

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA E  
INFORMÁTICA INDUSTRIAL

HECTOR LISE DE MOURA

**RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS EM TOMOGRAFIA DE  
CAPACITÂNCIA ELÉTRICA POR REPRESENTAÇÕES ESPARSAS**

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2018

HECTOR LISE DE MOURA

**RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS EM TOMOGRAFIA DE  
CAPACITÂNCIA ELÉTRICA POR REPRESENTAÇÕES ESPARSAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre em Ciências” – Área de Concentração: Engenharia de Automação e Sistemas.

Orientador: Daniel Rodrigues Pipa

Co-orientador: Marco José Da Silva

**CURITIBA**

**2018**

---

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação**

---

M929r Moura, Hector Lise de  
2018 Reconstrução de imagens em tomografia de capacitância elétrica por representações esparsas / Hector Lise de Moura.-- 2018.  
52 f.: il.; 30 cm.

Disponível também via World Wide Web.  
Texto em português com resumo em inglês.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial. Área de Concentração: Engenharia de Automação de Sistemas, Curitiba, 2018.  
Bibliografia: f. 49-52.

1. Reconstrução de imagens. 2. Tomografia - Aplicações industriais. 3. Modelos matemáticos. 4. Matrizes esparsas. 5. Capacitadores. 6. Detectores. 7. Malha de eletrodos. 8. Escoamento bifásico. 9. Engenharia elétrica - Dissertações. I. Pipa, Daniel Rodrigues, orient. II. Silva, Marco José da, coorient. III. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial. IV. Título.

CDD: Ed. 22 -- 621.3

---

**Biblioteca Central do Câmpus Curitiba - UTFPR**  
**Bibliotecária: Luiza Aquemi Matsumoto CRB-9/794**



Ministério da Educação  
Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná  
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação

### **TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº 783**

A Dissertação de Mestrado intitulada “**Reconstrução de Imagens em Tomografia de Capacitância Elétrica por Representações Esparsas**” defendida em sessão pública pelo(a) candidato(a) **Hector Lise de Moura**, no dia 22 de fevereiro de 2018, foi julgada para a obtenção do título de Mestre em Ciências, área de concentração Engenharia de Automação e Sistemas, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial.

BANCA EXAMINADORA:

Prof(a). Dr(a). Daniel Rodrigues Pipa - Presidente – (UTFPR)

Prof(a). Dr(a). Giovanni Alfredo Guarnieri - (UTFPR)

Prof(a). Dr(a). Leonardo Tomazeli Duarte - (UNICAMP)

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Curitiba, 22 de fevereiro de 2018.

Dedico este trabalho a meus pais, Renê e Stella, cujo apoio foi essencial para atingir essa etapa.

## **AGRADECIMENTOS**

A meus pais, pelo incentivo e suporte muito necessário para a realização deste trabalho.

A meu orientador e a meu coorientador, Dr. Daniel Rodrigues Pipa e Dr. Marco José Da Silva, pela oportunidade, pelos ensinamentos e orientações.

A minha querida Lana, pela paciência demonstrada durante a elaboração deste trabalho.

A todos os participantes do grupo de pesquisa LIPRO, pelas reuniões e conhecimentos compartilhados.

Aos amigos e colegas do Laboratório de Sensores e Instrumentação Industrial que contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

E a todos que de alguma forma contribuíram para este trabalho.

## RESUMO

Moura, Hector L.. RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS EM TOMOGRAFIA DE CAPACITÂNCIA ELÉTRICA POR REPRESENTAÇÕES ESPARSAS. 52 f. Dissertação – Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

A Tomografia de Processos é uma importante ferramenta para diversos setores da indústria. Tal importância vem da necessidade de obter informações sobre determinada propriedade física em regiões de complicado acesso, por exemplo, o interior de um duto. A tomografia é uma ferramenta muito versátil, podendo ser adaptada para investigar diversas propriedades físicas. Entre as diversas modalidades tomográficas está a elétrica, conhecida como Tomografia de Impedância Elétrica (EIT). A EIT pode ainda ser dividida em duas partes: Tomografia de Resistência Elétrica (ERT) e Tomografia de Capacitância Elétrica (ECT). Enquanto a ERT é capaz de distinguir materiais condutivos de não-condutivos, a ECT é capaz de diferenciar dois materiais não-condutivos pela sua permissividade elétrica. A modalidade de tomografia elétrica possui vantagens como: baixo tempo de aquisição, baixo custo e não-radioatividade. Os principais desafios enfrentados na tomografia elétrica são: a dependência da trajetória do campo em relação ao meio (efeito de campo mole) e a pouca quantidade de eletrodos disponíveis para medições devido às dimensões dos mesmos. Em decorrência do efeito de campo mole, a soma da contribuição individual de cada pixel em uma região é diferente da contribuição real da região, em outras palavras, é um problema não-linear. Devido a pequena quantidade de eletrodos, em geral 8 ou 12, reconstruir uma imagem com resolução prática é um problema mal-posto. Muitos métodos foram propostos para contornar essas dificuldades, grande parte se baseia em um modelo linearizado do sistema e na resolução de um problema inverso. Neste trabalho é proposto um método de reconstrução de imagens com representação esparsa, no qual busca-se reconstruir uma imagem composta de poucos elementos de uma base redundante. Esses elementos são aprendidos a partir de sinais de treinamento e usados como entrada para um modelo de ECT. As respostas, em capacitância, desse modelo formam uma matriz de sensibilidade redundante. Tal matriz pode ser interpretada como uma linearização por partes do problema direto. Para validação desse algoritmo foram realizados experimentos em escoamentos bifásicos ar-água. Os sinais de treinamento foram obtidos com o uso de um sensor de ECT em conjunto com um sensor *wire-mesh* capacitivo. Os resultados obtidos demonstram a capacidade do método proposto em reconstruir imagens a partir de 8 medições de capacitâncias. As imagens reconstruídas apresentam melhores resultados, segundo diferentes métricas, quando comparados a outros métodos com representações esparsas.

**Palavras-chave:** Reconstrução de Imagens, Tomografia de Capacitância Elétrica, Representações Esparsas, Aprendizagem de Dicionário

## ABSTRACT

Moura, Hector L.. IMAGE RECONSTRUCTION ON ELECTRICAL CAPACITANCE TOMOGRAPHY WITH SPARSE REPRESENTATIONS. 52 p. Dissertação – Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

Process Tomography is an important tool for many sectors of industry. Such importance comes from the necessity of obtaining knowledge of physical properties from hard reaching places, as the interior of a solid object or pipe. Tomography is a very versatile tool, it can be adapted for investigating different physical properties. Among the many tomographic modalities is the electrical, know as Electrical Impedance Tomography (EIT). The EIT can also be divided in two: Electrical Resistance Tomography (ERT) and Electrical Capacitance Tomography (ECT). While the ERT is capable of distinguishing conducting materials from non-conducting ones, the ECT is capable of distinguishing two non-conducting materials by their electrical permittivity. The electrical modality has advantages such as: low acquisition time, low cost and non-radioactive. The main challenges of electrical tomography are: dependency of the trajectory of the field in the medium (effect know as soft-field) and the low number of electrodes available for measurement due to their sizes. As a result of the soft-field effect, the sum of individual contributions of small discrete segments in a given region is different from the contribution of the entire region as one. In other words, the relation between the electrical property and the electrical measurements are non-linear. Due to the small number of measuring electrodes, commonly 8 or 12, reconstructing images with practical resolution is an ill-posed problem. In order to overcome these obstacles, many methods were proposed and the majority are based on the resolution of an inverse problem of a linear model. This work proposes a method of image reconstruction with sparse inducing regularization that seeks to obtain an image representation with only few elements of a redundant basis. The elements of this basis are obtained from training images and used as input of an ECT simulation. The output capacitances of the model make up the columns of a redundant sensitivity matrix. Such matrix can be viewed as a piecewise linearization of the direct problem. For validation purposes, experimental tests were conducted on two-phase flows (air-water). The training signals were obtained from an experiment with a capacitive wire-mesh sensor along with an ECT sensor. The results obtained show that the proposed method is capable of reconstructing images from a set of only 8 capacitance measurements. The reconstructed images show better results, according to different metrics, when compared to other methods that also use sparse representations.

**Keywords:** Image Reconstruction, Electrical Capacitance Tomography, Sparse Representations, Dictionary Learning



## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Sistema de ECT por Xie et al. ....	13
FIGURA 2	– Circuito AC de medição de capacitância. ....	14
FIGURA 3	– Medições ECT. ....	15
FIGURA 4	– Discretização da região interior ao sensor tomógrafo. ....	17
FIGURA 5	– Formas para extensão da matriz de sensibilidade. ....	22
FIGURA 6	– Comparação do número de condição das matrizes $\mathbf{A}_\Phi$ e $\mathbf{S}$ ....	26
FIGURA 7	– Esquema simplificado do sensor <i>wire-mesh</i> ....	29
FIGURA 8	– Sistema de medição AC usado para o sensor de <i>wire-mesh</i> ....	30
FIGURA 9	– Sensor de imageamento direto. ....	32
FIGURA 10	– Modelo do sensor de imageamento direto. ....	32
FIGURA 11	– Planta de escoamentos bifásicos horizontais ....	34
FIGURA 12	– Distribuição dos pontos operacionais ....	34
FIGURA 13	– Histogramas de fração de vazio ....	35
FIGURA 14	– Diagrama da criação do dicionário de sensibilidade. ....	36
FIGURA 15	– Vistas laterais de um escoamento em golfadas. ....	39
FIGURA 16	– Série temporal da fração de vazio reconstruída durante um período de 2s. ....	39
FIGURA 17	– Desvios de estimativa de fração de vazio. ....	41
FIGURA 18	– Série temporal do sensor <i>wire-mesh</i> , DI e do método proposto, no ponto de operação H4. ....	42
FIGURA 19	– Série temporal do sensor <i>wire-mesh</i> , DI e do método proposto, no ponto de operação H7. ....	42
FIGURA 20	– Série temporal do sensor <i>wire-mesh</i> , DI e do método proposto, no ponto de operação H8. ....	43
FIGURA 21	– Série temporal do sensor <i>wire-mesh</i> , DI e do método proposto, no ponto de operação H11. ....	43
FIGURA 22	– Série temporal do sensor <i>wire-mesh</i> , DI e do método proposto, no ponto de operação H12. ....	44
FIGURA 23	– Série temporal do sensor <i>wire-mesh</i> , DI e do método proposto, no ponto de operação H14. ....	44
FIGURA 24	– Série temporal do sensor <i>wire-mesh</i> , DI e do método proposto, no ponto de operação H15. ....	45
FIGURA 25	– Série temporal do sensor <i>wire-mesh</i> , DI e do método proposto, no ponto de operação H16. ....	45

## LISTA DE SIGLAS

AC	<i>Alternating Current</i> - Corrente Alternada
ART	<i>Algebraic Reconstruction Technique</i> - Técnica de Reconstrução Alébrica
BOMP	<i>Batch Orthogonal Matching Pursuit</i>
CC	Coefficiente de Correlação
DC	<i>Direct Current</i> - Corrente Contínua
DI	<i>Direct Imaging</i> - Imageamento Direto
FEM	<i>Finite Element Method</i> - Método de Elementos Finitos
ECT	<i>Electrical Capacitance Tomography</i> - Tomografia por Capacitância Elébrica
EI	Erro de Imagem
EIT	<i>Electrical Impedance Tomography</i> - Tomografia por Impedância Elébrica
EM	<i>Extended Matrix</i> - Matriz Estendida
ERT	<i>Electrical Resistance Tomography</i> - Tomografia por Resistência Elébrica
LASSO	<i>Least Absolute Shrinkage and Selection Operator</i>
LBP	<i>Linear Back Projection</i> - Retroprojeção Linear
LI	<i>Landweber's Iteration</i> - Iteração de Landweber
MSE	<i>Mean Squared Error</i> - Erro Médio Quadrático
OMP	<i>Orthogonal Matching Pursuit</i>
PLI	<i>Projected Landweber's Iteration</i> - Iteração de Landweber Projetada
PT	<i>Process Tomography</i> - Tomografia de Processos
RS	Resíduo de Solução
SNR	<i>Signal to Noise Ration</i> - Razão Sinal-Ruído
TSVD	<i>Truncated Singular Value Decomposition</i> - Decomposição em Valores Singulares Truncados
TV	<i>Total Variation</i>

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>10</b>
1.1	OBJETIVOS	12
1.2	ORGANIZAÇÃO	12
<b>2</b>	<b>TOMOGRAFIA POR CAPACITÂNCIA ELÉTRICA</b>	<b>13</b>
2.1	SISTEMA DE ECT	13
2.2	MODELO DO ECT E A MATRIZ DE SENSIBILIDADE	15
2.3	ALGORITMOS CLÁSSICOS	17
2.4	RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS COM REPRESENTAÇÕES ESPARSAS	20
2.4.1	Representação por Síntese	21
2.5	MÉTODO PROPOSTO	23
2.5.1	Aprendizagem de Dicionários com K-SVD	23
2.5.2	Algoritmo de Reconstrução	25
<b>3</b>	<b>EXPERIMENTOS</b>	<b>28</b>
3.1	IMAGEAMENTO DE ESCOAMENTOS BIFÁSICOS	28
3.2	ESCOAMENTOS BIFÁSICOS	28
3.3	SENSOR WIRE-MESH	28
3.4	SENSOR CAPACITIVO PARA IMAGEAMENTO DIRETO	31
3.4.1	Criação do Dicionário de Capacitâncias	33
3.4.2	Comparação entre Algoritmos de Reconstrução	36
3.4.3	Comparação com imageamento direto	40
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>46</b>
4.1	LISTA DE PUBLICAÇÕES	48
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>49</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Em ambientes industriais, o monitoramento e controle de processos são importantes para garantir a eficiência e segurança das operações. A tomografia de processos consiste de um conjunto de técnicas tomográficas usadas para investigar diferentes propriedades físicas dos materiais. As técnicas de tomografia são opções interessantes por serem não-intrusivas e não-invasivas, porém podem ser opções mais complexas por dependerem de algoritmos de reconstrução de imagens. Diferentes modalidades devem ser utilizadas, dependendo de propriedades físicas dos materiais a serem investigados. Essas modalidades podem ser: raios-X, raios- $\gamma$ , radiação infravermelha, ultrassom e impedância elétrica (DYNAKOWSKI, 1996).

A Tomografia por Impedância Elétrica (EIT) pode ser dividida em duas modalidades, Tomografia por Resistência Elétrica (ERT) e Tomografia por Capacitância Elétrica (ECT). A EIT é uma modalidade que apresenta muitas vantagens (HUANG et al., 1989) sobre as outras, por exemplo: possui baixo custo, não emite radiação ionizante, aquisições rápidas e robustez a alta pressão e temperatura. Porém, essa técnica também apresenta dificuldades. Por utilizar um campo elétrico, que possui baixa energia, o meio irá influenciar na trajetória do campo. Esse efeito é bem conhecido e denominado como *campo mole*, ou *soft field* (HUANG et al., 1989). Como o meio afeta a trajetória do campo e também sua amplitude, um modelo linear de sobreposição não é capaz de representar precisamente como o sistema responde a determinada distribuição do meio. Em outras palavras, se um meio for dividido em sub-regiões, não sobrepostas, e as respostas do sistema forem obtidas individualmente para cada sub-região, então a soma de todas as respostas individuais será diferente da resposta obtida para a região como um todo. Essa característica torna a reconstrução de imagens para essa modalidade um problema mais difícil, requerendo algoritmos que levam em conta essa não-linearidade.

Diferentes métodos de reconstrução foram propostos, em que a não-linearidade da EIT pode, ou não, ser levada em conta. Devido ao custo computacional envolvido nas soluções que levam em conta a não-linearidade, a abordagem mais comum é considerar que o problema é linear para pequenas perturbações.

Outra dificuldade da EIT é a pequena quantidade de eletrodos nos dispositivos. Como a circunferência do sensor é limitada, aumentar o número de eletrodos faz com que cada eletrodo tenha tamanho reduzido. Porém, para ser possível avaliar a influência do meio nas medições é importante que os eletrodos sejam suficientemente grandes. Tem-se, então, um compromisso entre o número de eletrodos e suas dimensões. Geralmente são utilizados 8 ou 12 eletrodos para um sistema de ECT (XIE et al., 1994). O número de medições acaba sendo muito menor do que a quantidade de *pixels* que deseja-se obter na imagem reconstruída. Dessa forma, a reconstrução de imagens que tenham um tamanho prático se torna um problema mal-posto, pois não possui solução única. Faz-se necessário então regularizar o problema, ou seja, incorporar informações conhecidas *a priori* sobre a solução esperada, restringindo as possíveis soluções do problema (ISAKSEN, 1996). A efetividade da regularização depende dessas informações, também conhecidas como *priors*, que podem trazer características sobre a solução, tais como: energia, esparsidade, estrutura, entre outros.

A motivação deste trabalho é desenvolver um novo algoritmo de reconstrução de imagens capaz de superar a não-linearidade e a pequena quantidade de informações obtidas pelos sensores. Para isso será utilizado o conceito de *representações esparsas*, em que uma imagem é descrita pela combinação linear de poucos elementos de uma base. Quando essa base possui redundância, ela é chamada de base sobre-completa. Bases, ou dicionários, podem ser os operadores de alguma transformação, como Fourier, já que esses possuem fácil implementação e usabilidade simples (AHARON; ELAD; BRUCKSTEIN, 2006). Porém, também é possível adaptar um dicionário para obter melhores representações esparsas a partir de um conjunto de dados de exemplo. Isso é conhecido como *Aprendizagem de Dicionários* e existem técnicas desenvolvidas especialmente para essa tarefa, como o K-SVD (AHARON; ELAD; BRUCKSTEIN, 2006).

Apesar do uso de representações esparsas trazer *prior* para regularizar o problema inverso, resta ainda a não-linearidade. Para reduzir os efeitos da não-linearidade propõem-se utilizar os vetores do dicionários, chamados também de átomos, como pontos de linearização do modelo. Assim, o erro da modelagem é mitigado por combinar um número menor de pontos de linearização para formar a solução.

Como prova de conceito, o algoritmo proposto é avaliado em uma planta de escoamentos bifásicos ar-água. Tal planta é equipada com um sensor *wire-mesh* capacitivo que é usado para obter as imagens de exemplo para o K-SVD, além de ser a referência de comparação para as imagens reconstruídas. As reconstruções são feitas sobre os dados obtidos de um sensor

capacitivo presente na planta. Comparações com algoritmos clássicos mostram a eficiência do método em reconstruir imagens mesmo em sistemas com poucas informações.

## 1.1 OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é o desenvolvimento de um método de reconstrução de imagens para ECT. Esse método deve ser capaz de gerar imagens que representem a distribuição de permissividade elétrica na seção transversal de um objeto de estudo. Para avaliar a acuidade das imagens reconstruídas, foi realizado um experimento em conjunto com um sensor *wire-mesh* para imagear um escoamento bifásico.

Como objetivos secundários tem-se: a validação do modelo computacional usado, a validação do método em testes com dados sintéticos e com dados obtidos em experimentos dinâmicos. Além de verificar a acuidade na reconstrução de imagens, foram avaliadas também estimativas de fração de vazio. Essas estimativas são comparadas com as estimativas feitas com imageamento direto e com um sensor de *wire-mesh*.

## 1.2 ORGANIZAÇÃO

O Capítulo 2 apresenta conceitos básicos de ECT, uma revisão dos algoritmos de reconstrução clássicos em ECT, a definição do estado da arte em reconstrução de ECT e, por fim, a proposta de um método de reconstrução.

O Capítulo 3 apresenta os equipamentos e instalações utilizados para a realização de experimentos de validação do método proposto. Os experimentos incluem comparações quantitativas entre métodos de reconstrução, usando diferentes métricas.

O Capítulo 4 apresenta uma discussão sobre os resultados obtidos neste trabalho, ideias a serem exploradas futuramente e uma lista das publicações realizadas durante a realização deste trabalho.

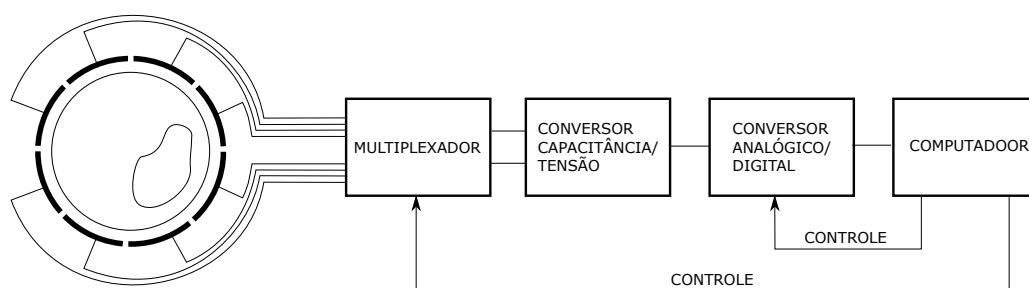
## 2 TOMOGRAFIA POR CAPACITÂNCIA ELÉTRICA

Nesse capítulo serão introduzidos conceitos básicos sobre ECT, assim como algoritmos clássicos de reconstrução de imagens aplicadas a ECT e o atual estado da arte.

### 2.1 SISTEMA DE ECT

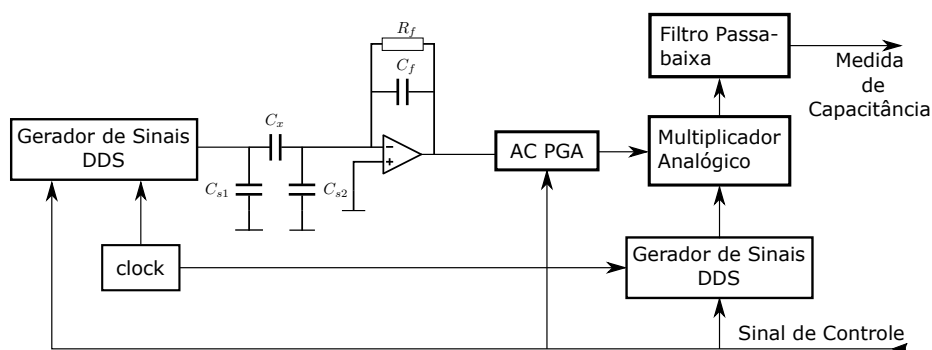
A ECT é considerada uma modalidade de tomografia que apresenta alta taxa de aquisição, por não necessitar movimentação de peças, e baixo custo. Um sensor de ECT faz uso de campos elétricos para determinar o valor da capacitância entre seus eletrodos, de forma a investigar a distribuição de material em sua região de abrangência. Devido à sua natureza, o campo elétrico entre os eletrodos não possui uma distribuição fixa, e sim dependente do objeto de estudo. Por exemplo, uma região de alta permissividade elétrica concentra o campo que a atravessa. Por isso, a reconstrução de imagens em ECT é um problema complexo e altamente não-linear.

O primeiro sistema de ECT, desenvolvido por Huang et al. (HUANG et al., 1989; XIE; PLASKOWSKI; BECK, 1989), tinha como propósito o monitoramento de escoamentos multifásicos. Esse sistema, ilustrado na Figura 1, era composto por 8 eletrodos, regularmente posicionados em uma circunferência ao redor de um tubo, um sistema de multiplexação de eletrodos, um conversor de transimpedância, um conversor AD e um computador.



**Figura 1: Sistema de ECT desenvolvido por Xie et al. em 1989. O sistema ilustrado nesse diagrama foi aprimorado em outros estudos, em especial a eletrônica de medição. Fonte: adaptado de Xie, Plaskowski e Beck (1989).**

Os primeiros circuitos de medição eram baseados na carga e descarga da capacitância investigada. Porém, esse tipo de circuito tem sua velocidade de medição limitada a esses ciclos de carga. Sistemas mais modernos fazem uso de circuitos de medição AC, nos quais é medido o nível de atenuação do sinal AC causado pela capacitância investigada. Um sistema de medição AC é ilustrado na Figura 2.



**Figura 2: Circuito AC de medição de capacitância.** Possibilitou leituras mais rápidas de capacitância do que os circuitos de carga e descarga eram capazes. Esse circuito, além de mais rápido, apresenta maior robustez a ruído quando comparado aos antigos circuitos de carga e descarga. Fonte: adaptado de Yang e York (1999).

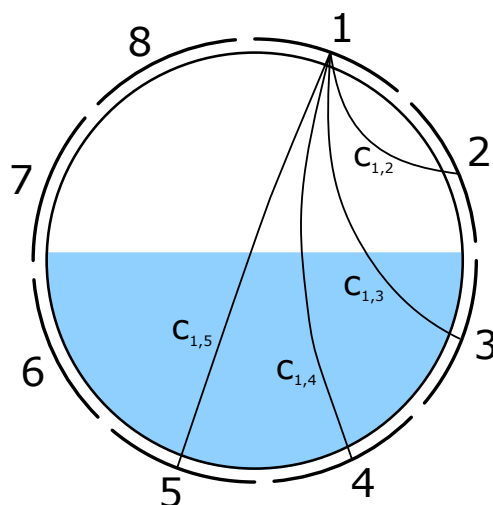
Além de melhorias nos circuitos de medição de capacitância, também foram estudadas diferentes configurações de eletrodos, alterando-se a quantidade, formato e padrão de excitação. Enquanto o tamanho dos eletrodos afeta os níveis de *Razão Sinal-Ruído* (SNR), a quantidade de eletrodos altera o número de medições. Ao aumentar a quantidade de eletrodos, a largura de cada um é diminuída, portanto deve haver um equilíbrio entre ambos. É comumente aceito que sensores com 8 ou 12 eletrodos possuem um bom compromisso entre SNR e o número de medições (YANG, 2010).

Diferentes geometrias também podem oferecer informações sobre o volume dos objetos imageados para a reconstrução de imagens 3D (MARASHDEH; TEIXEIRA; FAN, 2015). Enquanto diferentes padrões de excitação (YANG; JIA; MCCANN, 2015) podem realizar a aquisição de mais dados em menos tempo e também aumentar a SNR das medições.

Como ilustrado pela Figura 3, as medições são realizadas para todas as combinações de dois eletrodos. De forma que, para uma quantidade  $N$  de eletrodos, existem  $N(N - 1)/2$  medições únicas. Como em outras tomografias, a área investigada pelas medições se sobrepõem e, portanto, é necessário o uso de algoritmos de reconstrução de imagens para obter a distribuição de permissividade na seção transversal.

Obter uma imagem a partir de medições de um sensor tomógrafo qualquer é um processo chamado de reconstrução de imagem. A reconstrução de imagens é um caso de problema





**Figura 3:** As medições entre os elétrodos fornecem informação sobre a permissividade elétrica em diferentes regiões. Devido a sobreposição das regiões investigadas por cada par de eletrodos é necessário o uso de algoritmos de reconstrução de imagens para obter a distribuição de permissividade.

Fonte: autoria própria.

inverso, em que deseja-se obter os valores de entrada de determinado sistema a partir dos valores da saída. Para modelos lineares, tal sistema pode ser descrito como

$$y = F(x),$$

em que  $y$  é a saída do sistema,  $F$  é o modelo do sistema e  $x$  é a entrada. Nesse caso, tanto  $F$  quanto  $y$  são conhecidos e deseja-se inferir  $x$ .

## 2.2 MODELO DO ECT E A MATRIZ DE SENSIBILIDADE

O modelo de um sistema qualquer deve descrever o comportamento de suas saídas de acordo com suas entradas. Esse modelo é por vezes chamado de *problema direto*, em que as saídas do sistema são avaliada pela relação das entradas e o modelo do sistema. O problema direto da ECT é dado por

$$C = \Gamma(\varepsilon), \quad (1)$$

em que  $C$  representa as medições de capacitância,  $\Gamma(\cdot)$  é uma função não-linear que dita o comportamento do sistema e  $\varepsilon$  representa a distribuição de permissividade elétrica. Uma variação na capacitância causada por uma variação na distribuição de permissividade é expressa por (YANG; PENG, 2002)

$$\Delta C = \frac{d\Gamma}{d\varepsilon} (\Delta\varepsilon) + O\left((\Delta\varepsilon)^2\right), \quad (2)$$

sendo  $\frac{d\Gamma}{d\varepsilon}$  a sensibilidade da medição de capacitância a variações de permissividade e  $O((\Delta\varepsilon)^2)$  representa  $(\Delta\varepsilon)^2$  e termos de maior ordem. Quando  $\Delta\varepsilon$  é pequeno, os termos de maior ordem são desprezados e a relação é dada pela relação linear

$$\Delta C = S\Delta\varepsilon, \quad (3)$$

em que  $S = \frac{d\Gamma}{d\varepsilon}$ .

Por questões de implementação, essa relação deve ser discretizada, portanto tem-se um mapeamento linear e discreto na forma matricial

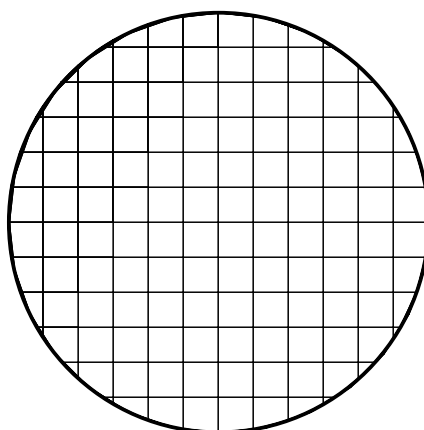
$$\mathbf{g} = \mathbf{S}\mathbf{f} + \mathbf{n}, \quad (4)$$

sendo  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{M \times N}$  a matriz de sensibilidade,  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^M$  um vetor contendo a variação de capacitância,  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$  um vetor contendo a distribuição de permissividade,  $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^M$  um vetor representando o ruído presente na medição,  $N$  representa o tamanho da imagem reconstruída e  $M$  representa o número de medições de capacitância. A matriz  $\mathbf{S}$  apresenta, em cada coluna, a influência de uma perturbação de um único *pixel* nas  $M$  medições de capacitância. É comum também que  $\mathbf{g}$  e  $\mathbf{f}$  sejam normalizados (XIE et al., 1992), ou seja,  $\mathbf{g} \in [0, 1]^M$  e  $\mathbf{f} \in [0, 1]^N$ .

Dependendo da geometria dos eletrodos e o posicionamento dos pares de eletrodos, a relação (2) pode ser simplificada, como é o caso para eletrodos planos e paralelos. Dado que num sistema de ECT os eletrodos não são paralelos e o campo não é confinado a região entre os pares, a relação entre  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$  não pode ser definida analiticamente. Por isso, o processo de obtenção da matriz de sensibilidade  $\mathbf{S}$  depende de abordagens numéricas como um *Método de Elementos Finitos* (FEM) (XIE; PLASKOWSKI; BECK, 1989; ZIENKIEWICZ, 1977). Para obter a matriz de sensibilidade, primeiro cria-se um modelo do sensor no *software* COMSOL *Multiphysics*<sup>®</sup>. Em seguida divide-se a região investigada em uma grade quadrada, como mostra Figura 4, em que cada sub-região será equivalente a um *pixel* da imagem reconstruída. Nesse *software*, é possível determinar valores de permissividade individuais para cada sub-região. Assim, para cada posição, altera-se o nível de permissividade do mínimo para o máximo e mede-se a capacitância em todos os eletrodos. O conjunto das capacitâncias são agrupadas de maneira matricial, com o formato

$$[\mathbf{S}]_{mn} = \mu_n \left\{ \frac{[\Gamma(\mathbf{f}_n)]_m - [\Gamma(\mathbf{f}_l)]_m}{[\Gamma(\mathbf{f}_h)]_m - [\Gamma(\mathbf{f}_l)]_m} \right\}, \quad (5)$$

em que  $[\mathbf{S}]_{mn}$  representa a diferença de capacitância normalizada na  $m$ -ésima medição causada por uma perturbação na  $n$ -ésima posição na grade,  $\mu_n$  é um fator de normalização de área usado quando o sensor não tem uma geometria quadrada,  $[\Gamma(\mathbf{f}_n)]_m$  é a  $m$ -ésima medição de



**Figura 4:** A discretização da região investigada pode ser feita separando-se a região em sub-regiões de diferentes formatos. A fim de simplificar a representação, a divisão é feita com uma grade quadrada. Quando a geometria do sensor não é retangular, é necessário incorporar um fator de normalização de área para compensar os *pixels* próximos a borda da região.

Fonte: autoria própria.

capacitância com uma perturbação na  $n$ -ésima posição da grade.  $[\Gamma(\mathbf{f}_l)]_m$  e  $[\Gamma(\mathbf{f}_h)]_m$  são a menor e maior medições de capacitância no  $m$ -ésimo eletrodo com a seção transversal preenchida com ar e água, respectivamente (ISAKSEN, 1996).

### 2.3 ALGORITMOS CLÁSSICOS

Para obter a imagem  $\mathbf{f}$ , a solução trivial seria  $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{g}$ . Tal solução necessitaria que a matriz  $\mathbf{S}$  fosse quadrada, ou seja,  $M = N$ . Em problemas práticos costuma-se ter  $M \ll N$ , portanto a matriz não possui inversa e o problema é subdeterminado. Assim outra solução deve ser encontrada.

Em (XIE; PLASKOWSKI; BECK, 1989), foi utilizada uma técnica similar de Retro-projeção Linear (LBP) que, em notação matricial, pode ser escrita como

$$\mathbf{f} = \mathbf{S}^T \mathbf{g}. \quad (6)$$

Apesar de simples, essa solução não tem muito uso prático pois resulta em imagens borradas e apresenta artefatos.

A primeira tentativa de melhorar a qualidade das imagens reconstruídas foi apresentada em (XIE; PLASKOWSKI; BECK, 1989), em que se utilizou um filtro de limiarização adaptativo para tornar as imagens binárias. Essa é uma técnica de pós-processamento para reduzir o nível de ruído na imagem resultante e não uma forma de regularização.

Como forma de regularização, diferentes métodos foram propostos para incorporar *priors*, tais como: uso de modelagens paramétricas, técnica de reconstrução algébrica (ART) (ISAKSEN; NORDTVEDT, 1994), redes neurais (FLORES; KURI-MORALES; GAMIO, 2006), regularização de Tikhonov, valores singulares truncados (PENG; MERKUS; SCARLETT, 2000) e Iteração de Landweber (LI) (LANDWEBER, 1951; YANG et al., 1999; PENG; MERKUS; SCARLETT, 2000).

Dentre essas formas de regularização, destacam-se por sua fórmula fechada, a regularização de Tikhonov e os valores singulares truncados. A regularização por Tikhonov é dada por

$$\mathbf{f} = \mathbf{S}^+ \mathbf{g} = (\mathbf{S}^T \mathbf{S} + \mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{g}, \quad (7)$$

em que  $\mathbf{L}$  é uma matriz genérica para incorporar algum *prior*. Enquanto a regularização por valores singulares truncados, ou pseudo-inversa, é dada por

$$\mathbf{f} = \mathbf{S}^+ \mathbf{g} = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{g} = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^+ \mathbf{U}^* \mathbf{g}, \quad (8)$$

em que  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  são matrizes quadradas e unitárias de tamanho  $M \times M$  e  $N \times N$ , respectivamente, e  $\mathbf{\Sigma}$  é uma matriz diagonal com os valores singulares de  $\mathbf{S}$ . A pseudo-inversa de  $\mathbf{\Sigma}$  é dada por outra matriz diagonal, cujos elementos maiores que certo limiar são invertidos e os elementos menores que esse limiar são zerados. Esse limiar define o nível de regularização e pode ser associado ao nível de ruído em  $\mathbf{g}$ .

Outra opção de regularização é a técnica iterativa LI, que apresenta os melhores resultados, entre os algoritmos citados acima (YANG; LIU, 2000), para reconstrução em ECT e é tida como referência para técnicas modernas. Cada passo do algoritmo LI é dado por

$$\mathbf{f}_{k+1} = \mathbf{f}_k - \eta \mathbf{S}^T (\mathbf{S} \mathbf{f}_k - \mathbf{g}), \quad (9)$$

em que  $\eta$  é o fator de ganho, ou tamanho do passo, e controla a taxa de convergência,  $\mathbf{f}_k$  e  $\mathbf{f}_{k+1}$  são iterações sucessivas de  $\mathbf{f}$ . Segundo (YANG et al., 1999), o tamanho do passo pode ser estimado como

$$\eta = \frac{2}{\lambda_{max}}, \quad (10)$$

em que  $\lambda_{max}$  é o maior autovalor de  $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ .

Apontado por (XIE, 1995), a não-linearidade do problema direto faz com que alguns *pixels* da imagem reconstruída assumam valores fora do conjunto normalizado  $[0, 1]$ . Para contornar esse problema, foi proposto o uso de um operador de projeção após cada iteração, resultando na chamada Iteração de Landweber Projetada (PLI), definida como

$$\mathbf{f}_{k+1} = P\left(\mathbf{f}_k - \eta \mathbf{S}^T (\mathbf{S}\mathbf{f}_k - \mathbf{g})\right) \quad (11)$$

em que  $P(\cdot)$  é definido como

$$P(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ x & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{if } x > 1 \end{cases} \quad (12)$$

Em (YANG et al., 1999) foi reportado que o uso desse operador é necessário para regularizar o processo iterativo e obter uma solução estável.

Anos mais tarde, com a popularização do conceito de *Compressed Sensing* (DONOHO, 2006), cujo objetivo é a reconstrução de um sinal a partir de poucas medições. Essa técnica é capaz de reconstruir sinais com menos amostras que o requerido pelo teorema de Shannon-Nyquist (JERRI, 1977), dado que os sinais possam ser representados de maneira esparsa em alguma base. Apesar das imagens de ECT não serem necessariamente esparsas, foram desenvolvidas técnicas capazes de explorar alguma característica esparsa das imagens, e.g., a presença de bordas. A regularização por *Total Variation* (TV) (RUDIN; OSHER; FATEMI, 1992; OSHER et al., 2005; BORSIC et al., 2007) é um exemplo disso.

A regularização TV tem como objetivo suavizar imagens enquanto preserva as bordas, ou seja, torna as imagens homogêneas por partes. O problema inverso com regularização TV é definido como

$$\hat{\mathbf{f}} = \underset{\mathbf{f}}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|\mathbf{S}\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_2^2 + \lambda_{TV} \|\mathbf{f}\|_{TV}, \quad (13)$$

em que  $\lambda_{TV}$  é um parâmetro que define o compromisso entre fidelidade de dados e regularização, e  $\|\cdot\|_{TV}$  é a norma TV. A norma TV pode ser isotrópica ou anisotrópica, definidas respectivamente como

$$\|\mathbf{f}\|_{TV_{\text{iso}}} = \left\| \sqrt{(\mathbf{D}_x \mathbf{f})^2 + (\mathbf{D}_y \mathbf{f})^2} \right\|_1 \quad (14)$$

e

$$\|\mathbf{f}\|_{TV_{\text{aniso}}} = |\mathbf{D}_x \mathbf{f}| + |\mathbf{D}_y \mathbf{f}|, \quad (15)$$

em que  $\mathbf{D}_x$  e  $\mathbf{D}_y$  representam operadores de diferenças finitas horizontal e vertical, respectivamente.

Essa forma de regularização é capaz de reduzir consideravelmente o borramento nas imagens, tornando as bordas mais definidas e diminuindo os artefatos. As vantagens dessa técnica, quando aplicada em ECT, foram demonstradas em (CHANDRASEKERA et al., 2012).

## 2.4 RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS COM REPRESENTAÇÕES ESPARSAS

Ao definir uma imagem, ou uma de suas características, como sendo esparsa, é possível regularizar o problema inverso. A forma como é dada a esparsidade da imagem é o que define o modelo de representação.

Os modelos de representação esparsa podem ser divididos em três (RAVISHANKAR; BRESLER, 2013): *síntese, análise e transformada*. O modelo de síntese é o mais estudado e comum dos três.

No modelo de síntese, a imagem a ser reconstruída é a combinação linear das colunas, ou átomos, de um dicionário  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{N \times K}$ , com  $K > N$ . A combinação linear dos átomos é feita de acordo com um vetor de coeficientes esparsos  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^K$ . Em notação matricial, a imagem reconstruída é dada por

$$\mathbf{f} = \mathbf{D}\mathbf{z}. \quad (16)$$

Com essa representação, a solução do problema inverso de (4) se torna

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{D} \left( \underset{\mathbf{z}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{z}\|_p \text{ sujeito a } \|\mathbf{SD}\mathbf{z} - \mathbf{g}\|_2^2 \leq \varepsilon \right), \quad (17)$$

em que  $\varepsilon$  é o maior erro de representação aceitável e a norma- $p$   $\|\cdot\|_p$  é dada por

$$\|\mathbf{z}\|_p = \left( \sum_i |z_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (18)$$

Caso  $p \geq 1$ , essa definição caracteriza uma norma, porém se  $0 \leq p < 1$  a definição caracteriza uma *quasinorma*<sup>1</sup>(RUDIN, 1991).

No modelo de análise, o termo regularizador favorece a esparsidade após uma transformação ser aplicada ao sinal. Um exemplo do modelo de análise é a regularização TV mencionada anteriormente. A forma genérica do modelo de análise é dada por

$$\hat{\mathbf{f}} = \underset{\mathbf{f}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{B}\mathbf{f}\|_p \text{ sujeito a } \|\mathbf{S}\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_2^2 \leq \varepsilon, \quad (19)$$

em que  $\mathbf{B}$  é o operador de análise. Recentemente esse modelo ganhou atenção de pesquisadores buscando algoritmos eficientes com garantias de convergência (ELAD; MILANFAR; RUBINS-TEIN, 2006; NAM et al., 2011).

<sup>1</sup>Uma quasinorma é uma métrica que não satisfaz todas as regras de uma norma, no intervalo  $0 \leq p < 1$  a norma- $p$  não satisfaz a desigualdade do triângulo(DONOHU, 2001)

Em (RAVISHANKAR; BRESLER, 2013), os autores cunharam o termo modelo de transformada como uma referência as transformações como Fourier, Wavelet, etc. O modelo de transformada é uma generalização do modelo de análise, em que considera-se que num determinado domínio o sinal é aproximadamente esparso. A solução do problema inverso para esse modelo é dada como

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{W}^T \left( \underset{\mathbf{f}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{f}\|_p \text{ sujeito a } \|\mathbf{f} - \mathbf{W}\mathbf{g}\|_2^2 \leq \varepsilon \right), \quad (20)$$

em que  $\mathbf{W}$  representa o operador de transformação e  $\mathbf{W}^T$  representa a transformação inversa.

Neste trabalho foi adotado o modelo de síntese, levando em conta a simples implementação dos algoritmos de reconstrução já desenvolvidos para o modelo. Essa decisão também leva em conta a maior dificuldade no aprendizado dos operadores  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{W}$  dos modelos de análise e transformada, respectivamente.

#### 2.4.1 REPRESENTAÇÃO POR SÍNTESE

O sucesso da reconstrução de imagens com o uso de dicionários para síntese depende do formato do dicionário  $\mathbf{D}$  a ser utilizado. Um dicionário pode ser um conjunto de funções predefinidas, como por exemplo a transformada de Fourier. Nesse caso cada elemento de  $\mathbf{z}$  representaria uma frequência. Esse tipo de dicionário tem a facilidade de ser predefinido porém não oferece garantia de esparsidade. Também é possível escolher de maneira arbitrária os átomos que compõem um dicionário, como feito em (YE et al., 2015).

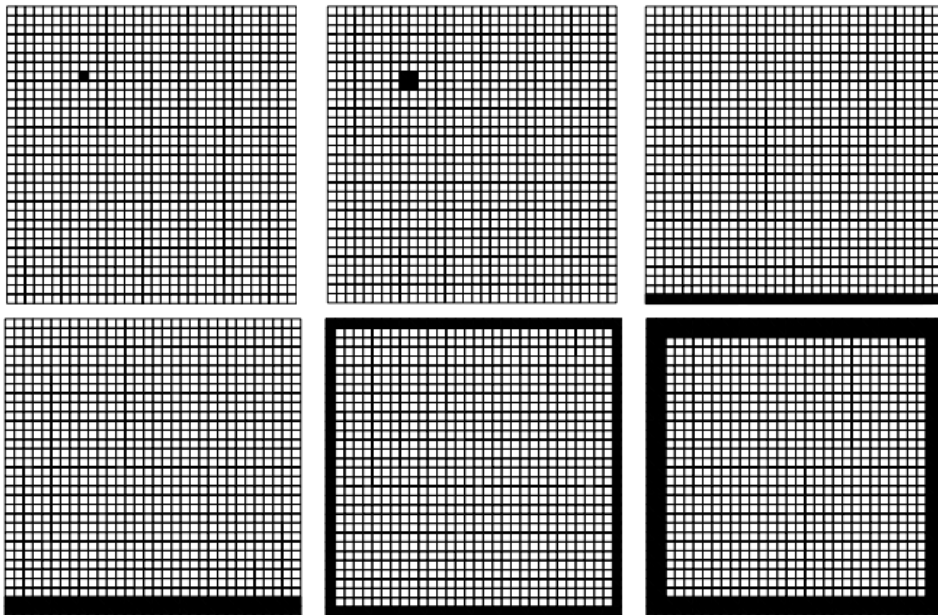
Ao usar um dicionário no problema de ECT, substitui-se (16) em (4) e obtém-se

$$\mathbf{g} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{z} + \mathbf{n}. \quad (21)$$

Como a matriz de sensibilidade é definida para cada *pixel* individualmente, qualquer combinação de *pixels* pode ser avaliada. Ao adicionar mais colunas a essa matriz, ela se torna redundante, pois qualquer outra coluna pode ser vista como uma combinação das demais. Porém, devido a não-linearidade da ECT, tal abordagem traz benefícios por trazer mais pontos de linearização para a matriz de sensibilidade.

Em (YE et al., 2015) foi proposto um dicionário denominado de matriz de sensibilidade estendida ( $\mathbf{A}$ ). Os autores estenderam a matriz de sensibilidade com as alterações de capacidade causadas por diferentes distribuições de permissividade. As distribuições usadas eram distribuições estratificadas, anulares de diferentes níveis e blocos de diferentes tamanhos, como ilustra a Figura 5. O dicionário contém as 1024 colunas originais da matriz de sensibilidade

acrescidas de outras 6639 colunas. As colunas adicionais trazem a informação de sensibilidade do sensor com relação a essas diferentes distribuições.



**Figura 5:** Exemplos de átomos usados para a extensão da matriz de sensibilidade. A estrutura dos átomos pode ser usada como um *prior*, por exemplo, a adição de átomos com distribuições estratificadas reforça que a solução esperada seja próxima de uma distribuição estratificada.

Fonte: adaptado de (YE et al., 2015).

É necessário então utilizar os átomos desse dicionário,  $\mathbf{d}_k$ , como entrada para o problema direto (1). A matriz de sensibilidade redundante então é definida como

$$[\mathbf{A}]_{mk} = \frac{[\Gamma(\mathbf{d}_k)]_m - [\Gamma(\mathbf{f}_l)]_m}{[\Gamma(\mathbf{f}_h)]_m - [\Gamma(\mathbf{f}_l)]_m}, \quad (22)$$

em que  $[\mathbf{A}] \in \mathbb{R}^{M \times K}$  representa a matriz de sensibilidade. Com essa matriz o problema direto se torna

$$\mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{n}. \quad (23)$$

Essa formulação apresenta vantagens sobre a formulação (16) por conter menos erros de linearização, inerentes a combinação de colunas de  $\mathbf{S}$ .

De forma similar a (17), a formulação da reconstrução com o dicionário de sensibilidade é dada por

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{D} \left( \underset{\mathbf{z}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{z}\|_0 \text{ sujeito a } \|\mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{z}\|_2^2 \leq \varepsilon \right). \quad (24)$$



Esse é um problema não convexo e de complexidade  $NP\text{-Hard}^2$  (DAVIS; MALLAT; AVELLANEDA, 1997). Métodos para resolução dessa espécie de problema incluem a relaxação da pseudo-norma  $\ell_0$  com a norma  $\ell_1$ . Com essa relaxação, o problema se torna convexo e é conhecido como *Least Absolute Shrinkage and Selection Operator* (LASSO). Mesmo com o uso de métodos de otimização convexa, o problema formulado em (YE et al., 2015) possui um custo computacional elevado devido ao tamanho do dicionário.

Em (YE et al., 2016), os mesmos autores apresentaram um novo estudo a respeito do tamanho e quantidade de padrões com blocos a serem usados. Ao remover outros padrões de distribuição e limitando a quantidade de tamanhos de blocos, o dicionário é consideravelmente reduzido. Porém, nesse trabalho o problema inverso não foi solucionado com uma formulação que favorece soluções esparsas como (24), mas com o algoritmo iterativo PLI.

Em (MOURA et al., 2016) foi identificado que o algoritmo de reconstrução utilizado em (YE et al., 2016) não favorece soluções esparsas e portanto não contrapõe o aumento de colunas da matriz. Os autores demonstraram as vantagens de uma formulação LASSO quando comparada a solução com PLI. Apesar dos resultados obtidos em (MOURA et al., 2016) serem melhores, a arbitrariedade da escolha dos átomos é indesejada.

## 2.5 MÉTODO PROPOSTO

Em (MOURA et al., 2017), os autores apresentaram o algoritmo K-SVD como uma maneira menos arbitrária para obtenção de um dicionário. Foi reportado que o uso desse dicionário melhorou os resultados obtidos. Neste trabalho, esse método será explicado de forma mais completa e com mais experimentos para demonstrar suas vantagens.

### 2.5.1 APRENDIZAGEM DE DICIONÁRIOS COM K-SVD

As abordagens anteriores, discutidas na seção 2.4, baseiam-se em escolhas arbitrárias de como montar um dicionário, porém também é possível aprender um dicionário usando métodos como K-SVD. O ponto chave da aprendizagem de dicionários é que os átomos serão inferidos com base nos dados de entrada, ou seja, a partir de um conjunto de dados de treinamento a K-SVD define cada átomo de forma a criar representações esparsas do conjunto de treinamento.

---

<sup>2</sup>NP (*Nondeterministic Polynomial Time*) é uma classe de problemas para os quais não é conhecido um algoritmo capaz de encontrar uma solução em tempo polinomial. NP-Difícil é uma classe de problemas considerados pelo menos tão difíceis quanto problemas NP, porém podendo ser muitos mais difíceis.

O método K-SVD é um método iterativo em que duas etapas são alternadas: codificação esparsa dos exemplos de acordo com o dicionário atual e atualização do dicionário para melhor representar os exemplos (AHARON; ELAD; BRUCKSTEIN, 2006).

O problema de otimização resolvido pelo K-SVD é pode ser definido como<sup>3</sup>

$$\operatorname{argmin}_{\mathbf{D}, \mathbf{X}} \left\{ \|\mathbf{F} - \mathbf{DX}\|_F^2 \right\} \text{ sujeito a } \forall_i, \|\mathbf{x}_i\|_0 \leq T, \quad (25)$$

em que  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{N \times I}$  é a matriz com as imagens de treinamento (cada coluna representa um sinal ou imagem),  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{K \times I}$  é a matriz esparsa de coeficientes,  $I$  representa a quantidade de imagens de treinamento,  $i$  indica em qual coluna de uma matriz o vetor se encontra<sup>4</sup> e  $T$  é o número máximo de átomos usados.

A solução da (25) é atingida alternando dois passos que podem ser resumidos como:

- Codificação Esparsa: resolver o problem decomposto em (26) com algum algoritmo *greedy*, ou guloso<sup>5</sup>.

$$\operatorname{argmin}_{\mathbf{x}_i} \|\mathbf{f}_i - \mathbf{D}\mathbf{x}_i\|_2^2 \text{ sujeito a } \|\mathbf{x}_i\|_0 \leq T \quad (26)$$

$$i = 1, 2, \dots, I$$

- Atualização do dicionário: para cada átomo ( $\mathbf{d}$ ) em  $\mathbf{D}$ :

- Define-se um grupo,  $\psi_k$ , com os exemplos que usam esse átomo.
- Calcula-se a matriz de erro de representação ( $\mathbf{E}_k$ ) como

$$\mathbf{E}_k = \mathbf{Y} - \sum_{j \neq k} \mathbf{d}_j \psi_k \quad (27)$$

- Restringe-se a matriz  $\mathbf{E}_k$ , usando somente as colunas presentes em  $\psi_k$ , para obter a matriz  $\mathbf{E}_k^R$ .
- Aplica-se a decomposição SVD na matriz  $\mathbf{E}_k^R = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$ .
- Define-se o átomo atualizado  $\tilde{\mathbf{d}}_k$  com a primeira coluna de  $\mathbf{U}$  e o vetor de coeficientes restrito  $\mathbf{x}_k^R$  com a primeira coluna de  $\mathbf{V}$  multiplicada pelo primeiro elemento de  $\Sigma$ .

<sup>3</sup>O problema também pode ser definido como a minimização da norma  $\ell_0$  sujeita a uma restrição do erro de representação.

<sup>4</sup>Por exemplo,  $\mathbf{x}_1$  é a primeira coluna da matriz  $\mathbf{X}$ .

<sup>5</sup>Um algoritmo *greedy*, ou guloso, é uma técnica de projeto de algoritmos que busca uma escolha localmente ótima a cada passo, esperando atingir uma escolha globalmente ótima eventualmente. Essa classe de algoritmos é interessante quando o problema a ser resolvido pertence à classe *NP-Hard*, por trazer uma solução aproximada em tempo polinomial.

### 2.5.2 ALGORITMO DE RECONSTRUÇÃO

A formulação do problema inverso é dada por (24) e para determinar a solução foi utilizado um algoritmo *greedy* conhecido como *Orthogonal Matching Pursuit* (OMP) (PATI; REZAIIFAR; KRISHNAPRASAD, 1993). O OMP pode ser descrito nos seguintes passos:

- Passo 0: entradas: dicionário  $\mathbf{A}$  e medições  $\mathbf{g}$ ;
- Passo 1: iniciar o resíduo como  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{g}$ , o conjunto de átomos selecionados  $\Phi = \emptyset$  e o número da iteração  $i = 1$ ;
- Passo 2: encontrar o átomo mais correlacionado com o resíduo  $\mathbf{r}_{i-1}$  e adicionar seu índice ao conjunto  $\Phi$ ;
- Passo 3: determinar a representação esparsa como  $\mathbf{z} = (\mathbf{A}_\Phi)^+ \mathbf{g}$ .  $\mathbf{A}_\Phi$  representa o subconjunto das colunas de índice  $\Phi$  do dicionário  $\mathbf{A}$ ;
- Passo 4: atualizar resíduo  $\mathbf{r}_i = \mathbf{g} - \mathbf{A}_i \mathbf{z}$ ;
- Passo 5: verificar condição de parada  $\|\mathbf{r}_i\|_2^2 \leq \varepsilon$  e se necessário voltar ao Passo 2.

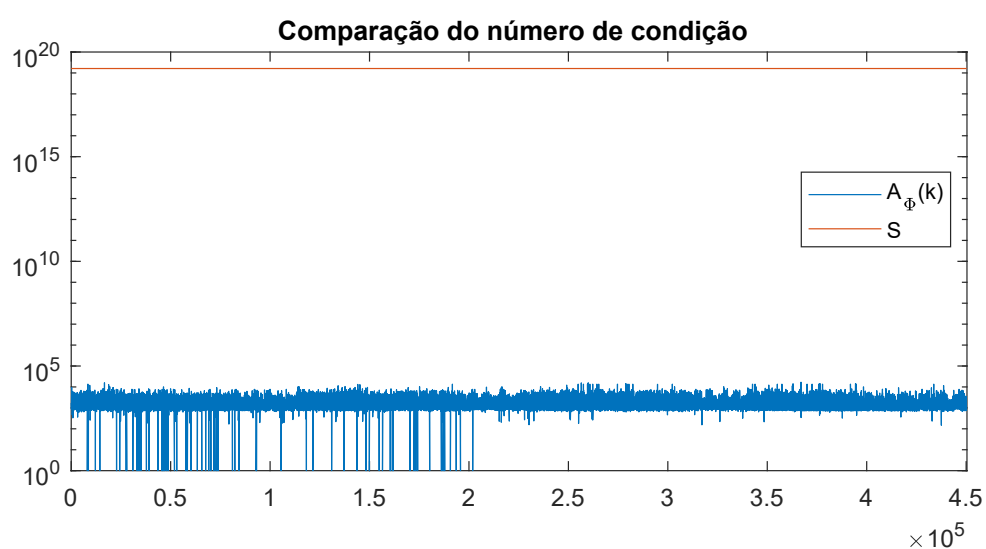
Um detalhe importante desse algoritmo é que no Passo 3, a matriz a ser invertida não é  $\mathbf{A}$  e sim  $\mathbf{A}_\Phi$ . Essa matriz tem um número menor de colunas, igual a cardinalidade de  $\Phi$ . O número de condição da matriz  $\mathbf{A}_\Phi$  tem como limite superior o número de condição<sup>6</sup> de  $\mathbf{A}$  mas, baseado em experimentos realizados (MOURA et al., 2017), costuma ser muito inferior como ilustra a Figura 6.

Existem muitas variantes do OMP original que trazem melhorias no desempenho, por exemplo: *Optimized Orthogonal Matching Pursuit* (OOMP) (REBOLLO-NEIRA; LOWE, 2002), *Stagewise Orthogonal Matching Pursuit* (StOMP) (DONOHO et al., 2006), *Orthogonal Complementary Matching Pursuit* (OCMP) e sua versão otimizada, *Optimized Orthogonal Complementary Matching Pursuit* (OOCMP) (RATH; SAHOO, 2009; RATH; GUILLEMOT, 2009), e *Batch-OMP* (BOMP) (RUBINSTEIN; ZIBULEVSKY; ELAD, 2008).

Quando deseja-se reconstruir um grande conjunto de sinais usando o mesmo dicionário, a variante BOMP traz a vantagem de realizar a reconstrução em lotes e por isso reduz o tempo total de reconstrução (RUBINSTEIN; ZIBULEVSKY; ELAD, 2008). Esse foi o algoritmo utilizado, considerando que os experimentos foram conduzidos em um conjunto de até

<sup>6</sup>O número de condição de uma matriz é definido pela razão entre o maior valor singular da matriz e o menor.

dezenas de milhares de amostras. Essa variante é otimizada por meio da fatorização de Cholesky, para reduzir o custo de inversão de matrizes. Esse algoritmo é definido em **Algoritmo 1** e a Tabela 1 sumariza os símbolos utilizados.



**Figura 6:** Com o número máximo de átomos usados fixado em 8 e o erro de representação em  $10^{-30}$ , reconstruções foram realizadas com 450000 frames e o número de condição das matrizes finais do OMP ( $A_\phi$ ), de cada frame  $k$ , foi avaliado. Os maiores valores obtidos estão várias ordens de grandeza abaixo do número de condição da matriz  $A$ .

Fonte: autoria própria.

**Tabela 1: Símbolos BOMP**

$\Phi$	Vetor ordenado de índices de átomos selecionados
$\mathbf{z}$	Vetor de solução esparsa
$\mathbf{r}$	Resíduo ( $\mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{z}$ )
$\gamma^0$	Produto $\mathbf{A}^T \mathbf{g}$
$\gamma$	Produto $\mathbf{A}^T \mathbf{r}$
$\mathbf{G}$	Produto $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$
$\mathbf{L}$	Fatorização Cholesky de $\mathbf{A}_{\Phi, \Phi}$
$\beta$	Produto $\mathbf{G}\mathbf{z}$
$\delta^n$	Norma ponderada $\mathbf{z}^T \mathbf{G}\mathbf{z}$
$\varepsilon^n$	Erro quadrático $\ \mathbf{r}\ _2^2$
$\square_{\Phi}$	As colunas de uma matriz genérica $\square$ cujos índices estão em $\Phi$
$[\Phi, \hat{k}]$	Concatenação do vetor $\Phi$ com o índice $\hat{k}$

**Algoritmo 1** *Batch-Orthogonal Matching Pursuit (BOMP)*

- Entrada:** Vetor  $\gamma^0$ ,  $\varepsilon^0 = \mathbf{g}^T \mathbf{g}$ , matriz  $\mathbf{G}$  e resíduo  $\varepsilon$   
**Saída:** Vetor de solução esparsa  $\mathbf{z}$
- 1: Definir  $\Phi = \emptyset$ ,  $\mathbf{L} = [1]$ ,  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ ,  $\gamma = \gamma^0$ ,  $\delta^0 = 0$  e  $n = 1$
  - 2: **Enquanto**  $\varepsilon^n > \varepsilon$  **faça**
  - 3:      $\hat{k} = \underset{k}{\operatorname{argmax}} |\gamma_k|$
  - 4:     **Se**  $k > 1$  **então**
  - 5:          $\mathbf{v} = \text{Solucionando para } \mathbf{v} \left\{ \mathbf{L}\mathbf{v} = \mathbf{G}_{[\Phi, \hat{k}]} \right\}$
  - 6:          $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^T & \sqrt{1 - \mathbf{v}^T \mathbf{v}} \end{bmatrix}$
  - 7:     **fim Se**
  - 8:      $\Phi = [\Phi, \hat{k}]$
  - 9:      $\mathbf{z}_{\Phi} = \text{Solucionando para } \mathbf{c} \left\{ \mathbf{L}\mathbf{L}^T \mathbf{c} = \gamma_{\Phi}^0 \right\}$
  - 10:      $\beta = \mathbf{G}_{\Phi} \mathbf{z}_{\Phi}$
  - 11:      $\gamma = \gamma^0 - \beta$
  - 12:      $\delta^n = \mathbf{z}_{\Phi}^T \beta_{\Phi}$
  - 13:      $\varepsilon^n = \varepsilon^{n-1} - \delta^n + \delta^{n-1}$
  - 14:      $n = n + 1$
  - 15: **fim Enquanto**

### 3 EXPERIMENTOS

#### 3.1 IMAGEAMENTO DE ESCOAMENTOS BIFÁSICOS

Como a validação do método desenvolvido neste trabalho será feita com o imageamento de escoamentos bifásicos, detalham-se neste capítulo os dois sensores utilizados nos experimentos: sensor *wire-mesh* e um sensor capacitivo.

#### 3.2 ESCOAMENTOS BIFÁSICOS

Escoamentos bifásicos ocorrem quando tem-se duas substâncias imiscíveis, ou a mesma substância em diferentes estados físicos, sendo transportadas pelo mesmo meio, como um tubo. Esses escoamentos podem ser encontrados tanto na natureza como em setores industriais. Na indústria, existe grande interesse no monitoramento desses escoamentos para garantir uma operação mais segura e eficiente em plantas.

O monitoramento de escoamentos bifásicos requer sistemas capazes de diferenciar uma fase da outra. Para isso são necessários sensores capazes de explorar diferentes propriedades dos materiais envolvidos, como: condutividade/permisividade elétrica, absorção de radiação, translucidez, etc.

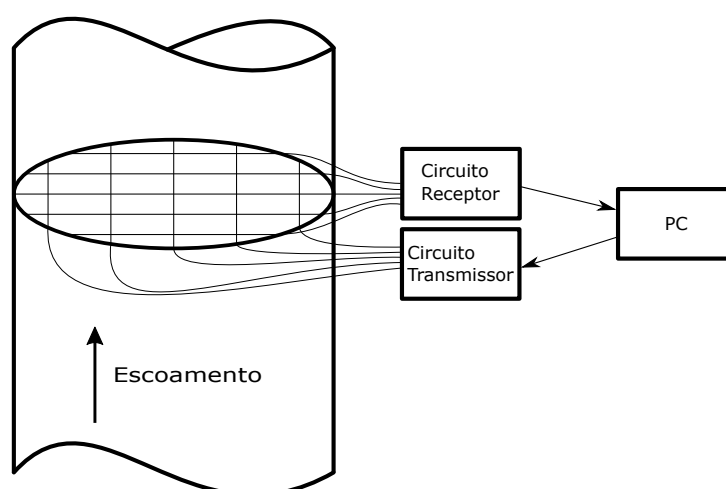
No caso de um escoamento gás-líquido, como ar-água, pode-se explorar as diferentes permisividades elétricas relativas (HUANG et al., 1989), 1 e 80 respectivamente. Assim como o ECT, os sensores apresentados a seguir são capazes de perceber a variação da permisividade em seu interior.

#### 3.3 SENSOR WIRE-MESH

Sensores *wire-mesh* foram introduzidos como uma forma de obter imagens de uma seção transversal sem a necessidade de tomógrafos. As vantagens dessa técnica sobre os tomógrafos de raios-x e raios- $\gamma$  são a alta taxa de aquisição, baixo custo, a segurança de

operação e o fato de dispensar o uso de algoritmos de reconstrução. Com relação a outras técnicas como o ECT, os sensores *wire-mesh* possuem maior resolução espacial e maior acurácia em seus *pixels*. Apesar dessas vantagens, os sensores *wire-mesh* são intrusivos e isso pode ser visto como uma característica indesejável.

Um sensor *wire-mesh* consiste de um arranjo de fios dispostos em dois planos com direções, geralmente, perpendiculares formando uma grade quadrada. Esses planos são separados por uma pequena distância, tipicamente de 2 mm ou menor (Da Silva; SCHLEICHER; HAMPEL, 2007; Da Silva . et al., 2010), não havendo contato entre os fios. Os planos são ligados a um circuito transmissor e outro a um circuito receptor, como ilustrado na Figura 7. Cada um dos pontos de intersecção dos planos é considerado um eletrodo de medição de ca-



**Figura 7: Esquema simplificado do sensor *wire-mesh*. Dois planos de fios, com orientações perpendiculares entre si, são ligados ao circuito transmissor e receptor. Os pontos de cruzamento são investigados um a um, e armazenados em forma matricial em um computador para formar uma imagem completa.**

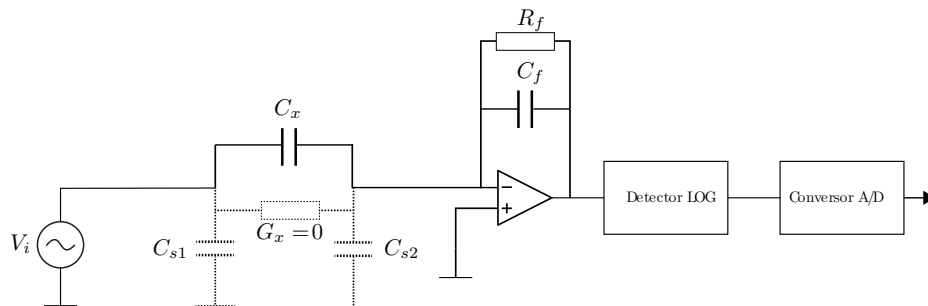
**Fonte: autoria própria.**

pacitância. A cada período de medição, um dos fios do plano ligado ao transmissor é excitado enquanto um dos fios do plano ligado ao receptor é investigado. Dessa maneira são medidos todos os cruzamentos, um a um.

O sensor *wire-mesh* fornece medições de baixa incerteza nos pontos de cruzamento (SHARAF et al., 2011; BANOWSKI et al., 2015). Porém, devido a concentração da área sensível ao redor do cruzamento, regiões entre diferentes cruzamentos não são suficientemente sensíveis para serem diretamente investigadas. Assim a imagem resultante do sensor costuma ter um número de *pixels* igual ao número de cruzamentos.

O sistema de medição do *wire-mesh* utilizado é constituído de uma fonte de excitação senoidal, um amplificador de transimpedância e um sistema demodulador. O sistema demodu-

lador do sensor *wire-mesh* utilizado difere do mostrado para ECT. Como ilustrado na Figura 8, a demodulação é realizada com um detector logarítmico. Esse detector apresenta em sua saída um nível DC equivalente ao envelope do sinal senoidal na saída do amplificador de transimpedância.



**Figura 8:** Sistema de medição AC usado para o sensor de *wire-mesh*. A condutância do fluido  $G_x$  é desprezada. Os valores de  $C_f$  e  $R_f$  são escolhidos de acordo com a faixa de capacitâncias  $C_x$  esperadas para que o ganho do amplificador seja adequado a medição. O detector LOG é responsável pela demodulação do sinal AC. Após a demodulação, o sinal deve ser digitalizado para processamento.

Fonte: autoria própria.

A impedância medida ( $Z_x$ ) é complexa, ou seja, contém um valor real (condutância) e um valor imaginário (reatância). Essa impedância é formada pela capacitância ( $C_x$ ) em paralelo com a condutância ( $G_x$ ) do fluido. Como o sinal de excitação se encontra numa faixa de alta frequência e o foco é a medição da capacitância, pode-se desprezar  $G_x$ . O circuito amplificador da Figura 8 tem como expressão de saída

$$V_o = -V_i \left( \frac{Z_f}{Z_x} \right) = -V_i \left( \frac{j\omega C_x}{G_f + j\omega C_f} \right) = -V_i \left( \frac{j\omega C_x R_f}{1 + j\omega C_f R_f} \right), \quad (29)$$

sendo  $\omega$  a frequência angular do sinal de excitação ( $V_i$ ) e  $G_f$  o inverso de  $R_f$ . Caso  $1 \ll \omega C_f R_f$ , a Equação (29) pode ser simplificada como

$$V_o = -V_i \left( \frac{C_x}{C_f} \right) \quad (30)$$

O sinal  $V_o$  então é demodulado por um detector logarítmico, cuja saída é expressa por

$$V_{log} = V_a \ln \left( \frac{V_o}{V_b} \right), \quad (31)$$

em que  $V_a$  e  $V_b$  são constantes ligadas ao detector LOG. O sinal  $V_{log}$  deve ainda ser convertido para formato digital para ser processado.

Considerando uma relação diretamente proporcional entre  $C_x$  e a permissividade elétrica média no ponto de medição ( $\epsilon_x$ ), tem-se a relação



$$V_{log} = a \ln(\varepsilon_x) + b, \quad (32)$$

em que  $a$  e  $b$  são constantes que representam fatores como a geometria do cruzamento, características do circuito de medição ( $R_f, C_f, V_a$  e  $V_b$ ) e características do sinal de excitação  $V_i$  (Da Silva, 2008). Para determinar a permissividade média em cada ponto de medição ( $\varepsilon(x)$ ) é necessário isolar o valor na Equação (32)

$$\varepsilon(x) = \exp\left(\frac{V_{log}(x) - b(x)}{a(x)}\right). \quad (33)$$

Os valores de  $a(x)$  e  $b(x)$  são determinados por meio de um procedimento de calibração. Os pontos de cruzamento são medidos durante um período de tempo  $T$  contendo, ora o material de menor permissividade esperada  $\varepsilon_L$ , ora o material de maior permissividade esperada  $\varepsilon_H$ . Isso resulta nos vetores  $\mathbf{V}_L(\mathbf{x}, \mathbf{t})$  e  $\mathbf{V}_H(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ , cujas médias temporais são, respectivamente,  $\bar{\mathbf{V}}_L(\mathbf{x})$  e  $\bar{\mathbf{V}}_H(\mathbf{x})$ . Esses valores levam ao cálculo de  $a(x)$  e  $b(x)$  como

$$a(x) = \frac{\bar{\mathbf{V}}_H(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{V}}_L(\mathbf{x})}{\ln(\varepsilon_H) - \ln(\varepsilon_L)} \quad (34)$$

$$b(x) = \frac{\bar{\mathbf{V}}_H(\mathbf{x}) \ln(\varepsilon_H) - \bar{\mathbf{V}}_L(\mathbf{x}) \ln(\varepsilon_L)}{\ln(\varepsilon_H) - \ln(\varepsilon_L)} \quad (35)$$

A fração de vazio local,  $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ , pode ser considerada como a normalização dos valores de  $\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{t})$  como

$$\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \frac{\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{t}) - \varepsilon_L(\mathbf{x})}{\varepsilon_H(\mathbf{x}) - \varepsilon_L(\mathbf{x})} \quad (36)$$

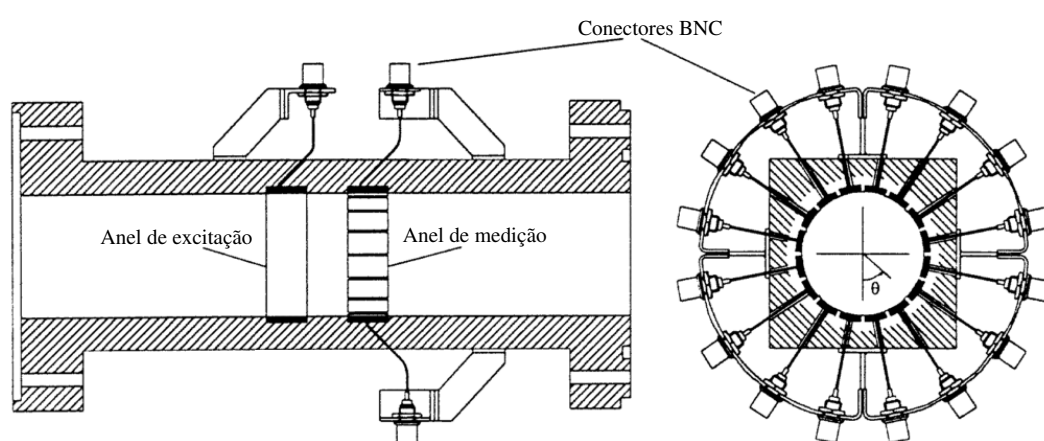
Nesse estudo, foram considerados escoamentos ar-água, então os valores de permissividade relativa são  $\varepsilon_L = 1$  e  $\varepsilon_H = 80$ .

Os  $x$  valores de  $\alpha$  formam a imagem da seção transversal, mostrando as diferentes concentrações de gás, ou líquido, presente em cada ponto. Essas imagens podem ser pós-processadas para identificação de bolhas, fração de vazio total no sensor, entre outras aplicações.

### 3.4 SENSOR CAPACITIVO PARA IMAGEAMENTO DIRETO

O imageamento direto (DI) pode ser visto como um compromisso entre um sensor intrusivo com medições locais e um tomógrafo (não intrusivo), em um sistema que não necessita resolver um problema inverso. Em (SELEGHIM et al., 1998), os autores desenvolveram um

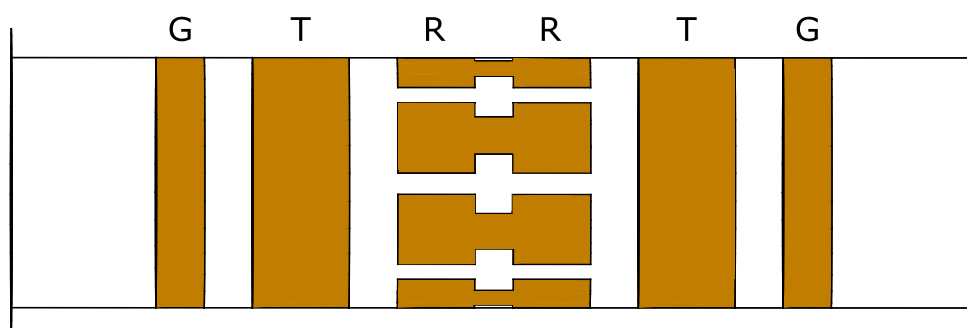
sensor não intrusivo para realizar medições locais de impedância elétrica. Esse sensor é formado por dois anéis eletrodos dispostos nas paredes de um tubo separados por uma determinada distância, como ilustrado na Figura 9.



**Figura 9:** Esquema de um sensor de imageamento direto para escoamentos bifásicos. Fonte: adaptado de (SELEGHIM et al., 1998).

As medições de impedância são realizadas entre os eletrodos do anel de medição e o anel de excitação. Como o campo elétrico fica disposto de maneira longitudinal e não transversal (como em tomógrafos elétricos), a sensibilidade é maior nas regiões próximas a parede do tubo do que na região central.

Em (WRASSE et al., 2014), foi proposto um sensor de arranjo similar e capaz de realizar medições de capacitância entre os eletrodos. O sistema de medição utilizado nesse sensor é o mesmo utilizado no *wire-mesh* capacitivo, mostrado na Figura 8. O sistema desenvolvido é um arranjo de 2 sensores, cada qual com um anel de medição e um excitação, nas extremidades foram colocados 2 anéis de guarda, como ilustra a Figura 10.



**Figura 10:** Modelo do sensor de imageamento direto utilizado para os experimentos com escoamentos bifásicos. Os anéis de guarda são denotados pela letra G, os anéis de excitação pela letra T e os eletrodos de medição pela letra R. Fonte: autoria própria.

As imagens geradas por esse tipo de sensor mostram o comportamento do escoamento ao longo do tempo nas regiões investigadas individualmente por cada eletrodo. Apesar de ser possível inferir o padrão de escoamento e os níveis de fração de vazio do escoamento, não se extrai muita informação a respeito da distribuição de fases. Por exemplo, é possível inferir um padrão de escoamento estratificado se os eletrodos da parte inferior possuem um nível homogêneo entre si e diferente daquele dos eletrodos superiores. Porém, não é possível determinar o formato da interface entre fases. A fração de vazio pode ser facilmente calculada como o valor médio das capacitâncias normalizadas dos eletrodos.

Tentativas de estimar a distribuição das fases com o uso de diferentes algoritmos de reconstrução de imagens foram reportados em (MOURA et al., 2015, 2016, 2017).

### 3.4.1 CRIAÇÃO DO DICIONÁRIO DE CAPACITÂNCIAS

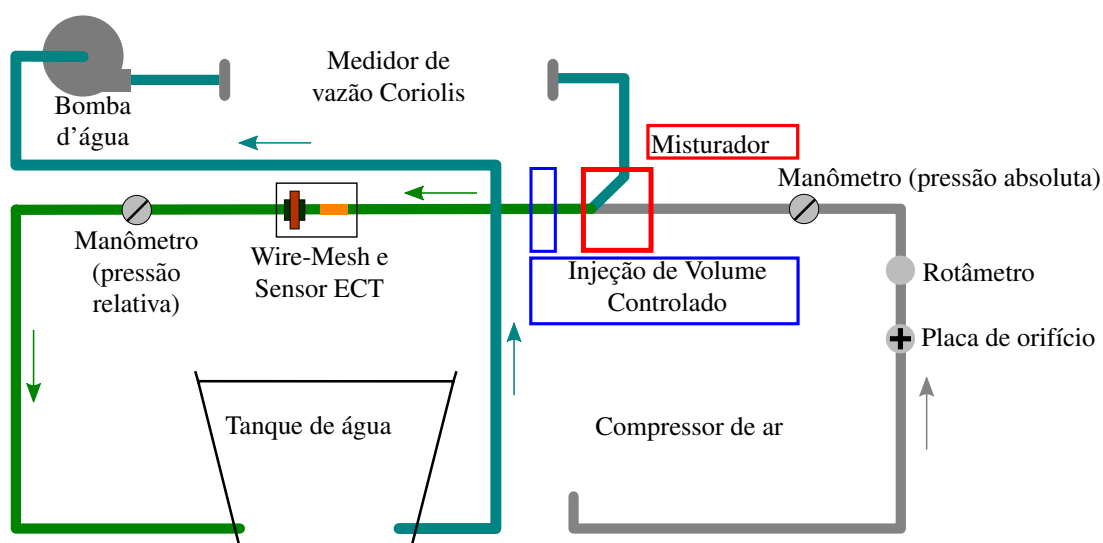
Pretende-se usar a K-SVD em um conjunto de imagens obtidas com um sensor *wire-mesh*, para aprender um dicionário que represente bem as estruturas de um padrão de escoamentos bifásicos horizontais. O sensor *wire-mesh* utilizado fornece dados em um formato  $12 \times 12$ , ou seja, imagens de 144 *pixels*. Dada a geometria do tubo ser redonda, somente 112 desses 144 *pixels* são relevantes e os demais são descartados.

Para a obtenção das imagens de *wire-mesh*, foram realizados experimentos numa planta de escoamentos bifásicos horizontais, ilustrada na Figura 11. Essa planta é equipada com tubulações independentes para ar e água, sistema de controle de injeção para ambas tubulações e dois sensores para imageamento, um *wire-mesh* e um sensor para ECT. O sistema de controle é capaz de combinar diferentes velocidades superficiais para ar e água, criando vários pontos de operação em diferentes padrões de escoamento.

Dados foram adquiridos durante 60 segundos em cada um dos 16 pontos de operação da planta indicados na Figura 12. Durante os períodos de aquisição, ambos sensores estavam capturando numa taxa de 500 *frames* por segundo, resultando num total de  $48 \times 10^4$  *frames*.

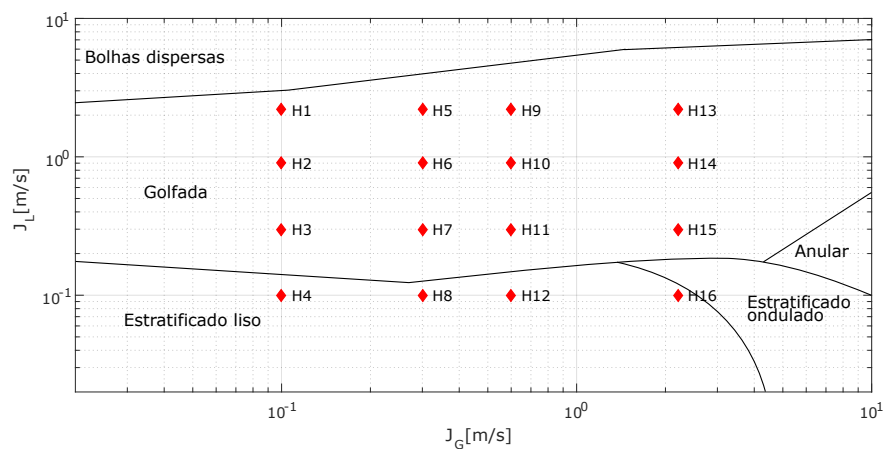
Para aprender o dicionário é formado um subconjunto desse total de *frames*. Um histograma da fração de vazio média por *frame* foi analisado. Desse histograma foram escolhidos, aproximadamente<sup>1</sup>,  $10^4$  *frames* de maneira uniforme e aleatória dentre os *bins* do histograma. Assim, o histograma de fração de vazio do subconjunto de aprendizado se torna uniforme, garantindo que não exista um viés no dicionário aprendido. A Figura 13 ilustra esse processo de amostragem do conjunto de *frames*.

<sup>1</sup>O último *bin* do histograma não possui *frames* e isso causaria uma divisão inexata entre os outros 9 *bins*, por isso foram escolhidos  $10^4 - 1$  *frames*.



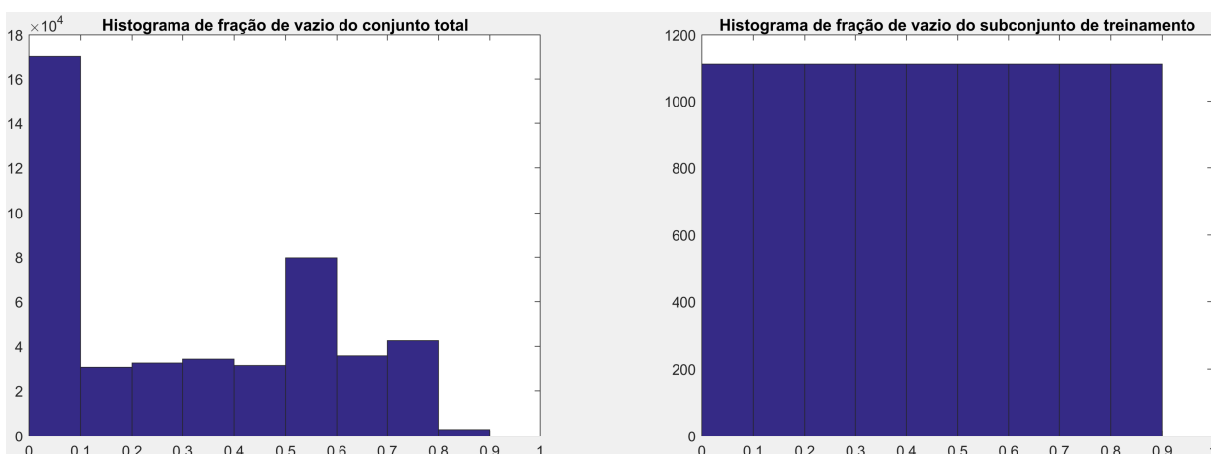
**Figura 11:** Planta de escoamentos bifásicos horizontais usada para criar vários pontos operacionais para diferentes padrões de escoamento. A planta é equipada com um sensor capacitivo e também um *wire-mesh*  $12 \times 12$  para referência.

Fonte: autoria própria.



**Figura 12:** Pontos operacionais imageados, representados por losangos vermelhos, distribuídos sobre dois padrões de escoamento. Dados foram adquiridos durante 60 segundos para cada ponto operacional para ambos os sensores.

Fonte: autoria própria.



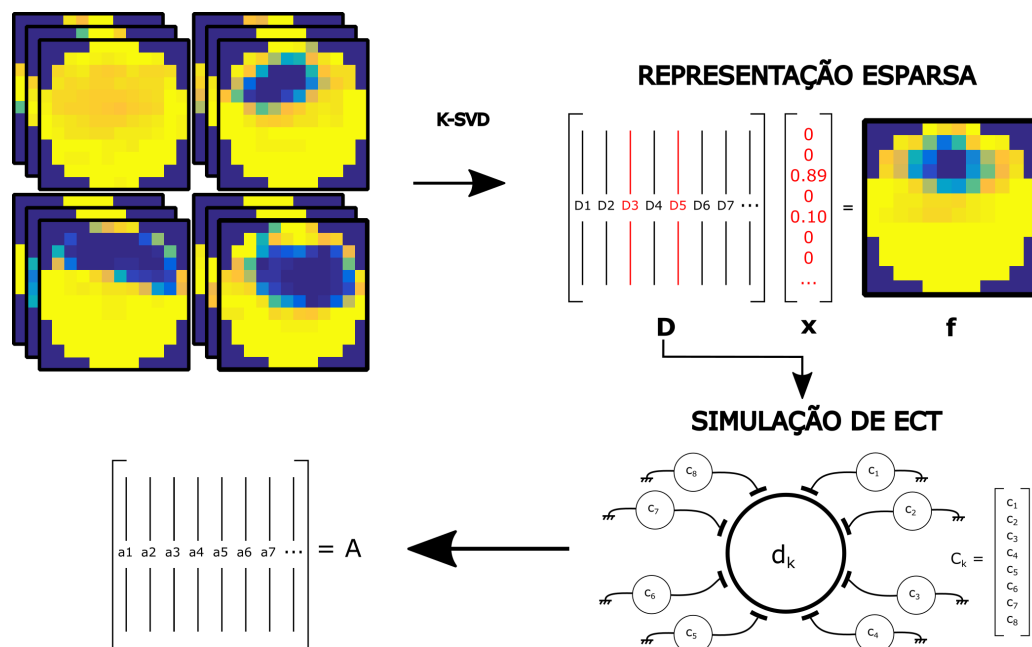
**Figura 13: Histogramas de fração vazio.** A esquerda, o histograma de fração de vazio do conjunto completo de *frames*. A direita, o histograma do subconjunto dos *frames* de treinamento. O uso de um subconjunto, aproximadamente, uniforme é importante para evitar viés no dicionário.

Fonte: autoria própria.

As características do dicionário tais como número de átomos e número máximo de átomos combinados para formar uma solução, foram determinadas de maneira empírica. O número máximo de combinações foi definido como 8, por esse ser o posto máximo da matriz de sensibilidade, tradicional ou estendida. O número de átomos deve ser suficientemente grande para permitir a representação de diversas imagens, ao menos o número de *pixels*. Porém, um número grande de átomos aumenta o tempo para levantamento do dicionário de sensibilidade por FEM e também aumenta o custo computacional das reconstruções. O tamanho determinado foi de 225 átomos, aproximadamente o dobro do número de *pixels* relevantes mais um. Esse tamanho também foi o que gerou os melhores resultados de reconstrução.

De posse desse dicionário de distribuições de permissividade, deseja-se obter um dicionário que represente as capacitâncias dessas distribuições. A obtenção desse dicionário de capacitâncias é dada de maneira similar a obtenção da matriz de sensibilidade estendida. Cada átomo do dicionário é usado como distribuição de permissividade dentro do sensor em uma simulação, em outras palavras, cada átomo é usado como  $\varepsilon$  no problema direto (1). O dicionário de capacitâncias é então normalizado como em (22). A Figura 14 ilustra esse processo de criação do dicionário  $\mathbf{A}$  a partir das imagens de treinamento e o uso da K-SVD.

Esse processo de transferir os átomos do dicionário aprendido, domínio da permissividade, para o domínio da capacitância pode-ser interpretado como uma forma de linearização por partes. Essa forma de linearização deve diminuir os erros na capacitância em distribuições de permissividade próximas aos átomos aprendidos em detrimento de distribuições pouco comuns nos dados de treinamento.



**Figura 14:** Imagens de escoamentos gás-líquido são usadas como imagens de treinamento para o algoritmo K-SVD para criar um dicionário de representação esparsa. Cada átomo do dicionário é usado como distribuição de permissividade numa simulação de ECT para determinar as medições de capacitância. Os valores são então normalizados e colocados nas colunas da nova matriz de sensibilidade.

Fonte: autoria própria.

### 3.4.2 COMPARAÇÃO ENTRE ALGORITMOS DE RECONSTRUÇÃO

Para avaliar o desempenho do algoritmo desenvolvido, usou-se como referência as imagens de *wire-mesh* e as imagens reconstruídas foram comparadas com reconstruções com outros dois métodos: (1) usando a matriz de sensibilidade e regularização TV (RODRÍGUEZ; WOHLBERG, 2006) e (2) usando uma matriz estendida (EM) com blocos de 9 *pixels* e reconstrução por PLI (YE et al., 2016). Essa comparação tem como base 3 diferentes métricas, sendo elas: Erro de Imagem (EI) (YANG; PENG, 2002), Coeficiente de Correlação (XIE et al., 1994) e Resíduo da Solução (RS) (YANG; PENG, 2002). O EI é calculado como

$$EI(\mathbf{f}, \hat{\mathbf{f}}) = \frac{\|\mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}}\|_2}{\|\mathbf{f}\|_2}, \quad (37)$$

em que  $\hat{\mathbf{f}}$  é a estimativa da distribuição de permissividade e  $\mathbf{f}$  é a imagem obtida pelo sensor *wire-mesh*. O CC é definido por

$$CC(\mathbf{f}, \hat{\mathbf{f}}) = \frac{\sum_{n=1}^N (\hat{f}_n - \bar{\hat{f}}) (f_n - \bar{f})}{\sqrt{\sum_{n=1}^N (\hat{f}_n - \bar{\hat{f}})^2 \sum_{n=1}^N (f_n - \bar{f})^2}}, \quad (38)$$

em que  $\bar{f}$  e  $\hat{f}$  são os valores médios de  $\mathbf{f}$  e  $\hat{\mathbf{f}}$  respectivamente. O resíduo é calculado como

$$RS(\Theta, \mathbf{y}) = \frac{\|\Theta \mathbf{y} - \mathbf{g}\|_2}{\|\mathbf{g}\|_2}, \quad (39)$$

em que  $\Theta$  e  $\mathbf{y}$  representam uma matriz de sensibilidade e um vetor solução genéricos. Esses devem ser substituídos pela matriz de sensibilidade e vetor de solução usados em cada um dos 3 métodos, por exemplo, na reconstrução proposta  $\Theta = \mathbf{A}$  e  $\mathbf{y} = \mathbf{z}$ .

Numa reconstrução perfeita, esses valores são  $EI = 0$ ,  $CC = 1$ , e  $RS = 0$ . De maneira ótima, deseja-se chegar o mais próximo possível desses valores, porém a prática demonstra a dificuldade de alcançar resultados ótimos.

A tabela 2 contém exemplos de imagens reconstruídas em diferentes pontos operacionais. É clara a vantagem da abordagem proposta nos 4 primeiros exemplos, principalmente no que diz respeito ao resíduo. A abordagem de uma matriz de sensibilidade redundante pode ser vista como uma linearização por partes do problema direto e por isso é esperado que o resíduo de tal solução seja muito inferior a abordagens clássicas de matriz de sensibilidade. A última linha da tabela mostra resultados piores de  $EI$  e  $CC$  para o método proposto.

A Figura 15 mostra a vista lateral de um escoamento no ponto H3 durante 2 s. Nota-se que as imagens reconstruídas possuem um formato mais homogêneo no tempo que as imagens obtidas por *wire-mesh*. Também é possível notar que o formato das bolhas que atravessam o sensor não é idêntico ao formato apresentado no *wire-mesh*, porém os instantes em que aparecem são os mesmos.

Na Figura 16, são comparadas as frações de vazio das imagens reconstruídas com as imagens do *wire-mesh* durante um período de 2 s no ponto H3. É notável que todos os métodos de reconstrução resultam em um valor mínimo de fração de vazio menor que o mínimo do *wire-mesh*, isso acontece devido a homogeneidade das imagens reconstruídas. O algoritmo proposto novamente mostra desempenho superior aos outros aproximando melhor, em média, os valores de fração de vazio. As frações de vazio das imagens reconstruídas são avaliadas com base no Erro Médio Quadrático (MSE), definido como







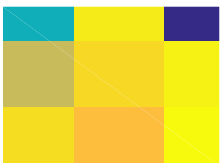
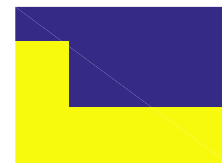

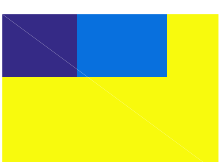










$$MSE = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J (\hat{\alpha}_j - \alpha_j)^2, \quad (40)$$

em que  $\hat{\alpha}_j$  e  $\alpha_j$  são as frações de vazio do  $j$ -ésimo *frame* estimados pelo sensor *wire-mesh* e pela imagem reconstruída respectivamente.

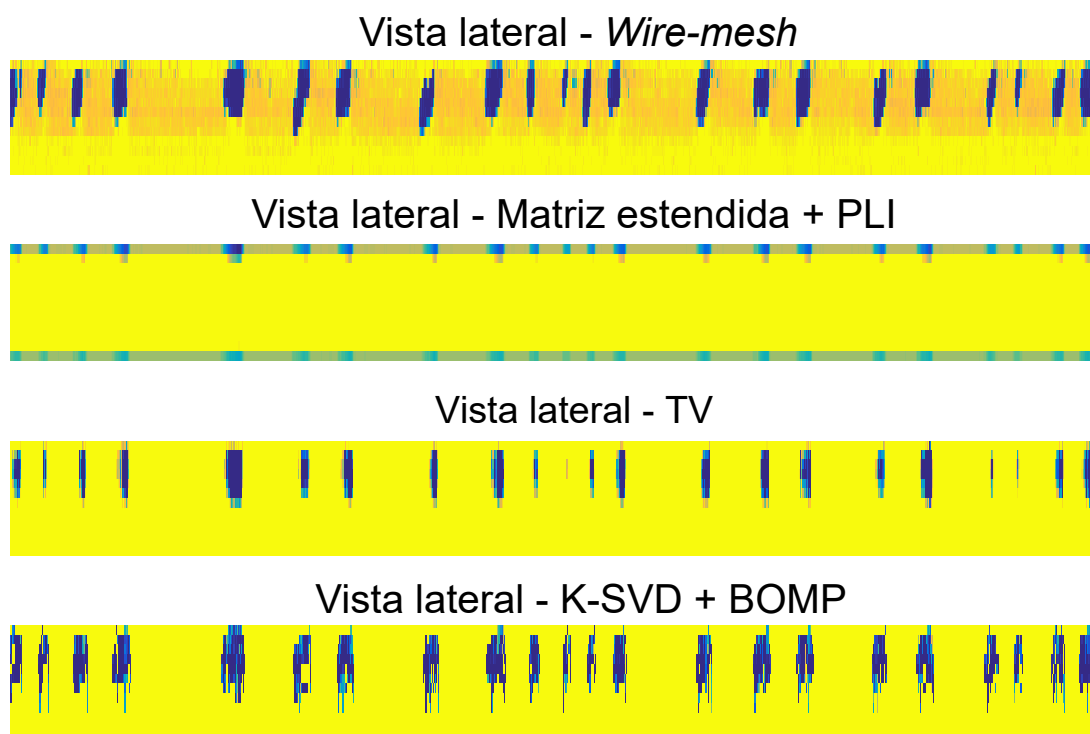
Outra comparação importante é o tempo médio de reconstrução. Nesse período de 2 s foram mensurados também os tempos em que cada algoritmo levou para reconstruir um *frame*, a

**Tabela 2: Reconstrução de imagens em escoamentos bifásicos ar-água em dois padrões de escoamento, H3 para as 2 primeiras linhas e H16 para as demais. As imagens reconstruídas são comparadas com base em 3 métricas: Erro de Imagem, Coeficiente de Correlação e Resíduo da Solução. A reconstrução baseada em K-SVD + OMP obteve melhores resultados em 4 dos 5 casos, exceto na comparação do resíduo em que foi melhor em todas as situações.**

Fonte: autoria própria.

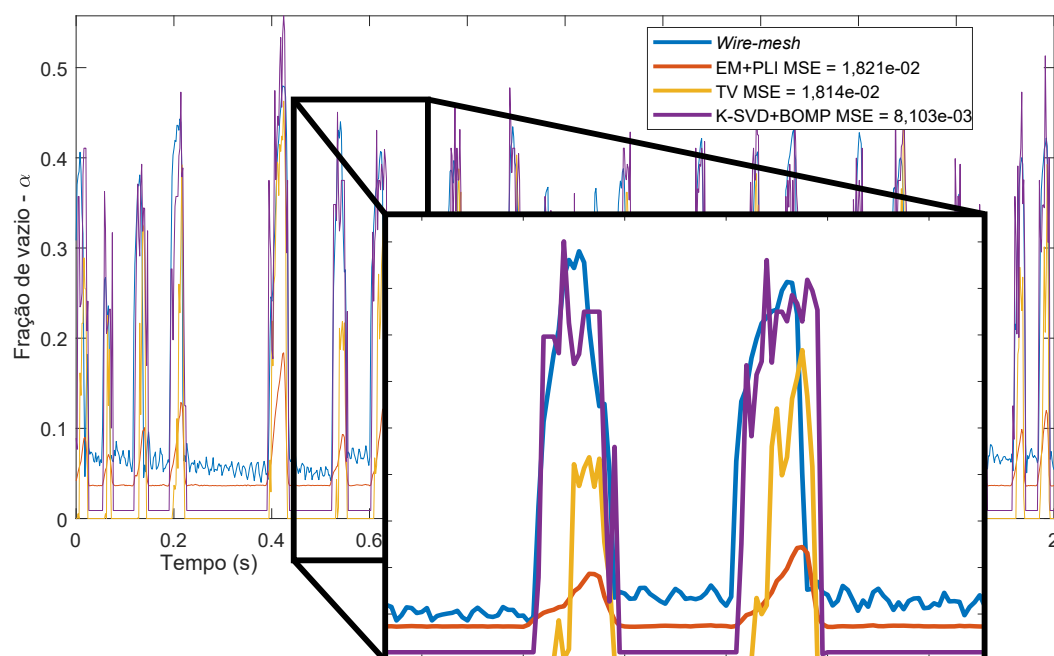
<i>wire-mesh</i>	EM + PLI	TV	K-SVD + OMP
			
EI: CC: RS:	0.5423 0.5233 0.0617	0.3985 0.6784 0.1000	0.2551 0.8762 0.0397
			
EI: CC: RS:	0.5730 0.6024 0.1020	0.4028 0.7099 0.1483	0.3677 0.8122 0.0278
			
EI: CC: RS:	0.5735 0.4983 0.2088	0.4327 0.5738 0.1994	0.2572 0.8526 0.0385
			
EI: CC: RS:	0.5384 0.7283 0.1544	0.5597 0.7668 0.1332	0.4685 0.8297 0.0385
			
EI: CC: RS:	0.5248 0.8571 0.2088	0.9298 0.6525 0.1994	0.5623 0.8394 0.0725





**Figura 15:** Vistas Laterais de um escoamento em golfadas, ponto operacional H3, reconstruído com os 3 diferentes métodos de reconstrução. O mais notável é a homogeneidade apresentada nos métodos de reconstrução nos períodos entre bolhas, o que não acontece com o *wire-mesh*.

Fonte: autoria própria.



**Figura 16:** As séries temporais de fração de vazio reconstruídas com os 3 métodos de reconstrução. O método proposto teve desempenho superior apresentando uma MSE menor que a metade dos outros dois métodos. A imagem ampliada mostra como o método proposto tem um comportamento mais próximo da referência quando a fração de vazio aumenta, porém fica um pouco mais afastado quando a fração de vazio é pequena.

Fonte: autoria própria.

média desses tempos é mostrada na tabela 3. Para a reconstrução de imagens em tempo real, ou seja, cada reconstrução é feita no período entre aquisições de dados, deve-se respeitar o tempo entre as aquisições. Nos experimentos conduzidos a taxa de aquisição do sensor ECT foi de 500 *frames* por segundo, portanto o tempo máximo para a reconstrução é de 2 *ms*.

**Tabela 3: Os tempos de execução mínimos, médios e máximos para cada um dos algoritmos utilizados para reconstrução. O algoritmo OMP é capaz de reconstruir em duas ordens de grandeza abaixo que os outros algoritmos e é o único entre os 3 capaz de reconstrução *online* nas condições do experimento realizado.**

Fonte: autoria própria.

Tempo( <i>s</i> )	mínimo	médio	máximo
EM+PLI	0,0296	0,0319	0,0571
TV	0,0226	0,0324	0,4219
K-SVD+BOMP	9,49e-5	1,97e-4	0,0660

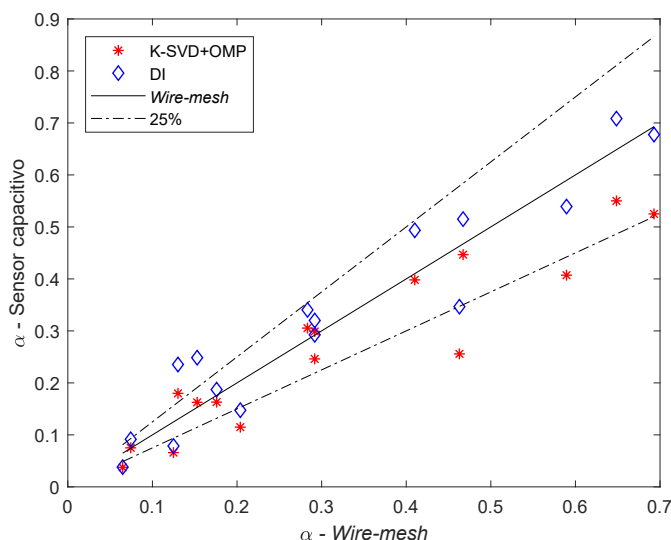
Nessas condições somente o método proposto é rápido suficiente para reconstrução em tempo real, mesmo que o maior tempo seja de 0,066 *s*, pois esse é o tempo da primeira execução do algoritmo. Espera-se que a primeira execução do algoritmo seja mais demorada que as demais, já que o dicionário será colocado na memória somente na primeira execução.

### 3.4.3 COMPARAÇÃO COM IMAGEAMENTO DIRETO

O DI foi criado com o intuito de evitar a complexidade de reconstruir imagens e mesmo assim obter informações pertinentes a respeito do escoamento investigado. Na seção 3.4.2 foi demonstrado que é possível reconstruir imagens de um escoamento a partir das medições de um sensor DI, como o da Figura 10. Porém não foram investigados os ganhos dessa reconstrução perante as informações obtidas pelo sensor DI.

A comparação entre o DI e técnicas de reconstrução baseadas no mesmo sensor é feita com base no quão bem cada um estima a fração de vazio. A fração de vazio de ambos os métodos são comparadas tomando como referência a fração de vazio estimada pelo sensor *wire-mesh*. Para reconstruir as imagens, a partir das quais foram estimadas as frações de vazio, foi utilizado o algoritmo BOMP que demonstrou melhor desempenho na seção 3.4.2.

Num primeiro experimento, foi comparada a fração de vazio média para cada ponto de operação. Na Figura 17 são apresentados os resultados desse experimento, mostrando o desvio de ambos os métodos da estimativa do sensor *wire-mesh*. Nota-se que existem pontos em que os dois métodos falharam em estar na região de 25% da referência. Em média, os valores obtidos por DI estão mais próximos da referência que os obtidos pelo método apresentado. Isso



**Figura 17: Desvios apresentados pelos métodos de obtenção de fração de vazio quando comparado ao sensor *wire-mesh*. Cada um dos métodos apresentou 6 pontos de operação em que a estimativa ficou fora da região de 25% da referência.**

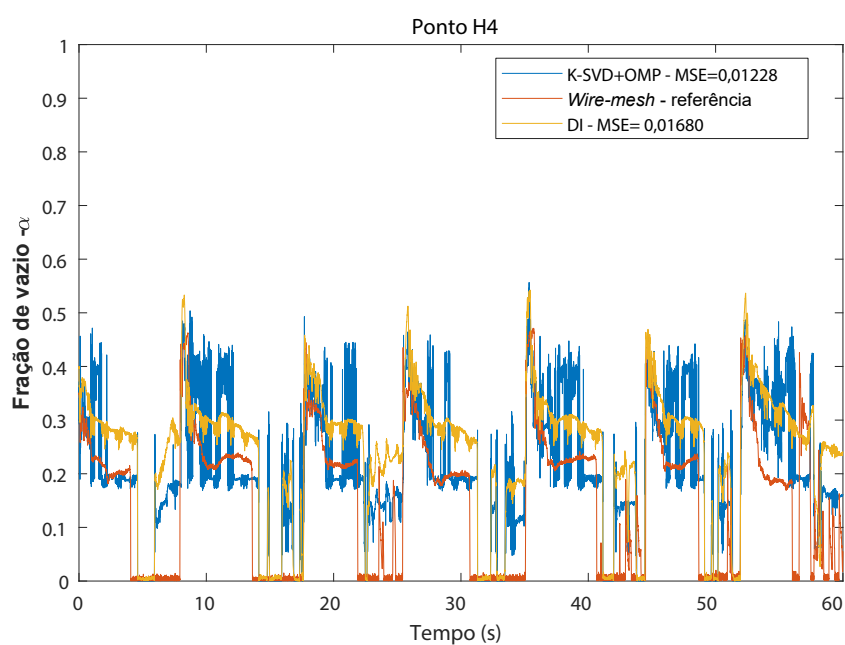
Fonte: autoria própria.

foi verificado calculando a média quadrática do erro (MSE), em que o DI obteve um valor de  $3,7 \cdot 10^{-3}$  e o método proposto um valor de  $5,9 \cdot 10^{-3}$ .

Em uma comparação mais direta, foram analisadas as séries temporais obtidas pelos dois métodos. Nas Figuras 18 a 25 são apresentadas séries temporais do sensor *wire-mesh*, do DI e do método proposto, em diferentes pontos de operação<sup>2</sup>. Nessa comparação, são avaliados os erros ponto a ponto das estimativas. Nota-se que a diferença entre o MSE do método proposto e do DI são pequenas e que em alguns pontos o DI apresenta resultados melhores. Porém, o método proposto apresenta ligeira vantagem quando é feita a média dos MSEs para todos os pontos de operação, nesse caso o MSE do método proposto é 1,3% menor que o MSE do DI. Nesse experimento, a reconstrução foi feita em lotes para aproveitar toda a vantagem do algoritmo BOMP. Dessa maneira, o tempo total de reconstrução,  $48 \times 10^4$  frames, foi de aproximadamente 5,5 s. Isso demonstra que apesar de ter um custo computacional muito maior que o calculo de uma média, esse custo é bem pequeno considerando a quantidade de frames.

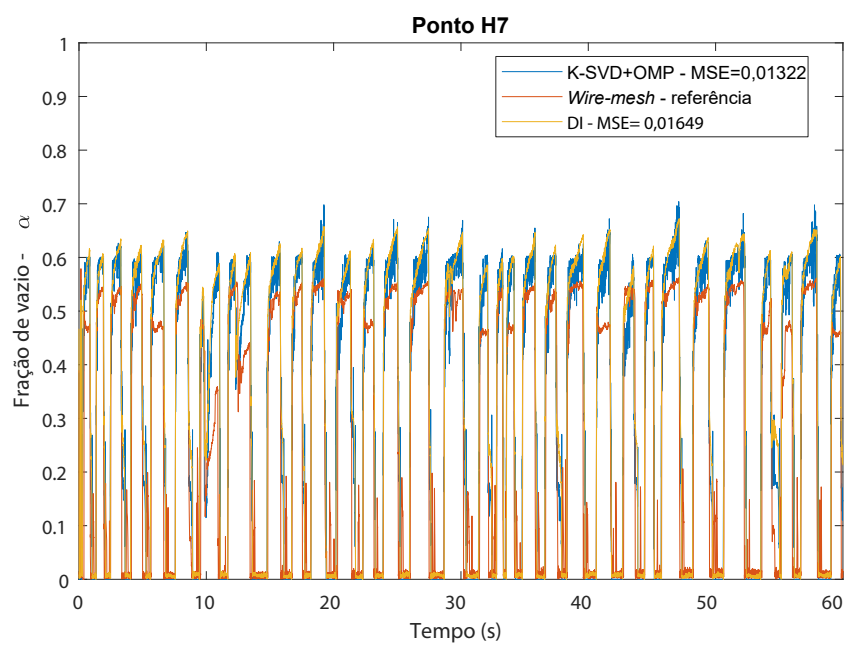
Com esses resultados é possível concluir que apesar das imagens reconstruídas representarem bem as imagens do *wire-mesh*, as frações de vazio apresentam diferenças. A comparação das frações de vazio por DI e pelo método proposto mostra como a fração de vazio das imagens reconstruídas tende a seguir a fração de vazio do DI, porém com uma variância grande. Essa variância faz com que a fração de vazio fique mais próxima da referência em diversos frames, melhorando o resultado do método proposto com relação ao DI.

<sup>2</sup>Alguns pontos de operação foram omitidos por serem de difícil visualização.



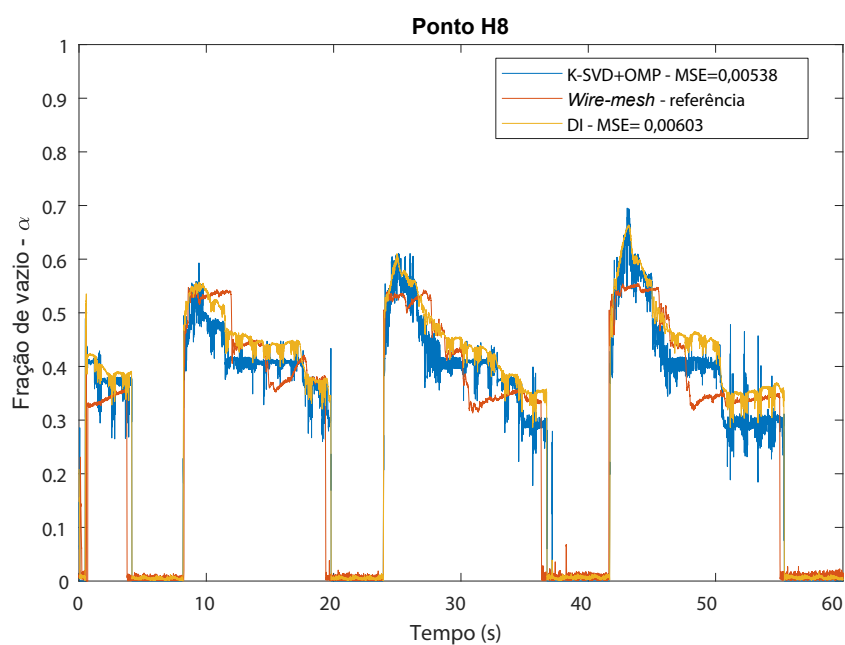
**Figura 18:** Série temporal do sensor *wire-mesh*, DI e do método proposto, no ponto de operação H4.

Fonte: autoria própria.



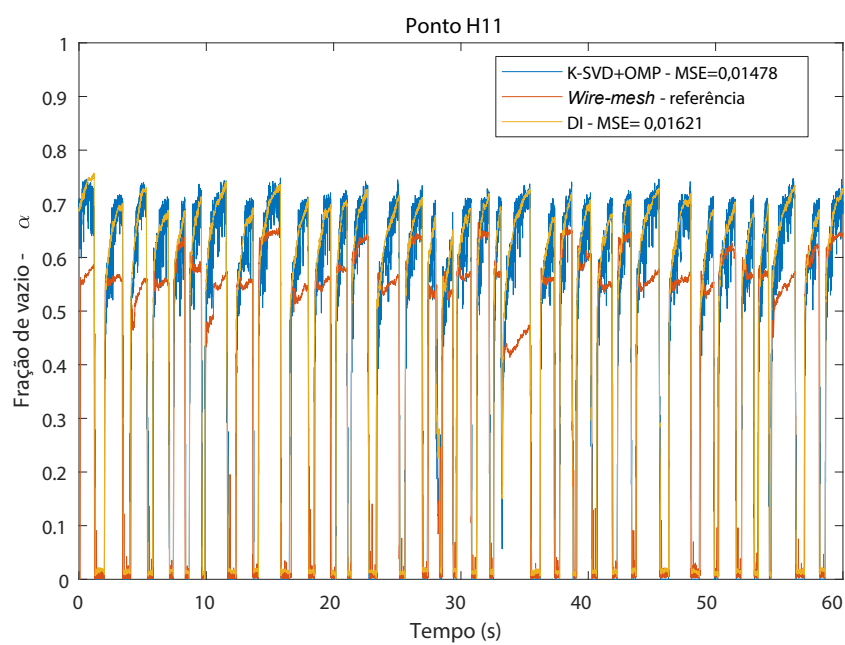
**Figura 19:** Série temporal do sensor *wire-mesh*, DI e do método proposto, no ponto de operação H7.

Fonte: autoria própria.



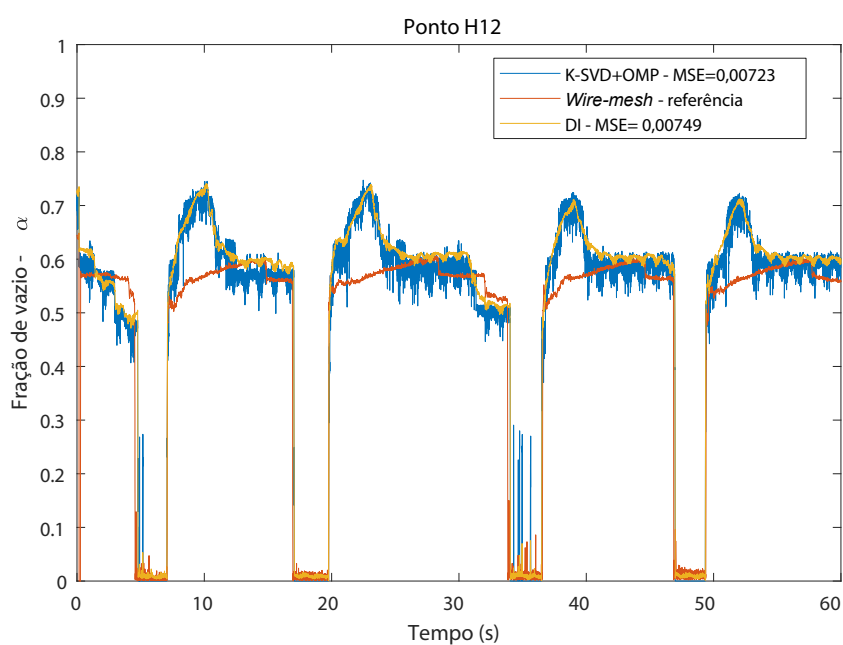
**Figura 20:** Série temporal do sensor *wire-mesh*, DI e do método proposto, no ponto de operação H8.

Fonte: autoria própria.



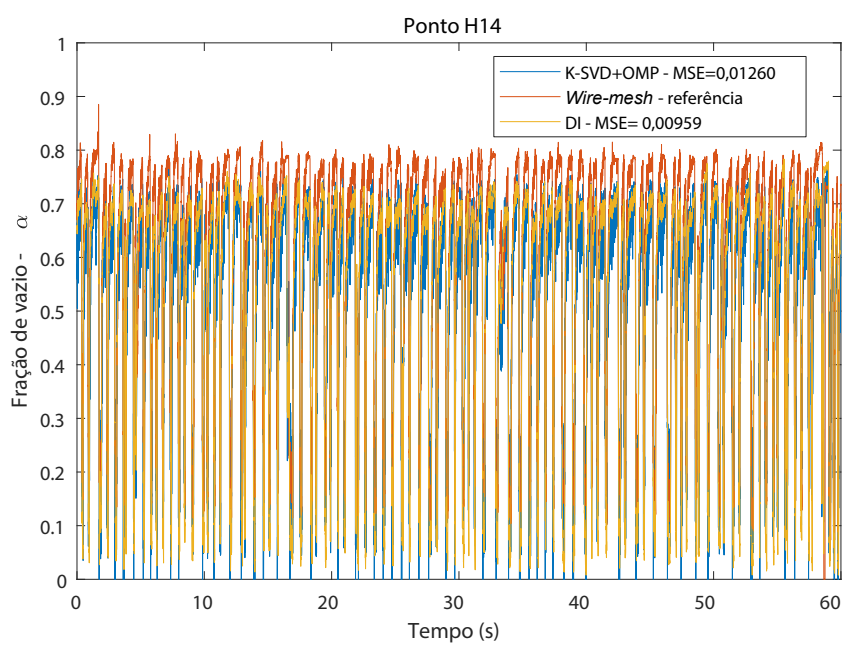
**Figura 21:** Série temporal do sensor *wire-mesh*, DI e do método proposto, no ponto de operação H11.

Fonte: autoria própria.



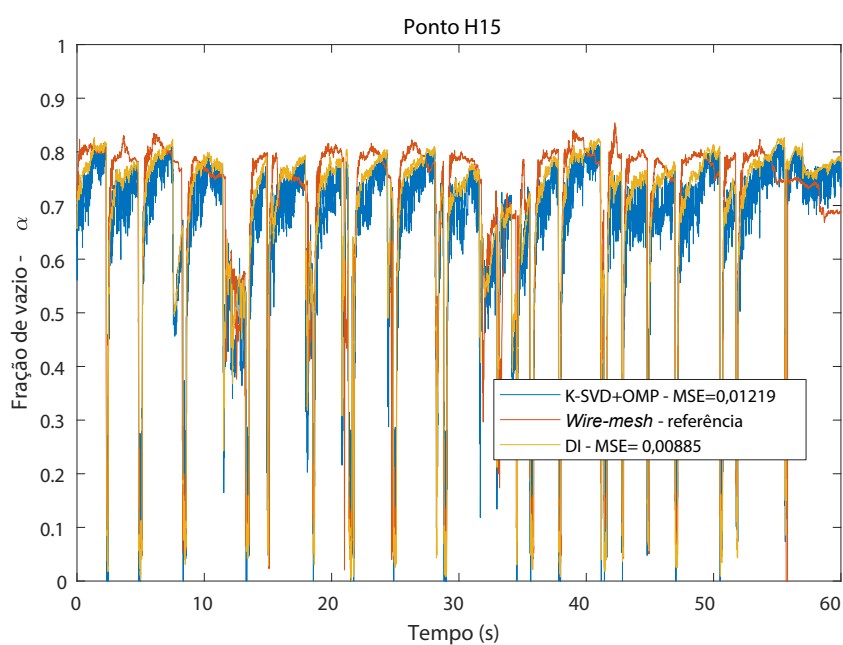
**Figura 22:** Série temporal do sensor *wire-mesh*, DI e do método proposto, no ponto de operação H12.

Fonte: autoria própria.



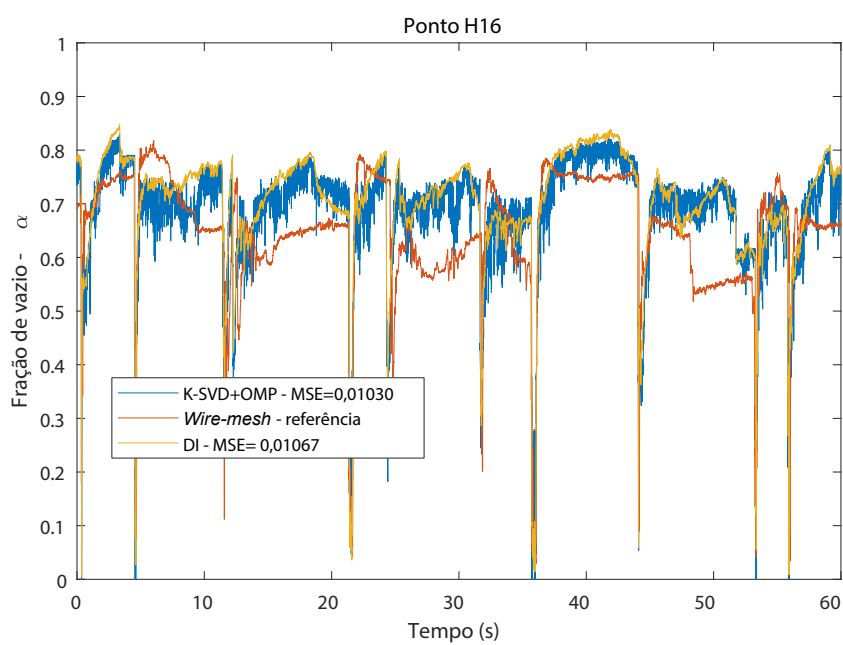
**Figura 23:** Série temporal do sensor *wire-mesh*, DI e do método proposto, no ponto de operação H14.

Fonte: autoria própria.



**Figura 24:** Série temporal do sensor *wire-mesh*, DI e do método proposto, no ponto de operação H15.

Fonte: autoria própria.



**Figura 25:** Série temporal do sensor *wire-mesh*, DI e do método proposto, no ponto de operação H16.

Fonte: autoria própria.

## 4 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi proposto um método de reconstrução de imagens baseado em um dicionário de capacitâncias de um sistema de ECT. O processo de criação desse dicionário consiste em dois passos: a aprendizagem de estruturas representativas a partir de imagens de treinamento e obtenção das respostas do sistema às estruturas aprendidas.

Como o problema direto de ECT é não-linear, o processo de reconstrução de imagens com matriz de sensibilidade é subótimo. Isso ocorre devido ao fato da matriz de sensibilidade ser uma aproximação linear do sistema para pequenas variações. Métodos não lineares de reconstrução para ECT foram desenvolvidos (DEABES; ABDELRAHMAN, 2010), porém possuem complexidade muito superior aos métodos lineares.

Estabelecendo um compromisso, um dicionário de respostas do sistema pode ser visto como uma linearização por partes do problema direto. Um dicionário contendo todas as possíveis combinações de *pixels* e suas intensidades, provavelmente, traria a melhor reconstrução possível. No entanto, o tamanho de tal dicionário o torna irrealizável. Um dicionário prático deve fazer um compromisso entre boa representatividade e a quantidade de átomos. Uma quantidade grande de átomos aumenta o custo computacional da solução e pode não trazer um aumento na representatividade do conjunto de treinamento caso dois átomos sejam muito similares. O algoritmo de aprendizagem de dicionários usado, K-SVD, possui controle na correlação entre átomos, alertando sobre uma possível similaridade entre átomos.

Dado que o dicionário aprendido possui mais colunas do que linhas, o problema inverso é subdeterminado. Para lidar com isso é necessário o uso de regularizadores, que restrinjam as soluções possíveis. Os regularizadores devem ser informações conhecidas a respeito da solução desejada, como por exemplo a esparsidade. Restringir as soluções por esparsidade significa garantir que elas possuam poucos coeficientes diferentes de zero. Essa restrição também faz com que sejam realizadas menos combinações lineares das colunas do dicionário, diminuindo os erros causados pela linearização.



Ao utilizar a quasinorma  $\ell_0$  da solução como termo regularizador, é necessário utilizar um algoritmo *greedy*, como OMP, para encontrar a solução. Uma versão otimizada do OMP para reconstruções de muitas imagens com o mesmo dicionário, o BOMP, foi utilizado para acelerar os experimentos. Esse algoritmo também se mostrou superior em termos de tempo de reconstrução, permitindo reconstruções em tempo real para os experimentos realizados.

Os experimentos realizados com escoamentos bifásicos mostram que a técnica pode ser aplicada a sensores com poucas medições. Imagens com 112 *pixels* foram reconstruídas a partir de apenas 8 medições de capacitância, mostrando que o método proposto é capaz de realizar boas reconstruções em problemas subdeterminados. Nota-se que a subdeterminação do dicionário é o que permite reconstruções esparsas, portanto é desejável.

Apesar do método proposto não oferecer imagens fiéis à referência em todos os casos comparados, é possível afirmar que seu desempenho é superior às demais técnicas. Essa afirmação é feita com base nas diferenças de EI e CC apresentadas na tabela 2, na diferença de MSE apresentada na Figura 16 e na diferenças entre os tempos de reconstrução apresentados na tabela 3.

Deve-se notar que o método proposto apresenta duas desvantagens: a necessidade de um conjunto de imagens do processo (objeto ou escoamento) para treinamento e, com isso, uma limitação nas dimensões das imagens reconstruídas. É comum na literatura que as imagens reconstruídas de um sensor ECT possuam tamanho de  $32 \times 32$ , com a técnica demonstrada só é possível reconstruir uma imagem com esse mesmo tamanho se as imagens de treinamento possuírem essa dimensão. Devido ao processo de aprendizagem do dicionário, deve-se garantir que os dados usados como exemplo representem bem uma grande variedade de sinais.

Em trabalhos futuros pode-se aplicar o método proposto para diferentes conjuntos de sensores, de forma a verificar sua flexibilidade em relação a natureza dos problemas.

Trabalhos futuros podem incluir, também, o uso do modelo de análise, de forma similar ao TV, para o problema do ECT. Esse modelo poderia incluir *priors* similares aos usados no neste trabalho com o modelo de síntese, porém com maior escalabilidade. Em (RUBINSTEIN et al., 2013), é apresentado uma versão do algoritmo K-SVD para o modelo de análise. Esse algoritmo usa um conjunto de dados para aprender um operador usado para avaliar a coesparsidade de um sinal.

Outra possibilidade é a quantificação da não-linearidade como justificativa para esse método, bem como, um indicador de que um sistema possa se beneficiar do método proposto.

#### 4.1 LISTA DE PUBLICAÇÕES

Durante a realização do mestrado, foram publicados os seguintes trabalhos em periódicos e conferências internacionais:

- MOURA, H. L. D. et al. Image reconstruction algorithms using overcomplete dictionaries for ECT sensor. p. 1–9, 2016.
- MOURA, H. L. D. et al. Image Reconstruction for Electrical Capacitance Tomography Through Redundant Sensitivity Matrix. **IEEE Sens. J.**, v. 1, n. 1, p. 8157–8165, dec 2017. ISSN 1530-437X. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/7956159/>>.

## REFERÊNCIAS

- AHARON, M.; ELAD, M.; BRUCKSTEIN, A. K -SVD : An Algorithm for Designing Overcomplete Dictionaries for Sparse Representation. v. 54, n. 11, p. 4311–4322, 2006.
- BANOWSKI, M. et al. Comparative study of ultrafast X-ray tomography and wire-mesh sensors for vertical gas-liquid pipe flows. **Flow Measurement and Instrumentation**, Elsevier Ltd, v. 53, p. 95–106, 2015. ISSN 09555986. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.flowmeasinst.2016.02.001>>.
- BORSIC, A. et al. **Total Variation Regularization in Electrical Impedance Tomography**. [S.l.], 2007. Disponível em: <<http://eprints.ma.man.ac.uk/813/>>.
- CHANDRASEKERA, T. C. et al. Total Variation Image Reconstruction for Electrical Capacitance Tomography. **Imaging Systems and Techniques (IST)**, v. 50, p. 584–589, 2012.
- Da Silva ., M. J. et al. High-resolution gas-oil two-phase flow visualization with a capacitance wire-mesh sensor. **Flow Meas. Instrum.**, Elsevier Ltd, v. 21, n. 3, p. 191–197, 2010. ISSN 09555986. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.flowmeasinst.2009.12.003>>.
- Da Silva, M. J. **Impedance Sensors for Fast Multiphase Flow Measurement and Imaging**. [s.n.], 2008. 170 p. ISSN 1040872X. ISBN 978-3-940046-99-4. Disponível em: <<http://d-nb.info/992681979/34>>.
- Da Silva, M. J.; SCHLEICHER, E.; HAMPEL, U. Capacitance wire-mesh sensor for fast measurement of phase fraction distributions. **Measurement Science and Technology**, v. 18, p. 2245–2251, 2007. ISSN 0957-0233.
- DAVIS, G.; MALLAT, S.; AVELLANEDA, M. Adaptive greedy approximations. **Constructive Approximation**, v. 13, n. 1, p. 57–98, 1997. ISSN 01764276.
- DEABES, W. A.; ABDELRAHMAN, M. A. Nonlinear single step fuzzy image reconstruction algorithm for grounded conductors in ECT. In: **Proceedings of the 2010 American Control Conference**. IEEE, 2010. p. 5320–5325. ISBN 978-1-4244-7427-1. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/5530733/>>.
- DONOHO, D. L. Sparse components of images and optimal atomic decompositions. **Constructive Approximation**, v. 17, n. 3, p. 353–382, 2001. ISSN 01764276.
- DONOHO, D. L. Compressed sensing. **IEEE Transactions on Information Theory**, v. 52, n. 4, p. 1289–1306, 2006. ISSN 0018-9448.
- DONOHO, D. L. et al. StOMP-20060403. n. March, p. 1–39, 2006.
- DYNAKOWSKI, T. Process tomography applied to multi-phase flow measurement. **Measurement Science and Technology**, v. 7, p. 343–353, 1996.

ELAD, M.; MILANFAR, P.; RUBINSTEIN, R. Analysis versus synthesis in signal priors. **European Signal Processing Conference**, v. 23, p. 947–968, 2006. ISSN 22195491.

FLORES, N.; KURI-MORALES, Á.; GAMIO, C. An Application of Neural Networks for Image Reconstruction in Electrical Capacitance Tomography Applied to Oil Industry. In: . [s.n.], 2006. p. 371–380. Disponível em: <[http://link.springer.com/10.1007/11892755\\_38](http://link.springer.com/10.1007/11892755_38)>.

HUANG, S. M. M. et al. Tomographic imaging of two-component flow using capacitance sensors This. **Journal of Physics E: Scientific Instruments**, v. 22, n. 22, p. 173–177, 1989. ISSN 0022-3735. Disponível em: <<http://iopscience.iop.org/0022-3735/22/3/009>>.

ISAKSEN, Ø. A review of reconstruction techniques for capacitance tomography. **Measurement Science and Technology**, v. 7, n. 3, p. 325–337, mar 1996. ISSN 0957-0233.

ISAKSEN, Ø.; NORDTVEDT, J. E. A new reconstruction algorithm for use with capacitance-based tomography. **Modeling, Identification and Control: A Norwegian Research Bulletin**, v. 15, n. 1, p. 9–21, 1994. ISSN 0332-7353. Disponível em: <<http://www.mic-journal.no/ABS/MIC-1994-1-2.asp>>.

JERRI, A. The Shannon sampling theorem—Its various extensions and applications: A tutorial review. **Proceedings of the IEEE**, v. 65, n. 11, p. 1565–1596, 1977. ISSN 0018-9219. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/1455040/>>.

LANDWEBER, L. An Iteration Formula for Fredholm Integral Equations of the First Kind. **American Journal of Mathematics**, v. 73, n. 3, p. 615, jul 1951. ISSN 00029327. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2372313?origin=crossref>>.

MARASHDEH, Q.; TEIXEIRA, F. L.; FAN, L. 1 - Electrical capacitance tomography. In: **Industrial Tomography**. Elsevier Ltd, 2015. p. 3–21. ISBN 9781782421184. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/B978-1-78242-118-4.00001-0>>.

MOURA, H. L. D. et al. Image Reconstruction for Electrical Capacitance Tomography Through Redundant Sensitivity Matrix. **IEEE Sens. J.**, v. 1, n. 1, p. 8157–8165, dec 2017. ISSN 1530-437X. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/7956159/>>.

MOURA, H. L. D. et al. Image reconstruction algorithms using overcomplete dictionaries for ECT sensor. p. 1–9, 2016.

MOURA, H. L. de et al. Parametric Image Reconstruction for ECT-like Sensor with Applications in Two-Phase Flow. In: **Simpósio Brasileiro de Telecomunicações**. Juiz de Fora - MG: [s.n.], 2015. p. 73–77.

NAM, S. et al. Recovery of cosparse signals with Greedy Analysis Pursuit in the presence of noise. **2011 4th IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing, CAMSAP 2011**, p. 361–364, 2011.

OSHER, S. et al. An Iterative Regularization Method for Total Variation Based Image Restoration. **{SIAM} Multiscale Model Simulation**, v. 4(2), p. 460–489, 2005. ISSN 1540-3459.

PATI, Y. C. C.; REZAIIFAR, R.; KRISHNAPRASAD, P. S. S. Orthogonal matching pursuit: recursive function approximation with applications to wavelet decomposition. **Proceedings of 27th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers**, p. 1–5, 1993. ISSN 1058-6393. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/342465/>>.

PENG, L.; MERKUS, H.; SCARLETT, B. Using Regularization Methods for Image Reconstruction of Electrical Capacitance Tomography. **Particle & Particle Systems Characterization**, v. 17, n. 3, p. 96–104, oct 2000. ISSN 0934-0866. Disponível em: <[http://doi.wiley.com/10.1002/1521-4117\(200010\)17:3%3C96::AID-PPSC96%3E3.0.CO;2-8](http://doi.wiley.com/10.1002/1521-4117(200010)17:3%3C96::AID-PPSC96%3E3.0.CO;2-8)>.

RATH, G.; GUILLEMOT, C. Sparse approximation with an orthogonal complementary matching pursuit algorithm. **ICASSP, IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing - Proceedings**, n. 5, p. 3325–3328, 2009. ISSN 15206149.

RATH, G.; SAHOO, A. A comparative study of some greedy pursuit algorithms for sparse approximation. **European Signal Processing Conference**, n. 4, p. 398–402, 2009. ISSN 22195491.

RAVISHANKAR, S.; BRESLER, Y. Learning Sparsifying Transforms. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 61, n. 5, p. 1072–1086, mar 2013. ISSN 1053-587X. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/6339108/>>.

REBOLLO-NEIRA, L.; LOWE, D. Optimized orthogonal matching pursuit approach. **IEEE Signal Processing Letters**, v. 9, n. 4, p. 137–140, 2002. ISSN 10709908.

RODRÍGUEZ, P.; WOHLBERG, B. An iteratively reweighted norm algorithm for total variation regularization. **Conference Record - Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers**, p. 892–896, 2006. ISSN 10586393.

RUBINSTEIN, R. et al. Analysis K-SVD : A Dictionary-Learning Algorithm for the Analysis Sparse Model. **IEEE Trans. Signal Process.**, v. 61, n. 3, p. 661–677, 2013. ISSN 1053587X.

RUBINSTEIN, R.; ZIBULEVSKY, M.; ELAD, M. Efficient implementation of the K-SVD algorithm using batch orthogonal matching pursuit. **CS Technion**, p. 1–15, 2008. Disponível em: <<http://cs.technion.ac.il/users/wwwb/cgi-bin/tr-get.cgi/2008/CS/CS-2008-08.revised.pdf>>.

RUDIN, L. I.; OSHER, S.; FATEMI, E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 60, n. 1-4, p. 259–268, 1992. ISSN 01672789.

RUDIN, W. **Functional analysis**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1991. 424 p. ISBN 0070542368.

SELEGHIM, P. et al. Direct imaging of two-phase flows by electrical impedance measurements. **Measurement Science and Technology**, v. 9, n. 9, p. 1492–1500, 1998. ISSN 0957-0233.

SHARAF, S. et al. Comparison between wire mesh sensor and gamma densitometry void measurements in two-phase flows. **Measurement Science and Technology**, v. 22, n. 10, p. 104019, 2011. ISSN 0957-0233. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0957-0233/22/i=10/a=104019?key=crossref.3f0a03332a147c758b7411f3e2acf5fe>>.

WRASSE, A. d. N. et al. Capacitive Array Sensor for Direct Imaging of Two-phase Flows. In: **15th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering**. Belém, PA, Brazil: [s.n.], 2014. p. 13–16.

XIE, C. G. Image reconstruction. In: **Process Tomography**. Elsevier, 1995. p. 281–323. ISBN 978-0-08-093801-1. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/B9780080938011500198>>.

XIE, C. G. et al. Experimental evaluation of capacitance tomographic flow imaging systems using physical models. **IEE Proceedings - Circuits, Devices and Systems**, v. 141, n. 5, p. 357–358, 1994. ISSN 13502409. Disponível em: <[http://digital-library.theiet.org/content/journals/10.1049/ip-cds\\_19941152](http://digital-library.theiet.org/content/journals/10.1049/ip-cds_19941152)>.

XIE, C. G.; PLASKOWSKI, A.; BECK, M. S. 8-electrode capacitance system for two-component flow identification. Part 1: Tomographic flow imaging. **IEE Proceedings A (Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education)**, v. 136, n. 4, p. 173–183, jul 1989. ISSN 2053-7905.

XIE, C. G. G. et al. Electrical Capacitance Tomography for Flow Imaging - System Model for Development of Image-Reconstruction Algorithms and Design of Primary Sensors. **Iee ProceedingsG Circuits Devices Syst.**, v. 139, n. I, p. 89–98, 1992. ISSN 09563768.

YANG, W. Design of electrical capacitance tomography sensors. **Measurement Science and Technology**, v. 21, n. 4, p. 42001, 2010. ISSN 0957-0233. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0957-0233/21/i=4/a=042001?key=crossref.585d624ef975280e61595f432e671f76>>.

YANG, W.; YORK, T. New AC-based capacitance tomography system. **IEE Proceedings - Science, Measurement and Technology**, v. 146, n. 1, p. 47, 1999. ISSN 13502344.

YANG, W. Q.; LIU, S. Role of tomography in gas/solids flow measurement. **Flow Measurement and Instrumentation**, v. 11, n. 3, p. 237–244, 2000. ISSN 09555986.

YANG, W. Q.; PENG, L. Image reconstruction algorithms for electrical capacitance tomography. **Meas. Sci. Technol.**, v. 14, n. 1, p. R1—R13, jan 2002. ISSN 09570233. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0957-0233/14/i=1/a=201?key=crossref.e886869c891a6dffd2cb6041cbd6ea86>>.

YANG, W. Q. et al. An image-reconstruction algorithm based on Landweber's iteration method for electrical-capacitance tomography. **Measurement Science and Technology**, v. 10, n. 11, p. 1065–1069, nov 1999. ISSN 0957-0233.

YANG, Y.; JIA, J.; MCCANN, H. A faster measurement strategy of electrical capacitance tomography using less sensing data. In: **2015 IEEE International Conference on Imaging Systems and Techniques (IST)**. [S.l.]: IEEE, 2015. p. 1–5. ISBN 978-1-4799-8633-0.

YE, J. et al. Image Reconstruction for ECT Based on Extended Sensitivity Matrix. **IEEE Sensors Journal**, v. 16, n. 8, p. 2466–2476, apr 2016. ISSN 1530-437X.

YE, J. et al. Image Reconstruction for Electrical Capacitance Tomography Based on Sparse Representation. **IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement**, v. 64, n. 1, p. 89–102, jan 2015. ISSN 0018-9456. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=6844030>>.

ZIENKIEWICZ, O. C. **The finite element method in engineering science**. 3. ed. [S.l.: s.n.], 1977. 521 p.