

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**

**CINTIA IZABEL CARARO**

**COLORAÇÃO DE ARESTAS EM GRAFOS SPLIT COM GRAU MÁXIMO PAR**

**PONTA GROSSA**

**2023**

**CINTIA IZABEL CARARO**

**COLORAÇÃO DE ARESTAS EM GRAFOS SPLIT COM GRAU MÁXIMO PAR**

**Edge Coloring of Split Graphs with Even Maximum Degree**

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação do Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Sheila Morais de Almeida

Coorientador: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Candida Nunes da Silva

**PONTA GROSSA**

**2023**



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



**Ministério da Educação  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Campus Ponta Grossa**



CINTIA IZABEL CARARO

**COLORAÇÃO DE ARESTAS EM GRAFOS SPLIT COM GRAU MÁXIMO PAR**

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestra Em Ciência Da Computação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Sistemas E Métodos De Computação.

Data de aprovação: 31 de Maio de 2023

Dra. Sheila Morais De Almeida, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Celina Miraglia Herrera De Figueiredo, Doutorado - Universidade Federal do Rio de Janeiro (Ufrj)

Marina Esther Groshaus, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Renato Jose Da Silva Carmo, Doutorado - Universidade Federal do Paraná (Ufpr)

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 31/05/2023.

Aos meus pais Noel e Veronica.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por me dar forças para continuar mesmo em meio a grandes tribulações.

À minha família, por sempre me apoiar.

À minha orientadora Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Sheila Morais de Almeida, por acreditar no meu potencial e me incentivar a entrar no programa de mestrado.

À minha coorientadora Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Cândida Nunes da Silva, por todo cuidado, tanto com o texto quanto comigo.

À Sheila e a Cândida, por toda paciência e dedicação, pelas discussões construtivas, por serem exemplos para mim.

A todos que de alguma maneira contribuíram para a realização deste trabalho.

À UTFPR (Processos SEI-UTFPR 23064.041419/2022-96 e 23064.017645/2020-94) pelo apoio financeiro provido.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Nada te perturbe, nada te assuste, tudo  
passa. Deus nunca muda. A paciência tudo  
alcança. Quem a Deus tem, nada lhe falta.  
Só Deus basta!”  
(Santa Tereza d’Avila)

## RESUMO

Uma *coloração de arestas própria* de um grafo  $G$  é uma atribuição de cores para as arestas de  $G$  de tal forma que arestas adjacentes possuam cores distintas. O *índice cromático* de  $G$ , denotado por  $\chi'(G)$ , é o menor número de cores que permitem uma coloração própria de  $G$ . Uma vez que para todo par de arestas adjacentes devem ser atribuídas cores distintas,  $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ , onde  $\Delta(G)$  é o grau máximo de  $G$ . Em 1964, Vizing estabeleceu que  $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$  para qualquer grafo simples  $G$ . Diz-se que um grafo  $G$  com  $\chi'(G) = \Delta(G)$  é Classe 1 e um grafo  $G$  com  $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$  é Classe 2. Apesar dos limites justos para o índice cromático, o problema de determiná-lo para um grafo arbitrário é computacionalmente difícil, sabidamente NP-completo. Um grafo é *split* se seu conjunto de vértices pode ser particionado em uma clique  $Q$  e um conjunto independente  $S$ . Em 1995, Chen, Fu e Ko mostraram que todo grafo split com grau máximo ímpar é Classe 1. Dentre os grafos split com grau máximo par que possuem o índice cromático conhecido, há alguns que são Classe 1 e outros que são Classe 2. Em 2012, Almeida provou que, para determinar o índice cromático dos grafos split, é suficiente considerar os casos em que todo vértice da clique tem grau máximo. Considerando isto, nesta dissertação, mostramos que se a vizinhança do subconjunto  $X$ , formado pelos vértices de  $S$  com grau no máximo  $\Delta(G)/2$ , tem pelo menos  $\lfloor |Q|/2 \rfloor$  vértices, então  $G$  é Classe 1. Nos casos restantes, nós caracterizamos os grafos split que são subgrafo-sobrecarregados.

**Palavras-chave:** algoritmos; otimização combinatória; teoria dos grafos.

## ABSTRACT

A *proper edge coloring* of a graph  $G$  is an assignment of colors to the edges of  $G$  such that adjacent edges have distinct colors. The *chromatic index* of a graph  $G$ , denoted  $\chi'(G)$ , is the minimum number of colors for which  $G$  has a proper edge coloring. Since every pair of adjacent edges must have distinct colors,  $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ , where  $\Delta(G)$  is the maximum degree of  $G$ . In 1964, Vizing established that  $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$  for any simple graph  $G$ . Graphs with  $\chi'(G) = \Delta(G)$  are said to be *Class 1*, while graphs with  $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$  are said to be *Class 2*. Despite the tight bounds for the chromatic index, determining  $\chi'(G)$  for an arbitrary graph  $G$  is a difficult computational problem, known to be NP-complete. A graph is *split* if its vertex set can be partitioned into a clique  $Q$  and a stable set  $S$ . In 2012, Almeida showed that to determine the chromatic index of split graphs it is sufficient to consider the cases where every vertex in  $Q$  has maximum degree. Considering this fact, in this master's dissertation, we show that if the neighborhood of a subset  $X$ , formed by the vertices of  $S$  with degree at most  $\Delta(G)/2$ , has at least  $\lfloor |Q|/2 \rfloor$  vertices, then  $G$  is Class 1. In the remaining cases we characterize the subgraph-overfull split graphs.

**Keywords:** algorithms; combinatorial optimization; graph theory.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – (a) Coloração de arestas (b) Coloração própria (c) Coloração própria mínima . . . . .	15
Figura 2 – Exemplo de decomposição de um grafo . . . . .	16
Figura 3 – Exemplo de coloração de um grafo a partir da decomposição em emparelhamentos . . . . .	16
Figura 4 – Grafo sobrecarregado . . . . .	16
Figura 5 – Subgrafo sobrecarregado . . . . .	17
Figura 6 – Grafo $P^*$ . . . . .	17
Figura 7 – (a) $L_{6,6}$ (b) $L_{7,7}$ . . . . .	19
Figura 8 – (a) Quadrado latino $L_{5,5}$ (b) Grafo $K_5$ colorido . . . . .	20
Figura 9 – (a) Quadrado latino $L_{5,5}$ (b) Grafo $K_6$ colorido . . . . .	20
Figura 10 – $D_{col}(2)$ e $D_{lin}(2)$ no quadrado latino $L_{6,6}$ . . . . .	21
Figura 11 – (a) Grafo bipartido $B$ (b) Grafo bipartido regular $B'$ . . . . .	23
Figura 12 – (a) Subconjunto independente $S$ maximal (b) Clique $Q$ maximal . . . . .	26
Figura 13 – Grafo split com $d_B(v_1) = \Delta(B[Q, S])$ . . . . .	27
Figura 14 – Grafo split com emparelhamento que cobre os vértices de grau máximo . . . . .	28
Figura 15 – Grafo split com todos os vértices da clique com grau máximo . . . . .	29
Figura 16 – Subgrafos proibidos para grafos split-comparabilidade . . . . .	30
Figura 17 – Subgrafos proibidos para grafos split-intervalos . . . . .	30
Figura 18 – (a) Diagrama de cores (b) Diagrama de cores monotônico . . . . .	33
Figura 19 – (a) Grafo bipartido $B$ (b) Diagrama de cores monotônico $\mathcal{C}$ . . . . .	33
Figura 20 – (a) Grafo bipartido $B$ colorido parcialmente (b) Diagrama de cores monotônico $\mathcal{C}$ . . . . .	34
Figura 21 – (a) Diagrama de cores $\mathcal{C}$ (b) Sufixo do diagrama de cores de $\mathcal{C}$ . . . . .	34
Figura 22 – (a) Quadrado latino $L_{7,7}$ com $S_L(5,7)$ em destaque (b) Diagrama de cores $S_L(5,7)$ . . . . .	35
Figura 23 – (a) Quadrado latino $L_{7,7}$ com $\mathcal{D}_L(5,7)$ em destaque (b) Diagrama de cores $\mathcal{D}_L(5,7)$ . . . . .	35
Figura 24 – (a) Quadrado latino $L_{7,7}$ com $S_L^r(5,7)$ em destaque (b) Diagrama de cores $S_L^r(5,7)$ . . . . .	36

<b>Figura 25 – (a) Quadrado latino <math>L_{7,7}</math> com <math>\mathcal{D}_L^r(5,7)</math> em destaque (b) Diagrama de cores <math>\mathcal{D}_L^r(5,7)</math> . . . . .</b>	<b>37</b>
<b>Figura 26 – (a) Diagrama de cores <math>\mathcal{C}</math> (b) Prefixo de <math>\mathcal{C}</math> (c) Prefixo crescente de <math>\mathcal{C}</math> . . . . .</b>	<b>37</b>
<b>Figura 27 – Prefixo crescente não monotônico do diagrama <math>\mathcal{D}_L(5,7)</math> . . . . .</b>	<b>38</b>
<b>Figura 28 – Prefixo crescente monotônico do diagrama <math>\mathcal{D}_L^r(5,7)</math> . . . . .</b>	<b>39</b>
<b>Figura 29 – CFK-ordenação de um grafo split <math>G</math> . . . . .</b>	<b>40</b>
<b>Figura 30 – (a) Subgrafo <math>H_1</math> (b) Subgrafo <math>H_2</math> . . . . .</b>	<b>40</b>
<b>Figura 31 – (a) Grafo <math>G</math> Classe 1 pelo Teorema 3.5 (b) Quadrado latino de ordem 8 que colore <math>G</math> . . . . .</b>	<b>44</b>
<b>Figura 32 – (a) Divisão dos vértices de <math>Q</math> nos subconjuntos <math>W, L</math> e <math>R</math> . . . . .</b>	<b>46</b>
<b>Figura 33 – Grafo <math>S_3</math> . . . . .</b>	<b>53</b>
<b>Figura 34 – Regra da ordem de eliminação forte . . . . .</b>	<b>53</b>
<b>Figura 35 – Grafo <math>S_5</math> . . . . .</b>	<b>54</b>
<b>Figura 36 – (a) Subgrafo <math>R_4</math>. (b) Subgrafo <math>\overline{R_4}</math>. (c) Subgrafo <math>\overline{S_3}</math> . . . . .</b>	<b>55</b>
<b>Figura 37 – Relação de inclusão dos subgrafos proibidos para as classes estudadas</b>	<b>55</b>
<b>Figura 38 – Grafo split-fortemente cordal . . . . .</b>	<b>56</b>
<b>Figura 39 – Ordem de eliminação aresta perfeita . . . . .</b>	<b>57</b>
<b>Figura 40 – Relação entre as classes . . . . .</b>	<b>58</b>

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 1 – CHRIND em grafos perfeitos . . . . .</b>	<b>11</b>
<b>Quadro 2 – Alguns grafos split com índice cromático conhecido . . . . .</b>	<b>32</b>
<b>Quadro 3 – Relação entre casos resolvidos e em aberto na classe dos grafos split</b>	<b>60</b>

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>1.1</b>	<b>Estrutura do trabalho</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>CONCEITOS PRELIMINARES</b>	<b>14</b>
<b>2.1</b>	<b>Definições básicas</b>	<b>14</b>
<b>2.2</b>	<b>Coloração de arestas com quadrados latinos</b>	<b>18</b>
<b>2.3</b>	<b>Coloração de arestas com emparelhamentos</b>	<b>22</b>
<b>2.4</b>	<b>Coloração de arestas de grafos com vértice universal</b>	<b>24</b>
<b>3</b>	<b>COLORAÇÃO DE ARESTAS EM GRAFOS SPLIT</b>	<b>26</b>
<b>3.1</b>	<b>Técnica de Chen, Fu e Ko</b>	<b>31</b>
3.1.1	Diagramas de cores monotônicos	32
3.1.2	Grafos split com grau máximo ímpar	39
<b>4</b>	<b>NOVOS RESULTADOS EM COLORAÇÃO DE ARESTAS DE GRAFOS SPLIT</b>	<b>43</b>
<b>4.1</b>	<b>Extensão da técnica de Chen, Fu e Ko em grafos split com grau máximo par</b>	<b>43</b>
<b>4.2</b>	<b>Caracterização dos grafos split vizinhança-sobrecarregado</b>	<b>47</b>
<b>4.3</b>	<b>Casos particulares de equivalência entre vizinhança-sobrecarregado e Classe 2 em grafos split</b>	<b>50</b>
<b>5</b>	<b>GRAFOS SPLIT-FORTEMENTE CORDAIS</b>	<b>52</b>
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>59</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>61</b>
	<b>ÍNDICE REMISSIVO</b>	<b>64</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Em 1985, David S. Johnson apresentou um levantamento da complexidade de nove problemas NP-completos no caso geral quando restritos a trinta e uma classes de grafos<sup>1</sup>. Para isso, o autor utilizou uma tabela onde cada coluna relacionava um problema e cada linha uma classe de grafos. A tabela foi preenchida sendo o valor da célula igual a  $P$  para problemas com complexidade de solução polinomial e  $N$  para problemas que se sabia serem NP-completos. Para as demais casos, o autor arriscou um palpite:  $O?$ , para os problemas cuja determinação da complexidade aparentemente estava em aberto, embora parecesse ser fácil de determinar;  $O$ , para os problemas cuja determinação da complexidade estava em aberto e provavelmente seria difícil de determinar;  $O!$ , para os problemas que vários autores já haviam estudado e com mais evidências da dificuldade de determinar a complexidade; e  $P?$ , para os que julgava haver um algoritmo polinomial construído a partir de técnicas conhecidas (JOHNSON, 1985).

Um dos problemas relacionados por Johnson foi o CHRIND. Dado um grafo  $G$  e um inteiro  $k$ , esse problema consiste em decidir se o grafo  $G$  possui uma atribuição de  $k$  cores, uma cor para cada aresta, tal que arestas adjacentes possuam cores distintas. O Quadro 1 apresenta um recorte da tabela de Johnson para o problema CHRIND em subclasses dos grafos perfeitos<sup>2</sup>. Os valores das células na coluna “CHRIND - 1985” são os publicados em Johnson (1985) e os valores das células da “CHRIND - 2022” são de uma atualização apresentada por Figueiredo *et al.* (2022).

**Quadro 1 – CHRIND em grafos perfeitos**

Classe de grafos	CHRIND - 1985	CHRIND - 2022
Perfeitos	O?	N (CAI; ELLIS, 1991)
Cordais	O?	O?
Split	O?	O?
Fortemente-cordais	O?	O?
Comparabilidade	O?	N (CAI; ELLIS, 1991)
Bipartidos	P (KÖNIG, 1916)	P (KÖNIG, 1916)
Permutação	O?	O?
Cografos	O?	O?

**Fonte: Adaptado de Johnson (1985) e Figueiredo *et al.* (2022).**

No Quadro 1 é possível observar que, embora Johnson tenha arriscado dizer que fosse aparentemente fácil de determinar a complexidade do problema CHRIND para as subclasses dos grafos perfeitos, os avanços alcançados em mais de 35 anos após sua publicação foram

<sup>1</sup> Para conceitos e definições em Complexidade Computacional ver Cormen *et al.* (2001)

<sup>2</sup> Para conceitos e definições sobre grafos perfeitos ver Golubic (2004)

poucos: a demonstração que o problema é NP-completo para grafos de comparabilidade, o que implica que também é NP-completo para grafos perfeitos. A partir disso, temos um indício da dificuldade do problema mesmo quando restrito a classes bem estruturadas como as subclasses dos grafos perfeitos.

Dentre as subclasses dos grafos perfeitos relacionadas por Johnson estão as classes dos grafos cordais e dos grafos split, sendo que a classe dos grafos split está contida na classe dos grafos cordais. Bender, Richmond e Wormald (1985) provaram que a proporção de grafos split no conjunto dos grafos cordais com  $n$  vértices tende a 1 quando  $n$  tende a infinito. Nesse sentido, quase todo grafo cordal é split, o que reforça a importância de pesquisas na classe dos grafos split.

Para algumas subclasses dos grafos split há solução em tempo polinomial conhecida, tais como: split-comparabilidade (CRUZ, 2017; GONZAGA, 2021), split-intervalos (GONZAGA, 2021) e split 2-admissíveis (COSTA, 2022). Além disso, o problema CHRIND está resolvido para grafos split com grau máximo ímpar (CHEN; FU; KO, 1995). Estes e outros resultados serão detalhados no Capítulo 3. É interessante notar que para a subclasse dos grafos split-comparabilidade, que é formada pelos grafos na interseção das classes split e comparabilidade, o problema tem complexidade de tempo polinomial, embora para a classe dos grafos de comparabilidade o problema seja NP-completo.

Embora existam vários resultados parciais na classe dos grafos split, há uma dificuldade de relacioná-los e assim definir quais as características estruturais dos grafos split para os quais o problema CHRIND não possui solução conhecida. Nesse sentido, resultados que apresentam propriedades estruturais desses grafos split podem contribuir para construir uma solução em tempo polinomial para a classe ou para provar que o problema é NP-completo quando restrito aos grafos split.

Nesta dissertação, estudamos o problema CHRIND na classe dos grafos split. Parte de nossos resultados foram alcançados a partir da técnica de coloração de arestas para grafos split com grau máximo ímpar de Chen, Fu e Ko (1995). Nós estendemos essa técnica para um subconjunto de grafos split com grau máximo par. Seja  $G$  um grafo split com clique  $Q$  e conjunto independente  $S$  tal que todo  $v \in Q$  possui grau igual ao grau máximo do grafo. Em nossa generalização, nós resolvemos o problema CHRIND para os casos em que existe um subconjunto  $X \subseteq S$  tal que  $\lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor \leq |N(X)| \leq \frac{\Delta(G)}{2}$ . Além disso, resolvemos o problema para os casos em que  $|N(X)| \geq \frac{\Delta(G)}{2}$  e todo  $u \in X$  possui grau no máximo  $\frac{\Delta(G)}{2}$ . Para os grafos que não possuem um subconjunto  $X$  que obedece a estas condições, nós caracterizamos aqueles que são subgrafo-sobrecarregados, conceito definido no próximo capítulo. A partir dos resultados alcançados, conseguimos definir propriedades estruturais dos grafos split para quais o problema CHRIND continua em aberto.

## 1.1 Estrutura do trabalho

Conceitos e definições básicas estão apresentados no Capítulo 2. Nesse capítulo também abordamos técnicas de coloração de arestas que resultam na solução em tempo polinomial para o problema CHRIND em classes de grafos relevantes para os nossos resultados. No Capítulo 3 discorremos sobre a classe dos grafos split e os resultados conhecidos para o problema na classe. Além disso, detalhamos uma técnica de coloração de arestas de grafos split com grau máximo ímpar. No Capítulo 4 apresentamos nossos resultados. No Capítulo 5 relacionamos três subclasses da classe dos grafos split (split-comparabilidade, split-intervalos e split-fortemente cordais) a partir de subgrafos proibidos. No Capítulo 6 sintetizamos nossos resultados relacionando os casos resolvidos com os casos em aberto.

## 2 CONCEITOS PRELIMINARES

Este capítulo é dividido em quatro seções e tem por objetivo apresentar definições e técnicas para a abordagem do problema CHRIND em grafos split. A primeira apresenta definições e conceitos básicos. Nas seções seguintes são apresentadas técnicas de coloração de arestas e suas aplicações em classes de grafos que possuem relevância no estudo do problema CHRIND na classe dos grafos split.

### 2.1 Definições básicas

Um *grafo* é um modelo matemático que representa relações entre elementos. Os elementos são chamados *vértices* e as relações entre eles são chamadas de *arestas*. Formalmente, um grafo  $G$  pode ser definido como um par ordenado  $G = (V(G), E(G))$ , onde  $V(G)$  é um conjunto de vértices e  $E(G)$  é uma coleção de arestas.

Dois vértices  $v$  e  $w$  são ditos *vizinhos* ou *adjacentes* se existe aresta entre eles, ou seja, se  $\{v, w\} \in E(G)$ . Dizemos que a aresta  $\{v, w\}$  é *incidente* nos vértices  $v$  e  $w$ . Uma aresta que incide com os dois extremos no mesmo vértice é chamada de *laço*. Duas ou mais arestas que incidem no mesmo par de vértices são chamadas de *arestas múltiplas*.

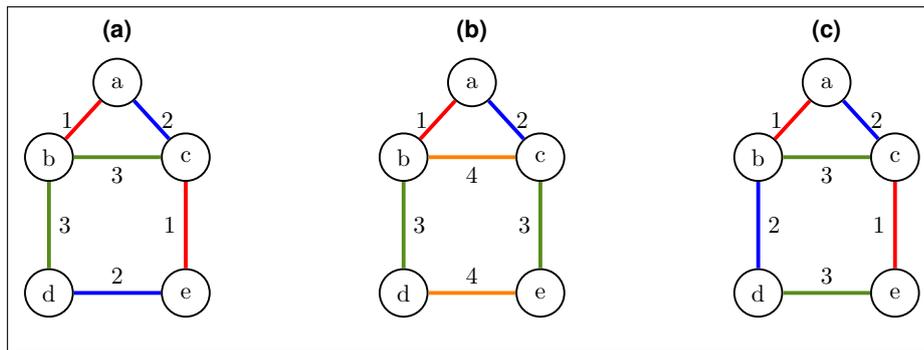
O número de arestas que incidem em um vértice  $v$  de um grafo  $G$  é o chamado de *grau* de  $v$  e é denotado por  $d_G(v)$ , sendo que laços são contados duas vezes. Quando não há ambiguidade, denotamos o grau de  $v$  em  $G$  como  $d(v)$ . O maior grau dentre os vértices é chamado de *grau máximo* de  $G$  e denotado por  $\Delta(G)$ .

Dizemos que  $G$  é *conexo* se, para qualquer partição de  $V(G)$  em duas partes não vazias,  $X$  e  $Y$ , existe um vértice de  $X$  que é adjacente a um vértice de  $Y$ . Um grafo que não contém laços nem arestas múltiplas, é chamado de *grafo simples*. Neste trabalho todos os grafos são conexos e, a menos que dito o contrário, são simples.

Uma *coloração de arestas* é uma atribuição de cores para as arestas do grafo. Neste trabalho, as cores são representadas por números inteiros. Uma coloração de arestas é *própria* se arestas incidentes em um mesmo vértice (também chamadas de *arestas adjacentes*) possuem cores distintas. Na Figura 1 temos três exemplos de coloração de arestas para o *grafo casa*, onde na Figura 1b e na Figura 1c a coloração é própria. Nesse trabalho, consideramos somente coloração de arestas própria, omitindo o termo “própria” a partir de agora.

O *Problema da Coloração de Arestas* é determinar o menor número de cores com o qual se pode colorir as arestas de um dado grafo. Note que o problema CHRIND é a versão de decisão do Problema da Coloração de Arestas e, sabendo a solução para um deles, a solução para o outro pode ser encontrada facilmente. O menor valor inteiro que é solução para o Problema da Coloração de Arestas de um dado grafo  $G$  é chamado de *índice cromático* de  $G$  e denotado por  $\chi'(G)$ . Um limitante inferior para o índice cromático é  $\Delta(G)$  uma vez que há  $\Delta(G)$  arestas adjacentes em  $G$  e todas precisam ter cores distintas. Na Figura 1c, o número de

Figura 1 – (a) Coloração de arestas (b) Coloração própria (c) Coloração própria mínima



Fonte: Autoria própria (2023).

cores utilizadas na coloração é igual ao grau máximo do grafo, logo a coloração é dita *mínima* ou *ótima*. O Teorema 2.1 apresenta um limitante superior para o índice cromático.

**Teorema 2.1.** (VIZING, 1964) Se  $G$  é um grafo simples, então  $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ .  $\square$

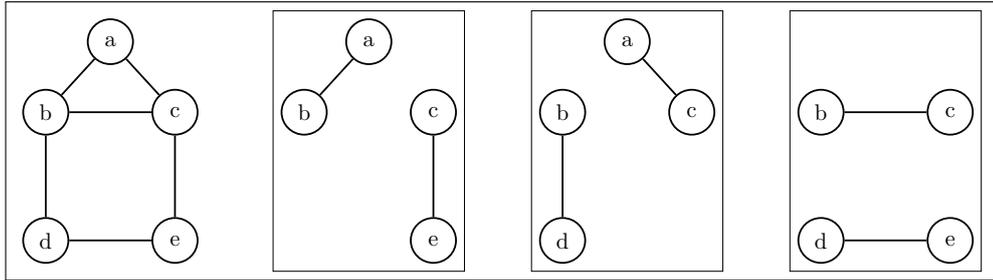
A partir do Teorema 2.1 foi enunciado o *Problema da Classificação* que consiste em, dado um grafo  $G$ , classificá-lo como *Classe 1*, se  $\chi'(G) = \Delta(G)$ ; ou *Classe 2*, se  $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ . Mesmo existindo somente duas opções para o índice cromático, decidir se  $G$  é Classe 1 é um problema desafiador uma vez que é NP-completo (HOLYER, 1981).

Um grafo  $H$  é *subgrafo* de um grafo  $G$  se  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ , tal que toda aresta em  $E(H)$  é incidente em dois vértices pertencentes a  $V(H)$ . Seja  $A$  um subconjunto de  $V(G)$ . O subgrafo de  $G$  *induzido pelos vértices* de  $A$  é o subgrafo  $H$  onde  $V(H) = A$  e  $\{v, w\} \in E(H)$  para cada par de vértices  $v$  e  $w$  pertencentes a  $V(H)$  se, e somente se,  $\{v, w\} \in E(G)$ . Seja  $A$  um subconjunto de arestas de  $E(G)$ . O subgrafo de  $G$  *induzido pelas arestas* de  $A$  é o subgrafo  $H$  onde  $E(H) = A$  e  $V(H)$  é composto pelos vértices que são extremos de alguma aresta de  $A$ . Denotamos um subgrafo de  $G$  induzido por um conjunto  $A$  de vértices ou de arestas como  $G[A]$ . Para subgrafos induzidos por um conjunto de vértices usamos somente o termo *subgrafo induzido*. Um limitante inferior para o índice cromático de um grafo  $G$  pode ser obtido a partir do índice cromático de seus subgrafos, como apresentado na Proposição 2.2.

**Proposição 2.2.** Qualquer subgrafo  $H$  de  $G$  satisfaz  $\chi'(H) \leq \chi'(G)$ .  $\square$

Uma *decomposição* de um grafo  $G$  é um conjunto de subgrafos induzidos pelas arestas de cada um dos subconjuntos de uma partição das arestas de  $G$ . A Figura 2 exemplifica uma decomposição do *grafo casa* em três subgrafos que são induzidos pelos conjuntos de arestas  $\{\{a, b\}, \{c, e\}\}$ ,  $\{\{a, c\}, \{b, d\}\}$  e  $\{\{b, c\}, \{d, e\}\}$ , respectivamente. Um *emparelhamento* é um conjunto de arestas duas a duas não adjacentes. Uma *decomposição em emparelhamentos* é uma decomposição do grafo em que cada subconjunto de arestas é um emparelhamento. A decomposição do grafo da Figura 2 é um exemplo de decomposição em emparelhamentos.

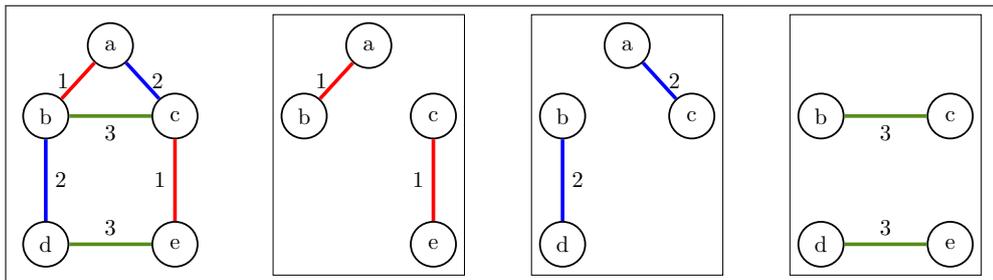
Figura 2 – Exemplo de decomposição de um grafo



Fonte: Autoria própria (2023).

Encontrar uma coloração de arestas mínima é o mesmo que encontrar uma decomposição em emparelhamentos *mínima*, isto é, com menor quantidade possível de subgrafos. Isso ocorre porque em uma coloração de arestas cada subconjunto de arestas com mesma cor é um emparelhamento. A Figura 3 mostra a atribuição de cores para as arestas do grafo a partir de uma decomposição em emparelhamentos.

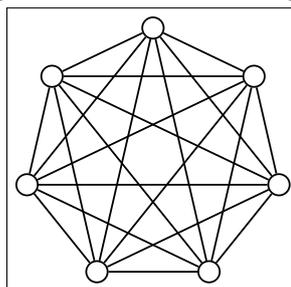
Figura 3 – Exemplo de coloração de um grafo a partir da decomposição em emparelhamentos



Fonte: Autoria própria (2023).

O número máximo de arestas em um emparelhamento para um grafo  $G$  é  $\lfloor \frac{|V(G)|}{2} \rfloor$ . Então, com  $\Delta(G)$  cores pode-se colorir no máximo  $\Delta(G) \lfloor \frac{|V(G)|}{2} \rfloor$  arestas. Se  $G$  satisfaz a inequação  $|E(G)| > \Delta(G) \lfloor \frac{|V(G)|}{2} \rfloor$ , então  $G$  é Classe 2 e é chamado de *grafo sobrecarregado*. Note que apenas grafos com número ímpar de vértices podem ser sobrecarregados, pois, se  $|V(G)|$  é par, então  $|E(G)| \leq \Delta(G) \frac{|V(G)|}{2}$ . O grafo da Figura 4 é um exemplo de grafo sobrecarregado. Esse grafo possui 21 arestas, 7 vértices e grau máximo 6. Como  $21 > 6 \lfloor \frac{7}{2} \rfloor = 18$ , o grafo é sobrecarregado.

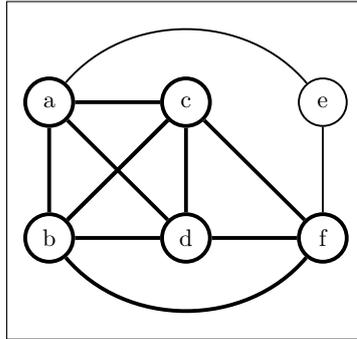
Figura 4 – Grafo sobrecarregado



Fonte: Autoria própria (2023).

A vizinhança aberta de um vértice  $v$  em um grafo  $G$ , denotada por  $N_G(v)$ , é o conjunto dos vértices adjacentes a  $v$ . A vizinhança fechada de  $v$ , denotada por  $N_G[v]$ , é  $N_G(v) \cup \{v\}$ . No grafo  $G$  da Figura 5, a vizinhança aberta do vértice  $b$  é  $N_G(b) = \{a, c, d, f\}$  e a vizinhança fechada de  $b$  é  $N_G[b] = \{a, b, c, d, f\}$ . Quando não há ambiguidade, denotamos como  $N(v)$  e  $N[v]$  a vizinhança aberta e a vizinhança fechada do vértice  $v$ , respectivamente.

**Figura 5 – Subgrafo sobrecarregado**

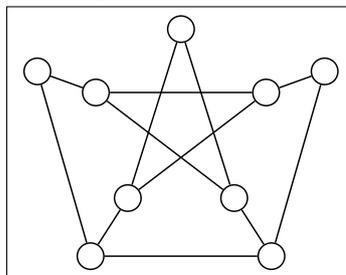


Fonte: Autoria própria (2023).

Um grafo  $G$  é *subgrafo-sobrecarregado* se contém um subgrafo  $H$  com  $\Delta(H) = \Delta(G)$  tal que  $H$  é sobrecarregado. Se  $V(H) = N_G[v]$ , onde  $d(v) = \Delta(G)$ , e  $H$  é sobrecarregado, então  $G$  é *vizinhança-sobrecarregado*. Por definição, todo grafo vizinhança-sobrecarregado é subgrafo-sobrecarregado. Além disso, todo grafo subgrafo-sobrecarregado é Classe 2. Considere que  $G$  é o grafo da Figura 5 e  $H$  é o subgrafo em destaque induzido pelos vértices  $\{a, b, c, d, f\}$ . Note que  $\Delta(G) = \Delta(H)$  e  $H$  é sobrecarregado, dessa forma, o grafo  $G$  é subgrafo-sobrecarregado. Além disso,  $H$  é induzido por  $N_G[b]$ , onde  $b$  é um vértice de grau máximo, logo  $G$  é vizinhança-sobrecarregado.

Embora ser subgrafo-sobrecarregado seja uma condição suficiente para um grafo ser Classe 2, essa condição não é necessária. Um exemplo disso é o grafo  $P^*$ , apresentado na Figura 6, e que é obtido pela remoção de um vértice qualquer do conhecido grafo de Petersen. Este grafo é o menor grafo conhecido que é Classe 2 e não é subgrafo-sobrecarregado.

**Figura 6 – Grafo  $P^*$**



Fonte: Autoria própria (2023).

Existe algoritmo polinomial que checa se um grafo é subgrafo-sobrecarregado (PADBERG; RAO, 1982). Logo, para casos onde ser subgrafo-sobrecarregado é uma condição necessária e suficiente para o grafo ser Classe 2 o Problema da Classificação pode ser resolvido

em tempo polinomial. Assim, uma questão interessante é caracterizar a classe dos grafos para os quais ser Classe 2 é equivalente a ser subgrafo-sobrecarregado.

Em 1984, foi enunciada a *Conjectura Overfull* que afirmava que todo grafo  $G$  com  $\Delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$  é Classe 2 se, e somente se, é subgrafo-sobrecarregado (CHETWYND; HILTON, 1984). Dois anos depois, a condição foi alterada para  $\Delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{3}$  (CHETWYND; HILTON, 1986). No ano seguinte, o grafo  $P^*$  foi apresentado como contraexemplo para a conjectura (HILTON; JOHNSON, 1987). Observe que o grafo  $P^*$  não é subgrafo-sobrecarregado, é Classe 2 e satisfaz  $\Delta(P^*) = \frac{|V(P^*)|}{3}$ . Então, a *Conjectura Overfull* tomou a forma atualmente conhecida, apresentada na *Conjectura 2.3*.

**Conjectura 2.3.** (CHETWYND; HILTON, 1984; CHETWYND; HILTON, 1986; HILTON; JOHNSON, 1987) *Seja  $G$  um grafo com  $\Delta(G) > \frac{|V(G)|}{3}$ , então  $G$  é Classe 2 se, e somente se,  $G$  é subgrafo-sobrecarregado.*  $\square$

Uma das evidências mais recentes de validade para a *Conjectura Overfull* é de Plantholt e Shan (2023). Os autores provaram que para algum  $0 < \epsilon < 1$ , existe um inteiro positivo  $n_0$  tal que se  $G$  é um grafo com  $2n \geq n_0$  vértices de grau no mínimo  $(1 + \epsilon)n$ , então  $G$  é Classe 1 se, e somente se,  $G$  não é subgrafo-sobrecarregado.

Um grafo é *cordal* se não contém ciclo com mais de três vértices como subgrafo induzido. Essa é uma das classes para as quais a *Conjectura Overfull* permanece em aberto. A *Conjectura 2.4*, a seguir, enuncia uma possível caracterização dos grafos Classe 2 dessa família.

**Conjectura 2.4.** (FIGUEIREDO; MEIDANIS; MELLO, 2000) *Todo grafo cordal Classe 2 é vizinhança-sobrecarregado.*  $\square$

O *complemento* de um grafo  $G$ , denotado por  $\overline{G}$ , é o grafo com  $V(\overline{G}) = V(G)$  tal que, para cada par de vértices  $x$  e  $y$ , a aresta  $\{x, y\} \in E(\overline{G})$  se, e somente se,  $\{x, y\} \notin E(G)$ . A classe dos grafos cordais cujo complemento também é cordal é equivalente à classe dos grafos *split* (FOLDES; HAMMER, 1977a). Sabe-se que todo grafo *split* subgrafo-sobrecarregado é vizinhança-sobrecarregado, como enunciado no Teorema 2.5. Contudo, não se sabe se os únicos grafos *split* Classe 2 são os vizinhanças-sobrecarregados.

**Teorema 2.5.** (FIGUEIREDO; MEIDANIS; MELLO, 2000) *Todo grafo split subgrafo-sobrecarregado é vizinhança-sobrecarregado.*  $\square$

## 2.2 Coloração de arestas com quadrados latinos

Um *quadrado latino*  $M_{k,k}$  é uma matriz quadrada de ordem  $k$ , com  $k$  elementos distintos, onde em cada linha e coluna os elementos não se repetem. Um quadrado latino é *comutativo*, se  $m_{i,j} = m_{j,i}$  para todo  $i$  e  $j$ ,  $0 \leq i, j \leq k - 1$ , e é *idempotente* se os elementos da diagonal

principal são dois a dois distintos. Neste trabalho, denotamos como  $L_{k,k}$  o quadrado latino com células  $l_{i,j}$  preenchidas a partir da Equação 1 e chamamos seus elementos de cores.

$$l_{i,j} = (i + j) \bmod k, \quad 0 \leq i, j \leq k - 1 \quad (1)$$

A Figura 7 mostra o quadrado latino de ordem par  $L_{6,6}$  e o quadrado latino de ordem ímpar  $L_{7,7}$ .

Figura 7 – (a)  $L_{6,6}$  (b)  $L_{7,7}$

(a)						(b)						
0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	6	0
2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	6	0	1
3	4	5	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2
4	5	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3
5	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4
						6	0	1	2	3	4	5

Fonte: Autoria própria (2023).

Note que o quadrado latino  $L_{k,k}$  é sempre comutativo. Além disso, as cores das primeiras  $\lceil k/2 \rceil$  células da diagonal principal do quadrado latino  $L_{k,k}$  são sempre pares e as últimas  $\lfloor k/2 \rfloor$  cores têm a mesma paridade de  $k$ . Assim, quando  $k$  é ímpar,  $L_{k,k}$  é idempotente, entretanto sabe-se que não existem quadrados latinos de ordem par idempotentes (CHEN; FU; KO, 1995). A seguir, enunciaremos algumas proposições relacionadas a quadrados latinos construídos a partir da Equação 1.

**Proposição 2.6.** O quadrado latino  $L_{k,k}$  com  $k$  ímpar é idempotente. □

**Proposição 2.7.** No quadrado latino  $L_{k,k}$  com  $k$  par, a cor  $2i$  da diagonal principal ocorre exatamente duas vezes, precisamente nas células  $l_{i,i}$  e  $l_{i+\frac{k}{2}, i+\frac{k}{2}}$ , para todo  $i, 0 \leq i < \frac{k}{2}$ . □

**Proposição 2.8.** No quadrado latino  $L_{k,k}$  os elementos de qualquer subconjunto formado por até  $\frac{k}{2}$  células consecutivas da diagonal principal são dois a dois distintos. □

Uma *clique* é um conjunto de vértices dois a dois adjacentes. Um grafo é *completo* se seu conjunto de vértices é uma clique. Denotamos um grafo completo com  $n$  vértices como  $K_n$ . A classe dos grafos completos foi uma das primeiras para a qual o Problema da Classificação foi resolvido, ao ponto que é tido como um resultado do folclore da área. O Teorema 2.9 define o índice cromático para grafos completos de acordo com a paridade do número de vértices. Na demonstração desse teorema utilizamos quadrados latinos.

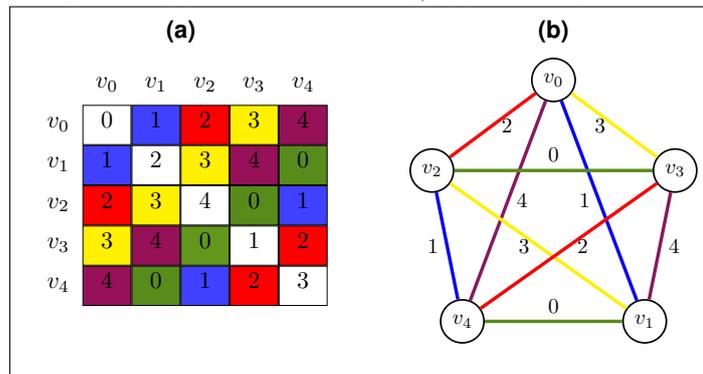
**Teorema 2.9.** Um grafo completo  $K_n$  com  $n$  vértices é Classe 1 se, e somente se,  $n$  é par.

*Demonstração.* Seja  $K_n$  um grafo completo com  $V(K_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ . Se  $n$  é ímpar, então  $K_n$  é sobrecarregado e uma coloração com  $n$  cores é mínima. Dessa forma, construa um quadrado latino  $L_{n,n}$ . Para cada aresta  $\{v_i, v_j\}$ ,  $0 \leq i, j \leq n - 1, i \neq j$ , atribua a cor da célula  $l_{i,j}$ .

Se  $n$  é par construa um quadrado latino  $L_{n-1, n-1}$ . Para cada aresta  $\{v_i, v_j\}$ ,  $0 \leq i, j \leq n - 2, i \neq j$ , atribua a cor da célula  $l_{i,j}$ . Agora resta apenas colorir as arestas incidentes a  $v_{n-1}$ . Pela Proposição 2.6, as cores da diagonal principal são todas distintas. Assim, para cada aresta  $\{v_i, v_{n-1}\}$ ,  $0 \leq i \leq n - 2$  atribua a cor da célula  $l_{i,i}$ .  $\square$

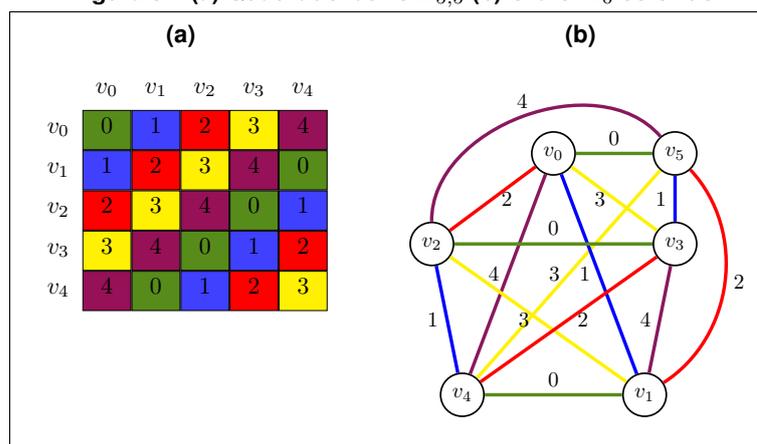
Nas figuras 8 e 9 exemplificamos a coloração de grafos completos utilizando quadrados latinos conforme a demonstração do Teorema 2.9. Na primeira, é apresentada a coloração do grafo  $K_5$  e, na segunda, a coloração do grafo  $K_6$ .

**Figura 8 – (a) Quadrado latino  $L_{5,5}$  (b) Grafo  $K_5$  colorido**



Fonte: Autoria própria (2023).

**Figura 9 – (a) Quadrado latino  $L_{5,5}$  (b) Grafo  $K_6$  colorido**



Fonte: Autoria própria (2023).

Dizemos que uma cor  $c$  *falta* em um vértice  $v$  se nenhuma aresta incidente em  $v$  tem cor  $c$ . Ao final da coloração de grafos completos com número ímpar de vértices as cores da diagonal principal do quadrado latino faltam uma em cada vértice. Pela Proposição 2.6, essas cores são duas a duas distintas, como formalizado no Lema 2.10.

**Lema 2.10.** (PLANTHOLT, 1981) *Em uma coloração de arestas de um grafo completo  $K_n$  de ordem ímpar com  $n$  cores, cada cor falta em exatamente um vértice e em cada vértice falta exatamente uma cor.*  $\square$

Vamos agora enunciar algumas propriedades de quadrados latinos que serão utilizadas na Seção 3.1. Considere o quadrado latino  $L_{k,k}$ . Vamos chamar de *diagonal da coluna  $j$*  e denotar por  $D_{col}(j)$ , o conjunto das células  $l_{0,j}, l_{1,j-1}, l_{2,j-2}, \dots, l_{j,0}$ , para todo  $j \in [0, k-1]$ . Vamos chamar de *diagonal da linha  $i$*  e denotar por  $D_{lin}(i)$ , o conjunto das células  $l_{i,k-1}, l_{i+1,k-2}, l_{i+2,k-3}, \dots, l_{i+(k-1-i),k-1-(k-1-i)} = l_{k-1,i}$ , para todo  $i \in [0, k-1]$ . Note que, por definição, a diagonal secundária do quadrado latino  $L_{k,k}$  é  $D_{col}(k-1) = D_{lin}(0)$  e, com exceção dessa diagonal, não há interseção entre as células das diagonais linha e diagonais coluna. A Figura 10 mostra um quadrado latino  $L_{6,6}$  com destaque nas células pertencentes a  $D_{col}(2)$  e  $D_{lin}(2)$ .

**Figura 10** –  $D_{col}(2)$  e  $D_{lin}(2)$  no quadrado latino  $L_{6,6}$

$D_{col}(2)$						
0	1	2	3	4	5	
1	2	3	4	5	0	
2	3	4	5	0	1	$D_{lin}(2)$
3	4	5	0	1	2	
4	5	0	1	2	3	
5	0	1	2	3	4	

**Fonte:** Autoria própria (2023).

Por propriedades da aritmética modular,  $i + j \equiv i - x + j + x \equiv i + x + j - x \pmod{k}$ , para quaisquer valores inteiros de  $i, j, x$  e  $k$ . Consequentemente, em qualquer quadrado latino  $L_{k,k}$  construído de acordo com a Equação 1, valem as seguintes propriedades.

**Proposição 2.11.** *Seja  $l_{i,i}$  uma célula da diagonal principal do quadrado latino  $L_{k,k}$ . Se  $2i \leq k-1$ , então  $l_{i,i}$  está em uma diagonal coluna. Se  $2i \geq k-1$ , então  $l_{i,i}$  está em uma diagonal linha.*  $\square$

**Proposição 2.12.** *Todas as células de  $D_{col}(j)$  têm a cor  $j$ ,  $0 \leq j \leq k-1$ .*  $\square$

**Proposição 2.13.** *Todas as células de  $D_{lin}(0)$  têm a cor  $k-1$ . E todas as células de  $D_{lin}(i)$  têm cor  $i-1$ ,  $1 \leq i \leq k-1$ .*  $\square$

**Proposição 2.14.** *A diagonal coluna  $D_{col}(k-1)$  e a diagonal linha  $D_{lin}(0)$  possuem as mesmas células de  $L_{k,k}$ .*  $\square$

Assim, as células de  $D_{col}(k-1) = D_{lin}(0)$  têm cor  $k-1$ ; e as células de  $D_{col}(j)$  e  $D_{lin}((j+1) \bmod k)$  têm a cor  $j$ , para  $0 \leq j < k-1$ . Além disso, observe que toda linha e toda coluna do quadrado latino  $L_{k,k}$  tem um elemento da diagonal secundária. Portanto, a

cor  $k - 1$  ocorre somente em  $D_{col}(k - 1) = D_{lin}(0)$ . Além disso, para qualquer  $j \neq k - 1$ , o conjunto  $D_{col}(j) \cup D_{lin}((j + 1) \bmod k)$  tem um elemento de cada linha e de cada coluna. Portanto, a cor  $j$  ocorre apenas em células desse conjunto. A Proposição 2.15 formaliza essa propriedade.

**Proposição 2.15.** *A cor de uma célula  $l_{i,j}$  do quadrado latino  $L_{k,k}$ ,  $c = (i + j) \bmod k$ , ocorre somente em  $D_{col}(c)$  e  $D_{lin}((c + 1) \bmod k)$ , para quaisquer valores de  $i, j$  e  $k$ .  $\square$*

### 2.3 Coloração de arestas com emparelhamentos

Conceitos que envolvem emparelhamentos são fundamentais quando se estuda coloração de arestas. Como mencionado anteriormente, ao conhecer uma decomposição em emparelhamentos mínima para o grafo, encontrar uma coloração de arestas mínima é trivial. Nesta seção apresentamos alguns conceitos sobre emparelhamentos e uma prova para a coloração ótima dos grafos bipartidos, a partir da decomposição em emparelhamentos. Os teoremas dessa seção envolvem essa classe de grafos e são válidos tanto para grafos simples quanto para *multigrafos* (grafos que possuem arestas múltiplas).

Um *conjunto independente* é um conjunto de vértices dois a dois não adjacentes. Um grafo é *bipartido* se seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos independentes. Denotamos um grafo bipartido  $B$  com partição do conjunto de vértices em dois conjuntos independentes  $X$  e  $Y$  como  $B[X, Y]$ .

Um emparelhamento  $M$  cobre um vértice  $v$  se alguma aresta em  $M$  é incidente em  $v$ . Dado um grafo bipartido  $B[X, Y]$ , uma condição necessária e suficiente para existir um emparelhamento que cobre todos os vértices de  $X$  é  $|N(S)| \geq |S|$  para todo  $S \subseteq X$ . Essa condição é conhecida como *Condição de Hall* (HALL, 1935) e está enunciada no Teorema 2.16.

**Teorema 2.16.** (HALL, 1935) *Um grafo bipartido  $B[X, Y]$  tem um emparelhamento que cobre todos os vértices de  $X$  se, e somente se,  $|N(S)| \geq |S|$  para todo  $S \subseteq X$ .  $\square$*

Um emparelhamento é *perfeito* se cobre todos os vértices do grafo. Para o grafo  $B[X, Y]$  ter um emparelhamento perfeito, as duas partes,  $X$  e  $Y$ , devem obedecer à Condição de Hall, implicando que  $|X| = |Y|$ . O Corolário 2.17 formaliza essa observação.

**Corolário 2.17.** *Um grafo bipartido  $B[X, Y]$  tem um emparelhamento perfeito se, e somente se,  $|X| = |Y|$  e  $|N(S)| \geq |S|$  para todo  $S \subseteq X$ .  $\square$*

Um grafo  $G$  é *k-regular* se  $d(v) = k$ , para todo  $v \in V(G)$ . Em um grafo bipartido  $B[X, Y]$ , a soma dos graus dos vértices de  $X$  é igual à soma dos graus dos vértices de  $Y$ . Se  $B$  é um grafo bipartido *k-regular* com  $k \geq 1$ , temos  $k|X| = k|Y|$  o que resulta que  $|Y| = |X|$ . A partir dessa característica dos grafos bipartidos regulares e do Corolário 2.17, obtemos o Corolário 2.18.

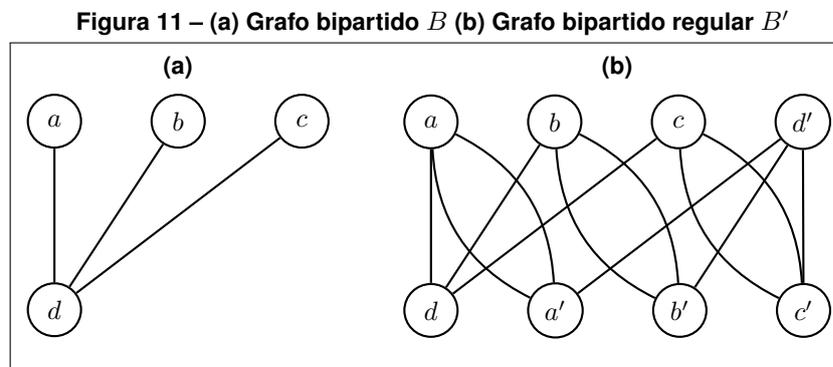
**Corolário 2.18.** *Todo grafo bipartido  $k$ -regular,  $k \geq 1$ , tem um emparelhamento perfeito.*  $\square$

O Teorema 2.19 enuncia que todo grafo bipartido tem um emparelhamento que cobre os vértices de grau máximo. Para isso, Schrijver (1998) mostra que todo grafo bipartido é subgrafo de um grafo bipartido  $k$ -regular com o mesmo grau máximo, que pode ser ou não um multigrafo.

**Teorema 2.19.** (SCHRIJVER, 1998) *Todo grafo bipartido tem um emparelhamento que cobre todos os vértices de grau máximo.*

*Demonstração.* Seja  $B[X, Y]$  um grafo bipartido. É possível construir um grafo bipartido  $B'$  que é  $\Delta(B)$ -regular e contém  $B$  como subgrafo. Construímos  $B'[X', Y']$  a partir de  $B$  adicionando, para cada vértice  $v \in V(B)$ , um vértice  $v'$  na partição oposta a de  $v$ . Além disso, se  $\{v, w\} \in E(B)$ , então  $\{v', w'\}$  é adicionada a  $E(B')$ . Finalmente, para garantir que  $B'$  é  $\Delta(B)$ -regular, para cada  $v \in V(B)$ , adicionamos  $\Delta(B) - d_B(v)$  arestas múltiplas com extremos em  $v$  e  $v'$  em  $E(B')$ . Pelo Corolário 2.18,  $B'$  tem um emparelhamento perfeito  $M'$ . Seja  $M$  o subconjunto de arestas de  $M'$  que são arestas de  $B$ . Como os vértices de grau máximo de  $B$  não tiveram novas arestas adicionadas em  $B'$ ,  $M$  cobre todos os vértices de grau máximo de  $B$ .  $\square$

A Figura 11 exemplifica a construção de um grafo bipartido  $k$ -regular construído a partir de um grafo bipartido  $B$ . A Figura 11a mostra o grafo bipartido  $B$  com grau máximo 3 e, na Figura 11b, o grafo bipartido 3-regular  $B'$ .



**Fonte: Autoria própria (2023).**

A classe dos grafos bipartidos tem índice cromático definido há mais de um século como enunciado no Teorema 2.20. A seguir apresentamos uma demonstração para esse teorema utilizando o Teorema 2.19.

**Teorema 2.20.** (KÖNIG, 1916) *Todo grafo bipartido é Classe 1.*

*Demonstração.* Seja  $B$  um grafo bipartido. Vamos demonstrar por indução em  $\Delta(B)$ . Se  $\Delta(B) = 0$ , então não existem arestas para serem coloridas e nenhuma cor é necessária. Se  $\Delta(B) = 1$ , não existe vértice onde incide mais de uma aresta, logo  $E(B)$  é um emparelhamento e uma única cor é suficiente. Suponha, por hipótese de indução, que para um inteiro  $k > 1$  e qualquer grafo bipartido  $B$  com  $\Delta(B) < k$  existe uma coloração de arestas com  $\Delta(B)$

cores. Seja  $B^*$  um grafo bipartido com  $\Delta(B^*) = k$ . Pelo Teorema 2.19, existe um emparelhamento  $M$  que cobre todos os vértices de grau máximo de  $B^*$ . Observe que  $\Delta(B^* \setminus M) = k - 1$  e, por hipótese de indução,  $B^* \setminus M$  pode ser colorido com  $k - 1$  cores. Usando uma nova cor para as arestas de  $M$  obtemos uma coloração com  $\Delta(B^*)$  cores para  $B^*$ . Portanto,  $B^*$  é Classe 1.  $\square$

## 2.4 Coloração de arestas de grafos com vértice universal

Dado um grafo  $G$ , um vértice  $v \in V(G)$  é *vértice universal* se  $v$  é vizinho de todos os outros. Nesta seção, discutiremos sobre como Plantholt (1981) resolveu o Problema da Classificação para os grafos com vértice universal. Antes disso, enunciamos alguns conceitos utilizados pelo autor na prova desse resultado.

Uma coloração é *equilibrada* se a diferença entre a quantidade de vezes que quaisquer duas cores ocorrem na coloração é no máximo 1. Uma coloração equilibrada não é necessariamente uma coloração ótima, entretanto a existência de uma coloração de arestas com  $k$  cores garante a existência de uma coloração de arestas equilibrada com  $k$  cores, como enunciado no Teorema 2.21.

**Teorema 2.21.** (FOLKMAN; FULKERSON, 1969) *Se um grafo  $G$  tem uma coloração de arestas com  $k$  cores, então  $G$  tem uma coloração de arestas equilibrada com  $k$  cores.*  $\square$

O Lema 2.22 se refere a uma propriedade das colorações equilibradas com  $n$  cores em grafos completos de ordem par.

**Lema 2.22.** (PLANTHOLT, 1981) *Seja  $K_n$  um grafo completo de ordem par. Em uma coloração equilibrada com  $n$  cores, metade das cores não falta em nenhum vértice e a outra metade falta em exatamente dois vértices.*  $\square$

Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices e com pelo menos um vértice universal. Note que  $G$  é subgrafo do grafo completo  $K_n$  e  $\Delta(G) = \Delta(K_n) = n - 1$ . Há dois casos: ou  $n$  é par ou  $n$  é ímpar. Se  $n$  é par, então  $K_n$  é Classe 1 pelo Teorema 2.9, e  $G$  é Classe 1 pela Proposição 2.2. Se  $n$  é ímpar, então  $K_n$  é sobrecarregado e Classe 2. Se  $G$  é sobrecarregado, então  $G$  é Classe 2 e uma coloração com  $\Delta(G) + 1$  cores para  $G$  pode ser obtida a partir de uma coloração do grafo  $K_n$  removendo as arestas que não pertencem a  $E(G)$ . Entretanto, se há pelo menos  $\frac{\Delta(G)}{2}$  arestas em  $\overline{G}$ , o grafo  $G$  não é sobrecarregado. Nesse caso, não podemos afirmar qual é o índice cromático de  $G$  apenas com base no índice cromático do grafo  $K_n$ . Na Definição 2.23 introduzimos o conceito de grafo *saturado*.

**Definição 2.23.** *Um grafo  $G$  é saturado se o número de arestas em  $\overline{G}$  é exatamente  $\frac{\Delta(G)}{2}$ .*

Observe que se  $G$  tem menos que  $\frac{\Delta(G)}{2}$  arestas em seu complemento, então  $G$  é sobrecarregado. Plantholt (1981) mostrou que todo grafo saturado  $G$  com vértice universal possui

uma coloração de arestas com  $\Delta(G)$  cores. Com isso, todo subgrafo de  $G$  que tenha grau máximo igual a  $\Delta(G)$  tem uma coloração de arestas com  $\Delta(G)$  cores. Assim, o autor provou que todo grafo com vértice universal que não é sobrecarregado tem uma coloração de arestas com  $\Delta(G)$  cores, resolvendo o Problema da Classificação para estes grafos, como enunciado no Teorema 2.24.

**Teorema 2.24.** (PLANTHOLT, 1981) *Um grafo  $G$  com vértice universal é Classe 1 se, e somente se,  $G$  não é sobrecarregado.*

*Ideia de demonstração.* Seja  $G$  um grafo com vértice universal, saturado e com  $|V(G)|$  ímpar. Para colorir as arestas de  $G$ , o grafo é decomposto em três subgrafos disjuntos nas arestas. Essa decomposição tem por base a partição de  $V(G)$  em dois subconjuntos  $R$  e  $L$ , com  $\frac{\Delta(G)}{2}$  e  $\frac{\Delta(G)}{2} + 1$  vértices, respectivamente. Nós vamos omitir as regras para a partição de  $V(G)$  nesses subconjuntos. Os subconjuntos  $R$  e  $L$  induzem dois subgrafos da decomposição de  $G$ . O terceiro subgrafo é um grafo bipartido induzido pelas arestas com um extremo em  $R$  e outro em  $L$ .

Como  $G[R]$  e  $G[L]$  são disjuntos nos vértices, o mesmo conjunto de  $\frac{\Delta(G)}{2}$  cores é utilizado na coloração desses subgrafos. Assuma que essas cores pertencem ao subconjunto  $\{1, 2, \dots, \frac{\Delta(G)}{2}\}$ . Essa coloração se divide em dois casos:  $\frac{\Delta(G)}{2}$  ímpar e  $\frac{\Delta(G)}{2}$  par. Para o caso de  $\frac{\Delta(G)}{2}$  ímpar, o Lema 2.10 garante a coloração de  $G[R]$  e o Teorema 2.9 a coloração de  $G[L]$ . No caso de  $\frac{\Delta(G)}{2}$  par, o Lema 2.22 é utilizado para coloração de  $G[R]$  e a hipótese de indução garante que  $G[L]$  pode ser colorido com  $\frac{\Delta(G)}{2}$  cores.

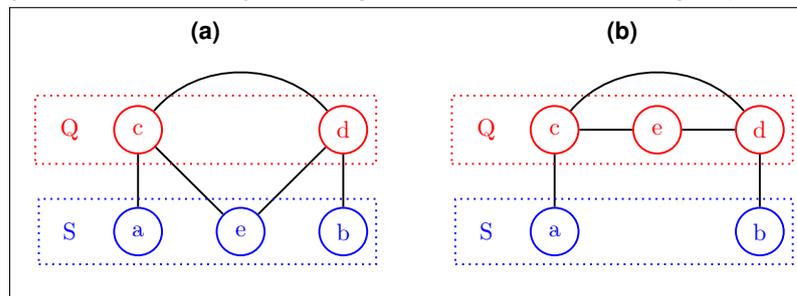
Para colorir o terceiro subgrafo da decomposição, que é um grafo bipartido  $B[R, L]$ , é preciso considerar dois casos: o grau máximo desse subgrafo é  $\frac{\Delta(G)}{2}$  ou  $\frac{\Delta(G)}{2} + 1$ . Se o grau máximo de  $B[R, L]$  é  $\frac{\Delta(G)}{2}$  então, pelo Teorema 2.20,  $B[R, L]$  tem uma coloração com  $\frac{\Delta(G)}{2}$  cores e as cores  $\{\frac{\Delta(G)}{2} + 1, \dots, \Delta(G)\}$  são usadas na coloração das arestas desse subgrafo. Caso contrário, pelo Teorema 2.19, existe um emparelhamento  $M$  que cobre os vértices de grau máximo de  $B[R, L]$ . Plantholt (1981) mostra como colorir as arestas de  $M$  usando as cores do subconjunto  $\{1, 2, \dots, \frac{\Delta(G)}{2}\}$  que faltam nos vértices após coloração dos subgrafos  $G[R]$  e  $G[L]$ . Esse argumento fundamenta-se na quantidade de arestas no complemento de  $G[R]$  e  $G[L]$  e na aplicação de uma coloração de arestas equilibrada nestes grafos. Com as arestas pertencentes a  $M$  coloridas, o grafo  $B' = B[R, L] \setminus M$ , possui  $\Delta(B') = \frac{\Delta(G)}{2}$  e, pelo Teorema 2.20,  $B'$  possui uma coloração de arestas com as cores  $\{\frac{\Delta(G)}{2} + 1, \dots, \Delta(G)\}$ . Desse modo, são utilizadas  $\Delta(G)$  cores na coloração de todas as arestas do grafo e  $G$  é Classe 1.  $\square$

### 3 COLORAÇÃO DE ARESTAS EM GRAFOS SPLIT

No capítulo anterior vimos que o Problema da Classificação está resolvido para grafos bipartidos e grafos completos. Os grafos split possuem decomposição em dois subgrafos tal que um é um grafo completo e o outro um grafo bipartido. Essa decomposição pode ser encontrada facilmente visto que um grafo  $G$  é split se  $V(G)$  pode ser particionado em dois subconjuntos  $Q$  e  $S$  tal que  $Q$  é uma clique e  $S$  é um conjunto independente (FOLDES; HAMMER, 1977a). Assim,  $G[Q]$  é um grafo completo e as arestas com um extremo em  $Q$  e outro em  $S$  induzem um grafo bipartido que será denotado por  $B[Q,S]$ . Uma vez que o índice cromático de grafos completos e de grafos bipartidos é conhecido, é natural nos perguntarmos se o índice cromático de grafos split pode ser determinado em tempo polinomial.

Dado um grafo split  $G$ , a partição do conjunto de vértices em uma clique  $Q$  e um conjunto independente  $S$  pode não ser única. Um exemplo disso é o grafo exibido na Figura 12, onde duas partições diferentes do conjunto de vértices em clique e conjunto independente são apresentadas. Um conjunto  $X$  é *maximal* para uma propriedade  $P$  quando não está propriamente contido em outro conjunto que satisfaz  $P$ . Na Figura 12a o conjunto independente  $S$  é maximal. Na Figura 12b, o conjunto independente  $S$  não é maximal, pois está propriamente contido em  $\{a, e, b\}$ , já a clique  $Q$  é uma clique maximal.

Figura 12 – (a) Subconjunto independente  $S$  maximal (b) Clique  $Q$  maximal



Fonte: Autoria própria (2023).

Denotamos um grafo split  $G = (V(G), E(G))$  com a partição  $[Q, S]$  de  $V(G)$ , onde  $Q$  é uma clique e  $S$  é um conjunto independente, por  $G = (Q \cup S, E(G))$ . Utilizamos a notação  $d_B(Q)$  para nos referirmos ao grau máximo dos vértices do conjunto  $Q$  no subgrafo bipartido  $B[Q,S]$ . De forma análoga, usamos a notação  $d_B(S)$  para o grau máximo dos vértices do conjunto  $S$  em  $B[Q,S]$ . Quando não há ambiguidade, utilizamos as notações  $d(Q)$  e  $d(S)$  em vez de  $d_B(Q)$  e  $d_B(S)$ , respectivamente. Note que o grau máximo de um grafo split  $G$  é  $\Delta(G) = \Delta(G[Q]) + d_B(Q)$ . A Equação 2 formaliza a relação entre os valores de  $\Delta(G)$ ,  $Q$  e  $d(Q)$  de um grafo split  $G$ .

$$\Delta(G) = |Q| - 1 + d(Q) \quad (2)$$

A partir da decomposição de grafos split em  $G[Q]$  e  $B[Q,S]$ , Chen, Fu e Ko (1995) provaram que se  $G$  é um grafo split com clique maximal e  $d_B(Q) > d_B(S)$ , então  $G$  é Classe 1. Almeida (2012) apresentou uma demonstração que abrange esse resultado e inclui o caso em que  $d_B(Q) = d_B(S)$ , como enunciado no Teorema 3.1.

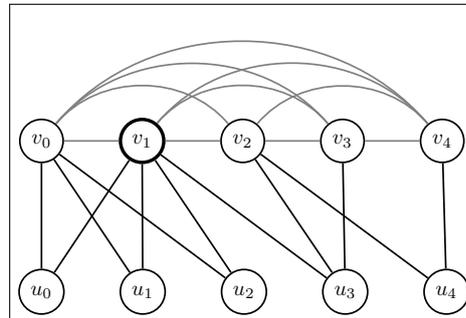
**Teorema 3.1.** (CHEN; FU; KO, 1995; ALMEIDA, 2012) Se  $G = (Q \cup S, E(G))$  é um grafo split com clique maximal e  $d_B(Q) \geq d_B(S)$ , então  $G$  é Classe 1.

*Demonstração.* Considere um grafo split  $G = (Q \cup S, E(G))$  com  $d_B(Q) \geq d_B(S)$ . Há dois casos: ou  $|Q|$  é par ou  $|Q|$  é ímpar. Primeiro considere que  $|Q|$  é par. Uma vez que  $G[Q]$  é um grafo completo, pelo Teorema 2.9,  $G[Q]$  é Classe 1, ou seja,  $G[Q]$  possui uma coloração de arestas com  $\Delta(G[Q]) = |Q| - 1$  cores. Como  $|Q| - 1$  cores já foram utilizadas, da Equação 2, obtemos que para que  $G$  seja Classe 1, o subgrafo  $B[Q,S]$  deve possuir uma coloração com  $d_B(Q)$  cores. Por hipótese,  $d_B(Q) \geq d_B(S)$ , assim  $\Delta(B) = d_B(Q)$ . Pelo Teorema 2.20, o grafo  $B[Q,S]$  tem uma coloração com  $\Delta(B)$  cores. Portanto,  $G$  é Classe 1.

Agora considere que  $|Q|$  é ímpar. Pelo Teorema 2.9, o grafo  $G[Q]$  possui uma coloração de arestas com  $\Delta(G[Q]) + 1 = |Q|$  cores. Considere que essas cores pertencem ao conjunto  $\{1, 2, \dots, |Q|\}$ . Pelo Lema 2.10, cada uma das cores  $\{1, 2, \dots, |Q|\}$  falta em exatamente um vértice e em cada vértice falta exatamente uma cor. Por hipótese,  $d_B(Q) \geq d_B(S)$ , então os vértices de grau máximo em  $G$  também possuem grau máximo em  $B[Q,S]$ . Pelo Teorema 2.19, existe um emparelhamento  $M$  que cobre os vértices de grau máximo de  $B[Q,S]$ . Pinte as arestas de  $M$  com as cores  $\{1, 2, \dots, |Q|\}$  que faltam nos respectivos vértices de  $Q$ . Seja  $B' = B[Q,S] \setminus M$ . Pelo Teorema 2.20,  $B'$  tem uma coloração com  $\Delta(B') = \Delta(B) - 1 = d_B(Q) - 1$  cores. Portanto,  $G$  é Classe 1.  $\square$

A Figura 13 exibe um grafo em que o vértice  $v_1 \in Q$  tem grau máximo no subgrafo  $B[Q,S]$  e, pelo Teorema 3.1, este grafo é Classe 1.

**Figura 13 – Grafo split com  $d_B(v_1) = \Delta(B[Q,S])$**



**Fonte: Autoria própria (2023).**

Uma condição suficiente para que um grafo split  $G = (Q \cup S, E(G))$ , com clique  $Q$  maximal, satisfaça as premissas do Teorema 3.1 é  $\Delta(G) \geq 2|Q| - 2$ . Note que quando essa condição é atendida,  $d(S) \leq |Q| - 1$  e  $Q - 1 \leq d(Q)$ , resultando que  $d(S) \leq d(Q)$ . Essa condição suficiente para que um grafo split seja Classe 1 é enunciada no Corolário 3.2.

**Corolário 3.2.** Se  $G = (Q \cup S, E(G))$  é um grafo split com clique  $Q$  maximal e  $\Delta(G) \geq 2|Q| - 2$ , então  $G$  é Classe 1.  $\square$

Outro resultado para o Problema da Classificação apresentado por Chen, Fu e Ko (1995) para grafos split está enunciado no Teorema 3.3.

**Teorema 3.3.** (CHEN; FU; KO, 1995) Se  $G = (Q \cup S, E(G))$  é um grafo split com  $\Delta(G)$  ímpar, então  $G$  é Classe 1.  $\square$

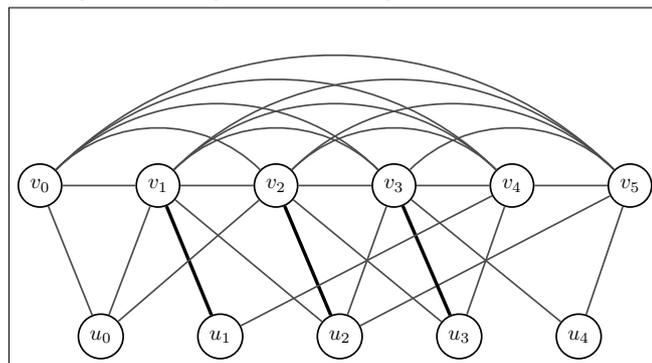
Neste trabalho, chamamos a técnica de coloração descrita na prova do Teorema 3.3 de *técnica de Chen, Fu e Ko*. Na Seção 3.1.2, nós apresentamos uma demonstração para esse teorema e detalhamos essa técnica. O Teorema 3.3 juntamente com a Condição de Hall, enunciada no Teorema 2.16, foram utilizados por Tan e Hung (2006) para apresentar uma condição suficiente para um grafo split ser Classe 1. Essa condição está enunciada no Teorema 3.4.

**Teorema 3.4.** (TAN; HUNG, 2006) Seja  $G = (Q \cup S, E(G))$  um grafo split tal que todo subconjunto  $Y$  dos vértices de grau máximo de  $G$  satisfaz a relação  $|N(Y) \cap S| \geq |Y|$ . Então,  $G$  é Classe 1.

*Demonstração.* Se  $\Delta(G)$  é ímpar, pelo Teorema 3.3,  $G$  é Classe 1. Então, considere que  $\Delta(G)$  é par. Note que os vértices em  $Y$  pertencem a  $Q$ . Seja  $X$  o subconjunto de todos os vértices de  $Q$  que possuem grau máximo. Uma vez que  $|N(Y) \cap S| \geq |Y|$ , para todo subconjunto  $Y \subseteq X$ , pelo Teorema 2.16,  $B[Q, S]$  possui um emparelhamento  $M$  que cobre os vértices de  $X$ . Seja  $G' = G \setminus M$ . Como todo vértice de  $X$  é extremo de uma aresta de  $M$ , temos que  $\Delta(G') = \Delta(G) - 1$ . Pelo Teorema 3.3,  $\chi'(G') = \Delta(G')$ . Então, considere uma coloração de arestas de  $G'$  com  $\Delta(G')$  cores. Atribuindo uma nova cor para as arestas de  $M$  é obtida uma coloração para as arestas de  $G$  com  $\chi'(G') + 1 = \Delta(G)$  cores. Logo,  $G$  é Classe 1.  $\square$

A Figura 14 mostra um grafo split  $G = (Q \cup S, E(G))$ , com  $\Delta(G) = 8$ , onde as arestas  $\{v_1, u_1\}$ ,  $\{v_2, u_2\}$  e  $\{v_3, u_3\}$ , em destaque, constituem um emparelhamento em  $B[Q, S]$  que cobre os vértices de grau máximo de  $G$ . Logo, pelo Teorema 3.4,  $G$  é Classe 1.

**Figura 14 – Grafo split com emparelhamento que cobre os vértices de grau máximo**



**Fonte: Autoria própria (2023).**

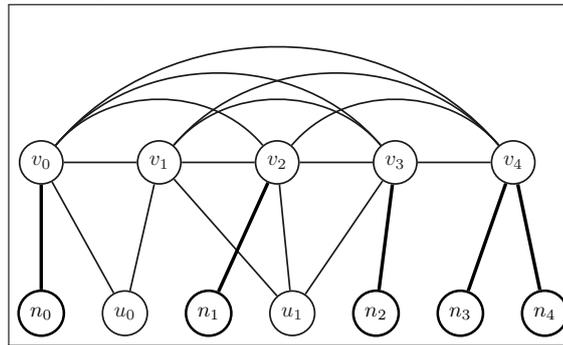
Outra condição suficiente para que um grafo split com grau máximo par seja Classe 1 foi apresentada por Almeida (2012) e está enunciada no Teorema 3.5.

**Teorema 3.5.** (ALMEIDA, 2012) *Seja  $G = (Q \cup S, E(G))$  um grafo split com  $\Delta(G)$  par. Se existe um vértice  $u \in S$ , tal que  $\lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor \leq d_G(u) \leq \frac{\Delta(G)}{2}$ , então  $G$  é Classe 1.  $\square$*

Na Seção 4.1 apresentaremos uma generalização para o Teorema 3.5.

Além disso, Almeida (2012) mostrou que é suficiente concentrar o estudo do Problema da Coloração de Arestas de grafos split nos casos onde todo vértice da clique tem grau máximo. Para isso, a partir de um grafo split  $G = (Q \cup S_G, E(G))$ , é construído um grafo split  $H = (Q \cup S_H, E(H))$  onde, além dos vértices e arestas de  $G$ , são adicionados a  $S_H$  vértices com grau 1 adjacentes a vértices em  $Q$  que não possuem grau máximo, até que todo  $v \in Q$  possua  $d_H(v) = \Delta(G)$ . Vértices com grau 1 são chamados de *vértices pendentes*. A Figura 15 mostra um grafo onde os vértices pendentes  $n_0, n_1, n_2, n_3$  e  $n_4$ , em destaque, foram inseridos durante a construção de  $H$ . Almeida (2012) mostrou que  $\chi'(G) = \chi'(H)$  como enunciado no Teorema 3.6.

**Figura 15 – Grafo split com todos os vértices da clique com grau máximo**



**Fonte: Autoria própria (2023).**

**Teorema 3.6.** (ALMEIDA, 2012) *Se  $G = (Q_G \cup S_G, E(G))$  é um grafo split, então  $G$  é subgrafo de um grafo split  $H = (Q_H \cup S_H, E(H))$  tal que  $\Delta(G) = \Delta(H)$ ,  $Q_G = Q_H$ , todos os vértices de  $Q_H$  são vértices de grau máximo em  $H$  e  $\chi'(G) = \chi'(H)$ .  $\square$*

Seja  $G$  um grafo e  $x$  e  $y$  dois vértices distintos pertencentes a  $V(G)$ . Dizemos que  $x$  e  $y$  são *gêmeos verdadeiros* se  $N[x] = N[y]$ . Não se conhece nenhum grafo split que seja Classe 2 e não seja subgrafo-sobrecarregado. Mais que isso, pelo Teorema 2.5, sabemos que todo grafo split subgrafo-sobrecarregado é vizinhança-sobrecarregado. Uma caracterização dos grafos split que são vizinhança-sobrecarregados foi apresentada por Almeida, Mello e Morgana (2011) e está enunciada no Teorema 3.7. Na Seção 4.2, nós apresentamos uma nova caracterização para os grafos split subgrafo-sobrecarregados.

**Teorema 3.7.** (ALMEIDA; MELLO; MORGANA, 2011) *Seja  $G = (Q \cup S, E(G))$  um grafo split, onde  $Q$  é uma clique maximal. Então,  $G$  é vizinhança-sobrecarregado se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

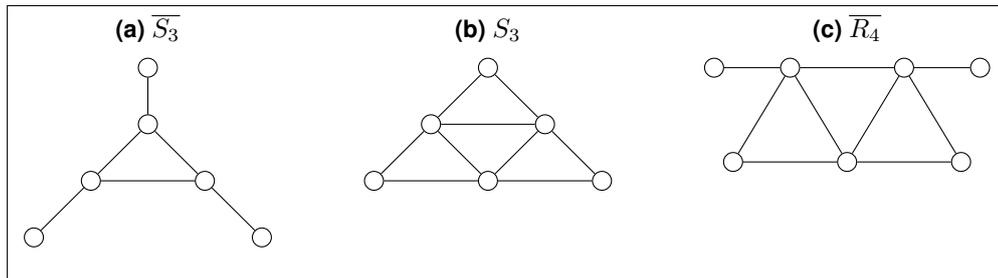
- (i)  $\Delta(G)$  é par; e
- (ii) existe um conjunto  $X \subseteq Q$  com pelo menos  $k = |Q| - \frac{\Delta(G)}{2} + \binom{d(Q)}{2} + 1$  vértices de grau  $\Delta(G)$  que são gêmeos verdadeiros e tais que se  $v \in X$ , o número de arestas de  $\overline{G[N[v]]}$  incidentes a vértices de  $Q \setminus X$  é no máximo  $|Q| - k$ .  $\square$

A seguir, enunciamos resultados para o Problema da Classificação em subclasses da classe dos grafos split. Sejam  $G$  e  $H$  dois grafos. Se  $G$  não contém  $H$  como subgrafo induzido, então dizemos que  $G$  é livre de  $H$ . Dada uma classe de grafos, se todo grafo  $G$  pertencente à classe é livre de  $H$ , então  $H$  é um *subgrafo proibido* para a classe. Algumas classes de grafos podem ser caracterizadas por subgrafos proibidos. Dois exemplos disso são as classes de grafos *split-comparabilidade* e *split-intervalos*, definidas a partir de subgrafos proibidos no Teorema 3.8 e no Teorema 3.9, respectivamente.

**Teorema 3.8.** (FOLDES; HAMMER, 1977b) Um grafo split  $G$  é um grafo *split-comparabilidade* se, e somente se,  $G$  é livre de  $\overline{S}_3$ ,  $S_3$  e  $\overline{R}_4$ .  $\square$

Os grafos  $\overline{S}_3$ ,  $S_3$  e  $\overline{R}_4$  são apresentados na Figura 16.

**Figura 16 – Subgrafos proibidos para grafos split-comparabilidade**

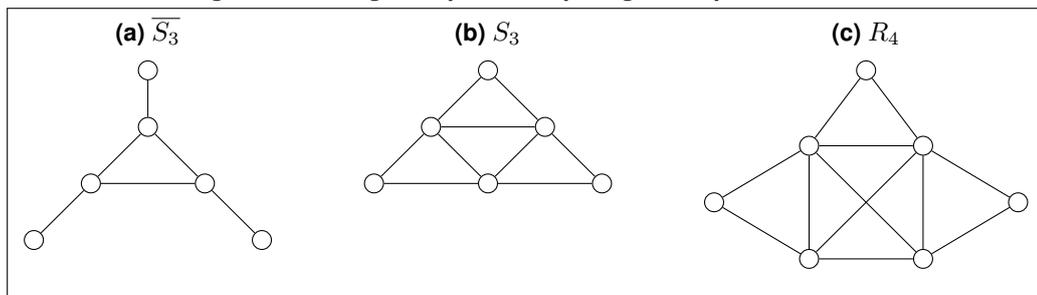


Fonte: Autoria própria (2023).

**Teorema 3.9.** (FOLDES; HAMMER, 1977b) Um grafo split  $G$  é um grafo *split-intervalos* se, e somente se,  $G$  é livre de  $\overline{S}_3$ ,  $S_3$  e  $R_4$ .  $\square$

Os grafos  $\overline{S}_3$ ,  $S_3$  e  $R_4$  são apresentados na Figura 17.

**Figura 17 – Subgrafos proibidos para grafos split-intervalos**



Fonte: Autoria própria (2023).

O Problema da Classificação está resolvido para as classes *split-comparabilidade* e *split-intervalos* como enunciado nos teoremas 3.10 e 3.11, respectivamente.

**Teorema 3.10.** (CRUZ, 2017)(GONZAGA, 2021) *Um grafo split-comparabilidade é Classe 1 se, e somente se, não é vizinhança-sobrecarregado.*  $\square$

**Teorema 3.11.** (GONZAGA, 2021) *Um grafo split-intervalos é Classe 1 se, e somente se, não é vizinhança-sobrecarregado.*  $\square$

A demonstração apresentada por Cruz (2017) para o Teorema 3.10 não funcionava para um caso em particular conforme observado posteriormente por Gonzaga (2021). No entanto, Gonzaga (2021) mostrou que era possível ajustar a prova apresentada por Cruz (2017) para esse caso e ainda provou propriedades estruturais dos grafos split-intervalos análogas às usadas por Cruz (2017) como base da sua demonstração. O conhecimento de tais propriedades possibilitou que Gonzaga (2021) usasse técnica semelhante à de Cruz (2017) para provar o Teorema 3.11.

Uma *árvore* é um grafo conexo sem ciclos, isto é, um grafo onde há exatamente um caminho entre cada par de vértices. Dado um grafo  $G$ , um subgrafo  $H$  de  $G$  é um *subgrafo gerador* se  $V(G) = V(H)$ . Se o subgrafo gerador  $H$  é uma árvore, então  $H$  é uma *árvore geradora* de  $G$ . A *distância* entre dois vértices  $x$  e  $y$  é o número de arestas num caminho de tamanho mínimo entre  $x$  e  $y$ . Se a distância entre quaisquer dois vértices em uma árvore geradora  $H$  é no máximo  $t$ , então  $H$  é uma *árvore  $t$ -geradora* de  $G$ . Se  $G$  admite uma árvore  $t$ -geradora, então  $G$  é  *$t$ -admissível*. Costa (2022) provou que os grafos split 2-admissíveis são aqueles que possuem vértice universal após a remoção dos vértices de grau 1. Abordando o Problema da Classificação em grafos split a partir de conceito de admissibilidade, Costa (2022) alcançou o seguinte resultado.

**Teorema 3.12.** *Seja  $G = (Q \cup S, E(G))$  um grafo split 2-admissível, então  $G$  é Classe 1 se, e somente se,  $G$  não é vizinhança-sobrecarregado.*  $\square$

O Quadro 2 (página 32) apresenta um resumo dos resultados conhecidos para o Problema da Classificação em grafos split.

### 3.1 Técnica de Chen, Fu e Ko

Esta seção tem por objetivo detalhar a técnica de Chen, Fu e Ko que resulta em uma coloração ótima para grafos split com grau máximo ímpar. O entendimento dessa técnica é essencial para a compreensão dos novos resultados apresentados nesta dissertação de mestrado. A técnica de Chen, Fu e Ko utiliza quadrados latinos, que foram apresentados na Seção 2.2, e conceitos que serão apresentados na Seção 3.1.1. A demonstração do Teorema 3.3 pela técnica de Chen, Fu e Ko é apresentada na Seção 3.1.2.

**Quadro 2 – Alguns grafos split com índice cromático conhecido**

<b>Grafo split <math>G = (Q \cup S, E(G))</math></b>	<b>Problema da Classificação</b>	<b>Referência</b>
$G$ possui vértice universal	Classe 1 se, somente se, não é vizinhança-sobrecarregado	Plantholt (1981)
$d(Q) \geq d(S)$	Classe 1	Chen, Fu e Ko (1995), Almeida (2012)
$\Delta(G)$ é ímpar	Classe 1	Chen, Fu e Ko (1995)
$\Delta(G)$ é par	*Em aberto*	ver subcasos abaixo
$G$ é vizinhança-sobrecarregado	Classe 2	Vizing (1964)
Emparelhamento em $B[Q, S]$ cobre todo $v \in Q$ com $d(v) = \Delta(G)$	Classe 1	Tan e Hung (2006)
Existe $u \in S$ tal que $\lfloor \frac{ Q }{2} \rfloor \leq d(u) \leq \frac{\Delta(G)}{2}$	Classe 1	Almeida (2012)
$G$ é split-comparabilidade	Classe 1 se, somente se, não é vizinhança-sobrecarregado	Cruz (2017), Gonzaga (2021)
$G$ é split-intervalos	Classe 1 se, somente se, não é vizinhança-sobrecarregado	Gonzaga (2021)
$G$ é 2-admissível	Classe 1 se, somente se, não é vizinhança-sobrecarregado	Costa (2022)

**Fonte: Autoria própria (2023).**

### 3.1.1 Diagramas de cores monotônicos

Um *vetor de cores*  $C_i = [c_{i,0}, \dots, c_{i,|C_i|-1}]$  é um vetor de inteiros dois a dois distintos que representam cores. Um *diagrama de cores*  $\mathcal{C} = (C_0, C_1, \dots, C_k)$  é uma sequência de vetores de cores. Um diagrama de cores é *monotônico* se a quantidade de vezes que a cor  $c_{i,j}$  ocorre nos vetores anteriores a  $C_i$  é no máximo  $|C_i| - 1 - j$ , para todo  $i, 0 \leq i \leq k$ , e para todo  $j, 0 \leq j < |C_i|$ . Na Figura 18 são apresentados dois diagramas de cores sendo que o diagrama da Figura 18b é monotônico. Note que o diagrama de cores da Figura 18a não é monotônico, já que a cor  $c_{2,3}$  ocorreu anteriormente duas vezes, nos vetores  $C_0$  e  $C_1$ , e não poderia ter ocorrido, já que  $|C_2| - 1 - 3 = 4 - 1 - 3 = 0$ .

Seja  $B[X, Y]$  um grafo bipartido e  $\mathcal{C}$  um diagrama de cores monotônico. Chen, Fu e Ko (1995) deram uma condição suficiente para que o grafo  $B[X, Y]$  possua uma coloração de arestas tal que o conjunto das cores das arestas incidentes em cada vértice  $v_i \in X$  seja igual ao conjunto das cores do vetor  $C_i$ , para todo  $0 \leq i < |X|$ . Essa condição está enunciada no Lema 3.13.

Figura 18 – (a) Diagrama de cores (b) Diagrama de cores monotônico

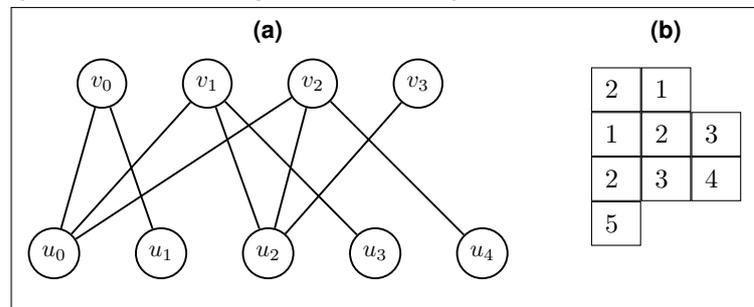
(a)				(b)			
0	1	2	3	0	1	2	3
1	2	3	0	1	2	3	4
2	3	0	1	2	3	0	5
3	0	1	2	3	4	5	6

Fonte: Autoria própria (2023).

**Lema 3.13.** (CHEN; FU; KO, 1995) Seja  $B[X, Y]$  um grafo bipartido e  $\mathcal{C} = (C_0, C_1, \dots, C_{|X|-1})$  um diagrama de cores monotônico. Se existe uma bijeção entre os vetores de  $\mathcal{C}$  e os vértices de  $X$  tal que, para todo  $v_i \in X$ ,  $|C_i| = d(v_i)$ , então o grafo  $B[X, Y]$  possui uma coloração de arestas onde o conjunto das cores das arestas incidentes a  $v_i$  é igual ao conjunto de cores do vetor  $C_i$ . □

Na Figura 19a é apresentado um grafo bipartido  $B$  e na Figura 19b um diagrama de cores monotônico  $\mathcal{C}$ . Note que  $|C_i| = d(v_i)$  para todo  $0 \leq i \leq 3$ . Pelo Lema 3.13,  $B$  pode ser colorido utilizando as cores do diagrama de cores  $\mathcal{C}$ . A demonstração do Lema 3.13 baseia-se em um algoritmo guloso que está descrito a seguir.

Figura 19 – (a) Grafo bipartido  $B$  (b) Diagrama de cores monotônico  $\mathcal{C}$



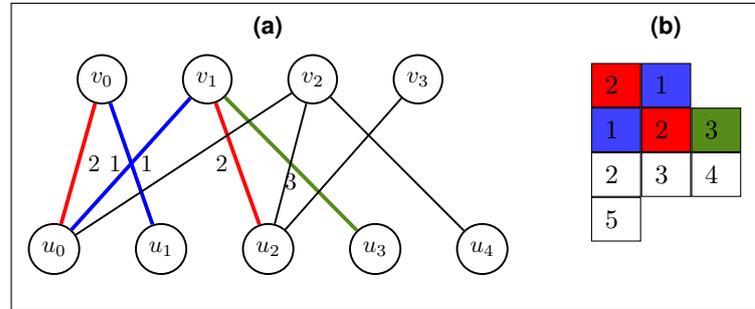
Fonte: Autoria própria (2023).

Iniciando pelo vetor  $C_0$  e seguindo até o vetor  $C_{|X|-1}$ , atribuímos as cores de cada vetor  $C_i$  para as arestas incidentes em  $v_i$  da seguinte forma: para cada vetor  $C_i$ , na  $j$ -ésima iteração,  $0 \leq j < |C_i| = d(v_i)$ , a cor  $c_{i,j}$  é atribuída a uma aresta incidente a  $v_i$  que não é adjacente a nenhuma aresta previamente colorida com a cor  $c_{i,j}$ . Quando todas as cores de  $C_i$  foram atribuídas para as arestas incidentes no vértice  $v_i$ , considera-se o vetor  $C_{i+1}$ . O argumento que garante que esta atribuição da cor  $c_{i,j}$  é possível é que, como o diagrama  $\mathcal{C}$  é monotônico, até o momento existem no máximo  $d(v_i) - 1 - j$  arestas previamente coloridas com a cor da célula  $c_{i,j}$ . Como há  $d(v_i) - j$  arestas incidentes em  $v_i$  não coloridas, há pelo menos um vértice  $w$  vizinho de  $v_i$  em que a cor  $c_{i,j}$  falta. Assim, a cor  $c_{i,j}$  pode ser atribuída para a aresta  $\{v_i, w\}$ .

Para exemplificar, considere o grafo da Figura 20, colorido parcialmente por esse algoritmo guloso. Nesse ponto, o algoritmo seleciona a célula  $c_{2,0}$ , que possui a cor 2. Pela monotonicidade do diagrama de cores, essa cor ocorre no máximo  $d(v_2) - 1 - j = 2$  vezes nos vetores

anteriores. Além disso, como  $|C_2| = d(v_2)$ , há  $d(v_2) - j = 3$  arestas não coloridas incidentes em  $v_2$ . Assim, mesmo  $v_2$  sendo adjacente a todos os vértices onde a cor 2 já incide, existe um vértice em que a cor 2 falta, nesse caso  $u_4$ . Logo, a cor da célula  $c_{2,0}$  pode ser atribuída para a aresta  $\{v_2, u_4\}$ .

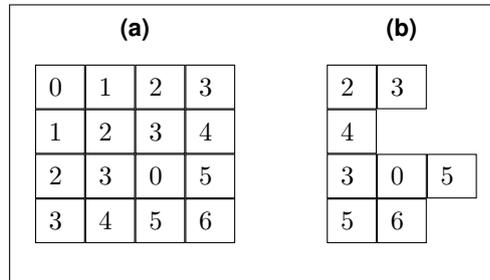
Figura 20 – (a) Grafo bipartido  $B$  colorido parcialmente (b) Diagrama de cores monotônico  $\mathcal{C}$



Fonte: Autoria própria (2023).

Um vetor de cores  $R = [r_0, \dots, r_s]$ , que pode ser vazio, é *sufixo* de um vetor de cores  $C = [c_0, \dots, c_t]$  se  $r_i = c_{t-s+i}$ , para todo  $i$ ,  $0 \leq i \leq s$ . Um diagrama de cores  $\mathcal{R} = (R_0, \dots, R_k)$  é *sufixo de um diagrama de cores*  $\mathcal{C} = (C_0, \dots, C_k)$  se  $R_i$  é sufixo de  $C_i$  para todo  $i$ ,  $0 \leq i \leq k$ . Por exemplo, o diagrama de cores da Figura 21b é um sufixo do diagrama de cores da Figura 21a.

Figura 21 – (a) Diagrama de cores  $\mathcal{C}$  (b) Sufixo do diagrama de cores de  $\mathcal{C}$



Fonte: Autoria própria (2023).

Sejam  $\mathcal{C} = (C_0, \dots, C_k)$  um diagrama de cores monotônico e  $\mathcal{R} = (R_0, \dots, R_k)$  um sufixo de  $\mathcal{C}$ . Note que a quantidade de células após um elemento de  $\mathcal{R}$  é igual a quantidade de células após o elemento correspondente em  $\mathcal{C}$ . Dessa forma, a quantidade de vezes que a cor de cada célula pode ocorrer nos vetores anteriores é igual no diagrama de cores  $\mathcal{R}$  e no diagrama de cores  $\mathcal{C}$ . Uma vez que o digrama de cores  $\mathcal{C}$  é monotônico, o diagrama de cores  $\mathcal{R}$  também é monotônico. A partir desse argumento, obtemos o Lema 3.14.

**Lema 3.14.** (CHEN; FU; KO, 1995) *Se  $\mathcal{C}$  é um diagrama de cores monotônico, então qualquer sufixo de  $\mathcal{C}$  é monotônico.* □

Chen, Fu e Ko (1995) definiram os diagramas de cores  $\mathcal{S}_L(q,k)$ ,  $\mathcal{D}_L(q,k)$ ,  $\mathcal{S}_L^r(q,k)$  e  $\mathcal{D}_L^r(q,k)$  construídos a partir de um quadrado latino  $L_{k,k}$  e um inteiro  $q$ ,  $1 \leq q < k$ . A seguir apresentamos a definição de cada um desses diagramas.

O diagrama de cores  $\mathcal{S}_L(q,k) = (S_0, S_1, \dots, S_{q-1})$  tem seus vetores definidos como  $S_i = [l_{i,q}, l_{i,q+1}, \dots, l_{i,k-1}]$ , para todo  $0 \leq i < q$ . A Figura 22a mostra um quadrado latino  $L_{7,7}$  com células que compõe o diagrama  $\mathcal{S}_L(5,7)$  em destaque. O diagrama  $\mathcal{S}_L(5,7) = ([5,6], [6,0], [0,1], [1,2], [2,3])$  está exibido na Figura 22b.

**Figura 22 – (a) Quadrado latino  $L_{7,7}$  com  $\mathcal{S}_L(5,7)$  em destaque (b) Diagrama de cores  $\mathcal{S}_L(5,7)$**

(a)							(b)			
0	1	2	3	4	5	6	$S_0$	5	6	
1	2	3	4	5	6	0	$S_1$	6	0	
2	3	4	5	6	0	1	$S_2$	0	1	
3	4	5	6	0	1	2	3	$S_3$	1	2
4	5	6	0	1	2	3	$S_4$	2	3	
5	6	0	1	2	3	4				
6	0	1	2	3	4	5				

Fonte: Autoria própria (2023).

O diagrama de cores  $\mathcal{D}_L(q,k) = (D_0, D_1, \dots, D_{q-1})$  tem seus vetores definidos como  $D_i = S_i$ , para  $0 \leq i < \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$ , e  $D_i$  é a concatenação de  $l_{i,i}$  com  $S_i$ , para  $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor \leq i < q$ . No quadrado latino  $L_{7,7}$  da Figura 23a estão destacadas as células do diagrama de cores  $\mathcal{D}_L(5,7)$ . A Figura 23b mostra o diagrama de cores  $\mathcal{D}_L(5,7) = ([5,6], [6,0], [4,0,1], [6,1,2], [1,2,3])$ .

**Figura 23 – (a) Quadrado latino  $L_{7,7}$  com  $\mathcal{D}_L(5,7)$  em destaque (b) Diagrama de cores  $\mathcal{D}_L(5,7)$**

(a)							(b)			
0	1	2	3	4	5	6	$D_0$	5	6	
1	2	3	4	5	6	0	$D_1$	6	0	
2	3	4	5	6	0	1	$D_2$	4	0	1
3	4	5	6	0	1	2	$D_3$	6	1	2
4	5	6	0	1	2	3	$D_4$	1	2	3
5	6	0	1	2	3	4				
6	0	1	2	3	4	5				

Fonte: Autoria própria (2023).

**Lema 3.15.** No diagrama de cores  $\mathcal{D}_L(q,k)$ , a cor da célula  $l_{i,i}$  de  $L_{k,k}$  não ocorre nos vetores  $D_y$ , para todo  $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor \leq i < q$  e todo  $y > i$ .

*Demonstração.* As células  $l_{i,i}$  correspondem à primeira posição do vetor  $D_i$  para todo  $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor \leq i < q$ . Pela Proposição 2.15, cada cor ocorre apenas em uma diagonal coluna e uma diagonal linha. Pela definição de  $\mathcal{D}_L(q,k)$ , suas células são um subconjunto das células das diagonais  $D_{col}(j)$ ,  $2 \lfloor \frac{q}{2} \rfloor \leq j \leq k-1$  e  $D_{lin}(i)$ ,  $0 \leq i \leq q-1$  de  $L_{k,k}$ . Mais que isso, cada célula  $l_{i,i}$  é a ocorrência mais à esquerda de tal cor em  $\mathcal{D}_L(q,k)$ . Podemos assumir que  $l_{i,i}$  é uma diagonal coluna, caso contrário qualquer outra ocorrência da cor  $l_{i,i}$  em  $\mathcal{D}_L(q,k)$  está em um vetor  $D_y$  com  $y \leq i$ . Também podemos assumir que  $2i < k-1$  uma vez que caso contrário, pela Proposição 2.11, a célula  $l_{i,i}$  está em uma diagonal linha. Portanto,  $l_{i,i}$  está

em alguma diagonal de  $\cup_{2 \lfloor \frac{q}{2} \rfloor \leq j \leq k-2} D_{col}(j)$ . Pela Proposição 2.12, o conjunto de cores em  $\cup_{2 \lfloor \frac{q}{2} \rfloor \leq j \leq k-2} D_{col}(j)$  é precisamente  $\{2 \lfloor \frac{q}{2} \rfloor, \dots, k-2\}$ . Assim, se tal cor aparece em algum vetor  $D_y$ , para qualquer  $y > i$ , então ela ocorre em uma diagonal linha. Pela Propriedade 2.14,  $D_{col}(k-1) = D_{lin}(0)$ , então as cores presentes em  $\mathcal{D}_L(q, k)$  que pertencem a diagonais linha são aquelas em  $\cup_{1 \leq j \leq q-1} D_{lin}(j)$ , que são precisamente  $\{0, 1, \dots, q-2\}$ , pela Proposição 2.13. Uma vez que esses dois conjuntos de cores são disjuntos, a cor da célula  $l_{i,i}$  de  $L_{k,k}$ , para todo  $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor \leq i < q$ , não ocorre em  $D_y$ , para todo  $y > i$ .  $\square$

Para definir os diagramas  $\mathcal{S}_L^r(q, k)$  e  $\mathcal{D}_L^r(q, k)$  precisamos introduzir o conceito de inverso de um vetor de cores. Dado um vetor de cores  $C = [c_0, c_1, \dots, c_t]$ , o vetor de cores *inverso* de  $C$  é o vetor  $C^r = [c_t, c_{t-1}, \dots, c_0]$ .

O diagrama de cores  $\mathcal{S}_L^r(q, k) = (S_{q-1}^r, S_{q-2}^r, \dots, S_0^r)$  tem vetores definidos como  $S_i^r = [l_{i, k-1}, l_{i, k-2}, \dots, l_{i, q}]$ , com  $i$  variando de  $q-1$  a 0. Na Figura 24a estão destacadas as células do quadrado latino  $L_{7,7}$  que compõem o diagrama  $\mathcal{S}_L^r(5, 7)$ . Note que são as mesmas células do diagrama  $\mathcal{S}_L(5, 7)$ . A diferença entre esses dois diagramas é que em  $\mathcal{S}_L^r(5, 7)$  a ordem dos vetores é decrescente no índice do vetor e cada vetor  $S_i^r$  é o inverso do vetor  $S_i$ . Na Figura 24b temos o diagrama  $\mathcal{S}_L^r(5, 7) = ([3, 2], [2, 1], [1, 0], [0, 6], [6, 5])$ .

**Figura 24 – (a) Quadrado latino  $L_{7,7}$  com  $\mathcal{S}_L^r(5, 7)$  em destaque (b) Diagrama de cores  $\mathcal{S}_L^r(5, 7)$**

(a)							(b)	
0	1	2	3	4	5	6	$S_4^r$	3 2
1	2	3	4	5	6	0	$S_3^r$	2 1
2	3	4	5	6	0	1	$S_2^r$	1 0
3	4	5	6	0	1	2	$S_1^r$	0 6
4	5	6	0	1	2	3	$S_0^r$	6 5
5	6	0	1	2	3	4		
6	0	1	2	3	4	5		

Fonte: Autoria própria (2023).

A partir do diagrama de cores  $\mathcal{S}_L^r(q, k)$  é definido o diagrama de cores  $\mathcal{D}_L^r(q, k)$ . Esse diagrama é formado pelos vetores  $(D_{q-1}^r, D_{q-2}^r, \dots, D_0^r)$ , onde  $D_i^r = S_i^r$  para  $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor \leq i < q$  e  $D_i^r$  é a concatenação de  $l_{i,i}$  com  $S_i^r$  para  $0 \leq i < \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$ . Na Figura 25a estão destacadas as cores que formam o diagrama de cores  $\mathcal{D}_L^r(5, 7)$ . Na Figura 25b o diagrama  $\mathcal{D}_L^r(5, 7) = ([3, 2], [2, 1], [1, 0], [2, 0, 6], [0, 6, 5])$  é exibido.

Por argumentos similares aos apresentados no Lema 3.15, o Lema 3.16 é obtido.

**Lema 3.16.** *Dado o diagrama de cores  $\mathcal{D}_L^r(q, k)$ , a cor da célula  $l_{i,i}$  de  $L_{k,k}$  não ocorre nos vetores  $D_y$ , para todo  $0 \leq i < \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$  e todo  $y < i$ .  $\square$*

Um vetor  $P = [p_0, \dots, p_s]$ , que pode ser vazio, é *prefixo* de um vetor de cores  $C = [c_0, \dots, c_t]$  se  $c_i = p_i$  para todo  $i$ ,  $0 \leq i \leq s$ ,  $s \leq t$ . Um diagrama de cores  $\mathcal{P} = (P_0, P_1, \dots, P_k)$  é *prefixo de um diagrama de cores*  $\mathcal{C} = (C_0, C_1, \dots, C_k)$  se  $P_i$  é prefixo de  $C_i$  para todo  $i$ ,  $0 \leq i \leq k$ . Se  $|P_0| \leq |P_1| \leq \dots \leq |P_k|$ , então  $\mathcal{P}$  é um *prefixo crescente* de

Figura 25 – (a) Quadrado latino  $L_{7,7}$  com  $D_L^r(5,7)$  em destaque (b) Diagrama de cores  $D_L^r(5,7)$

(a)							(b)			
0	1	2	3	4	5	6	$D_4^r$	3	2	
1	2	3	4	5	6	0	$D_3^r$	2	1	
2	3	4	5	6	0	1	$D_2^r$	1	0	
3	4	5	6	0	1	2	$D_1^r$	2	0	6
4	5	6	0	1	2	3	$D_0^r$	0	6	5
5	6	0	1	2	3	4				
6	0	1	2	3	4	5				

Fonte: Autoria própria (2023).

$\mathcal{C}$ . Considere o diagrama de cores  $\mathcal{C}$  da Figura 26a. O diagrama de cores da Figura 26b é um prefixo de  $\mathcal{C}$ , mas não é um prefixo crescente. Por outro lado, o diagrama de cores da Figura 26c é um prefixo crescente de  $\mathcal{C}$ .

Figura 26 – (a) Diagrama de cores  $\mathcal{C}$  (b) Prefixo de  $\mathcal{C}$  (c) Prefixo crescente de  $\mathcal{C}$

(a)				(b)			(c)			
0	1	2	3	0	1	0	1			
1	2	3	4	1		1	2			
2	3	0	5	2	3	0	2	3	0	
3	4	5	6	3	4	3	4	5	6	

Fonte: Autoria própria (2023).

A seguir demonstramos a propriedade de monotonicidade dos prefixos crescentes do diagrama  $\mathcal{S}_L(q, k)$ .

**Lema 3.17.** *Todo prefixo crescente do diagrama de cores  $\mathcal{S}_L(q, k)$  é monotônico.*

*Demonstração.* Sejam  $s_{x,w}$  e  $s_{y,z}$  células distintas do diagrama  $\mathcal{S}_L(q, k)$  com a mesma cor. Estas células correspondem às células  $l_{x,w+q}$  e  $l_{y,z+q}$  de  $L_{k,k}$ , respectivamente. Pela definição de  $\mathcal{S}_L(q, k)$ , suas células são um subconjunto das células das diagonais  $D_{col}(j)$ ,  $q \leq j \leq k-1$  e  $D_{lin}(i)$ ,  $0 \leq i \leq q-1$  de  $L_{k,k}$ . Pela Propriedade 2.14,  $D_{col}(k-1) = D_{lin}(0)$ . Pela Propriedade 2.12, as células do conjunto  $\cup_{q \leq j \leq k-1} D_{col}(j)$  contêm precisamente as cores  $\{q, \dots, k-1\}$ . Pela Propriedade 2.13, as células do conjunto  $\cup_{1 \leq i \leq q-1} D_{lin}(i)$  contêm precisamente cores  $\{0, 1, \dots, q-2\}$ . A interseção entre estes dois subconjuntos de cores é vazia, enquanto  $l_{x,w+q}$  e  $l_{y,z+q}$  compartilham a mesma cor. Portanto,  $l_{x,w+q}$  e  $l_{y,z+q}$  estão ambos em alguma  $D_{col}(j)$  para algum  $j$ ,  $q \leq j < k$ , ou ambos em uma  $D_{lin}(i)$  para algum  $i$ ,  $1 \leq i < q$ . Pela Proposição 2.15, qualquer cor  $c$  ocorre apenas em  $D_{col}(c)$  e  $D_{lin}((c+1) \pmod{k})$ . Portanto, as células  $l_{x,w+q}$  e  $l_{y,z+q}$  estão na mesma diagonal linha ou diagonal coluna de  $L_{k,k}$ .

Sem perda de generalidade, considere que  $x < y$ . Uma vez que as células  $l_{x,w+q}$  e  $l_{y,z+q}$  estão na mesma diagonal linha ou diagonal coluna de  $L_{k,k}$ , podemos reescrever  $l_{y,z+q}$  como  $l_{x+t,w+q-t}$  e, conseqüentemente,  $s_{y,z}$  como  $s_{x+t,w-t}$ . Seja  $\mathcal{P}$  um prefixo crescente de

$\mathcal{S}_L(q,k)$ . Se a célula  $s_{x,w}$  pertence a  $\mathcal{P}$ , então o vetor  $P_{x+t}$  possui pelo menos  $t$  células após a célula  $s_{x+t,w-t}$ . Vamos mostrar que a cor da célula  $s_{x,w}$  ocorre no máximo  $t$  vezes em  $\{P_i : x \leq i < x+t\}$ . Essa afirmação segue do fato que no quadrado latino  $L_{k,k}$  cada cor ocorre exatamente uma vez em cada linha e coluna, e então a cor da célula  $s_{x,w}$  ocorre no máximo uma vez em cada  $P_i$  para  $x \leq i < x+t$ . Portanto, qualquer prefixo crescente do diagrama de cores  $\mathcal{S}_L(q,k)$  é monotônico.  $\square$

Por argumentos similares aos apresentados no Lema 3.17 podemos afirmar que todo prefixo crescente do diagrama de cores  $\mathcal{S}_L^r(q,k)$  é monotônico, como enunciado no Lema 3.18.

**Lema 3.18.** *Todo prefixo crescente do diagrama de cores  $\mathcal{S}_L^r(q,k)$  é monotônico.*  $\square$

Chen, Fu e Ko (1995) afirmaram que prefixos crescentes dos diagramas de cores  $\mathcal{D}_L(q,k)$  e  $\mathcal{D}_L^r(q,k)$  são monotônicos para  $k$  ímpar. Entretanto, Almeida (2012) mostrou que nem todo prefixo crescente desses diagramas é monotônico. A Figura 27a mostra o diagrama de cores  $\mathcal{D}_L(5,7)$  e, em destaque com fundo preto, o prefixo crescente  $\mathcal{P} = ([5,6],[6,0][4,0],[6,1],[1,2])$  que não é monotônico. A Figura 27b mostra o diagrama de cores  $\mathcal{D}_L^r(5,7)$  e, em destaque com fundo preto, o prefixo crescente  $\mathcal{P} = ([3,2],[2,1][1,0],[2,0],[0,6])$  que não é monotônico. Nestes dois casos, a cor 0 é uma das cores que não obedece a propriedade de monotonicidade.

**Figura 27 – Prefixo crescente não monotônico do diagrama  $\mathcal{D}_L(5,7)$**

(a)			(b)		
$D_0$	5	6	$D_4^r$	3	2
$D_1$	6	0	$D_3^r$	2	1
$D_2$	4	0	1	0	
$D_3$	6	1	2	0	6
$D_4$	1	2	3	0	6
				0	6
				5	

**Fonte: Autoria própria (2023).**

Almeida (2012) apresentou condições suficientes para que os prefixos crescentes dos diagramas de cores  $\mathcal{D}_L(q,k)$  e  $\mathcal{D}_L^r(q,k)$  sejam monotônicos. Para o diagrama  $\mathcal{D}_L(q,k)$ , a condição consiste em, dado o prefixo  $P_i$  do vetor  $D_i$ , impor a restrição  $|P_i| = |D_i|$  sempre que  $l_{i,i} \in P_i$ . Essa condição suficiente está enunciada no Lema 3.19. Nesta dissertação, nós apresentamos uma nova prova para essa condição.

**Lema 3.19.** (ALMEIDA, 2012) *Se  $\mathcal{P} = (P_0, P_1, \dots, P_{q-1})$  é um prefixo crescente do diagrama  $\mathcal{D}_L(q,k)$  tal que  $P_i = D_i$  para todo  $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor \leq i < q$ , então  $\mathcal{P}$  é monotônico.*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{P}'$  o diagrama de cores construído a partir de  $\mathcal{P}$  pela exclusão das células  $p_{i,0}$  para todo  $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor \leq i < q$ . Por hipótese,  $P_i = D_i$  para todo  $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor \leq i < q$ , então  $\mathcal{P}'$  é um prefixo crescente do diagrama de cores  $\mathcal{S}_L(q,k)$ . Pelo Lema 3.17,  $\mathcal{P}'$  é monotônico. Agora, considere

o diagrama de cores  $\mathcal{P}$ . Pelo Lema 3.15, a cor da célula  $p_{i,0}$  não ocorre nos vetores  $P_x$  tal que  $x > i$ . Para concluir a prova, vamos argumentar que a célula  $p_{i,0}$  ocorre no máximo  $|P_i| - 1$  vezes em  $\{P_x : x < i\}$ , para todo  $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor \leq i < q$ . Cada célula  $p_{i,0}$ ,  $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor \leq i < q$ , corresponde à célula  $l_{i,i}$  de  $L_{k,k}$ . Pela Propriedade 2.8, estas cores são duas a duas distintas, então a cor  $p_{i,0}$ ,  $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor \leq i < q$ , ocorre no máximo  $|P'_i| = |P_i| - 1$  vezes em  $\{P_x : x < i\}$ .  $\square$

Para o diagrama de cores  $\mathcal{D}_L^r(q,k)$ , nós apresentamos uma nova condição que garante a construção de prefixos crescentes monotônicos. Essa condição consiste em que vetores  $P_i$  que são prefixos de vetores  $D_i$  construídos com a concatenação do elemento  $l_{i,i}$  do quadrado latino possuam  $|P_i| = 0$ . Por exemplo, considere o diagrama de cores  $\mathcal{C} = ([\ ], [\ ], [\ ], [2,0,6], [0,6,5])$ , obtido a partir do diagrama de cores  $\mathcal{D}_L^r(5,7)$ , em destaque na Figura 28. Todo vetor de  $\mathcal{C}$  que não possui elemento da diagonal principal do quadrado latino é vazio, então o Lema 3.20 afirma que qualquer prefixo crescente de  $\mathcal{C}$  é monotônico.

**Figura 28 – Prefixo crescente monotônico do diagrama  $\mathcal{D}_L^r(5,7)$**

3	2	
2	1	
1	0	
2	0	6
0	6	5

**Fonte: A autoria própria (2023).**

**Lema 3.20.** *Se  $\mathcal{P} = (P_{q-1}, P_{q-2}, \dots, P_0)$  é um prefixo crescente do diagrama  $\mathcal{D}_L^r(q,k) = (D_{q-1}^r, D_{q-2}^r, \dots, D_0^r)$  tal que  $|P_i| = 0$  para todo  $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor \leq i < q$ , então  $\mathcal{P}$  é monotônico.*

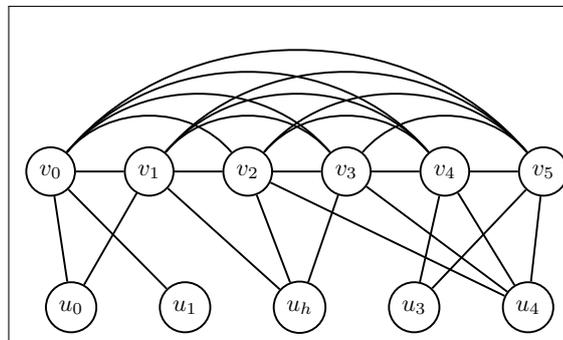
*Demonstração.* Seja  $\mathcal{P}'$  o diagrama de cores construído a partir de  $\mathcal{P}$  pela exclusão das células  $p_{i,0}$ , para todo  $0 \leq i < \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$ . Por hipótese,  $|P_i| = 0$  para todo  $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor \leq i < q$ . Então, o diagrama de cores  $\mathcal{P}'$  é um prefixo crescente do diagrama de cores  $\mathcal{S}_L^r(q,k)$ . Pelo Lema 3.18,  $\mathcal{P}'$  é monotônico. Considere o diagrama de cores  $\mathcal{P}$ . Pelo Lema 3.16, a cor da célula  $p_{i,0}$  não ocorre nos vetores  $P_x$  tal que  $x < i$ . Para concluir a prova vamos argumentar que a cor da célula  $p_{i,0}$ , para todo  $0 \leq i < \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$ , ocorre no máximo  $|P_i| - 1$  vezes em  $\{P_x : x > i\}$ . Se  $|P_i| > 0$ , então a célula  $p_{i,0}$  corresponde a célula  $l_{i,i}$  de  $L_{k,k}$ . Pela Propriedade 2.8,  $p_{i,0} \neq p_{j,0}$ , para qualquer par  $i$  e  $j$  tal que  $0 \leq i, j < \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$  e  $i \neq j$ . Então, a cor da célula  $p_{i,0}$ ,  $0 \leq i < \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$ , ocorre no máximo  $|P'_i| = |P_i| - 1$  vezes em  $\{P_x : x > i\}$ .  $\square$

### 3.1.2 Grafos split com grau máximo ímpar

Nesta seção, apresentamos com detalhes uma demonstração para o Teorema 3.3, usando a aqui denominada de técnica de Chen, Fu e Ko. A versão aqui apresentada possui pequenas modificações se comparada a demonstração original.

Uma das características da técnica de Chen, Fu e Ko é o conjunto de regras para ordenar e rotular os vértices do grafo split antes de iniciar a coloração das arestas. Considere  $G = (Q \cup S, E(G))$  um grafo split onde todo  $v \in Q$  possui  $d(v) = \Delta(G)$ . As regras de ordenação e rotulação dos vértices são as descritas a seguir. Os vértices em  $S$  são rotulados arbitrariamente como  $u_0, u_1, \dots, u_{|S|-1}$ . Seja  $h = \min \left\{ x : \left| \bigcup_{i=0}^x N(u_i) \right| \geq \left\lfloor \frac{|Q|}{2} \right\rfloor \right\}$  e  $S' = \{u_0, u_1, \dots, u_h\}$ . Os vértices em  $Q$  são rotulados como  $v_0, v_1, \dots, v_{|Q|-1}$  tal que  $|N(v_i) \cap S'| \geq |N(v_{i+1}) \cap S'|$ ; se  $|N(v_i) \cap S'| = |N(v_j) \cap S'|$  e  $\{v_i, u_h\} \in E(G)$ ,  $\{v_j, u_h\} \notin E(G)$ , então  $i > j$ . Note que uma propriedade dessa ordenação é que  $\{u_h, v_i\} \in E(G)$  para todo  $\left\lfloor \frac{|Q|}{2} \right\rfloor \leq i < |N(S')|$ . Além disso, para  $v_i$  com  $i \geq \left\lfloor \frac{|Q|}{2} \right\rfloor$ ,  $\{v_i, u_j\} \notin E(G)$  para todo  $j < h$ . Nesta dissertação, chamamos uma ordenação que respeita essas regras como *CFK-ordenação*. A Figura 29 mostra um grafo split  $G$  com uma CFK-ordenação.

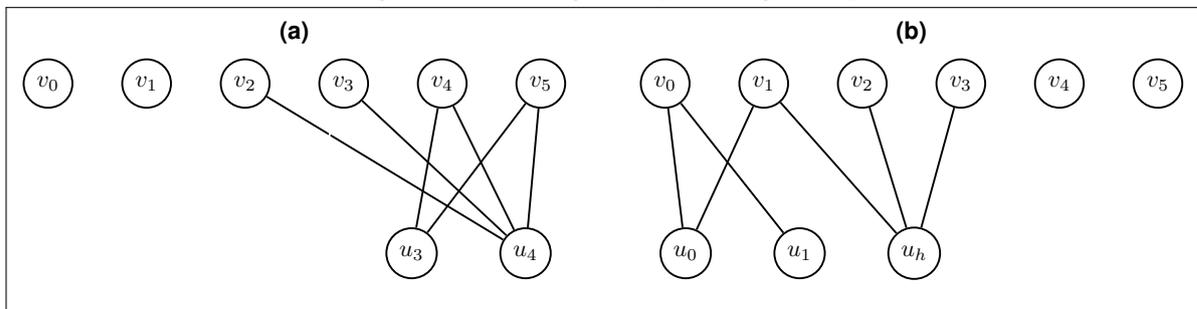
Figura 29 – CFK-ordenação de um grafo split  $G$



Fonte: Autoria própria (2023).

Dada uma CFK-ordenação, Chen, Fu e Ko (1995) especificam uma maneira de decompor o grafo em três subgrafos disjuntos nas arestas. Esses subgrafos são: o grafo completo  $G[Q]$  e dois subgrafos bipartidos induzidos pelas arestas com um extremo na clique e o outro no conjunto independente, sendo eles  $H_1 = B[Q, S \setminus S']$  e  $H_2 = B[Q, S']$ . As Figuras 30a e 30b apresentam, respectivamente, os subgrafos  $H_1$  e  $H_2$  do grafo split  $G$  da Figura 29.

Figura 30 – (a) Subgrafo  $H_1$  (b) Subgrafo  $H_2$



Fonte: Autoria própria (2023).

Para colorir os subgrafos  $H_1$  e  $H_2$ , são construídos diagramas de cores monotônicos a partir do quadrado latino  $L_{\Delta(G), \Delta(G)}$ . Esses diagramas de cores são prefixos crescentes dos diagramas  $\mathcal{D}_L(q, k)$  e  $\mathcal{D}_L^r(q, k)$ , respectivamente. Em seu artigo, Chen, Fu e Ko (1995) afirmam

que tais prefixos crescentes são sempre monotônicos, porém, como visto na Seção 3.1.1, existem contra-exemplos para essa afirmação. Assim, vamos refinar os argumentos que garantem a coloração desses subgrafos. Seja  $G$  um grafo split em uma CFK-ordenação. Vamos mostrar como construir os diagramas de cores  $\mathcal{P}_1$  e  $\mathcal{P}_2$  relacionados aos subgrafos  $H_1$  e  $H_2$  de  $G$ , respectivamente. Esses diagramas são prefixos crescentes dos diagramas  $\mathcal{D}_L(q,k)$  e  $\mathcal{D}_L^r(q,k)$  e satisfazem as condições apresentadas nos Lemas 3.19 e 3.20, respectivamente, e, portanto, são monotônicos. Depois disso, definimos os diagramas de cores  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  como sufixos de  $\mathcal{P}_1$  e  $\mathcal{P}_2$ , respectivamente, garantindo assim, pelo Lema 3.14, que esses diagramas também são monotônicos.

Seja  $\mathcal{P}_1 = (P_0, \dots, P_{|Q|-1})$ , o diagrama de cores definido com relação ao subgrafo  $H_1 = B[Q, S \setminus S']$ , como segue: para todo  $0 \leq i < \lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor$ ,  $P_i = [l_{i,|Q|}, \dots, l_{i,d_{H_1}(v_i)+|Q|-1}]$ ; e, para  $\lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor \leq i < |Q|$ ,  $P_i = [l_{i,i}, l_{i,|Q|}, l_{i,|Q|+1}, \dots, l_{i,\Delta(G)-1}]$ . Uma vez que em  $H_1$  os vértices de  $Q$  estão rotulados em ordem não decrescente de grau,  $\mathcal{P}_1$  é um prefixo crescente de  $\mathcal{D}_L(|Q|, \Delta(G))$ , onde  $P_i = D_i$  para  $\lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor \leq i < |Q|$ . Pelo Lema 3.19,  $\mathcal{P}_1$  é monotônico. Seja  $\mathcal{C}_1 = (C_0, \dots, C_{|Q|-1})$  outro diagrama de cores definido com relação a  $H_1$  tal que  $C_i$  difere de  $P_i$  apenas quando  $\lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor \leq i < |Q|$  e  $\{u_h, v_i\} \in E(G)$ ; neste caso  $C_i = [l_{i,|Q|}, l_{i,|Q|+1}, \dots, l_{i,\Delta(G)-1}]$ . Na verdade, o diagrama de cores  $\mathcal{C}_1$  é um sufixo de  $\mathcal{P}_1$ . Pelo Lema 3.14,  $\mathcal{C}_1$  é monotônico.

**Proposição 3.21.** *O diagrama de cores  $\mathcal{C}_1$  é monotônico e  $|C_i| = d_{H_1}(v_i)$ , para todo  $0 \leq i < |Q|$ .  $\square$*

Seja  $\mathcal{P}_2 = (P_{|Q|-1}, \dots, P_0)$  o diagrama de cores definido com relação ao subgrafo  $H_2 = B[Q, S']$  como segue: para  $i \geq \lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor$ ,  $P_i$  é um vetor vazio, e para  $0 \leq i < \lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor$ ,  $P_i = [l_{i,i}, l_{i,\Delta(G)-1}, \dots, l_{i,d_{H_1}(v_i)+|Q|}]$ . Uma vez que em  $H_2$  os vértices de  $Q$  estão rotulados em ordem não crescente de grau,  $\mathcal{P}_2$  é um prefixo crescente de  $\mathcal{D}_L^r(|Q|, \Delta(G))$ , onde  $|P_i| = 0$  para  $\lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor \leq i < |Q|$ . Pelo Lema 3.20,  $\mathcal{P}_2$  é monotônico. Seja  $\mathcal{C}_2 = (C_{|Q|-1}, \dots, C_0)$  outro diagrama de cores definido com relação a  $H_2$  tal que  $C_i$  difere de  $P_i$  apenas quando  $0 \leq i < \lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor$  e  $\{v_i, u_h\} \in E(G)$ ; neste caso  $C_i = [l_{i,\Delta(G)-1}, \dots, l_{i,d_{H_1}(v_i)+|Q|}]$ . Portanto, o diagrama de cores  $\mathcal{C}_2$  é um sufixo de  $\mathcal{P}_2$ . Pelo Lema 3.14,  $\mathcal{C}_2$  é monotônico.

**Proposição 3.22.** *O diagrama de cores  $\mathcal{C}_2$  é monotônico e  $|C_i| = d_{H_2 \setminus u_h}(v_i)$ , para todo  $0 \leq i < |Q|$ .  $\square$*

A seguir, apresentamos uma nova versão para a demonstração do Teorema 3.3 com a utilização dos diagramas de cores  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$ .

**Prova do Teorema 3.3:** Seja  $G$  um grafo split com grau máximo ímpar. Sem perda de generalidade, pelo Teorema 3.6, vamos assumir que  $v \in Q$  possui  $d(v) = \Delta(G)$ . Considere que os vértices de  $G$  estão rotulados em uma CFK-ordenação. Decomponha  $G$  nos subgrafos  $G[Q]$ ,  $H_1 = B[Q, S \setminus S']$  e  $H_2 = B[Q, S']$ . Vamos utilizar um quadrado latino  $L_{\Delta(G), \Delta(G)}$  para obter

uma coloração de arestas para  $G$ . Para colorir as arestas de  $G[Q]$ , atribua para cada aresta  $\{v_i, v_j\}$  a cor da célula  $l_{i,j}$ ,  $0 \leq i, j < |Q|$ ,  $i \neq j$ .

Para colorir as arestas de  $H_1$  vamos utilizar o diagrama de cores  $\mathcal{C}_1$ . Pela Proposição 3.21,  $\mathcal{C}_1$  é monotônico. Pelo Lema 3.13,  $H_1$  possui uma coloração de arestas com o diagrama de cores  $\mathcal{C}_1$ , onde as cores de cada vetor  $C_i$  são atribuídas as arestas incidentes a  $v_i$  (no subgrafo  $H_1$ ), para todo  $0 \leq i < |Q|$ .

Para colorir as arestas de  $H_2 \setminus u_h$  vamos utilizar o diagrama de cores  $\mathcal{C}_2$ . Pela Proposição 3.22,  $\mathcal{C}_2$  é monotônico. Pelo Lema 3.13,  $H_2$  possui uma coloração de arestas com o diagrama de cores  $\mathcal{C}_2$  onde as cores de cada vetor  $C_i$  são atribuídas às arestas incidentes em  $v_i$  (no subgrafo  $H_2$ ), para todo  $0 \leq i < |Q|$ .

Para cada aresta  $\{v_i, u_h\}$  atribuímos a cor da célula  $l_{i,i}$ . Observe que esta célula não está presente nem em  $\mathcal{C}_1$  nem em  $\mathcal{C}_2$ . Pela Proposição 2.6, quadrados latinos de ordem ímpar são idempotentes. Portanto,  $G$  possui uma coloração de arestas com  $\Delta(G)$  cores e é Classe 1.  $\square$

## 4 NOVOS RESULTADOS EM COLORAÇÃO DE ARESTAS DE GRAFOS SPLIT

Neste capítulo apresentamos nossos resultados. Na Seção 4.1 provamos condições suficientes para um grafo split ser Classe 1. Na Seção 4.2 caracterizamos os grafos split subgrafo-sobrecarregados. Na Seção 4.3 provamos dois casos em que um grafo split é Classe 1 se, e somente se, não é subgrafo-sobrecarregado.

### 4.1 Extensão da técnica de Chen, Fu e Ko em grafos split com grau máximo par

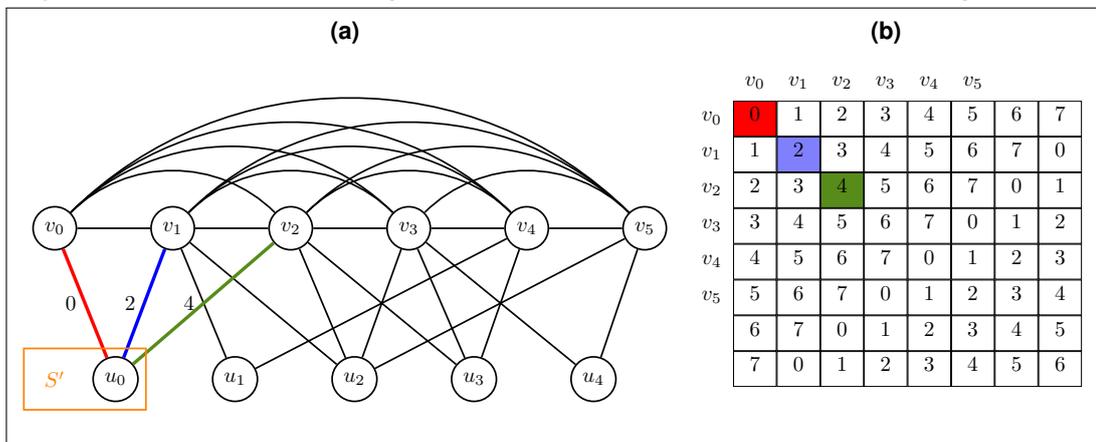
Nesta seção exploramos a técnica de Chen, Fu e Ko em grafos split com grau máximo par. Primeiro, discutiremos sobre o motivo que impossibilita a aplicação dessa técnica para todos os grafos split com grau máximo par. A partir disso, apresentamos o argumento do Teorema 3.5 que garante que se  $G$  é um grafo split com  $\Delta(G)$  par e  $G$  possui um vértice  $u \in S$  com  $\left\lfloor \frac{|Q|}{2} \right\rfloor \leq d(u) \leq \frac{\Delta(G)}{2}$ , então  $G$  é Classe 1. Este resultado de Almeida (2012) baseia-se na técnica de Chen, Fu e Ko. Após isso, apresentamos contribuições originais deste trabalho para o Problema da Classificação em grafos split. A primeira delas, enunciada no Lema 4.1 é uma generalização do resultado de Almeida (2012) para os grafos split que têm um subconjunto não necessariamente trivial  $S' \subseteq S$  com cardinalidade  $\left\lfloor \frac{|Q|}{2} \right\rfloor \leq |N(S')| \leq \frac{\Delta(G)}{2}$ . Em seguida, apresentamos o Teorema 4.3 que é o principal resultado deste trabalho. Além disso, apresentamos dois corolários do Teorema 4.3.

Seja  $G = (Q \cup S, E(G))$  um grafo split com grau máximo ímpar. Na técnica apresentada por Chen, Fu e Ko (1995), os autores assumem, sem perda de generalidade, que todo vértice em  $Q$  possui grau máximo. A partir disso, obtêm uma CFK-ordenação para o grafo  $G$  e mostram como utilizar as cores do quadrado latino  $L_{\Delta(G), \Delta(G)}$  para obter uma coloração de arestas para  $G$ . Dessa forma, os autores apresentam um algoritmo que garante que todo grafo split com grau máximo ímpar é Classe 1.

Considere agora que  $G$  é um grafo split com grau máximo par. Pelo Teorema 3.6 podemos considerar, sem perda de generalidade, que todo  $v \in Q$  possui  $d(v) = \Delta(G)$ . Logo, podemos obter uma CFK-ordenação para o grafo  $G$ . Relembrando que nesta ordenação o vértice  $u_h$  é definido como o vértice de  $S$  tal que o subconjunto  $S' = \{u_0, u_1, \dots, u_h\}$  possui  $|N(S')| \geq \left\lfloor \frac{|Q|}{2} \right\rfloor$  e  $h$  é mínimo. Além disso, os lemas 3.19 e 3.20, valem independente da paridade do quadrado latino. Assim, é possível colorir  $G[Q]$ ,  $H_1 = B[Q, S \setminus S']$  e  $H_2 = B[Q, S' \setminus u_h]$  independente da paridade de  $\Delta(G)$ . O problema está na coloração das arestas incidentes em  $u_h$ . Essas arestas são coloridas com um subconjunto das cores da diagonal principal. Pela Proposição 2.6, quando o quadrado latino tem ordem ímpar ele é idempotente, garantindo que as cores atribuídas às arestas incidentes a  $u_h$  são todas distintas. Entretanto, não existe quadrado latino de ordem par idempotente (CHEN; FU; KO, 1995). Logo, a atribuição de cores para as arestas incidentes em  $u_h$  pode não ser própria quando  $\Delta(G)$  é par.

Almeida (2012) apresentou condições que garantem que a atribuição das cores da diagonal principal para as arestas de  $u_h$  pode ser feita de forma própria. No caso do Teorema 3.5, o argumento é que, se  $G$  é um grafo split com  $\Delta(G)$  par e possui um vértice  $u \in S$  com  $\left\lfloor \frac{|Q|}{2} \right\rfloor \leq d(u) \leq \frac{\Delta(G)}{2}$ , podemos utilizar uma CFK-ordenação onde  $u = u_0 = u_h$ . Assim,  $S' = \{u_h\}$ , obedecendo a propriedade que  $|N(S')| \geq \left\lfloor \frac{|Q|}{2} \right\rfloor$ . Como  $d(u_h) \leq \frac{\Delta(G)}{2}$ , as cores atribuídas a  $u_h$  são um subconjunto das cores  $\{l_{i,i} : 0 \leq i < \frac{\Delta(G)}{2}\}$ . Pela Proposição 2.7, a cor  $l_{i,i}$  se repete somente em  $l_{i+\frac{\Delta(G)}{2}, i+\frac{\Delta(G)}{2}}$ , para  $0 \leq i < \frac{\Delta(G)}{2}$ . Portanto, esta coloração é própria e  $G$  é Classe 1. A Figura 31 apresenta o grafo  $G$  no qual o vértice  $u_h$  possui  $\left\lfloor \frac{|Q|}{2} \right\rfloor \leq d(u_h) \leq \frac{\Delta(G)}{2}$ . Esta figura mostra a atribuição de cores para as arestas incidentes a  $u_0 = u_h$ .

Figura 31 – (a) Grafo  $G$  Classe 1 pelo Teorema 3.5 (b) Quadrado latino de ordem 8 que colore  $G$



Fonte: Autoria própria (2023).

O lema a seguir é uma generalização do resultado enunciado no Teorema 3.5.

**Lema 4.1.** *Seja  $G = (Q \cup S, E(G))$  um grafo split. Se existe um subconjunto  $X \subseteq S$  tal que  $\left\lfloor \frac{|Q|}{2} \right\rfloor \leq |N(X)| \leq \frac{\Delta(G)}{2}$ , então  $G$  é Classe 1.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.6, podemos assumir que  $d(v) = \Delta(G)$  para todo  $v \in Q$ . Assumimos também que  $\Delta(G)$  é par, caso contrário, pelo Teorema 3.3,  $G$  é Classe 1. Rotule os vértices de  $S$  como  $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{|S|-1}$  tal que os vértices de  $X$  precedam os demais vértices. Considere uma CFK-ordenação que respeite tal rotulação dos vértices do subconjunto  $S$ . Exceto para as arestas incidentes em  $u_h$ , todas as outras podem ser coloridas pelos mesmos passos do caso em que o grau máximo do grafo é ímpar. Para cada aresta  $\{v_i, u_h\}$  atribua a cor  $l_{i,i}$ . Pela Proposição 2.7, a cor da célula  $l_{i,i}$  se repete na diagonal principal apenas na célula  $l_{i+\frac{\Delta(G)}{2}, i+\frac{\Delta(G)}{2}}$  e somente quando  $0 \leq i < \frac{\Delta(G)}{2}$ . Por hipótese,  $\left\lfloor \frac{|Q|}{2} \right\rfloor \leq |N(X)| \leq \frac{\Delta(G)}{2}$ . Note que  $S' \subseteq X$  uma vez que os vértices de  $X$  precedem os demais na sequência. Então, para cada  $v_i$  tal que  $i > \frac{\Delta(G)}{2}$  deduzimos que  $v_i \notin N(u_h)$ . Portanto, as cores atribuídas às arestas incidentes em  $u_h$  são duas a duas distintas e  $G$  é Classe 1.  $\square$

Seja  $G$  um grafo split com grau máximo par. Como consequência do Lema 4.1, se  $G$  não possui índice cromático definido, então, para cada  $u \in S$ , ou  $d(u) < \lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor$  ou  $d(u) > \frac{\Delta(G)}{2}$ . A seguir nós apresentamos uma contribuição original deste trabalho onde mostramos que se  $G$  possui um subconjunto  $X \subseteq S$  tal que todo  $u \in X$  possui  $d(u) < \lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor$  e  $|N(X)| \geq \lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor$ , então  $G$  é Classe 1. Para isso, nós garantimos que quando o grafo possui esse subconjunto  $X$  é possível rotular os vértices da clique de forma que  $u_h$  seja adjacente a no máximo um dos vértices  $v_i$  ou  $v_{i+\frac{\Delta(G)}{2}}$ .

Para esta nova rotulação, novamente consideramos que no grafo split  $G$  todo vértice  $v \in Q$  possui  $d(v) = \Delta(G)$ . Os vértices de  $S$  são rotulados como  $u_0, u_1, \dots, u_{|S|-1}$  de modo que os vértices de  $X$  precedam os demais vértices na sequência. Como na CFK-ordenação, definimos  $h = \min \left\{ x : \left| \bigcup_{i=0}^x N(u_i) \right| \geq \lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor \right\}$  e  $S' = \{u_0, u_1, \dots, u_h\}$ . Desejamos obter uma rotulação  $v_0, v_1, \dots, v_{|Q|-1}$  para os vértices de  $Q$  tal que, para todo  $0 \leq i < \frac{\Delta(G)}{2}$ ,  $|N(v_i) \cap S'| \geq |N(v_{i+1}) \cap S'|$  e se  $|N(v_i) \cap S'| = |N(v_j) \cap S'|$  e  $\{v_i, u_h\} \in E(G)$ ,  $\{v_j, u_h\} \notin E(G)$ , então  $i > j$ . Adicionalmente, para  $\frac{\Delta(G)}{2} \leq i < |Q|$ , se  $\{v_{i-\frac{\Delta(G)}{2}}, u_h\} \in E(G)$ , então  $\{v_i, u_h\} \notin E(G)$ . Desta maneira,  $u_h$  é adjacente a no máximo um vértice  $v_i$  ou  $v_j$  tal que  $i \equiv j \pmod{\frac{\Delta(G)}{2}}$ . Nós chamamos uma ordenação de vértices que segue essas regras de *ordenação balanceada na vizinhança de  $u_h$* . Diferente da CFK-ordenação, nem todo grafo split possui uma ordenação balanceada na vizinhança de  $u_h$ . O Lema 4.2 apresenta uma condição suficiente para um grafo split possuir essa nova ordem.

**Lema 4.2.** *Seja  $G = (Q \cup S, E(G))$  um grafo split com  $\Delta(G)$  par e considere uma CFK-ordenação. Se  $d(u_h) < \lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor$ , então  $G$  possui uma ordenação balanceada na vizinhança de  $u_h$ .*

*Demonstração.* Seja  $G = (Q \cup S, E(G))$  um grafo split com uma CFK-ordenação onde  $d(u_h) < \lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor$ . Se  $|Q| \leq \frac{\Delta(G)}{2}$ , então toda CFK-ordenação é balanceada na vizinhança de  $u_h$ . Então, considere que  $|Q| > \frac{\Delta(G)}{2}$ . Por definição de CFK-ordenação,  $u_h$  é adjacente a cada vértice do conjunto  $W = \{v_{\lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor}, \dots, v_{\frac{\Delta(G)}{2}-1}\}$ . Como  $d(u_h) < \lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor$ , então

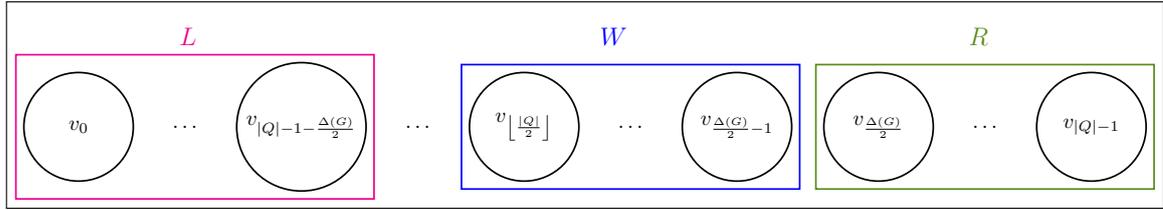
$$|N(u_h) \setminus W| \leq \left\lfloor \frac{|Q|}{2} \right\rfloor - 1 - \left( \frac{\Delta(G)}{2} - \left\lfloor \frac{|Q|}{2} \right\rfloor \right) \leq |Q| - \frac{\Delta(G)}{2} - 1.$$

Seja  $L = \{v_i : 0 \leq i \leq |Q| - 1 - \frac{\Delta(G)}{2}\}$  e  $R = \{v_i : \frac{\Delta(G)}{2} \leq i \leq |Q| - 1\}$ . A Figura 32 mostra a divisão dos vértices de  $Q$  nos subconjuntos  $W$ ,  $L$  e  $R$ . Para melhor visualização, as arestas entre esses vértices foram omitidas assim como o subconjunto  $S$ .

Nós vamos mostrar que para cada vértice em  $R \cap N(u_h)$  há um vértice em  $L$  que não é adjacente a  $u_h$ . Por contradição, suponha que  $|N(u_h) \cap R| > |L \setminus N(u_h)|$ . Então,

$$|N(u_h) \cap L| \geq |L| - (|N(u_h) \cap R| - 1) \geq |Q| - \frac{\Delta(G)}{2} - |N(u_h) \cap R| + 1.$$

Figura 32 – (a) Divisão dos vértices de  $Q$  nos subconjuntos  $W$ ,  $L$  e  $R$



Fonte: Autoria própria (2023).

Portanto,

$$|N(u_h) \setminus W| \geq |N(u_h) \cap L| + |N(u_h) \cap R| \geq$$

$$|Q| - \frac{\Delta(G)}{2} - |N(u_h) \cap R| + 1 + |N(u_h) \cap R| = |Q| - \frac{\Delta(G)}{2} + 1,$$

uma contradição. Então, há um subconjunto  $A \subseteq L \setminus N(u_h)$ , para o qual existe uma bijeção  $\pi : N(u_h) \cap R \rightarrow A$ , tal que se  $v_i \in N(u_h) \cap R$ , então  $\pi(v_i) \notin N(u_h) \cap L$ , para todo  $i$ . Então, nós podemos redefinir a rotulação dos vértices de  $R$  de acordo com  $\pi$  para obter uma ordenação balanceada na vizinhança de  $u_h$ .  $\square$

A partir das propriedades de uma ordenação balanceada na vizinhança de  $u_h$ , é possível provar o Teorema 4.3, que é a principal contribuição desta dissertação.

**Teorema 4.3.** *Seja  $G = (Q \cup S, E(G))$  um grafo split. Se existe um subconjunto  $X \subseteq S$  cujos vértices têm grau no máximo  $\frac{\Delta(G)}{2}$  e  $|N(X)| \geq \lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor$ , então  $G$  é Classe 1.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.6, podemos assumir que todos os vértices em  $Q$  possuem grau igual a  $\Delta(G)$ . Considere que  $\Delta(G)$  é par, caso contrário  $G$  é Classe 1, pelo Teorema 3.3. Por hipótese, todo vértice de  $X$  tem grau no máximo  $\frac{\Delta(G)}{2}$ . Sem perda de generalidade, considere que os vértices de  $X$  têm grau menor que  $\lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor$ , caso contrário, pelo Lema 4.1,  $G$  é Classe 1. Vamos assumir que os vértices de  $S$  estão ordenados e rotulados como  $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{|S|-1}$ , tal que os vértices do subconjunto  $X$  precedem os demais. Seja  $S' = \{u_0, \dots, u_h\}$ , tal que  $h = \min \left\{ x : \left| \bigcup_{i=0}^x N(u_i) \right| \geq \lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor \right\}$ . Se  $|N(S')| \leq \frac{\Delta(G)}{2}$ , então  $G$  é Classe 1, pelo Lema 4.1. Então, considere que  $|N(S')| > \frac{\Delta(G)}{2}$ . Uma vez que  $d(u_h) < \lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor$ , pelo Lema 4.2,  $G$  tem uma ordenação balanceada na vizinhança de  $u_h$ . Considere então que os vértices de  $G$  estão rotulados em uma ordenação balanceada na vizinhança de  $u_h$ .

Vamos utilizar um quadrado latino  $L_{\Delta(G), \Delta(G)}$  para obter uma coloração de arestas para o grafo  $G$ . Para isso, decompomos  $G$  em três subgrafos disjuntos nas arestas:  $G[Q]$ ,  $H_1 = B[Q, S \setminus S']$ ,  $H_2 = B[Q, S']$ . Para colorir o subgrafo  $G[Q]$  atribuímos para cada aresta  $\{v_i, v_j\}$  a cor da célula  $l_{i,j}$ ,  $0 \leq i, j < |Q|$ ,  $i \neq j$ .

Para colorir as arestas do subgrafo  $H_1$  utilizamos o diagrama de cores  $\mathcal{C}_1$ . Pela Proposição 3.21,  $\mathcal{C}_1$  é monotônico. Pelo Lema 3.13,  $H_1$  pode ser colorido com o diagrama de cores  $\mathcal{C}_1$  onde para cada aresta incidente em  $v_i$  (no subgrafo  $H_1$ ) é atribuída uma cor do vetor  $\mathcal{C}_i$ , para  $0 \leq i < |Q|$ .

Para colorir as arestas do subgrafo  $H_2 \setminus u_h$  utilizamos o diagrama de cores  $\mathcal{C}_2$ . Pela Proposição 3.22,  $\mathcal{C}_2$  é monotônico. Pelo Lema 3.13,  $H_2$  pode ser colorido com o diagrama de cores  $\mathcal{C}_2$  onde para cada aresta incidente no vértice  $v_i$  (no subgrafo  $H_2$ ) é atribuída uma cor do vetor  $C_i$ , para  $0 \leq i < |Q|$ .

Para cada aresta  $\{v_i, u_h\}$  atribuímos a cor da célula  $l_{i,i}$ . Pela Proposição 2.7, a cor da célula  $l_{i,i}$  se repete na célula  $l_{i+\frac{\Delta(G)}{2}, i+\frac{\Delta(G)}{2}}$ . Uma vez que os vértices estão rotulados em uma ordenação balanceada na vizinhança de  $u_h$ , sabemos que  $u_h$  é adjacente a no máximo um dos vértices  $v_i$  ou  $v_{i+\frac{\Delta(G)}{2}}$ . Assim, as cores atribuídas às arestas incidentes ao vértice  $u_h$  são duas a duas distintas. Portanto,  $G$  é Classe 1.  $\square$

Os corolários a seguir apresentam condições suficientes para que um grafo split  $G$  seja Classe 1 a partir do resultado do Teorema 4.3.

**Corolário 4.4.** *Sejam  $G = (Q \cup S, E(G))$  um grafo split e  $Y$  o subconjunto de  $S$  formado pelos vértices  $u \in S$  tais que  $d(u) > \frac{\Delta(G)}{2}$ . Se  $|Y| < d(Q)$ , então  $G$  é Classe 1.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.6 podemos assumir que  $d(v) = \Delta(G)$  para todo  $v \in Q$ . Seja  $S_H = S \setminus Y$  e considere o grafo split  $H = G[Q \cup S_H]$ . Uma vez que  $d_G(v) = \Delta(G) = |Q| - 1 + d(Q)$ , para todo  $v \in Q$ , então  $N(v) \cap S_H \neq \emptyset$ . Além disso,  $d(u) \leq \frac{\Delta(G)}{2}$  para todo  $u \in S_H$ ;  $N(S_H) = Q$  e  $S_H \subseteq S$ . Logo, pelo Teorema 4.3,  $G$  é Classe 1.  $\square$

**Corolário 4.5.** *Sejam  $G = (Q \cup S, E(G))$  um grafo split e  $Y$  o subconjunto de  $S$  que inclui todo vértice  $u \in S$  tal que  $d(u) > \frac{\Delta(G)}{2}$ . Se  $|Y| \geq d(Q)$  e não existe  $v \in Q$  tal que  $N(v) \cap S \subseteq Y$ , então  $G$  é Classe 1.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.6 podemos assumir que  $d(v) = \Delta(G)$  para todo  $v \in Q$ . Seja  $X = S \setminus Y$ . Por hipótese, não há vértice  $v \in Q$  tal que  $N(v) \cap S \subseteq Y$ . Uma vez que  $d(v) = \Delta(G) = |Q| - 1 + d(Q)$  e o vértice  $v$  tem menos que  $d(Q)$  vizinhos em  $Y$ , nós concluímos que  $N(v) \cap X \neq \emptyset$ . Tal conclusão segue para todo vértice em  $Q$ . Portanto,  $|N(X)| = |Q|$  e, pelo Teorema 4.3,  $G$  é Classe 1.  $\square$

## 4.2 Caracterização dos grafos split vizinhança-sobrecarregado

A partir do Teorema 4.3 conseguimos identificar características estruturais de um subconjunto dos grafos split Classe 1. Esse conhecimento nos levou a perceber características estruturais de grafos split que são subgrafo-sobrecarregados. Assim, nesta seção caracterizamos os grafos split que são subgrafo-sobrecarregados. O Lema 4.6 apresenta uma condição necessária para que um grafo split  $G$  seja subgrafo-sobrecarregado. Este lema é utilizado na demonstração do Teorema 4.7, que caracteriza os grafos split subgrafo-sobrecarregados.

**Lema 4.6.** *Sejam  $G = (Q \cup S, E(G))$  um grafo split com clique  $Q$  maximal e  $Y$  o subconjunto de  $S$  constituído pelos vértices  $u \in S$  tal que  $d(u) > \frac{\Delta(G)}{2}$ . Se  $G$  é subgrafo-sobrecarregado, então todas as seguintes condições são satisfeitas:*

- i.  $|Y| = d(Q)$ ,*
- ii. existe um vértice  $v \in Q$  tal que  $Y \subset N(v)$  e*
- iii.  $G[N[v]]$  é sobrecarregado.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.6, podemos assumir que todos os vértices do subconjunto  $Q$  possuem grau  $\Delta(G)$ . Pelo Corolário 4.4, se  $|Y| < d(Q)$ , então  $G$  é Classe 1. Assim, considere que  $|Y| \geq d(Q)$ . Além disso, pelo Teorema 2.5, podemos assumir que  $G$  é vizinhança-sobrecarregado. Portanto, existe um vértice  $v \in Q$  tal que  $G[N[v]]$  é sobrecarregado e  $\Delta(G) = \Delta(G[N[v]])$ .

Vamos provar que  $|Y| = d(Q)$ . Assuma, por absurdo, que  $|Y| > d(Q)$ . Uma vez que  $v$  é um vértice de grau máximo,  $|N(v) \cap S| = d(Q)$ . Logo, existe ao menos um vértice  $w \in Y$  que não pertence a  $N(v) \cap S$ . Seja  $G'$  um subgrafo de  $G$  obtido pela remoção de  $d(w) - \frac{\Delta(G)}{2}$  arestas incidentes em  $w$ . Note que  $G[N[v]]$ , que é sobrecarregado, é um subgrafo de  $G'$  com mesmo grau máximo  $\Delta(G)$ . Então  $G'$  é subgrafo-sobrecarregado e Classe 2. Mas como  $d_{G'}(w) = \frac{\Delta(G)}{2}$ , pelo Lema 4.1,  $G'$  é Classe 1, uma contradição.

Agora vamos provar que  $Y \subset N(v)$ . Pelo Corolário 4.5, se não existe  $v \in Q$  tal que  $Y \subset N(v)$ , então  $G$  é Classe 1. Portanto, se  $G$  é subgrafo-sobrecarregado, então  $|Y| = d(Q)$ , existe um vértice  $v \in Q$  tal que  $Y \subset N(v)$  e  $G[N[v]]$  é sobrecarregado.  $\square$

**Teorema 4.7.** *Sejam  $G = (Q \cup S, E(G))$  um grafo split com clique  $Q$  maximal e  $Y$  o subconjunto de  $S$  formado pelos vértices  $u \in S$  tal que  $d(u) > \frac{\Delta(G)}{2}$ . Então,  $G$  é subgrafo-sobrecarregado se, e somente se:  $\Delta(G)$  é par;  $|Y| = d(Q)$ ; e o subgrafo  $H = G[Q \cup Y]$  possui  $\Delta(H) = \Delta(G)$  e é sobrecarregado.*

*Demonstração.* A prova da suficiência é direta uma vez que  $H$  é um subgrafo-sobrecarregado de  $G$  com  $\Delta(G) = \Delta(H)$ . Assim, vamos provar a necessidade.

Pelo Teorema 3.6, podemos assumir que os vértices em  $Q$  possuem grau igual a  $\Delta(G)$ . Podemos também assumir que  $\Delta(G)$  é par, caso contrário,  $G$  seria Classe 1 pelo Teorema 3.3. Pelo Lema 4.6, se  $G$  é subgrafo-sobrecarregado, então  $|Y| = d(Q)$ , existe um vértice  $v \in Q$  tal que  $Y \subset N(v)$  e  $G[N[v]]$  é sobrecarregado. Então,  $H = G[N[v]] = G[Q \cup Y]$ ,  $\Delta(H) = \Delta(G)$  e  $H$  é sobrecarregado.  $\square$

Seja  $G$  um grafo split com  $n$  vértices e  $m$  arestas. Padberg e Rao (1982) provaram que determinar se  $G$  é subgrafo-sobrecarregado tem complexidade de tempo polinomial. Quando  $G$  é um grafo split, pelo Teorema 2.5, ser subgrafo-sobrecarregado é equivalente a ser vizinhança-sobrecarregado. Então, é possível obter um algoritmo para determinar se  $G$  é

subgrafo-sobrecarregado de complexidade de tempo  $O(nm)$  no pior caso: basta identificar o subgrafo induzido por cada vértice de grau  $\Delta(G)$  e verificar se este é sobrecarregado. Nós provamos que, quando o grau dos vértices é conhecido, é possível determinar se o grafo split é subgrafo-sobrecarregado em tempo  $\Theta(|S|)$ . Para isso, é necessário o Lema 4.8.

**Lema 4.8.** *Seja  $G = (Q \cup S, E(G))$  um grafo split com clique  $Q$  maximal,  $Y$  o subconjunto de  $S$  formado pelos vértices  $u \in S$  tal que  $d(u) > \frac{\Delta(G)}{2}$  e  $Y = d(Q)$ . Se  $\overline{G[Q, Y]}$  possui menos que  $\frac{\Delta(G)}{2}$  arestas, então  $\Delta(G) = \Delta(G[Q, Y])$ .*

*Demonstração.* Se  $|Y| = 0$ , então  $G$  é um grafo completo e a conclusão segue. Assim considere que  $|Y| > 0$  e, conseqüentemente,  $|Q| > \Delta(G)/2$ . Seja  $H = G[Q, Y]$  e  $|E(\overline{H})| < \frac{\Delta(G)}{2}$ . Vamos provar que existe um vértice  $v \in Q$  tal que  $Y \subset N(v)$ . Considere, por absurdo, que não existe  $v \in Q$  tal que  $Y \subset N(v)$ . Assim, todo vértice de grau máximo de  $G$  possui pelo menos um vértice de  $S \setminus Y$  em sua vizinhança. Dessa forma, removendo os vértices de  $S \setminus Y$  todos os vértices de grau máximo têm seu grau reduzido em pelo menos 1. Logo, no grafo  $\overline{H}$  existe pelo menos uma aresta incidente a cada um desses vértices. Uma vez que  $|Q| > \Delta(G)/2$ , temos que  $E(\overline{H}) > \Delta(G)/2$ , contrariando a hipótese. Assim, existe pelo menos um vértice  $v \in Q$  tal que  $Y \subset N(v)$ . Portanto,  $\Delta(G) = \Delta(G[N[v]]) = \Delta(H)$ .  $\square$

A partir da caracterização apresentada no Teorema 4.7 e do Lema 4.8 obtemos o Algoritmo 1 que tem como entrada um grafo split  $G$  cujos graus dos vértices são conhecidos e responde “verdadeiro”, se  $G$  é subgrafo-sobrecarregado, ou “falso”, caso contrário.

#### Algoritmo 1 – Reconhecimento de grafos split subgrafo-sobrecarregado

```

1  Entrada: Um grafo split  $G$ 
2  Saída: verdadeiro, se  $G$  é subgrafo-sobrecarregado; falso, caso contrário
3   $V_Y = 0$ 
4   $E_Y = 0$ 
5  Se  $\Delta(G)$  é ímpar então
6      retorne falso
7  Para cada vertice  $v \in S$  faça
8      Se  $d(v) > \Delta(G)/2$  então
9           $V_Y = V_Y + 1$ 
10          $E_Y = E_Y + d(v)$ 
11   $d(Q) = \Delta(G) - |Q| + 1$ 
12  Se  $V_Y \neq d(Q)$ 
13      retorne falso
14   $E_{G[Q]} = [|Q| * (|Q| - 1)]/2$ 
15   $E_H = E_{G[Q]} + E_Y$ 
16  Se  $[|V(G)| * (|V(G)| - 1)]/2 - E_H < \Delta(G)/2$  então
17      retorne verdadeiro
18  Senão
19      retorne falso

```

Fonte: Autoria própria (2023).

Observa-se que existe apenas um laço de repetição no Algoritmo 1 (na linha 7) com número de instruções  $\Theta(|S|)$ . Assim, uma simples análise assintótica do Algoritmo 1 nos permite concluir o Corolário 4.9.

**Corolário 4.9.** *Seja  $G = (Q \cup S, E(G))$  um grafo split com graus dos vértices conhecidos. Decidir se  $G$  é subgrafo-sobrecarregado tem complexidade de tempo  $\Theta(|S|)$ .*

### 4.3 Casos particulares de equivalência entre vizinhança-sobrecarregado e Classe 2 em grafos split

Nesta seção apresentamos dois casos para os quais um grafo split  $G$  é Classe 1, se e somente se, não é vizinhança-sobrecarregado.

**Teorema 4.10.** *Seja  $G = (Q \cup S, E(G))$  um grafo split. Se  $|Q| = \Delta(G)$ , então  $G$  é Classe 1 se, e somente se,  $G$  não é subgrafo-sobrecarregado.*

*Demonstração.* A prova da suficiência é direta, então vamos provar a necessidade.

Sem perda de generalidade, pelo Teorema 3.6, podemos considerar que todo  $v \in Q$  possui  $d(v) = \Delta(G)$ . Considere também que  $\Delta(G)$  é par, caso contrário  $G$  é Classe 1 pelo Teorema 3.3. Pelo Teorema 2.5, todo grafo split subgrafo-sobrecarregado é vizinhança-sobrecarregado. Seja  $v$  um vértice de  $Q$  e considere que  $G[N[v]]$  não é sobrecarregado. Então,  $\overline{G[N[v]]}$  possui pelo menos  $\frac{\Delta(G)}{2}$  arestas. Por hipótese,  $|Q| = \Delta(G)$ , logo  $d(Q) = 1$ . Assim existe um único vértice  $u \in N(v) \cap S$  e todas as arestas de  $\overline{G[N[v]]}$  têm um de seus extremos em  $u$ . Como, por hipótese,  $G[N[v]]$  não é sobrecarregado, então  $d(u) \leq \frac{\Delta(G)}{2}$ . Este argumento vale para todo vértice  $v$  de  $Q$  e seu respectivo vizinho  $u$  em  $S$ . Logo,  $d(u) \leq \frac{\Delta(G)}{2}$  para todo  $u \in S$ . Como  $|N(S)| = |Q|$ , pelo Teorema 4.3,  $G$  é Classe 1.  $\square$

**Teorema 4.11.** *Sejam  $G = (Q \cup S, E(G))$  um grafo split com clique  $Q$  maximal e  $Y$  o subconjunto de  $S$  formado por todos os vértices  $u \in S$  tal que  $d(u) > \frac{\Delta(G)}{2}$ . Se  $|Y| = d(Q)$  e  $|E(G)| - |E(G[Q \cup Y])| \leq \frac{\Delta(G)}{2}$ , então  $G$  é Classe 1 se, e somente se,  $G$  não é subgrafo-sobrecarregado.*

*Demonstração.* A prova da suficiência é direta, então vamos provar a necessidade.

Considere que  $\Delta(G)$  é par, caso contrário,  $G$  é Classe 1 pelo Teorema 3.1. Se não existe  $v \in Q$  tal que  $Y \subset N(v)$ , então, pelo Corolário 4.5,  $G$  é Classe 1. Assim, considere que existe  $v \in Q$  tal que  $Y \subset N(v)$ . Por hipótese,  $|Y| = d(Q)$ , portanto,  $N[v] = Q \cup Y$ . Seja  $H = G[N[v]] = G[Q \cup Y]$ . Pelo Teorema 4.7,  $G$  é vizinhança-sobrecarregado se, e somente se,  $H$  é sobrecarregado. Então, considere que  $H$  não é sobrecarregado. Vamos mostrar como colorir as arestas do subgrafo  $H$  com  $\Delta(G)$  cores e estender a coloração para  $G$ .

A partir de  $H$ , vamos construir o grafo  $H'$  inserindo arestas entre vértices de  $Y$  até que faltem exatamente  $\frac{\Delta(G)}{2}$  arestas para que  $H'$  seja um grafo completo. Como o vértice  $v$  é

universal em  $H$  (e conseqüentemente em  $H'$ ), pelo Teorema 2.24,  $H'$  possui uma coloração com  $\Delta(G)$  cores. Pelo Teorema 2.21,  $H'$  possui uma coloração equilibrada com  $\Delta(G)$  cores. Como  $\Delta(G)$  é par,  $|V(H')|$  é ímpar e toda cor falta em no máximo um vértice de  $H'$ .

Por hipótese,  $|E(G)| - |E(H)| \leq \frac{\Delta(G)}{2}$ . Assim, para colorir arestas de  $G$  que não pertencem a  $H'$ , atribua arbitrariamente as cores que faltam nos vértices de  $H'$ . Removendo as arestas inseridas no processo de construção de  $H'$ , obtemos uma coloração de arestas com  $\Delta(G)$  cores para o grafo  $G$ .  $\square$

## 5 GRAFOS SPLIT-FORTEMENTE CORDAIS

Neste capítulo apresentamos um estudo estrutural da classe dos grafos split-fortemente cordais. Essa é uma subclasse dos grafos split para a qual o Problema da Classificação está em aberto. As classes aqui definidas e suas propriedades podem ser encontradas em Golubic (2004).

Um *ciclo*  $C_k$  é uma sequência de vértices  $(v_0, v_1, \dots, v_{k-1})$  onde  $v_i$  é adjacente a  $v_{(i+1) \bmod k}$ . Seja  $C_k$  um ciclo de um grafo  $G$ . Uma *corda* em  $C_k$  é uma aresta entre dois vértices de  $C_k$  que não pertence ao ciclo. Grafos cordais também podem ser definidos como grafos em que todo ciclo  $C_k, k > 3$ , possui uma corda.

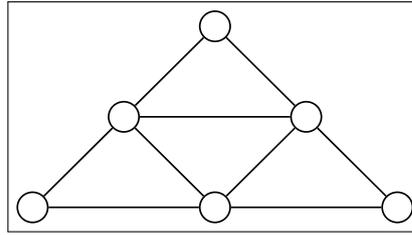
Dado um grafo  $G$ , uma propriedade é *hereditária* se, quando ela vale para  $G$ , vale também para qualquer subgrafo induzido de  $G$ . Note que todo subgrafo induzido de um grafo cordal mantém a propriedade de todo ciclo com mais de 3 vértices possuir uma corda. Logo, ser cordal é uma propriedade hereditária, ou seja, se  $G$  é cordal, então qualquer subgrafo induzido de  $G$  é cordal.

Um vértice  $v$  de um grafo  $G$  é *simplicial* se  $N(v)$  induz um subgrafo completo de  $G$ , ou seja,  $N(v)$  é uma clique. Seja  $\sigma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  uma ordenação dos vértices de  $G$ . Se para todo  $1 \leq i \leq n$ , o vértice  $v_i$  é simplicial no subgrafo  $G[\{v_i, \dots, v_n\}]$ , então  $\sigma$  é uma *ordem de eliminação perfeita*.

Dirac (1961) mostrou que todo grafo cordal  $G$  tem um vértice simplicial e, caso  $G$  não seja um grafo completo, então  $G$  possui dois vértices não adjacentes que são simpliciais. Sejam  $G$  um grafo cordal e  $v_1$  um vértice simplicial de  $G$ . Pela propriedade hereditária,  $G' = G \setminus v_1$  é um grafo cordal, assim  $G'$  possui um vértice  $v_2$  que é simplicial. Podemos repetir esse processo até que todos os vértices de  $G$  tenham sido removidos. A ordem de remoção dos vértices simpliciais neste processo é uma ordem de eliminação perfeita para  $G$ . Portanto, se  $G$  é cordal, então  $G$  possui uma ordem de eliminação perfeita e qualquer vértice simplicial pode iniciar essa ordem (DIRAC, 1961).

Em um grafo split  $G = (Q \cup S, E(G))$  todo vértice em  $S$  é um vértice simplicial. Assim, qualquer ordenação do conjunto de vértices em que os vértices de  $S$  são anteriores aos vértices de  $Q$  é uma ordem de eliminação perfeita. Logo, para grafos split, a ordem de eliminação perfeita não oferece muita estrutura para o estudo do problema da coloração de arestas. Há outras definições de ordens com potencial para auxiliar na compreensão da estrutura do grafo. Nosso objetivo era estudar uma subclasse dos grafos split que admite uma ordem de eliminação com mais restrições. A seguir, vamos definir duas ordens de eliminação que essa subclasse possui.

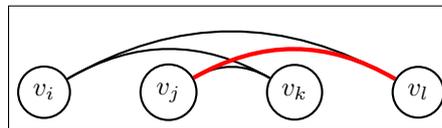
Um vértice  $v$  é *simples* se para todo par de vértices  $y$  e  $z$  vizinhos de  $v$ , ou  $N[y] \subseteq N[z]$  ou  $N[z] \subseteq N[y]$ . Uma ordem dos vértices  $\sigma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  é uma *ordem de eliminação simples* se para todo  $1 \leq i \leq n$ , o vértice  $v_i$  é simples no subgrafo  $G[\{v_i, \dots, v_n\}]$ . Note que o grafo  $S_3$ , ilustrado na Figura 33, não possui vértice simples, então não possui uma ordem de eliminação simples.

Figura 33 – Grafo  $S_3$ 

Fonte: Autoria própria (2023).

Um caso especial de ordem de eliminação simples é a ordem de eliminação forte. Uma *ordem de eliminação forte* é uma ordem  $\sigma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  dos vértices do grafo onde, para todo  $i < j < k < l$ , se  $\{v_i, v_k\}, \{v_i, v_l\}, \{v_j, v_k\} \in E(G)$ , então  $\{v_j, v_l\} \in E(G)$ . A Figura 34 exemplifica a regra da ordem de eliminação forte.

Figura 34 – Regra da ordem de eliminação forte



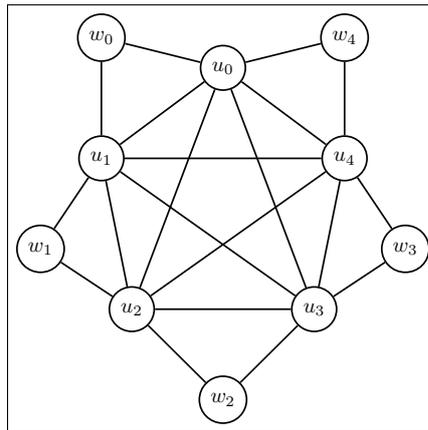
Fonte: Autoria própria (2023).

Uma ordem de eliminação forte é sempre uma ordem de eliminação simples, mas nem toda ordem de eliminação simples é uma ordem de eliminação forte. Além disso, toda ordem de eliminação simples é uma ordem de eliminação perfeita. A classe que mais nos interessava possui uma ordem de eliminação forte e será definida a seguir.

Seja  $C_k$  um ciclo com  $k$  par. Uma *corda ímpar* em  $C_k$  é uma corda cujos extremos estão a distância ímpar em  $C_k$ . Um grafo é *fortemente cordal* se é cordal e todo ciclo par de tamanho maior que 4 tem uma corda ímpar. Os grafos  $\overline{S_3}$ ,  $R_4$  e  $\overline{R_4}$  da Figura 16 e da Figura 17 são fortemente cordais. Já o grafo  $S_3$  apresentado nessas figuras não é fortemente cordal devido ao ciclo de tamanho 6, que contorna o grafo, não possuir corda ímpar. Farber (1983) provou que um grafo é fortemente cordal se, e somente se, possui uma ordem de eliminação forte.

Grafos fortemente cordais também possuem uma caracterização por subgrafos proibidos. Um grafo  $k$ -sol, denotado por  $S_k$ , é um grafo com  $2k$  vértices, para algum  $k \geq 3$ , que pode ter seu conjunto de vértices particionados em dois subconjuntos  $U = \{u_0, u_1, \dots, u_{k-1}\}$  e  $W = \{w_0, w_1, \dots, w_{k-1}\}$ , onde  $U$  é uma clique e cada vértice  $w_i$  é adjacente a  $u_i$  e  $u_{i+1 \pmod k}$ . A Figura 35 ilustra o grafo  $S_5$ .

Note que todo ciclo induzido de um grafo  $S_k$  tem tamanho 3. Além disso, as arestas que incidem nos vértices de  $W$  formam um ciclo  $C_{2k}$  que não é induzido, mas que não possui nenhuma corda ímpar. Isso ocorre porque não existe aresta de um vértice de  $W$  para nenhum vértice de  $U$  que não seja seu vizinho no ciclo. Além disso, toda aresta entre vértices de  $U$  está a uma distância par no ciclo. Portanto, nenhum grafo  $S_k$  é fortemente cordal. Entretanto  $W$  é um conjunto independente e, portanto, todo  $k$ -sol é um grafo split. Por outro lado, os grafos fortemente cordais são grafos cordais livres de  $S_k$  (FARBER, 1983). Logo, os grafos split-

Figura 35 – Grafo  $S_5$ 

Fonte: Autoria própria (2023).

fortemente cordais, que eram os grafos que nos interessavam, são precisamente os grafos split livres de  $S_k$ .

O índice cromático para grafos fortemente cordais com grau máximo ímpar é conhecido, como enunciado no Teorema 5.1. Para grafos fortemente cordais com grau máximo par o Problema da Classificação está em aberto, assim como para grafos split.

**Teorema 5.1.** (FIGUEIREDO; MEIDANIS; MELLO, 1999) *Se  $G$  é um grafo fortemente cordal com  $\Delta(G)$  ímpar, então  $G$  é Classe 1.*

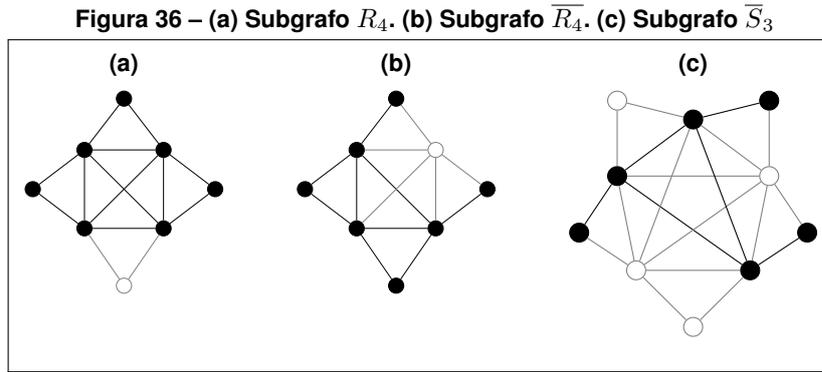
A partir da análise dos subgrafos proibidos para a classe dos grafos split-comparabilidade e split-intervalos podemos concluir que essas duas subclasses dos grafos split são também subclasses dos grafos fortemente cordais. O Teorema 5.2 apresenta os argumentos que garantem essa conclusão.

**Teorema 5.2.** *Se  $G$  é um grafo split-comparabilidade ou split-intervalos, então  $G$  é fortemente-cordal.*

*Demonstração.* Vamos mostrar que os grafos split-comparabilidade e split-intervalos são livres de  $S_k$  a partir dos subgrafos proibidos para estas classes. O grafo  $S_3$  é um subgrafo proibido para grafos split-comparabilidade e split-intervalos. Podemos dizer que o grafo  $S_4$  é também um subgrafo proibido para split-intervalos e split-comparabilidade, pois os grafos  $\overline{R_4}$  e  $R_4$  são subgrafos induzidos de  $S_4$ . Chang e Nemhauser (1985) mostraram que todo grafo  $S_k$ ,  $k \geq 5$ , contém um  $\overline{S_3}$  induzido. Como o grafo  $\overline{S_3}$  é um subgrafo proibido para grafos split-intervalos e split-comparabilidade, todo grafo split-intervalos e split-comparabilidade é livre de  $S_k$ ,  $k \geq 3$ , e, portanto, é um grafo split-fortemente cordal. Entretanto, grafos split-fortemente cordais podem conter os grafos  $R_4$ ,  $\overline{R_4}$  e  $\overline{S_3}$  como subgrafo induzido. Assim, os grafos split-comparabilidade e split-intervalos estão propriamente contidos na classe dos grafos split-fortemente cordais, que está contida na classe dos grafos fortemente-cordais.

□

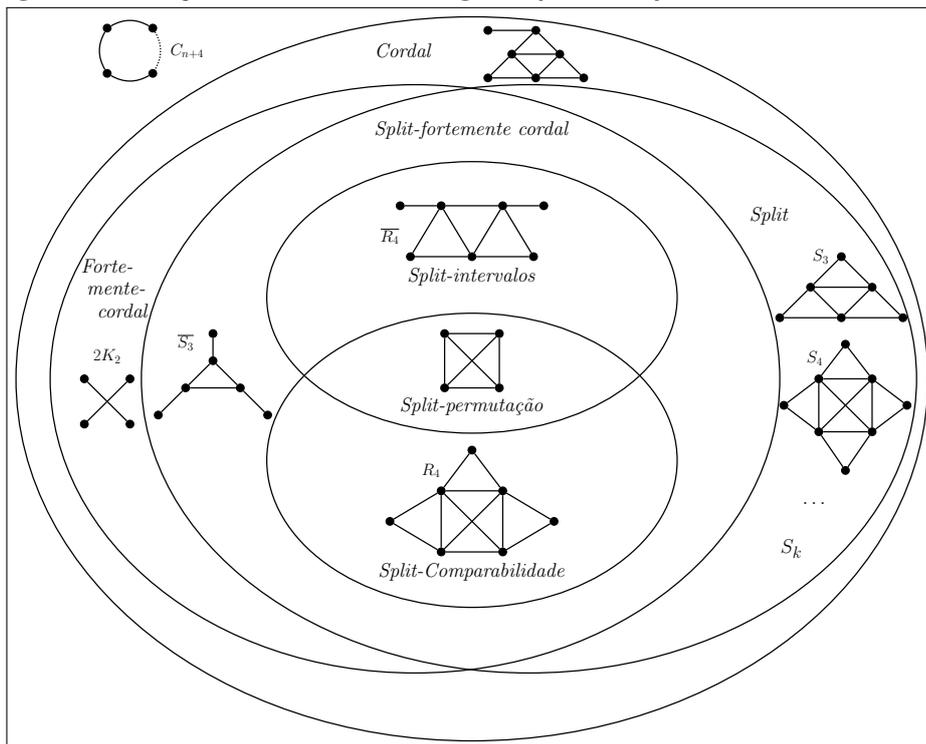
A Figura 36 ilustra os subgrafos  $R_4$  e  $\overline{R_4}$  do grafo  $S_4$  e um subgrafo  $\overline{S_3}$  do grafo  $S_5$ .



**Fonte: Autoria própria (2023).**

A Figura 37 apresenta a relação entre as classes dos grafos cordais, split, fortemente cordais, split-fortemente cordais, split-comparabilidade e split-intervalos a partir de subgrafos proibidos para estas classes. Estávamos interessados na classe dos grafos split-fortemente cordais que contém como subgrafo induzido ou o grafo  $\overline{S_3}$  ou os grafos  $R_4$  e  $\overline{R_4}$ .

**Figura 37 – Relação de inclusão dos subgrafos proibidos para as classes estudadas**

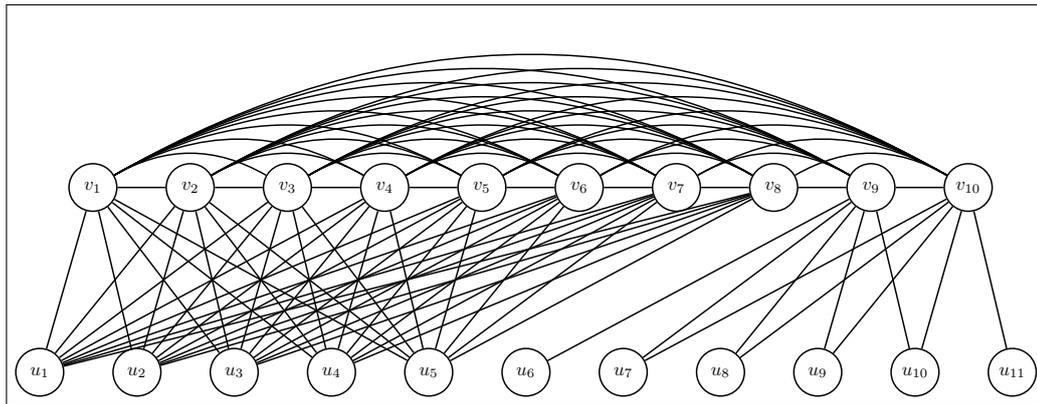


**Fonte: Autoria própria (2023).**

A Figura 38 mostra um grafo split-fortemente cordal com grau máximo par que não é split-comparabilidade nem split-intervalos. Note que este grafo possui vários  $\overline{S_3}$  como subgrafo induzido, por exemplo,  $G[\{u_1, u_6, u_{11}, v_1, v_9, v_{10}\}]$ , sendo um exemplo de grafo split com índice cromático em aberto.

Um grafo é *bipartido cordal* se todo ciclo de tamanho pelo menos 6 possui uma corda. Dado um grafo bipartido cordal  $B[X, Y]$ , denotamos por  $split_X(B)$  o grafo split obtido a partir

Figura 38 – Grafo split-fortemente cordal



Fonte: Autoria própria (2023).

de  $B$  pela adição de arestas entre cada par de vértices em  $X$ . O Teorema 5.3 apresenta uma relação entre grafos fortemente cordais e grafos bipartidos cordais.

**Teorema 5.3.** (DAHLHAUS, 1991) *Um grafo bipartido  $B[X,Y]$  é bipartido cordal se, e somente se,  $split_X(B)$  é um grafo fortemente cordal.*

A partir do Teorema 5.3 obtemos a seguinte proposição.

**Proposição 5.4.** *Se  $G$  é um grafo split-fortemente cordal, então  $B[Q,S]$  é um grafo bipartido cordal.*

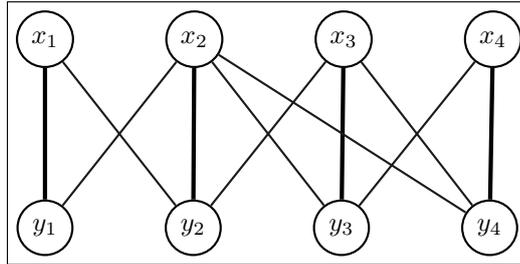
Assim, grafos split-fortemente cordais estão intimamente relacionados a classe dos grafos bipartidos cordais.

Os grafos bipartidos cordais possuem uma ordem de eliminação que considera uma ordenação de um subconjunto das arestas do grafo que é apresentada a seguir.

Um conjunto de vértices que induz um grafo bipartido completo é chamado *biclique*. Uma aresta  $e = \{x,y\}$  é chamada *bisimplicial* se  $N(x) \cup N(y)$  é uma biclique. Seja  $\sigma = (e_1, e_2, \dots, e_k)$  uma sequência de arestas duas a duas não adjacentes de um grafo bipartido  $B$ . Seja  $T_i$  o conjunto de vértices nos quais as arestas  $\{e_1, e_2, \dots, e_i\}$  são incidentes. Se cada aresta  $e_i$  é bisimplicial no subgrafo  $B[V(B) \setminus T_{i-1}]$  e  $B[V(B) \setminus T_k]$  não possui arestas, então  $\sigma$  é uma *ordem de eliminação aresta-perfeita*. Para exemplificar esse conceito, considere o grafo da Figura 39. Esse grafo possui uma ordem  $\sigma = (\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_3, y_3\}, \{x_4, y_4\})$  (arestas em destaque na figura) que é uma ordem de eliminação aresta-perfeita. Golumbic e Goss (1978) mostraram que todo grafo bipartido cordal possui uma ordem de eliminação aresta-perfeita.

Dois arestas  $\{a,b\}$  e  $\{c,d\}$  são *disjuntas* se  $N[a] \cup N[b]$  não contém o vértice  $c$  e nem o vértice  $d$ . Note que arestas disjuntas são não adjacentes, a recíproca não necessariamente é verdadeira. Se  $\{a,b\}$  e  $\{c,d\}$  são arestas disjuntas, então  $G[a,b,c,d] \cong 2K_2$ . Utilizando o conceito de arestas disjuntas nós provamos no Lema 5.5 que todo grafo split-fortemente cordal que não é de comparabilidade nem de intervalos possui um grafo  $\overline{S_3}$  como subgrafo induzido.

**Figura 39 – Ordem de eliminação aresta perfeita**



Fonte: Adaptado de Golubic (2004).

**Lema 5.5.** *Seja  $G$  um grafo split-fortemente cordal. Se  $G$  não é de comparabilidade nem de intervalos, então  $G$  possui um grafo  $\overline{S}_3$  como subgrafo induzido.*

*Demonstração.* Como  $G$  é fortemente-cordal,  $G$  não possui  $S_k$  como subgrafo induzido. Além disso,  $G$  não é de comparabilidade, então  $G$  possui como subgrafo induzido um grafo  $\overline{S}_3$  e/ou  $\overline{R}_4$ ;  $G$  também não é grafo de intervalos, logo, possui  $\overline{S}_3$  e/ou  $R_4$  como subgrafo induzido. Assim, é suficiente provar que se  $G$  possui como subgrafos induzidos os grafos  $\overline{R}_4$  e  $R_4$ , então  $G$  possui  $\overline{S}_3$  como subgrafo induzido.

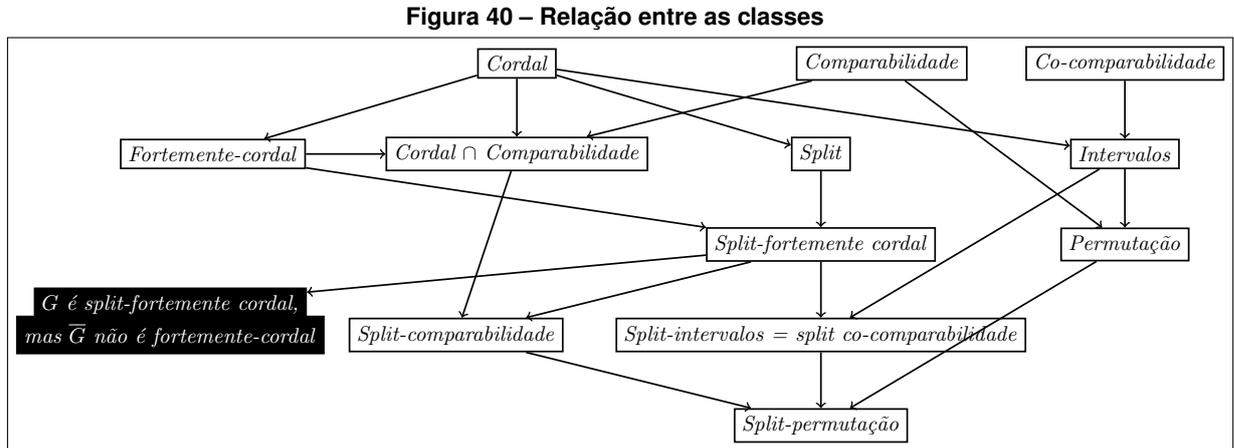
Considere, sem perda de generalidade, que existe um grafo  $R_4$  e um grafo  $\overline{R}_4$  como subgrafo induzido em  $G$ . Há dois casos: ou  $R_4$  e  $\overline{R}_4$  são disjuntos nos vértices ou compartilham vértices. Primeiro considere que  $R_4$  e  $\overline{R}_4$  são disjuntos nos vértices. Note que  $R_4$  possui duas arestas com um extremo em  $Q$  e outro em  $S$  que são disjuntas. Sem perda de generalidade, considere os extremos de duas arestas disjuntas de  $R_4$  e os extremos uma aresta de  $\overline{R}_4$  com um extremo em  $Q$  e outro em  $S$ . O subgrafo induzido por esses extremos é um grafo  $\overline{S}_3$ . Agora considere o caso em que  $R_4$  e  $\overline{R}_4$  não são disjuntos e seja  $H$  o subgrafo induzido pelas arestas que pertencem a esses subgrafos. Pela estrutura dos grafos  $R_4$  e  $\overline{R}_4$ , há um caminho de comprimento pelo menos 7 induzido em  $B_H[Q, S]$ . Vamos denotar por  $u_i$  os vértices de  $S$  e por  $v_i$  os vértices de  $Q$ . Sem perda de generalidade, considere que esse caminho inicia em um vértice de  $S$ . Seja  $(u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4)$  esse caminho de comprimento 7. Como o grafo é fortemente cordal não há aresta entre  $u_1$  e  $v_4$ , caso contrário haveria um ciclo par sem corda ímpar. O subgrafo induzido por  $u_1, v_1, v_2, u_3, u_4, v_4$  é um  $\overline{S}_3$ .  $\square$

A partir do Lema 5.5 garantimos que o estudo do índice cromático de grafos split-fortemente cordais pode ser restringido ao estudo aos grafos split-fortemente cordais que contenham  $\overline{S}_3$  como subgrafo induzido. O Teorema 5.6 nos dá mais uma propriedade dos grafos bipartidos-cordais que não contêm o grafo  $\overline{S}_3$  como subgrafo induzido.

**Teorema 5.6.** (GOLUBIC; GOSS, 1978) *Seja  $G$  um grafo bipartido. Então,  $G$  e  $\overline{G}$  são ambos bipartidos cordais se, e somente se, os grafos  $C_6$ ,  $3K_2$  e  $C_8$  não ocorrem como subgrafos induzidos em  $G$ .*

Pelo Teorema 5.3 sabemos que se  $G$  é split fortemente cordal, então  $B[Q, S]$  é um grafo bipartido cordal. Todo grafo split-fortemente cordal de nosso interesse contém um  $\overline{S}_3$  como

subgrafo induzido. Note que removendo as arestas da clique do subgrafo  $\overline{S_3}$  obtemos um grafo  $3K_2$ , que é um subgrafo induzido de  $B[Q, S]$ . Assim, deduzimos que os grafos  $G$  de interesse são aqueles em que  $G$  é fortemente-cordal, mas  $\overline{G}$  não o é. A Figura 40 apresenta o diagrama de Hasse das inclusões entre as classes envolvidas neste apêndice a classe de interesse está em destaque. Para mais detalhes sobre cada classe ver Golubic (2004).



**Teorema 5.7.** *Seja  $G$  um grafo split-fortemente cordal. Se  $G$  não é de intervalos nem de comparabilidade, então  $\overline{G}$  não é um grafo split-fortemente cordal.*

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo split-fortemente cordal que não é de intervalos nem de comparabilidade. Pela Proposição 5.4,  $B[Q, S]$  é um grafo bipartido cordal. Pelo Lema 5.5,  $G$  possui um grafo  $\overline{S_3}$  como subgrafo induzido. Logo,  $B[Q, S]$  possui um  $3K_2$  como subgrafo induzido. Assim, pelo Teorema 5.6, o grafo  $\overline{B[Q, S]}$  não é bipartido cordal. Como o complemento de um grafo split é também um grafo split, sabemos que  $\overline{G}$  é um grafo split, mas não é fortemente-cordal.  $\square$

Note que, pelo Teorema 5.7, para resolver o Problema da Classificação para a classe dos grafos split-fortemente cordais é suficiente considerar os grafos split-fortemente cordais cujo complemento não é fortemente-cordal.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, fizemos um estudo profundo da técnica de coloração de arestas de grafos split com grau máximo ímpar apresentada por Chen, Fu e Ko (1995). Como apontado por meio de contra-exemplos em Almeida (2012), os autores se equivocaram ao afirmar que todo prefixo crescente dos diagramas  $\mathcal{D}_L(q,k)$  e  $\mathcal{D}_L^r(q,k)$  é monotônico. Entretanto, o resultado final da prova não é afetado, pois é possível garantir que os diagramas necessários para a coloração são sempre monotônicos. Para isso, Almeida (2012) apresentou condições suficientes para tal fim. Para o diagrama  $\mathcal{D}_L(q,k)$ , a condição é todo vetor que contém o elemento da diagonal principal conservar o seu tamanho original. Neste trabalho, nós apresentamos uma nova prova para essa condição no Lema 3.19. Para diagrama  $\mathcal{D}_L^r(q,k)$  nós apresentamos uma nova condição que consiste em todo vetor que não possui elemento da diagonal principal ser vazio, como enunciado no Lema 3.20. As provas dos Lemas 3.19 e 3.20 independem da paridade do grau máximo do grafo. Assim, a partir desses lemas, conseguimos além de garantir que a técnica de coloração de Chen, Fu e Ko é sempre própria, estender os resultados para casos em que o grau máximo é par. Almeida (2012) havia observado que, quando existe um vértice  $u$  no conjunto independente com  $\lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor \leq d(u) \leq \frac{\Delta(G)}{2}$ , a técnica de Chen, Fu e Ko pode ser estendida. Nós generalizamos o resultado de Almeida (2012) para um subconjunto  $X \subseteq S$  com  $\lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor \leq |N(X)| \leq \frac{\Delta(G)}{2}$ , resultado enunciado no Lema 4.1.

Para os casos em que  $|N(X)| > \frac{\Delta(G)}{2}$  e todo  $u \in X$  possui  $d(u) < \lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor$ , nós definimos uma nova ordenação para os vértices do grafo, chamada ordenação balanceada na vizinhança de  $u_h$ , que nos permitiu provar que tais grafos são Classe 1. Com isso, obtivemos o Teorema 4.3, que é a principal contribuição deste trabalho.

Conhecendo pelo Teorema 4.3 novas propriedades dos grafos split que são Classe 1, nós caracterizamos os grafos split que são subgrafo-sobrecarregados, como apresentado no Teorema 4.7. Além disso, pelo Corolário 4.9, decidir se um grafo split  $G$  é subgrafo-sobrecarregado tem complexidade de tempo linear. Note que, se a Conjectura Overfull (Conjectura 2.3) for verdadeira para os grafos split, todos os grafos que não obedecem as condições do Teorema 4.7 são Classe 1. Caso contrário, apresentar um grafo  $G$  que obedece as condições deste teorema e que não possui uma coloração com  $\Delta(G)$  cores seria um contra-exemplo para essa importante conjectura.

Na Seção 4.3 apresentamos duas novas condições necessárias e suficientes para que um grafo split seja Classe 1 se, e somente se, não é subgrafo sobrecarregado. A primeira, enunciada no Teorema 4.10, é uma consequência do resultado do Teorema 4.3. A segunda, enunciada no Teorema 4.11, utiliza uma extensão da técnica de coloração de grafos com vértice universal apresentada por Plantholt (1981) aliada à caracterização de grafos split subgrafo-sobrecarregados do Teorema 4.7.

Considere que  $G = (Q \cup S, E(G))$  é um grafo split. Sem perda de generalidade, pelo Teorema 3.6, podemos considerar que  $v \in Q$  tem  $d(v) = \Delta(G)$ . Seja  $X$  o subconjunto de  $S$

cujos vértices possuem grau no máximo  $\frac{\Delta(G)}{2}$  e  $Y = S \setminus X$ . O Quadro 3 apresenta um resumo das contribuições desta dissertação e relaciona casos resolvidos e casos em aberto para grafos split.

**Quadro 3 – Relação entre casos resolvidos e em aberto na classe dos grafos split**

Caso	Problema da Classificação	Referência
$G$ possui vértice universal	Classe 1 se, e somente se, $G$ não é sobrecarregado	Plantholt (1981)
$\Delta(G)$ é ímpar	Classe 1	Chen, Fu e Ko (1995)
$\Delta(G)$ é par, subcasos:		
$ N(X)  \geq \lfloor \frac{ Q }{2} \rfloor$	Classe 1	Teorema 4.3
$ Y  < d(Q)$	Classe 1	Corolário 4.4
$ N(X)  < \lfloor \frac{ Q }{2} \rfloor$ e $ Y  > d(Q)$	*em aberto e $G$ não é subgrafo sobrecarregado*	Teorema 4.7
$ Y  = d(Q)$ e não existe $v \in Q$ tal que $Y \subset N(v)$	Classe 1	Corolário 4.5
$ Y  = d(Q)$ e existe $v \in Q$ tal que $Y \subset N(v)$ e $G[N[v]]$ é sobrecarregado	Classe 2	Teorema 4.7
$ Y  = d(Q)$ e existe $v \in Q$ tal que $Y \subset N(v)$ e $G[N[v]]$ não é sobrecarregado e $ E(G)  -  E(G[N[v]])  \leq \frac{\Delta(G)}{2}$	Classe 1 se, e somente se, $G$ não é sobrecarregado	Teorema 4.11
$ Y  = d(Q)$ e $ N(X)  < \lfloor \frac{ Q }{2} \rfloor$ e existe $v \in Q$ tal que $Y \subset N(v)$ e $G[N[v]]$ não é sobrecarregado e $ E(G)  -  E(G[N[v]])  > \frac{\Delta(G)}{2}$	*em aberto e $G$ não é subgrafo sobrecarregado*	Teorema 4.7

**Fonte: Autoria própria (2023).**

Por fim, também apresentamos propriedades dos grafos split-fortemente cordais a partir de sua caracterização por subgrafos proibidos. Provamos, no Teorema 5.7, que os grafos split-fortemente cordais que não são de comparabilidade, nem de intervalos são aqueles cujo complemento não é fortemente-cordal. Uma vez que o Problema da Classificação está resolvido para grafos split-comparabilidade e split-intervalos, o Teorema 5.7 explicita quais são os casos em aberto para grafos split-fortemente cordais. Como tais grafos possuem muitas propriedades estruturais, essa observação abre caminho para uma nova abordagem de investigação do Problema da Classificação.

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, S. M. **Coloração de Arestas em Grafos Split**. 2012. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação: Ciência da Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2012.
- ALMEIDA, S. M. de; MELLO, C. P. de; MORGANA, A. On the classification problem for split graphs. **Journal of the Brazilian Computer Society**, Springer, v. 18, n. 2, p. 95–101, 2011.
- BENDER, E. A.; RICHMOND, L. B.; WORMALD, N. C. Almost all chordal graphs split. **Journal of the Australian Mathematical Society. Series A. Pure Mathematics and Statistics**, Cambridge University Press, v. 38, n. 2, p. 214–221, 1985.
- CAI, L.; ELLIS, J. A. NP-completeness of edge-colouring some restricted graphs. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 30, n. 1, p. 15–27, 1991.
- CHANG, G. J.; NEMHAUSER, G. L. Covering, packing and generalized perfection. **SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods**, v. 6, n. 1, p. 109–132, 1985. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/0606012>.
- CHEN, B. L.; FU, H. L.; KO, M. T. Total chromatic number and chromatic index of split graphs. **Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing**, v. 3, n. 1, p. 137–146, 1995.
- CHETWYND, A. G.; HILTON, A. J. W. The chromatic index of graphs of even order with many edges. **Journal of Graph Theory**, v. 8, n. 4, p. 463–470, 1984. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/jgt.3190080403>.
- CHETWYND, A. G.; HILTON, A. J. W. Star multigraphs with three vertices of maximum degree. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, Cambridge University Press, v. 100, n. 2, p. 303–317, 1986.
- CORMEN, T. H. *et al.* **Introduction to algorithms**. 2. ed. [S.l.]: MIT Press, 2001.
- COSTA, D. A. F. da. **O Problema da Coloração de Arestas e Coloração Total para Grafos Split 2-Admissíveis**. 2022. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.
- CRUZ, J. B. de S. **Coloração de Arestas em Grafos Split-Comparabilidade**. 2017. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2017.
- DAHLHAUS, E. **Chordale Graphen im besonderen Hinblick auf parallele Algorithmen**. 1991. Tese (Doutorado) — University of Bonn, 1991.
- DIRAC, G. A. On rigid circuit graphs. **Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg**, v. 25, n. 1, p. 71–76, 1961.
- FARBER, M. Characterizations of strongly chordal graphs. **Discrete Mathematics**, v. 43, n. 2, p. 173–189, 1983. ISSN 0012-365X. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0012365X83901541>.

- FIGUEIREDO, C. M.; MEIDANIS, J.; MELLO, C. P. Total-chromatic number and chromatic index of dually chordal graphs. **Information Processing Letters**, v. 70, n. 3, p. 147–152, 1999. ISSN 0020-0190. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020019099000502>.
- FIGUEIREDO, C. M. de *et al.* Revising Johnson's table for the 21st century. **Discrete Applied Mathematics**, v. 323, p. 184–200, 2022. ISSN 0166-218X. LAGOS'19 - X Latin and American Algorithms, Graphs, and Optimization Symposium - Belo Horizonte, Minas Gerais, Brazil.
- FIGUEIREDO, C. M. H. de; MEIDANIS, J.; MELLO, C. P. de. Local conditions for edge-coloring. **Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing**, v. 32, p. 79–92, 2000.
- FOLDES, S.; HAMMER, P. L. Split Graphs. *In: Proc. 8th Southeastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing*. Louisiana State Univ., Baton Rouge, Louisiana: [s.n.], 1977. p. 311–315.
- FOLDES, S.; HAMMER, P. L. Split Graphs Having Dilworth Number Two. **Canadian Journal of Mathematics**, Cambridge University Press, v. 29, n. 3, p. 666–672, 1977.
- FOLKMAN, J.; FULKERSON, D. R. Edge colorings in bipartite graphs. **Combinatorial Mathematics and Its Applications**, University of North Carolina Press, p. 561–577, 1969.
- GOLUMBIC, M. C. **Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs**. [S.l.]: Elsevier, 2004.
- GOLUMBIC, M. C.; GOSS, C. F. Perfect Elimination and Chordal Bipartite Graphs. **Journal of Graph Theory**, v. 2, n. 2, p. 155–163, 1978.
- GONZAGA, L. G. S. **Coloração de Arestas em Grafos Split-Comparabilidade e Split-Intervalos**. 2021. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2021.
- HALL, P. On Representatives of Subsets. **Journal of the London Mathematical Society**, v. 1, n. 1, p. 26–30, 1935.
- HILTON, A. J. W.; JOHNSON, P. D. Graphs which are vertex-critical with respect to the edge-chromatic number. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, Cambridge University Press, v. 102, n. 2, p. 211–221, 1987.
- HOLYER, I. The NP-completeness of edge-coloring. **SIAM Journal on Computing**, SIAM, v. 10, n. 4, p. 718–720, 1981.
- JOHNSON, D. S. The NP-completeness column: an ongoing guide. **Journal of Algorithms**, v. 6, n. 3, p. 434–451, 1985. ISSN 0196-6774.
- KÖNIG, D. Über graphen und ihre anwendung auf determinantentheorie und mengenlehre. **Mathematische Annalen**, Springer, v. 77, n. 4, p. 453–465, 1916.
- PADBERG, M. W.; RAO, M. R. Odd minimum cut-sets and  $b$ -matchings. **Mathematics of Operations Research**, v. 7, n. 1, p. 67–80, 1982.
- PLANTHOLT, M. The chromatic index of graphs with a spanning star. **Journal of Graph Theory**, v. 5, n. 1, p. 45–53, 1981.
- PLANTHOLT, M. J.; SHAN, S. Edge coloring graphs with large minimum degree. **Journal of Graph Theory**, v. 102, p. 611–632, 2023. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/jgt.22889>.

SCHRIJVER, A. Bipartite Edge Coloring in  $O(\Delta m)$  Time. **SIAM Journal on Computing**, SIAM, v. 28, n. 3, p. 841–846, 1998.

TAN, N. D.; HUNG, L. X. On Colorings of Split Graphs. **Acta Mathematica Vietnamica**, v. 31, n. 3, p. 195–204, 2006.

VIZING, V. G. On an estimate of the chromatic class of a  $p$ -graph. **Discret Analiz**, v. 3, p. 25–30, 1964.

## ÍNDICE REMISSIVO

- aresta, 14
  - adjacente, 14
  - bisimplicial, 56
  - disjunta, 56
  - incidente, 14
  - laço, 14
  - múltipla, 14
- biclique, 56
- CFK-ordenação, 40
- ciclo, 52
- Classe 1, 15
- Classe 2, 15
- clique, 19
- coloração de arestas, 14
  - equilibrada, 24
  - própria, 14
  - índice cromático, 14
  - ótima, 15
- complemento, 18
- Condição de Hall, 22
- Conjectura Overfull, 18
- conjunto independente, 22
- corda, 52
  - ímpar, 53
- decomposição, 15
  - em emparelhamentos, 15
  - mínima, 16
- diagonal da coluna, 21
- diagonal da linha, 21
- diagrama de cores, 32
  - monotônico, 32
- distância, 31
- emparelhamento, 15
  - cobre, 22
  - perfeito, 22
- falta, 20
- grafo, 14
  - $k$ -regular, 22
  - $k$ -sol, 53
  - $t$ -admissível, 31
  - bipartido, 22
  - bipartido cordal, 55
  - casa, 14
  - completo, 19
  - conexo, 14
  - cordal, 18
  - fortemente cordal, 53
  - multigrafo, 22
  - simples, 14
  - split, 18
    - split-comparabilidade, 30
    - split-intervalos, 30
  - árvore, 31
    - geradora, 31
    - $t$ -geradora, 31
- grafo:saturado, 24
- gêmeos verdadeiros, 29
- livre, 30
- maximal, 26
- ordem de eliminação
  - ordem de eliminação aresta-perfeita, 56
  - ordem de eliminação forte, 53
  - ordem de eliminação perfeita, 52
  - ordem de eliminação simples, 52
- prefixo, 36
  - crescente, 36
- prefixo de um diagrama de cores, 36
- Problema da Classificação, 15
- Problema da Coloração de Arestas, 14

- propriedade hereditária, 52
- quadrado latino, 18
  - comutativo, 18
  - idempotente, 18
- sobrecarregado, 16
  - subgrafo-sobrecarregado, 17
  - vizinhança-sobrecarregado, 17
- subgrafo, 15
  - gerador, 31
  - induzido, 15
  - induzido pelas arestas, 15
  - induzido pelos vértices, 15
  - proibido, 30
- sufixo, 34
- sufixo de um diagrama de cores, 34
- técnica de Chen, Fu e Ko, 28
- vetor de cores
  - inverso, 36
- vizinhança
  - aberta, 17
  - fechada, 17
- vértice, 14
  - adjacente, 14
  - grau, 14
  - grau máximo, 14
  - pendente, 29
  - simples, 52
  - simplicial, 52
  - universal, 24
  - vizinho, 14