

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**

**MATHEUS GONÇALVES**

**COLORAÇÃO TOTAL EQUILIBRADA EM GRAFOS COM VÉRTICE  
UNIVERSAL**

**PONTA GROSSA**

**2022**

**MATHEUS GONÇALVES**

**COLORAÇÃO TOTAL EQUILIBRADA EM GRAFOS COM VÉRTICE  
UNIVERSAL**

**Equitable total coloring in graphs with universal vertex**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação do Curso de Bacharelado em Ciência da Computação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Sheila Morais de Almeida

**PONTA GROSSA**

**2022**



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

**MATHEUS GONÇALVES**

**COLORAÇÃO TOTAL EQUILIBRADA EM GRAFOS COM VÉRTICE  
UNIVERSAL**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação  
apresentado como requisito para obtenção do  
título de Bacharel em Ciência da Computação  
do Curso de Bacharelado em Ciência da  
Computação da Universidade Tecnológica  
Federal do Paraná.

Data de aprovação: 07/dezembro/2022

---

Dr<sup>a</sup>. Diana Sasaki  
Instituto de Matemática e Estatística  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

---

Dr. Leandro Miranda Zatesko  
Campus Curitiba  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Dr<sup>a</sup>. Sheila Morais de Almeida  
Campus Ponta Grossa  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

**PONTA GROSSA  
2022**

Dedico este trabalho à todos os meus familiares, pelos momentos de ausência.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a todos os meus familiares dos quais fiquei tão distante durante este tempo, de forma mais específica minha mãe Maria Lúcia Gonçalves com quem aprendi todos os valores que me guiam até aqui e minha irmã Sabrina Gonçalves por confiar e me dar todo o apoio que necessitei. A minha tia Célia Regina Gonçalves Lima e minha madrinha Maria Cecília Gonçalves Quaresma por todo incentivo e confiança que depositaram em mim.

Agradeço em especial a minha orientadora Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Sheila Moraes de Almeida, pela paciência e toda sabedoria com que me guiou nesta trajetória.

Não posso deixar de agradecer aqui a todos os meus amigos que me acompanharam, alguns desde o início da minha caminhada e outros que foram se juntando no decorrer desses anos, obrigado por todo apoio em todas as dificuldades que tive.

Este trabalho teve apoio do CNPq (edital universal 420079/2021-1, 428941/2016-8).

## RESUMO

Uma coloração total própria de um grafo é uma atribuição de cores para seus vértices e arestas de maneira que quaisquer dois elementos adjacentes ou incidentes tenham cores diferentes. Uma coloração total equilibrada é uma coloração total própria tal que quaisquer duas cores sejam utilizadas a mesma quantidade de vezes ou com uma diferença de no máximo um. O Problema da Coloração Total Equilibrada é, dado um grafo, determinar o índice cromático total equilibrado para esse grafo. Este trabalho apresenta uma técnica para coloração total equilibrada ótima dos grafos em que pelo menos metade dos vértices são universais. A técnica apresentada é baseada no conhecido resultado de A. Hilton apresentado em 1990, para a coloração total dos grafos com vértice universal. Outra contribuição é um contraexemplo para a demonstração de Fu (1994), que determinava o número cromático total equilibrado dos grafos com vértice universal.

**Palavras-chave:** teoria dos grafos; otimização combinatória; algoritmos computacionais.

## ABSTRACT

A proper total coloring of a graph is an assignment of colors to its vertices and edges such that any two adjacent or incident elements have distinct colors. An equitable total coloring is a proper total coloring such that any two colors are used the same amount of times or with a difference of at most one. The equitable Total Coloring Problem is, given a graph, to determine the equitable total chromatic number for that graph. This undergraduate thesis presents a technique for an optimal equitable total coloring of graphs with at least half of their vertices as universal vertices. The presented technique is based on a known result of A. Hilton presented in 1990 for the total coloring of graphs with universal vertices. Another contribution is a counterexample to the proof of Fu (1994) that determined the equitable total chromatic number of graphs with universal vertices.

**Keywords:** graph theory; combinatorial optimization; computational algorithms.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1 – Grafo com uma coloração total desequilibrada</b> . . . . .	9
<b>Figura 2 – Grafo com uma coloração total equilibrada</b> . . . . .	9
<b>Figura 3 – Contraexemplo para a prova de Fu (1994)</b> . . . . .	10
<b>Figura 4 – Grafo <math>G</math></b> . . . . .	15
<b>Figura 5 – Grafo após a inserção de arestas</b> . . . . .	15
<b>Figura 6 – Grafo <math>H^*</math></b> . . . . .	16
<b>Figura 7 – Grafo <math>H^{**}</math></b> . . . . .	16
<b>Figura 8 – Rotulação dos vértices do Grafo <math>H^{**}</math></b> . . . . .	16
<b>Figura 9 – Grafo <math>H^{**}</math> após a coloração das arestas do emparelhamento</b> . . . . .	17
<b>Figura 10 – Coloração das arestas incidentes em <math>v^{**}</math></b> . . . . .	17
<b>Figura 11 – Arestas do grafo <math>H_4^{**}</math> coloridas</b> . . . . .	18
<b>Figura 12 – Grafo <math>B</math> de <math>H_5^{**}</math></b> . . . . .	19
<b>Figura 13 – Grafo <math>H^{**}</math> após a coloração de <math>H_5^{**}</math></b> . . . . .	19
<b>Figura 14 – Grafo <math>B</math> de <math>H_6^{**}</math></b> . . . . .	19
<b>Figura 15 – Grafo <math>H^{**}</math> após a coloração de <math>H_6^{**}</math></b> . . . . .	19
<b>Figura 16 – Grafo <math>B</math> de <math>H_7^{**}</math></b> . . . . .	20
<b>Figura 17 – Grafo <math>H^{**}</math> após a coloração de <math>H_7^{**}</math></b> . . . . .	20
<b>Figura 18 – Grafo <math>B</math> de <math>H_8^{**}</math></b> . . . . .	20
<b>Figura 19 – Grafo <math>H^{**}</math> após a coloração de <math>H_8^{**}</math></b> . . . . .	20
<b>Figura 20 – Coloração dos vértices de <math>V(G) \setminus Y</math></b> . . . . .	20
<b>Figura 21 – Coloração dos vértices de <math>Y</math></b> . . . . .	21
<b>Figura 22 – Coloração total do grafo <math>G</math></b> . . . . .	21
<b>Figura 23 – Contraexemplo para a observação de Hilton (1990)</b> . . . . .	21
<b>Figura 24 – Grafo <math>G</math> original</b> . . . . .	26
<b>Figura 25 – Grafo <math>G_M</math> com as arestas falsas e as arestas de emparelhamento inseridas</b> . . . . .	27
<b>Figura 26 – Inserção dos vértices <math>v^*</math> e <math>v^{**}</math> ao Grafo</b> . . . . .	27
<b>Figura 27 – Coloração das arestas de <math>v^{**}</math></b> . . . . .	28
<b>Figura 28 – Construção do Bipartido <math>B_1</math></b> . . . . .	29
<b>Figura 29 – Coloração da primeira aresta falsa</b> . . . . .	29



<b>Figura 30 – Construção do Bipartido <math>B_2</math></b> . . . . .	<b>29</b>
<b>Figura 31 – Coloração da segunda aresta falsa</b> . . . . .	<b>30</b>
<b>Figura 32 – Grafo <math>H_z^{**}</math></b> . . . . .	<b>31</b>
<b>Figura 33 – Coloração do <math>H_z^{**}</math></b> . . . . .	<b>32</b>
<b>Figura 34 – Construção do bipartido <math>B</math> e seleção do emparelhamento de cor <math>\mu</math></b> . . . . .	<b>33</b>
<b>Figura 35 – Coloração do <math>H_{x+1}^{**}</math></b> . . . . .	<b>33</b>
<b>Figura 36 – Coloração final do <math>H_n^{**}</math></b> . . . . .	<b>33</b>
<b>Figura 37 – Remoção do <math>v^{**}</math></b> . . . . .	<b>34</b>
<b>Figura 38 – Remoção do <math>v^*</math></b> . . . . .	<b>34</b>
<b>Figura 39 – Remoção das arestas de emparelhamento</b> . . . . .	<b>35</b>
<b>Figura 40 – Grafo <math>G</math> colorido após a remoção das arestas falsas</b> . . . . .	<b>35</b>
<b>Figura 41 – Grafo com metade dos vértices universais</b> . . . . .	<b>36</b>
<b>Figura 42 – Grafo com mais da metade dos vértices universais</b> . . . . .	<b>36</b>
<b>Figura 43 – Grafo com menos da metade dos vértices universais</b> . . . . .	<b>36</b>

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>1.1</b>	<b>Estrutura do trabalho</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>CONCEITOS BÁSICOS E RESULTADOS ANTERIORES</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>2.1</b>	<b>Conceitos básicos</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>2.2</b>	<b>Resultados anteriores</b> . . . . .	<b>22</b>
2.2.1	Resultados de Hung-Lin Fu . . . . .	22
2.2.2	Resultados de Omai, Almeida e Sasaki . . . . .	23
<b>3</b>	<b>RESULTADOS</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>38</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>40</b>
	<b>ÍNDICE REMISSIVO</b> . . . . .	<b>42</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Sejam  $G = (V(G), E(G))$  um grafo simples<sup>1</sup> e  $S \subseteq V(G) \cup E(G)$  um subconjunto dos elementos de  $G$ . Uma  $k$ -coloração  $\phi : S \rightarrow \{0, 1, \dots, k - 1\}$  é uma atribuição de cores para os elementos de  $S$ . Quando  $S = V(G)$ , a função  $\phi$  é uma *coloração de vértices* de  $G$ . Quando  $S = E(G)$ , a função  $\phi$  é uma *coloração de arestas* de  $G$ . Quando  $S = V(G) \cup E(G)$ , a função  $\phi$  é uma *coloração total* de  $G$ .

Considere um grafo  $G$ , um subconjunto  $S \subseteq V(G) \cup E(G)$  e uma coloração  $\phi : S \rightarrow \{0, 1, \dots, k - 1\}$ . A coloração  $\phi$  é *própria* se as cores de elementos adjacentes ou incidentes são diferentes. Neste trabalho todas as colorações são próprias e, portanto, esse termo será omitido. Seja  $C_i$  o conjunto dos elementos de  $S$  coloridos com a cor  $i$ ,  $0 \leq i < k$ . O conjunto  $C_i$  é a *classe de cor  $i$*  e sua cardinalidade será denotada por  $|C_i|$ . A coloração  $\phi$  é *equilibrada* se, para quaisquer duas classes de cor  $C_i$  e  $C_j$ , tem-se  $|C_i - C_j| \leq 1$ .

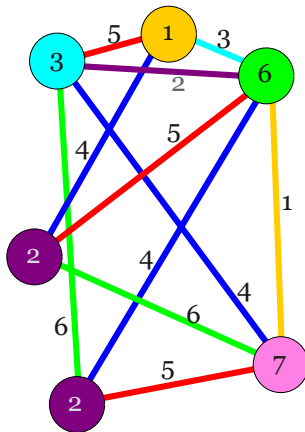


Figura 1 – Grafo com uma coloração total desequilibrada

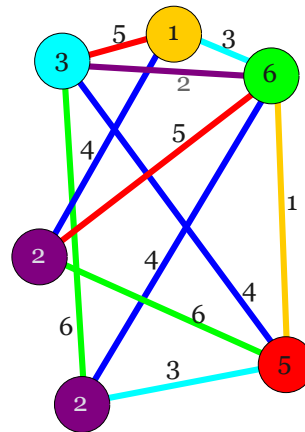


Figura 2 – Grafo com uma coloração total equilibrada

O menor número de cores para uma coloração total equilibrada de um grafo  $G$  é chamado de *número cromático total equilibrado*, denotado por  $\chi_e''(G)$ . O *Problema da Coloração Total Equilibrada* é, dado um grafo  $G$ , determinar  $\chi_e''(G)$ .

Hajnal e Szemerédi (1970) provaram que todo grafo  $G$  tem uma coloração de vértices equilibrada com  $k + 1$  cores, para qualquer  $k \geq \Delta(G)$ . Folkman e Fulkerson (1966) e Werra (1971) provaram que se um grafo  $G$  tem uma coloração de arestas com  $k$  cores, então  $G$  tem uma coloração de arestas equilibrada com  $k$  cores.

O menor número de cores para a coloração total de um dado grafo  $G$  é chamado de *número cromático total* de  $G$  e é denotado por  $\chi''(G)$ . Por definição, sabe-se que  $\chi''(G) \geq \Delta(G) + 1$ . Behzad (1965) conjecturou que, para qualquer grafo simples  $G$ , tem-se  $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$ . Esta famosa conjectura é conhecida como *Conjectura da Coloração Total* (TCC, do inglês, *Total Coloring Conjecture*). Se a TCC for verdadeira, os grafos simples podem ser classificados, de

<sup>1</sup> Os conceitos básicos da Teoria dos Grafos utilizados neste documento estão definidos no livro de Bondy, Murty *et al.* (1976).

acordo com o seu número cromático total, em dois conjuntos: se  $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$ , então  $G$  é Tipo 1; se  $\chi''(G) = \Delta(G) + 2$ , então  $G$  é Tipo 2. Em relação à coloração total, Fu (1994) apresentou um exemplo de grafo 6-regular é Tipo 1 e que não tem uma coloração total equilibrada com 7 cores. Além disso, Pereira (2013) mostrou uma família infinita de grafos que são tipo 1 e que não têm uma coloração total equilibrada com  $\Delta(G) + 1$  cores. Considerando a possibilidade de a TCC ser falsa, Fu (1994) apresentou a seguinte conjectura.

**Conjectura 1.1.** (FU, 1994) *Para cada grafo  $G$ , existe uma coloração total equilibrada usando  $k$  cores, para cada  $k \geq \max \{\chi''(G), \Delta(G) + 2\}$ .*

De acordo com Lih (1998), a Conjectura 1.1 está provada para todo grafo  $G$  com  $\Delta(G) = n - 2$ , onde  $n$  é a cardinalidade do conjunto de vértices, e para grafos  $t$ -partidos completos de ordem ímpar. Esta conjectura também foi investigada por Gonçalves, Dantas e Sasaki (2021) para subconjuntos de snarks, e por Silva, Dantas e Sasaki (2019) para subconjuntos de grafos multipartidos completos balanceados.

Um *vértice universal* é um vértice adjacente a todos os outros vértices do grafo. Fu (1994) apresentou uma prova de que qualquer grafo  $G$  com vértice universal tem uma coloração total equilibrada com  $k$  cores, para qualquer  $k \geq \chi''(G)$ . Neste trabalho refutamos esta prova baseados no seguinte argumento.

Para provar que um grafo  $G$  com vértice universal tem uma coloração total equilibrada com  $k$  cores, para qualquer  $k \geq \chi''(G)$ , Fu (1994) constrói um grafo  $G^*$  a partir de  $G$ , adicionando um novo vértice  $v^*$  adjacente a todos os vértices de  $G$  e afirma que se  $G$  tem uma coloração total com  $\Delta(G) + 1$  cores, então  $G^*$  tem uma coloração de arestas com  $\Delta(G^*)$  cores. Na Figura 3, apresentamos um contraexemplo para esta afirmação. Note que  $G$  é Tipo 1, mas  $G^*$  tem mais arestas do que se pode colorir com  $\Delta(G^*)$  cores (o que é conhecido na literatura como grafo sobrecarregado).

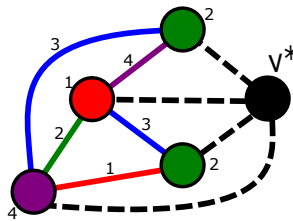


Figura 3 – Contraexemplo para a prova de Fu (1994)

Considerando que a prova Fu (1994) está incorreta, nos questionamos inclusive se o enunciado deste resultado é válido. Baseado em seu resultado, Fu (1994) afirma que todo grafo  $G$  com vértice universal tem uma  $k$ -coloração total equilibrada para cada  $k \geq \chi''(G)$ . A refutação que apresentamos coloca em dúvida se é verdade que todo grafo  $G$  com vértice universal tem uma  $\chi''(G)$ -coloração total equilibrada.

Neste trabalho, além de refutar a prova de Fu (1994), provamos que todo grafo em que pelo menos metade dos vértices são universais tem  $\chi_e''(G) = \chi''(G)$ . Também mostramos que

se  $G$  é um grafo com vértice universal Tipo 2, então  $\chi_e''(G) = \chi''(G)$ . Apresentamos ainda um contraexemplo para uma afirmação feita por Hilton (1990) quando determinou o número cromático total dos grafos com vértice universal. Até onde vai nosso conhecimento, essa afirmação falsa de Hilton (1990) não invalida sua prova e, conseqüentemente, não invalida seus resultados. Por fim, garantimos que a afirmação de Fu (1994) de que todo grafo  $G$  com vértice universal tem uma  $k$ -coloração total equilibrada para cada  $k \geq \chi_e''(G)$  é verdadeira.

## 1.1 Estrutura do trabalho

No Capítulo 2 são apresentados os fundamentos da Teoria dos Grafos necessários para a compreensão deste Trabalho de Conclusão de Curso. No Capítulo 3 são apresentadas algumas propriedades sobre a estrutura dos grafos  $G$  que são Tipo 1 e que satisfazem  $G + v$  é sobrecarregado, onde  $G + v$  é o grafo obtido ao adicionar um novo vértice  $v$  ao grafo  $G$  que seja adjacente a todos os outros vértices de  $G$ . Note que o grafo que foi utilizado para refutar a afirmação de Fu (1994) é um exemplo deste caso. A partir de propriedades destes grafos e com base na técnica de Coloração Total apresentada por Hilton (1990) para grafos com vértice universal, mostramos que grafos em que mais da metade dos vértices são universais têm uma coloração total equilibrada com  $\chi''(G)$  cores. Além disso, mostramos que grafos com vértice universal que são Tipo 2 tem  $\chi_e''(G) = \chi''(G)$ . Também retomamos uma discussão de Fu (1994) e garantimos que todo grafo com vértice universal tem uma coloração total equilibrada com  $k$  cores, para qualquer  $k \geq \chi_e''(G)$ . No Capítulo 4 são apresentadas as conclusões deste trabalho e sugeridos alguns tópicos para pesquisas futuras em continuidade ao que foi desenvolvido.

## 2 CONCEITOS BÁSICOS E RESULTADOS ANTERIORES

### 2.1 Conceitos básicos

Considere um grafo  $G = (V(G), E(G))$ , onde  $V(G)$  é um conjunto de vértices e  $E(G)$  é um multiconjunto de arestas. A *ordem* de um grafo  $G$  é o número de vértices de  $G$ . Um *laço* é uma aresta de  $G$  com os dois extremos no mesmo vértice. Um multiconjunto de *arestas múltiplas (ou paralelas)* é um multiconjunto de arestas que incidem no mesmo par de vértices. Um grafo é *simples* se não contém laços, nem arestas múltiplas. Um grafo que tenha laços e/ou arestas múltiplas é também chamado de *multigrafo*.

Uma *partição* de um conjunto  $S$  em duas partes  $[A, B]$  é uma distribuição dos elementos de  $S$  em subconjuntos  $A \subset S$  e  $B \subset S$  tais que  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \neq \emptyset$  e  $B \neq \emptyset$ . Um grafo  $G$  é *conexo* se e somente se, para qualquer partição de  $V(G)$  em duas partes  $[A, B]$ , existe uma aresta entre  $A$  e  $B$ . Neste trabalho, todos os grafos são conexos.

Dados dois grafos  $G$  e  $H$ , o grafo resultante da operação de *junção*  $G + H$  é o grafo com conjunto de vértices  $V(G) \cup V(H)$  e conjunto de arestas  $E(G) \cup E(H) \cup \{(u, v) : u \in V(G) \text{ e } v \in V(H)\}$ . Um *grafo completo* com  $n$  vértices, denotado por  $K_n$  é um grafo em que quaisquer dois vértices são adjacentes.

Dado um grafo  $G = (V(G), E(G))$ , um *subgrafo* de  $G$  é um grafo  $H(V(H), E(H))$  tal que  $V(H) \subseteq V(G)$ ,  $E(H) \subseteq E(G)$  e se  $(u, v) \in E(H)$ , então  $\{u, v\} \subseteq V(H)$ . Dado um grafo  $G$  e um subconjunto  $U \subseteq V(G)$ , o *subgrafo de  $G$  induzido por  $U$* , denotado por  $G[U]$ , é o grafo com conjunto de vértices  $U$  e tal que  $(u, v) \in G[U]$  se e somente se  $\{u, v\} \subseteq U$  e  $(u, v) \in E(G)$ . O *complemento* de um grafo  $G(V(G), E(G))$  é o grafo  $\bar{G}$  com conjunto de vértices igual a  $V(G)$  e com conjunto de arestas  $\{(u, v) : (u, v) \notin E(G)\}$ .

Um *emparelhamento* em um grafo  $G$  é um subconjunto de arestas de  $G$  que não compartilham vértices. Um *emparelhamento máximo* em um grafo  $G$  é o maior emparelhamento de  $G$ , ou seja, aquele que tem maior número de arestas. O tamanho de um emparelhamento máximo de  $G$  é denotado por  $\alpha'(G)$ . Observe que, dada uma coloração de arestas de um grafo  $G$ , cada classe de cor é um emparelhamento em  $G$ . Quando uma aresta de um emparelhamento  $M$  incide em um vértice  $v$ , dizemos que  $v$  *está coberto por  $M$* .

O menor número de cores para uma coloração de arestas (própria) de um dado grafo  $G$  é chamado de *índice cromático* de  $G$  e é denotado por  $\chi'(G)$ . Como, em uma coloração de arestas própria, todas as arestas que incidem em um mesmo vértice devem ter cores diferentes, o índice cromático é pelo menos tão grande quanto o maior número de arestas incidentes em um mesmo vértice de  $G$ . O número de arestas que incidem em um vértice  $v$  é chamado de *grau* de  $v$  e denotado por  $d(v)$ . O maior dos graus dos vértices de um grafo  $G$  é chamado de *grau máximo* de  $G$  e denotado por  $\Delta(G)$ . Então, por estas definições,  $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ . Vizing (1964) apresentou um limitante superior para o índice cromático de qualquer grafo simples.

**Teorema 2.1.** (VIZING, 1964) *Se  $G$  é um grafo simples, então  $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ .*

□

Com o Teorema 2.1, impôs-se uma forte restrição aos possíveis valores do índice cromático de um grafo simples:  $\chi'(G) \in \{\Delta(G), \Delta(G) + 1\}$ . Apesar disso, decidir se  $\chi'(G) = \Delta(G)$  para um grafo simples qualquer é um problema NP-completo (HOLYER, 1981). Dado um grafo simples  $G$ , se  $\chi'(G) = \Delta(G)$ , então  $G$  é *Classe 1*; senão,  $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$  e  $G$  é *Classe 2*. Note que a validade da Conjectura da Coloração Total seria um resultado análogo ao Teorema 2.1 para a coloração total. Para algumas classes de grafos existe algoritmo polinomial que determina o índice cromático do grafo, como para os grafos sobrecarregados e os grafos com vértice universal (PLANTHOLT, 1981). Um grafo  $G = (V(G), E(G))$  é *sobrecarregado* se e somente se  $|E(G)| > \Delta(G) \lfloor \frac{|V(G)|}{2} \rfloor$ . Nestes casos,  $G$  tem mais arestas do que se pode colorir com  $\Delta(G)$  cores. Então, todo grafo sobrecarregado é *Classe 2*. Plantholt (1981) estabeleceu uma relação entre as classes dos grafos com vértice universal e os grafos sobrecarregados, como mostra o Teorema 2.2.

**Teorema 2.2.** (PLANTHOLT, 1981) *Seja  $G$  um grafo simples com vértice universal. O grafo  $G$  é Classe 1 se, e somente se,  $G$  não é sobrecarregado.*

□

A prova de Plantholt (1981) permite a construção de um algoritmo polinomial que apresenta uma coloração de arestas ótima (i.e., com o mínimo de cores) para os grafos com vértice universal.

Um vértice com grau igual a  $k$  é também chamado de  *$k$ -vértice*. Um grafo em que todos os vértices têm grau igual a  $k$  é um grafo  *$k$ -regular*. Um *conjunto independente* de  $G$  é um subconjunto  $S$  de vértices de  $G$  tal que quaisquer dois vértices de  $S$  não são adjacentes em  $G$ .

Um grafo  $G$  é *bipartido* se seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos  $X$  e  $Y$ , tal que cada aresta de  $G$  têm um vértice de  $X$  e um vértice de  $Y$ . A partição  $[X, Y]$  é chamada de *bipartição* do grafo  $G$ . O índice cromático dos grafos bipartidos é conhecido, como mostra o Teorema 2.3, e existe algoritmo polinomial para se obter uma coloração de arestas ótima para grafos bipartidos.

**Teorema 2.3.** (KÖNIG, 1916) *Se  $G$  é um grafo bipartido, então  $G$  é Classe 1.*

□

Observe que, dado um grafo  $G$  com uma coloração de arestas utilizando  $\chi'(G)$  cores, qualquer classe de cor é um emparelhamento que cobre todos os vértices com grau  $\Delta(G)$ .

Hall (1935) apresentou uma condição necessária e suficiente para que exista um emparelhamento que cubra uma das partes de uma bipartição de um grafo bipartido, como mostra o Teorema 2.4.

**Teorema 2.4.** (HALL, 1935) *Seja  $G$  um grafo bipartido com bipartição  $[X, Y]$ . Então  $G$  contém um emparelhamento que cobre os vértices de  $X$  se e somente se  $|N(S)| \geq |S|$  para todo  $S \subseteq X$ .*

□

O menor número de cores para uma coloração de arestas equilibrada em um grafo  $G$  é chamado de *índice cromático equilibrado* e denotado por  $\chi'_e(G)$ . Como mostra o Teorema 2.5, é conhecido que  $\chi'_e(G) = \chi'(G)$ , para todo grafo  $G$ .

**Teorema 2.5.** (FOLKMAN; FULKERSON, 1966; WERRA, 1971) *Se existe uma coloração de arestas de um grafo  $G$  utilizando  $k$  cores, então  $G$  tem uma coloração de arestas equilibrada utilizando  $k$  cores.*

□

Como já visto na Introdução, não se conhece um resultado equivalente ao do Teorema 2.5 para a coloração total.

McDiarmid e Sánchez-Arroyo (1994) mostraram que decidir se um grafo é Tipo 1 é um problema NP-completo, mesmo se restrito aos grafo bipartidos 3- regulares. Mesmo assim, há classes de grafos para as quais existe algoritmo polinomial que determina o número cromático total. No caso dos grafos completos  $K_n$  com  $n$  ímpar, existe uma coloração total com  $\Delta(K_n) + 1$  cores, como mostra o Teorema 2.6.

**Teorema 2.6.** (Folclore) *Seja  $K_n$  um grafo completo. Se  $n$  é ímpar, então  $K_n$  é Tipo 1.*

*Demonstração.* Considere os vértices do grafo  $K_n$  rotulados  $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ . Atribua para cada aresta  $(v_i, v_j)$  a cor  $(i + j) \bmod n$  e atribua para cada vértice  $v_i$  a cor  $(2i) \bmod n$ . □

Hilton (1990) apresentou o número cromático total dos grafos com vértice universal, em um artigo que ele intitulou como "A total chromatic number analogue of Plantholt's Theorem", como enunciado no Teorema 2.7. A técnica usada por Hilton (1990) para a prova do Teorema 2.7 merece destaque neste trabalho de conclusão de curso, pois é uma adaptação desta técnica que nos permite determinar o número cromático total equilibrado dos grafos  $G$  com vértice universal em alguns casos em que  $G$  é Tipo 1 e  $G + K_1$  é Classe 2. A seguir, são apresentadas as ideias principais da prova do Teorema 2.7.

**Teorema 2.7.** (HILTON, 1990) *Seja  $G$  um grafo com vértice universal. O grafo  $G$  é Tipo 2 se e somente se  $|V(G)|$  é par e  $|E(\overline{G})| + \alpha'(\overline{G}) < \frac{|V(G)|}{2}$ . Nos outros casos,  $G$  é Tipo 1.*

*Demonstração (esboço) da suficiência para o caso em que  $G$  é Tipo 1:* Se  $G$  têm ordem ímpar, então  $G$  é subgrafo do grafo  $K_n$ , com  $n = |V(G)|$ . Como  $G$  tem vértice universal,  $\Delta(G) = \Delta(K_n) = n - 1$ . Então rotule os vértices de  $G$  de  $v_0$  até  $v_{n-1}$ , atribua a cor  $(i + j) \bmod n$  para cada aresta  $(v_i, v_j)$ , e atribua a cor  $(2i) \bmod n$  para cada vértice  $v_i$ . Note que esta é a técnica de coloração total usada nos grafos completos de ordem ímpar. Como  $G$  é



subgrafo do  $K_n$ , esta técnica resulta em uma coloração total ótima de  $G$  usando  $n = \Delta(G) + 1$  cores. Portanto,  $G$  é Tipo 1.

Então, seja  $|V(G)| = n$  par;  $E(\overline{G})$  o conjunto de arestas do complemento de  $G$ ; e  $\alpha'(\overline{G})$  o tamanho de um emparelhamento máximo no complemento de  $G$ . Considere que  $|E(\overline{G})| + \alpha'(\overline{G}) \geq \frac{n}{2}$ . Construa um grafo  $G_+$ , a partir de  $G$ , inserindo arestas em  $G$  até que  $|E(\overline{G_+})| + \alpha'(\overline{G_+}) \in \{\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1\}$ . Se o grafo  $G_+$  têm uma coloração total com  $\Delta(G) + 1$  cores, então  $G$  também tem uma coloração total com  $\Delta(G) + 1$  cores (é suficiente remover do grafo  $G_+$  colorido as arestas que não existem em  $G$  para obter uma coloração total para  $G$ ).

Como exemplo, vamos apresentar uma coloração total para o grafo  $G$  da Figura 4. Observe que, para este exemplo,  $\frac{n}{2} = 4$ . Então, vamos adicionar arestas a  $G$  até que  $|E(\overline{G_+})| + \alpha'(\overline{G_+}) = 4$ .

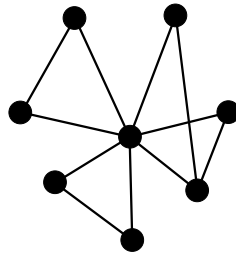


Figura 4 – Grafo  $G$

A Figura 5, em que as arestas mais grossas representam as arestas falsas inseridas e as arestas tracejadas representam as arestas de emparelhamento, mostra o grafo  $G_+$ , obtido a partir do grafo  $G$  da Figura 4 pela inserção de arestas para satisfazer a igualdade  $|E(\overline{G_+})| + \alpha'(\overline{G_+}) = 4$ . Observe que, neste exemplo, após a inserção das arestas, tem-se:  $|E(\overline{G_+})| = \alpha'(\overline{G_+}) = 2$ .

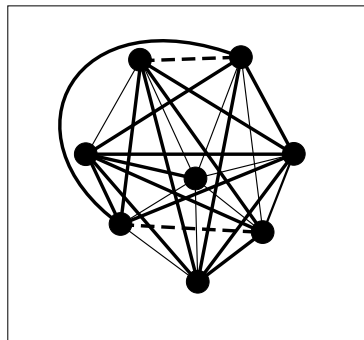
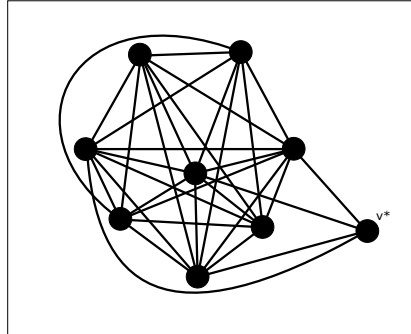


Figura 5 – Grafo após a inserção de arestas

Seja  $M$  um emparelhamento máximo em  $\overline{G_+}$  e  $Y$  o subconjunto dos vértices de  $G_+$  que não são vértices universais em  $G_+$ . Note que as arestas de  $M$  incidem em um subconjunto de vértices de  $Y$ . É possível que  $Y$  seja exatamente o conjunto de vértices cobertos por  $M$  (veja a Figura 5). Vamos denotar  $|Y| = y$ . Para esse exemplo,  $y = 4$  e  $\alpha'(\overline{G_+}) = 2$ .

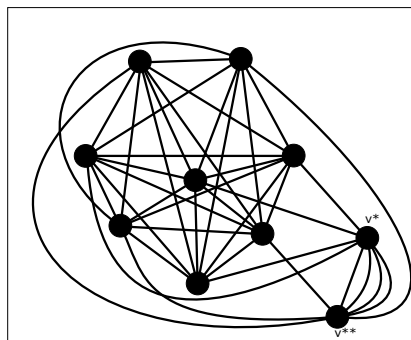
Construa um grafo  $H^*$ , adicionando a  $G_+$  todas as arestas de  $M$  e adicionando um novo vértice  $v^*$  adjacente a todos os vértices de  $G_+$  que não estão cobertos por  $M$ . Veja, na Figura 6, o grafo  $H^*$  construído para o exemplo da Figura 5.



**Figura 6 – Grafo  $H^*$**

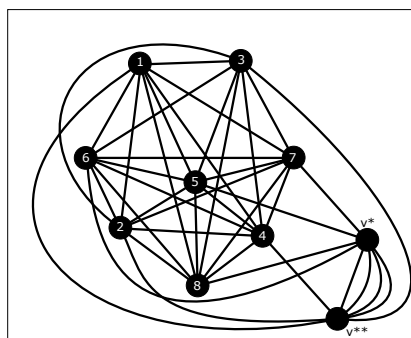
Vamos construir um multigrafo  $n$ -regular  $H^{**}$  a partir de  $H^*$ . Essa construção depende do valor de  $|E(\overline{G_+})| + \alpha'(\overline{G_+})$ .

Primeiro, suponha que  $|E(\overline{G_+})| + \alpha'(\overline{G_+}) = \frac{n}{2}$ . Construa  $H^{**}$  a partir de  $H^*$ , adicionando um novo vértice  $v^{**}$  e adicionando  $n - d(v)$  arestas entre  $v^{**}$  e cada vértice  $v \in V(H^*)$ . A Figura 7 mostra o grafo  $H^{**}$  construído a partir do grafo da Figura 6.



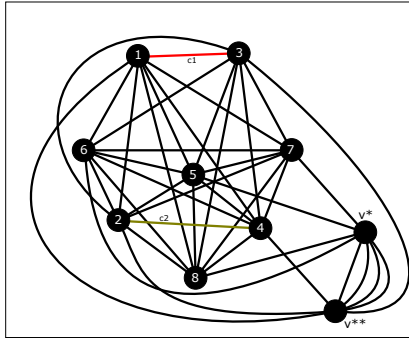
**Figura 7 – Grafo  $H^{**}$**

Rotule os vértices de  $H^{**}$  tal que os vértices de  $Y$  sejam os primeiros, iniciando em  $v_1$  até  $v_y$ , de forma que as arestas de  $M$  sejam  $(v_i, v_{|M|+i})$ , para  $1 \leq i \leq \alpha'(\overline{G_+}) = |M|$ ; e os vértices de  $V(G_+) \setminus Y$  sejam  $v_{y+1}, v_{y+2}$  até  $v_n$ . A Figura 8 ilustra a rotulação dos vértices do grafo  $H^{**}$  do exemplo.



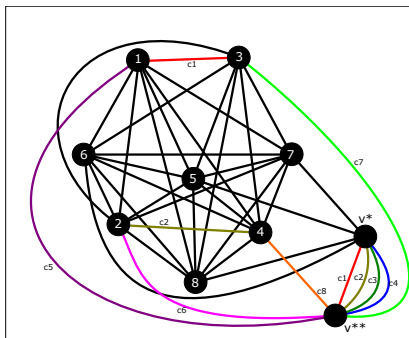
**Figura 8 – Rotulação dos vértices do Grafo  $H^{**}$**

Atribua a cor  $c_i$  para a aresta  $(v_i, v_{\alpha'(\overline{G_+})+i})$ , para todo  $i$  tal que  $1 \leq i \leq \alpha'(\overline{G_+})$ . A Figura 9 apresenta o grafo  $H^{**}$  com as arestas de  $M$  coloridas.



**Figura 9 – Grafo  $H^{**}$  após a coloração das arestas do emparelhamento**

Atribua as cores  $c_1, c_2, \dots, c_{2\alpha'(\overline{G_+})}$  para as  $2\alpha'(\overline{G_+})$  arestas paralelas  $(v^*, v^{**})$ . Atribua as cores  $c_{2\alpha'(\overline{G_+})+1}, c_{2\alpha'(\overline{G_+})+2}, \dots, c_n$  para as arestas ainda não coloridas incidentes em  $v^{**}$ . A Figura 10 mostra um exemplo de coloração para as arestas incidentes em  $v^{**}$ .



**Figura 10 – Coloração das arestas incidentes em  $v^{**}$**

Para todo  $x$  tal que  $y \leq x \leq n$ , o grafo  $H_x^{**}$  é o subgrafo de  $H^{**}$  induzido pelo conjunto de vértices  $\{v^*, v^{**}, v_1, \dots, v_x\}$ . Hilton (1990) prova que é possível colorir as arestas que restam de  $H_y^{**}$  de forma gulosa. Considere uma aresta  $e^*$  do grafo  $H_y^{**}$  ainda sem cor. Então, no máximo  $y - 1$  cores foram usadas nas arestas incidentes em cada extremo de  $e^*$  e isto implica que no máximo  $2(y - 1)$  cores diferentes foram usadas no conjunto de arestas que incidem nos dois extremos de  $e^*$ . Como  $|E(\overline{G_+})| + \alpha'(\overline{G_+}) = \frac{n}{2}$ , o grafo  $\overline{G_+}$  contém um emparelhamento  $M$  com  $\alpha'(\overline{G_+})$  arestas que incidem em  $2\alpha'(\overline{G_+})$  vértices e mais  $|E(\overline{G_+})| - \alpha'(\overline{G_+}) = \frac{n}{2} - 2\alpha'(\overline{G_+})$  arestas, cada uma das quais é incidente a pelo menos um dos vértices cobertos por  $M$  (caso contrário,  $M$  não seria máximo). Então, o número de vértices que não são universais em  $\overline{G_+}$  (denotado por  $y$ ) é no máximo  $2\alpha'(\overline{G_+}) + \frac{n}{2} - 2\alpha'(\overline{G_+}) = \frac{n}{2}$ . Ou seja,  $y \leq \frac{n}{2}$ . Conclui-se que no máximo  $2(y - 1) \leq n - 2$  cores foram usadas nas arestas incidentes nos extremos de  $e^*$ . Então, há uma cor disponível para colorir  $e^*$ . A Figura 11 mostra o grafo  $H^{**}$  com as arestas de  $H_4^{**}$  coloridas.

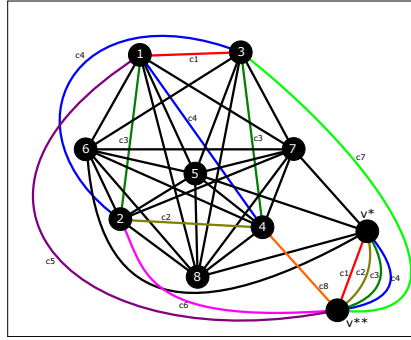


Figura 11 – Arestas do grafo  $H_4^{**}$  coloridas

Agora, considere que  $|E(\overline{G_+})| + \alpha'(\overline{G_+}) = \frac{n}{2} + 1$ . Neste caso, a construção de  $H^{**}$  é como no caso anterior, com a exceção de que não se adiciona aresta entre  $v^{**}$  e  $v_1$  e entre  $v^{**}$  e  $v_{1+\alpha'(\overline{G_+})}$ , em vez disso, adiciona-se mais uma aresta entre  $v_1$  e  $v_{1+\alpha'(\overline{G_+})}$ . Hilton (1990) afirma que, quando  $|E(\overline{G_+})| + \alpha'(\overline{G_+}) = \frac{n}{2} + 1$ , tem-se  $\frac{n}{2}$  ímpar,  $E(\overline{G_+}) = M$  e  $|M| = \alpha'(\overline{G_+}) = \frac{n+2}{4}$ . Neste caso,  $y = \frac{n}{2} + 1$  e o argumento anterior que garante a coloração de arestas de  $H_y^{**}$  não funciona (relembre que, no caso anterior,  $y \leq \frac{n}{2}$ ). Mas  $H_y^{**}$  contém um emparelhamento  $F$  que cobre todos os vértices de  $H_y^{**}$ , não contém nenhuma aresta de  $M$ , e inclui uma das arestas  $(v^*, v^{**})$ . Atribua a cor  $c_{2\alpha'(\overline{G_+})}$  para as arestas de  $F$ . E restante da coloração das arestas de  $H_y^{**}$  é como no caso anterior. Desta vez, existem no máximo  $2(y - 1) - 1 = n - 1 < n$  cores usadas nas arestas incidentes nos vértices de  $e^*$ . Então, existe uma cor disponível para colorir  $e^*$ .

Hilton (1990) prova por indução que, dado o grafo  $H_x^{**}$  com arestas coloridas, é possível estender esta coloração para as arestas de  $H_{x+1}^{**}$ , desde que cada cor seja usada em pelo menos  $x - \frac{n}{2} + 1$  arestas de  $H_x^{**}$ . Para a base da indução, considera-se o grafo  $H_y^{**}$ . Suponha que  $|E(\overline{G_+})| + \alpha'(\overline{G_+}) = \frac{n}{2}$ . Neste caso, como dito anteriormente,  $y \leq \frac{n}{2}$ . Então, é suficiente garantir que cada cor é usada em pelo menos uma aresta de  $H_y^{**}$ . Esta condição é satisfeita, pois existe uma aresta com cada cor incidente em  $v^{**}$ . Suponha que  $|E(\overline{G_+})| + \alpha'(\overline{G_+}) = \frac{n}{2} + 1$ . Neste caso, como visto anteriormente,  $y = \frac{n}{2} + 1$ . Então, é suficiente garantir que cada cor é usada em pelo menos duas arestas de  $H_y^{**}$ . Como cada cor é usada em uma aresta incidente em  $v^{**}$ , basta garantir que existe uma aresta com cada cor no subgrafo  $H_y^{**} - v^{**}$ . Hilton (1990) afirma que se, para alguma cor  $c$ , não exista aresta com cor  $c$  em  $H_y^{**} - v^{**}$ , pode-se trocar a cor de uma aresta  $e_1$  colorida com  $c'$  tal que  $c'$  ocorre pelo menos duas vezes em  $H_y^{**} - v^{**}$  e  $e_1$  não incide em  $v^{**}$ , pela cor  $c$ . Segundo Hilton (1990),  $e_1$  existe e é possível repetir este processo sempre que necessário. Assim, quando  $|E(\overline{G_+})| + \alpha'(\overline{G_+}) = \frac{n}{2} + 1$ , a base da indução também está provada. Resta garantir que, se  $H_x^{**}$  tem uma coloração de arestas tal que cada cor é usada em pelo menos  $x - \frac{n}{2} + 1$  arestas, então é possível estender esta coloração de arestas para  $H_{x+1}^{**}$  com a propriedade de cada cor é usada em pelo menos  $x + 1 - \frac{n}{2} + 1$  arestas.

Para isso, é necessário construir um grafo bipartido  $B$  da seguinte forma. Os vértices de  $B$  são  $\{v^*, v'_1, \dots, v'_x\}$  e  $\{c'_1, \dots, c'_n\}$ , um vértice  $v'$  é adjacente a um vértice  $c'$  em  $B$  se em  $H_x^{**}$  a cor correspondente a  $c'$  não foi atribuída a nenhuma aresta incidente no vértice correspondente

a  $v'$ . Cada vértice do  $H_x^{**}$  (exceto  $v^{**}$ ) tem grau  $x$ , então em  $B$  cada vértice  $v'$  tem grau  $n - x$ . Considere uma cor  $c$  e seu vértice correspondente  $c'$ . Por hipótese de indução, a cor  $c$  é usada em pelo menos  $x - \frac{n}{2} + 1$  arestas de  $H_x^{**}$ . Então, existem no mínimo  $2(x - \frac{n}{2} + 1)$  vértices de  $H_x^{**}$  em que incide uma aresta com a cor  $c$ . Como  $|V(H_x^{**})| = x + 2$ , existem no máximo  $x + 2 - 2(x - \frac{n}{2} + 1) = x + 2 - 2x + n - 2 = n - x$  vértices em  $H_x^{**}$  em que não incide nenhuma aresta com a cor  $c$ . Então, cada vértice  $c'$  tem, no máximo, grau igual a  $n - x$ . Pelo Teorema 2.3, o grafo bipartido  $B$  tem uma coloração de arestas com  $\Delta(B) = n - x$  cores. Seja  $\mu$  uma cor da coloração de arestas de  $B$ . Então  $\mu$  ocorre em todos os vértices que tenham grau igual a  $n - x$ . Considere as arestas de  $B$  coloridas com cor  $\mu$ . Note que este conjunto de arestas é um emparelhamento  $M_B$  em  $B$ . Para cada aresta  $c'v'$  de  $M_B$ , atribua a cor correspondente a  $c'$  para a aresta  $v_{x+1}v$ , onde  $v$  é o vértice de  $H_{x+1}^{**}$  que corresponde a  $v'$ . Por indução, obtém-se uma coloração de arestas para  $H_n^{**}$ . Resta garantir que cada cor foi utilizada em pelo menos  $x - \frac{n}{2} + 2$  arestas de  $H_{x+1}^{**}$ . Observe que qualquer cor que tenha sido usada pelo menos  $x - \frac{n}{2} + 2$  em  $H_x^{**}$  também foi usada em pelo menos  $x - \frac{n}{2} + 2$  arestas do grafo  $H_{x+1}^{**}$ . Resta considerar as cores que foram usadas em exatamente  $x - \frac{n}{2} + 1$  arestas de  $H_x^{**}$ . Neste caso, como visto, o vértice  $c'$  correspondente tem grau  $n - x$  no grafo  $B$ . Portanto, a cor  $\mu$  incide em  $c'$  e esta cor foi usada na aresta  $(v_{x+1}, v')$  do grafo  $H_{x+1}^{**}$ . Portanto, toda cor foi usada em pelo menos  $x - \frac{n}{2} + 2$  arestas do grafo  $H_{x+1}^{**}$ , concluindo a prova da indução. As Figuras 12 a 19 apresentam os passos da coloração de  $H_5^{**}$  a  $H_8^{**}$  em seqüência. Nesse conjunto de figuras, aquelas com número par representam o grafo bipartido  $B$  para o respectivo passo e as arestas mais grossas na cor vermelha representam as arestas com cor  $\mu$ , e as figuras com número ímpar representam as arestas do grafo  $H_{x+1}^{**}$  correspondente coloridas.

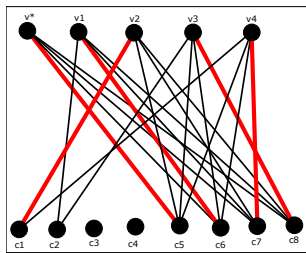


Figura 12 – Grafo B de  $H_5^{**}$

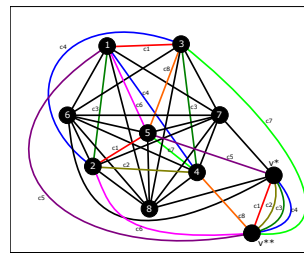


Figura 13 – Grafo  $H_5^{**}$  após a coloração de  $H_5^{**}$

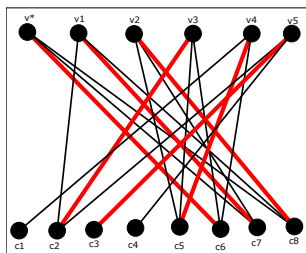


Figura 14 – Grafo B de  $H_6^{**}$

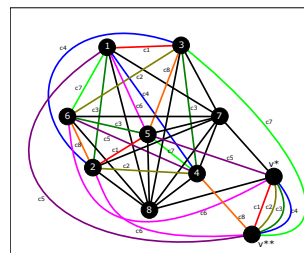


Figura 15 – Grafo  $H_6^{**}$  após a coloração de  $H_6^{**}$

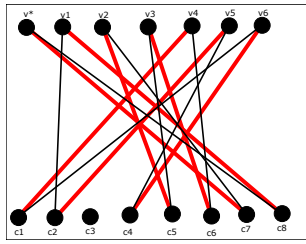


Figura 16 – Grafo B de  $H_7^{**}$

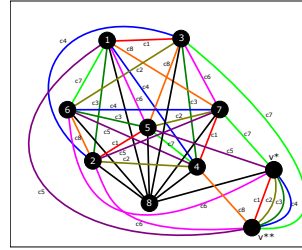


Figura 17 – Grafo  $H^{**}$  após a coloração de  $H_7^{**}$

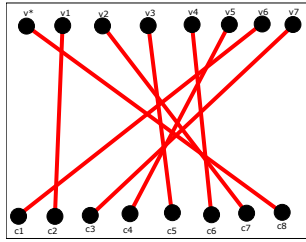


Figura 18 – Grafo B de  $H_8^{**}$

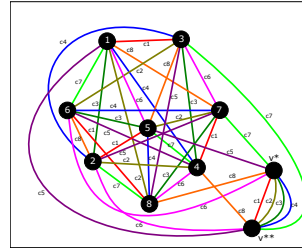


Figura 19 – Grafo  $H^{**}$  após a coloração de  $H_8^{**}$

Note que esta coloração de arestas do grafo  $H^{**}$  é equilibrada, já que  $H^{**}$  é  $n$ -regular e foram usadas  $n$  cores, ou seja, em cada vértice existe uma aresta colorida com cada uma das  $n$  cores. A partir do grafo  $H^{**}$  colorido, é possível obter uma coloração total para o grafo  $G$  com as mesmas  $\Delta(G) + 1$  cores. Atribua a cor da aresta de  $v^*v_i$  para o vértice  $v_i$ , para todo  $i$  tal que  $1 \leq i \leq n$ . A Figura 20 mostra a coloração dos vértices de  $V(G) \setminus Y$ .

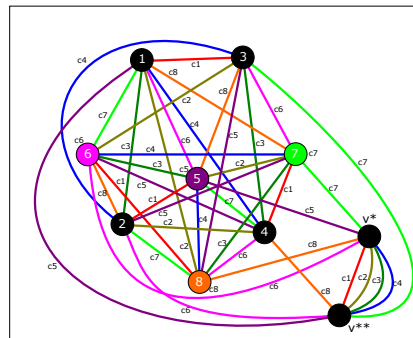


Figura 20 – Coloração dos vértices de  $V(G) \setminus Y$

Atribua a cor de cada aresta  $(v_i, v_{\alpha'(\overline{G})+i})$  para os vértices  $v_i$  e  $v_{\alpha'(\overline{G})+i}$ , para todo  $i$  tal que  $1 \leq i \leq \alpha'(\overline{G})$ . A Figura 21 mostra os vértices de  $Y$  coloridos.

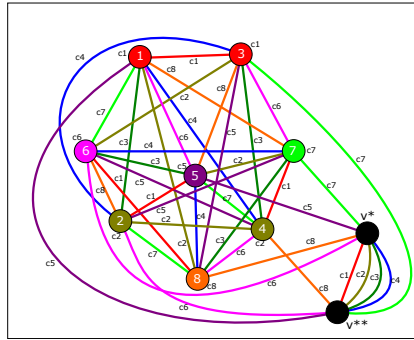


Figura 21 – Coloração dos vértices de  $Y$

Remova os vértices  $v^*$ ,  $v^{**}$  e as arestas de  $M$  do grafo  $H^{**}$ . Observe que esta é uma coloração total do grafo  $G_+$  com  $\Delta(G_+) + 1 = \Delta(G) + 1$  cores. Como  $G$  é subgrafo de  $G_+$ , o grafo  $G$  também tem uma coloração total com  $\Delta(G) + 1$  cores. A Figura 22 apresenta uma coloração total de  $G$  com  $\Delta(G) + 1$  cores.

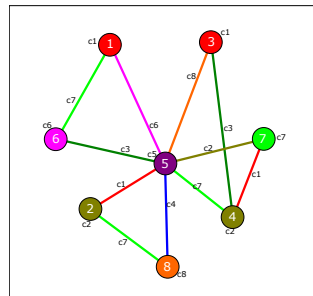


Figura 22 – Coloração total do grafo  $G$

□

Na prova do Teorema 2.7, apresentada por Hilton (1990), quando considera o caso em que  $|E(\overline{G})| + \alpha'(\overline{G}) = \frac{n}{2}$ , o autor afirma que cada vértice de  $Y$  não está conectado a  $v^*$ . A seguir, na Figura 23, apresentamos um contraexemplo para esta afirmação. Neste caso,  $n = |V(G)| = 6$  e as arestas de  $\overline{G}$  são  $\{(a,b), (b,c)\}$ . Portanto,  $|E(\overline{G})| = 2$  e  $\alpha'(\overline{G}) = 1$ . Então,  $|E(\overline{G})| + \alpha'(\overline{G}) = 3 = \frac{n}{2}$ . Considere que  $M = \{(a,b)\}$ . Observe que  $c$  não é vértice universal e, portanto,  $c \in Y$ . Além disso,  $c$  não é coberto por  $M$  e, por isso, é adjacente a  $v^*$ .

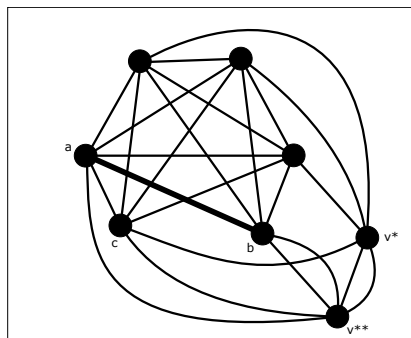


Figura 23 – Contraexemplo para a observação de Hilton (1990)

Até onde pudemos verificar, esta observação não altera o fato de que a prova apresentada por Hilton (1990) está correta.

## 2.2 Resultados anteriores

Em relação à coloração total equilibrada para grafos com vértice universal, existem dois artigos anteriores a este trabalho. O primeiro deles, que apresentou o conceito de coloração total equilibrada, de Fu (1994), apresenta um teorema que determina o número cromático total equilibrado de todos os grafos com vértice universal. Este é o resultado que estamos refutando neste trabalho de conclusão de curso e para o qual apresentamos uma nova demonstração. Para que o leitor entenda por que dizemos que o resultado de Fu (1994) não está correto, apresentamos na íntegra a prova dada por Fu, na Seção 2.2.1. O segundo deles, apresentado por Omai, Almeida e Sasaki (2018), apresenta soluções parciais para o Problema da Coloração Total Equilibrada considerando os grafos com vértice universal. Os resultados de Omai, Almeida e Sasaki (2018) são apresentados na Seção 2.2.2.

### 2.2.1 Resultados de Hung-Lin Fu

Nesta seção, apresentamos a demonstração dada por Fu (1994) para a coloração total equilibrada dos grafos com vértice universal.

**Suposto Teorema 2.8.** (FU, 1994) *Se  $G$  é um grafo com vértice universal, então  $G$  tem uma  $k$ -coloração total equilibrada para cada  $k \geq \chi''(G)$ .*

*Demonstração do autor:* Seja  $K_1$  um grafo com conjunto de vértices  $\{v^*\}$ . Considere o grafo  $G^* = G + K_1$ . Se  $G^*$  é Classe 1, então removendo  $v^*$  de  $G^*$  e colorindo cada vértice  $u$  em  $G$  com a cor da aresta  $(v^*, u)$ , obtém-se uma  $|V(G)|$ -coloração total de  $G$ . Isto implica que  $G$  é Tipo 1. Por outro lado, é fácil ver que se  $G$  é Tipo 1, então  $G^*$  é Classe 1. Por isso,  $\chi'(G^*) = \chi''(G)$ . Como  $G^*$  tem uma  $k$ -coloração de arestas equilibrada para cada  $k \geq \chi'(G^*)$ , então, pelo processo de coloração mencionado acima, tem-se uma  $k$ -coloração total equilibrada (sem utilizar uma nova cor) para cada  $k \geq \chi'(G^*) = \chi''(G)$ .  $\square$

Observa-se que, como consequência deste suposto resultado, Fu (1994) considerou que estavam determinados os números cromáticos totais equilibrados de algumas classes de grafos, conforme apresentamos a seguir.

**Suposto Corolário 2.9.** (FU, 1994) *O grafo completo  $K_n$  tem uma  $k$ -coloração total equilibrada para cada  $k \geq \chi''(K_n)$ .*

$\square$

Uma *clique* é um conjunto de vértices dois a dois adjacentes. Um grafo é *split* se seu conjunto de vértices pode ser particionado em uma clique e um conjunto independente. Um



grafo é *split-completo* se é um split com uma partição dos vértices  $[Q, S]$  tal que  $Q$  é uma clique,  $S$  é conjunto independente e cada vértice de  $Q$  é adjacente a todos os vértices  $S$ . Note que todo vértice da clique de um grafo split-completo é um vértice universal.

**Suposto Corolário 2.10.** (FU, 1994) *Se  $G$  é um grafo split-completo, então  $G$  tem uma  $k$ -coloração total equilibrada para cada  $k \geq \chi''(G)$ .*

□

## 2.2.2 Resultados de Omai, Almeida e Sasaki

Nesta seção são apresentados os resultados parciais de Omai, Almeida e Sasaki (2018) para a coloração total equilibrada de grafos com vértice universal.

**Lema 2.11.** (OMAI; ALMEIDA; SASAKI, 2018) *Se  $G$  é um grafo com vértice universal de ordem ímpar, então  $\chi_e''(G) = \Delta(G) + 1$ .*

*Demonstração.* Sejam  $G$  um grafo com vértice universal com  $|V(G)|$  ímpar,  $G' = G + K_1$ , e  $V(K_1) = \{u\}$ . Note que  $u$  é um vértice universal em  $G'$  e  $\Delta(G') = \Delta(G) + 1$ . Além disso,  $G'$  é um subgrafo de  $K_{|V(G)|+1}$ . Como  $|V(G)|$  é ímpar, o grafo  $K_{|V(G)|+1}$  não é sobrecarregado. Portanto,  $G'$  não é sobrecarregado. Pelo Teorema 2.2,  $\chi'(G') = \Delta(G')$ . Pelo Teorema 2.5,  $G'$  tem uma coloração de arestas equilibrada com  $\Delta(G') = \Delta(G) + 1$  cores.

Seja  $\pi : E(G') \rightarrow \{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$  uma coloração de arestas equilibrada de  $G'$ . Atribua a cor  $\pi(v, w)$  para cada aresta  $(v, w) \in E(G)$  e atribua a cor  $\pi(u, v)$  para cada vértice  $v \in V(G)$ . Observe que isso é uma coloração total própria de  $G$ . Na verdade, as cores de quaisquer dois vértices  $v$  e  $w$  em  $V(G)$  são diferentes, já que são as cores das arestas  $(u, v) \in E(G')$  e  $(u, w) \in E(G')$ , e a coloração de arestas de  $G'$  é própria. Além do mais, as cores de cada vértice  $v$  de  $G$  são diferentes das cores de suas arestas, já que a aresta  $(u, v)$  é adjacente a todas as arestas de  $v$  em  $G'$ .

Seja  $C_i(G)$  a classe de cor  $i$  da coloração de  $G$ , ou seja, o conjunto dos elementos de  $G$  coloridos com cor  $i$ . Uma vez que os únicos elementos de  $G'$  que não estão em  $G$  são as arestas adjacentes a  $u$  e, por construção, suas cores são utilizadas nos vértices de  $G$ , nós podemos concluir  $|C_i(G')| = |C_i(G)|$ , para todo  $i$ ,  $0 \leq i \leq |V(G)|$ . Como  $\pi$  é uma coloração de arestas equilibrada para  $G'$ , nós temos uma coloração total equilibrada para  $G$ . Portanto,  $\chi_e''(G) = \Delta(G) + 1$ . □

**Lema 2.12.** (OMAI; ALMEIDA; SASAKI, 2018) *Seja  $G$  um grafo com vértice universal de ordem par. Se  $|E(\overline{G})| \geq \frac{|V(G)|}{2}$ , então  $\chi_e''(G) = \Delta(G) + 1$ .*

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo com vértice universal tal que  $|V(G)|$  é par e  $|E(\overline{G})| \geq \frac{|V(G)|}{2}$ . Seja  $G' = G + K_1$ , tal que  $V(K_1) = \{u\}$ . Observe que,  $|E(\overline{G}')| = |E(\overline{G})|$  e, por hipótese,  $|E(\overline{G}')| \geq \frac{|V(G)|}{2}$ . Então,  $G'$  não é um grafo sobrecarregado e, pelo Teorema 2.2,  $\chi'(G') =$

$\Delta(G') = \Delta(G) + 1$ . Pelo Teorema 2.5,  $G'$  tem uma coloração de arestas equilibrada com  $\Delta(G')$  cores.

Seja  $\pi : E(G') \rightarrow \{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$  uma coloração de arestas equilibrada de  $G'$ . Atribua a cor  $\pi(v,w)$  para cada aresta  $(v,w) \in E(G)$  e atribua a cor  $\pi(u,v)$  para cada vértice  $v \in V(G)$ . Pelos mesmos argumentos presentes no Lema 2.11, nós temos uma coloração total equilibrada para  $G$ . Portanto,  $\chi_e''(G) = \Delta(G) + 1$ .  $\square$

### 3 RESULTADOS

Nesta seção apresentamos novos resultados sobre o número cromático total equilibrado de grafos com vértice universal. Considere um grafo  $G$  com vértice universal. Além dos casos já apresentados por Omai, Almeida e Sasaki (2018), detalhados nos Lemas 2.11 e 2.12, também é possível garantir que:

- se  $G$  é Tipo 2, então  $\chi_e''(G) = \Delta(G) + 2$ , como mostra o Teorema 3.1;
- e se  $G$  é Tipo 1 com  $|E(\overline{G})| < \frac{|V(G)|}{2}$  e pelo menos metade dos vértices de  $G$  são universais, então  $\chi_e''(G) = \Delta(G) + 1$ , como mostra o Teorema 3.3.

**Teorema 3.1.** *Seja  $G$  um grafo com vértice universal de ordem par e Tipo 2. Então  $\chi_e''(G) = \Delta(G) + 2$ .*

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo Tipo 2 que tem vértice universal. Então  $\chi''(G) = \Delta(G) + 2$ . Como  $\chi_e''(G) \geq \chi''(G)$ , é suficiente mostrar que  $G$  tem uma coloração total equilibrada com  $\Delta(G) + 2$  cores.

Seja  $G' = G + K_1$ , tal que  $V(K_1) = \{u\}$ . Pelo Teorema 2.1,  $G'$  tem uma coloração de arestas com  $\Delta(G') + 1 = \Delta(G) + 2$  cores. Pelo Teorema 2.5,  $G'$  tem uma coloração de arestas equilibrada com  $\Delta(G) + 2$  cores.

Seja  $\pi : E(G') \rightarrow \{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1, \Delta(G) + 2\}$  uma coloração de arestas equilibrada de  $G'$ . Atribua a cor  $\pi(v, w)$  para cada aresta  $(v, w) \in E(G)$  e atribua a cor  $\pi(u, v)$  para cada vértice  $v \in V(G)$ . Pelos mesmos argumentos presentes no Lema 2.11, nós temos uma coloração total equilibrada para  $G$  com  $\Delta(G) + 2$  cores. Portanto,  $\chi_e''(G) = \Delta(G) + 2$ .  $\square$

Pelos Lemas 2.11 e 2.12 e pelo Teorema 3.1, o caso ainda em aberto do Problema da Coloração Total Equilibrada em grafos com vértice universal é quando  $G$  tem ordem par, é Tipo 1 e  $|E(\overline{G})| < \frac{|V(G)|}{2}$ . Note que, neste caso,  $G + K_1$  tem  $|E(\overline{G + K_1})| < \frac{\Delta(G + K_1)}{2}$  arestas e o grafo  $G + K_1$  é Classe 2. Observe que este é exatamente o caso para o qual apresentamos um contraexemplo da prova de Fu (1994) na Figura 3. Para apresentar uma coloração total ótima para esses grafos, Hilton (1990) constrói um grafo  $G_+$  inserindo arestas em  $G$  até que  $|E(\overline{G_+})| + \alpha'(\overline{G_+}) \in \{\frac{|V(G_+)|}{2}, \frac{|V(G_+)|}{2} + 1\}$ . O Lema 3.2 mostra que o número de arestas inseridas em  $G$  é menor  $\alpha'(\overline{G_+})$ .

**Lema 3.2.** *Seja  $G$  um grafo com vértice universal de ordem par, Tipo 1 e com  $|E(\overline{G})| < \frac{|V(G)|}{2}$ . Seja  $G_+$  o grafo obtido ao se adicionar  $f$  arestas a  $G$  para satisfazer  $|E(\overline{G_+})| + \alpha'(\overline{G_+}) \in \{\frac{|V(G_+)|}{2}, \frac{|V(G_+)|}{2} + 1\}$ . Então  $f < \alpha'(\overline{G_+})$ .*

*Demonstração.* Por definição,  $|E(\overline{G})| = |E(\overline{G_+})| + f$ . Por hipótese,  $|E(\overline{G})| < \frac{|V(G)|}{2}$ . Então,  $f < \frac{|V(G)|}{2} - |E(\overline{G_+})|$ . Primeiro, considere o caso em que  $|E(\overline{G_+})| + \alpha'(\overline{G_+}) = \frac{|V(G_+)|}{2} = \frac{|V(G)|}{2}$ . Logo,  $|E(\overline{G_+})| = \frac{|V(G)|}{2} - \alpha'(\overline{G_+})$ . Então,  $f < \frac{|V(G)|}{2} - \frac{|V(G)|}{2} + \alpha'(\overline{G_+}) = \alpha'(\overline{G_+})$ . Agora

considere que  $|E(\overline{G_+})| + \alpha'(\overline{G_+}) = \frac{|V(G_+)|}{2} + 1 = \frac{|V(G)|}{2} + 1$ . Logo,  $|E(\overline{G_+})| = \frac{|V(G)|}{2} + 1 - \alpha'(\overline{G_+})$ . Então,  $f < \frac{|V(G)|}{2} - \frac{|V(G)|}{2} - 1 + \alpha'(\overline{G_+}) = \alpha'(\overline{G_+}) - 1$ .  $\square$

Com o resultado do Lema 3.2 pode-se determinar o número cromático total equilibrado de alguns grafos com vértice universal de ordem par, Tipo 1 e com  $|E(\overline{G})| < \frac{|V(G)|}{2}$ , como mostra o Teorema 3.3.

**Teorema 3.3.** *Se  $G$  é um grafo com pelo menos  $\frac{|V(G)|}{2}$  vértices universais, de ordem par, Tipo 1 e com  $|E(\overline{G})| < \frac{|V(G)|}{2}$ , então  $\chi_e''(G) = \Delta(G) + 1$ .*

*Demonstração.* Considere um grafo  $G$  de ordem par Tipo 1 com pelo menos  $\frac{|V(G)|}{2}$  vértices universais e com  $|E(\overline{G})| < \frac{|V(G)|}{2}$ , como o grafo apresentado na Figura 24. Seja  $G_+$  o grafo obtido ao se adicionar  $f$  arestas a  $G$  para satisfazer  $|E(\overline{G_+})| + \alpha'(\overline{G_+}) \in \{\frac{|V(G_+)|}{2}, \frac{|V(G_+)|}{2} + 1\}$ . Vamos denotar  $|V(G)| = |V(G_+)| = n$ . Sejam  $Y$  o conjunto de vértices que não são universais em  $G_+$  e  $|Y| = y$ . Como pelo menos  $\frac{n}{2}$  vértices são universais em  $G$  (e consequentemente são universais em  $G_+$ ), então  $y < \frac{n}{2}$  e o Caso 2 do resultado de Hilton (1990) não acontece. De fato, no Caso 2 de Hilton (1990),  $\frac{n}{2}$  é ímpar e  $E(\overline{G_+})$  consiste de um emparelhamento com exatamente  $\frac{1}{2}(\frac{n}{2} + 1)$  arestas. Então, no Caso 2, existem exatamente  $(\frac{n}{2} + 1)$  vértices que não são universais em  $G_+$  (e consequentemente em  $G$ ).

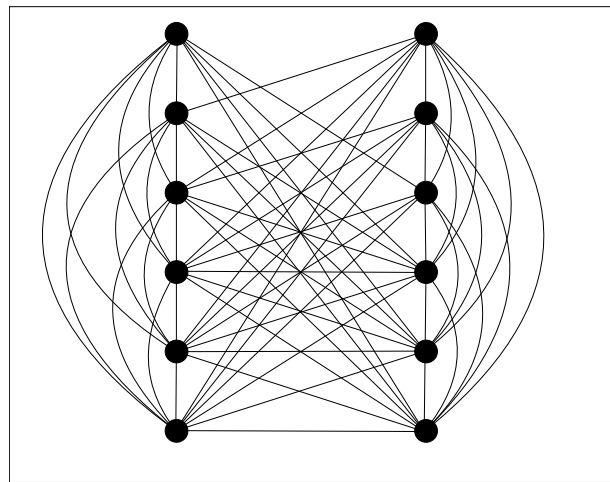


Figura 24 – Grafo  $G$  original

Sejam  $F = E(G_+) \setminus |E(G)|$ ,  $f = |F|$  e  $M$  um emparelhamento máximo em  $\overline{G_+}$ . Construa um grafo  $G_M$  adicionando as arestas de  $M$  a  $G_+$ . Note que  $|V(G_M)| = n$ . Na Figura 25 são destacadas as arestas de emparelhamento e as falsas já inseridas, mais grossas em preto e mais largas em um tom mais claro respectivamente.

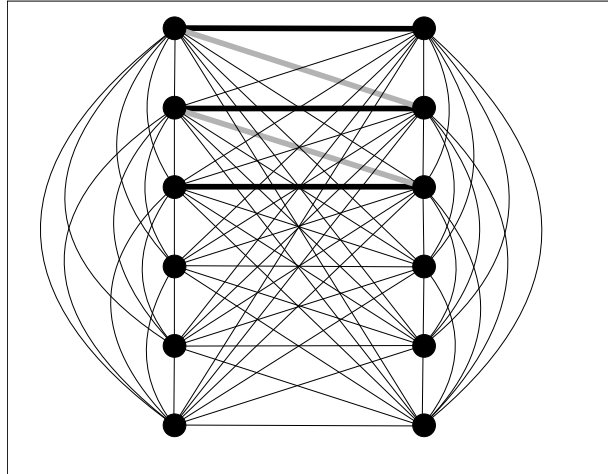


Figura 25 – Grafo  $G_M$  com as arestas falsas e as arestas de emparelhamento inseridas

Rotule os vértices de  $V(G_M)$  tal que as arestas de  $M$  são  $(v_i, v_{i+|M|})$ , para  $1 \leq i \leq |M|$ . Rotule os demais vértices de  $V(G_M)$  como  $v_{2|M|+1}, v_{2|M|+2}, \dots, v_n$  tal que os vértices em que incidem arestas do conjunto  $F$  sejam os primeiros e os vértices universais de  $G$  sejam os últimos. Construa um grafo  $G^*$  adicionando a  $G_M$  um vértice  $v^*$  adjacente a cada vértice não coberto por  $M$ . Agora, vamos construir um multigrafo  $G^{**}$  que é  $n$ -regular. Adicione um vértice  $v^{**}$  a  $G^*$  e insira  $n - d(v)$  arestas entre  $v$  e  $v^{**}$ , para todo  $v \in \{v_1, v_2, \dots, v_n, v^*\}$ . A Figura 26 mostra a rotulação dos vértices e a inserção dos vértices  $v^*$  e  $v^{**}$ .

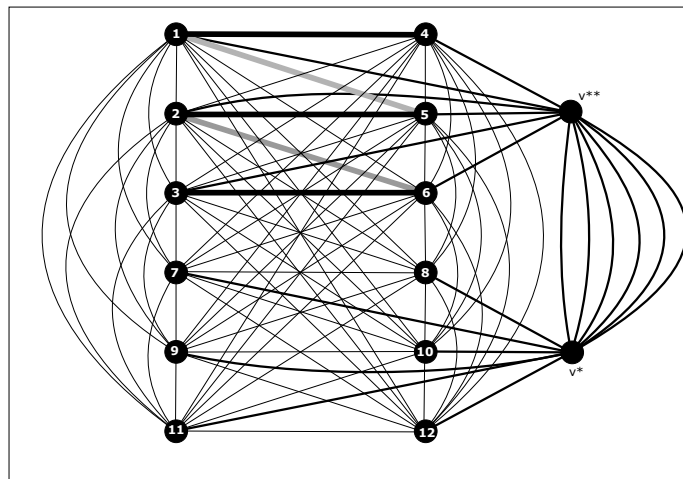


Figura 26 – Inserção dos vértices  $v^*$  e  $v^{**}$  ao Grafo

Atribua a cor  $c_i$  para a aresta  $(v_i, v_{i+|M|})$ , para  $1 \leq i \leq |M|$ . Atribua cores do conjunto  $\{c_1, c_2, \dots, c_{2|M|}\}$  para as arestas entre  $v^*$  e  $v^{**}$ , de forma que cada aresta incidente em  $v^*$  tenha uma cor diferente. Para as arestas incidentes em  $v^{**}$  ainda não coloridas são atribuídas as cores do conjunto  $\{c_{2|M|+1}, c_{2|M|+2}, \dots, c_n\}$ . A Figura 27 demonstra a coloração das arestas de  $M$  e das arestas incidentes no vértice  $v^{**}$ .

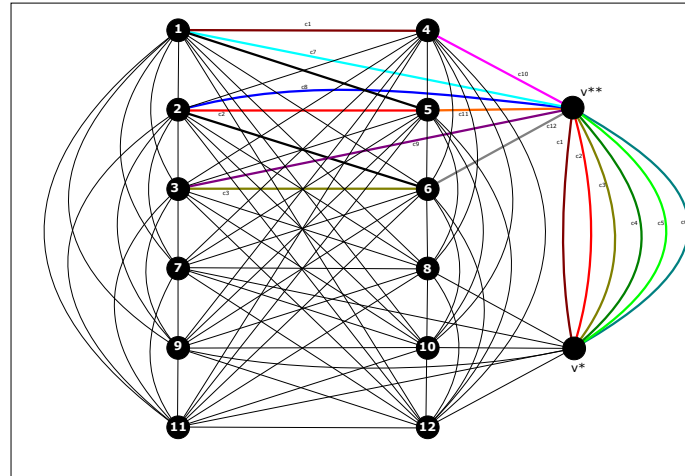


Figura 27 – Coloração das arestas de  $v^{**}$

O Lema 3.4, a seguir, mostra que é possível colorir cada aresta de  $F$  usando cores do conjunto  $\{c_1, c_2, \dots, c_{|M|+1}\}$  tal que quaisquer duas arestas de  $F$  têm cores distintas.

**Lema 3.4.** *Considere o grafo  $G^{**}$ , construído a partir de  $G$ . É possível estender a coloração de arestas de  $G^{**}[M]$ , apresentando uma coloração de arestas própria de  $G^{**}[F \cup M]$ , usando cores do conjunto  $\{c_1, c_2, \dots, c_{|M|}, c_{|M|+1}\}$  tal que quaisquer duas arestas de  $F$  têm cores distintas.*

*Demonstração.* Construa um grafo bipartido  $B_1$  tal que cada aresta do conjunto  $F \cup M$  é um vértice de  $B_1$ . Vamos chamar de  $F_1$  a parte que contém os vértices correspondentes às arestas de  $F$  e de  $M_1$  a parte que contém os vértices correspondentes às arestas de  $M$ . Faça uma aresta entre dois vértices  $u \in F_1$  e  $w \in M_1$  se e somente se as arestas correspondentes  $u$  e  $w$ , não compartilham vértices em  $G^{**}$ . Note que pela definição de emparelhamento, cada vértice de  $F_1$  tem grau no mínimo  $|M_1| - 2$ . Pelo Lema 3.2,  $|F_1| < |M_1|$ . Se existir um vértice em  $u_i \in F_i$  com grau  $|M_i| - 2$  e  $|M_i| \geq 3$ , escolha uma aresta  $(u_i, w_i) \in B_i$  e atribua a cor da aresta correspondente a  $w_i$  para a aresta correspondente a  $u_i$ . Remova o par de vértices  $u_i$  e  $w_i$  do grafo  $B_i$ , criando um novo grafo  $B_{i+1}$  com  $F_{i+1} = F_i - u_i$  e  $M_{i+1} = M_i - w_i$ . Repita o mesmo procedimento no grafo  $B_{i+1}, B_{i+2}$ , e assim sucessivamente, até que não exista vértice com grau  $|M_{i+x}| - 2$  ou até que  $|M_{i+x}| \leq 2$ , em algum grafo  $B_{i+x}$ . As Figuras 28 a 31 apresentam os passos para a criação dos grafos bipartidos  $B_i$  e a coloração das arestas de  $F$ . Nesse conjunto de figuras, aquelas com número par representam a construção dos grafos bipartidos  $B_1$  e  $B_2$ , e as figuras de número ímpar representam o grafo  $G^{**}$  com a aresta falsa colorida. .

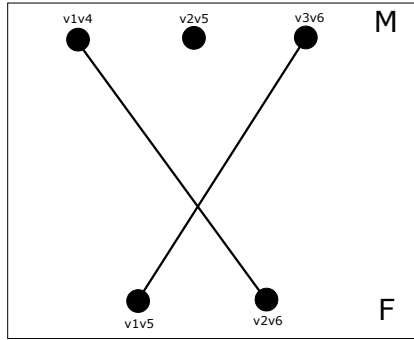


Figura 28 – Construção do Bipartido  $B_1$

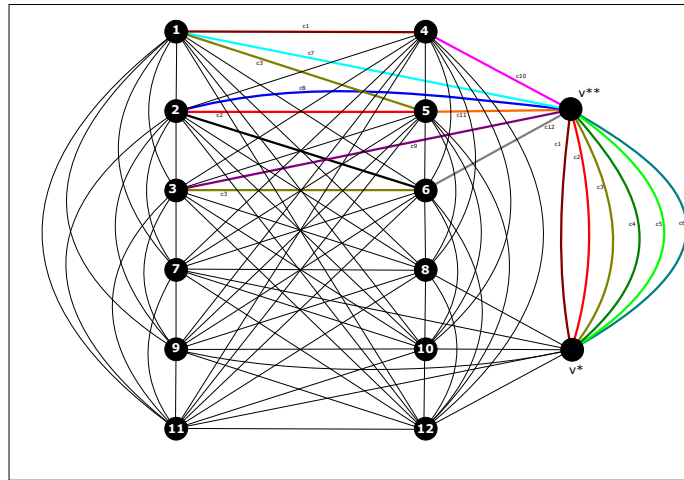


Figura 29 – Coloração da primeira aresta falsa

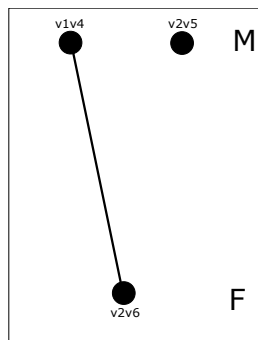


Figura 30 – Construção do Bipartido  $B_2$

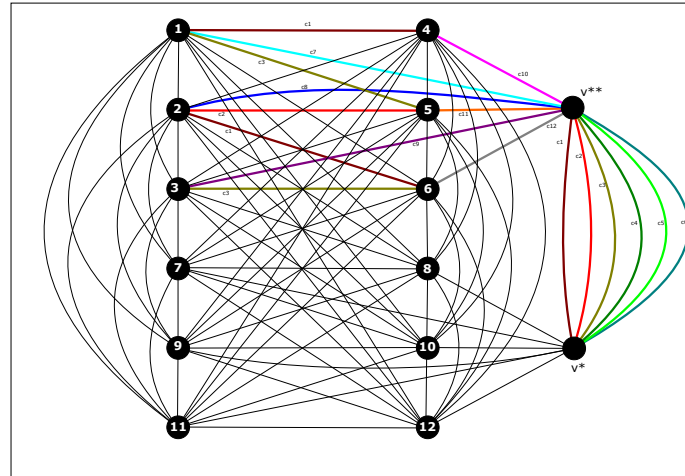


Figura 31 – Coloração da segunda aresta falsa

Como a cada passo remove-se um vértice de  $F_i$  e um vértice de  $M_i$ , mantém-se a propriedade de que  $|F_i| < |M_i|$ , para todo  $i$ . Observe que, ao criar o grafo  $B_{i+1}$  a partir de  $B_i$ , removendo os vértices  $u_i$  e  $w_i$ , tem-se que um vértice em  $F_{i+1}$  tem grau igual a  $|M_{i+1}|$ , no caso em que tinha grau  $|M_i| - 1$  e não era adjacente a  $w_i$  e no caso em que tinha grau  $|M_i|$  e era adjacente a  $w_i$ ; um vértice em  $F_{i+1}$  tem grau igual a  $|M_{i+1}| - 1$  no caso em que tinha grau  $|M_i| - 2$  e não era adjacente a  $w_i$  e no caso em que tinha grau  $|M_i| - 1$  e era adjacente a  $w_i$ ; um vértice em  $F_{i+1}$  tem grau igual a  $|M_{i+1}| - 2$  no caso em que tinha grau  $|M_i| - 2$  e era adjacente a  $w_i$ . Então, o grau de um vértice  $u_i$  em um grafo  $B_i$  é maior ou igual a  $|M_i| - 2$  em qualquer grafo  $B_i$ .

Se, para algum valor de  $i$ , não existir vértice em  $F_i$  com grau  $|M_i| - 2$  e for verdade que  $|M_i| \geq 2$ , então vamos considerar vértices de  $F_i$  com grau pelo menos  $|M_i| - 1$ . Se existir um vértice em  $u \in F_i$  com grau  $|M_i| - 1$  e  $|M_i| \geq 2$ , escolha uma aresta  $(u_i, w_i) \in B_i$  e atribua a cor da aresta correspondente a  $w_i$  para a aresta correspondente a  $u_i$ . Remova o par de vértices  $u_i$  e  $w_i$  do grafo  $B_i$ , criando um novo grafo  $B_{i+1}$  com  $F_{i+1} = F_i - u_i$  e  $M_{i+1} = M_i - w_i$ . Repita o mesmo procedimento no grafo  $B_{i+1}$ ,  $B_{i+2}$ , e assim sucessivamente, até que não exista vértice com grau  $|M_{i+x}| - 1$  ou até que  $|M_{i+x}| \leq 1$ , em algum grafo  $B_{i+x}$ . Como a cada passo remove-se um vértice de  $F_i$  e um vértice de  $M_i$ , mantém-se a propriedade de que  $|F_i| < |M_i|$ , para todo  $i$ . Observe que, ao criar o grafo  $B_{i+1}$  a partir de  $B_i$ , removendo os vértices  $u_i$  e  $w_i$ , tem-se que um vértice em  $F_{i+1}$  tem grau igual a  $|M_{i+1}|$ , no caso em que tinha grau  $|M_i| - 1$  e não era adjacente a  $w_i$  e no caso em que tinha grau  $|M_i|$  e era adjacente a  $w_i$ ; e um vértice em  $F_{i+1}$  tem grau igual a  $|M_{i+1}| - 1$  no caso em que tinha grau  $|M_i| - 2$  e não era adjacente a  $w_i$  ou no caso em que tinha grau  $|M_i| - 1$  e era adjacente a  $w_i$ . Então, uma vez que  $B_i$  não tenha vértices em  $F_i$  com grau igual a  $|M_i| - 2$ , não haverá vértices em  $F_{i+x}$  com grau  $|M_{i+x}| - 2$  no grafo  $B_{i+x}$ , para todo  $x \geq 0$ . Mais ainda, uma vez que  $B_i$  não tenha vértices em  $F_i$  com grau igual a  $|M_i| - 1$ , não haverá vértices em  $F_{i+x}$  com grau  $|M_{i+x}| - 1$  no grafo  $B_{i+x}$ , para todo  $x \geq 0$ .



Se, para algum valor de  $i$ , não existir vértice em  $F_i$  com grau  $|M_i| - 1$  e for verdade que  $|M_i| \geq 1$ , então existe um emparelhamento que cobre os vértices de  $F_i$ . De fato, como todo vértice em  $F_i$  tem grau igual a  $|M_i|$  e  $|F_i| < |M_i|$ , qualquer subconjunto de  $F_i$  tem vizinhança maior ou igual ao próprio conjunto, satisfazendo a condição do Teorema 2.4. Então, considere um emparelhamento que cubra os vértices de  $F_i$  e, para cada aresta  $(u,v)$  deste emparelhamento, atribua a cor da aresta correspondente a  $w$  para a aresta correspondente a  $u$ .

Considere o caso em que, para algum valor de  $i$ , existe um vértice em  $F_i$  com grau igual a  $|M_i| - 2$  e  $|M_i| = 2$ . Como  $|F_i| < |M_i|$ , certamente  $|F_i| = 1$ . Neste caso, atribua para a aresta correspondente a  $u \in F_i$  a cor  $c_{|M|+1}$ . Considere o caso em que, para algum valor de  $i$ , existir um vértice em  $F_i$  com grau igual a  $|M_i| - 1$  e  $|M_i| = 1$ . Como  $|F_i| < |M_i| \leq 1$ , tem-se  $|F_i| = 0$  e, portanto, este caso não acontece.

Observe que a coloração apresentada para as arestas de  $M \cup F$  é própria, já que a mesma cor é atribuída somente a arestas deste conjunto que não compartilham vértices e, além disso, as únicas arestas previamente coloridas com cores do conjunto  $\{c_1, c_2, \dots, c_{|M|}, c_{|M|+1}\}$  são incidentes em vértices de  $M$  e em  $v^*$ .  $\square$

Sejam  $z$  o número de vértices não universais em  $G$  e  $H_z^{**}$  o subgrafo de  $G_+$  induzido por  $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_z, v^*, v^{**}\}$ . A Figura 32 representa o grafo  $H_z^{**}$ .

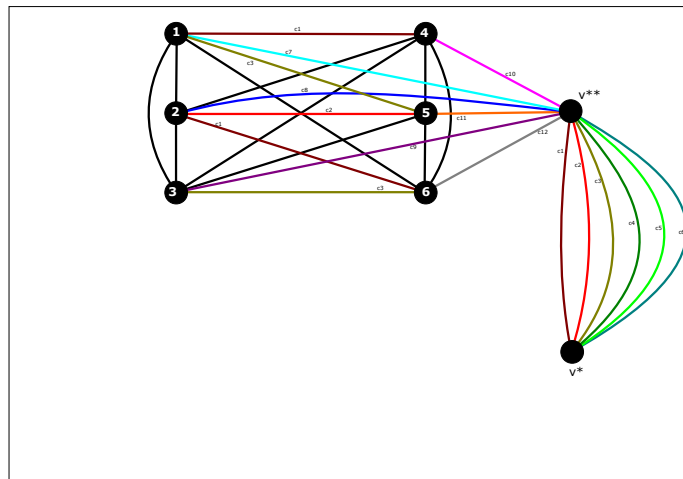
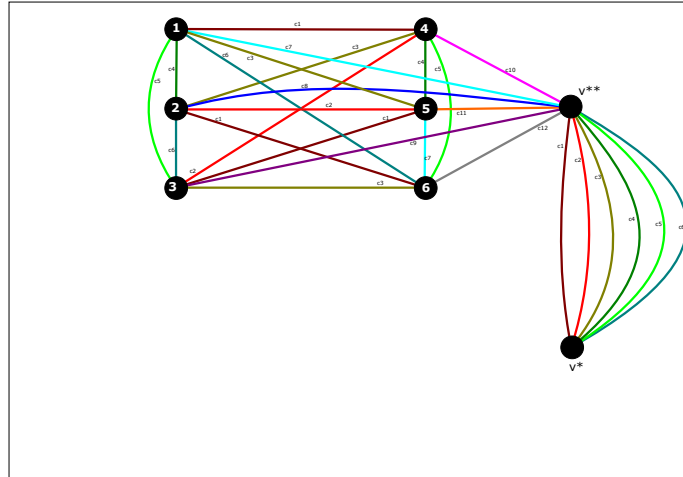


Figura 32 – Grafo  $H_z^{**}$

Agora, vamos apresentar uma coloração para as arestas não coloridas de  $H_z^{**}$ , de maneira gulosa, usando os mesmos argumentos de Hilton (1990). Considere um vértice  $v_i$ , para algum  $i \in [1, z]$ . Note que  $v_i$  é adjacente a  $n - z$  vértices de  $V(G^{**}) \setminus V(H_z^{**})$ , pois  $|V(G^{**}) \setminus V(H_z^{**})| = n - z$  e todo vértice em  $V(G^{**}) \setminus V(H_z^{**})$  é adjacente a  $v_i$ , já que estes vértices são universais em  $G$ . Como  $G^{**}$  é regular,  $v_i$  tem grau  $n$ . Portanto,  $v_i$  tem grau  $z$  em  $H_z^{**}$ . Então, considere uma aresta qualquer  $e = (v_i, v_j)$  ainda não colorida em  $H_z^{**}$ . Observe que em  $v_i$  incidem no máximo  $z - 1$  arestas coloridas e em  $v_j$  também incidem no máximo  $z - 1$  arestas coloridas. Portanto, o número de arestas coloridas incidentes em  $\{v_i, v_j\}$  é no

máximo  $2z - 2$  e, para a coloração destas arestas foram usadas no máximo  $2z - 2$  cores diferentes. Como existem pelo menos  $\frac{n}{2}$  vértices universais em  $G$  e  $z$  vértices não universais, tem-se  $z \leq \frac{n}{2}$ . Logo, há pelo menos  $2z - 2 = n - 2$  cores usadas nas arestas incidentes nos extremos de  $e$  e existem pelo menos duas cores disponíveis para colorir  $e$ . A Figura 33 mostra a coloração do grafo  $H_z^{**}$  feita de forma gulosa.



**Figura 33 – Coloração do  $H_z^{**}$**

O restante da prova consiste em colorir as arestas do grafo  $H_{x+1}^{**}$  a partir da coloração de arestas de  $H_x^{**}$ , para todo  $x \in [z, n - 1]$ . Isso dará uma coloração de arestas para  $H_n^{**}$ , que é o grafo  $G^{**}$ . A prova de que é possível estender esta coloração de arestas de  $H_x^{**}$  para  $H_{x+1}^{**}$  depende da condição de que cada cor seja usada pelo menos  $x - \frac{n}{2} + 1$  vezes em  $H_x^{**}$ . Para qualquer valor de  $x \leq z$ , observe que é suficiente garantir que cada cor foi usada pelo menos uma vez, já que  $z \leq \frac{n}{2}$ . De fato, cada cor foi usada em alguma aresta incidente em  $v^{**}$ . Para a coloração de arestas de  $H_{x+1}^{**}$ , construa um grafo bipartido  $B$  com bipartição  $[C, V]$ , onde cada vértice  $c'_i$  da parte  $C$  corresponde a uma cor  $c_i$  usada na coloração de arestas de  $H_x^{**}$ , para  $1 \leq i \leq n$ ; cada vértice  $v'_i \in V$  corresponde ao vértice  $v_i \in H_x^{**}$  e o vértice  $v^{*'}$  corresponde ao vértice  $v^*$ . Em  $B$ , existe a aresta  $(v'_i, c'_j)$  se e somente se a cor  $c_j$  não foi atribuída a nenhuma aresta incidente em  $v_i$  no grafo  $H_x^{**}$ . Esta regra também vale para  $(v^{*'}, c'_j)$ . Cada vértice  $v' \in V$  do grafo  $B$  corresponde a um vértice com grau  $x$  no grafo  $H_x^{**}$  e portanto,  $v'$  tem grau exatamente  $n - x$  em  $B$ . Cada vértice  $c' \in C$  no grafo  $B$  corresponde a uma cor  $c$  que foi usada em pelo menos  $x - \frac{n}{2} + 1$  arestas do grafo  $H_x^{**}$ . Como  $H_x^{**}$  tem  $x + 2$  vértices, a cor correspondente a  $c'$  não foi atribuída a arestas de no máximo  $x + 2 - 2(x - \frac{n}{2} + 1) = n - x$  vértices de  $H_x^{**}$ . Portanto,  $c'$  tem grau no máximo  $n - x$  em  $B$ . Pelo Teorema 2.3,  $B$  tem uma coloração de arestas com  $n - x$  cores. Além disso, em cada vértice de grau máximo em  $B$  incidem arestas com todas as  $n - x$  cores. Então, ao escolher uma cor  $\mu$  qualquer da coloração de arestas de  $B$ , as arestas de cor  $\mu$  formam um emparelhamento que cobre os vértices de grau máximo em  $B$ , ou seja, cobrem  $V$  e todas os vértices de  $C$  que representam cores que haviam sido usadas exatamente  $x - \frac{n}{2} + 1$  vezes. Então, para cada aresta  $(v', c')$  de  $B$  colorida com cor  $\mu$ , atribua a cor correspondente a  $c'$  para a aresta  $(v_{x+1}, v)$ , onde  $v$  é o vértice representado

por  $v'$  em  $B$ . Assim, cada cor que havia sido usada pelo menos  $x - \frac{n}{2} + 2$  vezes em  $H_x^{**}$  continua tendo sido usada pelo menos  $x - \frac{n}{2} + 2$  vezes em  $H_{x+1}^{**}$ ; e cada cor que havia sido usada exatamente  $x - \frac{n}{2} + 1$  vezes em  $H_x^{**}$  foi usada em alguma aresta incidente em  $v_{x+1}$  e, portanto, foi usada em pelo menos  $x - \frac{n}{2} + 2$  arestas de  $H_{x+1}^{**}$ . As Figuras 34 e 35 apresentam a construção do grafo bipartido  $B$ , com o destaque das arestas com a cor  $\mu$  mais largas e com cor vermelha, e a coloração do grafo  $H_{x+1}^{**}$ , e a Figura 36 mostra o grafo  $H_n^{**}$  colorido.

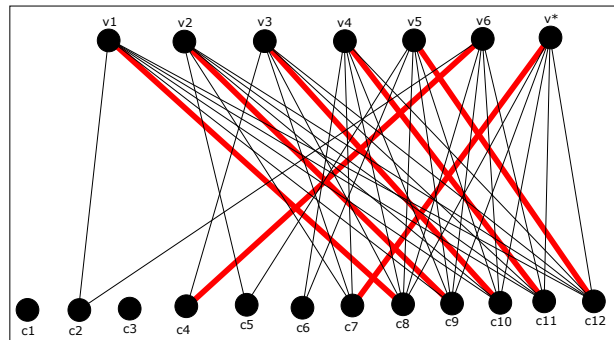


Figura 34 – Construção do bipartido  $B$  e seleção do emparelhamento de cor  $\mu$

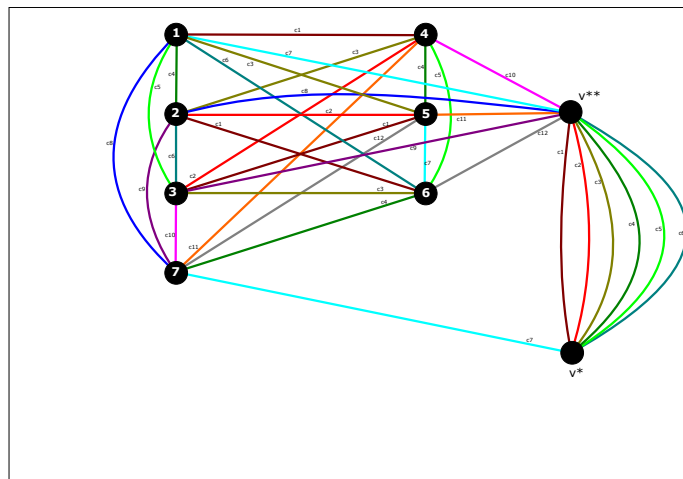


Figura 35 – Coloração do  $H_{x+1}^{**}$

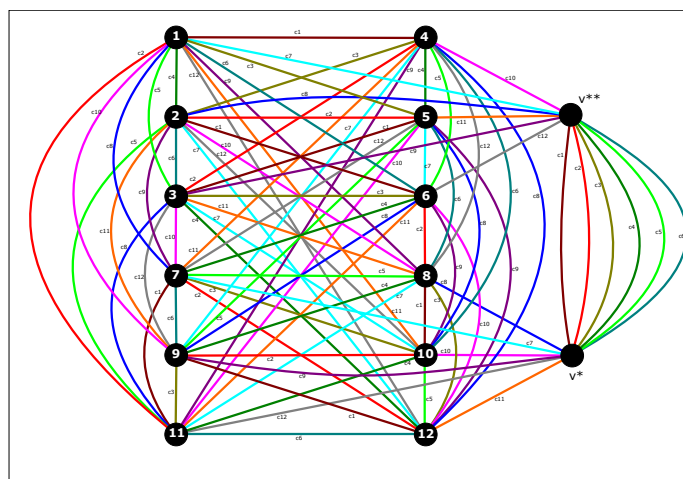


Figura 36 – Coloração final do  $H_n^{**}$

Por indução, pode-se colorir  $G^{**}$  com  $n$  cores. Como  $G^{**}$  é um grafo  $n$ -regular, cada cor foi atribuída a uma aresta incidente em cada vértice e, portanto, foi utilizada exatamente  $\frac{n}{2} + 1$  vezes. Remova o vértice  $v^{**}$ . Como todas as cores foram atribuídas para arestas de  $v^{**}$ , ao removê-lo, cada cor foi atribuída a  $\frac{n}{2}$  arestas de  $H^*$ . A Figura 37 apresenta a remoção do vértice  $v^{**}$ .

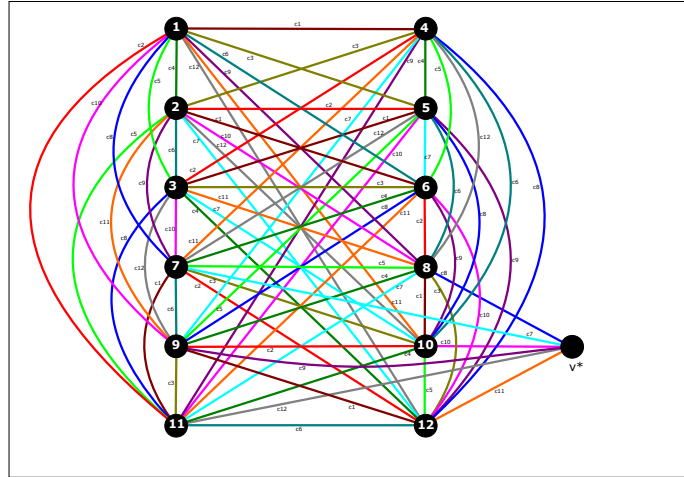


Figura 37 – Remoção do  $v^{**}$

Remova o vértice  $v^*$  e atribua a cor de  $(u, v^*)$  para o vértice  $u$ , para cada  $u$  não coberto por  $M$ . Relembre que  $v^*$  é adjacente somente a vértices não cobertos por  $M$ . Este passo também preserva a propriedade de que cada cor foi utilizada em exatamente  $\frac{n}{2}$  elementos do grafo  $G_M$ . A Figura 38 apresenta a remoção do vértice  $v^*$  e a coloração dos vértices adjacentes ao mesmo.

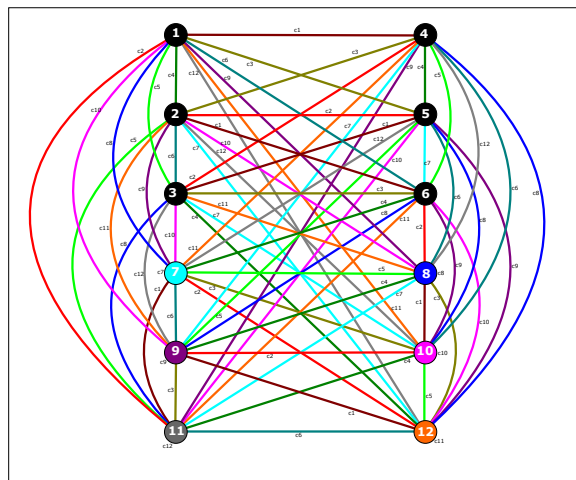


Figura 38 – Remoção do  $v^*$

Para cada aresta  $e = (v_i, v_{|M|+i})$  do emparelhamento  $M$ , remova  $e$  e atribua a cor de  $e$  para  $v_i$  e  $v_{|M|+i}$ , como mostra a Figura 39.

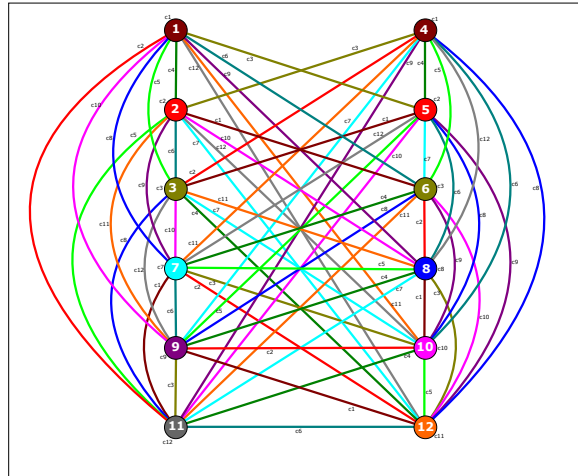


Figura 39 – Remoção das arestas de emparelhamento

Se existe uma aresta  $e_f \in F$  com a mesma cor de  $e$ , então, remova  $e_f$ . Neste caso, a cor de  $e$  foi usada  $\frac{n}{2}$  vezes, sendo  $\frac{n}{2} - 2$  vezes em arestas de  $E(H^*) \setminus (M \cup F)$  e duas vezes nos vértices de  $V(G)$ . Se existe uma aresta  $e_f \in F$  com cor  $|M| + 1$ , então  $e_f = (w_1, w_2)$  compartilha vértices com duas arestas de emparelhamento, sejam  $e_1 = (u_1, w_1)$  e  $e_2 = (u_2, w_2)$ . Remova  $e_f$  e atribua a cor de  $e_f$  para o vértice  $w_1$ . Remova  $e_1$  e atribua a cor de  $e_1$  para  $u_1$ . Observe que, desta maneira, cada cor atribuída simultaneamente a uma aresta de  $M$  e uma aresta de  $F$  está sendo usada em  $\frac{n}{2}$  elementos de  $G$ . Pelo Lema 3.2,  $|F| < |M|$ . Quando não existe uma aresta  $e_f \in F$  com a mesma cor de  $e \in M$ , a cor de  $e$  será atribuída a  $\frac{n}{2} - 1 + 2 = \frac{n}{2} + 1$  elementos de  $G$  (relembre que  $e$  é removida e sua cor é atribuída aos dois extremos de  $e$ ). Então, cada cor foi utilizada em  $\frac{n}{2}$  ou  $\frac{n}{2} + 1$  elementos de  $G$  e, portanto, a coloração total apresentada para  $G$  é equilibrada. A Figura 40 apresenta o grafo  $G$  com a coloração total equilibrada após a remoção das arestas falsas.  $\square$

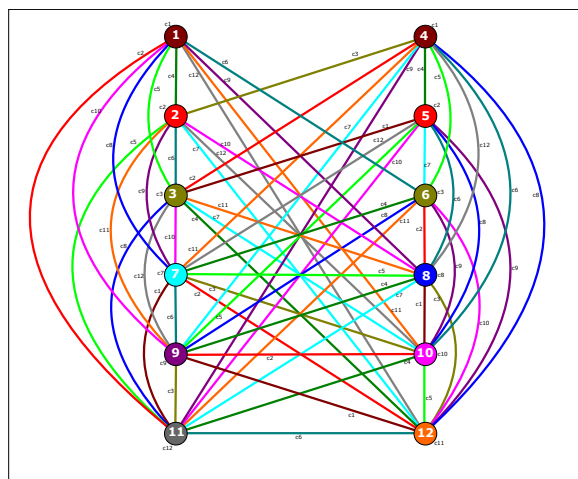


Figura 40 – Grafo  $G$  colorido após a remoção das arestas falsas

As Figuras 41 e 42, a seguir, apresentam dois casos em que pode-se determinar o número cromático total equilibrado a partir do Teorema 3.3, em ambas figuras as arestas mais

largas tracejadas representam as arestas do emparelhamento máximo, e as outras arestas tracejadas representam as arestas de  $\overline{G}$ . Na Figura 42, as arestas do grafo foram omitidas para melhor visualização do exemplo, sendo apresentadas todas as arestas do complemento.

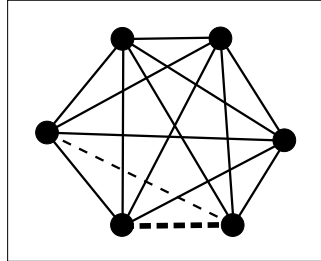


Figura 41 – Grafo com metade dos vértices universais

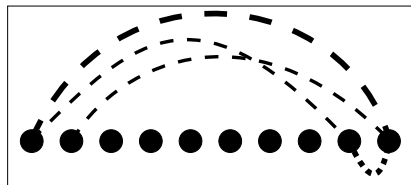


Figura 42 – Grafo com mais da metade dos vértices universais

A Figura 43 mostra um exemplo para o qual o Problema da Coloração Total Equilibrada permanece em aberto, sendo que a aresta contínua mais larga, a aresta mais larga tracejada e a aresta tracejada representam: a aresta falsa, a aresta de emparelhamento e a aresta do complemento do grafo, respectivamente.

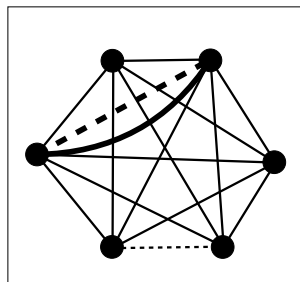


Figura 43 – Grafo com menos da metade dos vértices universais

Em seu artigo, Fu (1994) afirmou que se  $G$  tem vértice universal, então  $G$  tem uma coloração total equilibrada com  $k$  cores para qualquer  $k \geq \chi''(G)$ . Notadamente, esta afirmação pode ser inverídica, dada a refutação da prova do Suposto Teorema 2.8. A seguir, nós garantimos que se  $G$  tem vértice universal, então  $G$  tem uma coloração total equilibrada com  $k$  cores para qualquer  $k \geq \chi_e''(G)$ .

**Teorema 3.5.** *se  $G$  tem vértice universal, então  $G$  tem uma coloração total equilibrada com  $k$  cores para qualquer  $k \geq \chi_e''(G)$ .*

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo com vértice universal. Então,  $G + K_1$  tem uma coloração de arestas com  $\Delta(G) + 2$  cores, pelo Teorema 2.1. Consequentemente,  $G + K_1$  tem uma

coloração de arestas com  $k$  cores para qualquer  $k \geq \Delta(G) + 2$ . Pelo Teorema 2.5,  $G + K_1$  tem uma coloração de arestas equilibrada com  $k$  cores, para qualquer  $k \geq \Delta(G) + 2$ . É suficiente remover a cor de cada aresta incidente em  $u \in V(K_1)$  e atribuí-la ao vértice correspondente (o outro extremo da aresta). Então,  $G$  tem uma coloração total equilibrada com  $k$  cores, para qualquer  $k \geq \Delta(G) + 2$ . Se  $\chi_e''(G) = \Delta(G) + 2$ , a prova está concluída. Se  $\chi_e''(G) = \Delta(G) + 1$ , então existe também uma coloração total equilibrada com  $\Delta(G) + 1$  cores para  $G$ .  $\square$

Em relação ao Suposto Corolário 2.9, pode-se garantir que é, de fato, verdadeiro.

**Corolário 3.6.** *O grafo completo  $K_n$  tem uma  $k$ -coloração total equilibrada para cada  $k \geq \chi''(K_n)$ .*

*Demonstração.* Note que o grafo  $K_n$  é  $(n - 1)$ -regular. Se  $n$  é par, pelo Teorema 3.1 sabe-se que  $\chi_e''(G) = \chi''(G)$ . Se  $n$  é ímpar, então  $\chi_e''(G) = \chi''(G)$  pelo Lema 2.11. Em ambos os casos, pelo Teorema 3.5, garante-se que existe uma coloração total equilibrada para o grafo  $K_n$  para cada  $k \geq \chi''(G) = \chi_e''(G)$   $\square$

O Suposto Corolário 2.10 é parcialmente verdadeiro, pelos teoremas 3.3 e 3.5, como apresentamos a seguir.

**Corolário 3.7.** *Se  $G$  é um grafo split-completo com uma partição  $[Q, S]$ , tal que  $|Q| \geq |S|$ , então  $G$  tem uma  $k$ -coloração total equilibrada para cada  $k \geq \chi''(G)$ .*

$\square$

## 4 CONCLUSÃO

Neste trabalho de conclusão de curso, contribuimos para o avanço do conhecimento sobre a coloração total equilibrada em grafos com vértice universal. Refutamos a prova de Fu (1994) que determinava o número cromático total equilibrado desses grafos. Mostramos que quando o grafo  $G$  tem vértice universal e é Tipo 2, então  $\chi_e''(G) = \Delta(G) + 2$  cores. Dos resultados de (OMAI; ALMEIDA; SASAKI, 2018) também sabia-se que: se  $G$  tem vértice universal e ordem ímpar, então  $\chi_e''(G) = \Delta(G) + 1$ ; se  $G$  tem vértice universal, ordem par e existem pelo menos  $\frac{|V(G)|}{2}$  arestas em  $\overline{G}$ , então  $\chi_e''(G) = \Delta(G) + 1$ . Restavam os casos em que  $G$  tem vértice universal, ordem par, é Tipo 1 e tem menos que  $\frac{|V(G)|}{2}$  arestas em  $\overline{G}$ . Para estes casos, decidimos mostrar que, a partir da técnica de Hilton (1990), que apresenta uma coloração total para grafos com vértice universal, seria possível obter uma coloração total equilibrada para o mesmo grafo. Essa intuição vem do fato de que Hilton (1990) faz uma coloração de arestas equilibrada para um supergrafo de  $G$  e, a partir dela, obtém uma coloração total para  $G$ . Notamos que a dificuldade ocorre porque Hilton (1990) insere arestas em  $G$  até que  $|E(\overline{G})| + \alpha'(\overline{G}) \in \{\frac{|V(G)|}{2}, \frac{|V(G)|}{2} + 1\}$ . Como não há controle sobre como essas arestas são coloridas, a remoção delas pode desequilibrar a coloração total de  $G$ . Decidimos controlar a coloração das arestas inseridas em  $G$ , garantindo que todas tenham cores distintas e que sua remoção seja compensada na coloração de vértices que recebem cores das arestas do emparelhamento. Assim, fizemos um algoritmo que atribui para cada aresta inserida em  $G$  a mesma cor de uma aresta do emparelhamento. No entanto, percebemos que quando estas arestas inseridas em  $G$  não pertencem ao grafo  $H_y^{**}$ , em que uma parte das arestas são coloridas gulosamente, não conseguimos garantir que os vértices representados no grafo bipartido usado na coloração de cada  $H_x^{**}$  tenham grau  $n - x$ . Também não conseguimos garantir que é possível cobrir todos os vértices representados neste grafo bipartido em cada etapa de coloração. Observe que essa dificuldade não acontece quando  $G$  tem pelo menos metade dos vértices universais. Então, para esses casos, determinamos que  $\chi_e''(G) = \Delta(G) + 1$  e apresentamos uma coloração total equilibrada ótima para  $G$ .

Ressalta-se ainda que é verdade o que Fu (1994) afirmou: se  $G$  tem vértice universal, então  $G$  tem uma coloração total equilibrada com  $k$  cores para qualquer  $k \geq \Delta(G) + 2$ . Para essa afirmação, apresentamos uma prova de que  $G$  tem uma coloração total equilibrada com  $k$  cores para qualquer  $k \geq \chi_e''(G)$ . Por outro lado, ainda é uma questão em aberto a veracidade da afirmação feita por Fu (1994) de que  $G$  tem uma coloração total equilibrada com  $k$  cores para qualquer  $k \geq \chi''(G)$ .

Outra contribuição deste trabalho de conclusão de curso é a determinação do número cromático total equilibrado dos grafos split-completos que tem a maioria dos vértices na clique. Tanto para esses grafos, quanto para os grafos completos, conseguimos garantir que existe uma coloração total equilibrada com  $k$  cores para cada  $k \geq \chi''(G)$ .



Por fim, este trabalho também apresenta uma contribuição ao artigo de Hilton (1990), apresentando um contraexemplo para uma afirmação feita pelo autor na prova de suficiência do seu principal resultado. Até onde pudemos verificar, mesmo com a invalidação de tal afirmação, a prova de Hilton (1990) ainda está correta.

## REFERÊNCIAS

- BEHZAD, M. **Graphs and their chromatic numbers**. 1965. Tese (Doutorado) — Michigan State University, 1965.
- BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *et al.* **Graph theory with applications**. [S.l.]: Macmillan London, 1976. v. 290.
- FOLKMAN, J.; FULKERSON, D. R. **EDGE COLORINGS IN BIPARTITE GRAPHS**. [S.l.], 1966.
- FU, H. L. Some results on equalized total coloring. **Congressus Numerantium**, v. 102, p. 111–119, 1994.
- GONÇALVES, I. F.; DANTAS, S.; SASAKI, D. On equitable total coloring of snarks. **Procedia Computer Science**, v. 195, p. 334–342, 2021. ISSN 1877-0509. Proceedings of the XI Latin and American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050921021803>.
- HAJNAL, A.; SZEMERÉDI, E. Proof of a conjecture of p. erdos. **Combinatorial theory and its applications**, v. 2, p. 601–623, 1970.
- HALL, P. On representatives of subsets—journ. **Lond. Math. Soc**, v. 10, 1935.
- HILTON, A. J. A total-chromatic number analogue of plantholt's theorem. **Discrete mathematics**, Elsevier, v. 79, n. 2, p. 169–175, 1990.
- HOLYER, I. The np-completeness of edge-coloring. **SIAM Journal on Computing**, v. 10, n. 4, p. 718–720, 1981. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/0210055>.
- KÖNIG, D. Über graphen und ihre anwendung auf determinantentheorie und mengenlehre. **Mathematische Annalen**, Springer, v. 77, n. 4, p. 453–465, 1916.
- LIH, K.-W. The equitable coloring of graphs. In: \_\_\_\_\_. **Handbook of Combinatorial Optimization: Volume 1–3**. Boston, MA: Springer US, 1998. p. 2015–2038. ISBN 978-1-4613-0303-9. Disponível em: [https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0303-9\\_31](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0303-9_31).
- MCDIARMID, C. J.; SÁNCHEZ-ARROYO, A. Total colouring regular bipartite graphs is np-hard. **Discrete Mathematics**, v. 124, n. 1, p. 155–162, 1994. ISSN 0012-365X. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0012365X9200058Y>.
- OMAI, M. M.; ALMEIDA, S. M.; SASAKI, D. Equitable total coloring of graphs with universal vertex. Unpublished manuscript. Partial results were presented at LAWCG 2018. 2018.
- PEREIRA, D. S. de S. **Sobre Coloração Total de Grafos Cúbicos**. outubro 2013. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, outubro 2013.
- PLANTHOLT, M. The chromatic index of graphs with a spanning star. **Journal of Graph Theory**, Wiley Online Library, v. 5, n. 1, p. 45–53, 1981.
- SILVA, A. da; DANTAS, S.; SASAKI, D. Equitable total coloring of complete r-partite p-balanced graphs. **Discrete Applied Mathematics**, v. 261, p. 123–135, 2019. ISSN 0166-218X. GO X Meeting, Rigi Kaltbad (CH), July 10–14, 2016. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X18301008>.

VIZING, V. G. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. **Discret Analiz**, v. 3, p. 25–30, 1964.

WERRA, D. de. Investigations on an edge coloring problem. **Discrete Mathematics**, North-Holland, v. 1, n. 2, p. 167–179, 1971.

**ÍNDICE REMISSIVO**

- $k$ -coloração, 9
- classe de cor, 9
- clique, 22
- coloração
  - de arestas, 9
  - de vértices, 9
  - equilibrada, 9
  - própria, 9
  - total, 9
- complemento, 12
- conexo, 12
- conjunto independente, 13
- emparelhamento, 12
  - máximo, 12
- grafo
  - bipartido, 13
  - completo, 12
  - regular, 13
  - split, 22
    - completo, 23
- grau, 12
  - máximo, 12
- junção, 12
- número cromático total equilibrado, 9
- ordem, 12
- partição, 12
- Problema da Coloração Total Equilibrada, 9
- subgrafo, 12
  - induzido, 12
- vértice universal, 10
- índice cromático, 12