplicada em problemas de vibrações livres**

A solução de um problema de otimização estrutural topológica atrelado a um problema de vibrações livres será discutida ao longo deste trabalho. Nesta seção são apresentados os principais trabalhos relacionados com o tema objetivando esclarecer as semelhanças e diferenças do problema e metodologia aqui propostos, ou seja,

funções objetivos, regularizações do problema, restrições e métodos de otimização matemática.

Ma *et al.* (1995) mostra uma técnica de otimização topológica utilizando a concepção de OMD (*Optimal Material Distribution*) para problemas de vibrações livres de uma estrutura. Uma nova função objetivo correspondente à otimização de multivalores é sugerida a fim de melhorar a solução do problema de autovalor. Em sequência é aplicado um algoritmo de otimização para resolver esses problemas utilizando uma nova abordagem que se baseia na linearização generalizada convexa a partir de um parâmetro de deslocamento que corresponde ao multiplicador de Lagrange e o uso do método *dual*. Por fim, três exemplos de aplicações são expostos para viabilizar discutir as abordagens apresentadas.

Ma, Kikuchi e Cheng (1995) utilizam a técnica de otimização topológica com vazios em microescala juntamente ao método de homogeneização. Este método foi aplicado para resolver o problema de maximização da rigidez. O método de homogeneização é estendido para problemas com estruturas dispostas a vibrações forçadas. Um algoritmo de otimização estendido também é derivado para maximizar um conjunto de autovalores, bem como identificar a topologia ótima para autovalores especificados caracterizando a vibração forçada de uma estrutura.

No trabalho de Pedersen (2000) é abordado um problema de otimização topológica que visa ao aumento das frequências naturais. O problema não é formulado como um caso de reforço de uma estrutura existente, então há um problema relacionado aos modos localizados<sup>1</sup> em áreas de baixa densidade. O problema de otimização topológica é formulado usando o método SIMP.

Uma alternativa para evitar a aparição dos modos de vibração localizados em áreas de baixa densidade é a utilização de um método numérico de penalização das densidades. Tcherniak (2002) trata da otimização topológica de atuadores. O objetivo da otimização é maximizar a magnitude das frequências de vibração, em regime permanente, para uma dada frequência de excitação. A formulação do problema inclui um amortecedor viscoso externo que modela uma carga de trabalho na estrutura.

---

<sup>1</sup>Esse problema geralmente ocorre na otimização topológica utilizando a metodologia SIMP onde a frequência fundamental é o objetivo ou a restrição. Os automodos localizados ocorrem em regiões com o valor de densidade material baixo e estão associados aos valores das frequências próprias correspondentes (PEDERSEN, 2000).

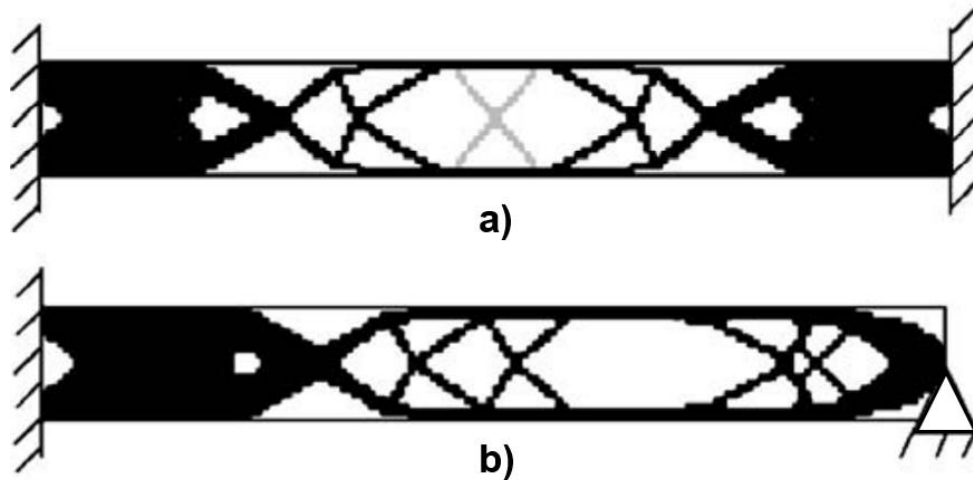
Maeda *et al.* (2006) propõem sobre a utilização de um novo método de otimização estrutural topológica para o projeto de estruturas vibratórias e ressonadores mecânicos. Esse método estende o método de homogeneização, no qual distribuições de material contínuas são assumidas usando uma função de interpolação contínua em cada nó sem quaisquer parâmetros de restrição adicionais e artificiais. Em seguida, respeita os requisitos mecânicos da estrutura vibratória como um todo e constrói funções objetivo que satisfazem as especificações do projeto. Com base nessas formulações, um algoritmo de otimização é construído usando programação linear sequencial. Por fim, apresenta diversos exemplos numéricos para confirmar que o método fornece estruturas vibratórias aplicáveis ao projeto de ressonadores e atuadores mecânicos.

Du e Olhoff (2007) apresentam problemas de OETC utilizando uma microestrutura artificial do tipo SIMP analisando estruturas com vibrações livres não amortecidas e visando a maximização de frequências fundamentais. Uma forma estendida do modelo SIMP para projetos com bi material também é mostrada. Os autores utilizam o Método das Assíntotas Móveis como método matemático de minimização (SVANBERG, 1987). Com o objetivo de prevenir o fenômeno do tabuleiro de xadrez e de dependência de malha, o filtro desenvolvido por Sigmund (1997) é aplicado às sensibilidades do funcional objetivo nas modelagens feitas. Particularmente, neste ponto cabe ressaltar que o corrente trabalho visa também uma análise comparativa com as topologias resultantes dos processos de OETC para um problema de vibrações livres, com os resultados obtidos por Du e Olhoff (2007), a partir da solução de dois problemas apresentados pelo artigo, a fim de validar a metodologia aqui utilizada.

As topologias resultantes obtidas pela solução dos problemas de OETC presentes em Du e Olhoff (2007) são visíveis na Figura 3. A primeira estrutura otimizada é uma viga bi-engastada Figura 3a, e a segunda estrutura é uma viga engastada na esquerda e apoiada na direita no nó central da aresta, Figura 3b.



**Figura 3 - Topologia ótima obtida de uma OETC de um problema de vibrações livres com restrição sobre volume material a) Viga bi-engastada; b) Viga engastada e com apoio**

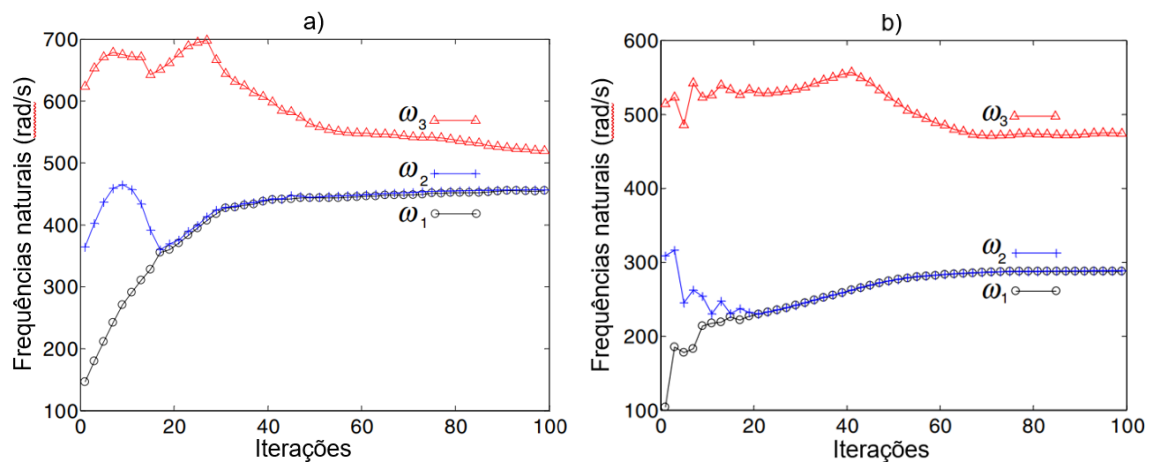


Fonte: Du e Olhoff (2007)

Ademais, um problema recorrente em problemas de OETC com análise de vibrações livres é o de Múltiplas Frequências Naturais<sup>2</sup> (MFN). Esse fenômeno pode ocorrer desde o início do processo de otimização, por exemplo, por causa de simetrias estruturais. Mas, uma frequência originalmente unimodal também pode se tornar múltipla durante o processo de otimização, como é possível observar na Figura 4, devido à coalescência com uma, ou mais, frequências naturais adjacentes. O problema de MFN é analisado em vários artigos, por exemplo, Masur (1984); Overton (1988); Seyranian (1994), Ma, Kikuchi e Cheng (1995) e Ma et. al (1995). No artigo de Ma et. al (1995) é apresentado um método, semelhante ao utilizado neste trabalho, chamado de autovalor médio onde o funcional objetivo é definido como uma média dos autovalores, neste caso, dado por uma soma dos inversos de várias frequências naturais de vibração consecutivas da estrutura.

<sup>2</sup> Este problema ocorre quando duas ou mais frequências naturais de vibração têm o mesmo valor. Isso implica em um valor de frequência que têm mais que um modo de vibrar (MA et al., 1995).

**Figura 4 – Históricos de convergência das frequências fundamentais em um problema de OETC visando a maximização da frequência fundamental. Retratação do fenômeno de Multiplicidade de Frequências Naturais. a) Viga bi-engastada; b) Viga engastada e com apoio**



Fonte: Adaptado de Du e Olhoff (2007)

Bogomolny (2009) em seu estudo mostra como as Aproximações Combinadas (*Combined Approximations*) podem ser usadas para reduzir o custo computacional na solução de problemas de otimização estrutural topológica de vibrações livres. A abordagem desenvolvida anteriormente baseia-se na integração de vários conceitos e métodos, incluindo fatoração de matrizes, expansão de séries e base reduzida. Neste artigo, o método das Aproximações Combinadas é usado para análise de autovalores repetidos. A análise de sensibilidade é desenvolvida levando em conta as imprecisões da aproximação. Com isso são resolvidos vários exemplos numéricos bidimensionais e tridimensionais que mostram como projetos de topologia ideais podem ser alcançados com redução de custo computacional.

## 5 REVISÃO CONCEITUAL

O corrente Capítulo tem o intuito de apresentar o equacionamento matemático utilizado para a definição do problema de OETC em vibrações livres não amortecidas.

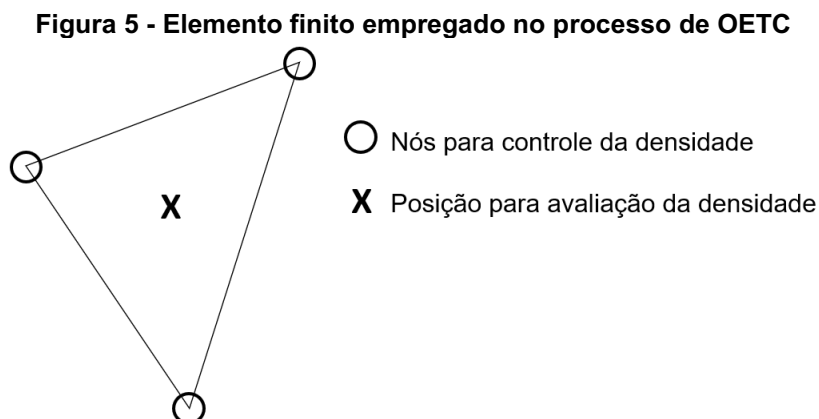
### 5.1 Definição do elemento finito e da descrição do campo de densidades

O elemento finito utilizado na solução aproximada do problema de OETC é do tipo triangular com deformações constantes (*Constant Strain Triangle – CST*), o qual é apresentado na Figura 5. Os nós do elemento CST são utilizados para o controle das densidades relativas. Para um e-ésimo elemento a função escalar que representa o campo de densidades,  $\rho_e(\mathbf{x})$ , é linear e dada por:

$$\rho_e(\mathbf{x}) = \psi_1(\mathbf{x})\rho_e^1 + \psi_2(\mathbf{x})\rho_e^2 + \psi_3(\mathbf{x})\rho_e^3 = \boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\rho}_e, \quad (4)$$

onde,  $\boldsymbol{\psi}$  é o vetor das funções de interpolação linear,  $\boldsymbol{\rho}_e$  é o vetor das densidades nodais que contém as j-ésimas componentes do elemento utilizado,  $\rho_e^j$  e  $\mathbf{x}$  representa o vetor que define as coordenadas da posição de  $\rho_e$ . Neste caso, é utilizado uma simplificação para a obtenção da matriz de rigidez,  $\mathbf{K}_e$ , e da matriz de massa,  $\mathbf{M}_e$ , as quais consideram o valor da densidade constante e avaliada no baricentro desse elemento como:

$$\rho_e = \sum_{i=1}^3 \rho_e^i / 3. \quad (5)$$



Fonte: Adaptado de Silva (2017)

## 5.2 Formulação para maximização da frequência fundamental

No presente trabalho é colocado em questão um problema de OETC tendo como objetivo maximizar a frequência fundamental com restrição no volume material utilizando a formulação de um problema de vibrações livres não amortecido solucionado via MEF. Ademais, é empregada uma microestrutura do tipo SIMP para distribuição das densidades (BENDSØE, 1989; BENDSØE; SIGMUND, 1999), a qual propõe uma variação de densidades relativas,  $0 < \rho < 1$ . De acordo com o modelo SIMP, a matriz de rigidez constitutiva em um dado elemento,  $\mathbf{D}_e$ , é expressa em termos das densidades relativas  $\rho_e$ , as quais possuem uma relação de potência  $q \geq 1$  (BENDSØE, 1999, p. 137):

$$\mathbf{D}_e(\rho_e) = \rho_e^q \mathbf{D}_e^*, \quad (6)$$

onde  $\mathbf{D}_e^*$  é a matriz de rigidez constitutiva de um elemento com material sólido considerando um estado plano de tensões. A potência  $q$  normalmente admite valores variando de 1 até 3 durante o processo de otimização (DU; OLHOFF, 2007). Por analogia com a equação (6), para uma formulação de uma estrutura em vibração livre, a matriz de rigidez e a matriz de massa do elemento podem ser descritas como:

$$\mathbf{K}_e(\rho_e) = \rho_e^q \mathbf{K}_e^* \quad e \quad \mathbf{M}_e(\rho_e) = \rho_e^p \mathbf{M}_e^*, \quad (7)$$

onde  $\mathbf{M}_e^*$  e  $\mathbf{K}_e^*$  representam, respectivamente, a matriz de massa e rigidez do elemento correspondente ao material sólido e  $p$  é a potência relacionada a matriz de massa.

A utilização do modelo SIMP para problemas de OETC em relação às frequências naturais pode ocasionar de modos localizados associados a valores das frequências. Como os modos localizados podem ocorrer em sub-regiões do domínio de análise com valores baixos da densidade do material,  $\rho_e \leq 0,1$ . Para eliminar esses modos localizados, podemos usar o método de Tcherniak (2002) que propõe uma alteração no valor de  $p$  em sub-regiões com baixa densidade de material. Assim, com uma ligeira modificação para evitar a singularidade numérica, a matriz massa com o modelo SIMP segue:

$$\mathbf{M}_e(\rho_e) = \begin{cases} \rho_e \mathbf{M}_e^*, & \rho_e > 0,1 \\ \rho_e^p \mathbf{M}_e^*, & \rho_e \leq 0,1 \end{cases} \quad (8)$$

Assim, as matrizes elementares de rigidez,  $\mathbf{K}_e^*$ , e de massa,  $\mathbf{M}_e^*$ , podem ser escritas como:

$$\mathbf{K}_e^* = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D}_e^* \mathbf{B}_e d\Omega_e \quad e \quad \mathbf{M}_e^* = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e d\Omega_e, \quad (9)$$

onde  $\mathbf{B}_e$  e  $\mathbf{N}_e$  representam a matriz de derivadas das funções de forma e a matriz das funções de forma, respectivamente. A densidade em análise é  $\rho_e$ , avaliada conforme a equação (5). O domínio de análise de um elemento é definido como  $\Omega_e$ .

Com a definição da penalização do modelo SIMP, as matrizes globais de rigidez  $\mathbf{K}$  e de massa  $\mathbf{M}$ , considerando uma análise discretizada baseada no MEF, são calculadas por:

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{K}_e(\rho_e) \quad e \quad \mathbf{M} = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{M}_e(\rho_e), \quad (10)$$

onde  $N_e$  denota o número total de elementos finitos do domínio do problema e  $\sum_{e=1}^{N_e}(\cdot)$  representa o processo de superposição clássica do MEF.

Ademais, o MEF é empregado para resolver o problema de vibração livre não amortecida<sup>3</sup>, o qual pode ser escrito como um problema de autovalores e autovetores:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K} - \lambda_n \mathbf{M}) \boldsymbol{\phi}_n &= 0, \\ \text{Sujeito a: } \{\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n &= 1^4, \end{aligned} \quad (11)$$

sendo  $\boldsymbol{\phi}_n$  o n-ésimo autovetor que representa o modo de vibração,  $\lambda_n$  o n-ésimo autovalor associado a n-ésima frequência natural de vibração  $\omega_n$ .

<sup>3</sup> A formulação de um problema de vibrações livres não amortecidas surge a partir de uma simplificação da equação diferencial do movimento. Uma descrição mais detalhada dessa simplificação está presente em Soriano (2009).

<sup>4</sup> Para facilitar o cálculo da análise de sensibilidade dos autovalores é comum utilizar-se a M-ortonormalização da matriz de massa.

Um problema de otimização topológica para maximização de frequências fundamentais de estruturas elásticas vibratórias, desprezando o amortecimento e considerando uma restrição sobre o volume material pode ser formulado como (DIAZ; KIKUCHI, 1992; DU; OLHOFF, 2007; BOGOMOLNY, 2009):

$$\begin{aligned} \min_{\rho \in L^\infty(\Omega)} \{ & -(\mu_1 \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2) = -(\mu_1 \omega_1^2 + \mu_2 \omega_2^2) \}, \\ \text{Sujeito a: } \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{K} - \lambda_n \mathbf{M}) \boldsymbol{\phi}_n = 0, \\ \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n = 1, \\ h_V(\rho) = V(\rho) - \alpha V_0 = 0, \\ 0 < \rho_{min} \leq \rho(\mathbf{x}) \leq 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \end{array} \right. & \quad (12) \end{aligned}$$

onde  $\Omega$  é o domínio do problema em análise. A restrição de igualdade sobre o volume da estrutura,  $h_V(\rho)$ , é dada por uma função que depende de uma parcela  $\alpha$  e do volume inicial  $V_0$ . A fim de controlar singularidades numéricas assume-se um valor mínimo para densidade  $\rho_{min}$  (PEREIRA; FANCELLO; BARCELLOS, 2004).

Ademais, para evitar a MFN a função a ser minimizada é calculada através da média ponderada dos dois primeiros autovalores, uma alternativa semelhante ao método do autovalor médio (MA et. al, 1995). Sendo  $\mu_1$  e  $\mu_2$  os parâmetros de ponderação aplicados ao primeiro e segundo autovalores, respectivamente. Vale ressaltar que  $\mu_1 > \mu_2$  e  $\mu_1 + \mu_2 = 1$ .

A solução obtida pela equação (11) pode apresentar uma topologia com regiões com densidades intermediárias,  $0 < \rho < 1$ , também nomeadas como regiões de cinza, ou regiões com altos gradientes de densidades, ocasionando o problema de tabuleiro de xadrez (SIGMUND; PETERSSON, 1998a). Para controlar a existência dessas duas adversidades aplica-se à função objetivo dois funcionais penalizadores, sendo estes apresentados da seguinte forma:

$$\min_{\rho \in L^\infty(\Omega)} [F(\rho) = -(\mu_1 \lambda_1(\rho) + \mu_2 \lambda_2(\rho)) + r_m F_m(\rho) + r_p F_p(\rho)]. \quad (13)$$

Neste caso,  $F_m(\rho)$  é o funcional que penaliza os valores de densidades intermediárias,  $r_m$  é o parâmetro que controla a influência de  $F_m$  na função objetivo (ALLAIRE; KOHN, 1993; ALLAIRE; FRANCFORT, 1993; PEREIRA, 2001; PEREIRA; FANCELLO; BARCELLOS, 2004). A representação matemática deste funcional é uma integração ao longo do domínio:

$$F_m(\rho) = \int_{\Omega} \rho(1 - \rho)d\Omega. \quad (14)$$

Ademais,  $F_\rho(\rho)$  é o funcional que penaliza os gradientes de densidades, visando a mitigação ou inibição do fenômeno de tabuleiro de xadrez (PEREIRA, 2001; Fancello; Pereira, 2003; PEREIRA; FANCELLO; BARCELLOS, 2004) e  $r_\rho$  é o parâmetro utilizado para controlar a influência de  $F_\rho$  na função objetivo. Matematicamente este funcional pode ser expresso como:

$$F_\rho(\rho) = \int_{\Omega} (\nabla\rho)^T(\nabla\rho)d\Omega. \quad (15)$$

No presente trabalho utiliza-se o Método do Lagrangiano Aumentado para resolver o problema de otimização topológica. A teoria respectiva a este método pode ser vista em diversos textos por exemplo em Bertsekas (1996) e Arora (2017). Este se resume na inserção de uma penalização externa quadrática sobre o volume do material,  $r_k$ , e um multiplicador de Lagrange,  $\eta_k$ . Assim a restrição sobre o volume do material é inserida diretamente na função objetivo e o problema de otimização torna-se uma sequência de subproblemas com somente restrições laterais sobre as variáveis de projeto, ou seja:

$$\begin{aligned} \min_{\rho \in L^\infty(\Omega)} [\bar{L}_k(\rho, \eta_k, r_k) = -(\mu_1\lambda_1 + \mu_2\lambda_2) + r_m F_m(\rho) + r_\rho F_\rho(\rho) + \eta_k h_V(\rho) + r_k h_v^2(\rho)], \\ \text{Sujeito a: } \begin{cases} (\mathbf{K} - \lambda_n \mathbf{M})\boldsymbol{\phi}_n = 0, \\ \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n = 1, \\ 0 < \rho_{min} \leq \rho(\mathbf{x}) \leq 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

onde  $\bar{L}_k(\rho, \eta_k, r_k)$  é o funcional Lagrangiano Aumentado. O problema de otimização da equação (16) é resolvido em um processo iterativo (BERTSEKAS, 1996). Após a convergência de um subproblema, os parâmetros  $\eta_k$  e  $r_k$  são atualizados na forma (BERTSEKAS, 1996; SILVA, 2017):

$$\begin{aligned} \eta_{k+1} &= \eta_k + 2r_k h_V(\rho), \\ r_{k+1} &= \min\{zr_k; r_k^{max}\}, \text{ com } z > 1 \text{ e } r_k > 0, \end{aligned} \quad (17)$$

onde  $z$  define a taxa de aumento de  $r_k$  e  $r_k^{max}$  é o valor limite para  $r_k$ .

### 5.3 Análise de sensibilidade do funcional Lagrangiano Aumentado

A análise de sensibilidade do autovalor em relação às variáveis de projeto descritas nesta seção também está presente explicitamente no trabalho de Du e Olhoff (2007).

Considerando inicialmente uma  $n$ -ésima frequência natural  $\omega_n$  do tipo unimodal, ou seja,  $\omega_{n-1} < \omega_n < \omega_{n+1}$ , então o autovetor correspondente  $\boldsymbol{\phi}_n$  será único e com derivada em relação às variáveis de projeto. Além disso, por motivo de simplificação, para as análises de sensibilidades, o valor da densidade é considerado constante e esta é avaliada no baricentro do elemento em análise, equação (5). Assim a sensibilidade é derivada, inicialmente, em relação as densidades elementares  $\rho_e$ ,  $e = 1, \dots, N_e$ . Para determinar a sensibilidade  $(\lambda_n)'_{\rho_e}$  do autovalor  $\lambda_n = \omega_n^2$  em relação a uma densidade particular  $\rho_e$ , diferencia-se a equação (11) em relação a  $\rho_e$ :

$$(\mathbf{K} - \lambda_n \mathbf{M})(\boldsymbol{\phi}_n)'_{\rho_e} + ((\mathbf{K})'_{\rho_e} - \lambda_n (\mathbf{M})'_{\rho_e} - (\lambda_n)'_{\rho_e} \mathbf{M})\boldsymbol{\phi}_n = 0, \quad (18)$$

onde  $(\cdot)'_{\rho_e} = \partial(\cdot)/\partial\rho_e$ . Multiplicando a equação (18) por  $\boldsymbol{\phi}_n^T$ , usando a equação (11) e a M-ortonormalização em relação a  $\boldsymbol{\phi}_n$  tem-se (HAFTKA; GURDAL; KAMAT, 1990):

$$(\lambda_n)'_{\rho_e} = \boldsymbol{\phi}_n^T ((\mathbf{K})'_{\rho_e} - \lambda_n (\mathbf{M})'_{\rho_e}) \boldsymbol{\phi}_n. \quad (19)$$

As derivadas das matrizes  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$  podem ser calculadas considerando o modelo SIMP na equação (10). Portanto a sensibilidade do autovalor  $\lambda_n$  em relação à densidade  $\rho_e$  se torna:

$$(\lambda_n)'_{\rho_e} = \boldsymbol{\phi}_n^T (q\rho_e^{q-1} \mathbf{K}_e^* - p\lambda_n \rho_e^{p-1} \mathbf{M}_e^*) \boldsymbol{\phi}_n, \quad (20)$$

sendo  $\mathbf{K}_e^*$  e  $\mathbf{M}_e^*$  definidas na equação (9).

Após o cálculo da sensibilidade dos autovalores o valor é atribuído para as  $j$ -ésimas variáveis de projeto nodais pertencentes ao elemento em análise seguindo:

$$(\lambda_n)'_{\rho_e^j} = (\lambda_n)'_{\rho_e} / 3. \quad (21)$$



O cálculo realizado na equação (21) é efetuado em todos os elementos do domínio e os valores de  $(\lambda_n)'_{\rho_e}$  são sobrepostos, assim, obtendo um vetor que contém a sensibilidade do n-ésimo autovalor em relação a todas as variáveis de projeto. Como é utilizada a média ponderada dos autovalores para evitar a multiplicidade das frequências, aplica-se o conceito na análise de sensibilidade dos autovalores. Assim para os n-ésimos autovalores e autovetores são atribuídos 1 e 2. Com isso, a equação (20) é complementada:

$$\begin{aligned} \mu_1(\lambda_1)'_{\rho_e} + \mu_2(\lambda_2)'_{\rho_e} = & \mu_1 \boldsymbol{\phi}_1^T (q\rho_e^{q-1} \mathbf{K}_e^* - p\lambda_1\rho_e^{p-1} \mathbf{M}_e^*) \boldsymbol{\phi}_1 + \dots \\ & \dots \mu_2 \boldsymbol{\phi}_2^T (q\rho_e^{q-1} \mathbf{K}_e^* - p\lambda_2\rho_e^{p-1} \mathbf{M}_e^*) \boldsymbol{\phi}_2. \end{aligned} \quad (22)$$

Na sequência procede-se com a análise de sensibilidade em relação as variáveis de projeto dos demais termos que compõem o funcional Lagrangiano Aumentado, equação (16). A discretização e formulação da análise de sensibilidade de cada um dos termos é apresentada de forma explícita na tese de Silva (2017).

## 6 METODOLOGIA

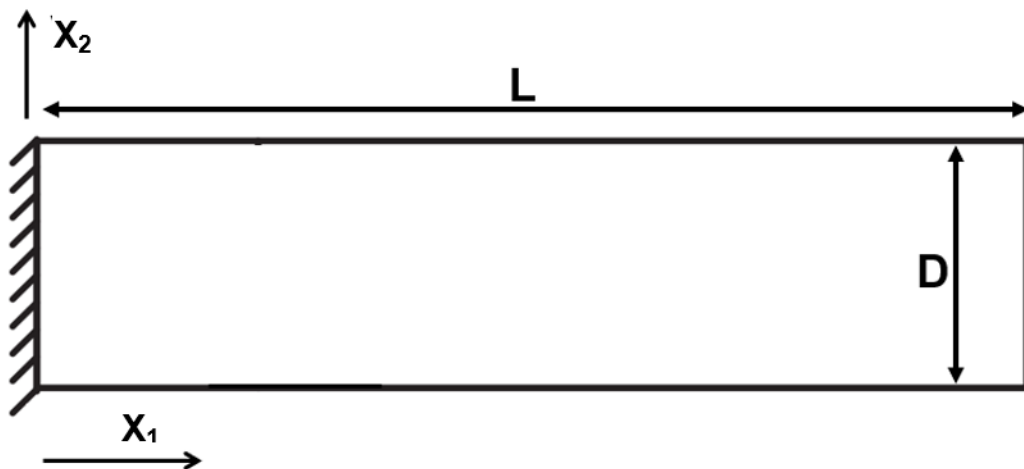
Este Capítulo tem o propósito de apresentar e desenvolver todos os procedimentos necessários para a realização dos objetivos propostos. Inicialmente será mostrado as etapas e experimentos numéricos para a validação do MEF e posteriormente o desenvolvimento visando a análise e discussão do problema de OETC.

### 6.1 Validação do MEF para um problema de vibrações livres

Este trabalho tem como objetivo a solução de um problema regularizado de OETC via SIMP, com o objetivo de maximizar a frequência fundamental de uma estrutura considerando uma restrição sobre o volume material. Porém, para tal é necessário encontrar as frequências naturais da estrutura. Com isso, o entendimento do MEF aplicado a problemas de vibrações livres é indispensável. Para validar a aplicação do MEF é realizado um experimento numérico presente na literatura.

O problema utilizado é o abordado por Yang, Xu e Zheng (2016), sendo esse uma viga em balanço bidimensional engastada na extremidade esquerda com comprimento  $L$  e altura  $D$  como mostrado na Figura 6:

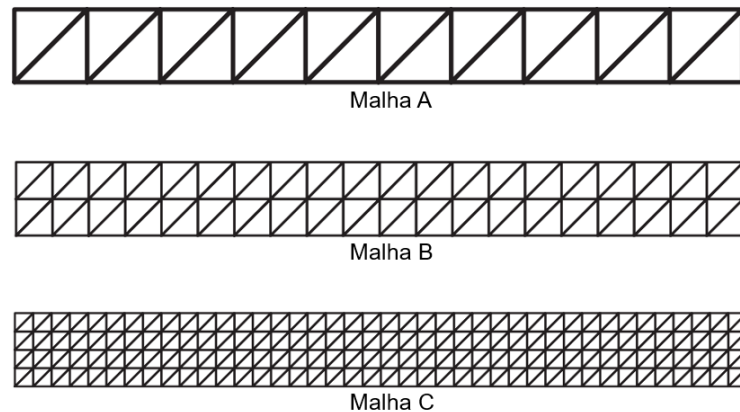
Figura 6 - Modelo mecânico de uma viga em balanço



Fonte: Adaptado de Yang, Xu e Zheng (2016)

O objetivo é avaliar a implementação computacional de uma formulação de vibrações livres desejando encontrar as cinco primeiras frequências e modos de vibrar da estrutura. Para isso, são utilizadas três malhas com diferentes discretizações (malhas A, B e C - Figura 7) compostas por elementos do tipo CST. Todos os parâmetros necessários para implementação numérica do problema são apresentados na Tabela 1:

**Figura 7 - Discretização das malhas com elementos do tipo CST**



Fonte: Adaptado de Yang, Xu e Zheng (2016)

**Tabela 1 - Planejamento numérico para validação do MEF aplicado à problemas de vibrações livres**

<b>Categoria</b>	<b>Parâmetros</b>	<b>Símbolo</b>	<b>Unidade</b>	<b>Valores</b>
Propriedades mecânicas	Coefficiente de Poisson	$\nu$	-	0,3
	Densidade material	$\rho_{material}$	$kgfs^2/mm^4$	$8 \times 10^{-10}$
	Elasticidade longitudinal	E	$kgf/mm^2$	$2,1 \times 10^4$
Parâmetros geométricos	Altura	D	mm	10
	Comprimento	L	mm	100
	Espessura	t	mm	1
Discretização do domínio	Malha A			[10; 2] (20 elementos)
	Malha B			[20; 4] (80 elementos)
	Malha C			[40; 8] (320 elementos)

Fonte: Adaptado de Yang, Xu e Zheng (2016)

Todo o processo numérico para obter as cinco primeiras frequências de vibração e os cinco primeiros modos de vibrar da estrutura, neste caso associado ao problema de autovalor e autovetor expresso na equação (11) considerando propriedades mecânicas constantes no material, é implementado através de um código no programa Matlab®. Para validar a aplicação do método é realizada uma comparação com os resultados apresentados por Yang, Xu e Zheng (2016).

Após a validação do código de MEF para vibrações livres, inicia-se o desenvolvimento e implementação da metodologia para solução do problema de OETC (equação (16)).

## **6.2 Aspectos de implementação computacional e análise do problema de OETC associado ao problema de vibrações livres não amortecidas**

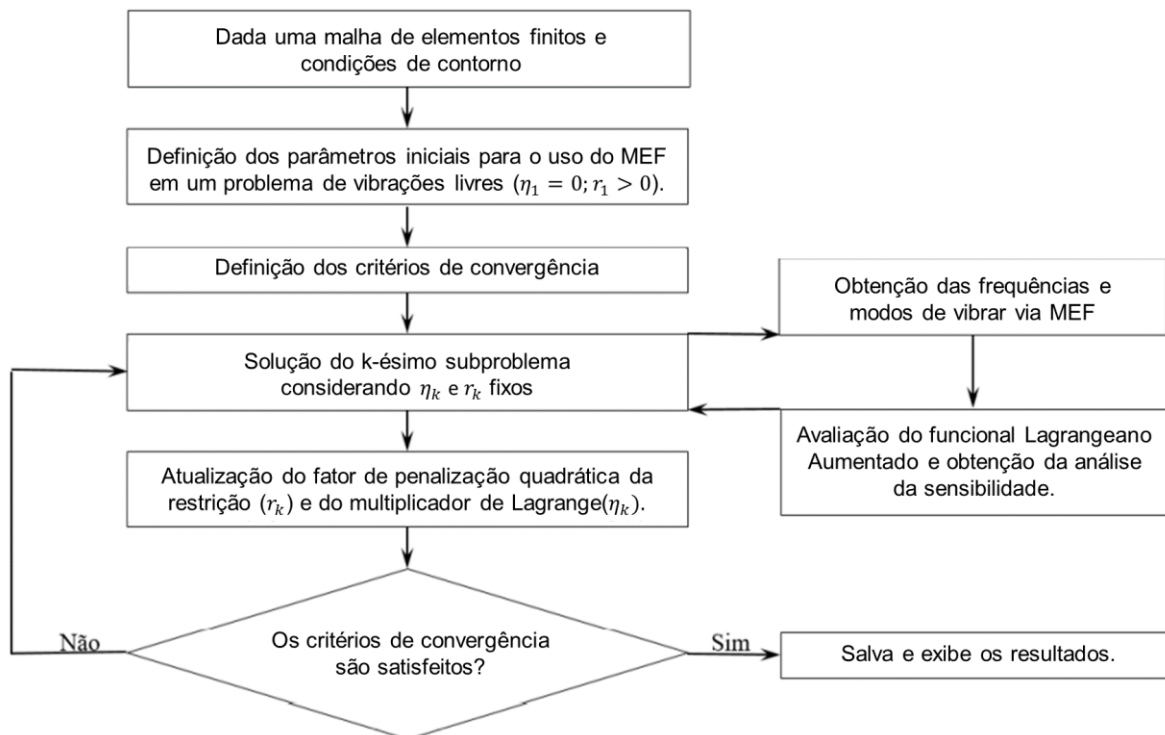
O objetivo principal deste trabalho é desenvolver uma metodologia para solucionar um problema de OETC visando maximizar a frequência fundamental de uma estrutura com restrição sobre o volume material. A formulação proposta é apresentada no Capítulo 5. Para validação desta metodologia, são utilizados dois problemas presentes no trabalho de Du e Olhoff (2007).

Fundamentalmente, essa metodologia utiliza uma microestrutura do tipo SIMP para a avaliação das matrizes de rigidez e massa conforme equação (7). Ademais, são adicionados a função objetivo dois funcionais penalizadores, um de densidades intermediárias, equação (14), e um de gradientes de densidades, equação (15), com o objetivo de solucionar algumas adversidades provenientes da solução numérica do problema de OETC via SIMP. Assim, busca-se evitar ou mitigar topologias resultantes com regiões formadas por padrões de tabuleiro de xadrez, regiões de cinza e soluções que apresentam dependência de malha.

O procedimento numérico para a determinação da solução ótima é baseado no Método do Lagrangiano Aumentado (equação (16)) (BERTSEKAS, 1999). O método do Gradiente Conjugado é utilizado para obter a direção de busca e o método da Seção Áurea define o passo ao longo desta direção, onde a definição desses dois métodos é encontrada em Arora (2017).

O fluxograma apresentado na Figura 8 mostra as principais etapas para obtenção da solução do problema de OETC. Além disso, o parâmetro de penalização externa quadrática inicial,  $r_1$ , é definido como 4 vezes o valor da média ponderada das duas primeiras frequências naturais, satisfazendo o volume inicial prescrito em um campo uniformemente distribuído. O valor máximo que este parâmetro pode assumir é definido como  $r_{max} = 100r_1$ . Ademais, é considerada a convergência, tanto do  $k$ -ésimo subproblema quanto do *loop* externo, que é responsável pela atualização do fator de penalização  $r_k$  e do multiplicador de Lagrange  $\eta_k$ , quando: (i)  $\|\rho_k - \rho_{k-1}\|/\sqrt{nv\bar{p}} < 10^{-2}$ , (ii)  $|\bar{L}_k - \bar{L}_{k-1}|/|\bar{L}_{k-1}| < 10^{-2}$  e (iii)  $r_k = r_{max}$ . Neste caso,  $nv\bar{p}$  representa o número de variáveis de projeto.

**Figura 8 - Procedimento para solução da OETC em um problema de vibrações livres não amortecidas com restrição sobre o volume material**

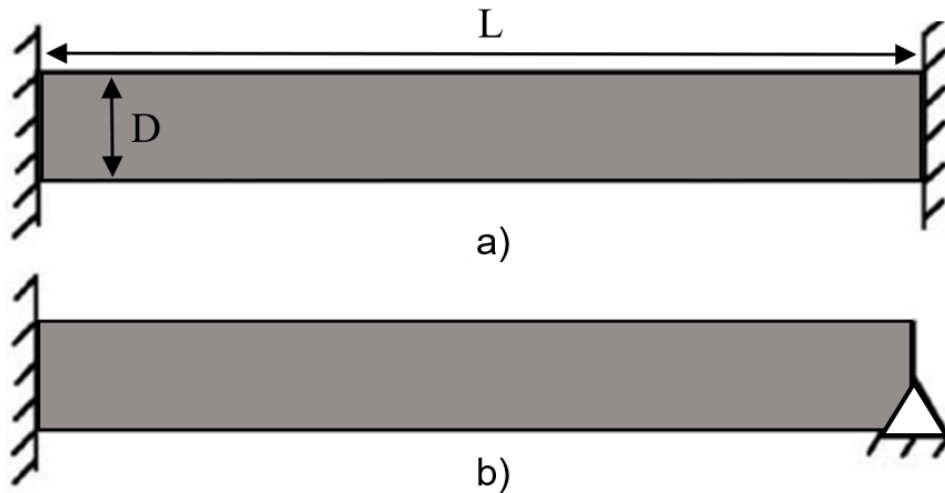


Fonte: Adaptado de Silva (2017)

Dentre os dois problemas de OETC propostos a primeira estrutura é uma viga bi-engastada (Figura 9a), a qual é caracterizada por possuir simetria em relação aos eixos centroidais vertical e horizontal. Tal característica de simetria permite validar aspectos de implementação computacional da metodologia proposta. A segunda estrutura a ser otimizada é uma viga engastada à esquerda e com um apoio à direita,

(Figura 9b), ou seja, um problema com assimetria em relação ao eixo vertical centroidal.

Figura 9 - Modelo Mecânico: a) Viga bi-engastada; b) Viga engastada e com apoio



Fonte: Adaptado de Du e Olhoff (2007)

A Tabela 2 apresenta as propriedades mecânicas e os parâmetros geométricos e de otimização considerados para ambos os problemas.

Tabela 2 - Planejamento Numérico, OETC vibrações livres

Categoria	Parâmetros	Símbolo	Unidade	Valores
Propriedades mecânicas	Coefficiente de Poisson	$\nu$	-	0,3
	Densidade material	$\rho_{material}$	$kg/m^3$	1
	Elasticidade longitudinal	E	Pa	$1 \times 10^7$
Parâmetros geométricos	Altura	D	m	1
	Comprimento	L	m	8
	Espessura	t	m	1
Parâmetros de otimização	Parcela da restrição de volume	$\alpha$	-	0,5
	Densidade mínima	$\rho_{min}$	$kg/m^3$	0,01
	Penalização matriz de rigidez	q	-	3
	Penalização matriz de massa	p	-	6

Fonte: Adaptado de Du e Olhoff (2007)

Inicialmente, para cada problema, um gráfico de convergência dos valores das duas primeiras frequências é utilizado para definir a quantidade de elementos da malha 1 (malha convergente) do problema de otimização. Após atingir a convergência,

equação (23), a malha 1 é selecionada como a malha subsequente devido à complexidade inserida quando se tem uma microestrutura com propriedades variando ao longo do domínio. O domínio dos problemas serão discretizados com elementos do tipo CST, Figura 5 presente no Capítulo 5.1, seguindo um padrão conhecido como criss-cross. Ademais, as malhas são uniformes e definidas mantendo constante a razão de aspecto dos elementos.

$$Erro_{\omega_{nm}} = \frac{|\omega_{nm} - \omega_{n(m-1)}|}{|\omega_{(m-1)}|} < 0,5 \times 10^{-2}. \quad (23)$$

onde  $\omega_{nm}$  é a frequência natural com  $m$  representando a malha com que está sendo calculada a frequência natural de vibração.

Após isso, para que os problemas sejam analisados qualitativamente são apresentadas as topologias ótimas para os 5 diferentes pares de parâmetros penalizadores, definidos empiricamente e presentes na Tabela 3, utilizando a malha 1. Em sequência, são apresentadas duas topologias ótimas, para o 3° e 4° pares de parâmetros utilizando uma malha refinada. Por fim, é mostrado o modo de vibrar fundamental da topologia ótima considerando a solução mais adequada em termos de mitigação das instabilidades e adversidades frequentemente encontradas em problemas de OETC.

**Tabela 3 – Parâmetros penalizadores, OETC vibrações livres**

Problema	Pares	1°	2°	3°	4°	5°
Viga bi-engastada	$r_m$	0	20000	20000	20000	20000
	$r_\rho$	0	0	20	120	1000
Viga engastada-apoiada	$r_m$	0	10000	10000	10000	1000
	$r_\rho$	0	0	10	120	500

**Fonte: Autoria própria (2022)**

Em vista de uma análise quantitativa, para os dois problemas, é apresentado a convergência, ao longo das iterações, das 3 primeiras frequências de vibração utilizando o par de parâmetros que proporciona a solução considerada mais adequada na regularização das adversidades. Em sequência, considerando apenas a viga bi-engastada, são apresentados gráficos de convergência, unindo os dados obtidos a

partir das simulações realizadas com os 5 pares de parâmetros. Dentre esses, a convergência dos funcionais de densidades intermediárias, de gradiente de densidades, Lagrangiano Aumentado, das frequências fundamentais e da restrição de volume material. Em todos os gráficos é considerada a malha 1.

Quanto a viga engastada-apoiada, são expostos, para a análise quantitativa, um gráfico de convergência, utilizando o 3° par de parâmetros penalizadores, contendo a média ponderada dos autovalores naturais e os funcionais de densidades intermediárias, de gradiente de densidades e Lagrangiano Aumentado. Ademais, são apresentados histogramas mostrando a quantidade de variáveis de projeto ao longo de 10 faixas de densidades relativas entre 0 e 1. Além disso, a convergência da restrição de volume é exibida. Tanto os histogramas quanto a restrição de volume são exibidos para os 5 pares de parâmetros penalizadores.



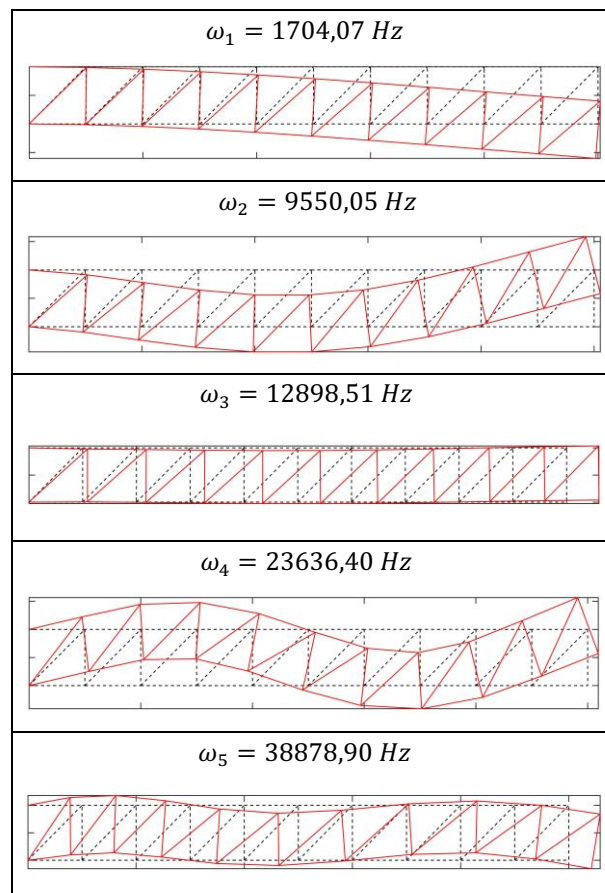
## 7 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este Capítulo apresenta os resultados e discussões referentes da metodologia apresentada no Capítulo 6.

### 7.1 Validação do MEF: Análise de vibrações livres para uma viga em balanço

Inicialmente considera-se que os objetivos e experimentos numéricos do problema (Figura 6, Figura 7 e Tabela 1) já estão apresentados anteriormente. Assim, dada uma implementação computacional realizada via *software* Matlab®, os resultados obtidos, para a malha A (20 elementos), estão apresentados a seguir na Figura 10:

Figura 10 - Cinco primeiras frequências naturais e modos de vibrar da estrutura para a malha A

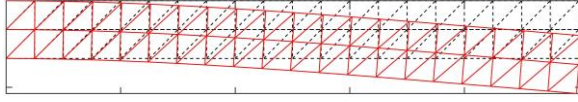
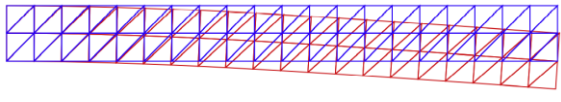
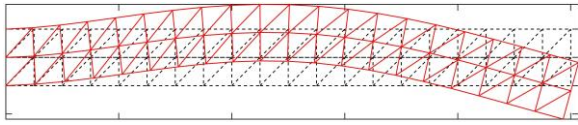
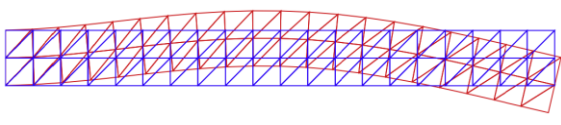

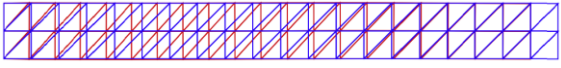
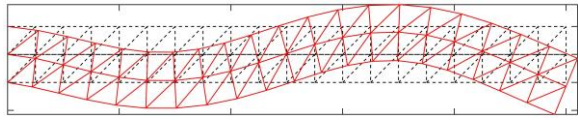
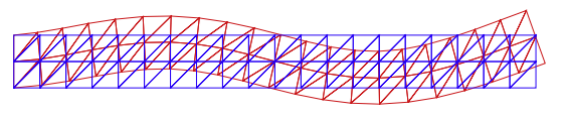
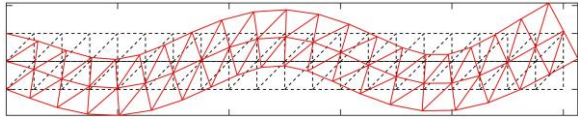
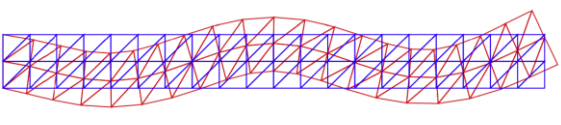


Fonte: Autoria própria (2022)

O problema também é resolvido para uma malha B (80 elementos). As frequências e os modos de vibrar obtidos são apresentados na Figura 11.

Particularmente para a malha B os modos de vibrar são comparados com os obtidos pelo trabalho de Yang, Xu e Zheng (2016):

**Figura 11 - Cinco primeiras frequências naturais e modos de vibrar da estrutura para malha B: comparação com Yang, Xu e Zheng (2016)**

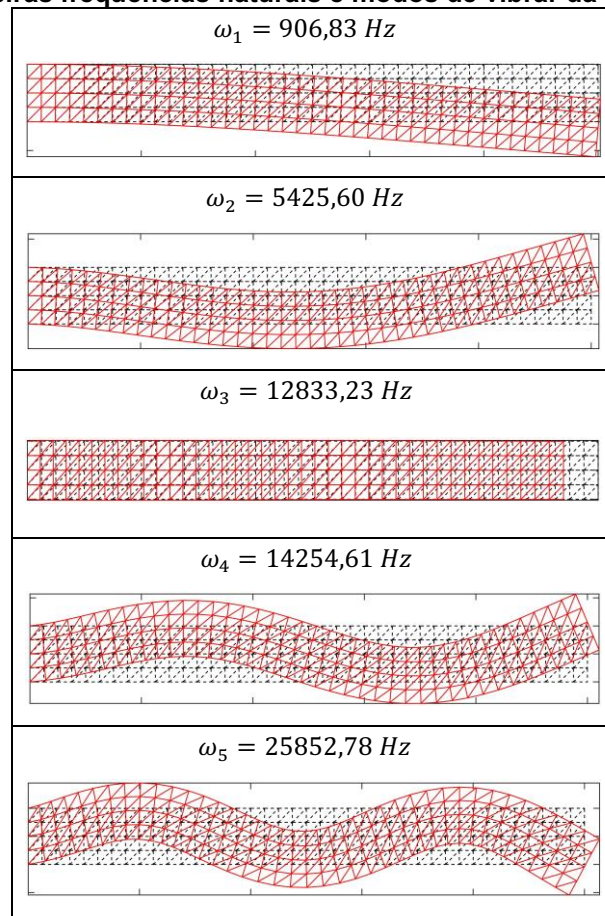
Presente trabalho	Yang, Xu e Zheng (2016)
$\omega_1 = 1119,29 \text{ Hz}$ 	$\omega_1 = 1119 \text{ Hz}$ 
$\omega_2 = 6617,08 \text{ Hz}$ 	$\omega_2 = 6617 \text{ Hz}$ 
$\omega_3 = 12849,69 \text{ Hz}$ 	$\omega_3 = 12850 \text{ Hz}$ 
$\omega_4 = 17162,01 \text{ Hz}$ 	$\omega_4 = 17162 \text{ Hz}$ 
$\omega_5 = 30745,07 \text{ Hz}$ 	$\omega_5 = 30745 \text{ Hz}$ 

Fonte: Autoria própria (2022)

Igualmente, na comparação qualitativa da Figura 11, se observa os mesmos cinco modos de vibrar da estrutura. Particularmente, o terceiro e quarto modos de vibrar aparentemente estão diferentes. Isso ocorre pois os autovetores associados aos respectivos autovalores estão sobre um subespaço invariante, o que garante que estes tenham sempre a mesma direção (LIMA, 1996), contudo, podem apresentar o sentido contrário. Assim, se mostra que o modo de vibrar é equivalente ao obtido por Yang, Xu e Zheng (2016).

Na sequência, na Figura 12 é apresentada a resolução do problema utilizando a malha C (320 elementos).

**Figura 12 - Cinco primeiras frequências naturais e modos de vibrar da estrutura para a malha C**



**Fonte: Autoria própria (2022)**

Neste ponto, é realizada uma comparação quantitativa, com Yang, Xu e Zheng (2016), das cinco primeiras frequências naturais obtidas, visando a validação do MEF em um problema de vibrações livres. Essa comparação quantitativa é apresentada na Tabela 4:

**Tabela 4 - Comparação das cinco primeiras frequências naturais de vibração**

$\omega_n$	Malha A (10x2)		Malha B (20x4)		Malha C (40x8)	
	Yang, Xu e Zheng (2016) <sup>5</sup>	Presente trabalho	Yang, Xu e Zheng (2016)	Presente trabalho	Yang, Xu e Zheng (2016)	Presente trabalho
1°	1704 Hz	1704,07 Hz	1119 Hz	1119,29 Hz	907 Hz	906,83 Hz
2°	9550 Hz	9550,05 Hz	6617 Hz	6617,08 Hz	5426 Hz	5425,60 Hz
3°	12899 Hz	12898,51 Hz	12850 Hz	12849,69 Hz	12833 Hz	12833,23 Hz
4°	23636 Hz	23636,40 Hz	17162 Hz	17162,01 Hz	14255 Hz	14254,61 Hz
5°	38879 Hz	38878,90 Hz	30745 Hz	30745,07 Hz	25853 Hz	25852,78 Hz

**Fonte: Autoria própria (2022)**

<sup>5</sup> Yang, Xu e Zheng (2016) optaram por arredondar os valores das frequências naturais calculadas, porém no corrente trabalho utiliza-se duas casas decimais na apresentação dos resultados.

Com isso, conforme apresentado na Tabela 4, é possível notar a igualdade entre os dados obtidos neste trabalho e os apresentados por Yang, Xu e Zheng (2016). Adicionalmente, observando o trabalho de Yang, Xu e Zheng (2016), este expõe um valor dito como valor de referência para as frequências naturais calculadas. Este valor de referência da frequência fundamental é igual a  $\omega_1 = 823 \text{ Hz}$ <sup>6</sup>. Nota-se que conforme ocorre o refino da malha o valor calculado utilizando o elemento CST se aproxima deste valor de referência.

Por fim, considerada as comparações e análises realizadas com os resultados obtidos por Yang, Xu e Zheng (2016), a implementação do MEF para vibrações livres aplicada a este trabalho se firma válida.

## **7.2 OETC: Maximização da frequência fundamental com restrição sobre o volume material**

Em sequência são exibidos os resultados para os problemas estruturais de viga bi-engastada e viga engastada-apoiada quanto a solução de OETC associada ao problema de vibrações livres não amortecidas. Em conjunto, são apresentadas as discussões qualitativas e quantitativas de tais resultados, conforme proposto no Capítulo 6.

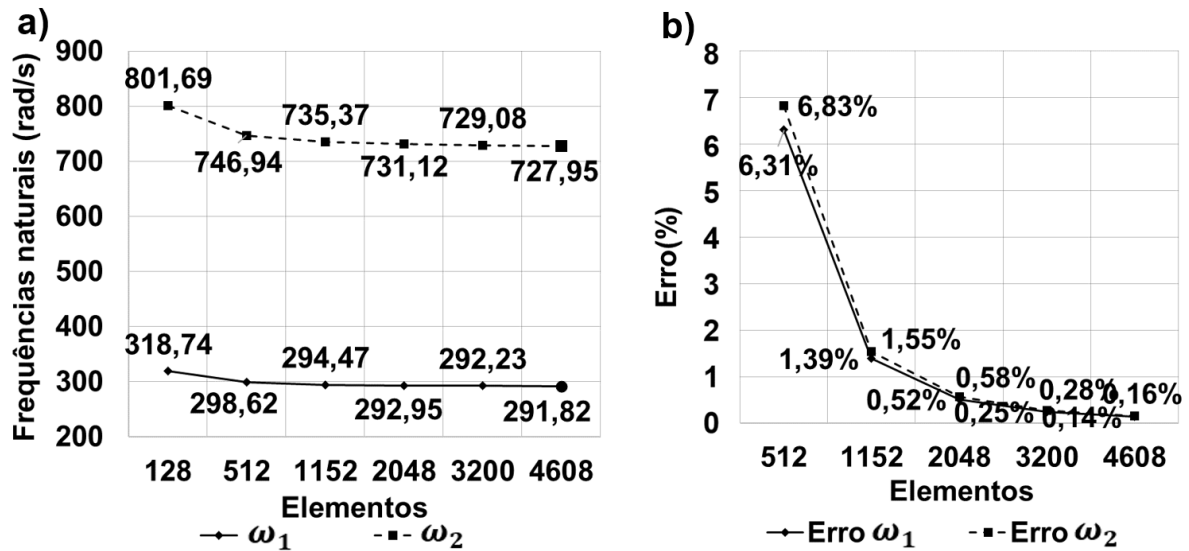
### **7.2.1 Viga bi-engastada**

Inicialmente, nota-se no histórico de convergência das duas primeiras frequências naturais ao longo das diferentes malhas propostas respeitando a razão de aspecto do mesmo domínio, Figura 13a, em conjunto com os erros avaliados conforme a equação (23), Figura 13b. Com 3200 elementos se atinge um erro menor que 0,5% em ambas as frequências avaliadas, assim, sendo selecionada a próxima malha (4608 elementos) para referência nos problemas de OETC associados ao caso da viga bi-engastada. Tal escolha, deve-se ao fato da Figura 13 ser construída considerando o modelo mecânico com propriedades sem variação de densidade.

---

<sup>6</sup> Este valor é obtido através da simulação feita pelo software ABAQUS utilizando uma malha muito refinada com 8000 graus de liberdade (LIU; GU, 2001)

Figura 13 - Histórico de convergência para a viga bi-engastada: a) Frequências naturais. b) Erros em função do refino da malha com razão de aspecto constante



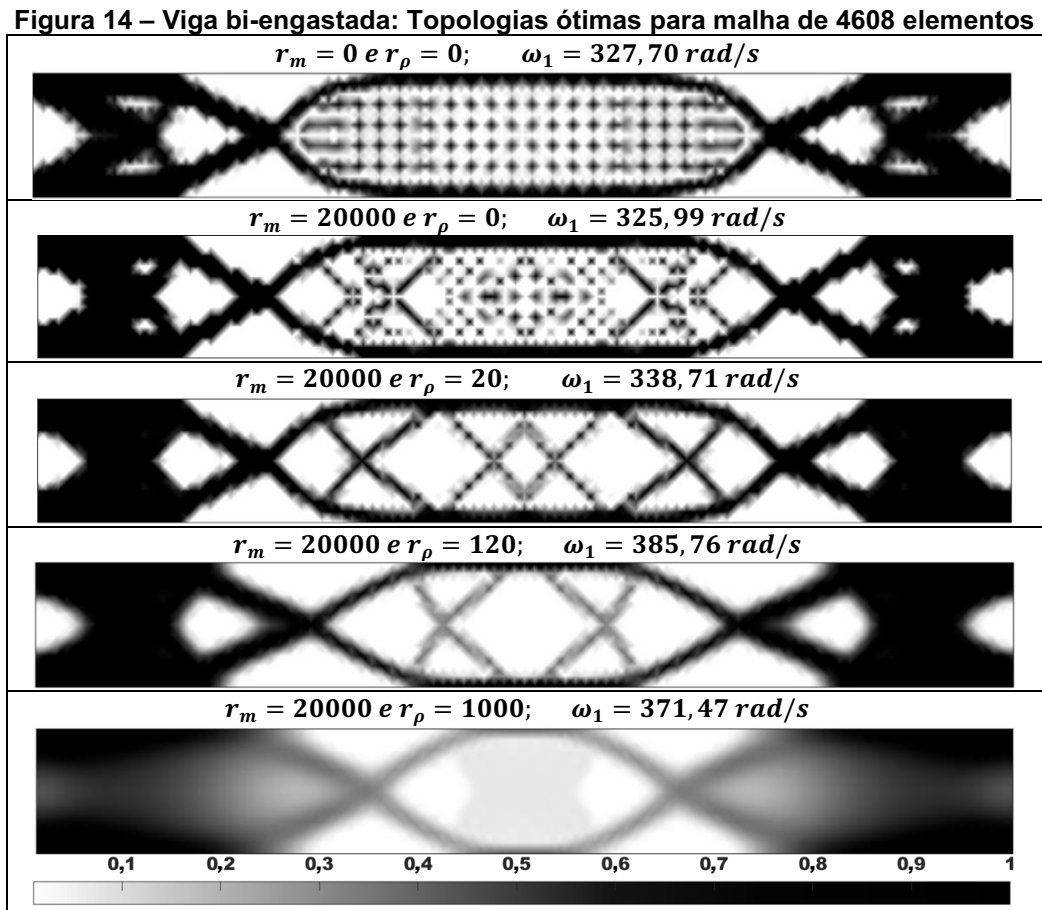
Fonte: Autoria própria

Posteriormente, a partir da Figura 14, Figura 15 e Figura 16, é possível realizar a análise qualitativa da viga bi-engastada. Na Figura 14, para a primeira topologia gerada, ou seja, sem a influência dos parâmetros penalizadores,  $r_m$  e  $r_p$ , é visível a tanto a presença do fenômeno de tabuleiro de xadrez para a região central do domínio, como uma quantidade significativa de valores com densidades intermediárias. Ademais, nota-se que o parâmetro  $r_m$  que penaliza as densidades intermediárias altera o padrão do tabuleiro de xadrez das topologias. O aumento de tal parâmetro gera ainda na interface material-vazio um aumento do serrilhado (ALLAIRE; KOHN, 1993; ALLAIRE; FRANCFORT, 1993; PEREIRA; FANCELLO; BARCELLOS, 2004). Isso é possível observar a partir das topologias geradas com o 1° e 2° pares de parâmetros exibidos na Figura 14.

Adicionalmente, a Figura 14 permite a análise qualitativa da influência do parâmetro  $r_p$  nas topologias ótimas. Como este parâmetro penaliza o gradiente do campo de densidades, conforme ocorre o aumento de  $r_p$  há uma mitigação do fenômeno de tabuleiro de xadrez e uma tendência de inibição da criação de furos, ocasionando também o crescimento das regiões com densidades intermediárias. Ou seja, em geral, topologias mais complexas são obtidas através da redução deste parâmetro. Os mesmos efeitos do parâmetro  $r_p$  são vistos nos trabalhos de Pereira (2001) e Pereira, Fancello e Barcellos (2004) no âmbito de problemas de minimização de massa com restrições locais de tensão e em Silva (2017); Silva, Pereira e Torres

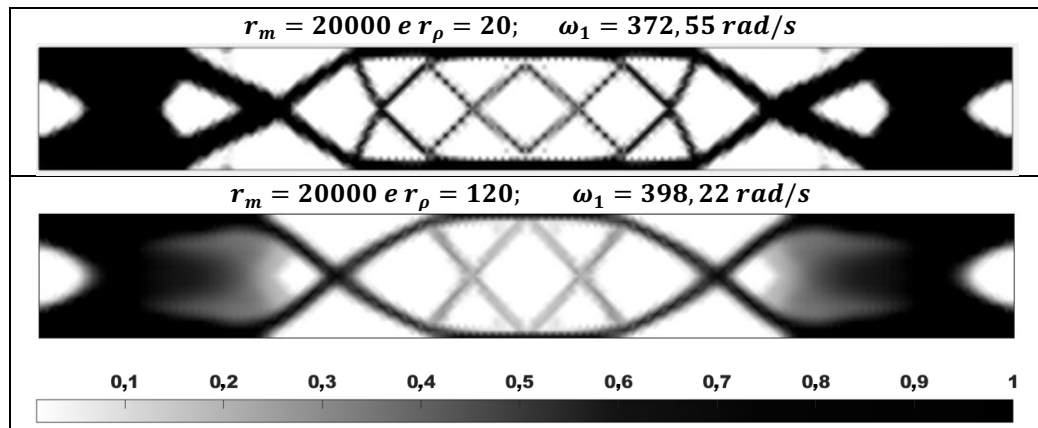
(2020); Pacheco, Silva e Vale (2020) e Rezende et al. (2022) para problemas de minimização de flexibilidade com restrição sobre o volume material.

Realizando uma comparação com o resultado obtido por Du e Olhoff (2007), Figura 3a, a 4ª topologia ótima mostrada é a mais semelhante além de ser a topologia que obteve o maior valor de frequência fundamental.



Na Figura 15 são apresentadas as duas topologias para o 3º e 4º pares de parâmetros penalizadores utilizando uma malha refinada (8192 elementos). Tais topologias têm o intuito de avaliar a dependência de malha (SIGMUND; PETERSSON, 1998a). Para isso são escolhidos os pares de parâmetros que resultaram em topologias mais aceitáveis, ou seja, com poucas regiões de cinza e tabuleiro de xadrez, também com um contorno satisfatoriamente definido e semelhante a topologia gerada por Du e Olhoff (2007). Com isso, é possível observar que os parâmetros  $r_m = 20000$  e  $r_\rho = 20$ , tanto para a malha 1 quanto para a malha 2, geram topologias semelhantes, assim, há uma tendência ao fenômeno de independência de malha.

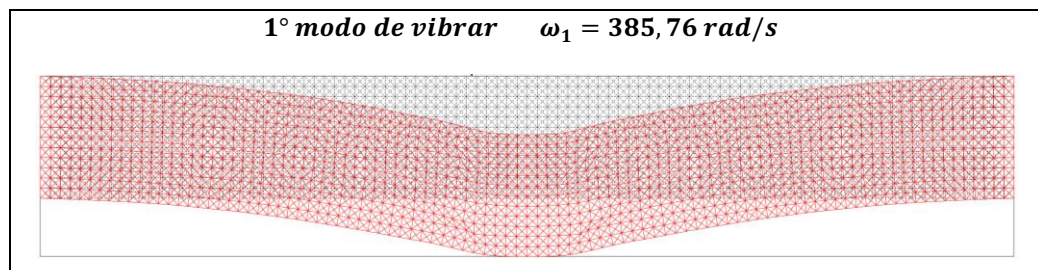
**Figura 15 – Viga bi-engastada: Topologias ótimas para a malha de 8192 elementos, comparação entre os pares de parâmetros mais adequados**



Fonte: Autoria própria

Na Figura 16 é apresentado o modo de vibrar fundamental da topologia ótima utilizando a malha 1 e os parâmetros penalizadores  $r_m = 20000$  e  $r_\rho = 120$  onde percebe-se uma característica de simetria em relação ao eixo vertical centroidal, o que era esperado dado a simetria do modelo mecânico.

**Figura 16 – Viga bi-engastada: Modo de vibrar fundamental da topologia ótima gerada com  $r_m = 20000$  e  $r_\rho = 120$  para a malha de 4608 elementos**



Fonte: Autoria própria

Após as avaliações qualitativas, a partir da Figura 17 até a Figura 22 são realizadas as análises quantitativas para o problema da viga bi-engastada.

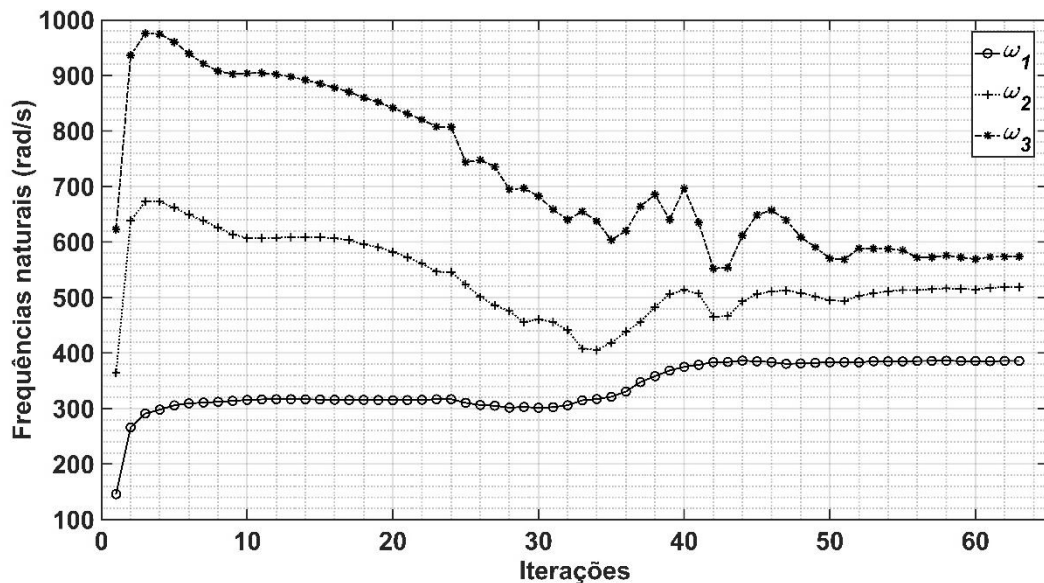
Avaliando a convergência das frequências naturais, Figura 17, observar-se que em nenhuma das iterações realizadas há a presença do problema de MFN. Essa verificação foi feita para todos os problemas de OETC resolvidos neste trabalho, levando em conta as duas malhas e os 5 pares de parâmetros, e nenhum apresentam o problema de MFN. Ademais, percebe-se que o valor final das frequências naturais são  $\omega_1 = 385,76 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_2 = 518,67 \text{ rad/s}$  e  $\omega_3 = 573,72 \text{ rad/s}$ .

Partindo de uma análise quantitativa dos valores de frequência o trabalho de Du e Olhoff (2007) a solução do problema de OETC da viga bi-engastada conduz a

uma maximização da frequência fundamental de  $\sim 212\%$ . Dado um valor de  $\omega_1 = 146,1 \text{ rad/s}$ , para um campo inicial de densidades relativas com 50% do volume material distribuído igualmente ao longo dos elementos, obtém-se um valor de  $\omega_1 = 456,4 \text{ rad/s}$  para a topologia ótima. Já os valores obtidos pelo 4º par de parâmetros, Figura 14 e Figura 17, sendo  $\omega_1 = 385,76 \text{ rad/s}$ , partindo de  $\omega_1 = 145,90 \text{ rad/s}$  com um aumento de 164% na frequência fundamental. A otimização feita por Du e Olhoff (2007) teve uma maximização maior da frequência fundamental, devido ao fato da tratativa do problema de MFN ser diferente da aplicada neste trabalho, além do fato da regularização do fenômeno de tabuleiro de xadrez ser conduzida conforme proposto por Sigmund (1997) e Sigmund e Petersson (1998a).

Ademais, quanto a independência de malha, observando os valores das frequências fundamentais na Figura 15, a diferença percentual entre os valores das frequências geradas pelas duas malhas para o 3º e 4º pares de parâmetros são, respectivamente, 10% e 3,23%. Além disso, a topologia gerada com o 4º par de parâmetros e a malha com 8192 elementos apresenta uma quantidade de regiões de cinza elevada. Com isso não é possível comprovar o fenômeno da independência de malha.

**Figura 17 – Viga bi-engastada: Histórico das frequências naturais ao longo das iterações com  $r_m = 20000$  e  $r_\rho = 120$  para a malha de 4608 elementos**



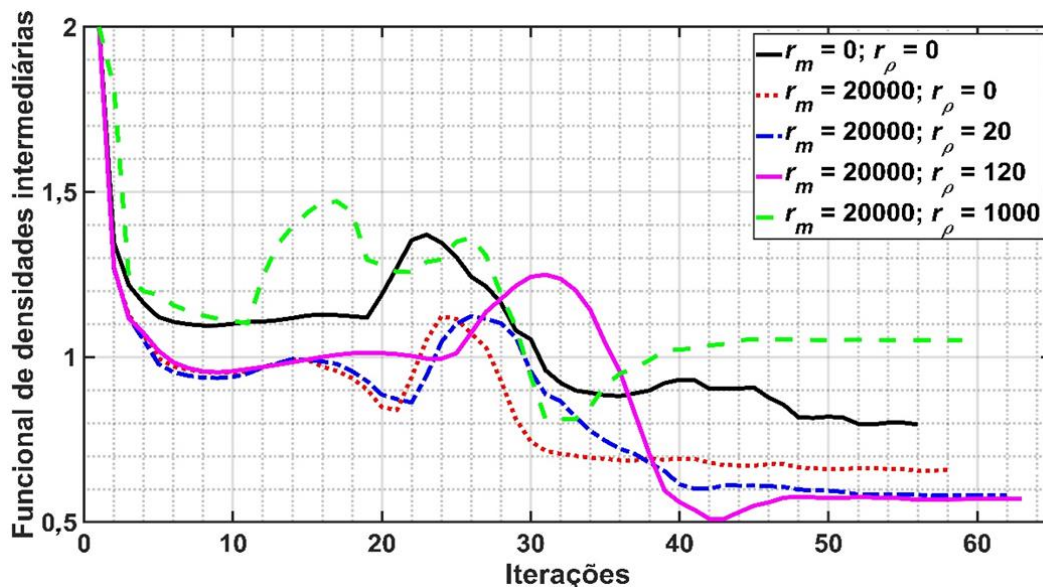
Fonte: Autoria própria

Com a Figura 18 é possível analisar a influência dos parâmetros penalizadores sobre o funcional de densidades intermediárias (equação (14)). Ao



observar o 1° e 2° pares de parâmetros nota-se que o aumento de  $r_m$  gera uma redução no valor do funcional, tanto ao longo das iterações quanto no valor ao final da convergência. Por outro lado, conforme ocorre o aumento do parâmetro  $r_\rho$  tem-se, em geral, um acréscimo dos valores do funcional. Ademais, tais valores dependem também do perímetro da solução topológica gerada, sendo que o aumento do perímetro conduz a um aumento da interface material vazio que concentra, em geral, as maiores quantidades de densidades intermediárias. Nos trabalhos de Pacheco et al. (2020) e Silva et al. (2020) este efeito é demonstrado quantitativamente.

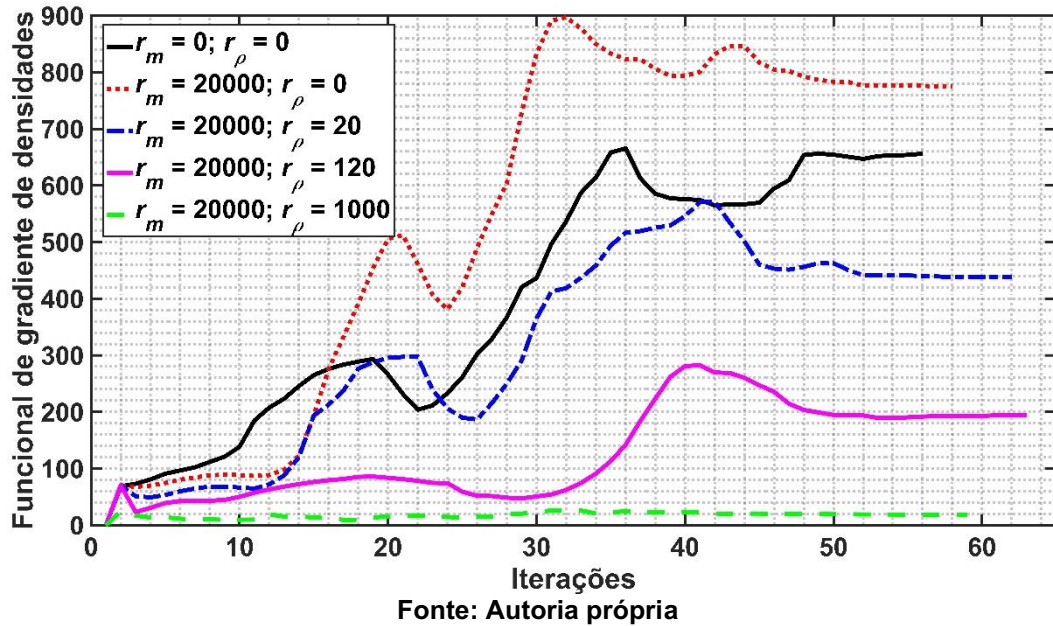
**Figura 18 - Viga bi-engastada: Histórico dos funcionais de densidades intermediárias para malha de 4608 elementos**



Fonte: Autoria própria

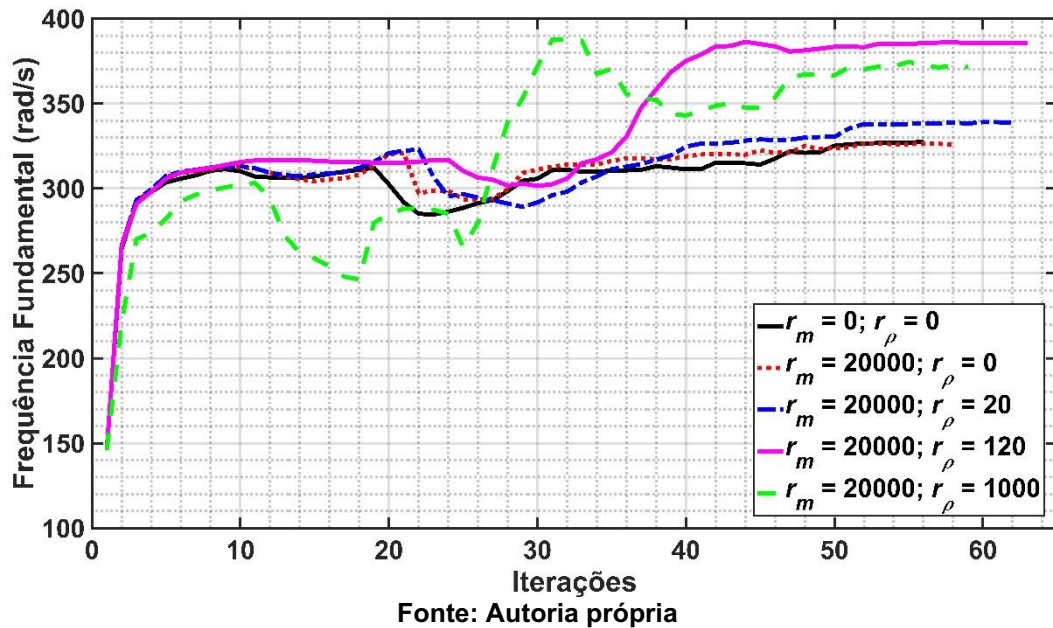
A Figura 19 apresenta o histórico de convergência dos funcionais de gradientes de densidades para os 5 diferentes pares de parâmetros penalizadores simulados. Com vistas ao 1° e 2° pares de parâmetros, conforme o aumento do parâmetro  $r_m$  há também o aumento do valor do funcional. Diferentemente, com o aumento do parâmetro  $r_\rho$  é gerado uma redução do valor do funcional de gradiente de densidades

Figura 19 - Viga bi-engastada: Histórico dos funcionais de gradiente de densidades para malha de 4608 elementos



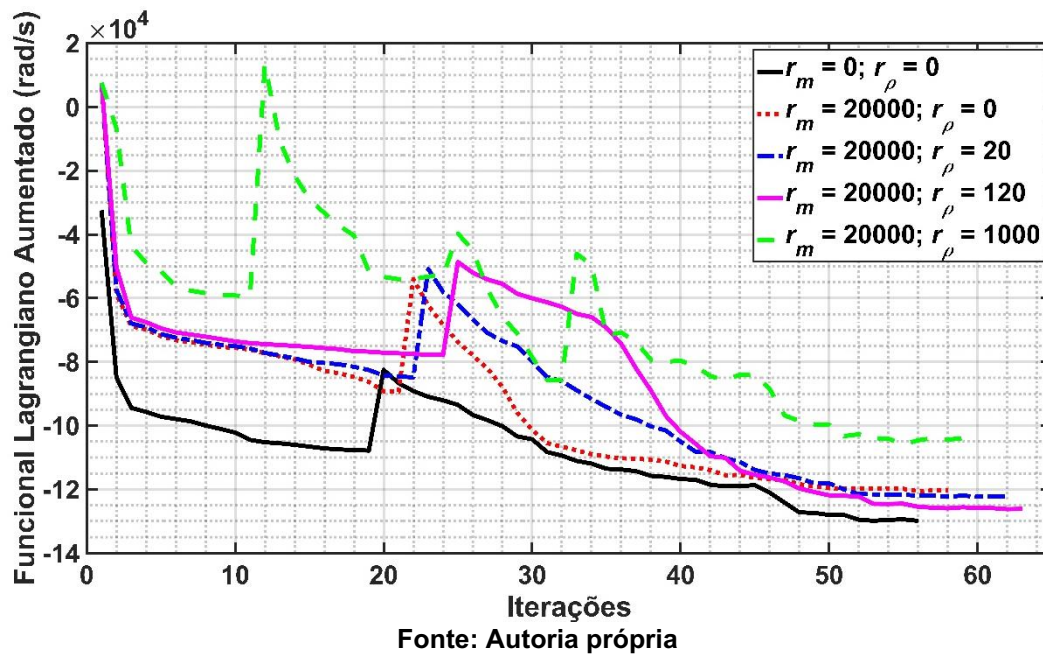
Na Figura 20 é apresentado o histórico de convergência das frequências fundamentais para os 5 diferentes pares de parâmetros penalizadores. Observa-se que, a partir dos pares de parâmetros em que  $r_\rho = 0$ , que a variação do parâmetro  $r_m$  não gerou alteração significativa sobre os valores das frequências fundamentais. Ademais, conforme há o aumento do parâmetro  $r_\rho$  há, em geral, um aumento da frequência fundamental, exceto pela topologia gerada com  $r_\rho = 1000$ .

Figura 20 - Viga bi-engastada: Histórico das frequências fundamentais para malha de 4608 elementos



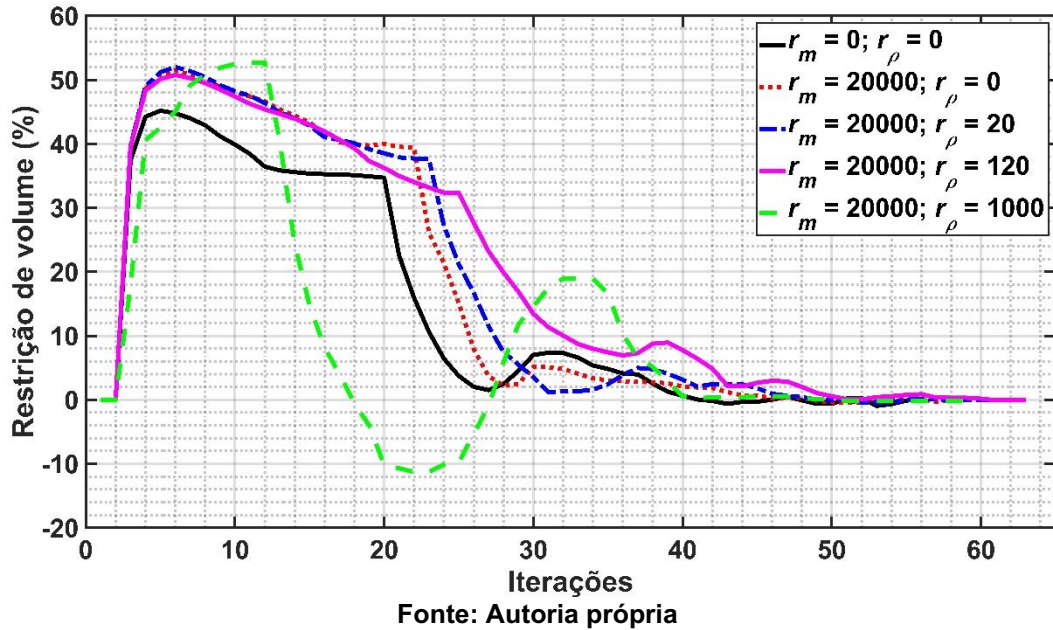
Na a Figura 21, os efeitos de todos os termos do funcional são considerados em conjunto, assim, observar somente  $r_m$  e  $r_\rho$  não permite uma comparação que mostre uma influência direta ao valor do funcional somente a partir da alteração de tais parâmetros. Ademais, para todos os pares ocorreu a minimização e estabilização do funcional conforme esperado.

**Figura 21 - Viga bi-engastada: Histórico dos funcionais Lagrangiano Aumentado para malha de 4608 elementos**



Na Figura 22, percebe-se que as topologias calculadas com os 5 pares de parâmetros respeitam a restrição de volume ao final do processo de otimização. Inclusive é possível observar que os primeiros picos na Figura 21 e na Figura 22 estão relacionados com a restrição sobre o volume material, onde há a atualização do Multiplicador de Lagrange que penaliza o volume material, o qual, ao início do processo de otimização possui uma grande influência.

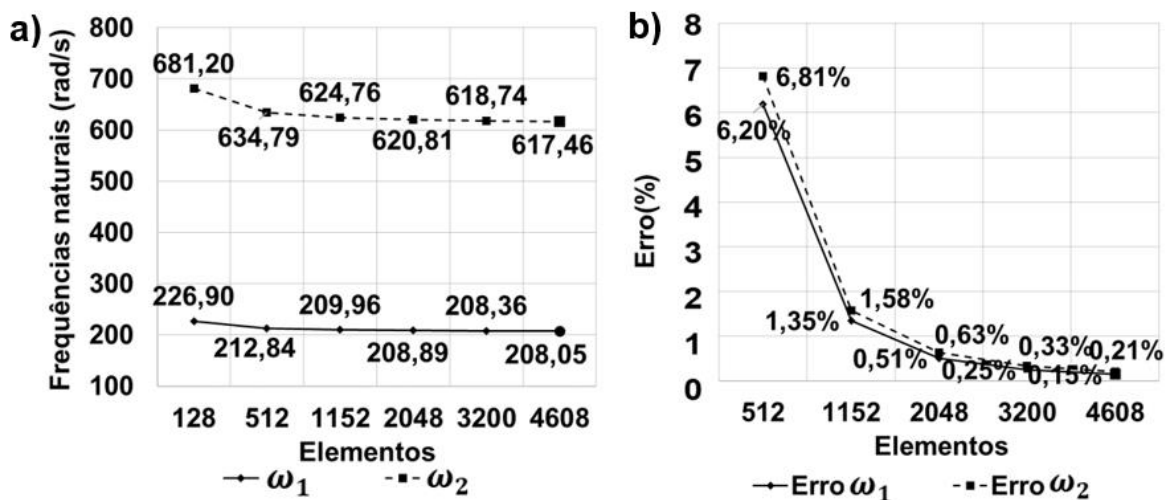
Figura 22 - Viga bi-engastada: Histórico das restrições de volume para malha de 4608 elementos



### 7.2.2 Viga engastada-apoiada

Averiguando a convergência das duas primeiras frequências naturais ao longo das malhas para o problema da viga engastada-apoiada (Figura 23a), com a malha de 3200 elementos ambas as frequências resultam em um erro, equação (23), menor que 0,5%, como visto na viga bi-engastada. Assim, é utilizada da malha subsequente (4608 elementos).

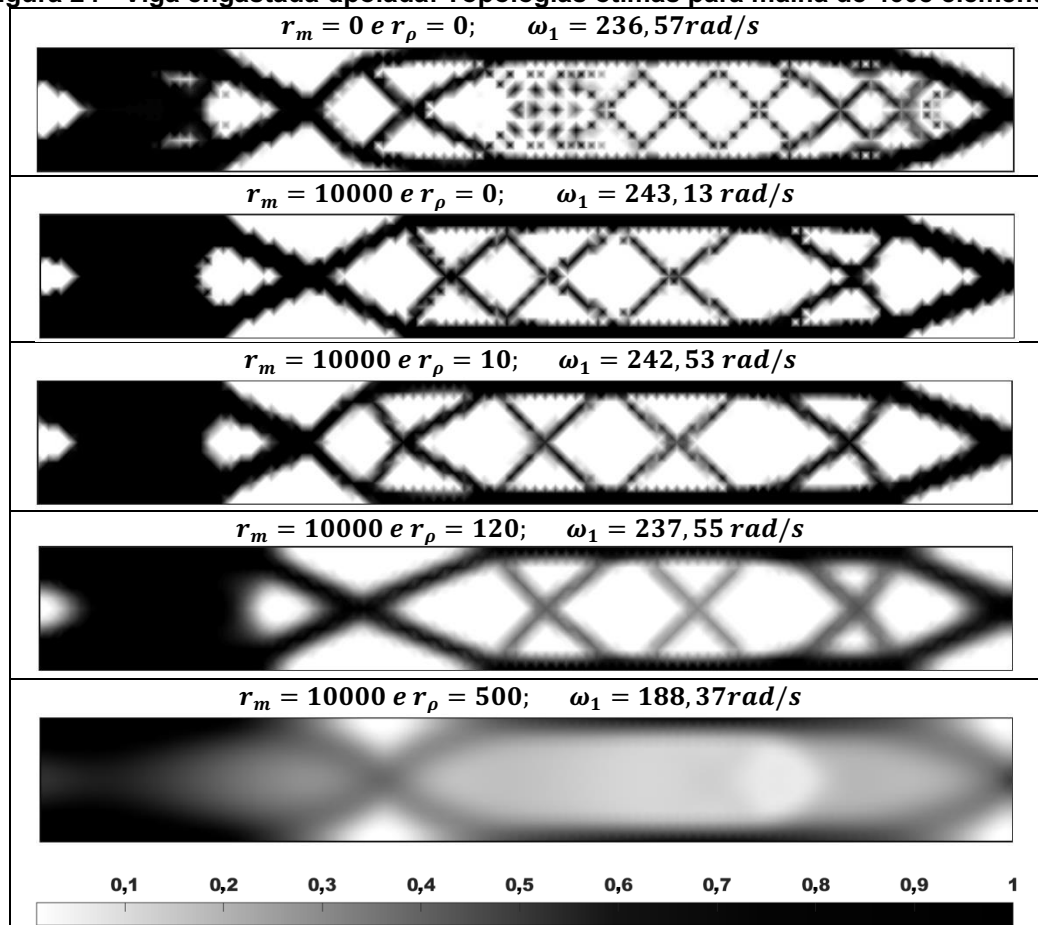
Figura 23 - Viga engastada-apoiada: a) Frequências naturais. b) Erros em função do refino da malha com razão de aspecto constante



A análise qualitativa do segundo problema é realizada com base na Figura 24, Figura 25 e Figura 26.

Na Figura 24, corroborando com o caso da viga bi-engastada a topologia gerada com ambos os parâmetros penalizadores nulos, a presença do fenômeno de tabuleiro de xadrez. O crescimento do parâmetro  $r_m$ , olhando para as topologias gerados com o 1° e 2° pares de parâmetros, ocasiona uma mudança no padrão do tabuleiro de xadrez das topologias e um aumento no padrão de serrilhado ao longo das interfaces material e vazio. Ademais, com o aumento do parâmetro  $r_p$  há um aumento nas regiões de cinza e a mitigação do fenômeno de tabuleiro de xadrez. Além disso, a 3° topologia ótima, gerada com os parâmetros  $r_m = 10000$  e  $r_p = 10$ , é a que mais se assemelha comparando com o resultado obtido por Du e Olhoff (2007), Figura 3b, tendo  $\omega_1 = 242,53 \text{ rad/s}$ , partindo de  $\omega_1 = 104 \text{ rad/s}$ , com 133% de maximização no valor da frequência fundamental. A topologia ótima apresentada por Du e Olhoff (2007) teve um maior valor da frequência fundamental, com 177% de aumento.

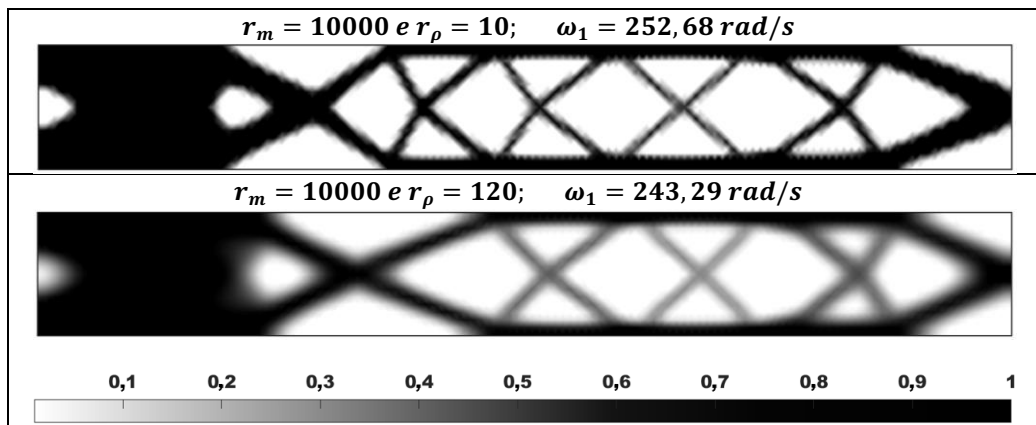
**Figura 24 - Viga engastada-apoiada: Topologias ótimas para malha de 4608 elementos**



Fonte: Autoria própria

Igualmente ao primeiro problema são apresentadas duas topologias obtidas com os 3° e 4° pares de parâmetros calculados com a malha de 8192 elementos. Neste caso, a análise numérica quanto a independência de malha se mostra presente para o problema da viga engastada-apoiada. Ou seja, como nota-se na Figura 25, o 3° e 4° pares de parâmetros obtiveram topologias muito semelhantes, isso indica uma tendência da independência de malha, o que também pode encontrado nos trabalhos de Silva (2017) e Silva et al. (2020), no âmbito de problemas de minimização de flexibilidade com restrição sobre o volume material. Ademais, a diferença percentual entre os valores das frequências geradas pelas duas malhas para o 3° e 4° pares de parâmetros são, respectivamente, 4,18% e 2,42%, respectivamente. Em conjunto, percebe-se uma melhor definição do contorno material gerado pelo refino de malha (SILVA, 2017; SILVA et al., 2020).

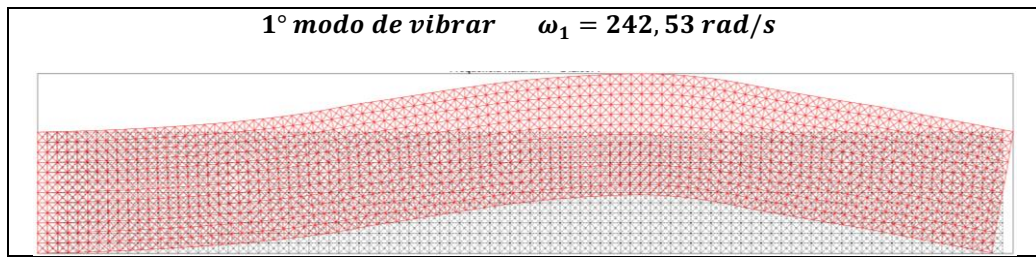
**Figura 25 - Viga engastada-apoiada: Topologias ótimas para malha de 8192 elementos, comparação entre os pares de parâmetros mais adequados**



Fonte: Autoria própria

Na Figura 26 é apresentado o modo de vibrar fundamental da topologia ótima calculada com o par de parâmetros penalizadores  $r_m = 20000$  e  $r_\rho = 10$  utilizando a malha de 4680 elementos. Percebe-se que devido ao fato de o problema em análise ser assimétrico em relação ao eixo vertical centroidal, o nó da onda de vibração é deslocado para o lado apoiado da viga, ou seja, no lado esquerdo.

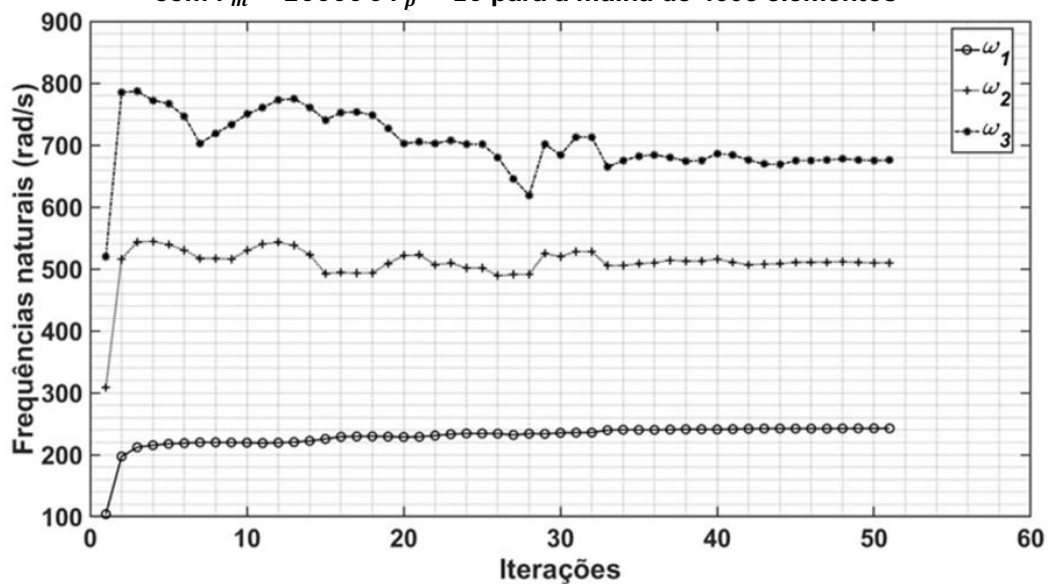
Figura 26 – Viga engastada-apoiada: modo de vibrar fundamental da topologia ótima com  $r_m = 20000$  e  $r_\rho = 10$  para a malha de 4608 elementos



Fonte: Autoria própria

A análise quantitativa é realizada a partir da Figura 27 até a Figura 30. A Figura 27 apresenta a convergência das 3 primeiras frequências naturais utilizando os parâmetros penalizadores  $r_m = 20000$  e  $r_\rho = 10$ . Analisando as frequências percebe-se que, assim como a viga bi-engastada, o problema de MFN não ocorre. Todos os problemas de OETC resolvidos com as duas malhas e os 5 pares de parâmetros, não apresentam o problema de MFN.

Figura 27 – Viga engastada-apoiada: Histórico das frequências naturais ao longo das iterações com  $r_m = 20000$  e  $r_\rho = 10$  para a malha de 4608 elementos

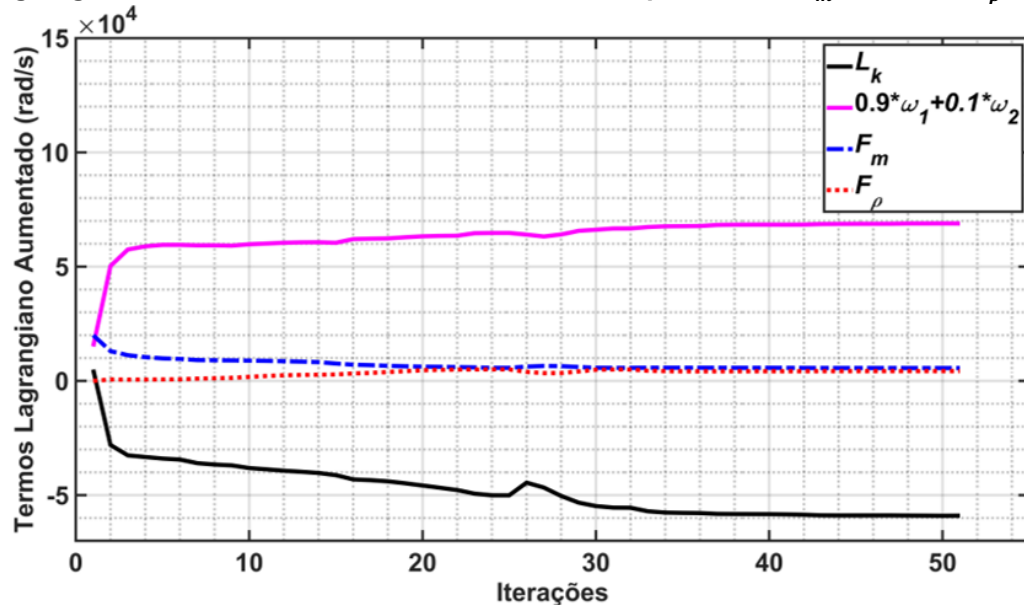


Fonte: Autoria própria

Observando a Figura 28 é possível notar o histórico de convergência da média ponderada dos autovalores e dos funcionais de densidades intermediárias, de gradiente de densidades e Lagrangiano Aumentado. O par de parâmetros em análise é o 3º,  $r_m = 20000$  e  $r_\rho = 10$ . Analisando os dados percebe-se que conforme o funcional Lagrangiano Aumentado é minimizado a médias das frequências ponderadas são maximizadas, isso implica que o processo de otimização se mostrou

coerente. Ademais, todos os termos apresentados mostram uma tendência de estabilização.

**Figura 28 - Viga engastada-apoiada: Histórico de convergência dos termos do funcional Lagrangiano Aumentado, malha de 4608 elementos, parâmetros  $r_m = 20000$  e  $r_\rho = 10$**

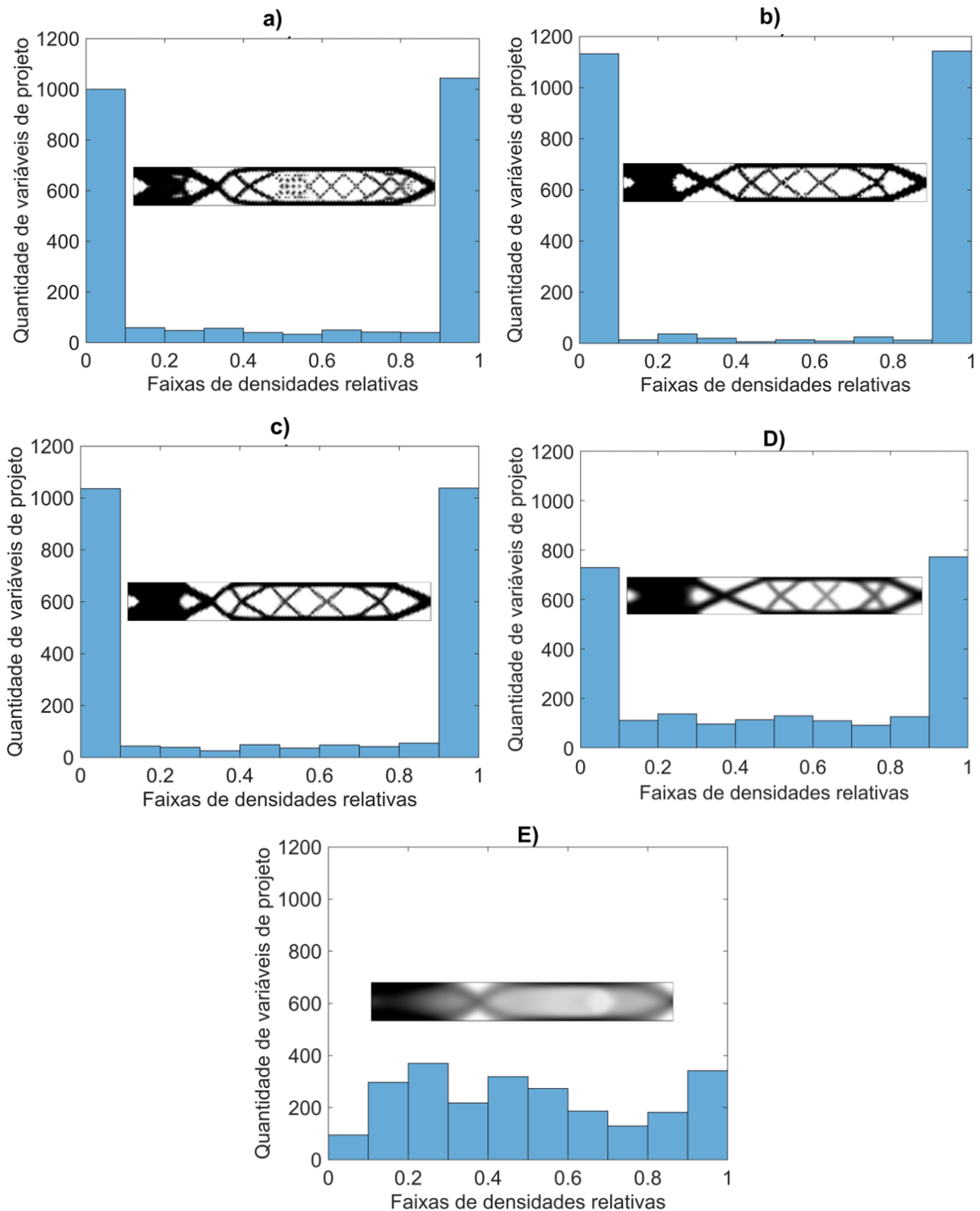


Fonte: Autoria própria

Adicionalmente, na Figura 29 são apresentados os histogramas que demonstram a quantidade de variáveis de projeto por faixa de densidade relativa, onde o intervalo de valores de densidades relativas de 0 até 1 é dividido igualmente em 10 faixas. Para mais, os histogramas representam as topologias ótimas obtidas pelos 5 pares de parâmetros penalizadores utilizados. Observando a Figura 29a e Figura 29b percebe-se a redução de densidades intermediárias que  $r_m$  provoca. Ademais, na Figura 29(c, d) e e)), nota-se que, conforme ocorre o crescimento de  $r_\rho$ , há um aumento na quantidade de variáveis de projeto que se situam nas faixas centrais de distribuição de densidades. Assim, fica evidenciada a influência dos parâmetros penalizadores na distribuição das densidades relativas (PEREIRA; FANCELLO; BARCELLOS, 2004).



**Figura 29 – Viga engastada-apoiada: Histogramas de variáveis de projeto por faixas de densidades relativas para a malha de 4680 elementos para os pares de parâmetros a)  $r_m = 0$  e  $r_\rho = 0$ , b)  $r_m = 10000$  e  $r_\rho = 0$ , c)  $r_m = 10000$  e  $r_\rho = 10$ , d)  $r_m = 10000$  e  $r_\rho = 120$  e e)  $r_m = 10000$  e  $r_\rho = 500$ .**

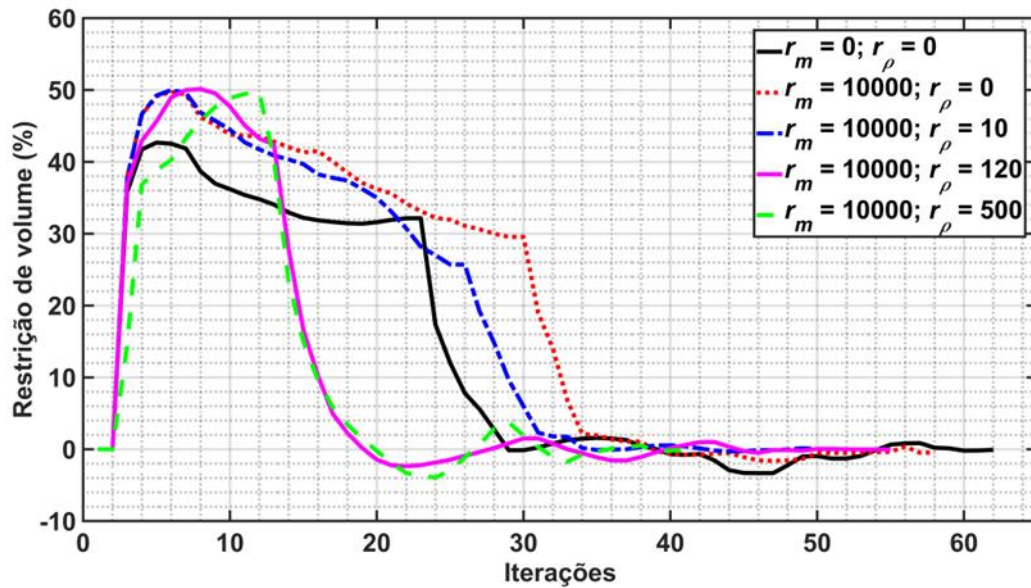


**Fonte: Autoria própria**

Por fim, na Figura 30, é mostrado os dados gerados pelos 5 pares de parâmetros atingem a restrição de volume material. Os parâmetros  $r_m$  e  $r_\rho$  influenciam

a convergência dos valores de forma semelhante à análise realizada na Figura 22, ou seja, a posição da queda da restrição do volume material é alterada, a qual é ocasionada pelo início da influência do Multiplicador de Lagrange no processo de otimização.

**Figura 30- Viga engastada-apoiada: Histórico das restrições de volume para malha de 4608 elementos comparação entre os 5 pares de parâmetros, viga engastada apoiada-engastada**



Fonte: Autoria própria

## 8 CONCLUSÕES

Esse trabalho tem como principal objetivo resolver um problema regularizado de OETC via SIMP, com vistas à maximização da frequência fundamental de uma estrutura com restrição sobre o seu volume. Para tal, é proposta a utilização do MEF juntamente com a aplicação de funcionais penalizadores para mitigação de problemas como o fenômeno de tabuleiro de xadrez, regiões de cinza e dependência de malha. Em síntese, este trabalho pode ser dividido em três principais etapas:

- i. Aplicação do MEF em um problema de vibrações livres não amortecidas;
- ii. Análise da influência dos parâmetros penalizadores aplicados ao funcional objetivo na solução de um problema de Otimização Estrutural Topológica Contínua visando a maximização da frequência fundamental de vibração com restrição sobre o volume material;

Acerca do MEF em um problema de vibrações livres não amortecidas, é realizada a validação deste método a partir da solução de um problema de referência encontrado na literatura. A metodologia é reproduzida sendo obtidos os valores das frequências e modos de vibração. A partir da comparação dos resultados obtidos as análises se mostram idênticas. Assim, é concluída a validação do MEF em um problema de vibrações livres não amortecidas.

Quanto à solução do problema de OETC, este trabalho utiliza uma microestrutura SIMP e insere à função objetivo dois funcionais que visam mitigar a presença do fenômeno de tabuleiro de xadrez e das regiões de cinza. A incorporação destes funcionais representa apropriada regularização do problema de mínima frequência fundamental com restrição sobre o volume material a partir de uma análise qualitativa e quantitativa da influência dos funcionais penalizadores sobre a independência de malha e na mitigação das regiões de cinza e do fenômeno de tabuleiro de xadrez. Tal fato, pode ser comprovado perante os resultados encontrados no Capítulo 7, onde, através das topologias ótimas obtidas via Método do Lagrangeano Aumentado, foi possível notar a semelhança das topologias geradas com os resultados dos problemas expostos na literatura. Por fim, em vistas ao problema de MFN, em todas as soluções obtidas este problema foi contornado a partir do alternativa, média ponderada das duas frequências naturais, proposta.

## 8.1 Trabalhos futuros

Com pensamento em pesquisas para trabalhos futuros, é possível explorar outras possibilidades de problemas de otimização, outras formas de evitar o problema de MFN, outras maneiras de descrever o campo de densidades e avaliar as frequências naturais e modos de vibrar, utilizar outros tipos de elementos para discretização do domínio e ordens polinomiais e a inserção de h-adaptatividade. Também é possível a combinação de duas ou mais dessas alternativas propostas.

## REFERÊNCIAS

- ALLAIRE, G.; JOUVE, F.; MAILLOT, H. Topology optimization for minimum stress design with the homogenization method. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 28, p. 87–98, 2004.
- ALLAIRE, G.; KOHN, R. V. Topology optimization and optimal shape design using homogenization. **Topology Design of Structures**. Kluwer, Boston, p. 207–218, 1993.
- ALLAIRE, G.; FRANCFORT, G. A. “A numerical algorithm for topology and shape optimization”. In: M. P. Bendsøe and C. A. Soares Mota (ed.), **Topology Design of Structures**. Kluwer, Boston, p. 239–248, 1993.
- AMSTUTZ, S.; NOVOTNY, A. A. Topological optimization of structures subject to von Mises stress constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 41, p. 407–420, 2010.
- ARORA, J. S. **Introduction to Optimum Design**. 4. ed. Elsevier, 2017.
- BAGGE, M. A model of bone adaptation as an optimization process. **Journal of Biomechanics**, v. 33, p. 1349–1357, 2000.
- BAHIA, M. T. **Otimização topológica aplicada ao projeto de mecanismos flexíveis**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.
- BENDSØE, M. P. **Optimization of Structural Topology, Shape and material**. Springer, 1995.
- BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. **Structural Optimization**, v. 1, p. 193–202, 1989.
- BENDSØE, M. P. **Variable Topology Optimization: Status and Challenge**. European Conference on Computational Mechanics, n. 137, 1999.
- BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 71, p. 197–224, 1988.
- BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. Material interpolation schemes in topology optimization. **Archive of Applied Mechanics**, v. 69, p. 635–654, 1999.
- BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization: Theory, Method and Application**. Berlin: Springer, 2003.
- BERTSEKAS, D. P. **Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods**. Athena Scientific, 1996.

BERTSEKAS, D. P. **Nonlinear Programming**. 2. ed. Athena Scientific, 1999.

BOGOMOLNY, M. Topology optimization for free vibrations using combined approximations. **International Journal For Numerical Methods in Engineering**, v. 82, p. 617-636, 2009.

BRATUS, A. S.; SEYRANIAN A. P. Bimodal solutions in eigenvalue optimization problems. **Journal of Applied Mathematics and Mechanics**. vol. 47, p. 546–554, 1983.

BRITAIN, K.; SILVA, M.; TORTORELL, D. A. Minmax topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 45, p. 657-668, 2012.

BRUGGI, M.; DUYSINX, P. Topology optimization for minimum weight with compliance and stress constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 46, p. 369–384, 2012.

COUTINHO, K. D. **Biomecânica e otimização topológica com H-adaptatividade em implantes dentários nitretados a plasma em cátodo oco**. Tese (Doutorado em Tecnologia de Materiais; Projetos Mecânicos; Termociências) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.

CORDEIRO, M. F. **Uma Técnica para Otimização Estrutural Mediante a Derivada Topológica** Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

CORREA, L. S. **Redução de massa de uma roda pelo método de otimização topológica**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica) – Universidade de Caxias do Sul, Caxias do Sul, 2020.

COSTA JR., J. C. A. **Otimização Topológica com Refinos h-adaptativos**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

DIAZ A. R.; KIKUCHI N. Solutions to shape and topology eigenvalue optimization problems using a homogenization method. **International Journal For Numerical Methods in Engineering**, vol. 35, p. 1487–1502, 1992.

DU, J.; OLHOFF, N. **Topological design of freely vibrating continuum structures for maximum values of simple and multiple eigenfrequencies and frequency gaps**. Springer, 2007.

DUARTE, S. D. **BESO-LS: otimização topológica estrutural combinando os métodos BESO e de representação de domínio por função level-set**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2021.

EMMENDOERFER JR., H. **Problema de Otimização Estrutural com Restrição de Tensão Local Usando o Método Level set**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.

FANCELLO, E. A.; PEREIRA, J. T. Structural topology optimization considering material failure constraints and multiple load conditions. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 1, p. 3–24, 2003.

HABER, R. B.; JOG, C. S.; BENDSØE, M. P. A new approach to variable-topology shape design using a constraint on perimeter. **Structural Optimization**, vol. 11, n. 1–2, pp. 1–12, 1996.

HAFTKA R.T.; GURDAL Z.; KAMAT M. P. Elements of structural optimization. **Kluwer**, Dordrecht, 1990.

HASSANI, B.; HINTON, E. A review of homogenization and topology optimization II – analytical and numerical solution of homogenization equations. **Computers and Structures**, v. 69, p. 719–738, 1998.

HASSANI, B.; HINTON, E. **Homogenization and Structural Topology Optimization: Theory, Practice and Software**. Springer, 1999.

KANG, Z.; WANG, Y. Structural topology optimization based on non-local Shepard interpolation of density field. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 200, p. 3515–3525, 2011.

LI, P.; WU, Y.; YVONNET, J. A SIMP-phase field topology optimization framework to maximize quasi-brittle fracture resistance of 2D and 3D composites. **Theoretical and Applied Fracture Mechanics**, v. 144, 2021.

LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. Coleção Matemática Universitária, 2ª edição, 1996.

LIU, G. R.; GU Y. T. A local radial point interpolation method (LRPIM) for free vibration analyses of 2-D solids. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 246, p. 29–46, 2001.

LOPEZ, R. H.; MIGUEL, L. F. F. **Introdução A Otimização Estrutural**. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, maio, 2013.

MA, Z. D.; KIKUCHI, N.; CHENG, H. C. Topological design for vibrating structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 121, p. 259–280, 1995.

MA, Z. D. et al. Topological Optimization Technique for Free Vibration Problems. **Journal of Applied Mechanics**, v. 62, p. 200–207, 1995.

MAEDA, Y. et al. Structural topology optimization of vibrating structures with specified eigenfrequencies and eigenmode shapes. **International Journal For Numerical Methods in Engineering**, v. 67, p. 597–628, 2006.

MASUR, E. F. Optimal structural design under multiple eigenvalue constraints. **International Journal of Solids and Structures**. vol. 20, p. 211–231, 1984.

NOVOTNY, A. A.; SOKOLOWSKI, J. **Topological Derivatives in Shape Optimization**. Springer, 2013.

NUÑEZ, N. N. R. **Síntese estrutural e otimização dimensional de mecanismos de direção**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2014.

NOWAK, M. Structural optimization system based on trabecular bone surface adaptation. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 32, p. 241–249, 2006.

OLIVEIRA, A. P. **Aplicação da derivada topológica na otimização estrutural**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2018.

OVERTON, M. L. On minimizing the maximum eigenvalue of a symmetric matrix. **SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications**. Vol. 9, p. 256–268, 1988.

PACHECO, J. P. F. R.; SILVA, J.; VALE, J. L. **Assessment of penalty parameters in density-based topology optimization**. Proceedings of the XLI Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, ABMEC, Foz do Iguaçu-PR, Brazil, p. 3, 2020.

PEDERSEN, N. L. Maximization of eigenvalues using topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 20, p. 2-11, 2000.

PEREIRA, J. T. **Otimização Topológica de Componentes Mecânicos com Restrições sobre o Critério de Falha Material**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2001.

PEREIRA, J. T.; FANCELLO, E. A.; BARCELLOS, C. S. Topology optimization of continuum structures with material failure constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 26, n. 1–2, p. 50–66, 2004.

PORCHER, F. **Otimização estrutural paramétrica com restrições por critério de falha de tensão admissível e colapso através de algoritmos genéticos**. Monografia (Graduação em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.



REZENDE, G. C. et al. **Uma discussão sobre a definição da distribuição de densidades relativas em otimização estrutural topológica via SIMP**. Encontro Nacional de Modelagem Computacional, 9º MECSUL, 2022.

ROBALINHO, E. **Otimização da forma geométrica de estruturas utilizando o método dos elementos de contorno**. Dissertação (Mestrado em Ciências na Área de Tecnologia Nuclear - Reatores) – Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, São Paulo, 1998.

ROZVANY, G. I. N. A critical review of established methods of structural topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 37, p. 217–237, 2009.

SANTOS, R. B.; NOVOTNY, A. A.; TORII, A. J. Otimização Topológica Estrutural Baseada em Confiabilidade com Restrição em Tensão Utilizando o Conceito de Derivada Topológica. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 5, N.1, 2017.

SEUNGMIN, J.; SUNGHOON, L.; SEUNGJAE, M. Level-set-based topology optimization using remeshing techniques for magnetic actuator design. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 52(3), p.1 - 4, 2016.

SEYRANIAN, A. P.; LUND, E.; OLHOFF, N. Multiple eigenvalues in structural optimization problems. **Structural Optimization**. vol. 8, p. 207–227, 1994.

SIGMUND, O. On the design of compliant mechanisms using topology optimization. **Mechanics of Structures and Machines**, vol. 25, n. 4, pp. 493-524, 1997.

SIGMUND, O.; PETERSSON, J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. **Structural Optimization**, vol. 16, pp. 68–75, 1998a.

SIGMUND, O.; PETERSSON, J. Slope constrained topology optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 41, n. 8, pp. 1417-1434, 1998b.

SILVA, F. E. C. S. **Otimização Dimensional, de Forma e Topológica de Estruturas Treliçadas Utilizando um Algoritmo Híbrido**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2015.

SILVA, J. **Otimização Estrutural Topológica usando Método dos Elementos Finitos h-Adaptativo Fundamentado na Recuperação da Densidade do Erro Isotrópica e Anisotrópica**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2017.

SILVA, J.; PEREIRA, J. T.; TORRES, D. A. F. h-adaptive topology optimization considering variations of material properties and energy error density recovery". **Engineering Computations**, 2020.

SORIANO, H. L. **Elementos Finitos** – Formulação e aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

SOUZA, C. E. **Otimização em dois níveis da orientação e da topologia de cascas laminadas**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.

SVANBERG, K. The method of moving asymptotes – a new method for structural optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 24:359–373, 1987.

TCHERNIAK, D. Topology optimization of resonating structures using SIMP method. **International Journal For Numerical Methods in Engineering**, v. 54, p. 1605-1622, 2002.

TRALDI, M. A. B. **Otimização de topologia de estruturas e componentes**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Geotecnia, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2010.

VITORIO JR., P. C. **Análise level set da otimização topológica de estruturas planas utilizando o método dos elementos de contorno**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

WANG, Y.; KANG, Z.; HE, Q. An Adaptive refinement approach for topology optimization based on separated density field description. **Computers and Structures**, vol. 117, p. 10–22, 2013.

XIANBAO, D.; FEIFEI, L.; XINQIANG, Q. Topology optimization of incompressible Navier–Stokes problem by level set based adaptive mesh method. **Computers and Mathematics with Applications**, doi:10.1016/j.camwa.2016.06.034

XU, S.; et al. Stress constrained multi-material topology optimization with the ordered SIMP method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 373, 2021.

YANG, Y.; XU, D.; ZHENG, H. Application of the three-node triangular element with continuous nodal stress for free vibration analysis. **Computers and Structures**, vol. 169, p. 69-80, 2016.