

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

LUIZ PEDRO PALACIO DANIEL

**ESTUDO DE MODELOS COMPARTIMENTAIS VIA TEORIA DA ESTABILIDADE
DE EDO'S**

CURITIBA

2022

LUIZ PEDRO PALACIO DANIEL

**ESTUDO DE MODELOS COMPARTIMENTAIS VIA TEORIA DA ESTABILIDADE
DE EDO'S**

Study of Compartmental Models by way of ODE's Stability Theory

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof^a. Dr^a. Nara Bobko

CURITIBA

2022



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

LUIZ PEDRO PALACIO DANIEL

**ESTUDO DE MODELOS COMPARTIMENTAIS VIA TEORIA DA ESTABILIDADE
DE EDO'S**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação
apresentado como requisito para obtenção do
título de Licenciado em Matemática do Curso
de Licenciatura em Matemática da Universidade
Tecnológica Federal do Paraná.

Data de aprovação: 24 de novembro de 2022

Nara Bobko
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Andres David Baez Sanchez
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Mateus Bernardes
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

**CURITIBA
2022**

Dedico este trabalho aos meus amigos, à
minha orientadora e à minha mãe. Pois sem os
ombros destes gigantes, jamais chegaria até
aqui.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha mãe Maria Cristina Palacio, por todo seu apoio e durante a graduação.

Agradeço à minha orientadora Prof^a. Dr^a. Nara Bobko, pelos seus ensinamentos e pelo seu suporte durante a construção desta monografia.

Agradeço meus amigos, por toda confiança e apoio para a realização desta monografia.

RESUMO

Esta monografia lida com alguns conceitos da teoria da estabilidade para sistemas de equações diferenciais ordinárias (EDO's). A ideia central desta teoria é entender como as trajetórias de solução de um sistema de EDO's se comportam na vizinhança de um ponto de equilíbrio. Este tipo de análise qualitativa é útil para estudarmos o comportamento de um fenômeno físico, ou biológico, modelado a partir de um sistema de EDO's sem que seja necessária a obtenção da sua solução analítica, que pode nem ser possível. Com base nisso, a monografia aborda primeiramente alguns conceitos e definições básicas da teoria das equações diferenciais. Em segundo lugar, estuda os conceitos oriundos da teoria da estabilidade para sistemas de EDO's lineares via estudo de autovalores. Após isso, apresenta uma extensão da teoria da estabilidade de EDO's lineares para sistemas de EDO's não lineares via estudo de autovalores da matriz Jacobiana do sistema aplicada no ponto de equilíbrio e a apresentação das funções de Lyapunov, que também podem ser utilizadas para a análise de estabilidade. Por fim, a monografia apresenta a aplicação da teoria da estabilidade em alguns modelos epidemiológicos conhecidos como modelos compartimentais.

Palavras-chave: equações diferenciais ordinárias; teoria da estabilidade de EDO's; funções de Lyapunov; biomatemática; modelos compartimentais.

ABSTRACT

This monograph deals with some concepts of ordinary differential equations (ODE's) stability theory. The core concept of this theory is understanding how the solution paths of an ODE system behave in the vicinity of an equilibrium point. This qualitative analysis is useful to study the behavior of a physical or biological phenomenon modeled by an ODE system without having to obtain your analytical solution, that may not even be possible. Based on this, the monograph first addresses some basic concepts and definitions of differential equations theory. Secondly it studies the concepts derived from linear ODE's system stability via eigenvalues study. After that, it presents an extension of linear ODE's system stability to non-linear ODE's via Jacobian matrix eigenvalues study applied to the equilibrium point and the presentation of Lyapunov functions which can also be used for stability analysis. Finally the monograph presents the application of stability theory in some epidemiological models known as compartmental models.

Keywords: ordinary differential equations; stability theory of ODE's; Lyapunov functions; bio-mathematics; compartmental models.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Pêndulo Simples	16
Figura 2 – Conceitos de Estabilidade	21
Figura 3 – Retrato de fase do Sistema (7)	22
Figura 4 – Retrato de Fase do caso $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$	24
Figura 5 – Retrato de fase do pêndulo simples sem atrito	28
Figura 6 – Retrato de fase do pêndulo simples com atrito	29
Figura 7 – Retrato de fase de um sistema instável na origem	29
Figura 8 – Retrato de Sistema (10)	33
Figura 9 – Retrato de fase de um sistema instável (a) e (b) e assintoticamente es- tável (c) na origem	40
Figura 10 – Retrato de fase do pêndulo não linear sem atrito	47
Figura 11 – Retrato de fase do pêndulo não linear com atrito	49
Figura 12 – Retrato de fase do Sistema (40)	59
Figura 13 – Retrato de fase do Sistema (42)	60
Figura 14 – Retrato de fase do Sistema (44)	62
Figura 15 – Diagrama do Modelo SIR descrito pelo Sistema (46)	64
Figura 16 – Diagrama do Modelo SIS	67
Figura 17 – Retrato de fase do Modelo SIS	70
Figura 18 – Diagrama do Modelo SIR	71

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tabela referente ao Teorema 3.3	50
Tabela 2 – Tabela da generalização dos autovalores em relação a sistemas multi- dimensionais	50

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	ESTABILIDADE DE EDO'S LINEARES	11
2.1	Equações Diferenciais	11
2.2	Equações Diferenciais Ordinárias Lineares	15
2.3	Estabilidade de Sistemas de EDO's Lineares	18
3	ESTABILIDADE DE EDO'S NÃO LINEARES	30
3.1	Equações Diferenciais Ordinárias Não Lineares	30
3.2	Estabilidade via Matriz Jacobiana	40
3.3	Estabilidade via Funções de Lyapunov	54
4	MODELAGEM MATEMÁTICA EM EPIDEMIOLOGIA	63
4.1	Introdução	63
4.2	Modelos compartimentais	64
4.3	Propagação de Rumores nas Redes Sociais	65
4.4	Coronavírus	70
5	CONCLUSÃO	82
	REFERÊNCIAS	84

1 INTRODUÇÃO

O estudo de Equações Diferenciais surge com os estudos de Isaac Newton (1642 - 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) juntamente com o surgimento do Cálculo (PEREIRA, 2019). Em linhas gerais, uma derivada representa a taxa de variação de um fenômeno e as equações diferenciais são aquelas que modelam problemas matemáticos que envolvem as derivadas, ou seja, a importância do estudo das equações diferenciais está em entender o que acontece com um fenômeno real com a variação do tempo, por exemplo.

Segundo BOYCE; DIPRIMA (2006) : "Muitos dos princípios, ou leis, que regem o comportamento do mundo físico são proposições, ou relações envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem". Assim, estudar o comportamento de equações diferenciais é muito importante para a matemática aplicada e pode ser relacionado com diversos problemas do cotidiano, como entender a propagação de um vírus em uma população.

Uma das maneiras mais comuns de estudar as equações diferenciais é através da sua solução analítica, que é a função que satisfaz a equação diferencial e certas condições iniciais na função. Com esta temos informações concretas e completas do comportamento do fenômeno conforme as variações dadas. Mas encontrar a solução analítica de uma equação diferencial não é possível. Além do método analítico de solucionar EDO's, podemos usar teorias qualitativas que nos ajudam a entender o comportamento das soluções.

Neste contexto, o objetivo principal desta monografia é estudar o comportamento de estabilidade ou instabilidade das soluções de um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares e não lineares próximas à um ponto de equilíbrio. Ou seja, procurar entender se as soluções, em um determinado instante tendem a se aproximar ou se afastar de um ponto específico. Além deste estudo teórico, buscamos trazer algumas aplicações relacionadas à epidemiologia e estudá-las de maneira qualitativa.

A partir deste estudo, buscamos redigir um texto que fosse acessível para estudantes que já estudaram Cálculo Diferencial 1 e Álgebra Linear e que pudesse instigar o estudo de equações diferenciais e proporcionar um estudo aplicado.

Esta monografia é formada por 5 capítulos. No Capítulo 2 são apresentados as principais classificações das equações diferenciais, um modelo físico que será utilizado durante todo o trabalho como exemplo motivador (Pêndulo Simples) e as principais definições e teoremas que envolvem o estudo da teoria da estabilidade envolvendo sistemas de equações diferenciais ordinárias (EDO's) lineares. Continuamos este estudo teórico no Capítulo 3, onde são apresentados dois resultados desta teoria qualitativa para sistemas de EDO's não lineares, sendo um deles o estudo via autovalores da matriz presente no sistema e o outro via funções de Lyapunov. Além disso, são apresentados alguns resultados que envolvem o Cálculo no \mathbb{R}^n , que são importantes para o estudo via autovalores. No Capítulo 4, são apresentadas contextualizações epidemiológicas aplicadas em modelos matemáticos e a utilização da teoria da estabilidade nestes modelos. Por fim, as considerações finais do texto estão presentes no Capítulo 5.

2 ESTABILIDADE DE EDO'S LINEARES

Este capítulo tem como objeto a apresentação da teoria da estabilidade que envolve sistemas físicos e biológicos que serão apresentados durante o trabalho. Para concluir este objetivo com êxito é necessário passar por alguns tópicos envolvendo a teoria das equações diferenciais, principalmente as que denominamos por Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's). A teoria das equações diferenciais é muito abrangente e sua maior parte foge do escopo deste trabalho, portanto estudaremos apenas alguns tópicos relevantes para o melhor entendimento do leitor sobre o estudo de estabilidade de EDO's não lineares, apresentados no Capítulo 4.

Acreditamos que esta breve abordagem de alguns pontos da teoria possa ser interessante tanto como uma revisão para quem já estudou estes conceitos, mas também para quem ainda não teve contato com a teoria de EDO's pois poderão ter uma ideia, mesmo que superficial, necessária para a compreensão dos próximos capítulos. Vale ainda mencionar que, para o bom entendimento deste texto, é desejável que o leitor já tenha conhecimento dos conteúdos das disciplinas de Cálculo Diferencial, Cálculo Integral e Álgebra Linear.

2.1 Equações Diferenciais

Muitos dos princípios, ou leis, que regem o comportamento do mundo físico são proposições, ou relações envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem. Expressas em linguagem matemática, as relações são equações e as taxas são derivadas. Equações contendo derivadas são **equações diferenciais**. Portanto, para compreender e investigar problemas envolvendo o movimento de fluidos, o fluxo de corrente elétrica em circuitos, a dissipação de calor em objetos sólidos, a propagação e detecção de ondas sísmicas, ou o aumento ou diminuição de populações, entre muitos outros, é necessário saber alguma coisa sobre equações diferenciais (BOYCE; DIPRIMA, 2006, p.1)

Em outras palavras, quando buscamos descrever um problema físico (“problema real”) nos deparamos com termos desconhecidos (incógnitas) que variam conforme o tempo passa, assim estas incógnitas não podem ser descritas apenas por números, mas sim por funções e suas próprias taxas de variação, ou seja, suas derivadas.

Por exemplo, a velocidade média de um determinado corpo pode ser descrita matematicamente por

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta T} = \frac{S(T_f) - S(T_i)}{T_f - T_i},$$

onde ΔS representa o espaço percorrido (variação espacial) e ΔT representa o tempo que passou enquanto o corpo percorria o espaço (variação temporal). Isto é, $S(T)$ denota a posição do corpo no tempo T , enquanto T_i e T_j representam os instantes inicial e final, respectivamente.

Considerando variações temporais (ΔT) suficientemente pequenas a velocidade média do corpo se aproxima da velocidade instantânea do mesmo. Matematicamente,

$$V(T) = \lim_{T_j \rightarrow T} \frac{S(T_j) - S(T)}{T_j - T}.$$

Note que esta é exatamente a expressão que define a derivada da função posição (deslocamento) $S(T)$ no ponto T , isto é, $V(T) = S'(T)$. Assim, podemos perceber que a derivada da função deslocamento é a velocidade.

Apesar deste ser um exemplo relativamente simples, ele é muito importante para a observarmos como as derivadas fazem sentido dentro de uma descrição matemática de um fenômeno físico. Desta forma, se temos informações a respeito da velocidade de um corpo (derivada) e buscamos informações sobre seu deslocamento (função original), estamos lidando com uma **equação diferencial**.

Muitos dos fenômenos físicos, químicos e biológicos presentes no “mundo real” podem ser estudados no âmbito matemático. Uma das formas de estudar um determinado fenômeno é transcrever suas características e propriedades centrais em linguagem matemática através de equações diferenciais, obtendo assim um **modelo matemático**. Desta forma, podemos estudar o fenômeno através do estudo da equação diferencial que o modela.

Assim, por (BOYCE; DIPRIMA (2006)) na citação presente no início da seção, equações diferenciais, em linhas gerais, são equações cuja incógnita é uma função, chamada de **função incógnita**, e suas derivadas nesta equação estão presentes as derivadas desta função.

Neste trabalho temos como objetivo trabalhar com EDO's, isto é, equações diferenciais cuja função incógnita depende apenas de uma variável independente.

De maneira geral, EDO's podem ser escritas na forma:

$$f(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = g(t), \quad (1)$$

onde t é a variável independente, $y(t)$ é a função incógnita e $y^{(i)}(t)$ denota a i -ésima derivada de y .

Os estudos acerca das equações diferenciais é vasto e com diversas abordagens. Assim é necessária uma classificação destas para que possamos escolher a abordagem correta antes de “atacar” o problema. Além desta classificação, denotada por **tipo** em algumas literaturas, também é comum classificar as equações diferenciais quanto a sua **ordem** e quanto sua **linearidade**.

1. **Ordem**: a ordem de uma equação diferencial é dada pela derivada de maior ordem que está presente na equação;

2. **Linearidade:** uma equação diferencial é dita:

- **Linear:** quando a função incógnita bem como suas derivadas aparecem de forma linear na equação;
- **Não linear:** quando não é linear.

Exemplo 2.1. *Um sistema massa-mola com amortecimento pode ser descrito pela seguinte equação diferencial:*

$$mx''(t) + \gamma x'(t) + kx = F_0 \cos(\omega t),$$

onde $m, \gamma, k \in \mathbb{R}$ representam respectivamente a massa, coeficiente de atrito e constante elástica da mola, $F_0 \cos(\omega t)$ representa uma força externa à dinâmica livre da mola e $x(t)$ representa o deslocamento da massa. A função incógnita neste exemplo é $x(t)$ e $t \in \mathbb{R}$ a única variável independente, logo esta equação é **ordinária**. Além disso a derivada de $x(t)$ de ordem mais alta é de ordem 2, portanto a EDO é de **segunda ordem**. Por fim, todos os termos que contém a função incógnita estão escritos de forma linear, portanto esta é uma EDO **linear**.

Exemplo 2.2. *A equação diferencial que descreve o movimento ($\theta(t)$) do pêndulo simples, sem atrito é a seguinte:*

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{l} \text{sen}(\theta(t)) = 0,$$

esta será muito explorada na seção seguinte deste trabalho, mas é classificada como **ordinária**, de **segunda ordem** e **não linear**.

Exemplo 2.3. *Segundo BOYCE; DIPRIMA (2006): "Uma das equações mais importantes que ocorrem na matemática aplicada está associada ao nome de Laplace", esta equação é importante pois trata-se de uma equação diferencial descritora de diversos comportamentos que circundam campos científicos diferentes, como a astronomia, o eletromagnetismo e a mecânica dos fluídos. Esta equação, em \mathbb{R}^2 , é descrita por:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Sendo assim, é uma equação diferencial **parcial**, pois a função incógnita $f(x, y)$ possui duas variáveis diferentes x e y , de **segunda ordem** e **linear**.

Vale ressaltar que durante o estudo de equações diferenciais podemos nos deparar com equações dadas no formato de um sistema, como veremos adiante. Os sistemas de equações também são classificados a partir destes critérios. Por exemplo, um sistema e EDO's é linear se todas suas equações são ordinárias e lineares.

Exemplo 2.4. Um sistema massa-mola pode sem amortecimento pode ser descrito pela seguinte equação diferencial:

$$mx''(t) + kx = 0$$

de maneira análoga ao Exemplo 2.1. Se considerarmos $x'(t) = v(t)$ e $x''(t) = a(t)$, funções que representam, respectivamente, a velocidade e a aceleração do sistema. Podemos reescrever esta EDO pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\frac{k}{m}x(t). \end{cases}$$

Note que, neste sistema, ambas as funções incógnita dependem apenas da variável independente t , portanto ambas as equações diferenciais são **ordinárias** e assim, temos um sistema de EDO's. A derivada de maior ordem tem ordem 1, e portanto é um sistema de equações de **primeira ordem**. E ambas as equações são lineares, portanto o sistema é **linear**.

Exemplo 2.5. Sejam $x(t)$ e $y(t)$ as funções que descrevem as populações de duas espécies que existem no modelo predador-presa, respectivamente, no instante t . O sistema que modela a dinâmica populacional destes dois grupos é o chamado modelo de Lotka-Volterra, descrito por:

$$\begin{cases} x'(t) = ax - \alpha xy \\ y'(t) = -cy - \gamma xy, \end{cases}$$

onde $a, c, \alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ descrevem a taxa de crescimento da população de presas na ausência dos predadores, a taxa de mortalidade dos predadores na ausência de presas, a taxa de mortalidade das presas no encontro com predadores e a taxa de crescimento da população de predadores devido à predação, respectivamente.

Note que, neste sistema, ambas as funções incógnitas dependem apenas da variável independente t , portanto são ordinárias e portanto, trata-se de um sistema de EDO's. A maior ordem das derivadas é 1, desta forma é um sistema de equações de **primeira ordem**. E as equações possuem o termo xy , logo é **não linear**.

Uma outra maneira de denotar os sistemas de EDO's lineares é a **forma matricial**, dada por:

$$X' = AX,$$

onde X' representa o vetor com as derivadas das funções incógnita, A uma matriz de coeficientes e X o vetor que contém as próprias funções incógnita em suas entradas.

Exemplo 2.6. Tome o sistema de EDO's lineares descrito no Exemplo 2.4:

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\frac{k}{m}x(t) \end{cases}$$

Podemos reescrever este sistema em sua forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}.$$

2.2 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares

Afim de introduzir mais alguns conceitos importantes para o estudo de EDO's, em particular de EDO's lineares, vamos apresentar a seguir um exemplo motivador: o movimento de um pêndulo simples sem atrito.

Consideremos um sistema pendular composto por uma partícula (esfera) com massa $m > 0$, segurado por uma haste rígida de massa desprezível de comprimento $L > 0$, como pode ser visto na Figura 1. Desta forma as possíveis posições para a partícula pendurada pela haste estão sobre uma circunferência de raio L . Consideremos ainda que a ponta da haste está fixada na origem do nosso sistema cartesiano e que as posições para o pêndulo são descritas pelos pontos $X = (x(t), y(t))$.

Uma vez que a partícula em questão se desloca de maneira circular, a fim de simplificar a escrita do problema, podemos descrever as posições da partícula utilizando coordenadas polares:

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cos(\theta(t)) \\ y(t) = r(t) \sin(\theta(t)), \end{cases}$$

onde $0 \leq r(t) \leq L$ e $0 \leq \theta(t) \leq 2\pi$. Mas, note que $r(t) = L$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pois a haste é fixa. Fazendo esta alteração, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x(t) = L \cos(\theta(t)) \\ y(t) = L \sin(\theta(t)). \end{cases}$$

Note que, este é um sistema com apenas uma função incógnita ($\theta(t)$) que pode atingir valores entre 0 e 2π , conforme variações do tempo.

Como a partícula possui massa $m > 0$, existe uma força peso atuante na movimentação do corpo. Pela segunda lei de Newton, sabemos que uma força pode ser expressa pelo produto

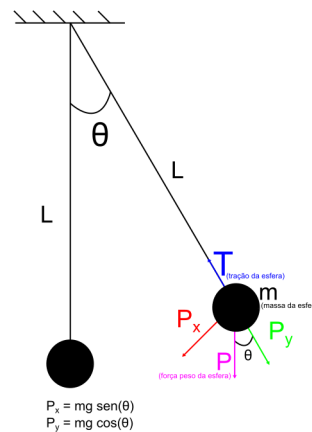
entre a massa e a aceleração de um corpo. No caso da força peso (P) teremos então:

$$P = mg,$$

onde g representa a constante gravitacional.

A Figura 1 ilustra a força peso atuando sobre o pêndulo. Nesta figura, a força peso já foi decomposta em suas componentes P_x e P_y . Para simplificar, vamos considerar um plano polar rotacionado de tal forma que P_y esteja alinhado com a haste do pêndulo. Neste caso também consideramos a força T de tração oposta a componente P_y . Esta figura também ilustra nossa função $\theta(t)$ que indica o ângulo formando entre a posição atual da haste e o eixo principal, que é a posição $\theta_0 = \theta(0)$, a posição de repouso do pêndulo.

Figura 1 – Pêndulo Simples



Fonte: Adaptado de MOREIRA *et al.* (2019)

Como a haste do pêndulo mantém o mesmo comprimento em qualquer tempo t , a força de tração T e a componente P_y se anulam, pois são forças opostas em um sistema em equilíbrio. Desta forma, a força peso P é descrita apenas pela sua componente P_x . Desta forma,

$$P = P_x = -mg \text{sen}(\theta(t)). \quad (2)$$

Note que, o sinal negativo nesta equação se dá pelo fato que a força peso está oposta ao nosso eixo de referência ao plano rotacionado.

Por outro lado, utilizando novamente a segunda Lei de Newton, temos que a força peso também pode ser vista como o produto da massa do objeto (m) e da aceleração angular do objeto (aqui denotada por α):

$$P = m\alpha. \quad (3)$$

Precisamos então encontrar a aceleração angular. Como vimos anteriormente, a velocidade de um objeto pode ser obtida como a derivada da função posição (deslocamento) em

relação ao tempo. Analogamente, a aceleração do objeto será a derivada da velocidade em relação ao tempo. Portanto, poderemos obter a aceleração angular como a segunda derivada da posição angular. Uma vez que a posição angular é dada por $L\theta(t)$ (em radianos), teremos $\alpha = L\theta''(t)$. Assim, usando as Equações (2) e (3), segue

$$-mg \operatorname{sen}(\theta(t)) = mL\theta''(t),$$

ou ainda,

$$\theta''(t) = \frac{-g}{L} \operatorname{sen}(\theta(t)). \quad (4)$$

Note que a equação diferencial dada em (4) é uma EDO, de segunda ordem não linear. Todavia, pelo limite fundamental da trigonometria temos que:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta} = 1 \Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow 0} \operatorname{sen}(\theta) = \theta.$$

Isto é, se considerarmos o caso de pequenas oscilações do pêndulo, teremos que $\operatorname{sen}(\theta(t)) \approx \theta(t)$. Com esta aproximação, a Equação do pêndulo dada em (4) ficará na forma:

$$\theta''(t) = \frac{-g}{L} \theta(t). \quad (5)$$

Agora estamos lidando com uma EDO de segunda ordem linear. Note que esta aproximação nos permite estudar o comportamento do pêndulo próximo à origem. Isto é, perdemos a capacidade de analisar suas propriedades globais, mas ganhamos a possibilidade de estudar as propriedades locais através de uma EDO mais simples.

Podemos ainda reduzir a ordem desta EDO, transformando-a num sistema de duas EDO's de primeira ordem. Para tal, denotamos velocidade angular por $\omega(t)$. Como a velocidade pode ser descrita pela derivada da posição angular $\theta(t)$, teremos que $\omega(t) = \theta'(t)$. Além disso, a derivada da velocidade angular é a aceleração angular, ou seja, $\theta''(t) = \omega'(t) = \frac{-g}{L} \theta(t)$. Obtemos assim o seguinte sistema de EDO's de primeira ordem lineares:

$$\begin{cases} \theta'(t) = \omega(t) \\ \omega'(t) = -k^2 \theta(t), \end{cases} \quad (6)$$

onde denotamos $\frac{g}{L} = k^2$ para reduzir a quantidade de constantes. Note que como $\frac{g}{L} > 0$, devemos ter também $k \neq 0$.

A solução analítica deste sistema de EDO's é dada por:

$$\theta(t) = c_1 \left(\cos(kt) \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} - \operatorname{sen}(kt) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + c_2 \left(\cos(kt) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \operatorname{sen}(kt) \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} \right),$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias. Neste trabalho não estamos interessados em explicitar a maneira de encontrar a solução analítica de um sistema de EDO's. Todavia o leitor interessado pode encontrar os métodos de resolução em BOYCE; DIPRIMA (2006).

2.3 Estabilidade de Sistemas de EDO's Lineares

Encontrar a solução de uma equação diferencial pode ser suficiente para determinar suas características principais, compreender seu comportamento e, assim, estudar o problema físico modelado pela equação diferencial. Mas muitas vezes encontrar a solução pode não ser possível, ou mesmo bastante complicado. Todavia, existem outras abordagens no estudo de equações diferenciais que permitem obter diversas informações sobre a solução sem resolver a equação diferencial. A **teoria da estabilidade** é uma dessas abordagens e é a que estamos interessados em explorar neste trabalho.

Em linhas gerais, o foco da teoria da estabilidade é estudar o comportamento das curvas de solução de um sistema de EDO's. Em particular, como estas curvas se comportam quando estão próximas a determinados pontos específicos, chamados de **ponto de equilíbrios** ou **singularidades**. Estes pontos nada mais são do que soluções particulares do sistema de EDO's que são constantes, isto é, não variam com o tempo. Nestes casos, a derivada será nula.

Definição 2.1. *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores cujas primeiras derivadas são contínuas no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que $x_0 \in \Omega$ é ponto de equilíbrio de $x' = f(x)$ se $f(x_0) = 0$.*

Para ilustrar melhor esta definição, vamos tomar como exemplo a modelagem que fizemos na Seção 2.3: o pêndulo simples sem atrito simplificado dado pela Equação (6).

Exemplo 2.7. *Considere o sistema de EDO's dado por:*

$$\begin{cases} \theta'(t) = \omega(t) \\ \omega'(t) = -k^2\theta(t). \end{cases}$$

Para encontrar os pontos de equilíbrio deste sistema devemos buscar θ e ω tais que ambas as equações sejam iguais a zero. Isto é, resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} \omega(t) = 0 \\ -k^2\theta(t) = 0. \end{cases}$$

Como $k \neq 0$, é fácil ver que deveremos ter $\omega(t) = \theta(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Desta forma, este sistema tem como ponto de equilíbrio a origem, isto é $(\theta(t), \omega(t)) = (0, 0)$. A interpretação física deste ponto é o repouso do pêndulo.

Agora que definimos o que são os pontos de equilíbrio de um sistema, podemos começar a entender o que acontece com as soluções da EDO em uma vizinhança destes pontos. A este estudo do comportamento da solução próximo ao ponto de equilíbrio damos o nome de **estudo da Estabilidade**.

Antes de apresentarmos a definição formal dos conceitos que fundamentam a teoria da estabilidade, vamos tentar entender exemplificando o que acontece fisicamente com o pêndulo simples.

O exemplo que utilizamos anteriormente como motivador desconsidera o atrito, que geralmente está presente em movimentos. Consideremos agora os dois casos, isto é, o movimento do pêndulo sem atrito (como anteriormente) e com atrito, afim de explorar as diferenças entre as EDO's que representam cada caso.

No caso do pêndulo sem atrito, após aplicada uma força na partícula fixa pela haste esta se moverá de forma periódica, simétrica e constante em torno de um ponto. Este ponto é o ponto de equilíbrio da EDO. Desta forma, as soluções do sistema pendular sem atrito se mantêm **estáveis** em torno deste ponto. Em termos matemáticos, mas de uma maneira não formal, podemos dizer que existe uma vizinhança do ponto de equilíbrio tal que as soluções do sistema não saem desta vizinhança.

Caso a modelagem seja realizada levando em consideração a força de atrito, as soluções também se manterão estáveis no entorno do ponto de equilíbrio. Mas, com o passar do tempo, a força de atrito fará com que o pêndulo tenda ao repouso. Neste caso, as soluções são estáveis e se aproximam da singularidade enquanto t tende ao infinito. Assim, denotamos o ponto de equilíbrio por **assintoticamente estável**.

Por último, imagine que forcamos o pêndulo de forma suficiente que a haste fique paralela à sua posição inicial, mas com sentido contrário. Neste caso, a partícula está em repouso, mas qualquer força, por mínima que seja, faz com que o pêndulo volte a se movimentar. Este é um caso em que as soluções da EDO se afastam do ponto de equilíbrio, e portanto, denotamos este ponto como **instável**

Agora que temos uma ideia do significado de **estabilidade**, **instabilidade** e **estabilidade assintótica** de um ponto de equilíbrio, vamos definir estes conceitos fundamentais com o devido formalismo matemático, como descrito em DOERING; LOPES (2016).

Definição 2.2. Considere a EDO dada por $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$. Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função cujas primeiras derivadas são contínuas no aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, tal que as curvas solução da EDO são dadas por $\phi(t, x) = \phi_t(x)$ e seja x_0 ponto de equilíbrio de f . Então x_0 é dito:

- **estável:** se para toda vizinhança $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 existir uma vizinhança $W_1 \subseteq \Omega \cap U$ tal que $\phi_t(x) \in U$ para todo $x \in W$ e $t > 0$;
- **instável:** se não é estável;

- **assintoticamente estável:** se é estável e para todo $x \in W_2$ temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = x_0$;
- **isolado:** se existe $W \subseteq \mathbb{R}^n$ vizinhança de x_0 tal que x_0 é único ponto de equilíbrio de f em $\Omega \cap W$.

Veja que, para que um ponto de equilíbrio seja estável é necessário que todas as curvas solução da EDO (ou do sistema de EDO's) não se afaste do ponto de equilíbrio e no caso de convergência ao ponto, este será assintoticamente estável. Para que ocorra a instabilidade, basta que uma curva solução se afaste do ponto de equilíbrio, independente da vizinhança que tomarmos.

A definição de ponto de equilíbrio isolado pode parecer trivial. Todavia, apesar de chamarmos as soluções de equilíbrio de "pontos de equilíbrio", podemos ter vários deles agrupados de maneira que formarão um conjunto não unidimensional.

Exemplo 2.8. Considere o seguinte sistema de EDO's:

$$\begin{cases} x' = (x - 1)x \\ y' = (x - 1)^2 \end{cases} .$$

Encontramos os pontos de equilíbrio da seguinte forma:

$$\begin{cases} (x - 1)x = 0 \\ (x - 1)^2 = 0 \end{cases} .$$

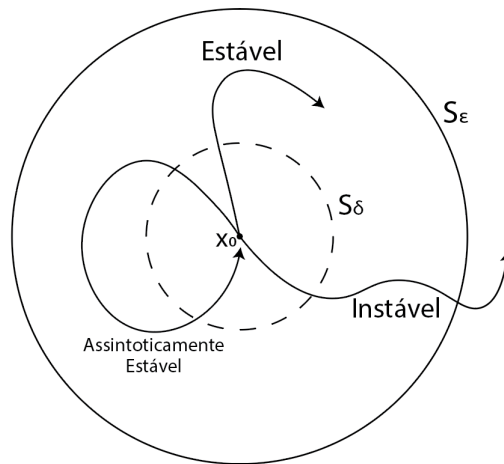
Vemos que na primeira equação:

$$(x - 1)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} .$$

Se aplicarmos x_2 na segunda equação, chegamos em $1 = 0$, o que é absurdo, logo $x = 1$. Por outro lado, como nenhuma das equações depende de y , então os pontos de equilíbrio deste sistema são dados por $f(x, y) = (1, y)$ para todo $y \in \mathbb{R}$, uma reta de equilíbrio, ou seja, não são **isolados**.

A Definição 2.2 pode ser ilustrada pela Figura 2 que mostra um ponto de equilíbrio x_0 e duas vizinhanças, uma menor (S_b) e uma maior (S_ϵ). Note que as soluções estáveis nunca "fogem" da vizinhança maior, enquanto as instáveis se afastam, e as assintoticamente estáveis sempre voltam para o ponto de equilíbrio.

Figura 2 – Conceitos de Estabilidade



Fonte: Adaptado de KREIDER; KULLER; OSTBERG (1972)

Muitas vezes, apenas com a definição formal do conceito, “atacar” um modelo matemático não é uma tarefa simples, portanto, com o intuito de facilitar o estudo da estabilidade destes sistemas, vamos apresentar alguns resultados que simplificam este processo.

Uma das maneiras de observar o que acontece com a estabilidade de algumas soluções de um sistema de EDO's, sem utilizar a Definição 2.2 é através de uma representação visual via retrato de fase. O **retrato de fase** de um sistema de segunda ordem é uma representação geométrica de algumas trajetórias das soluções do sistema em um plano onde os eixos são dados pelos valores das funções incógnita do sistema. A este plano damos o nome de **plano de fase**. Cada curva presente no retrato de fase representa a solução para uma condição inicial. Vejamos como essa representação visual pode nos auxiliar no Exemplo 2.9.

Exemplo 2.9. *Considere o seguinte sistema de EDO's:*

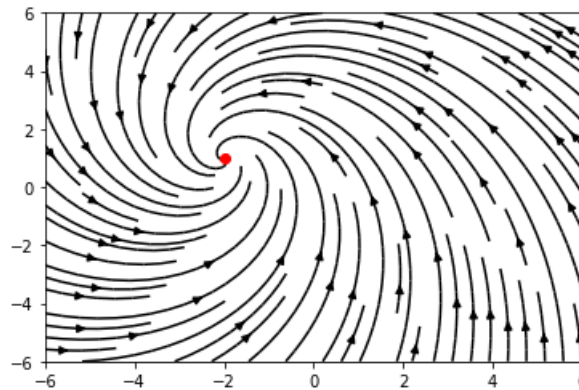
$$\begin{cases} x' = -x - y - 1 \\ y' = 2x - y + 5. \end{cases} \quad (7)$$

Encontramos os pontos de equilíbrio da seguinte forma:

$$\begin{cases} -x - y - 1 = 0 \\ 2x - y + 5 = 0. \end{cases}$$

Portanto, o ponto de equilíbrio deste sistema é dado por $P = (-2, 1)$. Vamos observar o que acontece com o retrato de fase deste sistema na Figura 3:

Figura 3 – Retrato de fase do Sistema (7)



Fonte: Autoria Própria

Veja que, o ponto em vermelho é representa o ponto de equilíbrio, e com este retrato de fase, podemos ver que as soluções do sistema estão se aproximando do ponto de equilíbrio de forma **assintoticamente estável**.

Observação 2.1. Os retratos de fase desenvolvidos por autoria própria foram feitos a partir de um código no Python 3.10 e este código estará disponível em anexo.

Em sistemas de dimensões maiores, o retrato de fase do sistema não é planar e portanto não pode ser visto de forma clara, mas podemos analisar a estabilidade do sistema utilizando outros métodos.

Outra maneira de compreender o que acontece com as curvas solução presentes no retrato de fase de um sistema de EDO's de dimensão 2 dado por $X' = AX$ é analisando os sinais dos autovalores $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ da matriz A , já que estes estão diretamente ligados com as direções dos autovetores que compõem o seu retrato de fase. Desta forma, temos alguns casos a serem analisados. Como esta análise é extensa e o objetivo deste trabalho é estudar os sistemas de EDO's não lineares, esta não será feita em detalhes neste trabalho, mas pode ser vista em DOERING; LOPES (2016). Aqui, indicaremos brevemente o significado de cada um dos casos.

1. Os autovalores tem parte imaginária nula e são distintos:

- a) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$: O ponto de equilíbrio é chamado de **nó estável**, ou **poço**, pois as soluções tem um comportamento **assintoticamente estável** em relação à singularidade;
- b) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$: Neste caso, dizemos que o ponto de equilíbrio é um **nó instável**, ou **fonte**, pois as soluções se afastam da singularidade, tendo assim um comportamento **instável**;
- c) $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$: Com estes sinais, as curvas descritas no plano de fase se comportam como uma **sela**, pois pela direção do autovetor que está associ-

ado ao autovalor $\lambda_1 < 0$ as soluções convergem ao equilíbrio e pela direção do autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 > 0$ as soluções se afastam do ponto de equilíbrio, como pode ser visto na Figura 4.. Desta forma, o ponto de equilíbrio é denominado por **ponto de sela** e as soluções tem um caráter **instável** no seu entorno;

- d) $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 = 0$: Temos um caso onde o sistema apresenta um ponto de equilíbrio **não isolado**, ou seja, uma reta de equilíbrio, e as trajetórias da solução no retrato de fase são transversais à esta reta e paralelas entre si, se aproximando do núcleo, ou seja, **estáveis**;
- e) $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 = 0$: Análogo ao caso anterior, com a única diferença que as curvas solução se afastam da reta equilíbrio, sendo assim, **instáveis**.

2. Os autovalores são iguais (para alívio de notação, vamos denotar apenas por λ), tem sua parte imaginária nula e $A = \lambda I$. Neste caso, todas as soluções são descritas por semirretas que se intersectam no ponto de equilíbrio:

- a) $\lambda < 0$: O ponto de equilíbrio é um **poço**, assim como no caso (1a), mas o denominamos por **foco estável** ou **nó próprio estável** desta vez, pela natureza geométrica das soluções. Assim, estas se comportam de maneira **assintoticamente estável**;
- b) $\lambda > 0$: Neste caso, o ponto de equilíbrio é análogo ao caso (1b), uma **fonte**, mas pela sua natureza geométrica, o chamamos de **foco instável** ou **nó próprio instável**, pois as soluções se afastam do ponto de equilíbrio, mantendo a **instabilidade**;
- c) $\lambda = 0$: Este caso tem como matriz A a matriz nula, sendo assim, seu retrato de fase são pontos no plano.

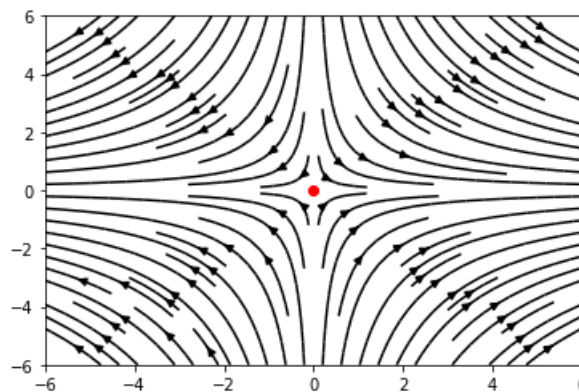
3. Os autovalores são iguais, tem sua parte imaginária nula e a matriz A não é múltipla da matriz identidade. Nestes casos as curvas solução não triviais são tangentes às semirretas que apresentados nos casos (2a), (2b) e (2c):

- a) $\lambda < 0$: Aqui, o ponto de equilíbrio é um **poço**, mas denominado de **nó impróprio estável**, mantendo a **estabilidade assintótica** do caso (2a);
- b) $\lambda > 0$: Analogamente ao caso (2b), temos o ponto de equilíbrio como uma **fonte**, mas desta vez chamado de **nó impróprio instável**, pois as soluções continuam se afastando da singularidade, sendo assim **instável**;
- c) $\lambda = 0$: Neste caso, as soluções se comportam como retas paralelas espalhadas pelo plano de fase;

4. Os autovalores são complexos conjugados, ou seja, $\lambda_1 = a + bi$ e $\lambda_2 = a - bi$ onde $a, b \in \mathbb{R}$. Nestes casos, as soluções tem natureza geométrica espiral, ou seja, ficam girando em torno do ponto de equilíbrio:

- a) $a < 0$: O ponto de equilíbrio, neste caso, é um **poço**, fazendo com que as soluções se aproximem dele, e o chamamos de **ponto espiral estável**, com caráter **assintoticamente estável**;
- b) $a > 0$: Neste caso, a singularidade é uma **fonte**, repelindo as soluções que estão espiralando em sua volta, assim a chamamos de **ponto espiral instável**, que mantém as soluções afastadas e portanto é **instável**;
- c) $a = 0$: Aqui, as soluções se mantêm em circunferências no entorno do ponto de equilíbrio, sem serem atraídas ou afastadas do ponto de equilíbrio, denominamos então este ponto como **centro**, onde as soluções se mantêm **estáveis**.

Figura 4 – Retrato de Fase do caso $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$



Fonte: Autoria Própria

Assim, vemos que os autovalores da matriz A tem papel importantíssimo quando estudamos a estabilidade de um sistema de EDO's bidimensionais. Em casos de dimensão maior, conseguimos enxergar essas propriedades qualitativas de uma forma análoga utilizando os autovalores.

Para enunciar o Teorema 2.1 vamos nos esquivar destes casos. Se o determinante de uma matriz A é nulo, então esta matriz não é invertível e tem pelo menos um de seus autovalores nulos, portanto, enunciamos o Teorema 2.1 da seguinte forma:

Teorema 2.1. *Considere o sistema de EDO's dado por*

$$X' = AX,$$

onde $X = [x(t), y(t)]^T$, $X' = [x'(t), y'(t)]^T$ e A uma matriz com entradas reais 2×2 e invertível com autovalores $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. O ponto de equilíbrio $X_0 = [x_0, y_0]^T = [0, 0]^T$ será:

- **estável** se os autovalores são imaginários puros;
- **assintoticamente estável** se a parte real de ambos os autovalores é negativa;
- **instável** se pelo menos um dos autovalores tem parte real positiva.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em BOYCE; DIPRIMA (2006). Note que, assim como dito anteriormente, este resultado pode ser estendido para dimensões maiores, porém isto foge do escopo deste trabalho.

A partir do Teorema 2.1 é possível utilizar o traço e o determinante da matriz A (denotados respectivamente por tr e $\det(A)$) para caracterizar o tipo de estabilidade do ponto de equilíbrio.

Para tal, consideremos um sistema de EDO's lineares bidimensional:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy, \end{cases}$$

tal que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $X_0 = [0, 0]^T$ é um ponto de equilíbrio.

Desta forma, a matriz A é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

e o polinômio característico associado será:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc.$$

Mas, note que

$$\det(A) = ad - bc \text{ e } \text{tr}(A) = a + d.$$

Logo,

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

Calculando as raízes deste polinômio característico obtemos que os autovalores de A são dados por:

$$\lambda_1 = \frac{\text{tr}(A) + \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A)}}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{\text{tr}(A) - \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A)}}{2}. \quad (8)$$

Uma vez que é possível explicitar os autovalores conforme a Equação (8), poderemos utilizar o traço e o determinante da matriz A para analisar a parte real destes autovalores. Esta análise nos permite obter um Corolário do Teorema 2.1, conforme enunciado a seguir.

Corolário 2.1. *Consideremos o sistema de EDO's dado por $X' = AX$ nas mesmas condições do Teorema 2.1. Assim, teremos que:*

1. se $\text{tr}(A) = 0$ e $\det(A) > 0$, o ponto de equilíbrio X_0 será **estável**;
2. se $\text{tr}(A) < 0$ e $\det(A) > 0$, o ponto de equilíbrio X_0 será **assintoticamente estável**;
3. se $\text{tr}(A) > 0$ ou $\det(A) < 0$, o ponto de equilíbrio X_0 será **instável**

Demonstração. Para provar este resultado, iremos analisar a parte real dos autovalores calculados em (8). Para tal, separaremos em casos utilizando o axioma da tricotomia com relação ao traço e ao determinante de A . Com o intuito de simplificar a escrita, denotaremos a parte real de um número λ por $Re(\lambda)$.

Caso 1: $\text{tr}(A) > 0$.

- Se $\det(A) \neq 0$, então teremos duas possibilidades. Se $\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) \leq 0$, então os autovalores serão números complexos com partes reais dadas por $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = \text{tr}(A)/2 > 0$. Por outro lado, se $\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) > 0$ então os autovalores serão reais e é imediato que ao menos $\lambda_1 > 0$ pois $\text{tr}(A) > 0$.

De qualquer maneira, ao menos um autovalor possui parte real positiva e, assim, X_0 é um ponto de equilíbrio instável.

Caso 2: $\text{tr}(A) = 0$. Neste caso teremos que

$$\lambda_1 = +\frac{\sqrt{-4 \det(A)}}{2} \text{ e } \lambda_2 = -\frac{\sqrt{-4 \det(A)}}{2}.$$

- Se $\det(A) > 0$, então os autovalores serão números complexos tais que $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = 0$ e assim X_0 é ponto de equilíbrio estável.
- Se $\det(A) < 0$, então $\lambda_1 > 0$. Logo X_0 será instável.

Caso 3: $\text{tr}(A) < 0$.

- Se $\det(A) > 0$ então teremos duas possibilidades. Se $\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) \leq 0$, então os autovalores serão números complexos com partes reais dadas por $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = \text{tr}(A)/2 < 0$. Por outro lado, se $\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) > 0$

então os autovalores serão reais e é imediato que $\lambda_2 < 0$ pois $\text{tr}(A) < 0$. Além disso, como $\det(A) > 0$ teremos

$$\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) < \text{tr}(A)^2 \Rightarrow \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A)} < |\text{tr}(A)| = -\text{tr}(A).$$

Disso segue que $\lambda_1 < 0$. Como a parte real de ambos os autovalores sempre será negativa, segue que neste caso X_0 será assintoticamente estável.

- Se $\det(A) < 0$, então note que $\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) > 0$. Logo os autovalores serão números reais. Além disso, como $\det(A) < 0$ temos que

$$\text{tr}(A)^2 < \text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) \Rightarrow |\text{tr}(A)| < \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A)}.$$

Disso segue que $\lambda_1 > 0$ e, assim, que X_0 é instável.

□

Afim de exemplificar este resultado, vamos estudar a estabilidade de três sistemas diferentes.

Exemplo 2.10. Consideremos o sistema que define o pêndulo simples linearizado:

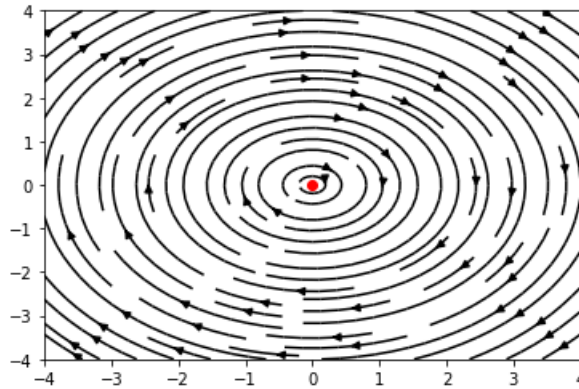
$$\begin{cases} \theta'(t) = \omega(t) \\ \omega'(t) = -k^2\theta(t) \end{cases}$$

Logo, sua matriz A é dada por: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{bmatrix}$. Vamos calcular seu traço e determinante:

$$\begin{cases} \text{tr}(A) = 0 + 0 = 0 \\ \det(A) = 0 + k^2 = k^2 > 0. \end{cases}$$

De acordo com o Corolário 2.1 teremos então que o ponto de equilíbrio $X_0 = (0, 0)$ é estável. A Figura 5 ilustra o retrato de fase e nela podemos ver que as soluções orbitam em torno do ponto de equilíbrio, sem se afastar ou se aproximar, mantendo o caráter estável. Fisicamente, estas trajetórias significam que o pêndulo ficaria em movimento constante, pois sem a força de atrito contrária ele não retornaria à posição de repouso.

Figura 5 – Retrato de fase do pêndulo simples sem atrito



Fonte: Aatoria Própria

Exemplo 2.11. Considere o sistema que define o pêndulo simples com atrito linearizado:

$$\begin{cases} \theta'(t) = \omega(t) \\ \omega'(t) = -k^2\theta(t) - \alpha\omega(t) \end{cases}$$

Logo, sua matriz A é dada por: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & -\alpha \end{bmatrix}$. Vamos calcular seu traço e determinante:

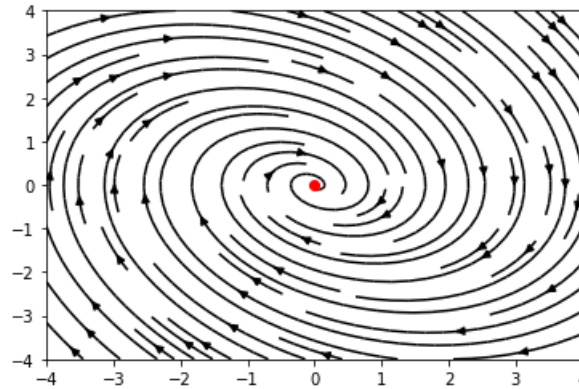
$$\begin{cases} \text{tr}(A) = 0 - \alpha = -\alpha < 0 \\ \det(A) = 0 + k^2 = k^2 > 0. \end{cases}$$

Assim, de acordo com o Corolário 2.1 teremos que de fato o ponto $X_0 = (0, 0)$ é assintoticamente estável. Seu retrato de fase é pode ser visto na Figura 6 e nela podemos ver que as soluções espiralam próximas ao ponto de equilíbrio, isto é, fisicamente o pêndulo se manteria em movimento mas com a força de atrito agindo “contra” sua velocidade, ou seja, fazendo-o voltar ao repouso (ponto de equilíbrio).

Exemplo 2.12. Considere o sistema:

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

Figura 6 – Retrato de fase do pêndulo simples com atrito



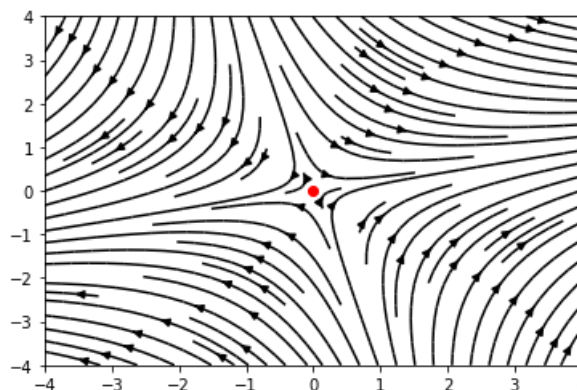
Fonte: Autoria Própria

Logo, sua matriz A é dada por $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Vamos calcular seu traço e determinante:

$$\begin{cases} \text{tr}(A) = 2 + 2 = 4 > 0 \\ \det(A) = 4 - 1 = 3 > 0. \end{cases}$$

Conforme Corolário 2.1, o ponto de equilíbrio $X_0 = (0, 0)$ é instável. Seu retrato de fase é apresentado na Figura 7. Neste retrato de fase temos um **ponto de sela**, isto é, por uma direção as soluções estão se aproximando, enquanto por outra direção as soluções se afastam do ponto de equilíbrio. É importante notar que, mesmo que as soluções se aproximem do ponto de equilíbrio, elas não se mantêm próximas a ele e portanto não podem ser caracterizadas como estáveis ou assintoticamente estáveis, mas sim, instáveis.

Figura 7 – Retrato de fase de um sistema instável na origem



Fonte: Autoria Própria

3 ESTABILIDADE DE EDO'S NÃO LINEARES

A teoria apresentada durante o capítulo anterior tem como objetivo entender o que acontece, de forma qualitativa, com as trajetórias das soluções de um sistema de EDO's linear na vizinhança de um ponto de equilíbrio. Todavia, modelar um fenômeno físico ou biológico através de um sistema de EDO's lineares, muitas vezes, não é suficiente para capturar o comportamento completo do fenômeno, como é o caso de certos modelos de dinâmica de populações ou do movimento pendular simples.

Uma das maneiras de estudar qualitativamente um sistema de EDO's não linear é através de uma aproximação linear do sistema na vizinhança do ponto de equilíbrio, o que torna toda a teoria estudada no Capítulo 2 útil para o desenvolvimento da teoria da estabilidade para sistemas de EDO's não lineares. Outra maneira, é através do estudo de funções que serão conhecidas como funções de Lyapunov.

Assim, este capítulo tem como objetivo a apresentação da teoria da estabilidade aplicada aos sistemas de EDO's não lineares, ou seja, quando a função incógnita e suas derivadas não aparecem de forma linear na equação.

3.1 Equações Diferenciais Ordinárias Não Lineares

Como visto nas classificações de equações diferenciais, uma EDO linear é uma equação diferencial que depende apenas de uma variável independente e pode ser escrita na forma.

$$f_0(t)x(t) + f_1(t)x'(t) + \dots + f_n(t)x^{(n)}(t) = g(t), \quad (9)$$

onde $t \in \mathbb{R}$ é a variável independente, $f_0(t), f_1(t), \dots, f_n(t), g(t)$ são funções auxiliares que dependem apenas de t e $x(t)$ a função incógnita desta equação. Qualquer EDO que não pode ser escrita nesta forma é uma EDO não linear. Vejamos nos exemplos a seguir.

Exemplo 3.1. *Considere a seguinte EDO:*

$$x \cdot x' + t = 0.$$

A não linearidade acontece devido ao produto da função incógnita $x(t)$ pela sua primeira derivada $x'(t)$ no primeiro termo da soma.

Exemplo 3.2. *Considere a seguinte EDO:*

$$\text{sen}(x) + \cos(t)x' = \text{tg}(t).$$

A não linearidade está presente quando aplicamos a função trigonométrica $\sin(x)$ na função incógnita $x(t)$.

Exemplo 3.3. Considere a seguinte EDO:

$$e^x + t^2 x'' = 2t^4.$$

Neste exemplo, temos a não linearidade na aplicação da função exponencial e^x na incógnita $x(t)$.

Note que, basta que um termo da EDO seja não linear para que esta seja classificada desta forma.

Nos Exemplos 3.2 e 3.3 temos funções que não dependem diretamente do termo independente t , mas sim apenas da função incógnita $x(t)$. Equações diferenciais formadas por funções deste tipo recebem uma classificação própria, como veremos na próxima definição.

Definição 3.1. Uma EDO de primeiro grau é autônoma se ela não depende da sua variável independente, ou seja, se pode ser escrita na forma:

$$x'(t) = f(x(t)),$$

onde f é uma função que depende apenas da função incógnita $x(t)$. Analogamente, um sistema de EDO's é dito autônomo se todas as suas equações são EDO's autônomas. Ou seja, se pode ser escrito na forma:

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x'_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ x'_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases}$$

onde f_1, f_2, \dots, f_n são funções que dependem apenas das funções incógnita x_1, x_2, \dots, x_n .

No Teorema 2.1 lidamos com um sistema de EDO's lineares da forma

$$X' = AX,$$

onde $X = [x(t), y(t)]^T$ e A uma matriz de ordem 2×2 com entradas reais. Este sistema de EDO's pode ser escrito na forma:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy. \end{cases}$$

Este é um exemplo de sistema autônomo bidimensional, pois nenhuma das funções presentes depende diretamente de t , mas ambas dependem das funções incógnita $x(t)$ e $y(t)$.

Para ilustrar a necessidade de introduzir novos conceitos quando estudamos as EDO's não lineares, vamos analisar um exemplo do retrato de fase de um sistema de EDO's não linear.

Exemplo 3.4. Considere o seguinte sistema de EDO's:

$$\begin{cases} x' = (2+x)(y-x) \\ y' = (4-x)(y+x). \end{cases} \quad (10)$$

Este é um sistema não linear pois se aplicarmos a propriedade distributiva na segunda equação, obtemos

$$y' = 4y + 4x - xy - x^2,$$

e os termos xy e x^2 não são lineares, logo o sistema é não linear. Além disso, este sistema é autônomo, pois nenhuma das funções auxiliares presentes depende diretamente da variável independente t .

Vamos calcular os pontos de equilíbrio do Sistema (10). Para tal devemos resolver o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\begin{cases} (2+x)(y-x) = 0 \\ (4-x)(y+x) = 0. \end{cases}$$

Para satisfazer a condição da primeira equação, precisamos que $x = -2$ ou $x = y$. Se $x = -2$, substituindo na segunda equação temos que

$$(4+2)(y-2) = 0 \Rightarrow 6y - 12 = 0 \Rightarrow y = 2.$$

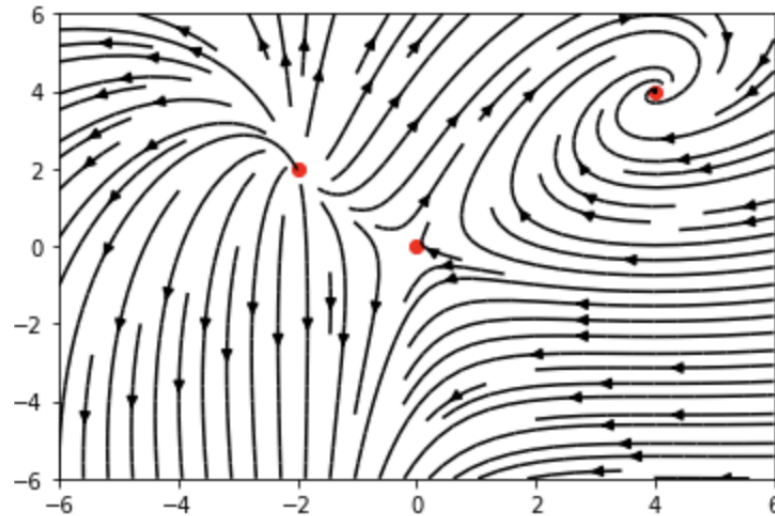
Por outro lado, substituindo $x = y$ na segunda equação, temos que

$$(4-x)(y+x) = 0 \Rightarrow (4-y)(y+y) = 0 \Rightarrow y = 4 \text{ ou } y = 0.$$

Ou seja, os pontos de equilíbrio são: $X_1 = (-2, 2)$, $X_2 = (0, 0)$ e $X_3 = (4, 4)$.

Vejam o seu retrato de fase na Figura 8. No retrato de fase dado pela Figura 8 vemos que se tomarmos condições iniciais próximas ao ponto de equilíbrio $X_2 = (0, 0)$, algumas trajetórias das curvas solução se afastam do ponto de equilíbrio $X_1 = (-2, 2)$ enquanto outras se aproximam assintoticamente do ponto de equilíbrio $X_3 = (4, 4)$.

Figura 8 – Retrato de Sistema (10)



Fonte: Autoria Própria

Veja que, em casos como o do Exemplo 3.4 em que temos vários pontos de equilíbrios isolados, as trajetórias das soluções no entorno dos pontos de equilíbrio podem ser afetadas pela estabilidade de mais de um ponto de equilíbrio, tornando assim o sistema mais rico em detalhes do que em casos lineares. Neste exemplo, os pontos estão relativamente distantes, assim facilitando a visualização da estabilidade via retrato de fase, mas em casos onde os pontos de equilíbrio estão muito próximos, esta visualização já não é possível. Vale notar que, com a visualização do retrato de fase observamos algumas trajetórias das infinitas soluções do sistema, portanto, não é suficiente para estudar a estabilidade do sistema. Portanto, precisamos buscar um ferramental teórico para classificar os pontos de equilíbrio.

Visto isso, considere um sistema autônomo não linear dado por

$$X'(t) = f(X(t)). \quad (11)$$

Como o objetivo é analisar as trajetórias das soluções próximas a um ponto de equilíbrio X_0 , faremos então uma tentativa de aproximar o Sistema (11) por um sistema de EDO's lineares adequado próximo a este ponto de equilíbrio. Ou seja

$$X' = AX + \xi(X), \quad (12)$$

onde $X = [x(t), y(t)]^T$, A é uma matriz de dimensão 2×2 com entradas reais e $\xi(X) = [\xi_1(x, y), \xi_2(x, y)]^T$ é uma função auxiliar que representa o erro proveniente desta aproximação, também chamado de **erro de Lagrange**. Seja $X_0 = (0, 0)$ um ponto equilíbrio isolado do sistema. Note que, para o caso geral onde o ponto de equilíbrio é dado por $X_0 = (x_0, y_0)$ basta considerar o sistema de EDO's onde a variável é $\hat{x} = x - x_0$, isto é, $\hat{x}' = x' = f(\hat{x}(t))$.

Para obtermos uma boa aproximação do sistema não linear, queremos garantir que o erro de Lagrange convirja para zero mais rápido do que a aproximação ao ponto de equilíbrio, ou seja, quanto mais próximas as trajetórias de solução estejam do ponto de equilíbrio, este erro seja o menor possível. Ou seja

$$\frac{\|\xi(X)\|}{\|X\|} \rightarrow 0 \text{ quando } X \rightarrow \vec{0}. \quad (13)$$

Disto, veja que $\xi(X)$ e X estão no espaço bidimensional e $\vec{0} = (0, 0)$, logo sua norma pode ser escrita por

$$\|X\| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } \|\xi(X)\| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}. \quad (14)$$

Desta forma, podemos reescrever a condição dada pela Equação (13) por,

$$\lim_{\|X\| \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Se, e somente se,

$$\frac{\xi_1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow 0 \text{ e } \frac{\xi_2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow 0 \text{ quando } \|X\| \rightarrow 0. \quad (15)$$

Assim, um sistema autônomo não linear que pode ser escrito na forma da Equação (12) e respeita a condição dada por (15) é denotado por **sistema quase linear** ou **sistema localmente linear** próximo ao ponto de equilíbrio X_0 . Vamos definir este caso com o devido formalismo matemático.

Definição 3.2. *Um sistema autônomo não linear dado por*

$$X' = f(X(t)),$$

onde $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. *Que pode ser aproximado por um sistema linear na forma*

$$X' = AX + \xi(X),$$

onde A é uma matriz de coeficientes reais de dimensão $n \times n$ e $\xi(X)$ a função erro de Lagrange que respeita a condição

$$\frac{\|\xi(X)\|}{\|X\|} \rightarrow 0 \text{ quando } X \rightarrow \vec{0}.$$

é dito sistema **quase linear** ou **localmente linear** na vizinhança do ponto de equilíbrio $X_0 = \vec{0} = (0, \dots, 0)$.

Note que, a Definição 3.2 considera apenas o ponto de equilíbrio como sendo a origem ($X_0 = \vec{0}$). Caso precisemos lidar com um ponto de equilíbrio que não seja a origem ($X_0 \neq \vec{0}$) basta fazer uma mudança de variáveis onde $\hat{X} = X - X_0$.

Desta forma, em um sistema quase linear podemos estudar o comportamento das trajetórias das soluções do sistema próximas a um ponto de equilíbrio (análise local) através das soluções de um sistema aproximado que é linear. Uma vez que o sistema que aproxima o original é linear, podemos utilizar as análises de estabilidade apresentadas no capítulo anterior.

Com o objetivo de facilitar a verificação da condição imposta pela Definição 3.2 vamos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 3.1. *Sejam $X \in \mathbb{R}^n$, $\xi_1, \dots, \xi_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $\xi(X) = [\xi_1(X), \dots, \xi_n(X)]^T$. Então*

$$\frac{\|\xi(X)\|}{\|X\|} \rightarrow 0 \text{ quando } X \rightarrow \vec{0}.$$

se, e somente se,

$$\frac{\xi_1(X)}{\|X\|} \rightarrow 0, \dots, \frac{\xi_n(X)}{\|X\|} \rightarrow 0 \text{ quando } \|X\| \rightarrow 0.$$

Sendo $\|\cdot\|$ a norma dada por $\|X\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Demonstração:

Para demonstrar a primeira implicação (\Rightarrow), supomos que

$$\frac{\|\xi(X)\|}{\|X\|} \rightarrow 0 \text{ quando } X \rightarrow \vec{0}.$$

Isto é,

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\xi_1(X)^2 + \dots + \xi_n(X)^2}}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = 0$$

Note que, se $X \rightarrow 0$, o vetor está se aproximando da origem. Logo, $\|X\| \rightarrow 0$. Desta forma,

$$\begin{aligned} \lim_{\|X\| \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\xi_1(X)^2 + \dots + \xi_n(X)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2}} &= \lim_{\|X\| \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\xi_1(X)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2} + \dots + \frac{\xi_n(X)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2}} \\ &= \lim_{\|X\| \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\xi_1(X)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2}} + \dots + \lim_{\|X\| \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\xi_n(X)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2}} \\ &= \lim_{\|X\| \rightarrow 0} \frac{|\xi_1(X)|}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} + \dots + \lim_{\|X\| \rightarrow 0} \frac{|\xi_n(X)|}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = 0. \end{aligned}$$

Como $|\xi_i(X)| \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, e $\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \|X\| \geq 0$. Então cada um dos limites

$$\lim_{\|X\| \rightarrow 0} \frac{|\xi_i(X)|}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = 0.$$

Ou seja,

$$\frac{\xi_1(X)}{\|X\|} \rightarrow 0, \dots, \frac{\xi_n(X)}{\|X\|} \rightarrow 0 \text{ quando } \|X\| \rightarrow 0.$$

A segunda implicação (\Leftarrow) é análoga a primeira.

□

Sem entrar nos detalhes de com a matriz A foi obtida (isto será abordaremos posteriormente), vamos olhar novamente para o sistema do Exemplo 3.4.

Exemplo 3.5. Considere o seguinte sistema de EDO's não lineares:

$$\begin{cases} x' = (2+x)(y-x) \\ y' = (4-x)(y+x). \end{cases} \quad (16)$$

Sabemos pelo Exemplo 3.4 que os pontos de equilíbrio deste sistema são $X_1 = (-2, 2)$, $X_2 = (0, 0)$ e $X_3 = (4, 4)$. Vamos analisar a estabilidade com o sistema quase linear adequado para cada um dos pontos de equilíbrio.

1. $X_1 = (-2, 2)$: Uma matriz de entradas reais que aproxima o Sistema (16) em um sistema quase linear próximo ao ponto de equilíbrio X_1 é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Como o ponto de equilíbrio, neste caso, não é a origem, então vamos tomar $\hat{X} = X - X_1$. Logo, um candidato à sistema quase linear é

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+2 \\ y-2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_1(X) \\ \xi_2(X) \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Vamos verificar se o Sistema (17) satisfaz a condição da Definição 3.2, isto é, se

$$\xi(X) = X' - A\hat{X} \rightarrow 0 \text{ quando } X \rightarrow X_1$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \xi_1(X) \\ \xi_2(X) \end{bmatrix} &= X' - AX = \begin{bmatrix} (2-x)(y-x) \\ (4-x)(y+x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+2 \\ y-2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -x^2 - xy - 6x - 2y - 8 \\ -x^2 - xy - 2x - 2y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.1, basta calcularmos os seguintes limites para verificar se a condição é satisfeita.

$$\begin{aligned} \lim_{X \rightarrow (-2,2)} \frac{-x^2 - xy - 6x - 2y - 8}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \frac{0}{\sqrt{8}} = 0 \\ \lim_{X \rightarrow (-2,2)} \frac{-x^2 - xy - 2x - 2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \frac{0}{\sqrt{8}} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, este é de fato um sistema quase linear que aproxima o Sistema (16). E seu sistema linear associado é dado por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Neste caso, $\det(A) < 0$, então pelo Corolário 2.1, o ponto de equilíbrio é instável.

2. $X_2 = (0, 0)$: Uma matriz de entradas reais que aproxima o Sistema (16) em um sistema quase linear próximo ao ponto de equilíbrio X_2 é dada por

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Agora, o ponto de equilíbrio é a origem, e portanto, não precisamos de nenhuma mudança de variável. Logo, um candidato para sistema quase linear é

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_1(X) \\ \xi_2(X) \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Analogamente ao item anterior, vamos calcular os limites do Teorema 3.1 para verificar se a condição da Definição 3.2 é satisfeita. Desta forma,

$$\begin{bmatrix} \xi_1(X) \\ \xi_2(X) \end{bmatrix} = X' - AX = \begin{bmatrix} (2-x)(y-x) \\ (4-x)(y+x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 - xy \\ -x^2 - xy \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\lim_{X \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

$$\lim_{X \rightarrow (0,0)} \frac{-x^2 - xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Note que, os limites acima foram calculados através de uma mudança de variáveis para coordenadas polares que foge do escopo deste trabalho, mas o leitor que estiver interessado pode refazer o processo da mudança de variáveis.

Portanto, este é de fato um sistema quase linear que aproxima o Sistema (16) próximo ao ponto de equilíbrio X_2 . E seu sistema linear associado é dado por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Neste caso, $\det(A) < 0$, então pelo Teorema 2.1 o ponto de equilíbrio X_2 é instável;

3. $X_3 = (4, 4)$: Uma matriz de entradas reais que aproxima o Sistema (16) em um sistema quase linear próximo ao ponto de equilíbrio X_3 é dada por

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como o ponto de equilíbrio, neste caso, não é a origem, então vamos tomar $\hat{X} = X - X_3$. Logo, um candidato à sistema quase linear é

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 4 \\ y - 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_1(X) \\ \xi_2(X) \end{bmatrix} \quad (19)$$

Vamos verificar se o Sistema (17) satisfaz a condição da Definição 3.2, isto é, se

$$\xi(X) = X' - A\hat{X} \rightarrow 0 \text{ quando } X \rightarrow X_3$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \xi_1(X) \\ \xi_2(X) \end{bmatrix} &= X' - AX = \begin{bmatrix} (2-x)(y-x) \\ (4-x)(y+x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-4 \\ y-4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -x^2 + xy + 4x - 4y \\ -x^2 - xy + 12x + 4y - 32 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.1, basta calcularmos os seguintes limites para verificar se a condição é satisfeita.

$$\begin{aligned} \lim_{X \rightarrow (-2,2)} \frac{-x^2 + xy + 4x - 4y}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \frac{0}{\sqrt{32}} = 0 \\ \lim_{X \rightarrow (-2,2)} \frac{-x^2 - xy + 12x + 4y - 32}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \frac{0}{\sqrt{32}} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, este é de fato um sistema quase linear que aproxima o Sistema (16). E seu sistema linear associado é dado por

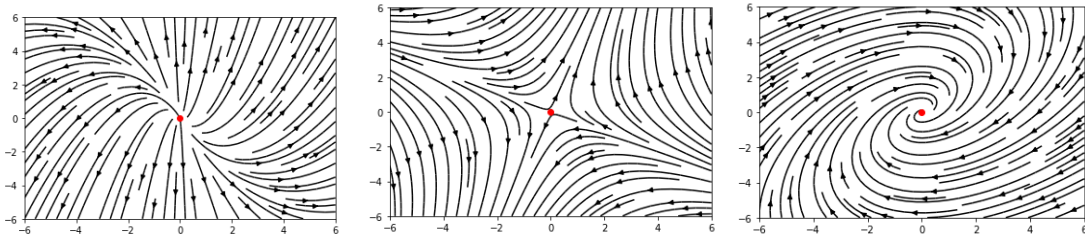
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Neste caso, $\det(A) > 0$ e $\text{tr}(A) < 0$, então pelo Corolário 2.1, o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável.

Se analisarmos o retrato de fase do Exemplo 3.4 vemos que estas características de estabilidade realmente estão coesas com o que é mostrado. Vejamos os retratos de fase dos sistemas descritos pelas Equações (17), (18) e (19) na Figura 9. Nos retratos de fase a seguir, os pontos de equilíbrio foram transladados para a origem através da mudança de variáveis $\hat{X} = X - X_0$ para facilitar a visualização.

No primeiro retrato vemos uma representação completamente instável, onde as soluções se afastam rapidamente do ponto de equilíbrio. No segundo retrato, temos um ponto de sela, ou seja, as soluções se afastam por uma direção e se aproximam por outra, mas mantém a instabilidade. Por fim, o terceiro retrato de fase mostra uma situação de espiral, onde as soluções tendem a se aproximar do ponto de equilíbrio.

Figura 9 – Retrato de fase de um sistema instável (a) e (b) e assintoticamente estável (c) na origem



Fonte: Autoria Própria

3.2 Estabilidade via Matriz Jacobiana

Na seção anterior vimos que para um sistema autônomo bidimensional dado por

$$X'(t) = f(X(t)),$$

seja quase linear, precisamos de uma matriz A com entradas reais e que satisfaça as condições da Definição 3.2. Desta forma, vamos buscar uma teoria que ajude com a obtenção dessa matriz de forma genérica. Para isso, vamos utilizar, como motivação, um ferramental que geralmente é definido quando estudamos Cálculo Diferencial 1.

Definição 3.3. *Seja $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cujas n primeiras derivadas existem e são contínuas (de classe C^n) $n \in \mathbb{N}$, e $x_0 \in I$. O **polinômio de Taylor de ordem n** da função f próxima ao ponto x_0 é descrito por*

$$p(x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k}{k!}.$$

Veja que, para $n = 1$, o polinômio de Taylor de uma função real f qualquer próxima à um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ é dado por

$$p(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

que é interpretado como a aproximação linear da função f no ponto x_0 , em termos geométricos, o polinômio de Taylor de ordem 1 de uma função f representa uma reta que melhor aproxima a função f ao ponto x_0 . Ou seja, o polinômio de Taylor pode ser entendido como uma aproximação da função original em torno de um ponto específico, que é justamente o que buscamos para encontrar a matriz A que aproxime o sistema de EDO's próxima ao ponto de equilíbrio. Vejamos um exemplo.

Desta forma, vamos buscar obter uma aproximação linear via polinômio de Taylor para um sistema de EDO's. Então considere o seguinte sistema de EDO's autônomo,

$$x' = f(x) = \begin{cases} x' = F(x, y) \\ y' = G(x, y), \end{cases}$$

onde $F, G : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções com duas variáveis, as funções incógnitas $x(t)$ e $y(t)$. Veja que, durante todo o trabalho lidamos com funções de duas (ou mais) variáveis sem muitos problemas, mas sem definir com o devido formalismo matemático. Para a continuidade do estudo da teoria da estabilidade em sistemas de EDO's não lineares, estas definições são necessárias.

Definição 3.4. Uma função F é dita **vetorial** se seu domínio é definido por um subconjunto de \mathbb{R}^n e seu contradomínio é definido por um subconjunto de \mathbb{R}^m , onde $m, n \in \mathbb{N}$. Desta forma, denotamos

$$F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \mapsto (y_1, y_2, y_3, \dots, y_m).$$

Uma função vetorial cujo contradomínio é um intervalo da reta real é chamada de **função de várias variáveis**.

Agora, com a Definição 3.4, sabemos que F e G podem ser classificadas como funções de várias variáveis. Mas, note que, no polinômio de Taylor utilizamos as derivadas das funções reais, portanto para estudarmos uma generalização do polinômio de Taylor para funções de várias variáveis, é necessário definir o que são as derivadas destas funções.

Definição 3.5. Seja $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de várias variáveis. Dizemos que **derivada parcial** da função F em relação à variável x_i é uma função de várias variáveis com domínio definido por um subconjunto de Ω e com imagem em \mathbb{R} , que representa uma pequena variação de x_i na saída da função F . Desta forma,

$$\frac{\partial F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h},$$

se o limite existir para todo $X \in \Omega$. Esta derivada parcial também pode ser denotada por $F_{x_i}(x_1, \dots, x_n)$.

Definição 3.6. *Seja $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de várias variáveis com sua derivada parcial em relação à variável x_i descrita por*

$$\frac{\partial F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}.$$

*A derivada parcial **aplicada no ponto a** , onde $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \Omega$, é a aplicação da função derivada parcial em relação à variável x_i no ponto a .*

Com as Definições 3.4 e 3.5 vimos que existem formas de generalizar os conceitos de funções e de derivadas estudados anteriormente para domínios multidimensionais. Estas definições também podem ser estendidas para funções cujo contradomínio não é um intervalo da reta real, as funções vetoriais, mas como as definições são extensas e este não é o foco do trabalho, deixamos para o leitor visita-las em GUIDORIZZI (2001). Neste trabalho, focaremos nas funções de várias variáveis com domínio em \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . Mas as análises feitas adiante podem ser estendidas para dimensões maiores.

Assim, como o polinômio de Taylor de ordem 1 para funções reais é geometricamente representado por uma reta que melhor aproxima a função ao ponto x_0 , o polinômio de Taylor de ordem 1 de funções de várias variáveis pode ser entendido, geometricamente, pelo plano (ou estruturas de dimensão maior) que melhor aproxima a função F ao ponto $X_0 \in \mathbb{R}^n$, ou seja, o plano (ou estruturas de dimensão maior), tangente à função que toca no ponto X_0 .

Vamos ver sua definição formal para o caso geral.

Definição 3.7. *Seja $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(X) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, uma função cuja primeiras derivadas parciais existem e são contínuas (de classe C^1), e $X_0 = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \in \Omega$. O **polinômio de Taylor de ordem 1** da função F próxima ao ponto X_0 é descrito por*

$$p(X_0) = F(X_0) + \frac{\partial F(X_0)}{\partial x_1}(x_1 - \hat{x}_1) + \frac{\partial F(X_0)}{\partial x_2}(x_2 - \hat{x}_2) + \dots + \frac{\partial F(X_0)}{\partial x_n}(x_n - \hat{x}_n).$$

Veja que, se tomarmos uma função $F(x, y)$ de duas variáveis, o polinômio de Taylor de ordem 1 desta função em torno do ponto $X_0 = (x_0, y_0)$ é dado por

$$p(x_0, y_0) = F(x_0, y_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0).$$

É exatamente o que definimos como plano tangente à superfície $F(x, y)$ que toca no ponto (x_0, y_0) . Veja que, se o plano é tangente à superfície e toca no ponto (x_0, y_0) , então este plano aproxima a função $F(x, y)$ muito bem, com erro convergindo para zero e isto é o que objetivamos para aproximar um sistema de EDO's à um ponto de equilíbrio.

Desta forma, tome o seguinte sistema de EDO's autônomo

$$\begin{cases} x' = F(x, y) \\ y' = G(x, y). \end{cases} \quad (20)$$

Aqui, F, G são funções de duas variáveis com domínio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são as funções incógnita que dependem apenas da variável independente t . Queremos aproximar este sistema ao ponto de equilíbrio $X_0 = (x_0, y_0)$, e para isto, vamos aplicar o polinômio de Taylor descrita na Definição 3.7 em cada uma das equações do Sistema (20), isto é,

$$\begin{cases} x' = p_F(x_0, y_0) = F(x_0, y_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + \xi_1(x, y) \\ y' = p_G(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) + \frac{\partial G(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial G(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + \xi_2(x, y) \end{cases} \quad (21)$$

onde $\xi_1(x, y)$ e $\xi_2(x, y)$ são as funções componente do erro de Lagrange $\xi(x_1, x_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Como o polinômio de Taylor aproxima pelo plano tangente, ou seja, com o menor erro de aproximação, temos que

$$\frac{\xi_1(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \rightarrow 0 \text{ e } \frac{\xi_2(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \rightarrow 0 \text{ quando } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0). \quad (22)$$

Também, note que, se (x_0, y_0) é ponto de equilíbrio, então

$$\begin{aligned} F(x_0, y_0) &= 0 = G(x_0, y_0) \\ x' &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} - 0 = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt} = \frac{d(x - x_0)}{dt} \\ y' &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt} - 0 = \frac{dy}{dt} - \frac{dy_0}{dt} = \frac{d(y - y_0)}{dt}. \end{aligned}$$

Desta forma, o Sistema (21) pode ser reescrito da seguinte maneira,

$$\begin{cases} \frac{d(x-x_0)}{dt} = \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + \xi_1(x, y) \\ \frac{d(y-y_0)}{dt} = \frac{\partial G(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial G(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + \xi_2(x, y). \end{cases} \quad (23)$$

Ou em sua forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \frac{d(x-x_0)}{dt} \\ \frac{d(y-y_0)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_1(x, y) \\ \xi_2(x, y) \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Assim, como a matriz

$$\begin{bmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

possui em suas entradas as derivadas parciais das funções F, G aplicadas no ponto de equilíbrio, ela possui entradas reais e pela condição do polinômio de Taylor de ordem 1 descrita na Equação (22). Esta matriz satisfaz a Definição 3.2. Portanto, encontramos uma matriz que, de forma genérica, aproxima um sistema de EDO's autônomo bidimensional. Note que, para casos de maior dimensão, o tratamento algébrico é o mesmo, mas foge do escopo deste trabalho.

Esta matriz é conhecida como **Matriz Jacobiana**, vejamos sua definição formal.

Definição 3.8. *Seja $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função vetorial de classe C^1 definida da seguinte forma*

$$F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n))$$

*tal que $F_1, \dots, F_m : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções de várias variáveis e $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Definimos a **matriz Jacobiana**, ou **matriz de Aplicação Derivada**, da função F como a seguinte matriz $m \times n$.*

$$DF(x) = J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(X)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1(X)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(X)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2(X)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_m(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m(X)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_m(X)}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Definição 3.9. *Seja $J(x)$ a matriz Jacobiana de uma função $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. A matriz Jacobiana aplicada no ponto $X_0 \in \Omega$ é dada por*

$$DF(X_0) = J(X_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(X_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(X_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1(X_0)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2(X_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(X_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2(X_0)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_m(X_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m(X_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_m(X_0)}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Assim, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.2. *Seja o sistema não linear bidimensional definido por*

$$\begin{cases} x' = F(x, y) \\ y' = G(x, y) \end{cases}$$

onde $F, G : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $x, y : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se F, G forem funções cujas derivadas parciais de até segunda ordem existem e são contínuas (de classe C^2), então o sistema não linear pode

ser aproximado na vizinhança do ponto de equilíbrio $X_0 = (x_0, y_0)$ pelo sistema linear dado por

$$X' = J(X_0)X.$$

onde $J(X_0)$ é a matriz Jacobiana do sistema aplicada no ponto X_0 .

Um sistema que satisfaz as condições do Teorema 3.2 é chamado de **sistema linearizável**. No Exemplo 3.5 as matrizes apresentadas são as Jacobianas previamente calculadas, vamos calcular a matriz Jacobiana do primeiro item e deixamos as outras como exercício para o leitor.

Exemplo 3.6. Considere o seguinte sistema de EDO's autônomo

$$\begin{cases} x' = (2+x)(y-x) \\ y' = (4-x)(y+x). \end{cases} \quad (27)$$

Sejam $F(x, y) = (2+x)(y-x) = 2y - 2x + xy - x^2$ e $G(x, y) = (4-x)(y+x) = 4y + 4x - xy - x^2$ funções de duas variáveis com x, y as funções incógnita que dependem apenas da variável independente $t \in \mathbb{R}$. Como F, G são funções polinomiais, e estas tem por natureza ser de classe C^∞ , isto é, tem suas derivadas de qualquer ordem contínuas. Logo, é de classe C^2 . Desta forma, as condições do Teorema 3.2 são satisfeitas por este sistema e portanto pode ser linearizado na vizinhança do ponto de equilíbrio $X_1 = (-2, 2)$.

Vamos calcular sua matriz Jacobiana, isto é, calcular suas primeiras derivadas parciais e aplicar no ponto X_1 .

- $\frac{\partial F}{\partial x} = -2x + y - 2 \Rightarrow \frac{\partial F(-2,2)}{\partial x} = 4$
- $\frac{\partial F}{\partial y} = x + 2 \Rightarrow \frac{\partial F(-2,2)}{\partial y} = 0$
- $\frac{\partial G}{\partial x} = -2x - y + 4 \Rightarrow \frac{\partial G(-2,2)}{\partial x} = 6$
- $\frac{\partial G}{\partial y} = 4 - x \Rightarrow \frac{\partial G(-2,2)}{\partial y} = 6$

Logo,

$$J(-2, 2) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Exatamente a matriz A que utilizamos no Exemplo 3.5.

Estas análises podem ser estendidas para sistemas de dimensão maior, mas esta se torna muito extensa e foge do escopo do trabalho, mas pode ser vista em DOERING; LOPES (2016).

Vamos voltar para o exemplo motivador do capítulo anterior, o pêndulo simples sem atrito, mas desta vez, na sua forma não linear.

Exemplo 3.7. *Considere o sistema de EDO's não lineares que descreve o movimento do pêndulo simples sem atrito:*

$$\begin{cases} \theta'(t) = \omega(t) \\ \omega'(t) = -k^2 \text{sen}(\theta(t)). \end{cases} \quad (28)$$

Vejam que $\theta(t)$ é de classe C^2 , pois $\theta'(t) = \omega(t)$ e $\theta''(t) = -k^2 \text{sen}(\theta(t))$ que, por sua vez, é uma função contínua. Da mesma forma $\omega'(t) = -k^2 \text{sen}(\theta(t))$ e $\omega''(t) = -k^2 \cos(\theta(t))\theta'(t)$ que é um produto de funções contínuas, logo é contínua. Portanto, ambas as funções são de classe C^2 . Assim, pelo Teorema 3.2, podemos linearizar este sistema com a matriz Jacobiana na vizinhança dos pontos de equilíbrio.

Os pontos de equilíbrio deste sistema são encontrados a partir de

$$\begin{cases} \omega(t) = 0 \\ -k^2 \text{sen}(\theta(t)) = 0. \end{cases}$$

Com a primeira equação, vemos que $\omega(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Então basta observar as raízes da segunda equação, que são dadas por

$$\begin{aligned} -k^2 \text{sen}(\theta(t)) &= 0 \\ \Leftrightarrow \text{sen}(\theta(t)) &= 0 \\ \Leftrightarrow \theta(t) &= n\pi, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ou seja, os pontos de equilíbrio do Sistema (28) são dados por $X_n = (n\pi, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, vamos olhar para a matriz Jacobiana deste sistema:

$$J(\theta, \omega) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega(t)}{\partial \theta} & \frac{\partial \omega(t)}{\partial \omega} \\ \frac{\partial (-k^2 \text{sen}(\theta(t)))}{\partial \theta} & \frac{\partial (-k^2 \text{sen}(\theta(t)))}{\partial \omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 \cos(\theta(t)) & 0 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Agora basta calcular a matriz Jacobiana para os pontos de equilíbrio X_n . Isto é, aplicar $J(\omega, \theta)$ em cada um dos X_n . Mas, note que, os pontos de equilíbrio são da forma, $X_n = (n\pi, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$, e pela natureza da função cosseno, temos valores diferentes dependendo da paridade de n . Portanto, dividimos em 2 casos:

1. Suponha $n = 2p, p \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$J(X_n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seu traço é dado por $\text{tr} = 0$ e seu determinante, $\det(J) = 0 + k^2 = k^2 > 0$. Pelo Corolário 2.1, os pontos de equilíbrio neste caso são centros **estáveis**.

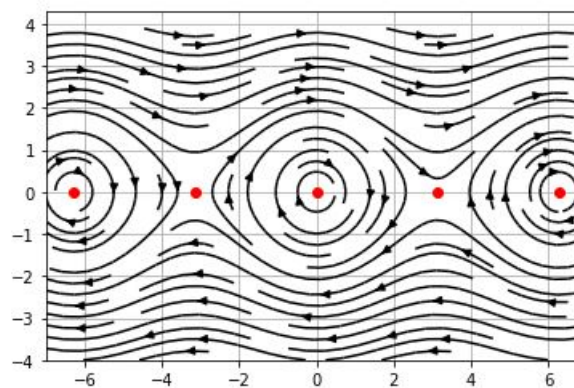
2. Suponha $n = 2p - 1, p \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$J(X_n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seu traço é dado por $\text{tr} = 0$ e seu determinante, $\det(J) = 0 - k^2 = -k^2 < 0$. Pelo Corolário 2.1, os pontos de equilíbrio neste caso são pontos de sela **instáveis**.

Vejam os retratos de fase deste sistema na Figura 10.

Figura 10 – Retrato de fase do pêndulo não linear sem atrito



Fonte: Autoria Própria

Note que acontece exatamente o que foi previsto: as trajetórias das soluções se mantêm estáveis próximas aos pontos de equilíbrio que estão na forma $X_n = (n\pi, 0), n = 2p, p \in \mathbb{Z}$, e se afastam dos pontos de equilíbrio da forma $X_n = (n\pi, 0), n = 2p - 1, p \in \mathbb{Z}$.

Se compararmos o retrato de fase dos Exemplos 2.10 e 3.7 que descrevem o mesmo fenômeno, vemos a diferença que existe entre descrever um fenômeno de forma linear e não linear no sentido de capturar o máximo de informações qualitativas de um fenômeno físico.

Vejam o que acontece com o pêndulo não linear com atrito.

Exemplo 3.8. Considere o sistema de EDO's não lineares que descreve o movimento do pêndulo simples com atrito:

$$\begin{cases} \theta'(t) = \omega(t) \\ \omega'(t) = -k^2 \text{sen}(\theta(t)) - \alpha\omega(t). \end{cases} \quad (30)$$

Com uma análise análoga à feita no Exemplo 3.7, vemos que ambas as equações são de classe C^2 e portanto, podem ser linearizadas com o Teorema 3.2. Os pontos de equilíbrio deste sistema podem ser encontrados a partir do seguinte sistema

$$\begin{cases} \omega(t) = 0 \\ k^2 \text{sen}(\theta(t)) - \alpha\omega(t) = 0. \end{cases}$$

Pela primeira equação, vemos que $\omega(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, logo a segunda equação fica na forma

$$-k^2 \text{sen}(\theta(t)) = 0,$$

análoga à equação do Exemplo 3.7. Logo, neste sistema os pontos de equilíbrio dados por $X_n = (n\pi, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$. Vamos então, buscar a matriz Jacobiana deste sistema:

$$J(\theta, \omega) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega(t)}{\partial \theta} & \frac{\partial \omega(t)}{\partial \omega} \\ \frac{\partial (-k^2 \text{sen}(\theta(t)) - \alpha\omega(t))}{\partial \theta} & \frac{\partial (-k^2 \text{sen}(\theta(t)) - \alpha\omega(t))}{\partial \omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 \cos(\theta(t)) & -\alpha \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Agora, com a matriz Jacobiana e os pontos de equilíbrio, vamos dividir em 2 casos, assim como no Exemplo 3.7.

1. Suponha $n = 2p$, $p \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$J(X_n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & -\alpha \end{bmatrix}.$$

Seu traço é dado por $\text{tr} = -\alpha < 0$ e seu determinante, $\det(J) = 0 + k^2 = k^2 > 0$. Pelo Corolário 2.1, os pontos de equilíbrio neste caso são **assintoticamente estáveis**.

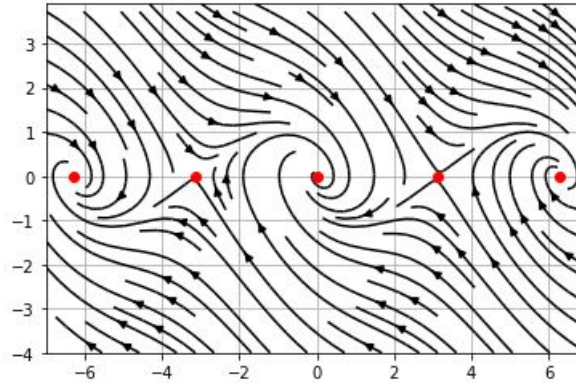
2. Suponha $n = 2p - 1$, $p \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$J(X_n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seu traço é dado por $\text{tr} = -\alpha < 0$ e seu determinante, $\det(J) = 0 - k^2 = -k^2 < 0$. Pelo Corolário 2.1, os pontos de equilíbrio neste caso são **instáveis**.

Vamos observar o retrato de fase deste sistema na Figura 10.

Figura 11 – Retrato de fase do pêndulo não linear com atrito



Fonte: Autoria Própria

E assim, vemos que as análises feitas com o ferramental matemático estão corretas, as trajetórias próximas aos pontos de equilíbrio $X_n = (n\pi, 0)$, $n = 2p$, $p \in \mathbb{Z}$ estão se aproximando de forma assintótica e as trajetórias próximas aos pontos $X_n = (n\pi, 0)$, para $n = 2p - 1$, $p \in \mathbb{Z}$, estão se afastando.

Analogamente ao pêndulo sem atrito, existem muitas diferenças qualitativas na análise da linearidade nos Exemplos 3.8 e 2.11. Mais um exemplo vantajoso no estudo do modelo não linear quanto ao linear.

Em BOYCE; DIPRIMA (2006), as análises de estabilidade de sistemas quase lineares são realizadas partir do seguinte teorema.

Teorema 3.3. *Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores do sistema linear $X' = AX$ correspondente ao sistema quase linear $X' = AX + \xi(X)$ tal que A é uma de dimensão 2×2 e invertível e $\xi(x)$ é o erro de Lagrange da aproximação. Então o tipo e a estabilidade do ponto crítico $X_0 = (0, 0)$ do sistema linear e do sistema quase linear são descritos na Tabela 1.*

Mais detalhes deste resultado podem ser vistos em BOYCE; DIPRIMA (2006).

Note que, no Teorema 3.3 estamos lidando com casos de matrizes bidimensionais, em casos de matrizes de dimensão maior, vemos em WOOLF (2007) uma generalização de alguns destes casos na Tabela 2.

O Teorema 3.3 é importante para uma melhor classificação qualitativa das trajetórias das curvas solução do sistema no retrato de fase, já que neste estão citadas além das classificações de estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade dos pontos de equilíbrio, também temos a classificação em tipos. Estes tipos foram discutidos logo antes do Teorema 2.1.

Vimos que em sistemas lineares e não lineares, os autovalores tem grande importância para a caracterização do estudo da teoria da estabilidade. Mas em alguns casos não lineares

Tabela 1 – Tabela referente ao Teorema 3.3

Autovalores	Sistemas Lineares		Sistemas Quase Lineares	
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	N	Instável	N	Instável
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	N	Ass. Estável	N	Ass. Estável
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	PS	Instável	PS	Instável
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	NP ou NI	Instável	N ou PE	Instável
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	NP ou NI	Ass. Estável	N ou PE	Ass. Estável
$\lambda_1, \lambda_2 = a + bi$				
$a > 0$	PE	Instável	PE	Instável
$a < 0$	PE	Ass. Estável	PE	Ass. Estável
$\lambda_1 = bi, \lambda_2 = -bi$	C	Estável	C ou PE	Indeterminado

NP: nó próprio, NI: nó impróprio, PS: ponto de sela, PE: ponto espiral, C: centro.

Tabela 2 – Tabela da generalização dos autovalores em relação a sistemas multidimensionais

Autovalores	Estabilidade	Comportamento Oscilatório	Tipo
Reais e positivos	Instável	Nenhum	NI
Reais e negativos	Estável	Nenhum	NP
Reais com sinais trocados	Instável	Nenhum	PS
Complexos com parte real positiva	Instável	Não Amortecido	PE
Complexos com parte real negativa	Estável	Amortecido	PE
Imaginários puros	Instável	Não Amortecido	C
Autovalores repetidos	Depende da ortogonalidade dos autovetores		

NP: nó próprio, NI: nó impróprio, PS: ponto de sela, PE: ponto espiral, C: centro.

temos indeterminações. Em geral, essas indeterminações acontecem em dois casos específicos.

Vamos considerar o caso em que os autovalores são complexos, ou seja, $\lambda_1 = a + bi$ e $\lambda_2 = a - bi$ com $b \neq 0$. Se $a = 0$, os autovalores são puramente complexos e este ponto de equilíbrio será **centro estável** para o sistema linear $X' = AX$. Mas, como estamos lidando com uma aproximação linear, podem ocorrer pequenas perturbações na matriz A que causa uma pequena perturbação nos autovalores e portanto podem “alterar” o ponto de equilíbrio para um **ponto espiral**, seja ele **assintoticamente estável** se a perturbação causar uma alteração negativa em a e **instável** se a alteração for positiva. Vejamos no Exemplo 3.9.

Exemplo 3.9. Considere o seguinte sistema de EDO's

$$\begin{cases} x' = 2y \\ y' = -2x. \end{cases} \quad (32)$$

É fácil ver que o ponto de equilíbrio deste sistema é o ponto $X_0 = (0, 0)$ e o sistema em forma matricial é o seguinte

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} X. \quad (33)$$

O polinômio característico desta matriz é dado por

$$p(\lambda) = (-\lambda)(-\lambda) + 4 = \lambda^2 + 4.$$

Assim, seus autovalores são calculados da seguinte forma

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2i \\ \lambda_2 = 2i. \end{cases}$$

Logo, pelo Teorema 3.3 o ponto de equilíbrio é um **centro estável**.

Uma pequena perturbação na matriz do Sistema (33) pode ser a seguinte,

$$X' = \begin{bmatrix} 10^{-10} & 2 \\ -2 & 10^{-10} \end{bmatrix} X.$$

Note que não há alteração o ponto de equilíbrio, mas o polinômio característico agora é dado por

$$p(\lambda) = (10^{-10} - \lambda)(10^{-10} - \lambda) + 4 = (10^{-10} - \lambda)^2 + 4.$$

E seus autovalores são calculados da seguinte forma,

$$(10^{-10} - \lambda)^2 + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 10^{-10} - 2i \\ \lambda_2 = 10^{-10} + 2i. \end{cases}$$

Que tem suas partes reais positivas e portanto é um **ponto espiral instável**. Por outro lado, outra perturbação possível é a seguinte

$$X' = \begin{bmatrix} -10^{-10} & 2 \\ -2 & -10^{-10} \end{bmatrix} X$$

Que, por sua vez, também não altera o ponto de equilíbrio do sistema, mas tem seu polinômio característico descrito por,

$$p(\lambda) = (-10^{-10} - \lambda)(-10^{-10} - \lambda) + 4 = (-10^{-10} - \lambda)^2 + 4.$$

E seus autovalores são dados por,

$$(-10^{-10} - \lambda)^2 + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -10^{-10} - 2i \\ \lambda_2 = -10^{-10} + 2i, \end{cases}$$

cujas partes reais são negativas, e logo o ponto de equilíbrio é um **ponto espiral assintoticamente estável**.

Outro caso de perturbação sensível acontece quando os autovalores λ_1 e λ_2 da matriz A do sistema não linear $X' = AX + \xi(X)$ são iguais. Neste caso, como consideramos pequenas perturbações, não temos mudança no sinal dos autovalores, ou seja, uma pequena alteração em autovalores iguais e negativos, mantém a **estabilidade assintótica** e uma pequena alteração em autovalores iguais e positivos mantém a **instabilidade**, mas com estas pequenas alterações, temos uma mudança no tipo do ponto crítico, ele deixa de ser um **nó** para ser um **ponto espiral**. Vejamos nos Exemplos 3.10 e 3.11.

Exemplo 3.10. Considere o seguinte sistema de EDO's

$$\begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y \end{cases}$$

O ponto de equilíbrio deste sistema é o ponto $X_0 = (0, 0)$ e sua forma matricial é dada por

$$X' = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} X. \quad (34)$$

O polinômio característico da matriz do Sistema (34) é o seguinte,

$$p(\lambda) = (-2 - \lambda)(-2 - \lambda) = (-2 - \lambda)^2.$$

E seus autovalores são dados por,

$$(-2 - \lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2.$$

O que, pelo Teorema 3.3 caracteriza o ponto de equilíbrio como **nó assintoticamente estável**.
Uma pequena perturbação na matriz deixa o sistema na forma,

$$\begin{bmatrix} -2 & 10^{-10} \\ -10^{-10} & -2 \end{bmatrix}.$$

Cujo polinômio característico é dado por,

$$p(\lambda) = (-2 - \lambda)(-2 - \lambda) + 10^{-20} = (-2 - \lambda)^2 + 10^{-20}$$

e tem como raízes (autovalores),

$$(-2 - \lambda)^2 + 10^{-20} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2 + 10^{-10}i \\ \lambda_2 = -2 - 10^{-10}i. \end{cases}$$

Que, por sua vez, caracteriza o ponto de equilíbrio como **ponto espiral assintoticamente estável**.

Exemplo 3.11. Considere o seguinte sistema de EDO's

$$\begin{cases} x' = 2y \\ y' = -2x \end{cases}$$

O ponto de equilíbrio deste sistema é o ponto $X_0 = (0, 0)$ e sua forma matricial é dada por

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} X. \quad (35)$$

O polinômio característico da matriz do Sistema (35) é o seguinte,

$$p(\lambda) = (-\lambda)(-\lambda) + 4 = (-\lambda)^2 + 4.$$

E seus autovalores são dados por,

$$(-\lambda)^2 + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2i \\ \lambda_2 = -2i. \end{cases}$$

O que, pelo Teorema 3.3 caracteriza o ponto de equilíbrio como **centro estável**.

Uma pequena perturbação na matriz deixa o sistema na forma,

$$X' = \begin{bmatrix} 10^{-10} & 2 \\ -2 & 10^{-10} \end{bmatrix} X$$

cujo polinômio característico é dado por,

$$p(\lambda) = (10^{-10} - \lambda)(10^{-10} - \lambda) + 4 = (2 - \lambda)^2 + 4$$

e tem autovalores dados por,

$$(10^{-10} - \lambda)^2 + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 10^{-10} + 2i \\ \lambda_2 = 10^{-10} - 2i. \end{cases}$$

Que, por sua vez, caracteriza o ponto de equilíbrio como **ponto espiral instável**.

Desta forma, vimos que, em certos casos, a teoria da estabilidade baseada na matriz Jacobiana não é suficiente para determinar as propriedades qualitativas de todos os sistemas que são modelados por EDO's não lineares. Além disso, as informações obtidas via aproximação por um sistema de EDO's lineares serão locais. Portanto, é importante buscar outras maneiras de resolver estes problemas.

3.3 Estabilidade via Funções de Lyapunov

Um método muito útil quando buscamos estudar a teoria da estabilidade de sistemas de EDO's não lineares recebe o nome do matemático e físico russo **Aleksandr Mikhailovich Lyapunov** que, segundo O'CONNOR; ROBERTSON (2004), viveu entre 1857 e 1918 na Rússia e lecionou em diversas universidades, mas principalmente na Universidade estatal de São Petesburgo. Seus estudos resultaram em contribuições nas áreas de físico-matemática, teoria das probabilidades e principalmente, estabilidade de sistemas dinâmicos.

O estudo de estabilidade de Lyapunov consiste em um método direto, conhecido como **segundo método de Lyapunov**. Este é chamado de método direto pois não precisamos conhecer algo sobre as soluções do sistema de EDO's, ou seja, não precisamos dos seus autovalores ou mesmo do sistema quase linear para aplicarmos o método direto. Portanto, buscamos uma função auxiliar que segue condições específicas e nos dá informações sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio. A estas funções damos o nome de **funções de Lyapunov**. Segundo BOYCE; DIPRIMA (2006): "Essa uma técnica muito poderosa que fornece um tipo de informa-

ção mais global(...) Além disso, o segundo método de Lyapunov pode ser usado para estudar sistemas de equações que não são localmente lineares”.

De maneira geral, o segundo método de Lyapunov é bem simples, mas por ser um método direto que busca uma função auxiliar, encontrar essa função pode ser bem problemática. Por sua vez, este se baseia na generalização de dois conceitos físicos de sistemas conservativos (sistemas onde o trabalho das forças é nulo).

O primeiro conceito a ser baseado diz sobre o estado de repouso do sistema conservativo, sendo este estável se a energia potencial é mínima (localmente), caso contrário, é instável. Vamos exemplificar este conceito com o pêndulo. Na seção anterior vimos que o pêndulo simples sem atrito possui duas classificações de estabilidade para seus pontos de equilíbrio, estável e instável, a estabilidade acontece quando a haste está voltada para baixo, ou seja, a energia potencial do movimento é nula, portanto um mínimo local. O outro caso acontece quando a haste está voltada para cima, mas neste caso, a energia potencial não é nula, pois com qualquer mínima força o pêndulo se move.

O segundo conceito físico se baseia também na energia potencial do movimento, mas no caso em que esta é constante em todo o movimento. Vejamos novamente com o pêndulo simples sem atrito, quando aplicada uma força qualquer no pêndulo, ele se move continuamente sem perder velocidade, portanto a energia potencial presente no movimento se mantém uma constante.

Antes de entregar o devido formalismo matemático ao segundo método de Lyapunov, precisamos de algumas definições.

Definição 3.10. *Seja $V : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis e $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções reais. V é dita*

- **definida positiva** em Ω : se $V(0, 0) = 0$ e $V(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \in \Omega - (0, 0)$;
- **definida negativa** em Ω : se $V(0, 0) = 0$ e $V(x, y) < 0$ para todo $(x, y) \in \Omega - (0, 0)$;
- **semidefinida positiva** em Ω : se $V(0, 0) = 0$ e $V(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in \Omega - (0, 0)$;
- **semidefinida negativa** em Ω : se $V(0, 0) = 0$ e $V(x, y) \leq 0$ para todo $(x, y) \in \Omega - (0, 0)$.

Considere um sistema não linear autônomo da forma

$$\begin{cases} x' = F(x, y) \\ y' = G(x, y). \end{cases} \quad (36)$$

Com uma generalização da regra da cadeia para funções de duas variáveis, que pode ser vista em GUIDORIZZI (2001), temos que

$$\dot{V}(x(t), y(t)) = V_x(x(t), y(t))x'(t) + V_y(x(t), y(t))y'(t). \quad (37)$$

Note que, a notação \dot{V} representa uma derivada da função V em relação a variável independente t . A Equação (37) pode ser escrita como produto escalar de dois vetores, ou seja,

$$\dot{V}(x, y) = (V_x(x, y), V_y(x, y)) \cdot (x'(t), y'(t)).$$

Veja que, o vetor $(V_x(x, y), V_y(x, y))$ é o vetor transposto do gradiente da função V , visto anteriormente, e pode ser denotado por $\nabla V(x, y)$. Por outro lado, o vetor $(x'(t), y'(t))$ é o vetor que contém as duas funções $F(x, y)$ e $G(x, y)$ que descrevem o Sistema (36). Portanto,

$$\dot{V}(x, y) = \nabla V(x, y) \cdot (F(x, y), G(x, y)). \quad (38)$$

Definição 3.11. *Seja $V : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis de classe C^1 . V é dita **função de Lyapunov** se:*

1. $V(0, 0) = 0$;
2. $V(x, y)$ é definida positiva;
3. $V(x, y)$ satisfaz uma das seguintes condições:
 - a) $\dot{V}(x, y)$ é semidefinida negativa;
 - b) $\dot{V}(x, y)$ é definida negativa;
 - c) $\dot{V}(x, y)$ é definida positiva.

Com estas definições apresentadas, podemos então seguir para o devido formalismo do segundo método de Lyapunov.

Teorema 3.4. (Segundo Método de Lyapunov): *Considere um sistema autônomo não linear dado por:*

$$\begin{cases} x' = F(x, y) \\ y' = G(x, y) \end{cases} \quad (39)$$

onde F, G são funções de duas variáveis definidas num subconjunto Ω de \mathbb{R}^2 com imagem na reta real e $X_0 = (0, 0)$ ponto de equilíbrio isolado do sistema. Se existe uma função V de Lyapunov satisfazendo um dos itens (a), (b) ou (c) da Definição 3.11, então o ponto de equilíbrio X_0 do sistema é, respectivamente, estável, assintoticamente estável, instável.

A demonstração deste teorema é extensa e foge do escopo do trabalho, mas pode ser vista em DOERING; LOPES (2016).

Desta forma, vimos que o Teorema(3.4) é muito forte, pois se baseia em poucas hipóteses, mas se baseia em encontrar uma função V , o que pode ser um trabalho árduo. Também, note que, podemos fazer uma mudança de variáveis $\hat{X} = X - X_0$ para transladar o ponto de equilíbrio e portanto, analisar, via Lyapunov, um ponto de equilíbrio que não é a origem. Vamos ver alguns exemplos desta construção.

O método direto de Lyapunov também caracteriza os pontos de equilíbrio de forma global, isto é, se um ponto de equilíbrio é estável, assintoticamente estável ou instável pelo método de Lyapunov significa que ele é globalmente estável, globalmente assintoticamente estável ou globalmente instável. Note que, denotar que um ponto de equilíbrio é globalmente estável, instável ou assintoticamente estável significa que impostas quaisquer condições iniciais ao sistema de EDO's, as soluções devem respeitar a estabilidade do sistema.

Exemplo 3.12. *Considere o seguinte sistema de EDO's*

$$\begin{cases} x' = -x^3 + xy^2 \\ y' = -2x^2y - y^3, \end{cases} \quad (40)$$

Vamos encontrar o ponto de equilíbrio do Sistema (40), ou seja,

$$\begin{cases} -x^3 + xy^2 = 0 \\ -2x^2y - y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(-x^2 + y^2) = 0 \\ y(-2x - y^2) = 0. \end{cases}$$

Para satisfazer a primeira equação, suponha $x = 0$. Logo, substituindo na segunda equação, temos que,

$$y(-y^2) = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Logo, $X_0 = (0, 0)$ é ponto de equilíbrio do Sistema (40).

Por outro lado, para satisfazer a primeira equação, suponha $x \neq 0$ e $(-x^2 + y^2) = 0$. Logo, $x^2 = y^2 \Leftrightarrow \pm x = \pm y$. Seja $x = y$, então na segunda equação temos que

$$y(-2y - y^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y^2 + 2y = 0. \end{cases}$$

Se $y = 0 \Rightarrow x = 0$. O que é um absurdo, logo só pode ser verdade o segundo caso. Assim,

$$y^2 + 2y = 0 \Rightarrow y(y + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -2. \end{cases}$$

Novamente, se $y = 0 \Rightarrow x = 0$, absurdo, portanto, $y = -2$. Portanto os outros pontos de equilíbrio deste sistema são $X_1 = (2, 2)$, $X_2 = (-2, 2)$, $X_3 = (2, -2)$, $X_4 = (-2, -2)$. É fácil ver, neste caso, que o ponto de equilíbrio $X_0 = (0, 0)$ é um ponto isolado.

Antes da análise de estabilidade global do ponto de equilíbrio $X_0 = (0, 0)$, vamos tentar fazer a análise local via matriz Jacobiana. Então sejam

$$F(x, y) = -x^3 + xy^2$$

$$G(x, y) = -2x^2y - y^3,$$

as funções presentes no Sistema (40). Ambas são polinomiais, portanto são de classe C^2 e assim, podem ser linearizadas via matriz Jacobiana. A matriz Jacobiana deste sistema é dada por:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} -3x^2 + y^2 & 2xy \\ -4xy & -2x^2 - 3y^2 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o ponto de equilíbrio X_0 na matriz $J(x, y)$ obtemos:

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

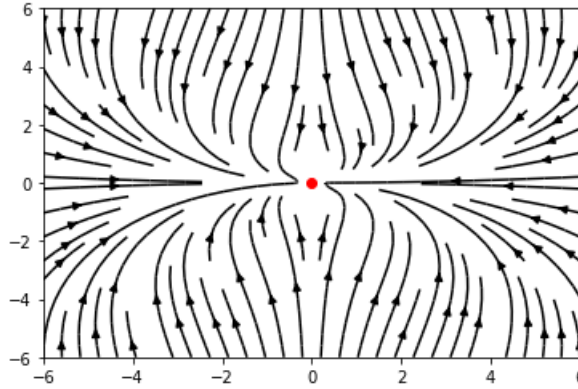
Veja que, neste caso a matriz Jacobiana aplicada no ponto é nula e portanto, ambos seus autovalores λ_1, λ_2 são iguais a zero. Desta forma, nada podemos afirmar sobre a estabilidade deste ponto de equilíbrio via linearização próxima ao ponto de equilíbrio X_0 . Vamos à análise de estabilidade via funções de Lyapunov do sistema.

Tome $V(x, y) = x^2 + y^2$. Esta função é trivialmente **definida positiva**, pois $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $x = 0$ se, e somente se, $x = 0$. O mesmo acontece para y^2 . Vamos então verificar o que acontece com $\dot{V}(x, y)$,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= \nabla V(x, y) \cdot (F(x, y), G(x, y)) \\ &= (2x, 2y) \cdot (-x^3 + xy^2, -2x^2y - y^3) \\ &= -2x^4 + 2x^2y^2 - 4x^2y^2 - 2y^4 \\ &= -2x^4 - 2x^2y^2 - 2y^4. \end{aligned} \tag{41}$$

Como todos os termos desta igualdade são negativos independentemente de $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - (0, 0)$. Então esta função é **definida negativa** e, portanto, o ponto de equilíbrio X_0 é **assintoticamente estável** pelo Teorema 3.4. Vejamos seu retrato de fase na Figura 12.

Figura 12 – Retrato de fase do Sistema (40)



Fonte: Autoria Própria

De fato, as soluções se comportam de maneira assintoticamente estável próximas a origem. Este é um exemplo em que não podemos utilizar a matriz Jacobiana para analisar a estabilidade do sistema, pois com ela temos resultados inconclusivos.

Exemplo 3.13. Considere o seguinte sistema de EDO's

$$\begin{cases} x' = x^3 - y^3 \\ y' = 2xy^2 + 4x^2y + 2y^3. \end{cases} \quad (42)$$

Os pontos de equilíbrio do Sistema (42) são calculados da seguinte forma,

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 0 \\ 2xy^2 + 4x^2y + 2y^3 = 0. \end{cases}$$

Para satisfazer a primeira equação, temos que $x^3 = y^3$. Logo, $x = y$. Substituindo na segunda equação, temos que,

$$2(y)y^2 + 4(y^2)y + 2y^3 = 0 \Leftrightarrow 2y^3 + 4y^3 + 2y^3 = 0 \Leftrightarrow 8y^3 = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Logo, o ponto de equilíbrio do sistema é dado por $X_0 = (0, 0)$ e como ele é único, é isolado. Vamos usar uma função V parecida com a que foi utilizada no Exemplo 3.12. Tome $V(x, y) = ax^2 + by^2$ onde $a, b \in \mathbb{R}$ com a condição de serem ambos positivos. Vejamos que, $V(0, 0) = a(0) + b(0) = 0$ e $V(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - (0, 0)$ pois x^2 e y^2 são positivas para

todo $x, y \in \mathbb{R} - 0$ e $a, b > 0$. Logo, $V(x, y)$ é definida positiva. Vejamos o que acontece com $\dot{V}(x, y)$:

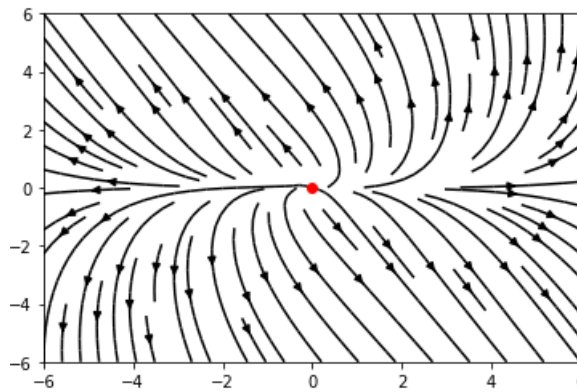
$$\begin{aligned}\dot{V}(x, y) &= \nabla V(x, y) \cdot (F(x, y), G(x, y)) \\ &= (2ax, 2by) \cdot (x^3 - y^3, 2xy^2 + 4x^2y + 2y^3) \\ &= 2ax^4 - 2axy^3 + 4bxy^3 + 8bx^2y^2 + 4by^4 \\ &= 2ax^4 + (4b - 2a)xy^3 + 8bx^2y^2 + 4by^4.\end{aligned}$$

Consideremos então $a = 2b$. Logo,

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, y) &= 2ax^4 + (4b - 4b)xy^3 + 8bx^2y^2 + 4by^4 \\ &= 4bx^2 + 8bx^2y^2 + 4by^4.\end{aligned}\tag{43}$$

Portanto, pela Equação (43) como todos os termos da soma são positivos, a função $\dot{V}(x, y)$ é **definida positiva** e portanto, o ponto de equilíbrio $X_0 = (0, 0)$ é **instável** pelo Teorema 3.4. Vejamos seu retrato de fase.

Figura 13 – Retrato de fase do Sistema (42)



Fonte: Autoria Própria

Que mostra exatamente o que foi previsto pelo método de Lyapunov, as soluções se afastam da origem.

Exemplo 3.14. Considere o seguinte sistema de EDO's

$$\begin{cases} x' = -x^3 + 2y^3 \\ y' = -2xy^2. \end{cases}\tag{44}$$

Os pontos de equilíbrio do Sistema (44) são dados pelo sistema

$$\begin{cases} -x^3 + 2y^3 = 0 \\ 2xy^2 = 0. \end{cases}$$

Para satisfazer a segunda equação, precisamos que $x = 0$ ou $y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Vamos assumir que $x = 0$, substituindo na primeira equação, então

$$0 + 2y^3 = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Por outro lado, se assumirmos $y = 0$ e substituirmos na primeira equação, temos que,

$$-x^3 + 0 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Portanto, o único ponto de equilíbrio do Sistema (44) é o ponto $X_0 = (0, 0)$ e, por ser único, é isolado. Analogamente ao Exemplo 3.13, tome a função $V(x, y) = ax^2 + by^2$ definida positiva. Vamos ver o que acontece com $\dot{V}(x, y)$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= \nabla V(x, y) \cdot (F(x, y), G(x, y)) \\ &= (2ax, 2by) \cdot (-x^3 + 2y^3, -2xy^2) \\ &= -2ax^4 + 4axy^3 - 4bxy^3 \\ &= -2ax^4 + (4a - 4b)xy^3. \end{aligned}$$

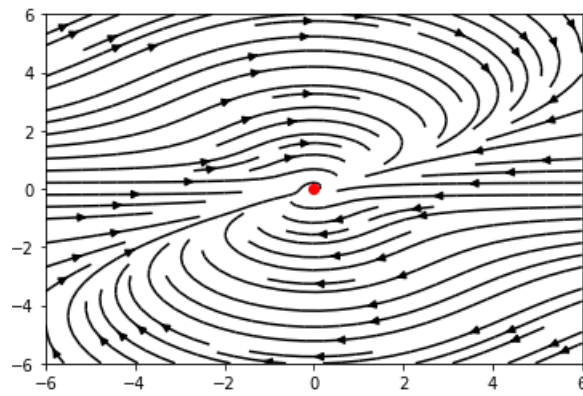
Consideremos $a = b$. Logo,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= -2ax^4 + (4a - 4a)xy^3 \\ &= -2ax^4. \end{aligned} \tag{45}$$

Assim, pela Equação (45) a função $\dot{V}(x, y)$ é **semidefinida negativa**, pois ela é não positiva para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - (0, 0)$ e $V(0, 0) = 0$. Portanto, o ponto de equilíbrio $X_0 = (0, 0)$ é **estável** pelo Teorema 3.4. Vejamos seu retrato de fase. Assim, pela Figura 14 as soluções se mantêm próximas ao ponto de equilíbrio X_0 sem se aproximar conforme o tempo, exatamente o que foi previsto pelo método direto.

Visto que é possível estudar de forma qualitativa os sistemas de EDO's lineares e não lineares via teoria da estabilidade, vamos aplicar em alguns conceitos presentes no estudo da biomatemática.

Figura 14 – Retrato de fase do Sistema (44)



Fonte: Autoria Própria

4 MODELAGEM MATEMÁTICA EM EPIDEMIOLOGIA

4.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo aplicar os estudos vistos anteriormente em fenômenos reais. Segundo MURRAY (2002): “A matemática sempre se beneficiou do seu envolvimento com outras ciências. Cada interação sucessiva revitaliza e melhora o campo de estudo” (Tradução Livre). Estudar fenômenos físicos, como o pêndulo descrito nos outros capítulos, químicos e biológicos, como os que vamos estudar adiante são avanços que mantêm a matemática sempre viva e renovada no aspecto aplicado.

“A **Biomatemática** é um campo de estudo amplo e bem reconhecido, embora não muito bem definido que, para mim, é a aplicação mais atraente da matemática moderna. O aumento do uso da matemática na biologia é inevitável enquanto a biologia se torna cada vez mais quantitativa. A complexidade das ciências biológicas faz com que o envolvimento interdisciplinar seja essencial. Para o matemático, a biologia desperta diversos caminhos novos e atraentes, enquanto para o biólogo, a modelagem matemática oferece uma nova ferramenta de pesquisa que pode ser comparada com uma poderosa técnica laboratorial, mas apenas se for usada adequadamente, respeitando suas limitações.” (MURRAY, 2002, Tradução Livre)

Desta forma, estudar os aspectos biológicos de um problema em conjunto com o ferramental qualitativo que vimos nos capítulos anteriores podem acarretar em resultados fascinantes acerca dos fenômenos biológicos.

Neste trabalho, buscamos estudar modelos que envolvem doenças infecciosas e epidemias. Segundo MURRAY (2002): “A história das epidemias é uma área de estudo fascinante”.

As epidemias estão presentes na história à milhares de anos. A epidemia mais clássica estudada é a Praga de Atenas (430-428 a.c), que levou a óbito milhares de soldados que estavam em expedição, civis e até mesmo, cachorros. Em um período mais recente, entre 1357 e 1351, acontece na Europa a epidemia que é considerada por muitos a mais devastadora registrada na história humana, a Peste Negra, que matou cerca de um terço da população europeia. Em casos como este que a epidemia é espalhada em uma grande parte de uma região geográfica, esta é chamada de **pandemia**. A epidemia mais recente registrada é a que teve início no final de 2019, oriunda do coronavírus, um vírus com uma alta taxa de infecção e que causa uma doença com alta taxa de mortalidade na qual foram registradas mais de 6 milhões de mortes globalmente até a presente data [redCOLOCAR FONTE](#).

O foco deste capítulo é estudar o comportamento de epidemias conforme sua variação com o tempo, utilizando sistemas de EDO's e a teoria da estabilidade. Ou seja, a partir de

uma população e taxas de infecção, recuperação e mortalidade, entender o que acontece com classes de indivíduos presentes naquela população.

4.2 Modelos compartimentais

Uma maneira de estudar o que acontece com uma população durante epidemias segue de uma modelagem matemática apresentada recentemente, no século XX, conhecida por **Modelagem Compartimental**. Este tipo de modelagem foi proposta por Ronald Ross (1857 - 1932), um médico inglês que recebeu um prêmio Nobel em 1902 pelos seus estudos sobre a transmissão da malária e Hilda Phoebe Hudson (1881 - 1965) uma matemática inglesa que tem diversos estudos sobre geometria algébrica e transformações de Cremona. Juntos, Ross e Hudson em 1917 formularam a modelagem compartimental. Este tipo de modelagem foi estudada e desenvolvida por diversos matemáticos, mas principalmente por William Ogilvy Kermack (1898 - 1970), bioquímico escocês e Anderson Gray McKendrick (1876 - 1943), físico e epidemiologista escocês.

Os trabalhos desenvolvidos por Kermack-Mckendrick nos anos de 1927, 1932 e 1933, inicialmente, descrevem o seguinte problema. Dada uma população com N indivíduos, e uma epidemia com uma taxa de infecção dada por α e uma taxa de mortalidade e/ou recuperação dada por β , ambos α, β reais e positivos. Os indivíduos dessa população são divididos em três compartimentos, sendo eles o compartimento dos **suscetíveis** (S), ou seja, aqueles que podem ser infectados pela doença, o compartimento dos **infectados** (I), que representa aqueles que já estão doentes e, por último, o compartimento dos **removidos** (R), que são aqueles que já não estão mais doentes, sendo por recuperação ou óbito. Este modelo é comumente conhecido como **Modelo SIR** pelas denominações de seus compartimentos, e pode ser representado, afim de um melhor entendimento dos comportamento do fenômeno, por diagramas, como o representado na Figura 15.

Figura 15 – Diagrama do Modelo SIR descrito pelo Sistema (46)



Fonte: Adaptado de LUIZ (2012)

Em conjunto com o diagrama de representação do modelo, o modelo SIR clássico é matematicamente descrito por um sistema de EDO's como o seguinte:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha SI \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I \\ \frac{dR}{dt} = \beta I. \end{cases} \quad (46)$$

onde $S(t), I(t), R(t)$ são funções reais com domínio em um intervalo D da reta real, cuja variável independente é $t \in \mathbb{R}$, que representam a quantidade de indivíduos suscetíveis, infectados e removidos, respectivamente, da população total N , no instante $t > 0, t \in \mathbb{R}$. Para alívio de notação, vamos representar as funções $S(t), I(t), R(t)$ apenas como S, I, R .

Note que, como a população total N , neste caso, é constante e dividida entre os três compartimentos, então podemos dizer que,

$$S + I + R = N. \quad (47)$$

Portanto, S, I, R são limitadas por N . Fazendo a derivada da Equação (47), temos que

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0.$$

Vejam que, o Sistema (46) é descrito por três funções reais que dependem apenas de uma variável independente $t \in \mathbb{R}$, onde todas as derivadas que aparecem $(\frac{dS}{dt}, \frac{dI}{dt}, \frac{dR}{dt})$ são de primeira ordem e possui na sua primeira equação o produto de S por I . Logo, é um sistema de EDO's de primeira ordem não linear.

Com esta modelagem feita de maneira correta podemos tirar muitas conclusões sobre a epidemia, como quando será o pico de infecção, quando ela tende a ser extinguida, etc. Outras taxas de variação e compartimentos podem ser adicionados, como a taxa de eficiência de vacinas, taxas de reinfecção, compartimento de indivíduos que já foram vacinadas e estão imunes, indivíduos em tratamento da doença, etc. Com essas adições, temos variações deste modelo clássico que se mantém com o mesmo propósito, mas cada vez mais complexos. Outras variações também acontecem quando temos doenças "mais simples" que dependem de menos variações e precisam de menos compartimentos, como é o caso de gripes comuns e alergias.

Agora, vamos apresentar três variações do modelo SIR para aplicações diferentes que envolvem epidemias e estudar qualitativamente o comportamento de cada um destes sistemas.

4.3 Propagação de Rumores nas Redes Sociais

Atualmente, as redes sociais estão presentes na vida cotidiana da maioria das pessoas e podem ser consideradas como uma das principais disseminadoras de informação, sejam fotos pessoais, opiniões sobre um determinado assunto e até mesmo notícias acerca de assuntos

importantes globalmente. Devido à grande facilidade de escrever, ou postar, nas redes sociais, muitas plataformas de notícias utilizam das redes sociais para espalhar notícias falsas, também conhecidas como rumores, ou *fake news*.

Desta forma, se torna interessante estudar o comportamento das *fake news* no cotidiano das pessoas, ou seja, como elas chegam nos utilizadores das redes sociais, como são transmitidas, quais as taxas de transmissão, recepção, confiança, etc. Uma das formas de estudar a propagação de rumores nas redes sociais é utilizando as **modelagens compartimentais**, tratando as *fake news* como doenças se espalhando pelas redes sociais.

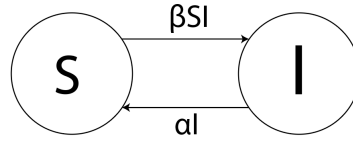
A modelagem estudada para este problema foi proposta por JIN *et al.* (2013) utilizando oito notícias espalhadas pelo *Twitter*, que são:

1. O Bombardeio em uma maratona em Boston;
2. A renúncia do Papa Bento XVI;
3. A explosão de uma refinaria em Amuay;
4. O comparecimento da Michelle Obama no Oscar;
5. A doença de Barack Obama;
6. O dia do Apocalipse;
7. A morte de Fidel Castro;
8. Manifestações e tiroteios no México.

Dentre essas, as quatro primeiras são verdadeiras e as quatro últimas são falsas. Uma das abordagens proposta por JIN *et al.* (2013) é descrever a população N como as pessoas que podem ser expostas ao *tweet* que contém a notícia ou a *fake news*. Os autores citam que este foi um problema prático na modelagem do problema, pois este valor é difícil de ser descoberto devido à grande quantidade de usuários *fakes*, usuários que não tem seguidores, ou que não seguem ninguém, etc. Portanto, eles trataram a população total N como um parâmetro dado e ajustaram este para todos os casos.

A modelagem compartimental escolhida por JIN *et al.* (2013) foi o **modelo SIS**, muito utilizado para doenças que possuem taxas de reinfecção, como alergias e gripes comuns. Esta modelagem possui dois compartimentos, o dos indivíduos **suscetíveis** (S), que são os usuários do *Twitter* que não postaram sobre determinada notícia e os indivíduos **infectados** (I), que são aqueles que já postaram sobre a notícia. A princípio, esta modelagem tem um problema, pois os usuários que se tornam infectados nunca saíram deste compartimento, uma vez já *tweetaram* sobre a notícia. Então vamos considerar que os usuários podem se tornar suscetíveis novamente se apagam seu *tweet* ou ficam uma determinada quantidade de tempo sem postar algo sobre a notícia novamente. O diagrama que representa esta modelagem é dado pela Figura 16.

Figura 16 – Diagrama do Modelo SIS



Fonte: Adaptado de JIN *et al.* (2013)

E modelo matemático que descreve o problema é o seguinte,

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI + \alpha I \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I, \end{cases} \quad (48)$$

onde S, I são funções reais com domínio em um intervalo D da reta real, ambas em função da variável independente t , portanto é um sistema autônomo. E α, β parâmetros reais e positivos que representam as taxas de infecção e recuperação, respectivamente, mantendo as características dos modelos compartimentais apresentado previamente, ou seja, $N = S + I$ e $\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} = 0$.

Os pontos de equilíbrio deste sistema são dados por

$$\begin{cases} -\beta SI + \alpha I = 0 \\ \beta SI - \alpha I = 0 \end{cases} \quad (49)$$

Com algumas manipulações algébricas na primeira equação do Sistema (49), temos que

$$I(\alpha - \beta S) = 0 \Rightarrow I = 0 \text{ ou } \alpha - \beta S = 0 \quad (50)$$

Tomemos o primeiro caso, ou seja, $I = 0$, o que implica que $S = N$ pois $S + I = N$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, ambas as equações são satisfeitas independente do valor que a função S assuma, ou seja, se os pontos deste sistema são dados por $X = (S, I)$, temos um ponto de equilíbrio da forma $X_0 = (N, 0)$. Note que, neste caso $I = 0$, o que significa biologicamente que nenhum indivíduo da população total foi infectado pela doença. Em casos como este, dizemos que este ponto de equilíbrio é **livre de doença**.

O segundo caso da Equação (50) acontece quando $\alpha - \beta S = 0$, isto é, $S = \frac{\alpha}{\beta}$. Substituindo S na segunda equação do Sistema (49), temos que,

$$\beta \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) I - \alpha I = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

Portanto, essa equação é satisfeita independente do valor que a função I assuma, como $N = S + I$, então $I = N - S \Leftrightarrow I = N - \frac{\alpha}{\beta}$. Assim, temos o segundo ponto de equilíbrio dado por $X_1 = (\frac{\alpha}{\beta}, N - \frac{\alpha}{\beta})$. Neste caso, temos que $I \neq 0$, ou seja, existem indivíduos que foram infectados pela doença. Em casos como este, dizemos que este ponto de equilíbrio é **endêmico**.

Buscamos analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio deste sistema localmente. Para isso, considere duas funções $F, G : \{(S, I) \in \mathbb{R}^2; S + I = N\} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que:

$$F(S, I) = -\beta SI + \alpha I$$

$$G(S, I) = \beta SI - \alpha I$$

Para que este sistema seja linearizável na vizinhança de ambos os pontos de equilíbrio, precisamos que este satisfaça as condições do Teorema 3.2. Portanto, vamos verificar se F e G são de classe C^2 , isto é:

- $\frac{\partial F}{\partial S} = -\beta I \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 0$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial S \partial I} = -\beta$;
- $\frac{\partial F}{\partial I} = -\beta S + \alpha \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial I \partial S} = -\beta$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial I^2} = 0$;
- $\frac{\partial G}{\partial S} = \beta I \Rightarrow \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = 0$ e $\frac{\partial^2 G}{\partial S \partial I} = \beta$;
- $\frac{\partial G}{\partial I} = \beta S - \alpha \Rightarrow \frac{\partial^2 G}{\partial I \partial S} = \beta$ e $\frac{\partial^2 G}{\partial I^2} = 0$.

A matriz Jacobiana deste sistema é dada por:

$$J(S, I) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(-\beta SI + \alpha I)}{\partial S} & \frac{\partial(-\beta SI + \alpha I)}{\partial I} \\ \frac{\partial(\beta SI - \alpha I)}{\partial S} & \frac{\partial(\beta SI - \alpha I)}{\partial I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta I & -\beta S + \alpha \\ \beta I & \beta S - \alpha \end{bmatrix}. \quad (51)$$

Aplicando $J(S, I)$ no primeiro ponto de equilíbrio temos:

$$J(N, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -\beta N + \alpha \\ 0 & \beta N - \alpha \end{bmatrix} \quad (52)$$

Desta forma, o sistema quase linear que aproxima o Sistema (48) não linear ao ponto de equilíbrio X_0 é dado por

$$X' = J(N, 0)X$$

cuja matriz de coeficientes é dada pela Equação (52). Como $\det(J(N, 0)) = 0 - 0 = 0$, não poderemos obter informações de estabilidade via Corolário 2.1. Então vamos tentar utilizando os autovalores de $J(N, 0)$. Primeiro, seu polinômio característico é dado por:

$$p(\lambda) = (-\lambda)(\beta N - \alpha - \lambda) = \lambda(\lambda + \alpha - \beta N).$$

Assim, os autovalores são calculados por

$$\lambda(\lambda + \alpha - \beta N) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \beta N - \alpha. \end{cases}$$

Assumindo que N é suficientemente grande, pois este está relacionado com a população total do sistema, então $\beta N - \alpha > 0$. Portanto o ponto de equilíbrio X_0 do Sistema (48) é localmente instável.

O segundo ponto de equilíbrio a ser analisado é dado por $X_1 = (\frac{\alpha}{\beta}, N - \frac{\alpha}{\beta})$. Assim,

$$J\left(\frac{\alpha}{\beta}, N - \frac{\alpha}{\beta}\right) = \begin{bmatrix} -\beta(N - \frac{\alpha}{\beta}) & 0 \\ \beta(N - \frac{\alpha}{\beta}) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta N + \alpha & 0 \\ \beta N - \alpha & 0 \end{bmatrix}. \quad (53)$$

Desta forma, o sistema quase linear que aproxima o Sistema (48) não linear ao ponto de equilíbrio X_1 é dado por

$$X' = J\left(\frac{\alpha}{\beta}, N - \frac{\alpha}{\beta}\right)X,$$

cuja matriz de coeficientes é dada pela Equação (53). Novamente, nada podemos afirmar pelo Corolário (2.1) pois $\det(J(\frac{\alpha}{\beta}, N - \frac{\alpha}{\beta})) = 0 + 0 = 0$. Então, vamos analisar os autovalores desta matriz. Sabemos que seu polinômio característico é dado por,

$$p(\lambda) = (-\beta N + \alpha - \lambda)(-\lambda) + 0 = \lambda(\beta N - \alpha + \lambda).$$

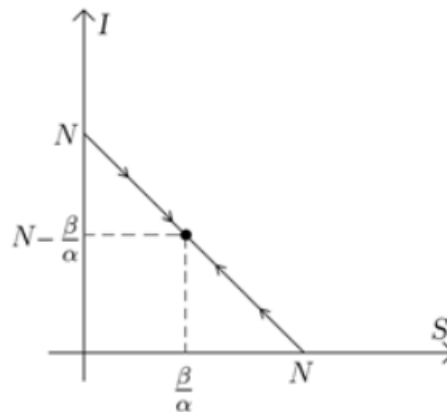
Assim, os autovalores da matriz de coeficientes $J(\frac{\alpha}{\beta}, N - \frac{\alpha}{\beta})$ são calculados por

$$\lambda(\beta N - \alpha + \lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \alpha - \beta N \end{cases}$$

Assumimos que N é suficientemente grande, então $\alpha - \beta N < 0$. Logo o ponto de equilíbrio X_1 é localmente assintoticamente estável.

Portanto, no retrato de fase do Sistema (48) as trajetórias de solução se afastam do ponto de equilíbrio dado por $X_0 = (N, 0)$ e se aproximam do ponto de equilíbrio $X_1 = (\frac{\alpha}{\beta}, N - \frac{\alpha}{\beta})$. Mas, no plano de fase deste sistema, a equação $N = S + I$ tem a estrutura geométrica de uma reta que intersecta os eixos S, I em N . Logo, o ponto de equilíbrio X_1 está compreendido nesta reta, se "movendo" conforme a escolha dos parâmetros α e β . Mas como este é **assintoticamente estável**, as soluções se aproximam do ponto pela reta $N = S + I$. Vejamos o retrato de fase do sistema na Figura (17).

Figura 17 – Retrato de fase do Modelo SIS



Fonte: LUIZ (2012)

Com este retrato de fase fica claro o que acontece com as trajetórias do Sistema (48) em seu retrato de fase, dada uma condição inicial $N = N_0$. Vejamos que, de fato, as soluções se aproximam do ponto de equilíbrio X_1 pela reta $N = S + I$, e se afastam do ponto X_0 . Note que, devido a restrição $S + I = N$ com N constante, as soluções deste sistema estarão sempre sobre o segmento de reta indicado no retrato de fase da Figura 17. Isto é, não existem outras curvas soluções além das indicadas neste retrato de fase.

4.4 Coronavírus

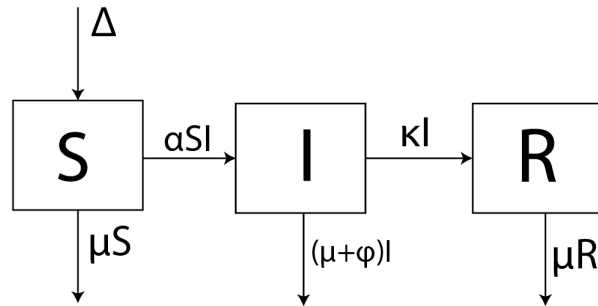
Em dezembro de 2019, surgiu na pequena cidade chinesa de Wuhan um novo vírus, o SARS-COV-2 que causou uma pandemia que afetou todo o globo terrestre, a doença oriunda deste vírus ficou conhecida como "Covid-19". É difícil dizer exatamente a origem deste vírus, mas a Organização Mundial de Saúde (OMS) afirma em seus relatórios de pesquisa que este surgiu de maneira natural, sendo um morcego infectado que transmitiu para um mamífero intermediário e deste, chegou ao ser humano. Outra hipótese que a OMS afirma como provável seria a transmissão direta do morcego infectado para o ser humano.

É fato que, este vírus infectou mais de 600 milhões de pessoas e causou cerca de 6 milhões de mortes globalmente até o ano de 2022, sendo a maioria em países que negligenciaram as medidas preventivas, como quarentenas e vacinas. No Brasil, tivemos cerca de 34 milhões de infectados e mais de 600 mil mortos pelo vírus até setembro de 2022, segundo JOHNS HOPKINS UNIVERSITY (2022)

Globalmente, o Coronavírus foi responsável por devastar diversos fatores importantes para o desenvolvimento da sociedade, como a educação, economia e saúde. Devido a isso foi muito estudado por médicos, biólogos, matemáticos e autoridades para que pudesse ser contido o mais rápido possível. Desta forma, a busca por um modelo matemático que descrevesse a transmissão deste vírus foi muito abordada por biomatemáticos mundialmente.

Uma das formas de estudar o comportamento deste vírus é através dos modelos compartimentais. Vejamos uma modelagem teórica do modelo SIR feita por LUIZ (2012) em que são considerados parâmetros como a taxa de natalidade, taxa de mortalidade natural e taxa de mortalidade devido à doença que tornam o sistema mais rico em informações e possivelmente aplicável ao Coronavírus. O diagrama deste modelo está na Figura 18.

Figura 18 – Diagrama do Modelo SIR



Fonte: Adaptado de LUIZ (2012)

Vejamos no diagrama que, para a classe dos suscetíveis, temos um parâmetro Δ que representa um recrutamento na classe e μS , que representa uma parte da população de S diretamente proporcional à μ que está sendo removida da doença sem ao menos ser infectada. Esses parâmetros Δ e μ representam, respectivamente, a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade por causas naturais.

Para a classe dos infectados, temos um recrutamento vindo de S diretamente proporcional à um parâmetro α , que representa a taxa de infecção da doença. Ainda em I , temos duas saídas, uma diretamente proporcional com o parâmetro μ , representando as mortes naturais e outra diretamente proporcional com o parâmetro ϕ , representando as mortes causadas pela doença.

Por fim, para a classe dos removidos, temos um recrutamento de I diretamente proporcional ao parâmetro κ , que representa a taxa de recuperação da doença e, novamente, uma saída de R diretamente proporcional à taxa μ , que representa a taxa de mortalidade natural. Note que, para este modelo, o compartimento R recebe apenas aqueles que foram removidos da doença, mas que não foram removidos da população, ou seja, indivíduos recuperados da doença. Também os indivíduos que se recuperam, recebem imunidade permanente à doença, pois não retornam ao compartimento S , este fato é um problema para modelar o comportamento do Coronavírus, mas em linhas gerais, ainda é um bom modelo para entender qualitativamente como este vírus se comporta.

Contextualizando com o Coronavírus, vamos enunciar os parâmetros da seguinte forma:

- Δ : Taxa de natalidade;
- μ : Taxa de mortalidade natural;

- α : Taxa de infecção
- ϕ : Taxa de mortalidade via Coronavírus;
- κ : Taxa de recuperação.

A população total neste modelo é dada por $N = S + I + R$ e o sistema de EDO's que descreve o comportamento deste vírus é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Delta - \alpha SI - \mu S \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - (\kappa + \mu + \phi)I \\ \frac{dR}{dt} = \kappa I - \mu R. \end{cases} \quad (54)$$

Dadas as seguintes condições iniciais:

$$S(0) = S_0 \geq 0$$

$$I(0) = I_0 \geq 0$$

$$R(0) = 0.$$

Note que, se $N = S + I + R$, então $\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt}$, isto é

$$\frac{dN}{dt} = \Delta - \mu(S + I + R) - \phi I = \Delta - \mu N - \phi I.$$

Portanto, a população neste caso não é uma constante e os parâmetros que definem a taxa de variação da população são a taxa de natalidade e as taxas de mortalidade, tanto natural quanto pelo Coronavírus.

Vejamos quais são os pontos de equilíbrio deste sistema, isto é, resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \Delta - \alpha SI - \mu S = 0 \\ \alpha SI - (\kappa + \mu + \phi)I = 0 \\ \kappa I - \mu R = 0. \end{cases} \quad (55)$$

Primeiro, suponha $I = 0$ para encontrarmos o ponto de equilíbrio livre de doença. Neste caso, temos

$$\begin{cases} \Delta - \mu S = 0 \\ 0 = 0 \\ -\mu R = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{\Delta}{\mu} \\ R = 0. \end{cases}$$

Logo, o ponto de equilíbrio livre de doença deste sistema é dado por $X_1 = (\frac{\Delta}{\mu}, 0, 0)$. Veja que, considerando este caso obtemos informações sobre a população do modelo, isto é, $I = 0$ implica que $N = S + I + R = \frac{\Delta}{\mu}$. Ou seja, a população total converge para $\frac{\Delta}{\mu}$.

Agora, suponha que $I \neq 0$, para obtermos o ponto de equilíbrio endêmico deste modelo. Desta forma, temos pela segunda equação do Sistema (55)) que

$$\alpha SI - (\kappa + \mu + \phi)I = 0 \Rightarrow I(\alpha S - (\kappa + \mu + \phi)) = 0.$$

Como $I \neq 0$, então

$$\alpha S - (\kappa + \mu + \phi) = 0 \Rightarrow S = \frac{\kappa + \mu + \phi}{\alpha} \quad (56)$$

Substituindo o S da Equação (56) na primeira equação do Sistema (55), temos

$$\begin{aligned} \Delta - \frac{\alpha(\kappa + \mu + \phi)}{\alpha}I - \frac{\mu(\kappa + \mu + \phi)}{\alpha} &= 0 \Rightarrow -(\kappa + \mu + \phi)I = -\Delta + \frac{\mu(\kappa + \mu + \phi)}{\alpha} \\ \Rightarrow I &= \frac{\alpha\Delta - \mu(\kappa + \mu + \phi)}{\alpha(\kappa + \mu + \phi)}. \end{aligned}$$

Por fim, substituindo $I = \frac{\alpha\Delta - \mu(\kappa + \mu + \phi)}{\alpha(\kappa + \mu + \phi)}$ na terceira equação do Sistema (55), temos

$$\kappa \left(\frac{\alpha\Delta - \mu(\kappa + \mu + \phi)}{\alpha(\kappa + \mu + \phi)} \right) - \mu R = 0 \Rightarrow R = \frac{\kappa[\alpha\Delta - \mu(\kappa + \mu + \phi)]}{\alpha\mu(\kappa + \mu + \phi)}.$$

Logo, o ponto de equilíbrio endêmico deste sistema é dado por:

$$X_2 = \left(\frac{\kappa + \mu + \phi}{\alpha}, \frac{\alpha\Delta - \mu(\kappa + \mu + \phi)}{\alpha(\kappa + \mu + \phi)}, \frac{\kappa[\alpha\Delta - \mu(\kappa + \mu + \phi)]}{\alpha\mu(\kappa + \mu + \phi)} \right)$$

Para esta aplicação é importante apresentar um conceito adicional da teoria dos modelos compartimentais, o **número básico de reprodução**, denotado por R_0 . Este é definido, biologicamente, pela taxa estimada de casos secundários a partir de uma única infecção em uma população completamente suscetível. Isto é, um número que quantifica o potencial de transmissão de uma doença.

A partir desta definição informal de R_0 deve ser positivo. Também que, se $R_0 > 1$, um caso primário a doença transmite para mais de uma pessoa, o que faz com que o número de infectados cresça com o tempo. Se $R_0 < 1$ um caso primário não transmite a doença para outro indivíduo e tende a ser extinta naturalmente. Por fim, se $R_0 = 1$, a doença está sendo transmitida em uma taxa de "1 para 1", ou seja, ela não cresce e nem decresce, se mantém constante na população.

De acordo com LUIZ (2012), número básico de reprodução neste modelo é dado por:

$$R_0 = \frac{\alpha \Delta}{\mu(\kappa + \mu + \phi)}. \quad (57)$$

Para facilitar os cálculos acerca da estabilidade deste sistema, vamos escrever o ponto de equilíbrio X_2 em função de R_0 . Isto é, seja $X_2 = (S_2, I_2, R_2)$. Então,

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{\kappa + \mu + \phi}{\alpha} = \left(\frac{\Delta}{\mu}\right) \left(\frac{\mu}{\Delta}\right) \left(\frac{\kappa + \mu + \phi}{\alpha}\right) = \frac{\Delta}{\mu R_0}; \\ I_2 &= \frac{\alpha \Delta - \mu(\kappa + \mu + \phi)}{\alpha(\kappa + \mu + \phi)} = \frac{\alpha \Delta}{\alpha(\kappa + \mu + \phi)} - \frac{\mu(\kappa + \mu + \phi)}{\alpha(\kappa + \mu + \phi)} = \frac{\mu R_0}{\alpha} - \frac{\mu}{\alpha} = \frac{\mu(R_0 - 1)}{\alpha}; \\ R_2 &= \frac{\kappa[\alpha \Delta - \mu(\kappa + \mu + \phi)]}{\alpha \mu(\kappa + \mu + \phi)} = \frac{\kappa I_1}{\mu} = \frac{\kappa \mu(R_0 - 1)}{\mu \alpha} = \frac{\kappa(R_0 - 1)}{\alpha}. \end{aligned}$$

Portanto podemos reescrever o ponto de equilíbrio endêmico na forma:

$$X_2 = \left(\frac{\Delta}{\mu R_0}, \frac{\mu(R_0 - 1)}{\alpha}, \frac{\kappa(R_0 - 1)}{\alpha} \right).$$

Teorema 4.1. *Seja $R_0 > 0$ o número de reprodução básica do Sistema (54) dado pela Equação (57). Podemos afirmar que:*

1. *Se $R_0 \leq 1$, o sistema não possui ponto de equilíbrio positivo;*
2. *Se $R_0 > 1$, o sistema possui um único ponto de equilíbrio positivo, chamado de ponto de equilíbrio endêmico.*

Demonstração:

Para mostrar o Caso 1, tome $0 < R_0 \leq 1$ e suponha que o sistema possua algum ponto de equilíbrio positivo, isto é $X_0 = (S_0, I_0, R_0)$ tal que $S_0, I_0, R_0 > 0$. Se $I > 0$, então $I \neq 0$, portanto este é um ponto de equilíbrio endêmico e pode ser escrito na forma:

$$X_0 = \left(\frac{\Delta}{\mu R_0}, \frac{\mu(R_0 - 1)}{\alpha}, \frac{\kappa(R_0 - 1)}{\alpha} \right)$$

Mas, note que, $R_0 < 1$ implica que $I_0 = \frac{\mu(R_0 - 1)}{\alpha} < 0$. Absurdo, pois $I \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por outro lado, $R_0 = 1$ implica que $I_0 = \frac{\mu(R_0 - 1)}{\alpha} = 0$. Absurdo, pois este deve ser um ponto de equilíbrio endêmico. Portanto, se $0 < R_0 \leq 1$, o sistema não possui pontos de equilíbrio positivos.

Para mostrar o Caso 2, tome $R_0 > 1$ e suponha X_1, X_2 pontos de equilíbrio positivos do sistema. Isto é, $X_1 = (S_1, I_1, R_1)$ e $X_2 = (S_2, I_2, R_2)$ tais que $S_1, I_1, R_1, S_2, I_2, R_2 > 0$. Desta forma, ambos pontos de equilíbrio são endêmicos. Como o número de reprodução básico do

sistema é um parâmetro único dado por $R_0 = \frac{\alpha\Delta}{\mu(\kappa+\mu+\phi)}$, então

$$X_1 = \left(\frac{\Delta}{\mu R_0}, \frac{\mu(R_0 - 1)}{\alpha}, \frac{\kappa(R_0 - 1)}{\alpha} \right) = X_2$$

Portanto, dados quaisquer dois pontos de equilíbrio positivos do sistema, estes são iguais. Logo, existe um único ponto de equilíbrio positivo para $R_0 > 1$ que é o ponto de equilíbrio endêmico

□

Com o Teorema 4.1 mostramos que podemos dividir a análise de estabilidade nos casos em que $R_0 \leq 1$ e $R_0 > 1$.

Com o intuito de facilitar esta análise, note que, no Sistema (54), a função que representa o compartimento R não está presente nas outras duas equações e portanto, podemos desconsiderá-la na análise de estabilidade, pois esta função não vai afetar diretamente o comportamento das soluções. Ou seja, para a análise qualitativa do modelo, consideraremos apenas o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Delta - \alpha SI - \mu S \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - (\kappa + \mu + \phi)I \end{cases} \quad (58)$$

Primeiro, vejamos a estabilidade local do sistema na vizinhança dos pontos de equilíbrio livre de doença (X_1) e endêmico (X_2). Veja que, $S(t), I(t)$ dependem apenas da variável independente $t \in \mathbb{R}$, logo este é um sistema de EDO's autônomo. Considere as funções $F, G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tais que:

$$F(S, I) = \Delta - \alpha SI - \mu S$$

$$G(S, I) = \alpha SI - (\kappa + \mu + \phi)I.$$

Vamos analisar as derivadas parciais destas funções para verificar se ambas são de classe C^2 , isto é,

- $\frac{\partial F}{\partial S} = -\alpha I - \mu \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 0$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial S \partial I} = -\alpha$;
- $\frac{\partial F}{\partial I} = -\alpha S \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial I \partial S} = -\alpha$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial I^2} = 0$;
- $\frac{\partial G}{\partial S} = \alpha I \Rightarrow \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = 0$ e $\frac{\partial^2 G}{\partial S \partial I} = \alpha$;
- $\frac{\partial G}{\partial I} = \alpha S - (\kappa + \mu + \phi) \Rightarrow \frac{\partial^2 G}{\partial I \partial S} = \alpha$ e $\frac{\partial^2 G}{\partial I^2} = 0$;

Ou seja, todas as derivadas parciais de primeira e segunda ordem de ambas as funções existem e são contínuas, portanto F, G são de classe C^2 e assim, podemos aproximar este sistema para um da forma:

$$X' = J(S, I)X,$$

onde J é a matriz Jacobiana do Sistema. Agora, vamos calcular a matriz $J(S, I)$, isto é,

$$J(S, I) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial S} & \frac{\partial F}{\partial I} \\ \frac{\partial G}{\partial S} & \frac{\partial G}{\partial I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha I - \mu & -\alpha S \\ \alpha I & \alpha S - (\kappa + \mu + \phi) \end{bmatrix}$$

Vamos analisar a estabilidade na vizinhança do ponto de equilíbrio livre de doença, ou seja, aplicamos $X_1 = \left(\frac{\Delta}{\mu}, 0\right)$ em $J(S, I)$, assim temos:

$$J\left(\frac{\Delta}{\mu}, 0\right) = \begin{bmatrix} -\mu & -\alpha\frac{\Delta}{\mu} \\ 0 & \alpha\frac{\Delta}{\mu} - (\kappa + \mu + \phi) \end{bmatrix}.$$

Vamos calcular o determinante desta matriz:

$$\begin{aligned} \det(J) &= -\alpha\Delta + \mu(\kappa + \mu + \phi) \\ &= -\alpha\Delta + \frac{\alpha\Delta}{R_0} \\ &= \frac{-R_0\alpha\Delta + \alpha\Delta}{R_0} \\ &= \frac{\alpha\Delta(1 - R_0)}{R_0}. \end{aligned}$$

Como estamos analisando no ponto de equilíbrio livre de doença, pelo Teorema 4.1, $R_0 < 1$. Logo, $\det(J) > 0$ e basta analisarmos o traço da matriz J para obtermos a estabilidade via Corolário 2.1. O traço desta matriz é dado por:

$$\begin{aligned} \text{tr}(J) &= -\mu + \alpha\frac{\Delta}{\mu} - (\kappa + \mu + \phi) \\ &= \frac{-\mu^2 + \alpha\Delta - \mu(\kappa + \mu + \phi)}{\mu} \\ &= \frac{-\mu^2 + R_0\mu(\kappa + \mu + \phi) - \mu(\kappa + \mu + \phi)}{\mu} \\ &= \frac{-\mu^2 + \mu(\kappa + \mu + \phi)(R_0 - 1)}{\mu}. \end{aligned}$$

Como $R_0 < 1$, temos que $\text{tr}(J) < 0$, portanto o ponto de equilíbrio livre de doença é localmente assintoticamente estável pelo Corolário 2.1.

Agora, vamos analisar a estabilidade local do ponto de equilíbrio endêmico do Sistema (58). A matriz Jacobiana aplicada no ponto $X_2 = \left(\frac{\Delta}{\mu}R_0, \frac{\mu(R_0-1)}{\alpha}\right)$ é dada por:

$$J\left(\frac{\Delta}{\mu}R_0, \frac{\mu(R_0-1)}{\alpha}\right) = \begin{bmatrix} -\mu(R_0-1) - \mu & -\frac{\alpha\Delta}{\mu R_0} \\ \mu(R_0-1) & \frac{\alpha\Delta}{\mu R_0} - (\kappa + \mu + \phi) \end{bmatrix}$$

Vamos calcular o determinante desta matriz:

$$\begin{aligned} \det(J) &= -\frac{\alpha\Delta(R_0-1)}{R_0} + \mu(R_0-1)(\kappa + \mu + \phi) - \frac{\alpha\Delta}{R_0} + \mu(\kappa + \mu + \phi) + \frac{\alpha\Delta(R_0-1)}{R_0} \\ &= \mu(R_0-1)(\kappa + \mu + \phi) - \frac{\alpha\Delta}{R_0} + \mu(\kappa + \mu + \phi) \\ &= \mu(R_0-1)(\kappa + \mu + \phi) - \frac{\alpha\Delta}{R_0} + \frac{\alpha\Delta}{R_0} \\ &= \mu(R_0-1)(\kappa + \mu + \phi). \end{aligned}$$

Como estamos analisando o ponto de equilíbrio endêmico, pelo Teorema 4.1, $R_0 > 1$. Logo, $\det(J) > 0$ e podemos analisar a estabilidade deste sistema na vizinhança do ponto de equilíbrio via Corolário 2.1. Vejamos o traço desta matriz:

$$\begin{aligned} \text{tr}(J) &= -\mu(R_0-1) - \mu + \frac{\alpha\Delta}{\mu R_0} - (\kappa + \mu + \phi) \\ &= -\mu(R_0-1) - \mu + (\kappa + \mu + \phi) - (\kappa + \mu + \phi) \\ &= -\mu(R_0-1) - \mu. \end{aligned}$$

Como $R_0 > 1$, temos que $\text{tr}(J) < 0$. Portanto, o ponto de equilíbrio endêmico é localmente assintoticamente estável via Corolário 2.1.

Assim, pelas análises de estabilidade local, ambos os pontos de equilíbrio são localmente assintoticamente estáveis.

Agora, vamos fazer a análise de estabilidade global dos pontos de equilíbrio do Sistema (54) via funções de Lyapunov como feito em LUIZ (2012). Para isso, voltemos a considerar a função do compartimento R , pois esta é importante para a análise global dos pontos de equilíbrio. Para isso, considere a região Ω dada por:

$$\Omega = \left\{ (S, I, R) \in \mathbb{R}^3; S \geq 0, S \geq 0, S \geq 0, S + I + R \leq \frac{\Delta}{\mu} \right\}$$

Primeiro, vamos analisar o ponto de equilíbrio livre de doença, isto é,

$$X_1 = (S_1, I_1, R_1) = \left(\frac{\Delta}{\mu}, 0, 0\right).$$

Considere a função $U : \{(S, I, R) \in \Omega; S > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$U(S, I, R) = \frac{1}{2}[(S - S_1) + I + R]^2 + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha}I + \frac{(\phi + 2\mu)}{2\kappa}R^2.$$

Veja que, $U(S_1, I_1, R_1) = 0$ e, para qualquer outro ponto $X = (S, I, R) \in \Omega$ tal que $S > 0$, temos que esta função é positiva, pois a soma dos termos de U sempre é um número não negativo e o valor 0 de U cabe apenas ao ponto de equilíbrio X_0 . Também note que, esta função é definida como uma soma de polinômios, ou seja, é uma função polinomial, que tem como característica ter todas suas derivadas de ordem n contínuas, para todo n , logo ela é de classe C^1 em $\{(S, I, R) \in \Omega; S > 0\}$. Vejamos sua derivada:

$$\begin{aligned} \dot{U}(S, I, R) &= (U_S(t), U_I(t), U_R(t)) \cdot \left(\frac{dS}{dt}, \frac{dI}{dt}, \frac{dR}{dt} \right) \\ &= [(S - S_1) + I + R] \frac{dS}{dt} + [(S - S_1) + I + R] \frac{dI}{dt} + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} \frac{dI}{dt} \\ &\quad + [(S - S_1) + I + R] \frac{dR}{dt} + \frac{(\phi + 2\mu)}{\kappa} R \frac{dR}{dt} \\ &= [(S - S_1) + I + R] \left(\frac{d(S + I + R)}{dt} \right) + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} \frac{dI}{dt} + \frac{(\phi + 2\mu)}{\kappa} R \frac{dR}{dt} \\ &= [(S - S_1) + I + R] (\Delta - \mu(S + I + R) - \phi I) \\ &\quad + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} (\alpha SI - (\kappa + \mu + \phi)) + \frac{(\phi + 2\mu)}{\kappa} R (\kappa I - \mu R). \end{aligned}$$

Como $S_1 = \frac{\Delta}{\mu}$, então vamos fazer $\Delta = \mu S_1$. Desta forma:

$$\begin{aligned} \dot{U}(S, I, R) &= [(S - S_1) + I + R] (\mu S_1 - \mu(S + I + R) - \phi I) \\ &\quad + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} (\alpha SI - (\kappa + \mu + \phi)) + \frac{(\phi + 2\mu)}{\kappa} R (\kappa I - \mu R). \end{aligned}$$

Com algumas manipulações algébricas no lado direito da equação, obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{U}(S, I, R) &= -\mu[(S - S_1) + R]^2 - (\mu + \phi)I^2 - \frac{\mu(\phi + 2\mu)}{\kappa}R^2 \\ &\quad - (\phi + 2\mu)I \left(\frac{\kappa + \mu + \phi}{\alpha} - S_1 \right). \end{aligned} \tag{59}$$

Vamos reescrever $\dot{U}(S, I, R)$ em função de R_0 , isto é, se $R_0 = \frac{\alpha\Delta}{\mu(\kappa + \mu + \phi)}$ e $S_1 = \frac{\Delta}{\mu}$. Então,

$$R_0 = \frac{\Delta}{\mu} \frac{\alpha}{\kappa + \mu + \phi} = S_1 \frac{\alpha}{\kappa + \mu + \phi} \Rightarrow S_1 = \frac{\kappa + \mu + \phi}{\alpha} R_0$$

Substituindo S_1 na Equação (59), temos que

$$\begin{aligned}\dot{U}(S, I, R) &= -\mu[(S - S_1) + R]^2 - (\mu + \phi)I^2 - \frac{\mu(\phi + 2\mu)}{\kappa}R^2 \\ &\quad - (\phi + 2\mu)I \left(\frac{\kappa + \mu + \phi}{\alpha} - \frac{\kappa + \mu + \phi}{\alpha}R_0 \right) \\ &= -\mu[(S - S_1) + R]^2 - (\mu + \phi)I^2 - \frac{\mu(\phi + 2\mu)}{\kappa}R^2 \\ &\quad - \frac{(\phi + 2\mu)(\kappa + \mu + \phi)}{\alpha}I(1 - R_0)\end{aligned}$$

Veja que, os três primeiros termos da soma que define $U(S, I, R)$ são não positivos em Ω , e no último termo temos o fator $(1 - R_0)$, como estamos analisando a estabilidade global do ponto de equilíbrio livre de doença, pelo Teorema 4.1 temos que $R_0 < 1$. Desta forma, $(1 - R_0) > 0$ independente do valor de R_0 , logo o último termo desta soma é estritamente negativo. Portanto, $\dot{U}(S, I, R) < 0$ para todo $(S, I, R) \in \Omega$ tal que $S > 0$, ou seja, é definida negativa e, pelo Teorema 3.4, o ponto de equilíbrio livre de doença X_0 é globalmente assintoticamente estável.

Agora, vamos analisar a estabilidade do ponto de equilíbrio endêmico dado por:

$$X_2 = \left(\frac{\Delta}{\mu R_0}, \frac{\mu(R_0 - 1)}{\alpha}, \frac{\kappa(R_0 - 1)}{\alpha} \right).$$

Para isso, considere a função $V : \{(S, I, R) \in \Omega; S, I, R > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal como descrita em LUIZ (2012):

$$\begin{aligned}V(S, I, R) &= \frac{1}{2}[(S - S_2) + (I - I_2) + (R - R_2)]^2 + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha}(I - I_2 - I_2 \ln(\frac{I}{I_2})) \\ &\quad + \frac{(\phi + 2\mu)}{\kappa}(R - R_2)^2\end{aligned}$$

Veja que, $V(S_2, I_2, R_2) = 0$ e para qualquer outro ponto $X \in \Omega$ tal que $S, I, R > 0$, temos que $V(X) > 0$, portanto V é definida positiva. V também tem sua derivada de primeira ordem contínua em $(S, I, R) \in \Omega; S, I, R > 0$, pois é combinação linear de funções que possui derivadas de primeira ordem contínuas neste conjunto. Vamos analisar a derivada desta

função:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(S, I, R) &= (V_S(t), V_I(t), V_R(t)) \cdot \left(\frac{dS}{dt}, \frac{dI}{dt}, \frac{dR}{dt} \right) \\
&= [(S - S_2) + (I - I_2) + (R - R_2)] \frac{dS}{dt} + [(S - S_2) + (I - I_2) + (R - R_2)] \frac{dI}{dt} \\
&\quad + \frac{(\phi + 2\mu) I - I_2}{\alpha} \frac{dI}{dt} + \frac{(\phi + 2\mu)}{\kappa} (R - R_2) \frac{dR}{dt} \\
&= [(S - S_2) + (I - I_2) + (R - R_2)] \frac{d(S + I + R)}{dt} + \frac{(\phi + 2\mu) I - I_2}{\alpha} \frac{dI}{dt} \\
&\quad + \frac{(\phi + 2\mu)}{\kappa} (R - R_2) \frac{dR}{dt} \\
&= [(S - S_2) + (I - I_2) + (R - R_2)] (\Delta - \mu(S + I + R) - \phi I) \\
&\quad + \frac{(\phi + 2\mu) I - I_2}{\alpha} \frac{dI}{dt} (\alpha S I - (\kappa + \mu + \phi) I) + \frac{(\phi + 2\mu)}{\kappa} (R - R_2) (\kappa I - \mu R).
\end{aligned}$$

Como $N' = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = (\Delta - \mu(S + I + R) - \phi I)$, então $\frac{dS(X_2)}{dt} + \frac{dI(X_2)}{dt} + \frac{dR(X_2)}{dt} = 0 = (\Delta - \mu(S_2 + I_2 + R_2) - \phi I_2)$, o que implica que $\Delta = \mu(S_2 + I_2 + R_2) + \phi I_2$. Por outro lado, $S_2 = \frac{\kappa + \mu + \phi}{\alpha}$, então $\kappa + \mu + \phi = \alpha S_2$. Substituindo Δ e $\kappa + \mu + \phi$ em $\dot{V}(S, I, R)$, temos:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(S, I, R) &= [(S - S_2) + (I - I_2) + (R - R_2)] [\mu(S_2 + I_2 + R_2) + \phi I_2 - \mu(S + I + R) - \phi I] \\
&\quad + \frac{(\phi + 2\mu) I - I_2}{\alpha} \frac{dI}{dt} (\alpha S I - (\alpha S_2) I) + \frac{(\phi + 2\mu)}{\kappa} (R - R_2) (\kappa I - \mu R) \\
&= -[(S - S_2) + (I - I_2) + (R - R_2)] [\mu((S - S_2) + (R - R_2)) + (\phi + \mu)(I - I_2)] \\
&\quad + (\phi + 2\mu)(S - S_2)(I - I_2) + (R - R_2) [\kappa(I - I_2) - \mu(R - R_2)].
\end{aligned}$$

Com algumas manipulações algébricas no lado direito da equação, obtemos:

$$\dot{V}(S, I, R) = -\mu[(S - S_2) + (R - R_2)]^2 - (\mu + \phi)(I - I_2)^2 - \frac{\mu(\phi + \mu)}{\kappa} (R - R_2)^2.$$

Note que, os três termos da soma que definem \dot{V} são negativos e assumem valor 0 apenas se X_2 for aplicado em \dot{V} . Portanto esta função é definida negativa e pelo Teorema 3.4 o ponto de equilíbrio endêmico é globalmente assintoticamente estável.

Assim, ambos os pontos de equilíbrio são localmente e globalmente assintoticamente estáveis. Mas, note que, eles não coexistem por causa das condições de R_0 impostas pelo Teorema 4.1. Isto é, no caso de $R_0 < 1$, todas as soluções do sistema de EDO's são assintoticamente estáveis ao ponto de equilíbrio X_1 e no caso de $R_0 > 1$, todas as soluções do sistema de EDO's são assintoticamente estáveis ao ponto de equilíbrio X_2 .

Em termos biológicos, a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio endêmico mostra que o vírus continuará se espalhando e as pessoas continuarão se curando, tendendo ao

equilíbrio. Isto é, por mais que haja uma condição inicial “muito ruim”, onde temos uma taxa de infecção muito alta e uma taxa de recuperação baixa, ainda assim a pandemia tenderá a um equilíbrio.

5 CONCLUSÃO

Ao longo deste trabalho, abordamos a teoria da estabilidade de sistemas de EDO's. Começamos com uma breve apresentação sobre Equações diferenciais, suas propriedades e definições. Com estas, vimos que existem as equações diferenciais ordinárias (EDO's) lineares e não lineares que podem descrever fenômenos físicos e biológicos, como o movimento de um pêndulo ou a dinâmica populacional de uma espécie. Também vimos que podemos escrever sistemas de EDO's lineares em uma forma matricial dada por:

$$X' = AX$$

onde $X' = [x'_1(t), \dots, x'_n(t)]^T$, $X = [x_1, \dots, x_n]^T$ são vetores em um subconjunto Ω aberto em \mathbb{R}^n tal que x_1, \dots, x_n são funções reais que dependem apenas da variável independente $t \in \mathbb{R}$ (funções incógnita) e A é uma matriz de coeficientes reais cuja dimensão é $n \times n$. Além disso, se existir um ponto X_0 de Ω tal que $X' = AX_0 = 0$, então chamamos este ponto de ponto de equilíbrio.

Assim, com uma teoria que envolve os autovalores da matriz A , podemos observar qualitativamente o que acontece com as trajetórias das soluções do sistema $X' = AX$ na vizinhança do ponto de equilíbrio X_0 e portanto definir se as trajetórias se comportam de maneira estável, assintoticamente estável ou instável próximas a este ponto. A esta teoria damos o nome de teoria da estabilidade de EDO's.

No Capítulo 3, vimos que muitas aplicações não podem ser modeladas por sistemas de EDO's lineares e buscamos entender como utilizar a teoria da estabilidade de EDO's vista para sistemas de EDO's lineares em sistemas não lineares.

Assim, buscamos uma aproximação linear do sistema que satisfizesse algumas condições para que aproximasse o sistema de EDO's não linear para um linear com o erro convergindo para 0 na vizinhança do ponto de equilíbrio de análise. Para isso, utilizamos a aproximação via generalização dos polinômios de Taylor para funções de várias variáveis e obtemos que a matriz Jacobiana do sistema aplicada no ponto de equilíbrio é uma aproximação que satisfaz as condições impostas. Desta forma, utilizamos a matriz Jacobiana para aproximar fazer a aproximação linear de sistemas de EDO's não lineares.

Porém, a análise de estabilidade via aproximação linear possui algumas limitações, como fazer apenas a análise local do ponto de equilíbrio e com uma pequena perturbação nos coeficientes da matriz Jacobiana, principalmente em casos onde os autovalores são números complexos, esta pode nos dar uma análise equivocada da estabilidade do ponto. Portanto, buscamos outra teoria que pudesse suprir estes problemas da aproximação linear.

A teoria que escolhemos para estudar a estabilidade das trajetórias das soluções do sistema de EDO's não linear na vizinhança dos pontos de equilíbrio foi o método direto de Lyapunov. Este consiste em encontrar uma função que satisfaça uma série de condições (função de

Lyapunov) e com esta, temos a garantia de estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade de um ponto de equilíbrio globalmente.

O caminho de estudos da teoria da estabilidade de EDO's escolhido neste trabalho foi escolhido para mostrar como estas diferentes abordagens constroem a teoria da estabilidade de EDO's para poder aplicar em modelos epidemiológicos.

No Capítulo 4 apresentamos os modelos *SIR*, que são modelos epidemiológicos muito utilizados para descrever o comportamento de um vírus em uma determinada população. Esta modelagem também é conhecida como modelagem compartimental, pois dada uma população total N , esta é dividida em três compartimentos, o dos indivíduos suscetíveis (S), o dos infectados (I) e dos removidos (R).

Com esta abordagem, estudamos um modelo derivado do modelo *SIR*, o modelo *SI*, que descreve o comportamento de um rumor (*fake news*) no *Twitter* e divide a população em apenas dois compartimentos, o dos suscetíveis (S) e dos infectados (I). E, a partir deste modelo, obtivemos as informações qualitativas acerca da estabilidade via aproximação linear (Matriz Jacobiana).

Por fim, estudamos qualitativamente uma modelagem *SIR* teórica, mas que podia ser aplicada para o Coronavírus via aproximação linear e via método direto de Lyapunov. Estudar o mesmo modelo via abordagens diferentes foi muito vantajoso no sentido de entender as propriedades de estabilidade local e global do sistema.

Durante esta modelagem, apresentamos o número básico de reprodução (R_0) que biologicamente significa a taxa de transmissão de uma única infecção para demais infecções na população. Este parâmetro foi muito útil para determinar a estabilidade dos pontos de equilíbrio.

Portanto, a discussão apresentada neste trabalho se mostrou contributiva e acreditamos que este trabalho possa contribuir para estudantes de graduação que estão interessados em estudar não somente a biomatemática, mas a estabilidade de sistemas de EDO's em geral. Como resultado final, esperamos ter proporcionado um estudo sobre diferentes abordagens da teoria da estabilidade de sistemas de EDO's e suas aplicações em epidemiologia. Uma possível direção futura seria estudar como é obtido o número de reprodução básica dos modelos compartimentais e aplicações numéricas destes modelos.

REFERÊNCIAS

- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elemntares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro, Brasil: LTC Editora, 2006. v. 8. 434 p.
- DOERING, C. I.; LOPES, A. O. **Equações diferenciais ordinárias**. 6. ed. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA, 2016. 423 p.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo, vol 2**. 5. ed. Rio de Janeiro, Brasil: LTC, 2001. v. 2. 607 p.
- JIN, F. *et al.* Epidemiological modeling of news and rumors on twitter. *In: Proceedings of the 7th Workshop on Social Network Mining and Analysis*. New York, USA: Association for Computing Machinery, 2013. ISBN 9781450323307. Disponível em: <https://doi.org/10.1145/2501025.2501027>.
- JOHNS HOPKINS UNIVERSITY. **COVID-19 Dashboard**. 2022. Disponível em: <https://www.arcgis.com/apps/dashboards/bda7594740fd40299423467b48e9ecf6>. Acesso em: 21 set. 2022.
- KREIDER, D. L.; KULLER, R. G.; OSTBERG, D. R. **Equações Diferenciais**. São Paulo, Brasil: Edgard Blucher, 1972. 485 p.
- LUIZ, M. H. R. L. **Modelos Matemáticos em Epidemiologia**. nov. 2012. 77 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, nov. 2012.
- MOREIRA, J. a. P. d. S. *et al.* Estudo de modelagens de um pêndulo simples através de equações diferenciais e análise de vídeo assistida por computador. **Revista Acadêmica - Ensino de Ciência e Tecnologias**, v. 5, n. 5, p. 37–58, ago,dez 2019.
- MURRAY, J. D. **Mathematical Biology I. An Introduction**. [S.l.]: Springer, 2002. 576 p.
- O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Aleksandr Mikhailovich Lyapunov**. 2004. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lyapunov/>. Acesso em: 21 set. 2022.
- PEREIRA, J. E. **Uma introdução ao estudo de Equações Diferenciais e suas propriedades clássicas. Equação da Onda e Equação do Calor**. mar. 2019. 129 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, mar. 2019.
- WOOLF, P. e. a. **Chemical Process Dynamics and Controls**. Michigan, USA: LibreTexts, 2007. 787 p.