

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

PAULO HENRIQUE DE FREITAS MEIRELLES

**ESTUDO SOBRE PERCOLAÇÃO DE ÁGUA EM MEIOS POROSOS
COM O USO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS**

CAMPO MOURÃO
2020

PAULO HENRIQUE DE FREITAS MEIRELLES

ESTUDO SOBRE PERCOLAÇÃO DE ÁGUA EM MEIOS POROSOS COM O USO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado à Disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso, do Curso Superior em Engenharia Civil do Departamento Acadêmico de Construção Civil - DACOC - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, para obtenção do título de bacharel em engenharia civil.

Orientador: Prof. Dr. Adilandri Mércio Lobeiro
Coorientador: Prof. Dr. Ewerton Clayton Alves da Fonseca.

CAMPO MOURÃO
2020



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Campo Mourão
Diretoria de Graduação e Educação Profissional
Departamento Acadêmico de Construção Civil
Coordenação de Engenharia Civil



TERMO DE APROVAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso

ESTUDO SOBRE PERCOLAÇÃO DE ÁGUA EM MEIOS POROSOS COM O USO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

por

Paulo Henrique de Freitas Meirelles

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 10h00min do dia 10 de Dezembro de 2020 como requisito parcial para a obtenção do título de ENGENHEIRO CIVIL, pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

Prof. Dr. Marcelo Rodrigo Carreira
(UTFPR)

Profa. Dra. Paula Cristina de Souza
(UTFPR)

Prof. Dr. Ewerton Clayton Alves da Fonseca
(UTFPR)
Coorientador

Prof. Dr. Adilandri Mércio Lobeiro
(UTFPR)
Orientador

Responsável pelo TCC: **Prof. Me. Valdomiro Lubachevski Kurta**

Coordenador do Curso de Engenharia Civil: **Profa. Dra. Paula Cristina de Souza**

*A Folha de Aprovação assinada encontra-se assinada eletronicamente no processo do SEI
número 23064.041302/2020-41.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por toda proteção e bênçãos em minha vida, possibilitando que cada dia seja melhor, me dando forças para alcançar os objetivos e seguir os caminhos almejados.

Agradeço à minha família, em especial aos meus pais Luís Henrique e Maria Madalena, por permitirem e fornecerem todos os recursos que me fizeram chegar até o presente momento, todo carinho e amor, sem vocês não seria possível, obrigado.

Aos meus irmãos, Guilherme e Lyvia, agradeço por todos os momentos em que me apoiarem em tempos de dificuldade, pela paciência, pelos conselhos e broncas nos momentos necessários, saibam que sempre admirei o esforço de ambos e foram minha inspiração.

Agradeço à Jullia Clara, pela pessoa sensacional que é, pelo amor, carinho, por todo o suporte e apoio, por me permitir compartilhar muitos momentos inesquecíveis ao seu lado, por permanecer em todos os momentos e por escolher trilhar seu caminho junto ao meu. A lua é linda.

Aos amigos que cultivei durante a faculdade e que levo pra vida, especialmente Crystofer Henrique, Lucas Machado, Thiago Macedo e Karlyne de Lima. Também agradeço a todos os colegas de turma, pelos trabalhos em grupo, e a todos que de certo modo marcaram de alguma forma minha graduação.

Agradeço a empresa GEOSLOPE International Ltd. por disponibilizar a licença do software GeoStudio - SEEP/W, viabilizando o estudo aqui apresentado.

Por fim, a todos os professores do curso que contribuíram para minha formação e me agregaram conhecimento e valores tão importantes, em especial aos meus orientadores e a banca avaliadora pelas considerações finais possibilitando a conclusão deste. Muito obrigado!

RESUMO

MEIRELLES, P. H. F. **Estudo sobre percolação de água em meios porosos com o uso do método das diferenças finitas.** 93 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Engenharia Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, 2020.

O estudo abordado neste trabalho tem por finalidade a análise numérica pelo uso do Método das Diferenças Finitas (*MDF*) para obtenção do traçado das linhas equipotenciais de um maciço terroso homogêneo, isotrópico e saturado, problema proposto por Das (2007), utilizando três diferentes softwares para modelagem, sendo eles o MATLAB[®] (*MDF*), Excel[®] (*MDF*), em parceria do software GeoStudio - SEEP/W[®] que utiliza em sua base de dados o Método dos Elementos Finitos (*MEF*). As modelagens tiveram por objetivo evidenciar a qualidade do uso do *MDF* para análise e controle de cargas hidráulicas piezométrica nos pontos do maciço terroso ao relizar o comparativo com a solução segundo Das (2007), contribuindo para análise preliminar e consolidação do uso do método numérico em diferentes ferramentas.

Palavras-chave: Método das Diferenças Finitas; Análise numérica; Percolação

ABSTRACT

MEIRELLES, P. H. F. **Study on water percolation in porous regions using the finite difference method.** 93 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Engenharia Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, 2020.

The study approach in this work has the purpose numerical analysis using the Finite Differences Method (*MDF*) to obtainment the outline of equipotential lines of a homogeneous, isotropic and saturated soil massif, problem proposed by Das (2007), using two different modeling software, being them the MATLAB[®] (*MDF*), Excel[®] (*MDF*), in partnership with the software GeoStudio - SEEP/W[®] that uses in your database the Finite Element Method (*MEF*). The purpose of the modeling is to demonstrate the quality of the use of *MDF* for analysis and control pressure heads in the points of ground by making the comparison with the solution according to Das (2007), contributing to preliminary analysis and consolidation of the use of the method in different tools.

Keywords: Finite difference method, Numerical analysis, Seepage.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Rede de fluxo em maciço homogêneo, isotrópico e saturado.	18
FIGURA 2	– Percolação de água em um elemento infinitesimal de solo.	19
FIGURA 3	– Diagrama simplificado de fases do solo.	22
FIGURA 4	– Domínio discretizado.	25
FIGURA 5	– Interpretação da derivada em pontos aplicados.	27
FIGURA 6	– Pontos cruzados do domínio discretizado.	28
FIGURA 7	– Problema estudado.	33
FIGURA 8	– Malha de Diferenças Finitas.	34
FIGURA 9	– Domínio discretizado.	36
FIGURA 10	– Ponto de cruz do MDF para a EDP dada pela equação (31).	37
FIGURA 11	– Intervalos das bordas.	37
FIGURA 12	– Pontos fantasmas e condições de contorno.	38
FIGURA 13	– Malha do sistema de equações.	40
FIGURA 14	– Página inicial interface AppDesigner.	41
FIGURA 15	– Fluxograma algoritmo.	42
FIGURA 16	– Propriedades geométricas do problema AppDesigner.	43
FIGURA 17	– Parâmetros AppDesigner.	44
FIGURA 18	– Condições de contorno do problema AppDesigner.	44
FIGURA 19	– Resultado das linhas equipotencias pelo AppDesigner.	45
FIGURA 20	– Interface inicial Excel [®]	48
FIGURA 21	– Modificação da largura das colunas do Excel [®]	49
FIGURA 22	– Modificação da altura das linhas do Excel [®]	49
FIGURA 23	– Malha da barragem no Excel [®]	51
FIGURA 24	– Malha com respectivas fórmulas no Excel [®]	52
FIGURA 25	– Modelo de dados do projeto SEEP/W [®]	54
FIGURA 26	– Grade do modelo SEEP/W [®]	55
FIGURA 27	– Análise SEEP/W [®]	56
FIGURA 28	– Iterações SEEP/W [®]	56
FIGURA 29	– Sistema de eixos SEEP/W [®]	57
FIGURA 30	– Contorno do problema via SEEP/W [®]	58
FIGURA 31	– Região do maciço via SEEP/W [®]	58
FIGURA 32	– Definição do material do maciço via SEEP/W [®]	59
FIGURA 33	– Região Saturada via SEEP/W [®]	60
FIGURA 34	– Atribuição das condições de contorno conhecidas via SEEP/W [®] . .	60
FIGURA 35	– Condições de contorno via SEEP/W [®]	61
FIGURA 36	– Quedas de potencial via SEEP/W [®]	62
FIGURA 37	– Malha solução segundo Das (2007).	64
FIGURA 38	– Interpolação entre dois pontos.	64
FIGURA 39	– Traçado linhas equipotenciais via algoritmo MATLAB [®]	65
FIGURA 40	– Traçado linhas equipotenciais via Excel [®]	66
FIGURA 41	– Traçado linhas equipotenciais via SEEP/W [®]	67
FIGURA 42	– Coordenadas analisadas da malha.	68
FIGURA 43	– Cargas Piezométricas das coordenadas nas seções S1 e S2.	71
FIGURA 44	– Cargas Piezométricas das coordenadas nas seções S3 e S4.	71
FIGURA 45	– Cargas Piezométricas das coordenadas nas seções S5 e S6.	72

FIGURA 46 – Cargas Piezométricas das coordenadas nas seções S7 e S8.	72
FIGURA 47 – Cargas Piezométricas das coordenadas nas seções S9 e S10. ...	73
FIGURA 48 – Cargas Piezométricas das coordenadas nas seções S11 e S12. ..	73
FIGURA 49 – Cargas Piezométricas das coordenadas nas seções S13 e S14. ..	74
FIGURA 50 – Erro relativo (%) máximo e mínimo nas seções.	77

LISTA DE TABELAS

TABELA 1	– Coeficiente de Permeabilidade.	16
TABELA 2	– Requisitos iniciais para modelagem via MATLAB [®]	43
TABELA 3	– Quantidade de elementos no Excel [®]	50
TABELA 4	– Alterações eixo vertical Excel [®]	53
TABELA 5	– Coordenadas em análise.	68
TABELA 6	– Erro relativo (%) entre Das (2007) e soluções.	75

LISTA DE SIGLAS

<i>MDF</i>	Método das Diferenças Finitas
<i>MEF</i>	Método dos Elementos Finitos
<i>EDP</i>	Equação Diferencial Parcial

LISTA DE SÍMBOLOS

v	Velocidade de percolação [m/s]
k	Coefficiente de permeabilidade do solo [m/s]
i	Gradiente hidráulico [adimensional]
kh	Coefficiente de permeabilidade horizontal na camada de solo [m/s]
k_v	Coefficiente de permeabilidade vertical na camada de solo [m/s]
Δh	Varição de carga hidráulica total entre dois pontos [m]
L	Distância entre dois pontos distintos [m]
∂h	Taxa de variação de carga hidráulica total
L_x	Distância unitária no eixo x
L_y	Distância unitária no eixo y
L_z	Distância unitária no eixo z
h	Carga hidráulica total [m]
u	Poropressão [kN/m^2]
g	Aceleração da gravidade [m/s^2]
γ_w	Peso específico da água [kN/m^3]
Z	Carga altimétrica [m]
q_e	Vazão de entrada
q_s	Vazão de saída
dv	Taxa de variação de velocidade
Δq	Taxa de armazenamento de água no elemento
$\Delta q, tot$	Taxa de armazenamento de água total no elemento
$\partial q, tot$	Taxa de armazenamento de água total no elemento, em linguagem matemática
∂V	volume do elemento infinitesimal, em linguagem matemática
S_r	Grau de saturação do solo
e	Índice de vazios
∂t	Taxa de variação em função do tempo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	OBJETIVOS	14
2.1	Objetivo Geral	14
2.2	Objetivos Específicos	14
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	15
3.1	Movimento da água no solo	15
3.1.1	Lei de Darcy	15
3.2	Equação de Bernoulli	17
3.3	Rede de Fluxo	17
3.4	Equação da Continuidade	18
3.5	Método das Diferenças Finitas (<i>MDF</i>)	24
3.5.1	Expansão em série de Taylor	25
3.6	Métodos de Resolução de Sistemas Lineares	29
3.6.1	Métodos Iterativos	29
3.6.2	Método de Jacobi	30
3.7	Softwares aplicados	31
3.7.1	Software MATLAB®	31
3.7.2	Software Excel®	31
3.7.3	Software GeoStudio-SEEP/W®	31
4	METODOLOGIA	33
4.1	Descrição das etapas e softwares	33
4.2	Caracterização das condições do problema	34
4.3	Discretização do domínio - <i>MDF</i>	35
4.4	Interface de cálculo do algoritmo via MATLAB®	40
4.4.1	Limitação do algoritmo	46
4.4.2	Convergência e Ordem do Método - MATLAB®	47
4.5	Modelagem do problema via Excel®	47
4.5.1	Interface do Excel®	47
4.5.2	Determinação da malha nos elementos do Excel®	50
4.5.3	Desenvolvimento gráfico via Excel®	52
4.6	Modelagem via GeoStudio -SEEP/W®	53
4.6.1	SEEP/W® - Configurações iniciais	54
4.6.2	SEEP/W® - Definição do problema	55
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	63
5.1	Soluções do problema	63
5.1.1	Carga Hidráulica Piezométricas do problema segundo Das (2007)	63
5.1.2	Carga Hidráulica Piezométrica via algoritmo MATLAB®	65
5.1.3	Carga Hidráulica Piezométrica via Excel®	66
5.1.4	Carga Hidráulica Piezométrica via GeoStudio-SEEP/W®	66
5.2	Avaliação global de divergência de resultados	67
5.3	Coordenadas analisadas	67
5.4	Carga Hidráulica Piezométrica nas coordenadas analisadas	68
5.5	Erro Relativo	74
5.5.1	Convergência Global	77
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS	79

REFERÊNCIAS	80
Anexo A – ALGORITMO VIA MATLAB ASSOCIADO AO APP DESIGNER	83

1 INTRODUÇÃO

No Brasil, as barragens têm importância vital em quase todas as atividades de cunho econômico, pois, a maior parcela do sistema energético do país necessita da funcionalidade e constante operação destas estruturas (BARBOZA; FLORIANO, 2018).

No contexto de grandes barragens, segundo Lopes (2016) a catástrofe gerada pelo rompimento da barragem de Mariana é um caso de falta de fiscalização e controle das condições da barragem e do maciço de rejeito.

Estudos de conjunto de acidentes habitualmente podem ser relacionados por categorias, tais como percolação, instabilidade e erosão, não necessariamente levando em conta as particularidades dos mecanismos que atuaram (SANDRONI, 2006).

De modo geral, grande parte dos problemas das engenharias e ciências são governados por equações diferenciais, fazendo com que métodos numéricos sejam de grande importância para soluções dos mesmos.

No caso da engenharia geotécnica, diversos casos são descritos por equações diferenciais, que por muitas vezes podem ser bastante complexos, e assim, o uso de métodos analíticos dificulta a obtenção de soluções válidas e confiáveis.

Nesse contexto, o presente trabalho tem por finalidade a realização de análises numéricas utilizando o Método das Diferenças Finitas (*MDF*) via MATLAB[®] e Excel[®], para a solução da Equação Diferencial Parcial (*EDP*) que rege o problema de percolação de água em maciço terroso saturado, homogêneo e isotrópico, problema proposto por Das (2007), realizando o traçado das linhas equipotenciais obtidas com a solução da *EDP*, e assim, verificar os resultados com o auxílio do software GeoStudio-SEEP/W[®].

Este trabalho se justifica, diante do grande potencial no uso do *MDF* para a previsão de cargas hidráulicas em maciços terrosos saturados, sendo de grande relevância o presente estudo realizado para a engenharia geotécnica.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivo Geral

Este estudo tem por objetivo a utilização do Método das Diferenças Finitas para solução da equação diferencial parcial que rege o problema em estudo proposto por Das (2007), para obtenção das linhas equipotenciais e análise de convergência de resultados.

2.2 Objetivos Específicos

Para o desenvolvimento deste trabalho os seguintes objetivos específicos são apresentados:

- Desenvolver um modelo computacional utilizando o *MDF* via software MATLAB[®] para elaboração do traçado das linhas equipotenciais de maciços terrosos, seguindo o modelo de barragem embutida em solo;
- Realizar modelagem utilizando o *MDF* via software Excel[®] para traçado das linhas equipotenciais do maciço terroso em estudo;
- Operar uma modelagem via software SEEP/W[®] para traçado das linhas equipotenciais do maciço terroso em análise no estudo;
- Executar um estudo comparativo entre os resultados obtidos via algoritmo MATLAB[®], Excel[®], SEEP/W[®] e solução segundo Das (2007);

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo tem como propósito apresentar de modo contextualizado os conceitos presentes na literatura técnico-científica sobre o tema deste trabalho. A fundamentação teórica abrange as definições de percolação de água em meios porosos (solo), Método das Diferenças Finitas e uma breve síntese sobre a aplicação dos conceitos matemáticos do método numérico na análise da percolação em maciços terrosos isotrópicos, homogêneos e saturados.

3.1 Movimento da água no solo

Segundo Fernandes (2016), o movimento da água no solo pode ser descrito através de equações de percolação, na situação em que características da percolação não variam com o tempo, porém variam com a posição, trata-se da condição em regime estacionário ou permanente.

3.1.1 Lei de Darcy

De acordo com Das (2007), a velocidade de percolação da água através dos poros do solo obedece Lei de Darcy¹, no estado estacionário e fluxo laminar, descrita segundo a equação (1),

$$v = -k.i, \quad (1)$$

em que:

v : Velocidade de percolação [m/s];

k : Coeficiente de permeabilidade do solo [m/s];

i : Gradiente hidráulico [adimensional], sendo o gradiente hidráulico a perda de carga hidráulica que ocorre na direção da percolação.

Conforme Vieira (2000), a maioria dos solos não é isotrópico em relação à permeabilidade, desse modo, “ k ” varia de acordo com a direção de percolação. A

¹A equação geral da percolação em meio saturado leva esse nome em honra ao engenheiro hidráulico Henry Darcy, equação descoberta por seus ensaios de infiltração vertical de água realizados em filtros de materiais porosos em condições saturadas.

razão de anisotropia é denotada por $rk = kh/kv$ e depende da relação de índice de vazios, sendo:

kh : Coeficiente de permeabilidade horizontal na camada de solo [m/s];

kv : Coeficiente de permeabilidade vertical na camada de solo [m/s].

O sinal negativo da equação (1) é devido ao fato de que o gradiente hidráulico diminui na medida em que a água se movimenta no maciço de solo.

O coeficiente de permeabilidade (k) é a medida que expressa a facilidade com que o fluido é transportado através de um meio poroso (BEAR; VERRUIJT, 1987). É um coeficiente que depende tanto da matriz sólida como das propriedades do fluido.

A Tabela 1 representa de modo geral os coeficientes de permeabilidade dos materiais que podem ser encontrados.

Tabela 1: Coeficiente de Permeabilidade.

Material	Coeficiente de Permeabilidade k (cm/s)
Rochas Maciças	$< 10^{-9}$
Argilas Sedimentares	$10^{-7} - 10^{-8}$
Solos Compactados (k_y)	10^{-7}
Rochas Alteradas	10^{-6}
Siltes	10^{-6}
Rochas Maciças com Fissuras de 0,1 mm/m	$4 \cdot 10^{-3}$
Areias Finas	10^{-3}
Areais Grossas	$10^{-2} - 5 \cdot 10^{-2}$
Brita	$> 10^{-1}$

Fonte: Adaptado de Cruz (2004).

Segundo Marques et al. (2008), a perda de carga hidráulica total entre dois pontos “ Δh ” pode ser expressa pela equação (2).

$$i = \frac{\Delta h}{L}, \quad (2)$$

sendo:

Δh : Variação de carga hidráulica entre dois pontos, um a montante e outro a jusante [m];

L : Distância entre dois pontos distintos [m].

De acordo com Lajinha (2005), a Lei de Darcy também pode ser descrita para o caso de percolação tridimensional, em sua forma generalizada, no qual denotando o gradiente hidráulico “ i ” em variáveis de derivadas parciais para a taxa de variação de carga hidráulica “ Δh ”, para “ ∂h ”, portanto pode ser expressa pela equação (3), com

as seguintes notações:

$$\vec{v} = - \left(\frac{kx \cdot \partial h}{L_x} \cdot \vec{i} + \frac{ky \cdot \partial h}{L_y} \cdot \vec{j} + \frac{kz \cdot \partial h}{L_z} \cdot \vec{k} \right), \quad (3)$$

assim:

∂h : Taxa de variação de carga hidráulica total,

L_x : Distância unitária no eixo x,

L_y : Distância unitária no eixo y,

L_z : Distância unitária no eixo z.

3.2 Equação de Bernoulli

A Equação de Bernoulli (4), de acordo com Moreira (2007), avalia as cargas totais a partir de suas parcelas piezométrica, cinética e altimétrica, respectivamente como aparecem na equação, porém, o valor de carga cinética é desprezível na maioria dos casos devido a sua baixa contribuição em relação as outras cargas.

$$h = \frac{u}{\gamma_w} + \frac{v^2}{2g} + Z, \quad (4)$$

em que:

h : Carga hidráulica total [m],

u : Poropressão [kN/m^2],

g : Aceleração da gravidade [m/s^2],

γ_w : Peso específico da água [kN/m^3],

Z : Carga altimétrica [m].

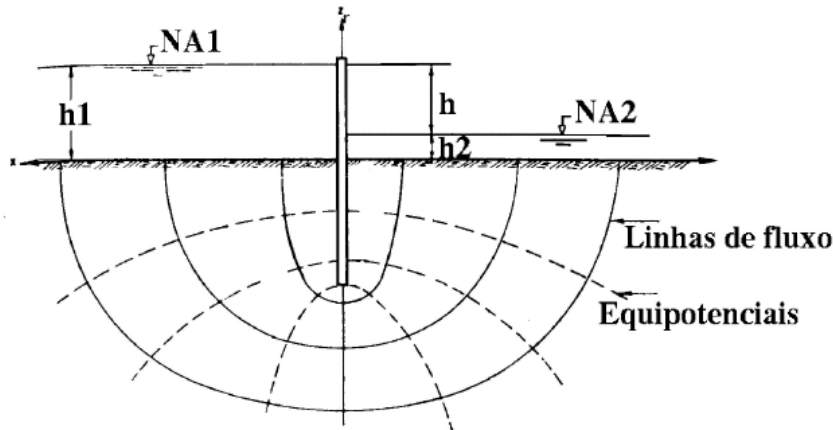
Corforme Cengel e Cimbala (2015), a equação de Bernoulli é aplicável para todo regime permanente de fluidos, ou seja, as propriedades do fluido em um ponto qualquer não mudam com o tempo, porém podem mudar para diferentes pontos.

3.3 Rede de Fluxo

Segundo Pinto (2000), a rede de fluxo é constituída por duas famílias de curvas ortogonais entre si (90°) em maciços isotrópicos. As linhas de fluxo, definem o caminho das partículas de águas, de montante para jusante, e nas linhas equipotenciais as cargas piezométricas são iguais em todos os pontos ao longo de uma mesma linha.

A Figura 1 ilustra um modelo de rede de fluxo em um maciço terroso.

Figura 1: Rede de fluxo em maciço homogêneo, isotrópico e saturado.



Fonte: Machado e Machado (1997).

Dessa forma, as linhas contínuas pretas presentes na Figura 1 são caracterizadas como linhas de fluxos e as linhas tracejadas como sendo as linhas equipotenciais.

Vale ressaltar que o termo fluxo diversas vezes é utilizado de maneira equivocada, pois “fluxo” caracteriza a passagem de um fluido de forma contínua, no qual não é o que acontece na prática nesses casos, portanto “percolação” seria melhor utilizado para a finalidade.

3.4 Equação da Continuidade

A equação da continuidade nada mais é do que uma equação da conservação de massa, a qual estabelece por meio de formulações matemáticas que não pode existir nem a criação e nem a destruição da massa (LIBARDI, 2012).

Esta equação relaciona o volume de entrada e volume de saída de água em um dado elemento de solo, permitindo descrever uma situação de fluxo transiente e determinar para qualquer ponto no interior de um perfil de solo a umidade em função do tempo e da posição (REICHARDT, 1985).

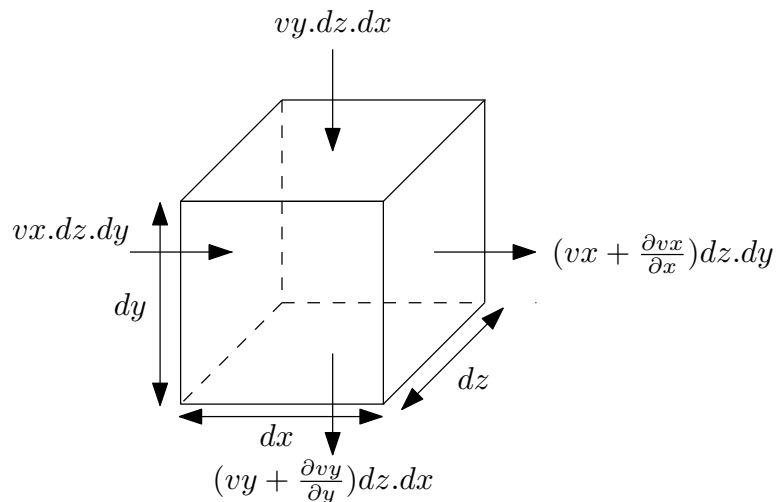
Segundo Jesus e Pereira (2004), a percolação de água através de maciços terrosos é regida pela equação de Laplace², em que sua solução gera uma rede de percolação, que se consiste em linhas equipotenciais (mesma carga hidráulica)

²A equação de Laplace leva esse nome em honra a Pierre-Simon de Laplace, que a partir de 1782 estudou extensivamente, suas soluções ao investigar a atração gravitacional de corpos arbitrário no espaço.

e linhas de percolação (denota o caminho da água pelo elemento), ortogonais entre si.

De acordo com Das (2007), o solo é um material heterogêneo e poroso, devido aos diversos componentes em sua constituição torna-se bastante complexo sua análise. Considerando o mesmo um elemento infinitesimal de solo permeável, de dimensões dx , dy e dz , conforme a Figura 2.

Figura 2: Percolação de água em um elemento infinitesimal de solo.



Fonte: Adaptado de Das (2007).

Conforme apresentado por Moreno (2010), o estudo matemático da percolação de água no solo tem como princípio a equação da conservação da massa. Assim, o volume de água que entra em um elemento representativo menos o volume de sua saída, é igual a taxa de armazenamento de água nesse volume.

Sendo que os termos v_x e v_y são componentes de velocidade de percolação nas direções horizontal e vertical, respectivamente. Sendo a vazão de entrada (q_e) de água é dada por $v_x.dz.dy$ na direção horizontal do mesmo, e $v_y.dz.dx$ na direção vertical, como demonstra as equações (5) e (6).

$$q_{e,x} = v_x.dz.dy, \quad (5)$$

$$q_{e,y} = v_y.dz.dx, \quad (6)$$

em que:

q_e : Vazão de entrada.

De acordo com Rijo (2017) as vazões de saída do elemento, sofrem influência da percolação de água das outras componentes, no qual o termo representado por

$\frac{\partial v_x}{\partial x} dx$, para o eixo horizontal de referência, representa a taxa de variação da velocidade de percolação na direção de x , no qual é equivalente para os outros eixos y e z . Assim as vazões serão dadas as pelas equações (7) e (8).

$$q_{s,x} = \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dy \cdot dz, \quad (7)$$

$$q_{s,y} = \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \right) dx \cdot dz, \quad (8)$$

em que:

q_s : Vazão de saída.

Para Marangon (2006), taxa de variação de velocidade dv pode ser escrita como sendo $\frac{\partial v_x}{\partial x} dx$ para o eixo horizontal, a equação (9) mostra a aplicação da derivação total para o termo dv_x .

$$dv_x = \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot dz \right), \quad (9)$$

no qual:

dv : Taxa de variação de velocidade, em nova notação.

Portanto, como as taxas de variação de velocidade para o eixo horizontal x não tem variações nas coordenadas y e z , assim os valores de $dy = dz = 0$, fazendo com que o valor de dv_x seja dado pela equação equação (10).

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dx. \quad (10)$$

Segundo Pinto (2000), a água é um fluido incompressível e nenhuma variação de volume ocorre na massa de solo no decorrer do tempo, e portanto é possível aplicar supondo que o solo é possui uma taxa de armazenamento de água, característica de solos que possuem parâmetros diferentes em pontos quaisquer no maciço de solo, ou seja, para solos não saturados.

Desse modo, a taxa de armazenamento de água (Δq), é obtida através da diferença entre vazão de entrada e vazão de saída do elemento infinitesimal, de modo que a equação (11) seja válida.

$$\Delta q = q_e - q_s,$$

$$\Delta q = -\frac{\partial v}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz, \quad (11)$$

em que :

Δq : Taxa de armazenamento de água no elemento.

Ao empregar o mesmo raciocínio utilizado na equação (11) para as três direções, x, y e z, se obtém as equações (12), (13) e (14).

$$\Delta q_x = -\frac{\partial v_x}{\partial x}.dx.dy.dz, \quad (12)$$

$$\Delta q_y = -\frac{\partial v_y}{\partial y}.dx.dy.dz, \quad (13)$$

$$\Delta q_z = -\frac{\partial v_z}{\partial z}.dx.dy.dz. \quad (14)$$

De acordo com Unas et al. (2010), a soma das três parcelas de taxa de armazenamento de água representam a variação de volume total no elemento correspondente as três direções, como mostra a equação (15):

$$\Delta q_{,tot} = -\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right).dx.dy.dz, \quad (15)$$

no qual:

$\Delta q_{,tot}$: Taxa de armazenamento de água total no elemento.

No qual, $dx.dy.dz$ é o volume do elemento infinitesimal, podendo assim ser escrito como dV e simplificando a equação (15), como mostrado pela equação (16).

$$\frac{\Delta q_{,tot}}{dV} = -\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right). \quad (16)$$

A equação (16) pode ser modificada de modo que Δ seja equivalente a ∂ , pois os dois são taxas de variação, e ∂ representa melhor a variação quando se trata de questões tridimensionais. Logo, a equação (16) é descrita matematicamente, conforme mostrado pela equação (17).

$$\frac{\partial q_{,tot}}{\partial V} = -\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right), \quad (17)$$

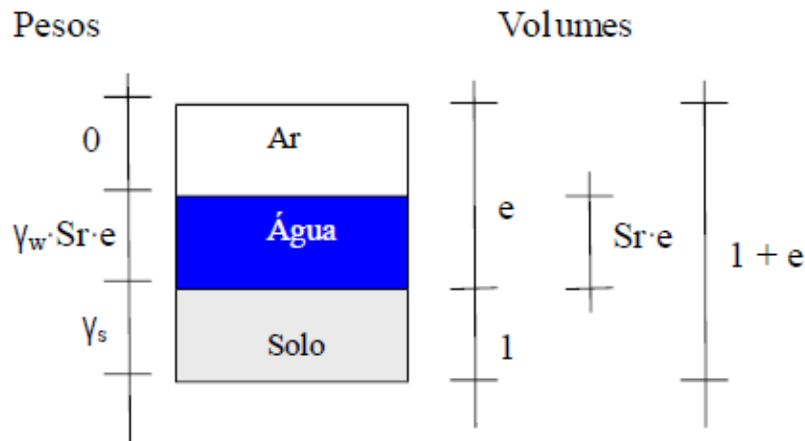
sendo:

$\partial q_{,tot}$: Taxa de armazenamento de água total no elemento, em linguagem matemática,

∂V : volume do elemento infinitesimal, em linguagem matemática.

Ao escrever a taxa de armazenamento total de água do elemento em relação ao seu próprio volume, o mesmo pode ser expresso a partir dos índices físicos do solo, como apresenta a Figura 3.

Figura 3: Diagrama simplificado de fases do solo.



Fonte: Sandroni (2006).

De modo geral para Sandroni (2006), o solo é constituído por matéria sólida, matriz sólida, e por poros (vazios), ocupando o espaço intersticial, através da Figura 3 é possível escrever a taxa de armazenamento de água em relação ao seu grau de saturação do solo (Sr) e seu índice de vazios (e), que representam o volume de água no elemento.

Conforme Gersovich (2011), para o volume total presente no solo, o mesmo pode ser reescrito em relação ao índice de vazios, como representa a equação (18),

$$\frac{\partial (Sr \cdot e)}{\partial t (1 + e)} = - \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right), \quad (18)$$

sendo:

Sr : Grau de saturação do solo,

e : Índice de vazios,

∂t : Taxa de variação em função do tempo.

Trabalhando com as equações supracitadas, se obtêm a equação (19),

$$\frac{\partial (Sr \cdot e)}{\partial t (1 + e)} = \left(k_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + k_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} + k_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \right). \quad (19)$$

Simplificando e aplicando as propriedades de derivação, têm-se a equação (20),

$$\frac{\partial (Sr \cdot e)}{\partial t (1 + e)} = \left(k_x \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right). \quad (20)$$

Segundo Unas et al. (2010), a equação (20) representa o caso geral para

percolação de água em um solo não saturado, com heterogeneidade e anisotropia, de modo que valores de coeficiente de permeabilidade e cargas hidráulicas sejam dependentes da coordenada em análise, assim como o grau de saturação da mesma.

Assim, a resolução analítica de problemas reais com tais considerações são complexas a níveis de necessidade de diversas simplificações, contudo técnicas computacionais como Método das Diferenças Finitas (*MDF*) e o Método dos Elementos Finitos (*MEF*), torna possível tais resoluções para diferentes condições de contorno.

Segundo Marangon (2006), pela ocorrência de índices físicos constantes, o fenômeno é caracterizado por:

A) Índice de vazios(e) e Grau de Saturação(Sr) constantes

Descrevem a percolação de água em regime permanente/estacionário, no qual as condições não variam com o tempo e se considera $Sr=100\%$, ou seja, solo saturado, como representa a equação (21).

$$k_x \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0. \quad (21)$$

- Percolação em regime estacionário;
- Solo saturado ($Sr=100\%$);
- Não ocorre adensamento ou expansão durante a percolação, ou seja, $\frac{\partial(Sr \cdot e)}{\partial t(1+e)} = 0$;
- Solo homogêneo;
- Isotrópico ($k_x = k_y$);
- Validade da Lei de Darcy, ou seja, escoamento laminar do fluido.

Assim, a equação de Laplace (22) é descrita a partir das considerações realizadas para percolação de água em regime permanente, consideração (A), em que a solução geral da mesma é constituída por dois grupos de funções que representam as linha equipotenciais e linhas de fluxo (percolação), curvas que interceptam-se ortogonalmente entre si, conhecidas por redes de fluxo.

$$k_x \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0. \quad (22)$$

Segundo Pinto (2000), para solos isotrópicos ($k=k_x=k_y$), a equação (22) pode ser simplificada, obtendo portanto a equação (23).

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (23)$$

3.5 Método das Diferenças Finitas (*MDF*)

O método numérico das diferenças finitas é usado como uma abordagem alternativa para obter a aproximação da solução de uma equação diferencial parcial. A ideia básica desse método é transformar a resolução de uma equação diferencial em um sistema de equações algébricas, substituindo as derivadas por diferenças (LOPES; RUGGIERO, 1996).

As equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes são classificadas em três grupos: equações elípticas, equações parabólicas e equações hiperbólicas. Essa classificação é baseada no método das características, e é útil, pois relaciona problemas de engenharia e suas técnicas de solução (CHAPRA; CANALE, 2008).

O método numérico do *MDF* se consiste na técnica numérica para solução aproximada de uma Equação Diferencial Parcial (*EDP*), no trabalho em questão trata-se de uma *EDP* elíptica, no qual, ocorre a substituição das derivadas parciais por fórmulas discretas de diferenças, resolvendo portanto um sistema de equações algébricas.

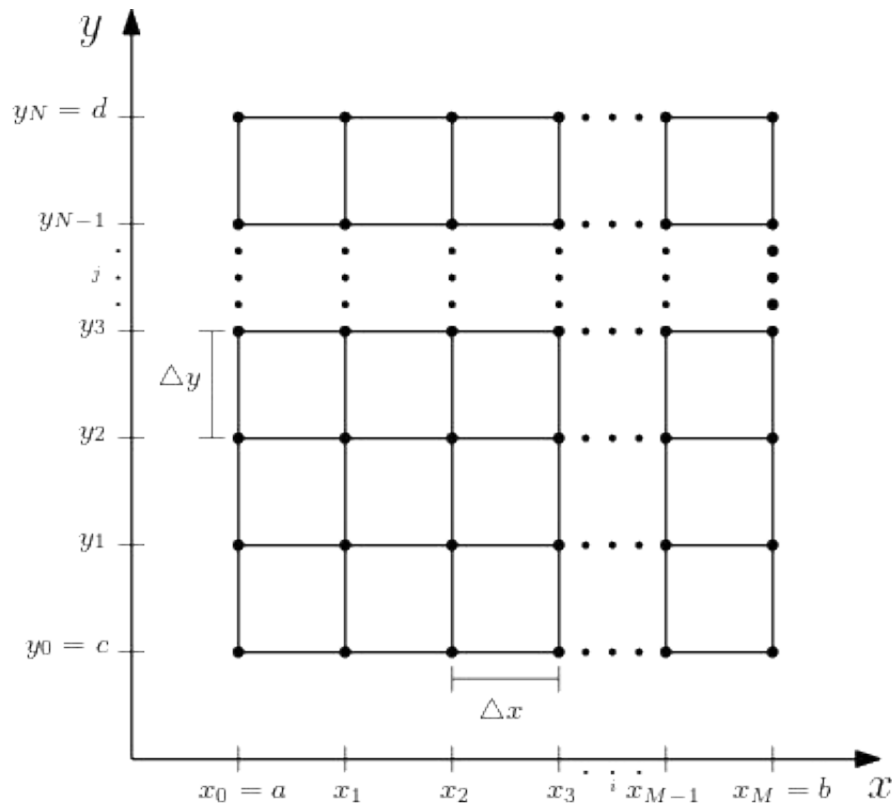
A primeira etapa para resolução de qualquer método numérico envolvendo as equações diferenciais parciais é discretizar a região onde se procura a solução. Para a discretização define-se uma malha, que é um conjunto finito de pontos pertencentes ao domínio, chamados nós da malha (FERREIRA; LIMA, 2010).

Segundo Andreotti (2018), a partir das variáveis independentes x e y , seleciona-se números inteiros $M > 0$ e $N > 0$ e divide o intervalo $[a, b]$ em M subintervalos, e divide-se o intervalo $[c, d]$ em N subintervalos, tendo eles o mesmo comprimento. Os passos de discretização terão espaçamento nas abscissas $\Delta x = (b - a)/M$, e espaçamento para as ordenadas $\Delta y = (d - c)/N$. E portanto, os pontos em coordenadas (x_i, y_j) , são representados por,

$$\begin{cases} x_i = a + \Delta x \cdot (i - 1), \forall i = 0, 1, 2, 3, \dots, M, \\ y_j = c + \Delta y \cdot (j - 1), \forall j = 0, 1, 2, 3, \dots, N. \end{cases}$$

Nos pontos da malha localizados nas extremidades, $x_0 = a, x_M = b, y_0 = c, y_N = d$, conforme representa a Figura 4.

Figura 4: Domínio discretizado.



Fonte: Autoria própria (2020).

Os nós na malha são separados entre si por Δx e Δy para a direção horizontal e vertical, respectivamente, chamados também de passos horizontais e verticais, e não necessariamente iguais. Os índices N e M identificam um ponto na n -ésima coluna e m -ésima linha.

O *MDF* aproxima as derivadas na equação diferencial que governa o problema por meio do truncamento da expansão da série de Taylor de acordo com Chapra e Canale (2008).

3.5.1 Expansão em série de Taylor

Conforme Domingues et al. (2017), o Método das Diferenças Finitas Unidimensional, utiliza como base a expansão truncada na segunda derivada da série de Taylor³, pela facilidade de se trabalhar com a função e suas derivadas, para uma função f contínua no intervalo $[a, b]$, pode-se escrever a expansão da série de Taylor

³Séries de Taylor recebe o nome em homenagem a Brook Taylor que as estudou no trabalho *Methodus incrementorum directa et inversa* em 1715, em que o nome série de Taylor começou a ser usado em 1786, por l'Huillier.

pela equação (24).

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n. \quad (24)$$

O matemático Brook Taylor (1685-1731), publicou em sua obra *Incrementorum Directa et Inversa* a hoje conhecida série de Taylor, apresentada em outra notação abaixo,

$$f(x) = f(x_0) + (\Delta x) \cdot \frac{df(x_0)}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \cdot \frac{d^2f(x_0)}{dx^2} + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{d^n f(\xi)}{dx^n}$$

Segundo os conceitos de Burden e Faires (2010), $\Delta x = x - x_0$, também chamado de passo horizontal na malha, e $\xi \in [a, b]$, no qual o último termo do polinômio acima descrito é chamado de Resto R_N . Os valores de passo, tanto vertical quanto horizontal, para N ou M pontos em que a malha é subdividida, podem ser obtidos pelas equações abaixo, para horizontal e vertical, respectivamente,

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{b-a}{N+1}, \\ \Delta y = \frac{d-c}{M+1}. \end{cases}$$

Segundo Radtke (2018), o desenvolvimento de Diferenças Avançadas na série de Taylor é representada segundo a formulação abaixo,

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + (\Delta x) \frac{df(x_i)}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \cdot \frac{d^2f(x_i)}{dx^2} + \dots + \frac{(\Delta x)^N}{N!} \frac{d^N f(\xi)}{dx^N}.$$

Assim como a representação para a propriedade de Diferenças Atrasadas, para o ponto $x_i = i - \Delta x$, expandindo a série de Taylor para $f(x_i - \Delta x)$, temos que:

$$f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - (\Delta x) \frac{df(x_i)}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \cdot \frac{d^2f(x_i)}{dx^2} + \dots + \frac{(\Delta x)^N}{N!} \frac{d^N f(\xi)}{dx^N}.$$

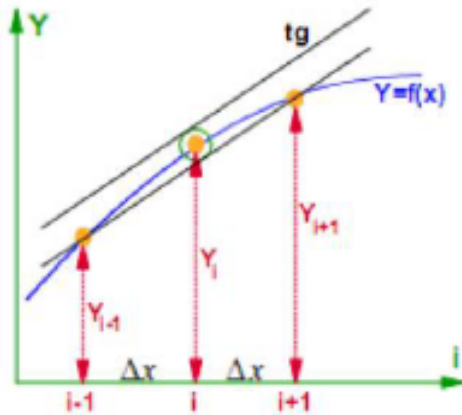
De acordo com Brandi (2018), truncando as equações acima de Diferenças Avançadas e Atrasadas na segunda derivada e isolando os termos de derivada de segunda ordem, e chamando os termos de grau acima da segunda derivada de erro ($O(\Delta x)^2$), temos somando as duas equações, a seguinte formulação:

$$\frac{d^2f(x_i)}{dx^2} = \frac{f(x_i - \Delta x) - 2f(x_i) + f(x_i + \Delta x)}{(\Delta x)^2}.$$

De acordo com Rosa et al. (2012), o erro gerado pelo truncamento da equação acima descrito ($O(\Delta x)^2$) para diferenças centradas, equação acima descrita através da diferença entre $f(x_i + \Delta x)$ e $f(x_i - \Delta x)$, trabalhando-se com um erro menor ao

se comparar com o esquema de Diferenças avançadas e atrasadas, como mostra a Figura 5.

Figura 5: Interpretação da derivada em pontos aplicados.



Fonte: Soares (2010).

Conforme Fortuna (2000), a solução numérica não será exata devido a diversos fatores, que podem ser devidos ao erro de truncamento para as aproximações das derivadas nas *EDP's* via série de Taylor, ao arredondamento feitos pelo software ou operador, pelas aproximações das condições de contorno do problema em questão e pelo tamanho do passo escolhido para solução do problema.

Segundo Burden e Faires (2010), as equações representativas das derivadas parciais para as variáveis x e y , são representadas pelas equações (25) e (26) .

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} = \frac{u(x_i - \Delta x, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i + \Delta x, y_j)}{(\Delta x)^2}. \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} = \frac{u(x_i, y_j - \Delta y) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j + \Delta y)}{(\Delta y)^2}. \quad (26)$$

A equação de Laplace seguindo os parâmetros das equações (25) e (26), é representado pela formulação abaixo.

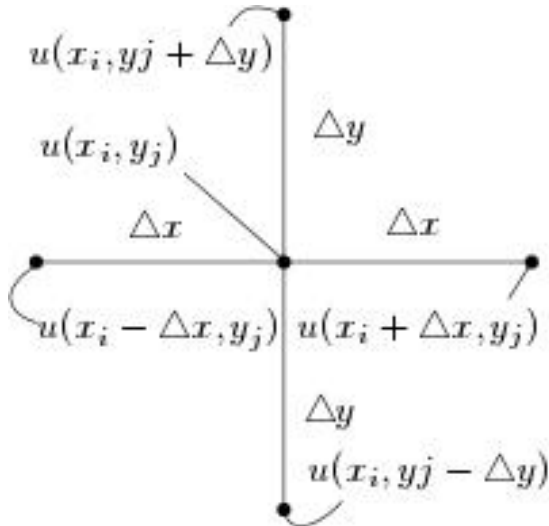
$$\frac{u(x_i - \Delta x, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i + \Delta x, y_j)}{(\Delta x)^2} + \frac{u(x_i, y_j - \Delta y) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j + \Delta y)}{(\Delta y)^2} = 0.$$

Conforme Biezuner (2007), para passos iguais Δx e Δy , é possível simplificar a formulação acima, obtendo portanto a equação (27).

$$u(x_i, y_j) = \frac{u(x_i + \Delta x, y_j) + u(x_i - \Delta x, y_j) + u(x_i, y_j - \Delta y) + u(x_i, y_j + \Delta y)}{4}. \quad (27)$$

A equação (27) é válida para todos os pontos da malha, como apresenta a Figura 6.

Figura 6: Pontos cruzados do domínio discretizado.



Fonte: Autoria própria (2020).

De acordo com Presoto et al. (2008), para todos os pontos de contorno pertencente ao domínio, basta que a fronteira satisfaça uma condição de regularidade do Problema de Dirichlet-Dirichlet⁴.

O outro caso para condição de contorno é caracterizado por Neves et al. (2012), em que trabalha com a derivada de um ponto na fronteira do domínio, caracterizado como problema de Neuman e Neuman⁵.

Após obtenção dos quocientes de diferenças e realizar a sua substituição, de acordo com Burden e Faires (2010), ao variar o ponto em torno do qual a expansão é feita obtém-se um sistema de equações algébricas, com a forma da equação (28),

$$A.x = b, \quad (28)$$

sendo “A” a matriz de coeficientes, “b” a matriz coluna de termos independentes e “x” a matriz coluna dos termos desconhecidos.

⁴A condição de contorno de Dirichlet-Dirichlet especifica o valor da função no contorno da malha.

⁵A condição de contorno de Neuman-Neuman especifica os valores dados por uma derivada na região do contorno do domínio.

3.6 Métodos de Resolução de Sistemas Lineares

De acordo com Cabreira et al. (2020), para diversos problemas do cotidiano depara-se com soluções matemáticas em que são modeladas por *EDP*, no caso em questão uma *EDP* elíptica.

A discretização desses problemas resultam-se em sistemas lineares, e assim, implica-se na necessidade de solução dos mesmos por métodos otimizados, como o uso do *MDF*, ou seja, de rápida solução, buscando resultados coerentes e de baixo custo computacional.

3.6.1 Métodos Iterativos

Segundo Bittencourt e Feijóo (1997), é necessário armazenar o número mínimo de elementos para a matriz de coeficientes A , de forma a tornar o método iterativo mais otimizado e reduzindo portanto o número de operações.

De acordo com Brandi (2018), após substituir os quocientes de diferenças na *EDP*, um sistema de equações lineares é formado, sendo ele,

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j = b_i, 1 \leq i \leq n,$$

ou na forma matricial,

$$A.x = b$$

No sistema linear da forma $Ax = b$, a matriz de coeficientes A é representada por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

Conforme Oliveira (2018), a decomposição da Matriz A em três matrizes, sendo elas L , D e U é realizada da forma,

$$A = L + D + U ,$$

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Após a decomposição nas três matrizes acima descritas, realiza-se uma nova decomposição da matriz A na forma,

$$A = M + N,$$

e sabendo que $Ax = b$, a seguinte forma pode ser representada,

$$Mx = b + Nx.$$

De acordo com Burden e Faires (2010), escolhe-se a matriz M pela facilidade de inversão da matriz, podendo ser elas L , D ou U . Portanto, o método iterativo será definido por,

$$Mx^{(k)} = b - Nx^{(k-1)},$$

sendo $x^{(0)}$ a aproximação de qualquer ponto escolhido e k o número de iterações, assim têm-se que $x^{(k)}$ e $x^{(k-1)}$ são vetores de n componentes avaliados para um número de k iterações.

3.6.2 Método de Jacobi

Segundo Pilling (2016), para análise matricial de um sistema $Ax = b$ pelo Método de Jacobi⁵, em que $a_{ii} \neq 0$ para todo i , no qual x_i pode ser descrito pela equação (29).

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j \right). \quad (29)$$

⁵O método de Jacobi é um algoritmo capaz de resolver sistemas lineares, recebendo o nome do matemático alemão Carl Gustav Jakob Jacobi que o desenvolveu.

Neste contexto, definindo um método iterativo, os valores representados por x_i^{k+1} e x_j^k serão utilizados no lugar de x_i e x_j , respectivamente, como mostrado na equação (30).

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^{i-1} a_{ij} x_j^k \right). \quad (30)$$

3.7 Softwares aplicados

3.7.1 Software MATLAB[®]

O MATLAB[®] combina um ambiente de desktop ajustado para análise iterativa e processos de design com uma linguagem de programação que expressa a matriz e a matemática matricial diretamente. Inclui o Live Editor para criar scripts que combinam código, saída e texto formatado em um bloco de notas executável (MATHWORKS, 2020).

Nas diversas áreas da engenharia (civil, mecânica, elétrica, cartográfica, sistemas e computação, etc), necessita-se, usualmente, de ferramentas computacionais que simplifiquem os procedimentos correntes dos engenheiros quando do desenvolvimento de modelos numéricos associados, por exemplo, a projetos reais. Essas ferramentas devem permitir, inclusive, que esses engenheiros possam visualizar todas as etapas do processo (SILVA et al., 2004).

3.7.2 Software Excel[®]

O programa Excel[®] é um programa escrito e produzido pela empresa Microsoft baseado em planilhas eletrônicas. O sistema é muito utilizado para cálculos, estatísticas, gráficos, relatórios, formulários e entre outros requisitos das rotinas empresariais, econômicas, administrativas e domésticas (MIRANDA, 2010).

Segundo Scalabrin et al. (2006), o software Excel[®] apresenta grande facilidade de visualização de dados e flexibilidade durante as simulações, e grande capacidade devido de diferentes análises pelo solver do programa.

3.7.3 Software GeoStudio-SEEP/W[®]

O SEEP/W consiste em um componente do pacote GeoStudio, desenvolvido pela GeoSlope. Este programa modela a percolação de água no interior dos solos

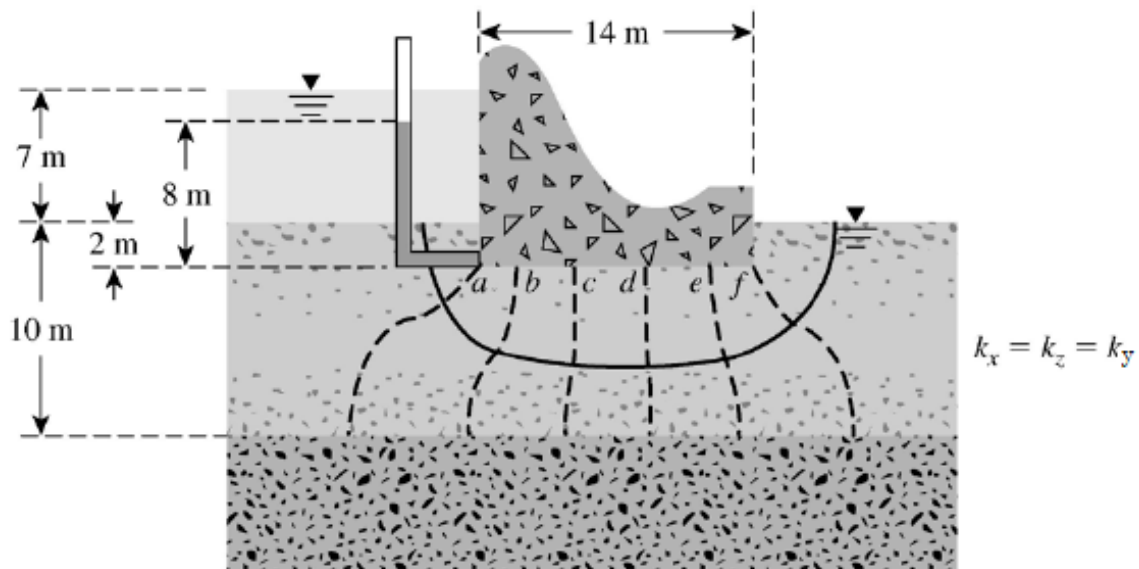
através da teoria dos elementos finitos, podendo considerar o fluxo em regime transiente ou estacionário. Com esse software é possível calcular o movimento das águas considerando o solo saturado, baseando-se na lei de Darcy, ou não saturado (GOMES, 2019).

O SEEP/W[®] é um poderoso software de elementos finitos para modelar o fluxo de águas subterrâneas em meios porosos. O SEEP/W[®] pode modelar problemas simples de estado estacionário saturado ou análises sofisticadas de transientes saturados/não saturados com acoplamento atmosférico na superfície do solo (GEOSTUDIO, 2020).

4 METODOLOGIA

Este estudo tem como base a utilização do Método das Diferenças Finitas (*MDF*), associado ao software MATLAB[®] e também ao software Excel[®], para resolução de um problema proposto por Das (2007), no qual trata o traçado da rede de percolação de um maciço terroso homogêneo, isotrópico, em condição de solo saturado, com regime permanente da lâmina de água e sistema não confinado, conforme apresentado na Figura 7.

Figura 7: Problema estudado.



Fonte: Adaptado de Das (2007).

No trabalho em questão, o foco na utilização do *MDF* foi para obtenção das linhas equipotenciais do maciço terroso, parcela necessária para o traçado da rede de percolação.

4.1 Descrição das etapas e softwares

O trabalho é apresentado em diferentes etapas, sendo a principal a elaboração de um algoritmo via MATLAB[®], em versão trial 2020, para resolver o caso de percolação de água em maciço terroso com barragem embutida, aceitando diferentes condições de contorno, ou seja, um modelo versátil para aplicação do *MDF*.

A etapa secundária foi a aplicação do *MDF* via Excel[®], para a modelagem e resolução do problema proposto em estudo por meio de uma malha equivalente, para servir como base comparativa de resultados e verificação do uso do método em diferentes softwares.

A terceira e última etapa foi a modelagem do problema em análise por meio do software SEEP/W[®]. Para análise da aplicabilidade do *MDF*, foi utilizado o software GeoStudio-SEEP/W[®], ferramenta com base computacional baseada no Método dos Elementos Finitos (*MEF*).

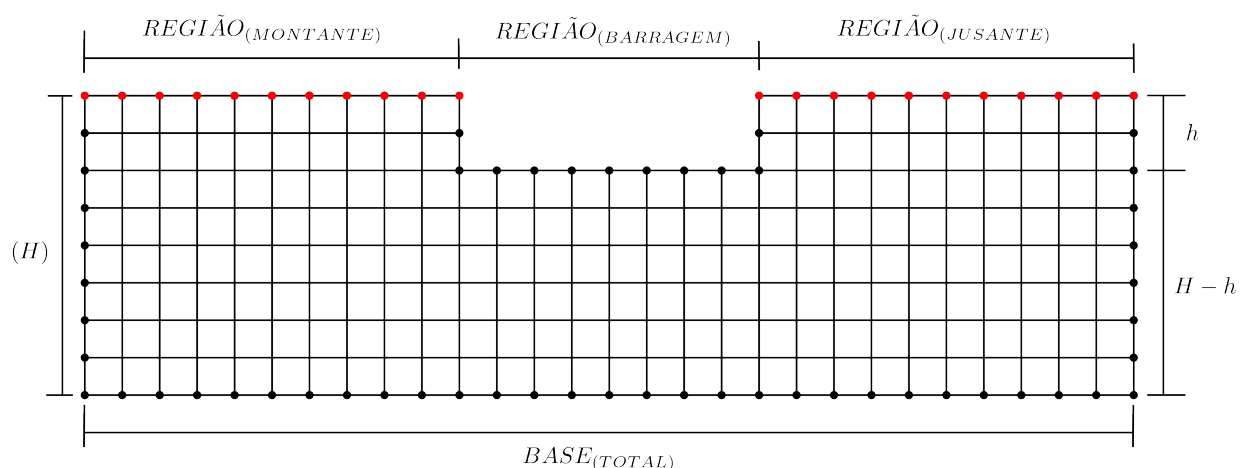
Portanto, ao utilizar um software comercial com implementação do *MEF*, outro método numérico reconhecido, acaba reforçando a base comparativa de resultados, tanto ao avaliar o uso do *MDF* quanto o traçado analítico realizado por Das (2007).

Desse modo, a modelagem do maciço terroso em cada software supracitado é descrita nos subitens seguintes, explicando sua implementação, a fim de obter os resultados de linhas equipotenciais.

4.2 Caracterização das condições do problema

O problema a ser discretizado segue a geometria e condições para modelagem do problema proposto presente na Figura 7, e será utilizado portanto para uma melhor visualização da malha o modelo genérico apresentado pela Figura 8.

Figura 8: Malha de Diferenças Finitas.



Fonte: Autoria própria (2020).

A região dos pontos vermelhos presentes na Figura 8 indicam as condições de contorno conhecidas no problema.

Desse modo, as características do problema e condições de contorno necessárias para modelagem presentes na Figura 7 são apresentadas o abaixo:

- a) Nível de água a montante: 7 m;
- b) Nível de água a jusante: 0 m;
- c) Embutimento da barragem (h): 2 m;
- d) Região superior esquerda ($REGIÃO_{(MONTANTE)}$) (Largura do maciço analisado a esquerda da barragem de concreto): 13 m;
- e) Região superior direita ($REGIÃO_{(JUSANTE)}$) (Largura do maciço analisado a direita da barragem de concreto): 11 m;
- f) Região da barragem ($REGIÃO_{(BARRAGEM)}$) (Região da base da barragem de concreto impermeável): 14 m;
- g) Base total ($BASE_{(TOTAL)}$) (Largura total do maciço em análise): 38 m;
- h) Espessura do maciço (H) (Espessura da camada de solo até o impermeável): 10 m.

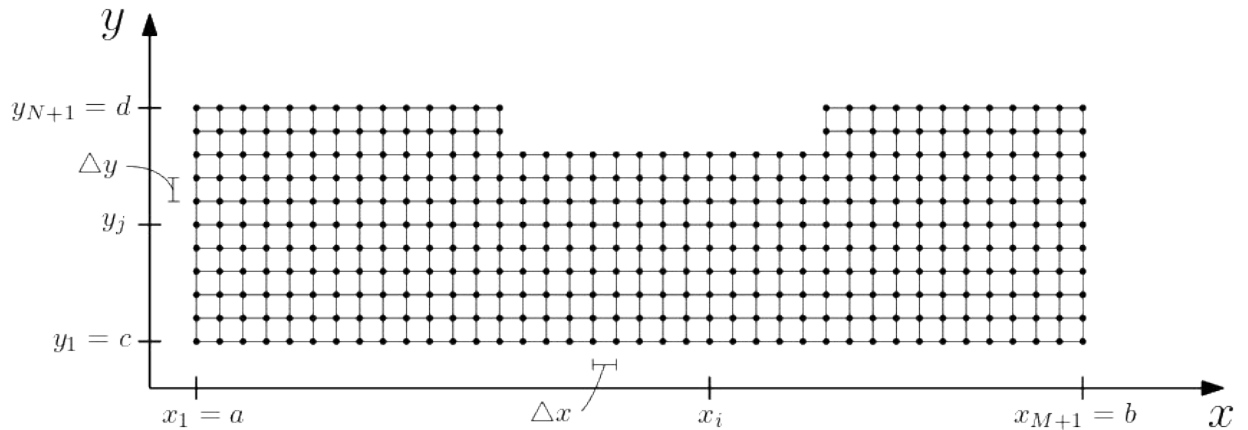
Todos os valores apresentados acima e não indicados na Figura 7 foram obtidos observando-se a escala impressa por Das (2007).

4.3 Discretização do domínio - MDF

Conforme descrito na Seção 3.5, para aplicação do método numérico, é necessário discretizar o domínio em análise de acordo com as condições do problema. Neste estudo, realizou-se a fixação do tamanho do passo com valor de 1, conforme cálculo manual realizado.

$$\begin{cases} \Delta x = B/(nx - 1) \Rightarrow \Delta x = 39/(40 - 1) = 1, \\ \Delta y = H/(ny - 1) \Rightarrow \Delta y = 10/(11 - 1) = 1. \end{cases}$$

Nesse contexto, o número de pontos em cada uma das direções X e Y é igual a $B + 1$ e $H + 1$, respectivamente. As extremidades desses subintervalos são pontos de contorno da malha, onde $x_1 = a$, $x_{M+1} = b$, $y_1 = c$ e $y_{N+1} = d$, conforme a Figura 9.

Figura 9: Domínio discretizado.

Fonte: Autoria própria (2020).

Uma malha é definida a partir do passo utilizado no *MDF*, quanto menor o tamanho do passo, maior será a malha de pontos na região, e portanto, quanto maior o tamanho do passo, menor o número de pontos e menor será a malha. Vale ressaltar que passos pequenos e portanto malha muito refinadas, podem gerar instabilidade no método.

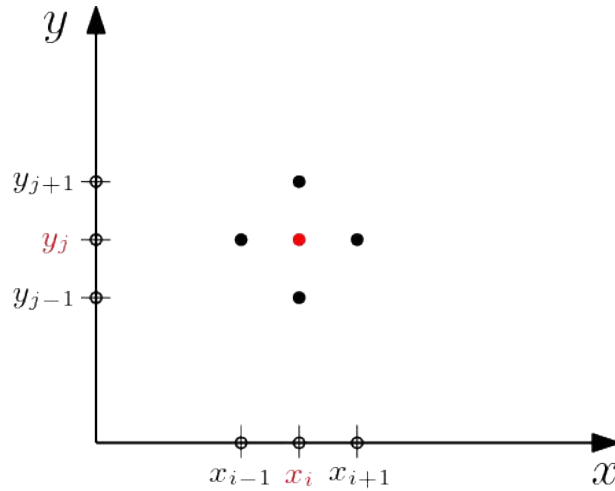
Como próxima etapa, realizou-se a alocação das aproximações das derivadas, ou seja, as diferenças finitas de acordo com o método numérico *MDF*, conforme apresentado na Seção 2.5.

Assim, utilizaremos a equação (27) e agora se faz necessário substituir os valores $u(x_i, y_j)$ por $w(x_i, y_j)$, de tal modo que seja válido $u(x_i, y_j) \approx w(x_i, y_j)$, e portanto, podendo desconsiderar o termo do erro pelo truncamento da segunda derivada da série de Taylor e trabalhando com a equação (31).

$$w(x_i, y_j) = \frac{w(x_i + \Delta x, y_j) + w(x_i - \Delta x, y_j) + w(x_i, y_j - \Delta y) + w(x_i, y_j + \Delta y)}{4}. \quad (31)$$

Localizando todos os pontos pertencentes a malha, percebe-se que para cada aproximação, utiliza-se pontos de uma região apresentada na Figura 10, centralizando cada ponto da malha como (x_i, y_j) .

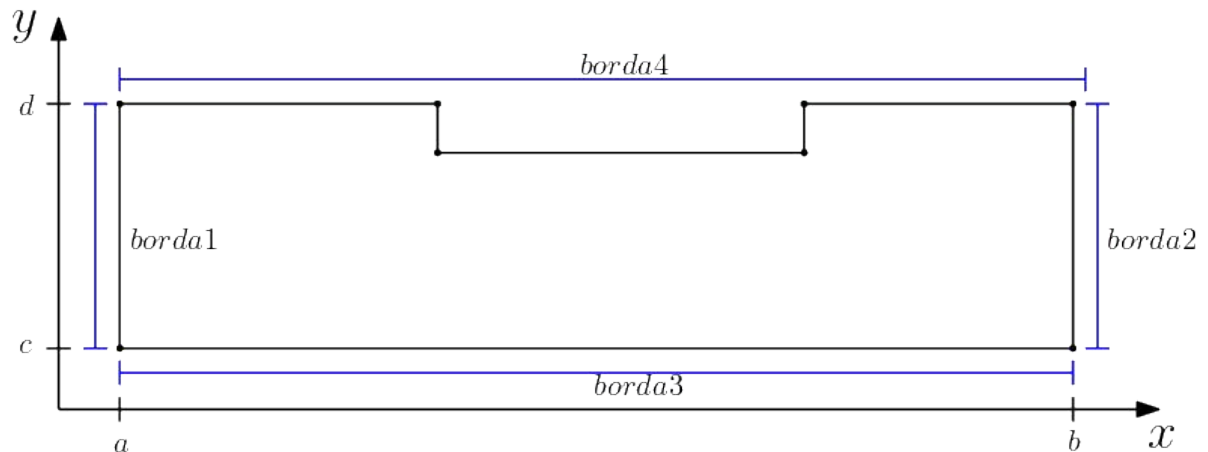
Figura 10: Ponto de cruz do MDF para a EDP dada pela equação (31).



Fonte: Autoria própria (2020)

Primeiramente, denomina-se as regiões de contorno da malha, para os pontos (x_1, y_j) como sendo a borda 1, os pontos (x_{M+1}, y_j) como sendo a borda 2, para todo intervalo de $j = 1, \dots, N + 1$, já para os pontos de (x_i, y_1) como sendo a borda 3 e os pontos de (x_i, y_{N+1}) como sendo a borda 4, para todo intervalo $i = 1, \dots, M + 1$, caracterizado de acordo com a Figura 11.

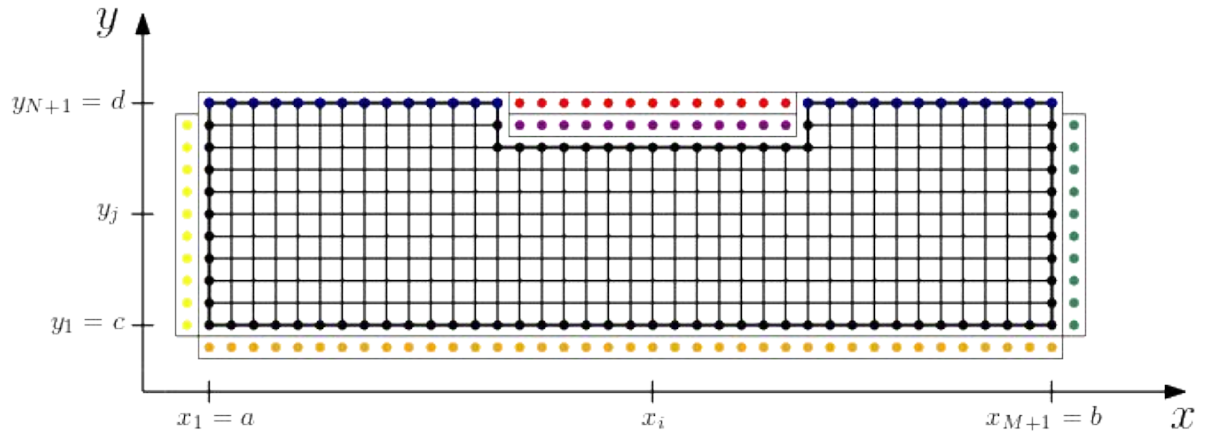
Figura 11: Intervalos das bordas.



Fonte: Autoria própria (2020).

A ponto de cruz representado pela Figura 10, percorre-se todos os pontos do domínio. Ao aplicá-la, verifica-se que em regiões de contorno da malha alguns pontos não pertencem ao domínio Ω , esses pontos são denominados como pontos fantasmas. Na Figura 12 tais pontos fantasmas são representados, juntamente a regiões de condição de contorno.

Figura 12: Pontos fantasmas e condições de contorno.



Fonte: Autoria própria (2020).

De acordo com a Figura 12, existe uma disposição de um sistema de $(M + 1) \cdot (N + 1)$ equações, porém, pelas regiões de cor amarela, laranja e verde pertencerem ao sistema torna-o indeterminado pelo número de incógnitas. As demais regiões em destaque serão comentadas posteriormente.

Para tornar a solução do sistema possível o problema dos pontos fantasmas deve ser corrigido, ou também chamado de problema de Neuman e Neuman, introduzindo tal conceito, conforme apresentado na seção 2.5.1 A).

Realizando a consideração que a primeira derivada do ponto de contorno ou sua taxa de variação ser igual a zero, ou seja,

$$\frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial} = 0.$$

Tal consideração é válida e realizável para todos os pontos de contorno da malha no qual não se conheça sua carga hidráulica.

Dessa forma, levando em consideração a Figura 11, a região de borda 1 no intervalo $[y_2, y_N]$ para os pontos com abscissa x_1 será representada pela equação (32).

$$w(x_i, y_j) = \frac{w(x_i, y_j - \Delta y) + 2 \cdot w(x_i + \Delta x, y_j) + w(x_i, y_j + \Delta y)}{4}. \quad (32)$$

Aplicando a mesma lógica na borda 2, região de intervalo $[y_2, y_N]$ agora para os pontos com abscissa x_{M+1} será representada pela equação (33).

$$w(x_i, y_j) = \frac{w(x_i, y_j - \Delta y) + 2 \cdot w(x_i - \Delta x, y_j) + w(x_i, y_j + \Delta y)}{4}. \quad (33)$$

Por consequência, para a borda 3, com intervalo de $[x_2, x_M]$ e ordenada y_1 ,

será descrita pela equação (34).

$$w(x_i, y_j) = \frac{w(x_i - \Delta x, y_j) + 2.w(x_i, y_j + \Delta y) + w(x_i, y_j + \Delta x)}{4}. \quad (34)$$

Para o ponto de coordenada (x_1, y_1) , união entre borda 1 e 3, será aplicado a mesma consideração, resultando na equação (35).

$$w(x_i, y_j) = \frac{2.w(x_i + \Delta x, y_j) + 2.w(x_i, y_j + \Delta y)}{4} = \frac{w(x_i + \Delta x, y_j) + w(x_i, y_j + \Delta y)}{2}. \quad (35)$$

Da mesma forma, o ponto de coordenada (x_{M+1}, y_{N+1}) , segue o mesmo raciocínio e resulta na equação (36).

$$w(x_i, y_j) = \frac{2.w(x_i - \Delta x, y_j) + 2.w(x_i, y_j + \Delta y)}{4} = \frac{w(x_i - \Delta x, y_j) + w(x_i, y_j + \Delta y)}{2}. \quad (36)$$

As regiões faltantes em destaque, azul, vermelha e roxa, pertencerão a matriz do sistema $(M + 1).(N + 1)$. As regiões azuis são referentes as condições de contorno conhecidas, ou seja, valores de $w(x_i, y_j)$ dos pontos do trecho.

Para o região de pontos vermelho e roxa, seus valores de carga hidráulica devido ao embutimento da barragem de concreto são zero, sendo assim, seus valores serão $w(x_i, y_j) = 0$.

Devido a região de embutimento no maciço, os pontos da região roxa são caracterizados como pontos fantasmas em relação aos seus pontos de contorno do domínio do maciço.

Nesse contexto, os pontos abaixo da barragem, trecho condizente ao intervalo, ou seja,

$$\left[x_{\left(1 + \frac{\text{CONTORNO}_{\text{MONTANTE}}}{\Delta x}\right)}, x_{\left(nx - \frac{\text{CONTORNO}_{\text{JUSANTE}}}{\Delta x}\right)} \right],$$

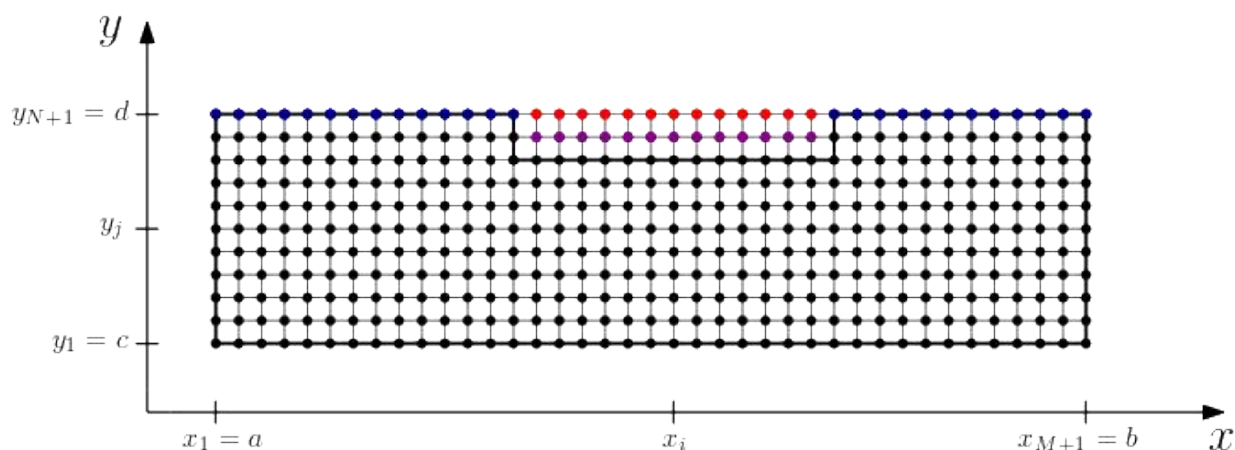
e de acordo com as condições do problema o intervalo é aplicado entre $[x_{16}, x_{29}]$ para a ordenada $y_{N-1} = y_9$. Assim, aplicando o conceito do problema de Neuman e Neuman nos pontos do intervalo, os mesmos serão representados pela equação (37).

$$w(x_i, y_j) = \frac{w(x_i - \Delta x, y_j) + 2.w(x_i, y_j + \Delta y) + w(x_i + \Delta x, y_j)}{4}. \quad (37)$$

Os pontos faltantes de contorno do domínio em que aplicando a molécula do *MDF* da Figura 10 encontram pontos fantasmas são localizados nas coordenadas (x_{14}, y_{10}) e (x_{28}, y_{10}) , levando em consideração a malha já definida pelo passo inicial de 1. Para esses pontos, suas equações são equivalentes as equações (33) e (32), respectivamente.

Com os ajustes no sistema de equações, o mesmo torna-se possível e determinável, fazendo com que a região do sistema de equações seja caracterizado pelos pontos em destaque, conforme ilustrada na Figura 13.

Figura 13: Malha do sistema de equações.



Fonte: Autoria própria (2020).

No estudo, o maciço terroso é considerado como homogêneo e isotrópico, dispensando o uso do coeficiente de permeabilidade (k) do material na modelagem via *MDF*, contendo no capítulo de Fundamentação Teórica a dedução das equações e devidas explicações das mesmas.

4.4 Interface de cálculo do algoritmo via MATLAB[®]

Com a finalidade de aplicar a teoria apresentada neste trabalho, foi desenvolvido um programa em linguagem MATLAB[®], presente no Anexo A deste trabalho, associado a sua ferramenta App Designer, utilizando a versão trial do programa.

O seguinte trabalho utiliza o programa MATLAB[®] para sua formulação, principalmente devido a sua qualidade e facilidade durante a programação, sendo ele um software interativo, em que seu processamento é composto por equacionamentos matriciais tornando o mesmo de grande valia na utilização de métodos numéricos.

Para a modelagem via MATLAB[®], o algoritmo utiliza o *MDF* para o traçado das linhas equipotenciais no problema proposto por Das (2007), conforme a Figura 7.

O programa segue integralmente a lógica de programação para realizar cálculos mediante os dados inseridos de características dos problemas de barragem embutida no maciço terroso e suas condições de contorno.

Executando o programa em Windows 10, apresenta a seguinte página inicial conforme Figura 14.

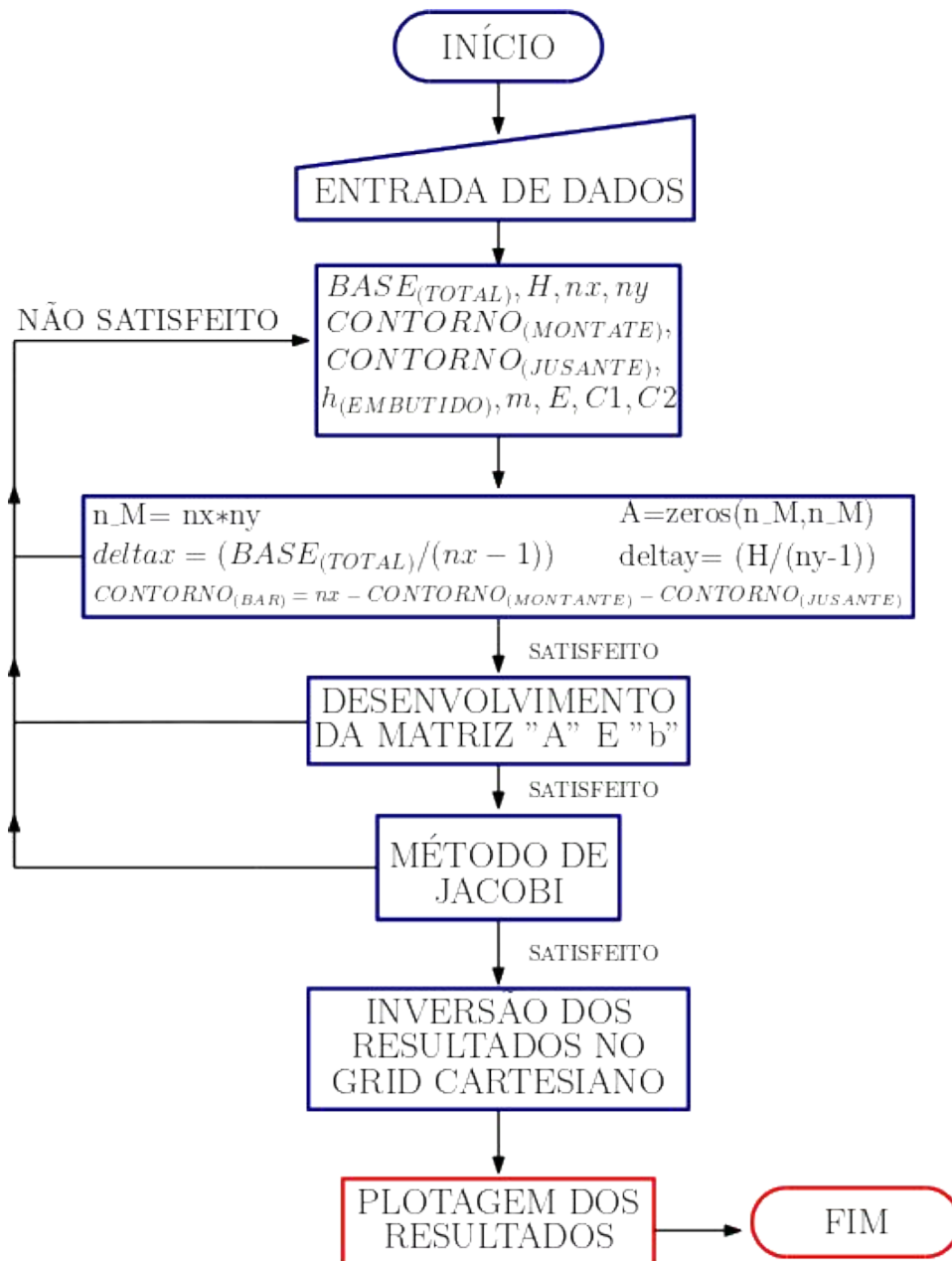
Figura 14: Página inicial interface AppDesigner.



Fonte: Autoria própria (2020).

Na página inicial o usuário visualiza uma pequena descrição do programa e recomendações a serem realizadas durante sua utilização. O fluxograma ilustrado na Figura 15, apresenta o funcionamento global do algoritmo, caracterizado por entrada de dados e parâmetros vinculados ao *MDF*, por parte do usuário. A região em azul condiz com o processamento do algoritmo presente no Anexo A e a parte em vermelho a apresentação dos resultados.

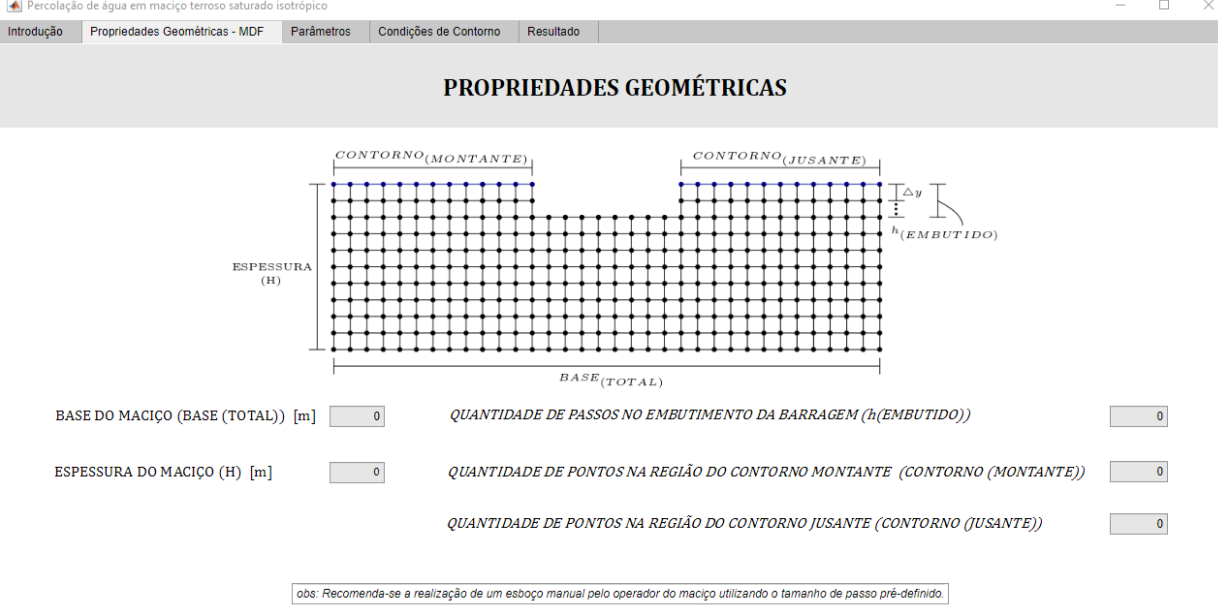
Figura 15: Fluxograma algoritmo.



Fonte: Autoria própria (2020).

Seguindo a tela inicial apresentada pela Figura 14 e suas devidas recomendações, o usuário pode mudar para a aba “Propriedades Geométricas - MDF”, no qual inicia-se o processo de “ENTRADA DE DADOS” conforme fluxograma e Seção I do algoritmo em anexo. Tal etapa é visualizada conforme Figura 16.

Figura 16: Propriedades geométricas do problema AppDesigner.



PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS

BASE DO MACIÇO (BASE (TOTAL)) [m] QUANTIDADE DE PASSOS NO EMBUTIMENTO DA BARRAGEM ($h(EMBUTIDO)$)

ESPESSURA DO MACIÇO (H) [m] QUANTIDADE DE PONTOS NA REGIÃO DO CONTORNO MONTANTE (CONTORNO (MONTANTE))

QUANTIDADE DE PONTOS NA REGIÃO DO CONTORNO JUSANTE (CONTORNO (JUSANTE))

obs: Recomenda-se a realização de um esboço manual pelo operador do maciço utilizando o tamanho de passo pré-definido.

Fonte: Autoria própria (2020).

Será aplicado as condições do problema seguindo os dados de entrada da Tabela 2, seguindo o modelo de passos unitários nas duas direções já pré definidos.

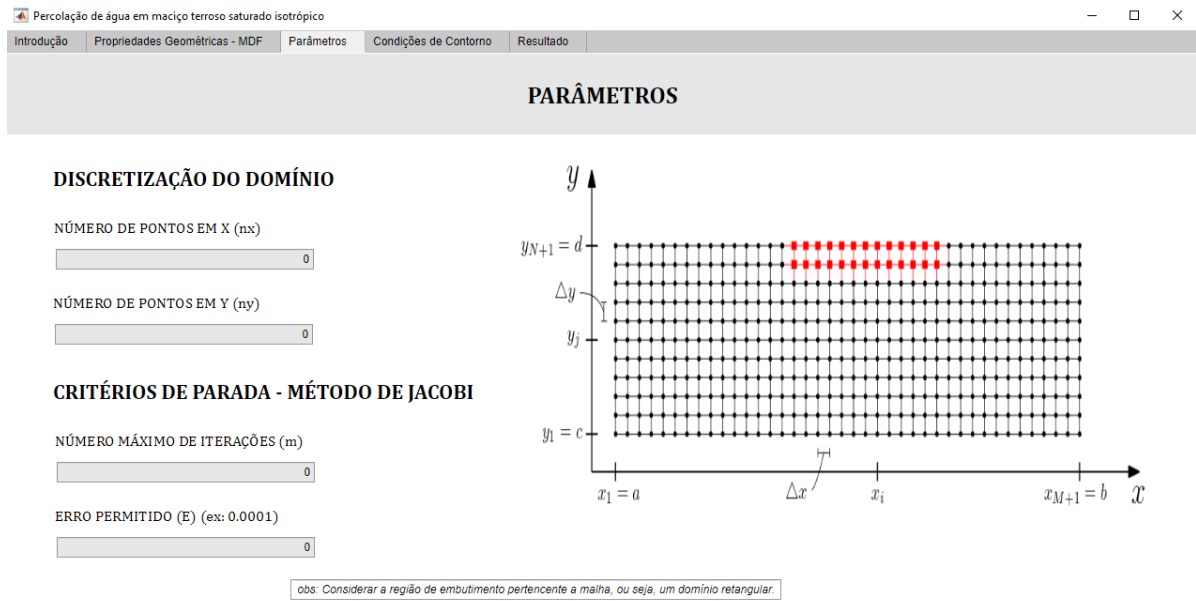
Tabela 2: Requisitos iniciais para modelagem via MATLAB[®].

REQUISITOS ESPECÍFICOS		VALOR ATRIBUÍDO
$BASE_{TOTAL}$	Dimensão da base do maciço [m]	38
ESPESSURA(H)	Espessura da camada do maciço permeável [m]	10
$CONTORNO_{(MONTANTE)}$	Quantidade de pontos à montante da barragem [adimensional]	14
$CONTORNO_{(JUSANTE)}$	Quantidade de pontos à jusante da barragem [adimensional]	12
$h(EMBUTIDO)$	Quantidade de passos embutidos da barragem [adimensional]	2
n_x	Número de pontos na direção x [adimensional]	39
n_y	Número de pontos na direção y [adimensional]	11
m	Número máximo de iterações [adimensional]	1000
E	Erro permitido [adimensional]	0.00000001
C1	Condição de contorno a montante [m]	7
C2	Condição de contorno a jusante [m]	0

Fonte: Autoria própria (2020).

Nesta fase, o usuário deve preencher os espaços conforme a malha já pré-definida, todas as abas são liberadas para alterações antes e posteriormente do cálculo. Ao preencher todos os campos desta aba, o usuário deve preencher a terceira tela, apresentada segundo a Figura 17.

Figura 17: Parâmetros AppDesginer.

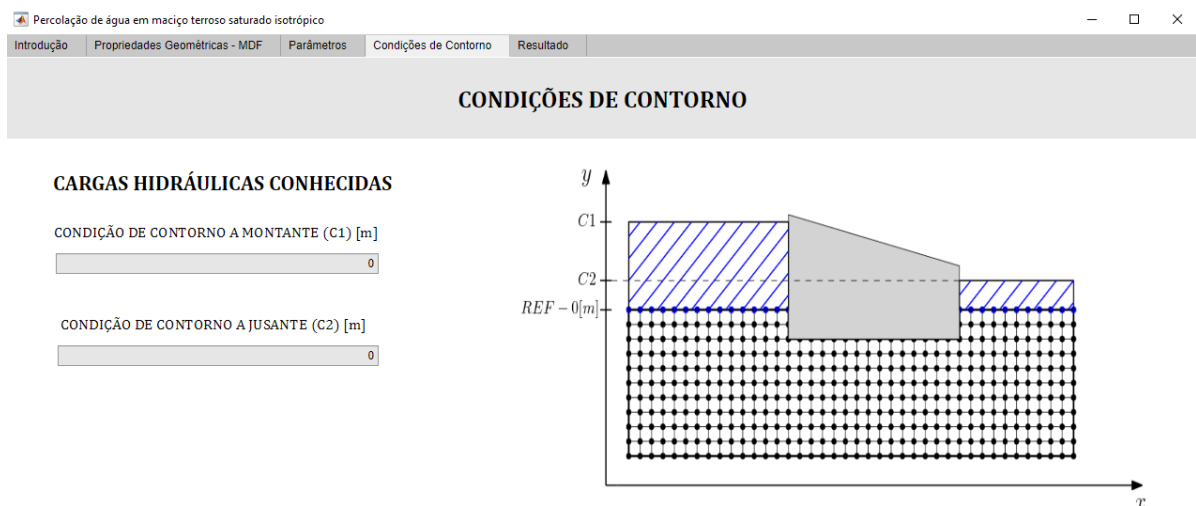


Fonte: Autoria própria (2020).

Na Figura 17 a quantidade de pontos ao considerar a malha retangular e critérios conforme a aplicação do método da análise matricial são inseridos.

Já na quarta tela o usuário definirá as condições de contorno presentes no problema, conforme ilustra a Figura 18.

Figura 18: Condições de contorno do problema AppDesigner.

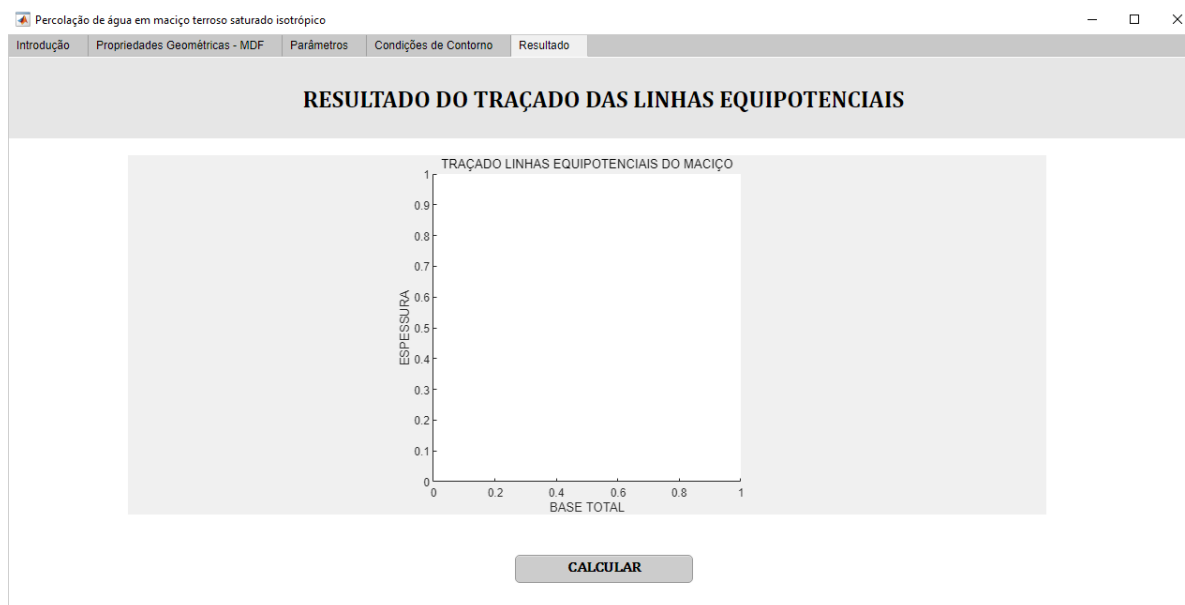


Fonte: Autoria própria (2020).

Preenchendo a última aba do aplicativo, todos os dados de entrada foram

definidos, finalizando a etapa de entrada de dados. Os processos seguintes do programa são iniciados após o usuário inserir os requisitos e pressionar o botão “CALCULAR” da aba de “Resultado”, conforme ilustrado na Figura 19.

Figura 19: Resultado das linhas equipotencias pelo AppDesigner.



Fonte: Autoria própria (2020).

Nesse momento o programa executará os processos da Seção II do algoritmo, que gerará a matriz dos coeficientes A do sistema de equações lineares e cálculos auxiliares.

Os demais processos da Seção II do algoritmo são realizados para geração da matriz coluna “ b ” e alocação das condições de contorno conhecidas e demais pontos da malha como 0 e na matriz coluna “ x ” é referente ao valor resultante de carga hidráulica piezométrica no ponto em análise.

Caso alguma informação não seja condizente durante o processamento de dados da Seção II, o mesmo será interrompido e necessita de novos dados de entrada.

No processo seguinte, conforme Seção III do algoritmo, o Método de Jacobi é aplicado a partir das matrizes criadas dos processos anteriores. O processo não iniciará caso as matrizes sejam definitas com tamanhos diferentes.

Com os dados inseridos pelo usuário, o algoritmo desenvolve as matrizes condizentes em função do tamanho da malha gerada e das condições de contorno.

Com a solução do Sistema Linear ($A \cdot x = b$) criado com as matrizes, processo presente na Seção IV do algoritmo, a matriz coluna “ x ”, resultado da análise e valor de carga hidráulica piezométrica nos pontos, é invertida para plotagem no plano

cartesiano, devido ao modelo criado de algoritmo.

Após os passos acima citados, os valores resultantes são plotados utilizando o comando “contourf” do MATLAB®, apropriado para o tipo de análise com linhas de contorno, no caso do trabalho delimitar as linhas equipotenciais. Último processo presente no fluxograma, presente na Seção V do algoritmo em Anexo.

Nesta seção, a plotagem mantém o tamanho proporcional da barragem elaborada utilizando o comando “daspect” do MATLAB®, tornando de fácil visualização e comparação o traçado das linhas equipotenciais .

No geral, o algoritmo consiste em receber as informações iniciais de condições de contorno, pré-definição da malha, número de iterações e erro admitido no processo. Todos os demais passos fazem parte do processo de resolução sistema do tipo $A.x=b$, e a partir dos dados gerados, a plotagem dos resultados.

4.4.1 Limitação do algoritmo

O algoritmo elaborado segue um sequência lógica, como já supracitado. As instruções para a utilização do mesmo devem ser seguidas de forma a utilizar o modelo desenvolvido conforme metodologia do programador.

A sistemática elaborada para criação da malha na região definida do maciço, segue diversos passos e condições para criação da mesma, para outros modelos de maciço terroso e barragem embutida com variações ao longo da base ou inexistência de embutimento, o algoritmo não é capaz de resolver tais problemas.

Vale ressaltar que o algoritmo permite o uso de passos diferentes nas duas direções, porém indica-se a utilização de passos de tamanhos iguais devido a elaboração do algoritmo com a equações de ponto de cruz pertinentes na situação de passos iguais.

Quanto a plotagem dos resultados, o modelo desenvolvido é aplicado para variações de condições de contorno com números inteiros, portanto caso a subtração entre as condições a montante e a jusante desacordem, recomenda-se a mudança no modelo de plotagem ou visualização de resultados manualmente em cada ponto da malha.

4.4.2 Convergência e Ordem do Método - MATLAB®

A convergência dos valores de carga hidráulica piezométrica depende da malha utilizada, e na utilização do Método de Jacobi, a influência do número de iterações realizadas no processo de cálculo, interfere diretamente nos resultados obtidos na análise matricial.

O erro devido ao truncamento na segunda ordem da expansão da série de Taylor, devidamente explicado no capítulo de Fundamentação Teórica, não foi analisado pois foge do escopo do trabalho.

O erro numérico na utilização do *MDF* em sua grande parcela se consiste principalmente devido a erro na discretização da malha, ou seja, está relacionado ao refino da malha utilizada e seu tamanho de passo, podendo gerar instabilidade numérica.

Desse modo, para malhas mais grossas com poucas iterações, ou seja, malhas com poucos pontos, obtêm-se resultados menos refinados.

Para obtenção da ordem efetiva de erro numérico para casos de erro de discretização, é necessário a comparação entre duas malhas distintas, porém não foi elaborado tal aplicação pois foge do escopo do trabalho.

4.5 Modelagem do problema via Excel®

O modelo implementado segue a geometria da Figura 7, assim como as condições de contorno determinadas pelo mesmo, sendo elas apresentadas na Tabela 2, mantendo o padrão de tamanho de malha e número de interações no sistema.

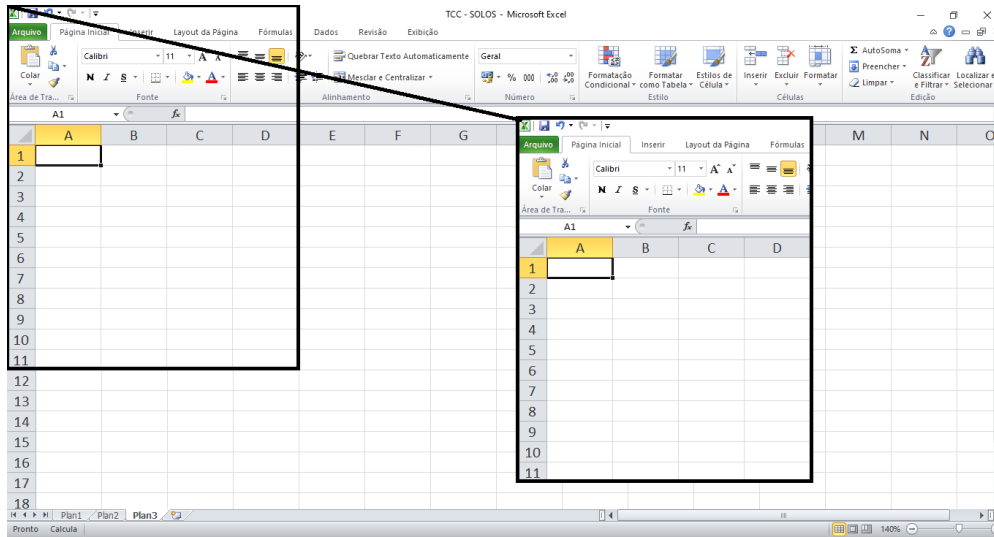
O software Microsoft Excel® na versão “2013”, ferramenta com interface do usuário de fácil utilização e intuitiva, o que atraiu sua utilização neste trabalho.

É necessário destacar que as expressões matemáticas presentes no capítulo Fundamentação Teórica seção 2.5.1, base para aplicação do *MDF* via Excel®, foram apresentadas por Fonseca (2018).

4.5.1 Interface do Excel®

Ao iniciar o Excel®, foi necessário algumas modificações da interface inicial do modelo, em que a priori foi modificado o tamanho das cédulas, conforme ilustra a Figura 20 a tela inicial.

Figura 20: Interface inicial Excel[®].

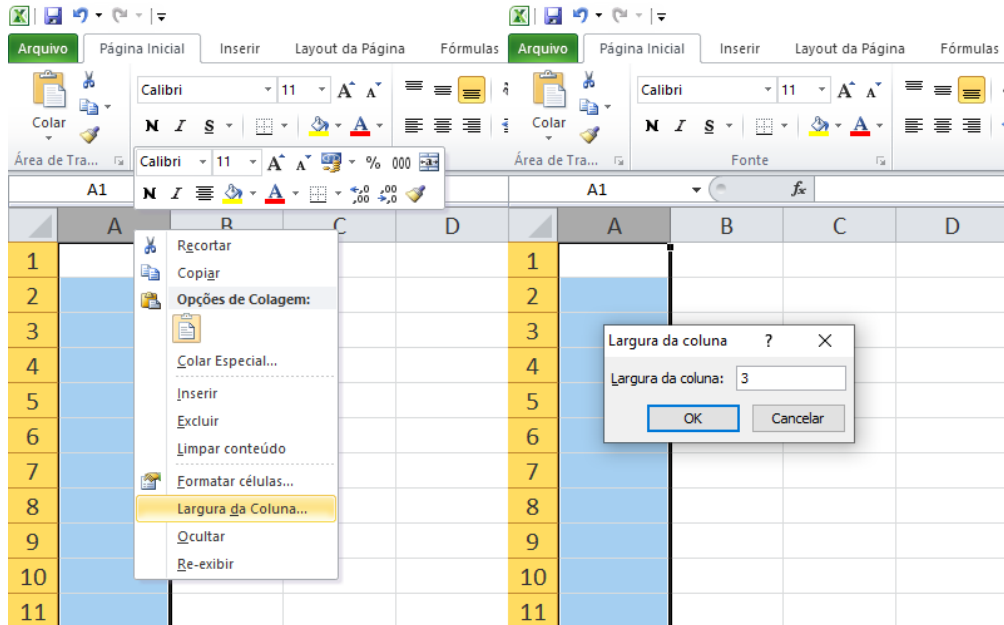


Fonte: Autoria própria (2020).

De acordo com a Figura 20, é possível visualizar que o tamanho de cada célula segue um formato retangular, ou seja, diferem de tamanho nas direções x e y.

Nesse contexto, foi necessário modificar o tamanho de cada célula no campo no Excel[®] que fará parte do algoritmo, para que as mesmas fiquem no formatado quadrado, seguindo o modelo de características aplicadas via MATLAB[®], de acordo com a Tabela 2. Etapa visualizada conforme a Figura 21.

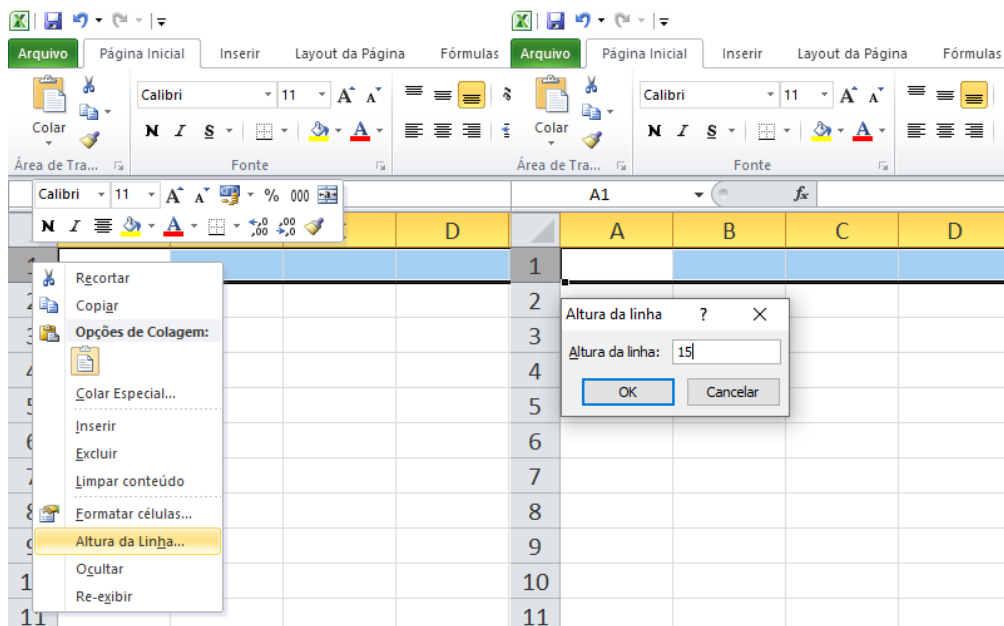
Figura 21: Modificação da largura das colunas do Excel®.



Fonte: Autoria própria (2020).

O tamanho utilizado nesse trabalho de largura de coluna será 3, apresentado pela Figura 21. O mesmo passo é realizado para as linhas do modelo, conforme pode ser visualizado na Figura 22.

Figura 22: Modificação da altura das linhas do Excel®.



Fonte: Autoria própria (2020).

Para manter o tamanho quadrado de cada célula, a altura da mesma foi

utilizada como 15. O importante nessa etapa da concepção das cédulas manterem o tamanho quadrado.

4.5.2 Determinação da malha nos elementos do Excel[®]

Conforme apresentado pela Figura 8, espaçada por nós, será necessário conhecer as características dos passos em cada direção para modelagem. No caso do trabalho em questão, os passos a serem utilizados no *MDF* são iguais nas duas direções, conforme tamanho do passo pré definido como 1.

Dessa forma, pelo Excel[®] será necessário trabalhar com elementos, portanto a partir de número de passos em cada uma das direções, já pré definidos, teremos um número de elementos no maciço, mostrado no Tabela 3.

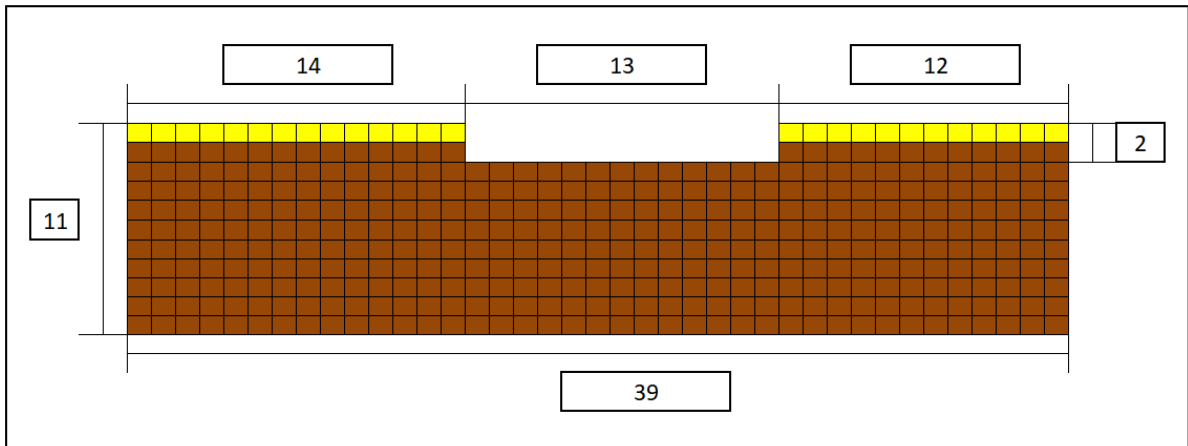
Tabela 3: Quantidade de elementos no Excel[®].

ELEMENTOS NO EXCEL [®]	VALOR ATRIBUÍDO
$BASE_{(TOTAL)}$ (Base total do maciço terroso)	38
H (Espessura do maciço permeável)	10
nx (Quantidade de elementos em x)	39
ny (Quantidade de elementos em y)	11
$REGIÃO_{(MONTANTE)}$ (Largura do maciço a montante da barragem)	14
$REGIÃO_{(JUSANTE)}$ (Largura do maciço a jusante da barragem)	12
$REGIÃO_{(BARRAGEM)}$ (Base da barragem de concreto)	13
h (Passos de embutimento da barragem)	2

Fonte: Autoria própria (2020).

Os dados presentes na Tabela 2, modelagem via MATLAB[®], apresenta $REGIÃO_{(MONTANTE)}$ com 14 pontos e $REGIÃO_{(JUSANTE)}$ com 12 pontos, como no Excel[®] trabalhamos com elementos, cada elemento será definido como um ponto da malha, seguindo a lógica da criação da malha via MATLAB[®]. A partir dos passos acima descritos, a malha desenvolvida no Excel[®] é apresentada pela Figura 23.

Figura 23: Malha da barragem no Excel[®].



Fonte: Autoria própria (2020)

Para a aplicação das equações nos elementos foi necessário uma modificação direta no software, pois normalmente ele não está habilitado a realizar cálculos iterativos.

Desse modo, a sequência aplicada para a liberação foi , “Arquivo → Opções → Fórmulas → Habilitar cálculo iterações”. Nessa mesma aba, foi alterado o número máximo de iterações para 1000 e número máximo de alterações para 0,00000001, conforme presente nos dados de entrada e Tabela 2, modelagem via MATLAB[®].

Conforme supracitado na seção 3.1, cada ponto interno na malha, já no caso para modelagem via Excel[®], em cada elemento interno na malha será aplicado uma equação condizente a partir de sua localização.

Nesse contexto, após aplicar as equações em cada célula, o passo seguinte foi a implementação das condições de contorno contidas na Tabela 2 nas regiões a montante e a jusante da barragem, pois a partir delas o cálculo poderá ser iniciado.

Portanto, após o desenvolvimento da malha, o cálculo é realizado pela opção contida na aba no Excel[®] “Fórmulas → Calcular agora”. Sendo o modelo gerado até o momento, visualizado pela Figura 24 .

Tabela 4: Alterações eixo vertical Excel[®].

OPÇÕES DE EIXO		
Mínimo	(Fixo)	0
Máximo	(Fixo)	7
Unidade Principal	(Fixo)	1
Unidade Secundária	(Fixo)	0,5

Fonte: **Autoria própria (2020).**

Cada valor inserido dependeu da quantidade de quedas de potenciais previstas a partir das condições de contorno. Nesse contexto, foi realizado também a inversão do gráfico de modo manual.

Para inverção do gráfico, foi modificado através da legenda de séries ao lado do gráfico, clicando posteriormente em “Formatar eixo → Opções de eixo → Séries em ordem inversa”, ajustando o gráfico que representará as linhas equipotenciais do modelo.

Posteriormente, no capítulo de Resultados, será discutido melhor os valores obtidos e ao realizar a comparação com as demais metodologias presentes no trabalho.

4.6 Modelagem via GeoStudio -SEEP/W[®]

Para a modelagem é necessário ressaltar que o uso do software SEEP/W[®] foi realizado através de licença obtida para o trabalho em questão.

A modelagem do maciço terroso seguiu os modelos elaborados via Excel[®] e MATLAB[®] quanto as características e condições de contorno, quanto ao cálculo seguiu a base numérica do *MEF*.

Ao analisar o contexto de aplicação em análise numérica, o software GeoStudio-SEEP/W[®] diverge das demais metodologias até então presentes, segundo o qual utiliza o *MEF* como base de seus cálculos, sendo até então uns dos métodos numéricos mais utilizados na área das engenharias.

Dessa forma, a utilização de tal software em comparação a metodologias numéricas de aplicação do *MDF*, serve como base fundamental para reafirmação quanto ao uso do método para diversos problemas da engenharia e sua possibilidade de aplicação a partir de diferentes softwares.

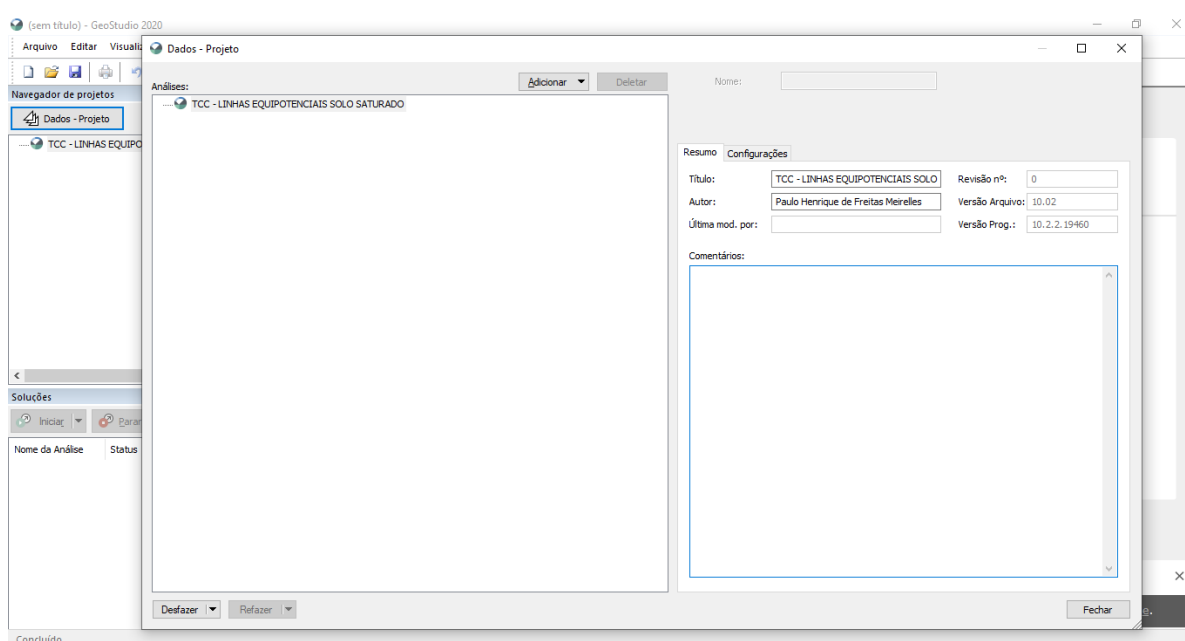
Ressalta-se que a versão utilizada foi a 2020, portanto algumas divergências quanto aos passos de elaboração do modelo para versões diferentes podem existir.

4.6.1 SEEP/W[®] - Configurações iniciais

No ambiente do programa SEEP/W, se criou um novo projeto no menu “Arquivo → Novo”, selecionando posteriormente a opção “Metric - A4” para iniciar o o modelo em unidades métricas e plotagem em impressão A4.

Após o passo supracitado, uma nova aba inicializará para definições simples de nomenclatura do arquivo e definição em que tipo de plano geométrico se trabalhará, conforme ilustra a Figura 25.

Figura 25: Modelo de dados do projeto SEEP/W[®].



Fonte: Autoria própria (2020)

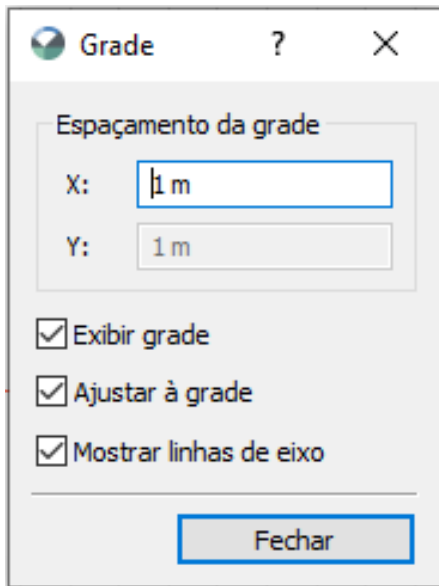
Ainda na aba de “Dados - Projeto”, se definiu o plano geométrico, no caso o trabalho utilizou o plano 2D, definido a partir do “*pop-up* - Adicionar”, podendo ser renomeado e mantendo para o presente estudo o elemento de espessura de 1m, conforme comentado nas metodologias anteriores.

Para aplicação do modelo a ser resolvido, foi necessário alterações dos eixos, grade e escalas presentes no modelo inicial, de forma a seguir a modelagem presente nas outras modelagens via *MDF*.

Na aba “Dados → Escala”, foi alterado as unidades de escala do modelo, no qual utilizou-se o modelo como 1:200, interferindo apenas na escala de plotagem.

No passo posterior, em menu “Visualizar → Grade”, as informações de espaçamento deverão ser mantidas como 1 nas duas direções, facilitando a aplicação do modelo em análise na interface do software, conforme ilustra a Figura 26.

Figura 26: Grade do modelo SEEP/W[®].



Fonte: Autoria própria (2020).

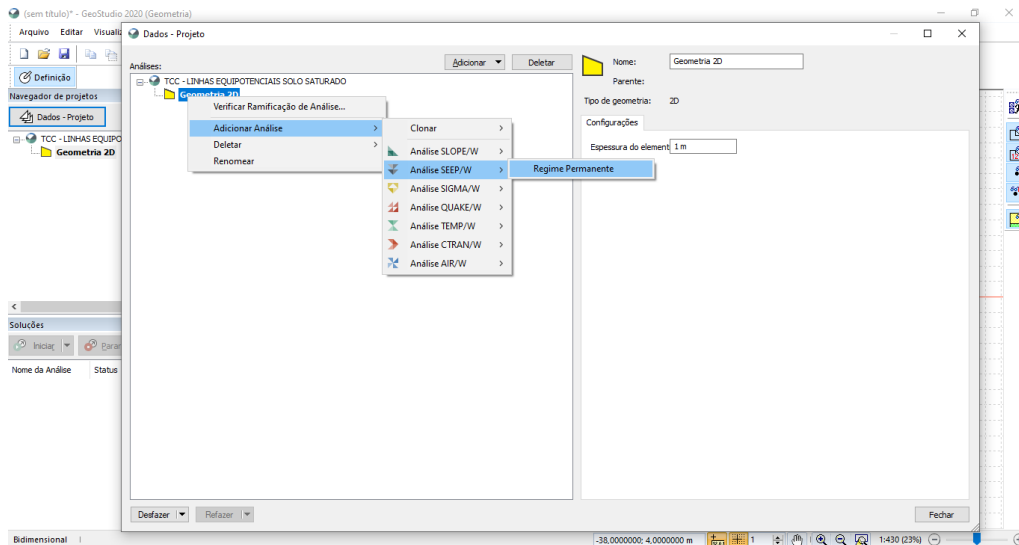
No menu “Visualizar → Unidades”, as unidades presentes no modelo estarão em unidades métricas, conforme já definido inicialmente, para que as unidades sejam condizentes com as aplicações nos outros programas.

4.6.2 SEEP/W[®] - Definição do problema

O modelo a ser desenvolvido e analisado seguirá a mesma concepção das modelagens via MATLAB[®] e Excel[®], ou seja, percolação de água em maciço terroso em regime permanente.

O modelo de problema foi definido através do menu “Dados - Projeto → Botão direito em geometria 2D → Adicionar análise → Análise SEEP/W → Regime permanente”, conforme ilustra a Figura 27.

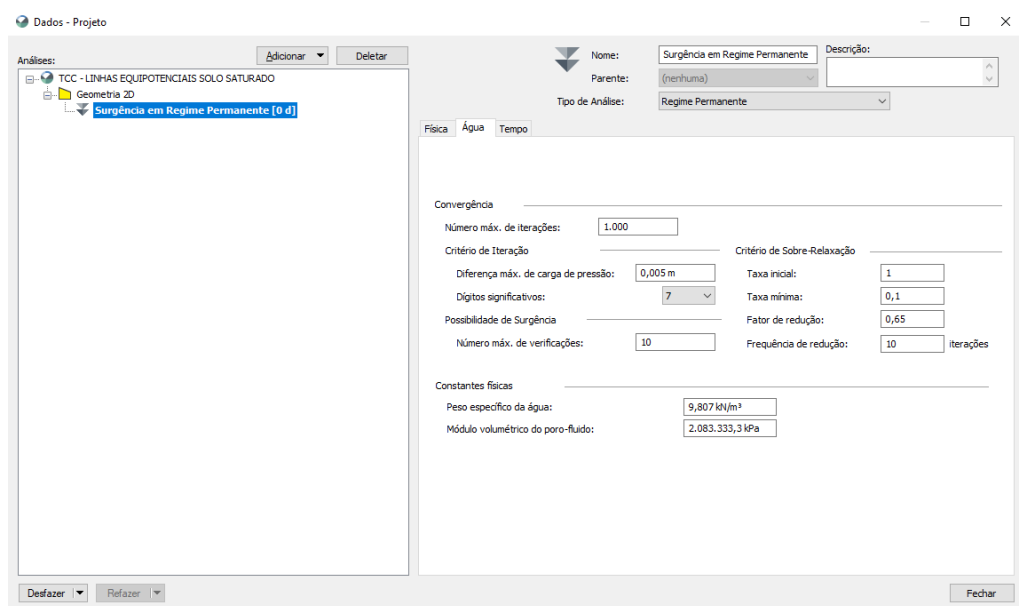
Figura 27: Análise SEEP/W[®].



Fonte: Autoria própria (2020).

Após a definição da análise no SEEP/W[®], o programa permite a definição de quantidade de iterações para convergência, sendo ela utilizada como 1000, assim como as demais metodologias, com 7 dígitos significativos como o mesmo utilizou o modelo via MATLAB[®], os demais valores não foram alterados e podem ser visualizados na Figura 28.

Figura 28: Iterações SEEP/W[®].



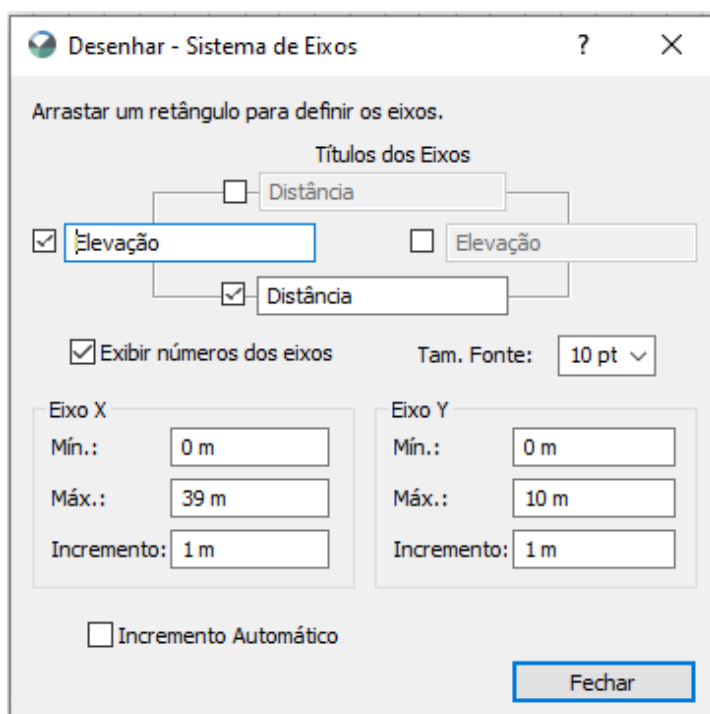
Fonte: Autoria própria (2020).

As demais alterações nas categorias presentes na Figura 28 não serão

utilizadas ou discutivas, pois tratam-se diretamente de métodos de aproximações de cálculos para convergência no uso de métodos numéricos.

Após a definição da análise, foi demarcado o eixo de coordenadas (0,0) gerando no mesmo eixos x e y pré-definidos a serem exibidos, através do menu de configuração “Desenhos → Eixos”, demarcando o tamanho no sistema de eixos, como visualizado na Figura 29.

Figura 29: Sistema de eixos SEEP/W[®].

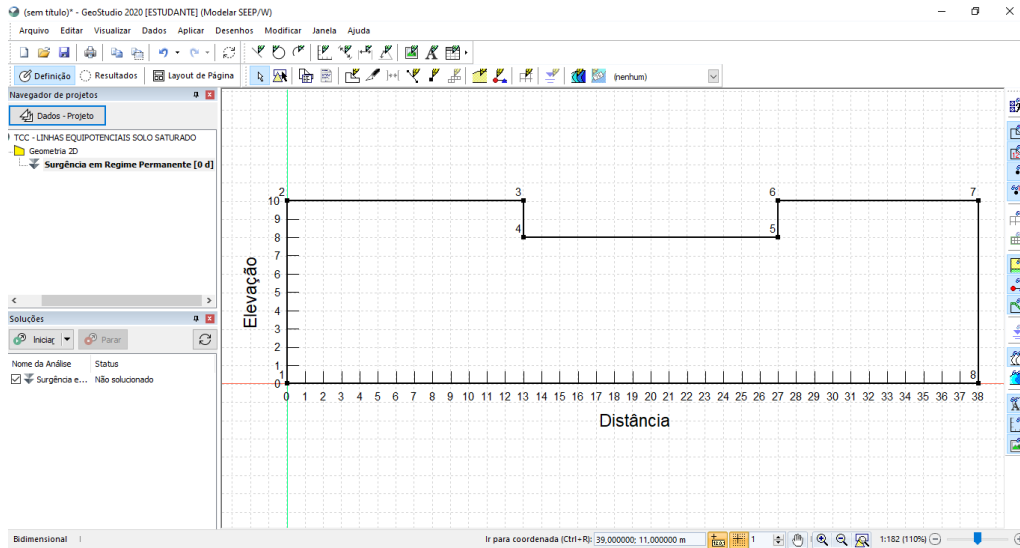


Fonte: Autoria própria (2020).

No caso da Figura 29, se criou pontos de referências nos eixos aplicados na região de modelagem do software, que servirão como norteamento na modelagem das características do maciço terroso.

Para definir os contornos do maciço na região da malha em construção, foi acessado a opção “Aplicar → Linha” percorrendo dessa forma os pontos notáveis que definiram o contorno do maciço, conforme apresentado pela Figura 30.

Figura 30: Contorno do problema via SEEP/W[®].

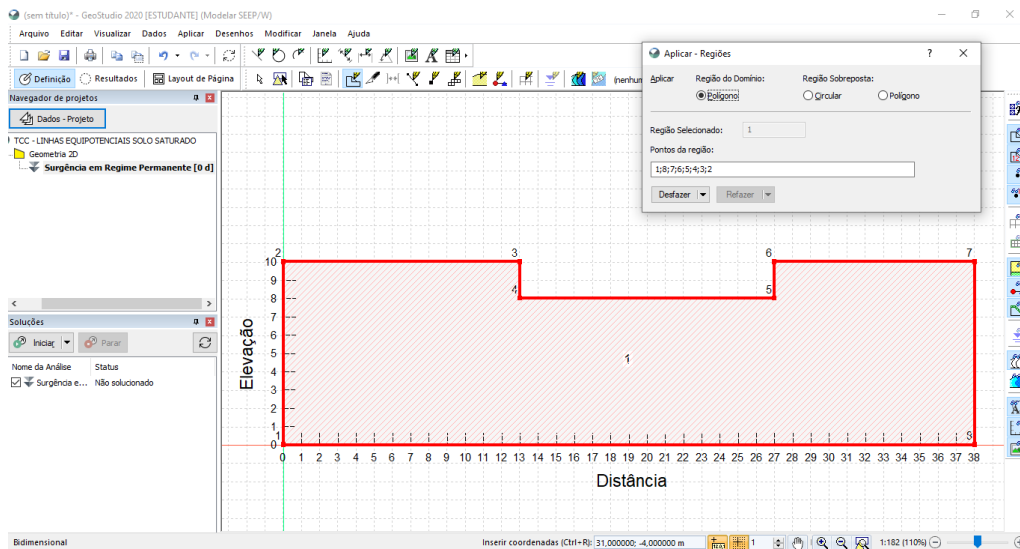


Fonte: Autoria própria (2020).

A partir do contorno desenvolvido, se definiu a região do maciço pela área interna, para posteriormente inserir o material na região do maciço, seguindo as configurações pelo menu “Aplicar → Regiões”.

Para definir a região do maciço, foi realizado um novo tracejado no sentido anti-horário sobre o contorno da Figura 29, representado pela Figura 31.

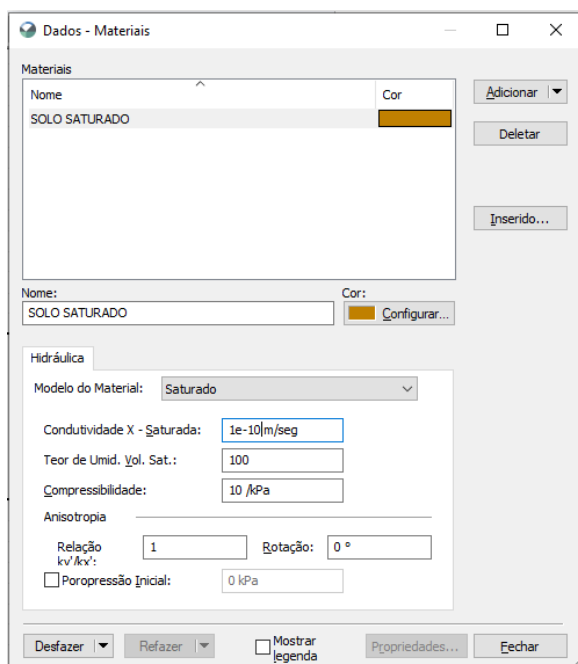
Figura 31: Região do maciço via SEEP/W[®].



Fonte: Autoria própria (2020).

Para inserção do material a região do maciço, seguiu-se os passos de configuração “Dados → Materiais”, sendo criado um material saturado com algumas condições necessárias para a criação do material pelo software, conforme visto na Figura 32.

Figura 32: Definição do material do maciço via SEEP/W[®].



Fonte: Autoria própria (2020).

Para a aplicação via software SEEP/W[®] (MEF), vê-se necessário um valor de coeficiente de permeabilidade (k) a ser inserido no programa, sendo portanto utilizado como $k_x = k_y = 1.0 \times 10^{-8}$ m/s, um valor típico de argilas sedimentares conforme Tabela 1.

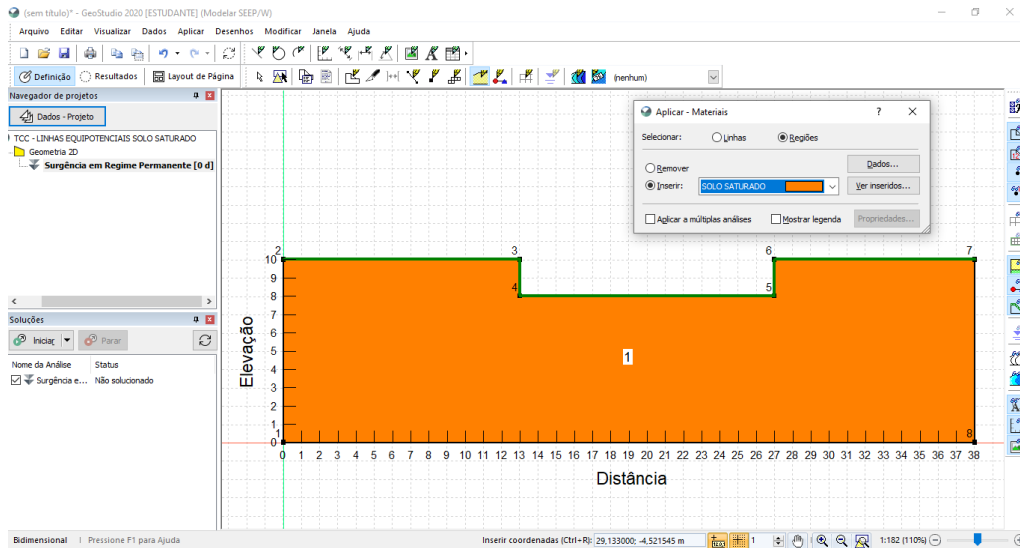
No caso da condutividade hidráulica, trata-se do coeficiente de permeabilidade, em que se utilizou o mesmo do material de argilas sedimentares ($1 \text{e-}8 \text{ cm/seg} = 1 \text{e-}10 \text{ m/seg}$), presente na Tabela 1.

A relação de anisotropia no modelo ser dada como 1, refere-se ao coeficiente de permeabilidade é igual para as duas direções ($k_x = k_y$), portanto material isotrópico, se adequando as características do modelo implementado nos demais programas via MDF.

Ressalta-se que a aplicação de coeficiente de permeabilidade de rochas fraturadas, pedras, pedregulhos e areias grossas, fogem do escopo do trabalho, devido ao regime do nível de água não ser mais permanente.

Com o material criado, foi realizado o processo para aplicação do mesmo na região, através do menu “Aplicar → Materiais”, conforme ilustra a Figura 33.

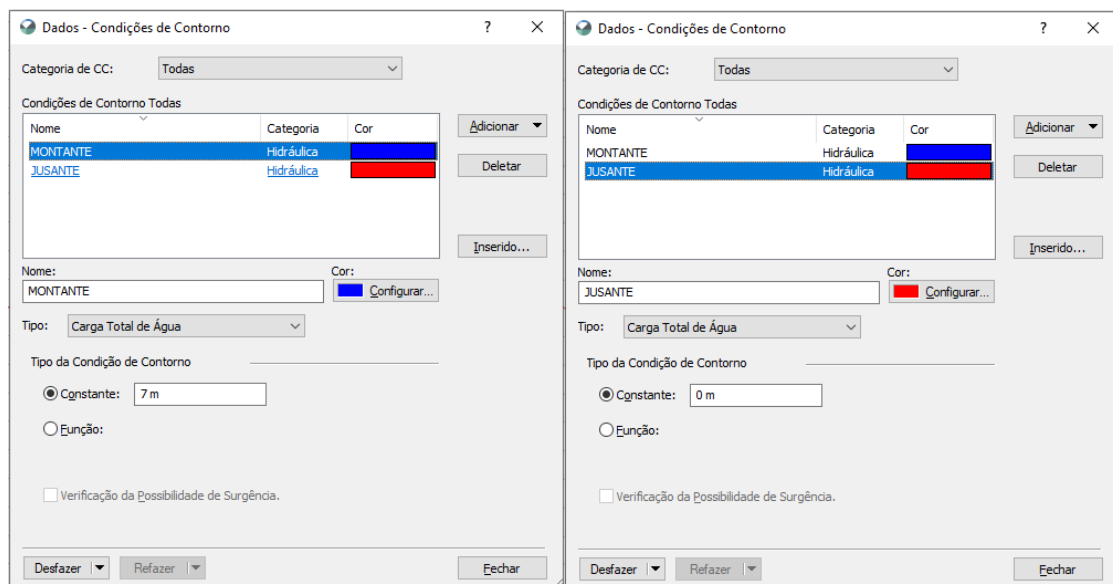
Figura 33: Região Saturada via SEEP/W[®].



Fonte: Autoria própria (2020).

Conforme GeoStudio-SEEP/W[®](2020), para inserir as condições de contorno de carga hidráulica piezométrica na região a montante e a jusante da barragem, foram realizados os passos “Dados → Condições de contorno → Adicionar”, criando a condição “MONTANTE (7 m)” e a “JUSANTE (0 m)”, ilustrado na Figura 34.

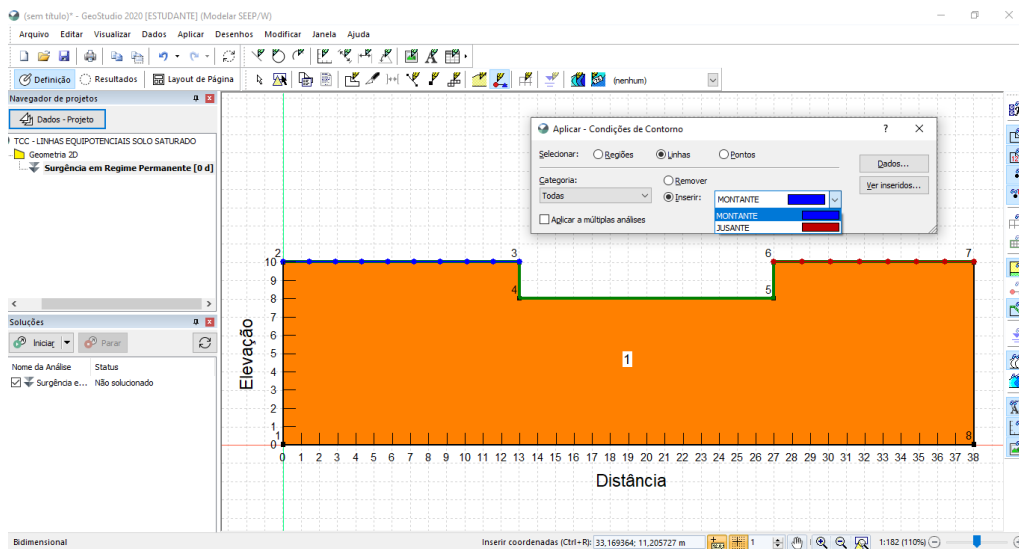
Figura 34: Atribuição das condições de contorno conhecidas via SEEP/W[®].



Fonte: Autoria própria (2020).

Dentro da interface do software seguiu-se os passos “Aplicar → Condições de contorno”, inserindo as condições de contorno nas linhas pré-definidas na região a montante e jusante da barragem, linhas com pontos vermelhos e azuis, respectivamente, conforme Figura 35.

Figura 35: Condições de contorno via SEEP/W®.



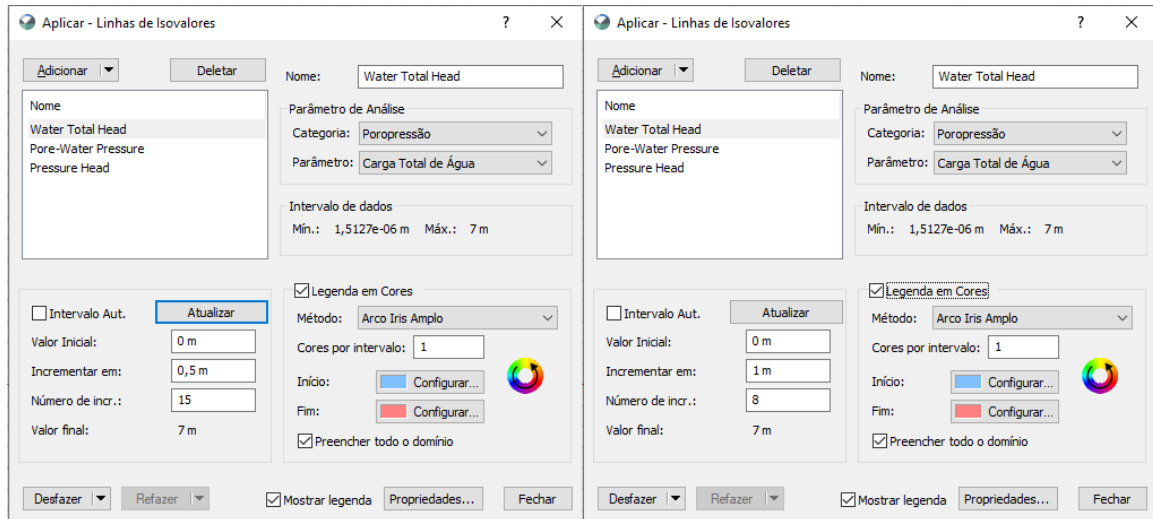
Fonte: Autoria própria (2020).

Antes de iniciar os cálculos pelo software, foi necessário definir o tamanho dos elementos, para seguir o modelo de passos de valor unitário aplicado via *MDF*, para as comparações dos capítulos subsequentes, portanto, através de configurações “Aplicar → Propriedades da malha”, se definiu o tamanho do elemento como 1.

Pré definido o tamanho do elemento, o cálculo pode ser realizado na aba de configurações “Soluções→Iniciar”, e modificando a visualização de resultados após a compilação do software para “*Water Total Head*”, as linhas equipotenciais podem ser visualizadas.

No entanto, as quedas de potencial nesse momento são indicadas de acordo com a configuração inicial do software, sendo necessário modificá-las através do menu “Aplicar → Isovalores”, alterando os valores de “*Incremento em:*” para 1, valor que delimita o traçado das linhas equipotenciais fixando o valor da diferença entre duas linhas equipotencias como 1. Ainda nesta etapa, em “*Número de Incr:*” o valor foi modificado para 8, sendo este o número de linhas equipotencias do problema. Todas as alterações podem ser visualizadas pela Figura 36.

Figura 36: Quedas de potencial via SEEP/W[®].



Fonte: Autoria própria (2020).

Finalizado as configurações para modelagem e visualização de resultados, foi realizado novo processamento do modelo, pela opção localizada em “Soluções→ Iniciar”. Todas as condições aplicadas seguiram o modelo seguido nos demais softwares.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

No capítulo anterior foram apresentadas as metodologias e práticas para modelagem do problema em estudo neste trabalho.

Com o intuito de verificar se resultados obtidos via modelagens utilizando o *MDF* são satisfatórios, o software *SEEP/W*[®] foi utilizado como base comparativa para validação.

No presente capítulo, serão apresentados os resultados obtidos e as discussões acerca da qualidade dos dados e ressalvas.

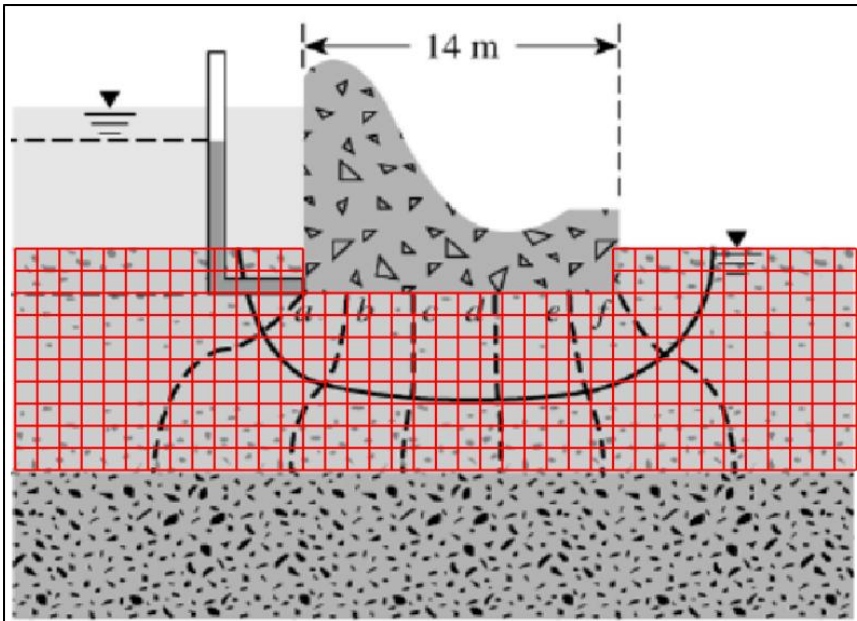
5.1 Soluções do problema

O traçado das linhas equipotenciais para cada uma das soluções são apresentadas a seguir, sendo utilizados os valores de carga piezométrica para as comparações posteriores.

5.1.1 Carga Hidráulica Piezométricas do problema segundo Das (2007)

Para a obtenção dos valores de carga piezométrica a partir da Figura 7, realizou-se o fracionamento da mesma com as repartições condizentes com a quantidade de pontos das malhas das metodologias realizadas, conforme Figura 37.

Figura 37: Malha solução segundo Das (2007).

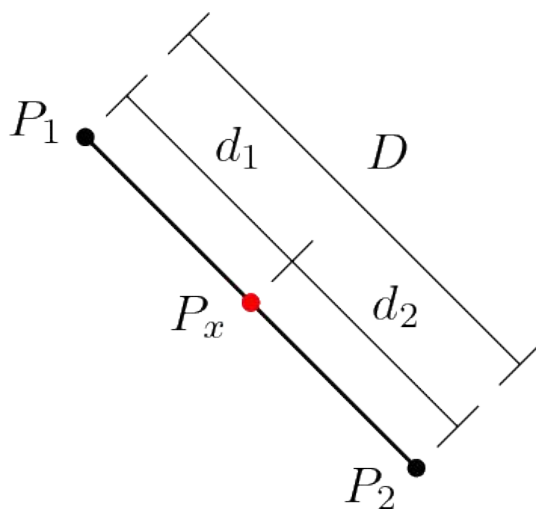


Fonte: Adaptado de Das (2007).

Nesse contexto, para cada ponto a ser analisado quanto ao valor de carga piezométrica na coordenada da malha, foi executado interpolações entre os pontos conhecidos, ou seja, entre as linhas equipotenciais e condições de contorno.

Para exemplificar o método de obtenção das cargas piezométricas ao longo da malha, foi utilizado como base o modelo a seguir da Figura 38.

Figura 38: Interpolação entre dois pontos.



Fonte: Autoria própria (2020).

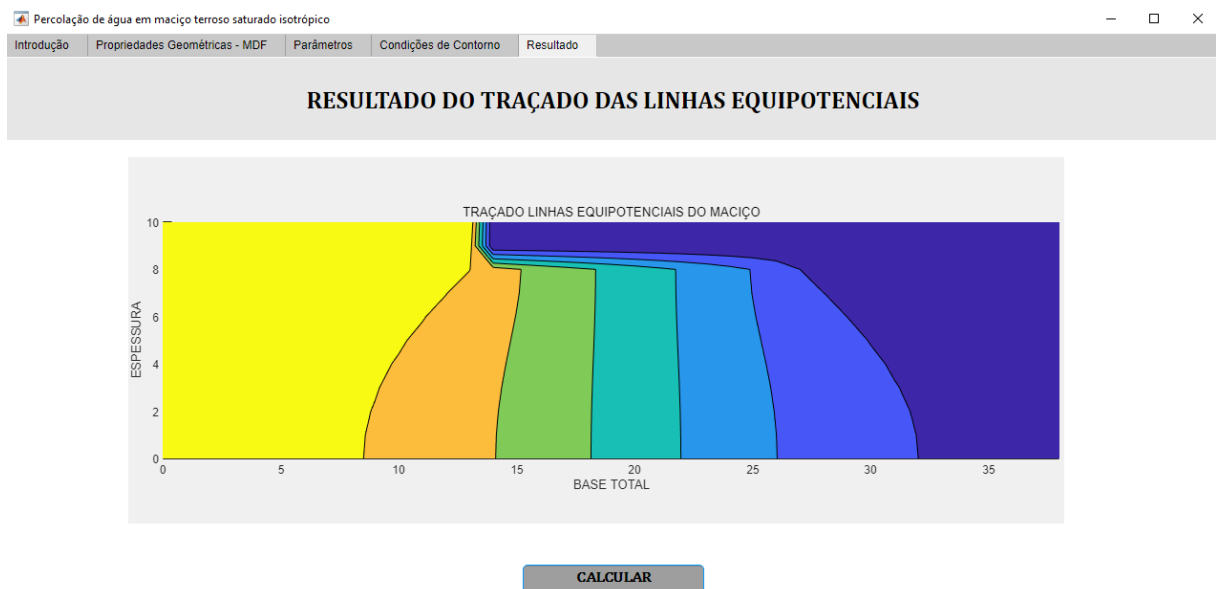
Os pontos P_1 e P_2 são cargas piezométricas conhecidas, no geral obtidas pelas linhas equipotenciais, e P_x o ponto localizado em uma coordenada da malha. Assim, aplicando a equação (38) a seguir foi obtido cada carga piezométrica dos pontos da malha em análise.

$$P_x = P_1 - \frac{(P_1 - P_2) \cdot d1}{D} \quad (38)$$

5.1.2 Carga Hidráulica Piezométrica via algoritmo MATLAB[®]

Na modelagem via algoritmo MATLAB[®] associado a ferramenta AppDesigner para as condições descritas anteriormente do problema, é apresentado o traçado da solução obtida na Figura 39.

Figura 39: Traçado linhas equipotenciais via algoritmo MATLAB[®].



Fonte: Autoria própria (2020).

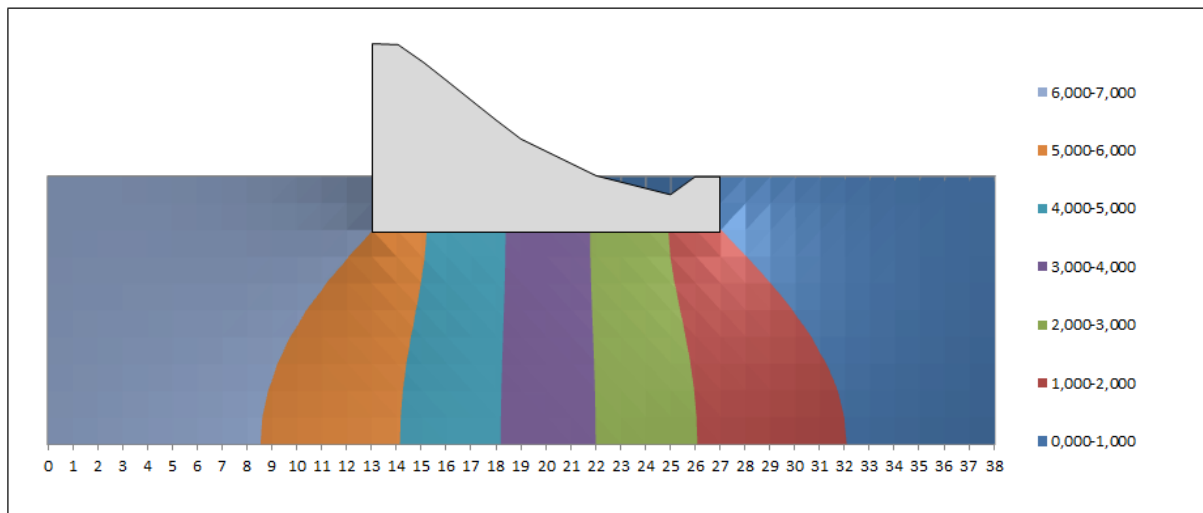
Uma facilidade na utilização da ferramenta AppDesigner, presente no MATLAB[®], é a possibilidade de visualização dos resultados aplicados nos pontos da malha.

Desse modo, os dados resultantes podem ser retirados diretamente do gráfico de resultado, conforme mostra Figura 39.

5.1.3 Carga Hidráulica Piezométrica via Excel[®]

Na modelagem via Excel[®], o traçado das linhas equipotenciais é apresentado na Figura 40.

Figura 40: Traçado linhas equipotenciais via Excel[®].



Fonte: Autoria própria (2020).

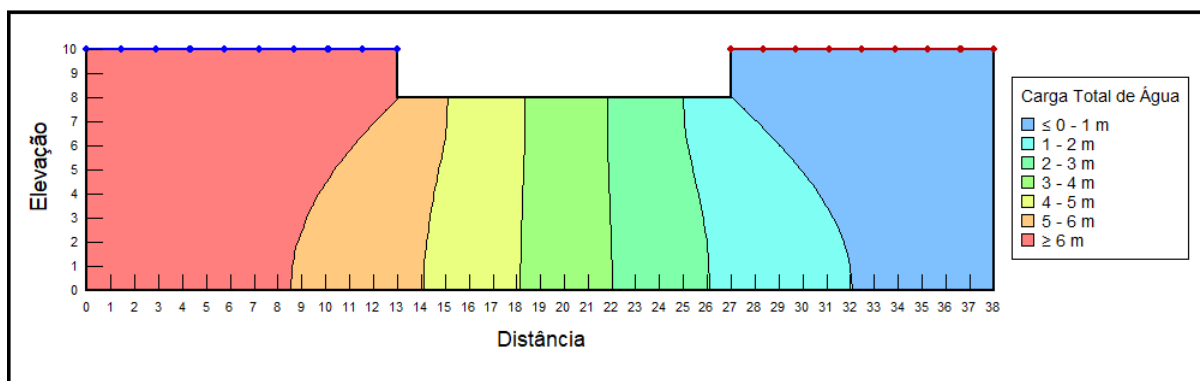
Como dito anteriormente, a aplicação e cálculo utilizando o programa se baseia em trabalhar com elementos, e portanto, seus resultados serem dados para cada elemento existente na região considerada no software.

Partindo das considerações adotadas durante a modelagem, cada valor de carga piezométrica condiz com o elemento/ponto da malha desenvolvida.

5.1.4 Carga Hidráulica Piezométrica via GeoStudio-SEEP/W[®]

A Figura 41 apresenta o resultado do traçado das linhas equipotenciais para o problema em análise utilizando a modelagem do software.

Figura 41: Traçado linhas equipotenciais via SEEP/W[®].



Fonte: Autoria própria (2020).

No software SEEP/W[®], os resultados podem ser visualizados diretamente nos chamados “nós” do MEF, ou pelo *MDF*, o ponto da malha.

5.2 Avaliação global de divergência de resultados

De acordo com Justo e Sauter (2020), os números por não serem representados de forma exata nos computadores leva ao chamado arredondamento, e ao resolver problemas com técnicas numéricas tais erros estarão associados, assim como outros problemas implícitos.

As soluções numéricas podem conter erros de truncamento, erros de iteração, erros de arredondamento, incertezas nas entradas de dados e erros implícitos de programação, podendo acontecer durante a implementação do método ou pelo próprio programador.

Dessa forma, sabendo da existência implícita dos erros acima, se utilizou para mensurar e quantificar a eficiência das aproximações obtidas, o erro relativo percentual conforme equação (39) abaixo.

$$E(\%) = \frac{|R_0 - R_f|}{|R_f|} \cdot 100 \quad (39)$$

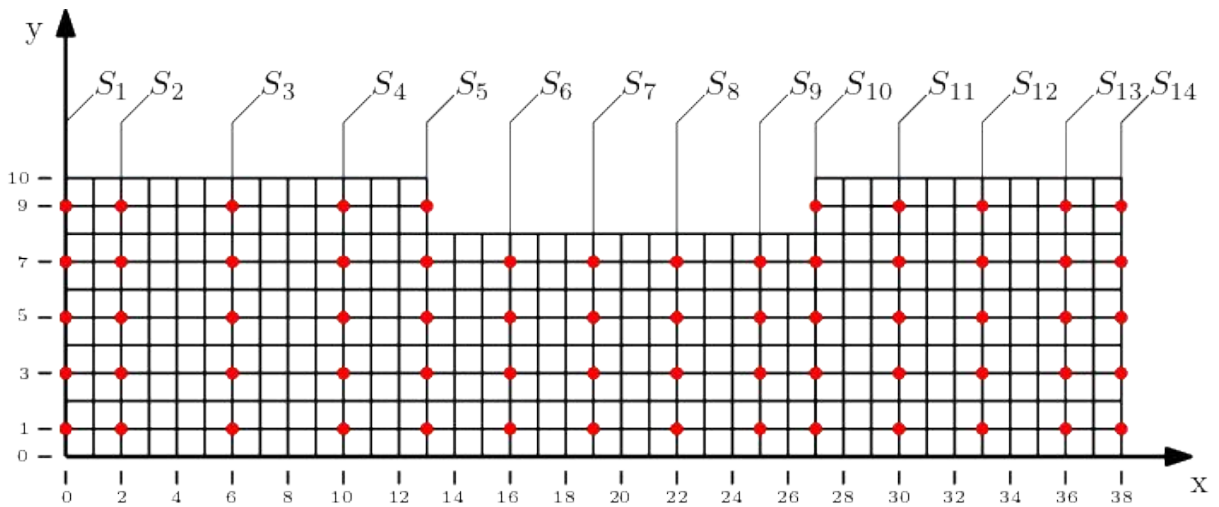
em que R_0 é o valor obtido por Das (2007) e R_f o valor a ser comparado.

5.3 Coordenadas analisadas

Para comparar as diferentes metodologias, foram escolhidas sessenta e seis coordenadas no plano cartesiano seguindo os passos realizados dentro da malha, ou

seja, definidas pelo passo do *MDF* utilizado, conforme ilustrado na Figura 42.

Figura 42: Coordenadas analisadas da malha.



Fonte: Autoria própria (2020).

Analisando a Figura 42, as coordenadas são ilustradas pelos pontos vermelhos, também é apontado seções piezométricas (S_n) que irão facilitar a visualização dos resultados entre as soluções e sua convergência.

5.4 Carga Hidráulica Piezométrica nas coordenadas analisadas

Através das coordenadas e seções (S_n) em análise, é apresentado na Tabela 5 as cargas piezométricas obtidas para cada uma das soluções.

Tabela 5: Coordenadas em análise.

CARGAS HIDRÁULICAS PIEZOMÉTRICAS [m]				
Seção / Coordenada	DAS	MATLAB [®]	EXCEL [®]	SEEP/W [®]
$S_1 - (0,1)$	6,371	6,499	6,501	6,502
$S_1 - (0,3)$	6,447	6,547	6,549	6,550
$S_1 - (0,5)$	6,489	6,639	6,641	6,642
$S_1 - (0,7)$	6,693	6,768	6,769	6,770
$S_1 - (0,9)$	6,903	6,920	6,920	6,920
$S_2 - (2,1)$	6,236	6,475	6,477	6,478
$S_2 - (2,3)$	6,387	6,525	6,527	6,528
$S_2 - (2,5)$	6,540	6,621	6,623	6,624
$S_2 - (2,7)$	6,690	6,756	6,757	6,758

$S_2 - (2,9)$	6,849	6,916	6,916	6,916
$S_3 - (6,1)$	6,079	6,269	6,272	6,271
$S_3 - (6,3)$	6,258	6,334	6,337	6,336
$S_3 - (6,5)$	6,385	6,462	6,464	6,464
$S_3 - (6,7)$	6,590	6,648	6,649	6,650
$S_3 - (6,9)$	6,795	6,877	6,878	6,878
$S_4 - (10,1)$	5,630	5,804	5,808	5,802
$S_4 - (10,3)$	5,500	5,885	5,888	5,883
$S_4 - (10,5)$	5,763	6,058	6,061	6,057
$S_4 - (10,7)$	6,115	6,346	6,348	6,350
$S_4 - (10,9)$	6,666	6,763	6,764	6,765
$S_5 - (13,1)$	4,892	5,252	5,257	5,250
$S_5 - (13,3)$	5,021	5,320	5,325	5,317
$S_5 - (13,5)$	5,357	5,469	5,473	5,416
$S_5 - (13,7)$	5,770	5,751	5,754	5,724
$S_5 - (13,9)$	6,504	6,574	6,575	6,607
$S_6 - (16,1)$	4,297	4,553	4,559	4,555
$S_6 - (16,3)$	4,367	4,587	4,592	4,588
$S_6 - (16,5)$	4,556	4,647	4,652	4,647
$S_6 - (16,7)$	4,652	4,710	4,715	4,702
$S_7 - (19,1)$	3,522	3,778	3,784	3,784
$S_7 - (19,3)$	3,686	3,785	3,791	3,790
$S_7 - (19,5)$	3,729	3,796	3,801	3,801
$S_7 - (19,7)$	3,719	3,805	3,811	3,809
$S_8 - (22,1)$	2,987	2,987	2,993	2,996
$S_8 - (22,3)$	2,931	2,972	2,978	2,981
$S_8 - (22,5)$	2,901	2,947	2,953	2,958
$S_8 - (22,7)$	2,885	2,926	2,931	2,939
$S_9 - (25,1)$	2,343	2,233	2,238	2,245
$S_9 - (25,3)$	2,233	2,187	2,192	2,199
$S_9 - (25,5)$	2,075	2,097	2,102	2,111
$S_9 - (25,7)$	2,000	1,989	1,993	2,011
$S_{10} - (27,1)$	1,908	1,784	1,789	1,797
$S_{10} - (27,3)$	1,827	1,714	1,718	1,728

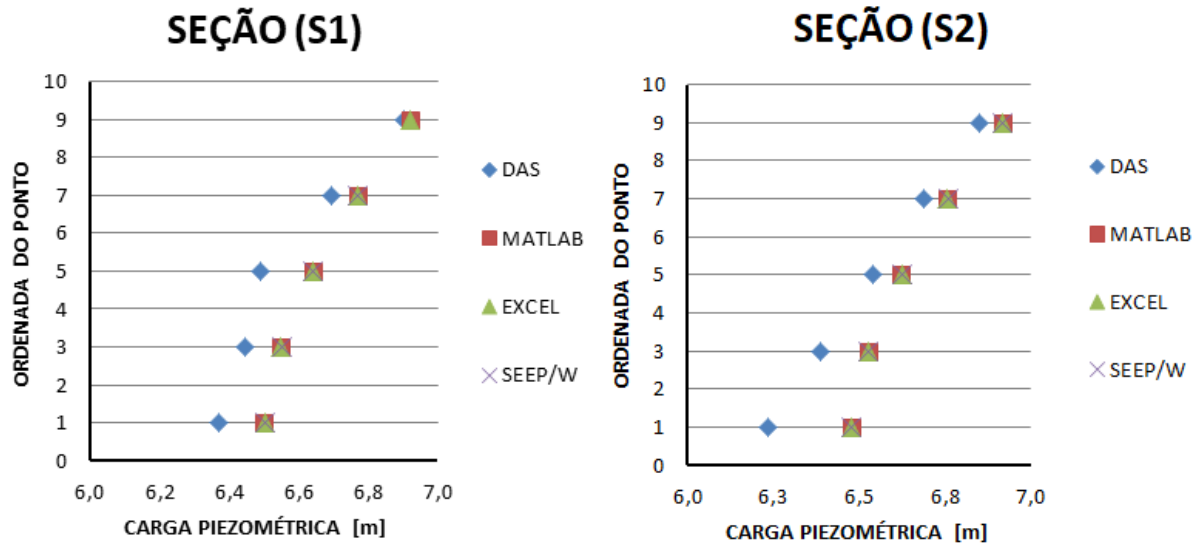
$S_{10} - (27,5)$	1,646	1,560	1,564	1,578
$S_{10} - (27,7)$	1,287	1,271	1,274	1,306
$S_{10} - (27,9)$	0,478	0,434	0,435	0,403
$S_{11} - (30,1)$	1,409	1,246	1,250	1,257
$S_{11} - (30,3)$	1,321	1,161	1,164	1,171
$S_{11} - (30,5)$	0,977	0,980	0,982	0,987
$S_{11} - (30,7)$	0,658	0,678	0,680	0,680
$S_{11} - (30,9)$	0,288	0,245	0,246	0,245
$S_{12} - (33,1)$	0,876	0,895	0,899	0,902
$S_{12} - (33,3)$	0,847	0,818	0,821	0,824
$S_{12} - (33,5)$	0,759	0,664	0,667	0,668
$S_{12} - (33,7)$	0,508	0,437	0,439	0,438
$S_{12} - (33,9)$	0,188	0,153	0,154	0,153
$S_{13} - (36,1)$	0,771	0,718	0,721	0,722
$S_{13} - (36,3)$	0,689	0,651	0,653	0,654
$S_{13} - (36,5)$	0,599	0,521	0,523	0,523
$S_{13} - (36,7)$	0,432	0,337	0,339	0,338
$S_{13} - (36,9)$	0,145	0,117	0,117	0,117
$S_{14} - (38,1)$	0,702	0,685	0,688	0,689
$S_{14} - (38,3)$	0,664	0,620	0,623	0,623
$S_{14} - (38,5)$	0,549	0,495	0,497	0,497
$S_{14} - (38,7)$	0,377	0,320	0,321	0,321
$S_{14} - (38,9)$	0,128	0,111	0,111	0,111

Fonte: Autoria própria (2020).

Dessa forma, para fins de comparação entre os resultados obtidos pelos softwares e a solução segundo Das (2007), será utilizado o modelo da Tabela 5.

Para melhor visualização da convergência dos resultados entre as soluções, foi realizado a plotagem das cargas piezométricas das coordenadas separadas por seções, para análise da variação das cargas, em que o eixo vertical condiz com as ordenadas das coordenadas da seção analisada, sendo ilustradas nas Figuras 43, 44, 45, 46, 47, 48 e 49.

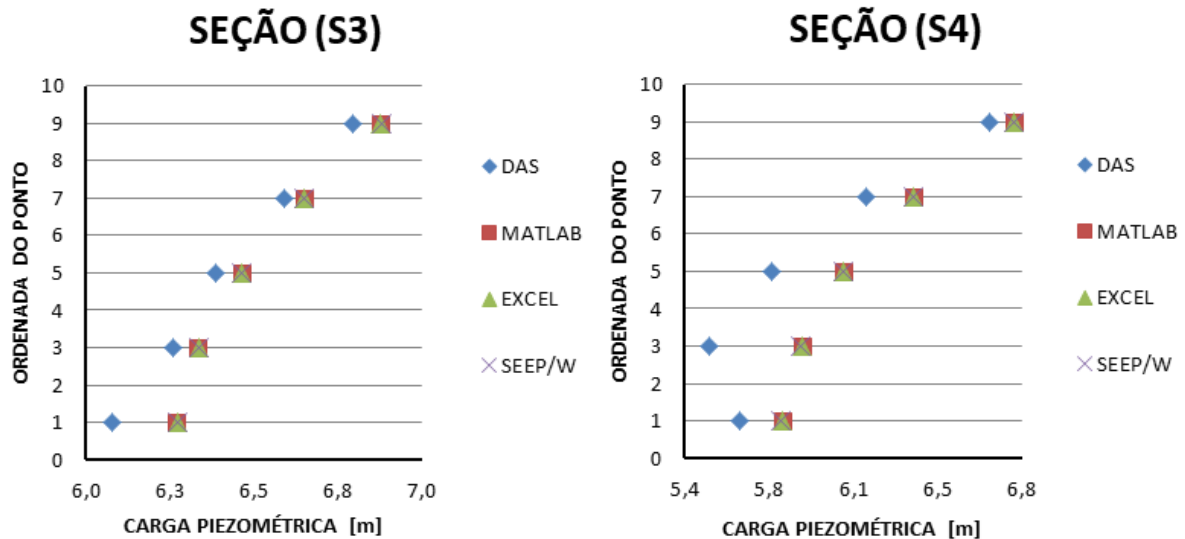
Figura 43: Cargas Piezométricas das coordenadas nas seções S1 e S2.



Fonte: Autoria própria (2020).

Ao longo das seções S1 e S2, segundo Figura 43, a maior convergência de carga piezométrica se deu nas coordenadas com $y = 9$ e maior variação em coordenada com $y = 5$ e $y = 1$, para as seções S1 e S2, respectivamente.

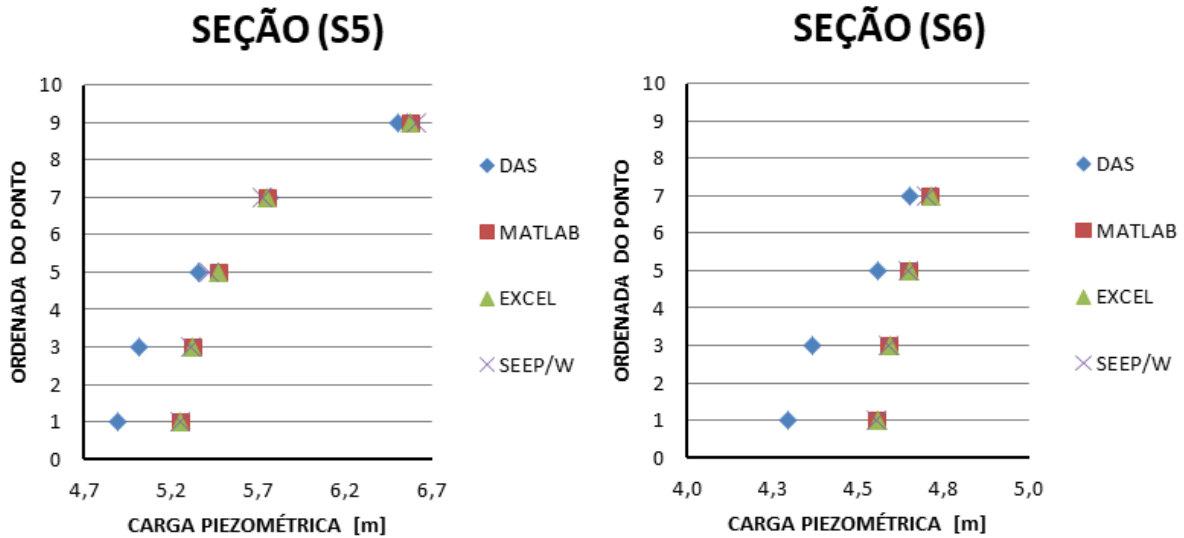
Figura 44: Cargas Piezométricas das coordenadas nas seções S3 e S4.



Fonte: Autoria própria (2020).

Já ao longo das seções S3 e S4, segundo Figura 44, a maior convergência de carga piezométrica se deu na coordenada com $y = 7$ e $y = 9$, e maior variação em coordenada com $y = 1$ e $y = 3$, para as seções S3 e S4, respectivamente.

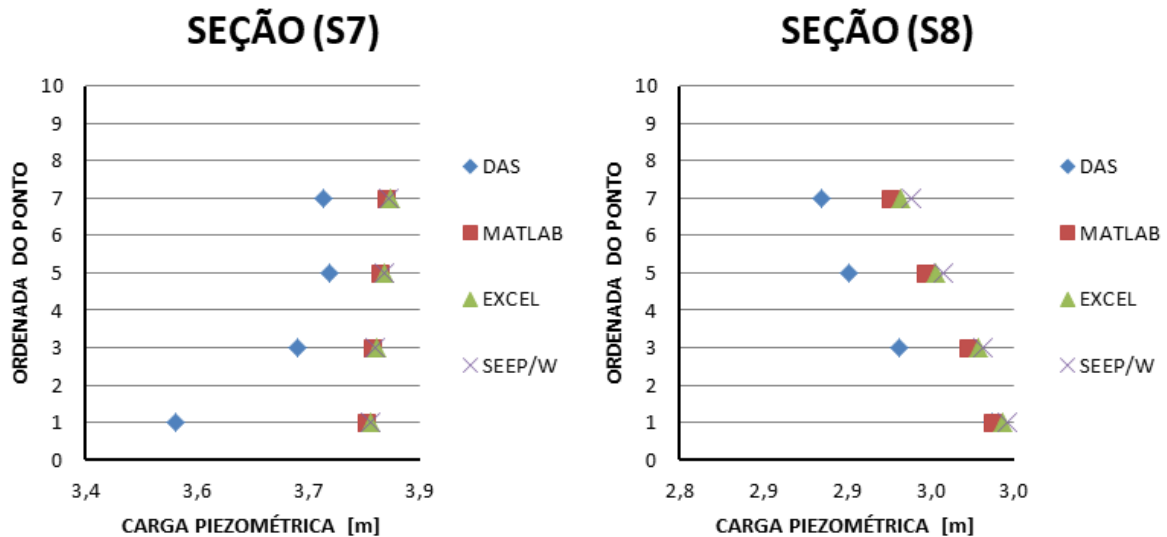
Figura 45: Cargas Piezométricas das coordenadas nas seções S5 e S6.



Fonte: Autoria própria (2020).

Nesse contexto, para as seções S5 e S6, segundo Figura 45, a maior convergência de carga piezométrica se deu na coordenada com $y = 7$ e maior variação em coordenadas com $y = 1$.

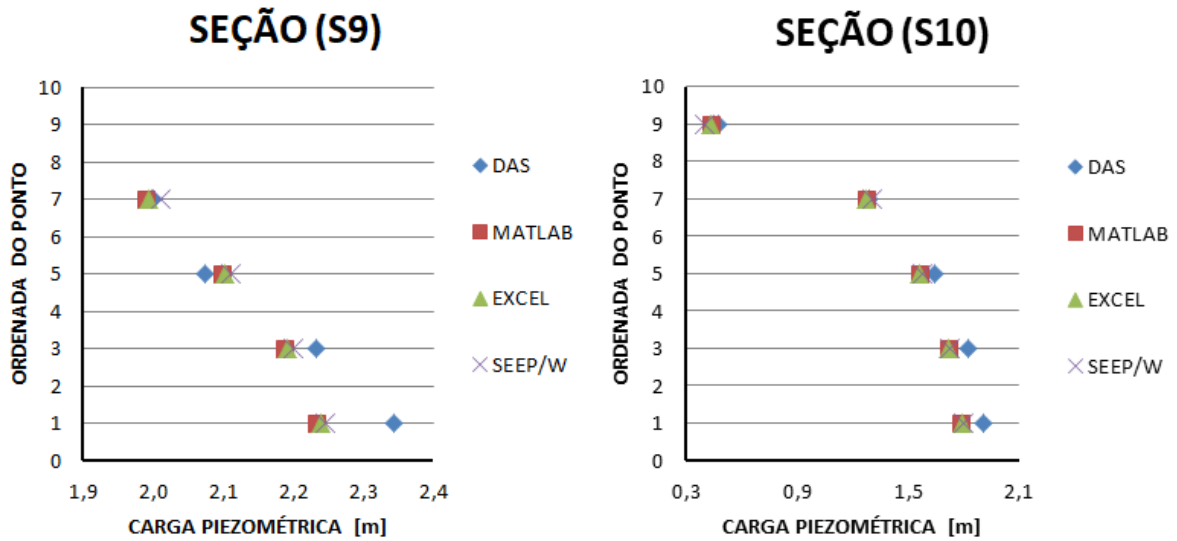
Figura 46: Cargas Piezométricas das coordenadas nas seções S7 e S8.



Fonte: Autoria própria (2020).

Nas seções S7 e S8, segundo Figura 46, a maior convergência de carga piezométrica se deu na coordenada com $y = 5$ e $y = 1$, e maior variação em coordenada com $y = 1$ e $y = 5$, para as seções S7 e S8, respectivamente.

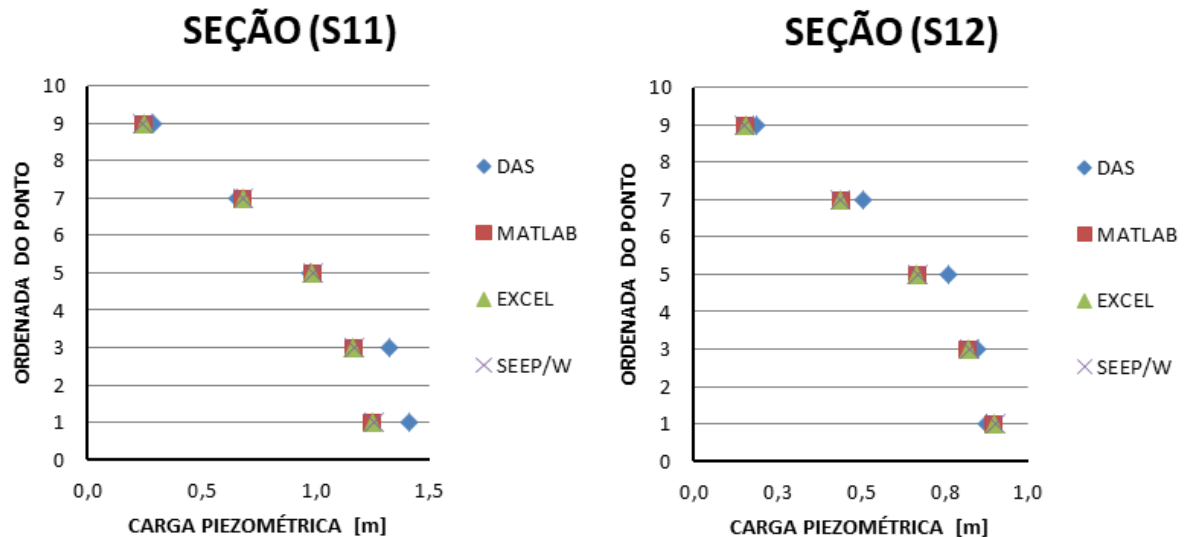
Figura 47: Cargas Piezométricas das coordenadas nas seções S9 e S10.



Fonte: Autoria própria (2020).

Nas seções S9 e S10, segundo Figura 47, a maior convergência de carga piezométrica se deu nas coordenadas com $y = 7$ e maior variação em coordenada com $y = 1$.

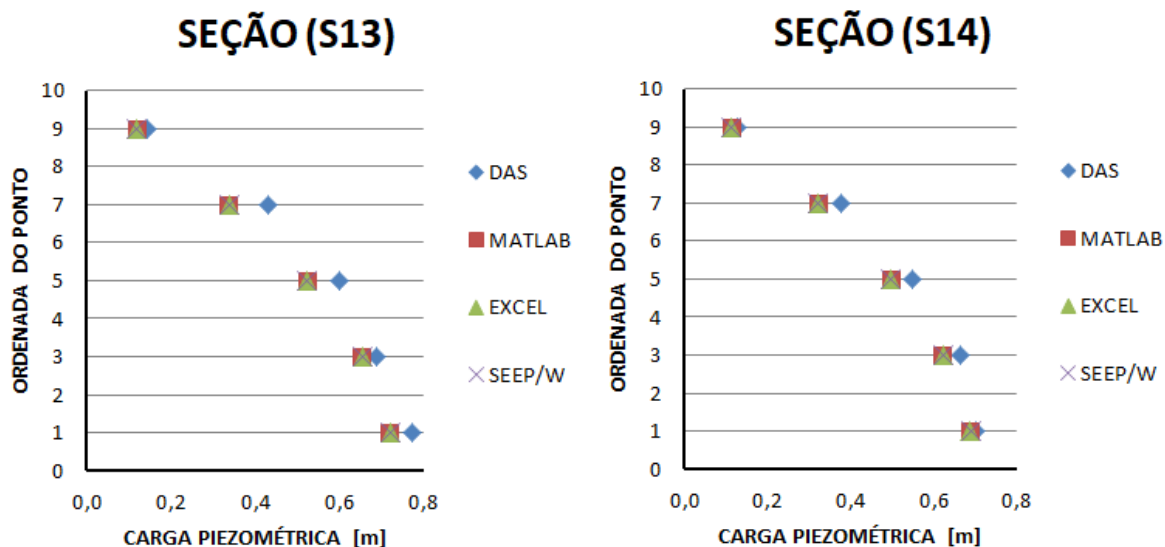
Figura 48: Cargas Piezométricas das coordenadas nas seções S11 e S12.



Fonte: Autoria própria (2020).

Nas seções S11 e S12, segundo Figura 48, a maior convergência de carga piezométrica se deu na coordenada com $y = 5$ e $y = 1$, e maior variação em coordenada com $y = 1$ e $y = 5$, para as seções S11 e S12, respectivamente.

Figura 49: Cargas Piezométricas das coordenadas nas seções S13 e S14.



Fonte: Autoria própria (2020).

Nas seções S13 e S14, segundo Figura 49, a maior convergência de carga piezométrica se deu na coordenada com $y = 3$ e $y = 1$, e maior variação em coordenada com $y = 7$, para as seções S13 e S14, respectivamente.

De modo geral, as cargas piezométricas das coordenadas nas seções conclui-se que existe uma maior convergência dos resultados em coordenadas mais próximas das condições de contorno problema.

E de acordo com os resultados obtidos pelo algoritmo MATLAB[®], Excel[®] e SEEP/W[®], estes convergiram bem entre si, ao estarem sobrepostos em todas as seções analisadas, e seguiram próximos em relação a Das (2007).

5.5 Erro Relativo

Esta seção apresenta os erros relativos das soluções via MATLAB[®], Excel[®] e SEEP/W[®], comparadas com os resultados obtidos pela interpolação de pontos da solução de Das (2007). A Tabela 6 apresenta os erros relativos obtidos pelas modelagens realizadas.

Tabela 6: Erro relativo (%) entre Das (2007) e soluções.

ERRO RELATIVO (%)			
Seção / Coordenada	MATLAB [®]	EXCEL [®]	SEEP/W [®]
$S_1 - (0,1)$	2,01	2,05	2,06
$S_1 - (0,3)$	1,55	1,59	1,60
$S_1 - (0,5)$	2,31	2,35	2,36
$S_1 - (0,7)$	1,12	1,13	1,15
$S_1 - (0,9)$	0,25	0,25	0,25
$S_2 - (2,1)$	3,83	3,87	3,88
$S_2 - (2,3)$	2,16	2,19	2,21
$S_2 - (2,5)$	1,24	1,27	1,28
$S_2 - (2,7)$	0,99	1,00	1,02
$S_2 - (2,9)$	0,98	0,98	0,98
$S_3 - (6,1)$	3,13	3,18	3,16
$S_3 - (6,3)$	1,21	1,26	1,25
$S_3 - (6,5)$	1,21	1,24	1,25
$S_3 - (6,7)$	0,88	0,90	0,91
$S_3 - (6,9)$	1,21	1,22	1,22
$S_4 - (10,1)$	3,09	3,16	3,06
$S_4 - (10,3)$	7,00	7,06	6,96
$S_4 - (10,5)$	5,12	5,17	5,10
$S_4 - (10,7)$	3,10	3,14	3,17
$S_4 - (10,9)$	1,46	1,47	1,49
$S_5 - (13,1)$	7,36	7,46	7,32
$S_5 - (13,3)$	5,95	6,05	5,90
$S_5 - (13,5)$	2,09	2,17	1,10
$S_5 - (13,7)$	0,33	0,27	0,80
$S_5 - (13,9)$	1,08	1,09	1,58
$S_6 - (16,1)$	5,96	6,10	6,00
$S_6 - (16,3)$	5,04	5,16	5,06
$S_6 - (16,5)$	2,00	2,12	2,00
$S_6 - (16,7)$	1,25	1,35	1,07
$S_7 - (19,1)$	7,27	7,44	7,44
$S_7 - (19,3)$	2,69	2,84	2,82

$S_7 - (19,5)$	1,80	1,95	1,93
$S_7 - (19,7)$	2,31	2,47	2,42
$S_8 - (22,1)$	0,00	0,20	0,30
$S_8 - (22,3)$	1,40	1,60	1,71
$S_8 - (22,5)$	1,59	1,79	1,96
$S_8 - (22,7)$	1,42	1,61	1,87
$S_9 - (25,1)$	4,69	4,46	4,18
$S_9 - (25,3)$	2,06	1,84	1,52
$S_9 - (25,5)$	1,06	1,29	1,69
$S_9 - (25,7)$	0,55	0,34	0,55
$S_{10} - (27,1)$	6,50	6,23	5,82
$S_{10} - (27,3)$	6,19	5,95	5,42
$S_{10} - (27,5)$	5,22	4,98	4,13
$S_{10} - (27,7)$	1,24	0,99	1,48
$S_{10} - (27,9)$	9,14	8,91	15,69
$S_{11} - (30,1)$	11,57	11,27	10,79
$S_{11} - (30,3)$	12,11	11,84	11,36
$S_{11} - (30,5)$	0,31	0,54	1,02
$S_{11} - (30,7)$	3,04	3,40	3,34
$S_{11} - (30,9)$	14,93	14,61	14,93
$S_{12} - (33,1)$	2,17	2,58	2,97
$S_{12} - (33,3)$	3,42	3,03	2,72
$S_{12} - (33,5)$	12,52	12,13	11,99
$S_{12} - (33,7)$	13,98	13,57	13,78
$S_{12} - (33,9)$	18,62	18,19	18,62
$S_{13} - (36,1)$	6,87	6,54	6,36
$S_{13} - (36,3)$	5,52	5,18	5,08
$S_{13} - (36,5)$	13,02	12,72	12,69
$S_{13} - (36,7)$	21,99	21,62	21,76
$S_{13} - (36,9)$	19,31	19,09	19,31
$S_{14} - (38,1)$	2,42	2,02	1,85
$S_{14} - (38,3)$	6,63	6,21	6,17
$S_{14} - (38,5)$	9,84	9,44	9,47
$S_{14} - (38,7)$	15,12	14,80	14,85

$S_{14} - (38,9)$	13,28	13,20	13,28
-------------------	-------	-------	-------

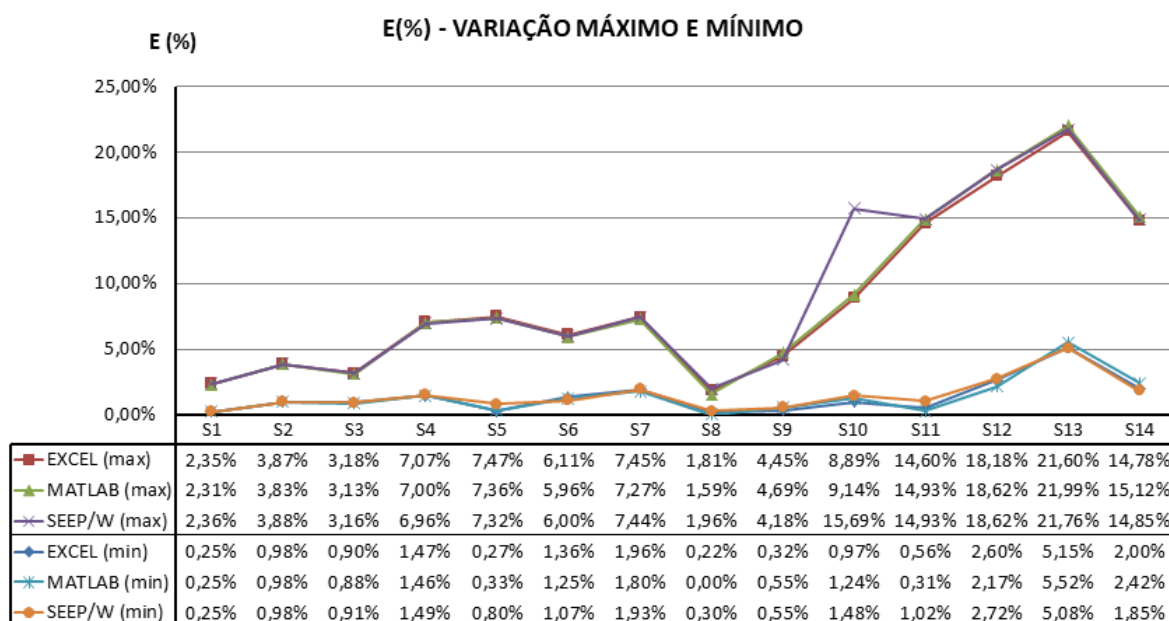
Fonte: Autoria própria (2020).

5.5.1 Convergência Global

Para análise da convergência, será verificada a eficiência na comparação dos resultados obtidos com Das (2007), a partir do valor máximo e mínimo de E(%) encontrado em diferentes seções da malha pelos dados presentes na Tabela 6.

Os erros máximos e mínimos obtidos nas três comparações foram representados graficamente, de modo a verificar a variação ao longo das seções, conforme Figura 50.

Figura 50: Erro relativo (%) máximo e mínimo nas seções.



Fonte: Autoria própria (2020).

De acordo com a Figura 50, é possível perceber que os resultados via algoritmo MATLAB[®], Excel[®] e SEEP/W[®] convergiram bem entre si ao longo de toda a malha, porém em alguns pontos a jusante da barragem, houve uma extrapolação quanto a comparação com solução de Das (2007), em que as modelagens variaram do mesmo modo.

Nesse contexto, como as cargas piezométricas nas últimas seções variam entre 1 e 0 m, e portanto, qualquer alteração torna-se significativa quanto a análise de erro relativo (%). Assim, devido ao traçado manual realizado por Das (2007) e a

interpolação manual de cargas piezométricas diretamente da solução, se justificam portanto erros maiores que 10% nessas seções.

Quanto aos resultados obtidos por algoritmo MATLAB[®], Excel[®] e SEEP/W[®], as solução utilizando o *MDF* obtiveram resultados significativos ao comparar software comercial GeoStudio-SEEP/W[®] em que utiliza em sua base de dados o *MEF*.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

Neste estudo, foram realizadas análises de convergência das cargas hidráulicas piezométricas, e portanto das linhas equipotenciais, do problema de percolação de água em maciço terroso homogêneo, isotrópico e saturado proposto por Das (2007) utilizando métodos numéricos, em especial o *MDF*.

Os resultados obtidos durante as comparações de carga hidráulica piezométrica, foi visível a qualidade do *MDF* ao comparar ao software comercial GeStudio-SEEP/W[®] (Método dos Elementos Finitos), devido a sua convergência obtida ao longo de todas as seções analisadas, e portanto, confirma-se a eficácia do algoritmo e modelagem via Excel[®] com o uso do método numérico.

Ao comparar os resultados via MATLAB[®], Excel[®] e GeoStudio-SEEP/W[®] com Das (2007), de modo geral houve uma convergência satisfatória na maioria dos pontos, e nos pontos extrapolados, ou seja, pontos que tiveram $E (\%) \geq 10\%$, as modelagens variaram do mesmo modo com Das (2007), reforçando os resultados obtidos nos softwares.

Como sugestões para a elaboração de trabalhos futuros, devido principalmente a qualidade dos resultados obtidos, pode-se citar a aplicação e verificação dos resultados em diferentes malhas, adequação do algoritmo para outros modelos de maciço com n camadas, e comparar com o software GeoStudio-SEEP/W[®], pois existem poucas referências de problemas com mais de uma camada. Por último, aplicar outros métodos de análise matricial, em diferentes malhas e testar o tempo computacional.

REFERÊNCIAS

- ANDREOTTI, R. A. **Aplicação do método das diferenças finitas para a obtenção da deflexão de placas delgadas ortotrópicas bi-apoiadas**. Dissertação (B.S. thesis) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2018.
- BARBOZA, D.; FLORIANO, C. Estudo de percolação em barragens de concreto e terra com base em análises numéricas de fluxo. 07 2018.
- BEAR, J.; VERRUIJT, A. Modeling groundwater flow and pollution (vol. 2). **Dordrecht: Springer Science & Business Media**, v. 10, p. 978–94, 1987.
- BIEZUNER, R. J. Notas de aula métodos numéricos para equações diferenciais parciais elípticas. **Belo Horizonte-UFMG**, 2007.
- BITTENCOURT, M. L.; FEIJÓO, R. Análise comparativa de métodos diretos e iterativos para a solução de sistema de equações. **Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería**, p. 123–148, 1997.
- BRANDI, A. C. **Métodos Numéricos para Solução de Equações Elípticas**. [S.l.]: Paraná: UFPR, 2018.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Numerical Analysis**. [S.l.: s.n.], 2010.
- CABREIRA, M. M. L.; TEIXEIRA, R. D. S.; SILVA, M. D. A. S. Estudo de esquemas discretos e híbridos na solução do problema de graetz. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 7, n. 1, 2020.
- CENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. **Mecânica dos fluidos-3**. [S.l.]: Amgh Editora, 2015.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Métodos numéricos para engenharia**. [S.l.]: McGraw-Hill, 2008.
- CRUZ, P. T. D. **100 barragens brasileiras: casos históricos, materiais de construção, projeto**. [S.l.]: 2ªEd. São Paulo: Oficina de Textos, 2004. 648 p.
- DAS, B. M. **Fundamentos de engenharia geotécnica**. [S.l.]: Thomson Learning S. Paulo, SP, 2007.
- DOMINGUES, R. O.; SIQUEIRA, A. S.; RIBEIRO, R. Método das diferenças finitas para a equação da onda unidimensional. 2017.
- FERNANDES, M. A. **Estudo dos mecanismos de instabilização em um talude de solo arenoso não saturado localizado na região centro-oeste paulista**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2016.
- FERREIRA, V.; LIMA, G. Solução numérica de equações diferenciais parciais. **V Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, UFPB**, 2010.

FONSECA, E. C. A. D. **Aplicação do Método das Diferenças Finitas (MDF) no Problema de Percolação de Água em Maciços Terrosos. Palestra proferida durante as apresentações do projeto "Instigando seu Saber".** [S.l.]: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, câmpus Campo Mourão, 2018.

FORTUNA, A. D. O. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações.** [S.l.]: São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2000.

GEOSTUDIO, S. Groundwater flow analysis. **Geoslope website,** <https://www.geoslope.com/products/seep-w>, 2020.

GERSOVICH, D. M. S. Fluxo bidimensional em solos saturados. **Departamento de Engenharia Civil – PUC – Rio. Rio de Janeiro**, p. 130 – Notas de Aula, 2011.

GOMES, T. B. S. Modelagem de caracterização geotécnica do solo da barragem do assentamento olivencia localizada no município de Quixadá/CE. 2019.

JESUS, J. C.; PEREIRA, L. L. Modelagem matemática computacional pelo método dos elementos de contorno para problemas de fluxos em meios porosos. **Águas Subterrâneas**, n. 1, 2004.

JUSTO, D. A. R.; SAUTER, E. Cálculo numérico-Um livro colaborativo. **Universidade Federal do Rio Grande do Sul**, 2020.

LAJINHA, T. Solução analítica em regime permanente para o fluxo da água subterrânea e de um fluido não aquoso leve-LNAPL: verificação experimental. Edições Universidade Fernando Pessoa, 2005.

LIBARDI, P. L. **Dinâmica da Água no Solo.** [S.l.]: 2ªEd.São Paulo.Edusp, 2012.

LOPES, L. M. N. **O rompimento da barragem de Mariana e seus impactos socioambientais.** [S.l.]: Universidade Federal Fluminense - UFF - em Parceria com o Núcleo de Ciências do Poder Judiciário - NUPEJ, 2016.

LOPES, V. L. D. R.; RUGGIERO, M. A. G. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais.** [S.l.]: Sao Paulo: MAKRON Books, 1996.

MACHADO, S. L.; MACHADO, M. D. F. Mecânica dos solos II: Conceitos introdutórios. **Material didático dos alunos que cursam a disciplina Mecânica dos Solos na UFBA**, 1997.

MARANGON, M. Hidráulica dos solos. **Faculdade de Engenharia-NuGeo/Núcleo de Geotecnia, Universidade Federal de Juíz de Fora, Brasil**, 2006.

MARQUES, J. D. D. O. et al. Avaliação da condutividade hidráulica do solo saturada utilizando dois métodos de laboratório numa topossequência com diferentes coberturas vegetais no baixo amazonas. **Acta Amazonica**, SciELO Brasil, v. 38, n. 2, p. 193–206, 2008.

MATHWORKS, M. The language of technical computing. **World Wide Web**, <http://www.mathworks.com/products/matlab>, 2020.

MIRANDA, E. G. D. S. Uma aplicação prática em excel na análise de projetos de viabilidade econômica. Florianópolis, 2010.

MOREIRA, M. A equação de bernoulli da hidráulica. 2007.

MORENO, S. R. **Trabalho apresentado como requisito parcial para aprovação na Disciplina TH701 – Mecânica dos Fluidos I**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, 2010.

NEVES, S. L. N. et al. Sobre o número de soluções de um problema de Neumann com perturbação singular. [sn], 2012.

OLIVEIRA, A. R. Solução numérica de sistemas lineares de grande porte. 2018.

PILLING, S. III – Resolução de sistemas lineares por métodos numéricos. **Universidade do Vale do Paraíba - São José dos Campos - SP**, p. 31 – Notas de Aula, 2016.

PINTO, C. d. S. Curso básico de mecânica dos solos. 2000.

PRESOTO, A. E. et al. Critérios de solubilidade do problema de dirichlet. [sn], 2008.

RADTKE, J. J. Método das diferenças finitas. **Universidade Tecnológica Feral do Paraná - Campus Francisco Beltrão**, p. 130p; Notas de Aula, 2018.

REICHARDT, K. **Processos de transferência no sistema solo-planta-atmosfera**. [S.l.]: Fundação Cargill Campinas, 1985.

RIJO, M. Movimento da água no solo. 2017.

ROSA, C. F. et al. Série de taylor e aplicações. 2012.

SANDRONI, S. S. Sobre a prática brasileira de projetos geotécnicos de aterros rodoviários em terrenos com solos muito moles. In: **XIII Congresso Brasileiro de Mecânica dos Solos e Engenharia Geotécnica**. [S.l.: s.n.], 2006.

SCALABRIN, I. et al. Programação linear: Estudo de caso com utilização do solver da Microsoft Excel. **Revista Universo Contábil**, v. 2, n. 2, p. 54–66, 2006.

SILVA, J. G. S.; LIMA, L. R. O.; FERREIRA, A. R. Uma experiência didática com base no emprego do matlab nos cursos de graduação da faculdade de engenharia da uerj. In: **WORLD CONGRESS ON ENGINEERING AND TECHNOLOGY EDUCATION-WCETE, Georgia. Proceedings... Georgia: Education Society Publications-IEEE**. [S.l.: s.n.], 2004. v. 1, p. 1–5.

SOARES, A. A. B. O método das diferenças finitas aplicado à teoria das vigas. **Monografia Graduação**, 2010.

UNAS, M. S. P. et al. Estudo experimental e numérico de problemas de percolação em modelo reduzido. 2010.

VIEIRA, S. R. Geoestatística em estudos de variabilidade espacial do solo. **Tópicos em ciência do solo. Viçosa: Sociedade Brasileira de Ciência do Solo**, v. 1, p. 1–53, 2000.

ANEXO A – ALGORITMO VIA MATLAB ASSOCIADO AO APP DESIGNER

%% SEÇÃO I

% Entrada de Dados

B = app.BASEDOMACIOBASETOTALmEditField_2.Value;

H = app.ESPESSURADOMACIOHmEditField_2.Value;

h = app.QUANTIDADEDEPASSOSNOEMBUTIMENTODABARRAGEMhEMBUTIDOE
ditField_2.Value;

Bmontante = app.QUANTIDADEDEPONTOSNAREGIODOCONTORNOMONTANTEE
ditField_3.Value;

Bjusante = app.QUANTIDADEDEPONTOSNAREGIODOCONTORNOMONTANTEE
ditField_4.Value;

nx = app.NMERODEPONTOSEMNXmEditField.Value;

ny = app.NMERODEPONTOSEMYnyEditField.Value;

m = app.NMEROMXIMODEITERAESmEditField.Value;

E = app.ERROPERMITIDOEex00001EditField.Value;

C1 = app.CONDIODECONTORNOAMONTANTEC1mEditField.Value;

C2 = app.CONDIODECONTORNOAJUSANTEC2mEditField.Value;

%% SEÇÃO II

% Construção da matriz M dos coeficientes

n_M = nx*ny;

M = zeros(n_M,n_M);

% Calculo do tamanho do passo

deltax= (B /(nx-1));

```

deltay= (H /(ny-1));
% Calculo da base da barragem
Bbarragem=nx-Bmontante-Bjusante;
% Modelagem da Matriz M
for i= 1:nx
    M(i,i)=1;
end

for i = (nx+1):n_M
    M(i,i) = 4;
end

for k = 1:ny-2
    for i= ((nx*k)+1):(nx*(k+1))
        M(i,(i-nx))= -1;
    end
end

for k = 1:ny-2
    for i= ((nx*k)+1):(nx*(k+1))
        M(i,(i+nx))= -1;
    end
end

for k = 1:ny-2
    for i = ((nx*k)+2):((nx*(k+1))-1)
        M(i,i-1)=-1;
    end
end

```

```
for k = 1:ny-2
```

```
    for i = ((nx*k)+1):((nx*(k+1))-1)
```

```
        M(i,i+1)=-1;
```

```
    end
```

```
end
```

```
% Influência da do trecho enterrado da barragem
```

```
for i = ((Bmontante+1)+(nx*h)):((Bmontante+1)+(Bbarragem-1)+(nx*h))
```

```
    M(i,i-nx) = 0;
```

```
end
```

```
for i = ((Bmontante+1)+(nx*h)):((Bmontante+1)+(Bbarragem-1)+(nx*h))
```

```
    M(i,i+nx) = -2;
```

```
end
```

```
% Condição de contorno por DIRCHLET-DIRCHELET (ESQUERDA)
```

```
for k = 1:ny-2
```

```
    for i = ((nx*k)+1)
```

```
        M(i,i-1)=0;
```

```
    end
```

```
end
```

```
for k = 1:ny-2
```

```
    for i = ((nx*k)+1)
```

```
        M(i,i+1)=-2;
```

```
    end
```

```
end
```

% Condição de contorno por DIRCHLET-DIRCHELET (DIREITA)

for k = 2:ny-1

for i = (nx*k)

 M(i,i-1)=-2;

end

end

for k = 2:ny-1

for i = (nx*k)

 M(i,i+1)=0;

end

end

% Condição de contorno por DIRCHLET-DIRCHELET (ULTIMA CAMADA)

for i = (((nx*(ny-1))+2)):((nx*ny)-1)

 M(i,(i-1))= -1;

end

for i = (((nx*(ny-1))+2)):((nx*ny)-1)

 M(i,(i+1))= -1;

end

for i = (((nx*(ny-1))+2)):((nx*ny)-1)

 M(i,(i-nx))= -2;

end

% Condição de contorno por DIRCHLET-DIRCHELET nas quinas (ESQUERDA)

for i = ((nx*(ny-1))+1)

```

        M(i,(i-nx))= -2;
    end

    for i= ((nx*(ny-1))+1)
        M(i,(i+1))= -2;
    end

    % Condição de contorno por DIRCHLET-DIRCHELET nas quinas (DIREITA)
    for i= (nx*ny)
        M(i,(i-nx))= -2;
    end

    for i= (nx*ny)
        M(i,(i-1))= -2;
    end

    % Condição de contorno por DIRCHLET-DIRCHELET (ESQUERDA DA PARCELA
    EMBUTIDA)
    for k = 1:(h-1)
        for i = (Bmontante+(nx*k))
            M(i,(i-1))= -2;
        end
    end

    for k = 1:(h-1)
        for i = (Bmontante+(nx*k))
            M(i,(i+1))= 0;
        end
    end

```



```
% Condição de contorno por DIRCHLET-DIRCHELET (DIREITA DA PARCELA EMBUTIDA)
```

```
for k = 1:(h-1)
    for i = ((Bmontante+1)+(nx*k)+(Bbarragem))
        M(i,(i-1))= 0;
    end
end
```

```
for k = 1:(h-1)
    for i = ((Bmontante+1)+(nx*k)+(Bbarragem))
        M(i,(i+1))= -2;
    end
end
```

```
% Modelagem da região da Barragem embutida
```

```
for k = 1:(h-1)
    for i = ((Bmontante+1)+(nx*k)):((Bmontante)+(nx*k)+(Bbarragem))
        M(i,i)= 1;
    end
end
```

```
for k = 1:(h-1)
    for i = ((Bmontante+1)+(nx*k)):((Bmontante)+(nx*k)+(Bbarragem))
        M(i,i+nx)= 0;
    end
end
```

```
for k = 1:(h-1)
```

```

    for i = ((Bmontante+1)+(nx*k)):((Bmontante)+(nx*k)+(Bbarragem))
        M(i,i-nx)= 0;
    end
end

for k = 1:(h-1)
    for i = ((Bmontante+1)+(nx*k)):((Bmontante)+(nx*k)+(Bbarragem))
        M(i,i-1)= 0;
    end
end

for k = 1:(h-1)
    for i = ((Bmontante+1)+(nx*k)):((Bmontante)+(nx*k)+(Bbarragem))
        M(i,i+1)= 0;
    end
end

% Construção do vetor b dos termos independentes
% Contorno superior
b=zeros(1,n_M);
for j = 1:(Bmontante)
    b(j) = C1;
end

for j = (Bmontante+1):(Bmontante+Bbarragem)
    b(j) = 0;
end

for i = ((Bmontante+1) + (Bbarragem)) : nx

```

```

        b(j) = C2;
    end

% Contorno interno e inferior da malha
for j = (nx+1):n_M
    b(j) = 0;
end

%% SEÇÃO III
% Solução do sistema linear - Método de Jacobi

X0=zeros(n_M,1);
X=X0;
K = 0;
Norma=1;

while Norma > E
    K=K+1;
    for i=1:n_M
        suma=0;
        for j=1:n_M
            if i == j
                suma=suma+M(i,j)*X(j);
            end
        end
        X(i) = ((b(i) - suma)) / M(i,i);
    end
    Norma = norm(X0 - X);
    fprintf('%10.6f\n', Norma)
end

```

```

X0 = X;

if K <= m

    break

end

end

%% SEÇÃO IV
% Inversão dos resultados no grid cartesiano
% Passo 1

k=0;
Carga1=zeros(ny,nx);
for i = 1:ny

    for j = 1:nx

        k =k+1;

        Carga1(i,j) = X0(k);

    end

end

% Passo 2

k = 0;
Carga2=zeros(ny,nx);
for i = 1:ny

    k = ny - (i-1);

    for j = 1:nx

        Carga2(i,j) = Carga1(k,j);

    end

end

%% (SEÇÃO V) % Plotagem dos resultados

X = 0:deltax:B;

```

```
y = 0:deltay:H;  
contourf(app.UIAxes,X,y,Carga2,((C1-C2)-1));colorbar;  
daspect([1 1 1])
```

Fonte: Autoria própria (2020).