

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**

**LEONARDO DALLA COSTA CROSATO**

**CARACTERIZAÇÃO MUSICAL VIA ESPECTRO DE GRAFOS**

**CURITIBA**

**2022**

**LEONARDO DALLA COSTA CROSATO**

**CARACTERIZAÇÃO MUSICAL VIA ESPECTRO DE GRAFOS**

**Graph Spectrum Musical Characterization**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. João Luis Gonçalves

**CURITIBA**

**2022**



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/)

Esta licença permite remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es) e que licenciem as novas criações sob termos idênticos. Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

**LEONARDO DALLA COSTA CROSATO**

**CARACTERIZAÇÃO MUSICAL VIA ESPECTRO DE GRAFOS**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação  
apresentado como requisito para obtenção do  
título de Licenciado em Matemática do Curso  
de Licenciatura em Matemática da Universidade  
Tecnológica Federal do Paraná.

Data de aprovação: 05/Dezembro/2022

---

João Luis Gonçalves  
Doutorado  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

André Fabiano Steklain Lisbôa  
Doutorado  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Roy Wilhelm Probst  
Doutorado  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

**CURITIBA**  
**2022**

## **AGRADECIMENTOS**

Em primeiro lugar, gostaria de deixar registrado o meu agradecimento à minha família que me apoiou durante todo o percurso da graduação. Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. João Luis Gonçalves, pelo incentivo e ajuda no trabalho. Aos meus colegas de curso que me ajudaram ao longo de toda a graduação. A todos os que por algum motivo contribuíram para a realização desta pesquisa.

*"Não há certeza nas ciências onde os  
conceitos matemáticos não podem ser  
aplicados, ou que não estão em relação com  
essa matemática"*  
(Leonardo da Vinci)

## RESUMO

Este trabalho pretende caracterizar músicas de forma consistente, utilizando grafos e o espectro de suas respectivas matrizes laplacianas. Os grafos que representam músicas são completamente determinados por essas matrizes. O uso dos autovalores de matrizes laplacianas para indexar grafos, e conseqüentemente músicas, é uma abordagem recorrente na literatura. Propomos o uso também dos autovetores de tais matrizes para a representação das músicas. Os autovetores expressam as relações entre notas na música e portanto contém informações relevantes. Projetamos os autovetores sobre 12 vetores do  $\mathbb{R}^2$ , os quais representam as 12 notas musicais. Destas projeções formamos polígonos cujos formatos refletem as características das músicas.

**Palavras-chave:** grafos; música; espectro.

## ABSTRACT

This work intends to characterize songs in a consistent way, using graphs and the spectrum of their respective Laplacian matrices. The graphs that represent songs are completely determined by these matrices. The use of eigenvalues of Laplacian matrices to index graphs, and consequently songs, is a recurrent approach in the literature. We also propose the use of the eigenvectors of such matrices for the representation of songs. Eigenvectors express the relationships between notes in music and therefore contain relevant information. We project the eigenvectors onto 12 vectors of  $\mathbb{R}^2$ , which represent the 12 musical notes. From these projections, we make a polygon whose shape reflects the song's characteristics.

**Keywords:** graphs; music; spectrum.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Respresentação das pontes de <i>Köningsberg</i> . . . . .	14
Figura 2 – Representação gráfica do grafo $H$ . . . . .	15
Figura 3 – Grafos isomorfos. . . . .	17
Figura 4 – Exemplo de partitura com clave de sol. . . . .	20
Figura 5 – Notas agrupadas de forma hierárquica de duração. . . . .	20
Figura 6 – Teclas de um piano nomeadas. . . . .	22
Figura 7 – Conjunto de classes de notas. . . . .	23
Figura 8 – Representação de um intervalo para David Lewin . . . . .	25
Figura 9 – Transformação de grafos musicais . . . . .	28
Figura 10 – Partitura e Tablatura da Música <i>Jarabe Tapatío</i> . . . . .	29
Figura 11 – Grafo da música Jarabe Tapatío. . . . .	30
Figura 12 – Partitura e tablatura das introduções de <i>Old Man</i> e <i>If I Ever Get Around In Living</i> . . . . .	30
Figura 13 – Representação dos grafos das melodias de <i>Old Man</i> e <i>If I Ever Get Around In Living</i> . . . . .	31
Figura 14 – Autovalores de <i>Old Man</i> e <i>If I Ever Get Around In Living</i> . . . . .	32
Figura 15 – Vetores associados as notas no $\mathbb{R}^2$ . . . . .	34
Figura 16 – Grafos das sequências $S_1$ e $S'_1$ . . . . .	36
Figura 17 – Polígonos de $S_1$ e $S'_1$ . . . . .	38
Figura 18 – Grafos de $S_2$ e $S'_2$ . . . . .	38
Figura 19 – Comparação dos autovalores de $L_{S_2}$ e $L_{S'_2}$ . . . . .	39
Figura 20 – Polígonos de $S_2$ e $S'_2$ . . . . .	40
Figura 21 – Grafos de $S_3$ e $S'_3$ . . . . .	41
Figura 22 – Grafos de $S_3$ e $S'_3$ . . . . .	41
Figura 23 – Grafos de $S_1$ e $S_3$ . . . . .	42
Figura 24 – Grafos de "My Sweet Lord" e "He's so fine". . . . .	43
Figura 25 – Autovalores de "My Sweet Lord" e "He's so fine". . . . .	43
Figura 26 – Projeções poligonais de "My Sweet Lord" e "The Chiffons" . . . . .	44



## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1 – Classificação de intervalos melódicos.</b> . . . . .	<b>21</b>
<b>Tabela 2 – Notas e números inteiros.</b> . . . . .	<b>21</b>

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	10
2	REVISÃO DE LITERATURA . . . . .	12
3	TEORIA DE GRAFOS . . . . .	14
4	TEORIA MUSICAL . . . . .	19
5	INDEXAÇÃO MUSICAL POR GRAFOS . . . . .	25
6	PROPOSTA DE USO DE AUTOVETORES PARA A REPRESENTAÇÃO DE MÚSICAS . . . . .	33
7	CONCLUSÃO . . . . .	45
	REFERÊNCIAS . . . . .	46

## 1 INTRODUÇÃO

Esse trabalho foi motivado pelo desejo de aprofundamento nos estudos feitos sobre a Teoria de Grafos na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), em um projeto extracurricular. Parte desse trabalho já resultou na apresentação em formato de pôster no Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC), em 2019, na Universidade Federal de Uberlândia (UFU).

Os grafos são utilizados em diversas áreas da ciência para a resolução de problemas que envolvem, principalmente, relações entre entes, como por exemplo moléculas, pessoas, elementos químicos, etc, (BONDY; MURTY, 2008). Nesse trabalho os objetos de estudo são as músicas e os entes entre os quais desejamos estudar são as relações entre as notas musicais.

As músicas são compostas por diversos elementos e estruturas como, por exemplo, notas, melodias, harmonia, ritmos e timbres. As notas são ondas mecânicas que têm uma frequência específica. A área que estuda os conceitos relacionados a leitura e interpretação de músicas é a Teoria Musical, mas, nessa teoria a comparação entre objetos é bastante difícil. Relacionando músicas com objetos matemáticos, preservando algumas de suas características essenciais, esperamos promover uma comparação mais simples e clara, devido a grande capacidade de análise que a linguagem matemática oferece.

Como as músicas seguem um fluxo contínuo de tempo, os grafos com arestas direcionadas, indicando a sequência de execução das notas ao longo do tempo, representam melhor essa característica. Contudo, o não-direcionamento das arestas não causa grande perda de representatividade e pode simplificar muitos aspectos, pois suas matrizes Laplacianas serão simétricas e terão espectro real. Além disso, o ponderamento das arestas nos permitem atribuir características musicais como o ritmo. Por exemplo, (LEWIN, 2007) usou o Sistema de Intervalos Generalizados (GIS) para ponderar as arestas, agregando aspectos do ritmo ao grafo.

Da estrutura dos grafos de cada música, consegue-se extrair algumas matrizes, dentre as quais a matriz Laplaciana é a mais representativa do grafo. Da matriz Laplaciana, (PINTO; TAGLIOLATO, 2008) propôs extrairmos o espectro, isto é, seus autovalores e interpretarmos esse espectro como um "DNA" ou indexador da música que torna possível uma comparação entre músicas. Note que o uso de matrizes facilita a comparação entre músicas assim como a abordagem computacional.

Além dos autovalores, os autovetores também contém informações importantes da respectiva matriz. Os autovetores determinam as direções que são preservadas pela matriz, quando usada como uma transformação linear.

Nossa contribuição está no uso dos autovetores, além dos autovalores, para criar um objeto que represente uma música ou parte de uma música. Esse objeto será um polígono no plano.

Esse trabalho está organizado em 7 capítulos. Na sequência desta introdução apresentamos no Capítulo 2 uma revisão da literatura para contextualizar este trabalho. No Capítulo 3

apresentamos uma síntese da Teoria de Grafos, voltada aos aspectos essenciais para nossa abordagem. O Capítulo 4 apresenta brevemente o que é essencial de Teoria Musical para nossos objetivos. Na sequência, no Capítulo 5 reproduzimos, sob nossa abordagem, a proposta de (PINTO; TAGLIOLATO, 2008). Nossa proposta de usar também autovetores para representar músicas é tratada no Capítulo 6.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

Os principais trabalhos que relacionam grafos e música datam do início dos anos 2000. A seguir, apresentamos as referências que motivam e fundamentam esse trabalho.

O trabalho de Alberto Pinto e Paolo Tagliolato (PINTO; TAGLIOLATO, 2008), intitulado "*A Generalized Graph-Spectral Approach to Melodic Modeling and Retrieval*", reúne a teoria musical (*Pitch Classes*) e a teoria espectral de grafos, com o objetivo de analisar a similaridade entre músicas. Nesse contexto, o trabalho tenta usar grafos para representar as músicas de tal forma que sejam preservadas suas características discriminantes. Além disso, apresenta as bases para um algoritmo que consiga decodificar e computar a similaridade entre fragmentos musicais.

A possibilidade de extrair de grafos, estruturas vetoriais das quais, usando métodos de decomposição, projeção e escalonamento, podemos determinar características discriminantes, foi tratada no artigo "*Pattern Vectors from Algebraic Graph Theory*" (WILSON; HANCOCK; LUO, 2005) de Richard Wilson, Edwin R. Hancock e Bin Luo.

A utilização da linguagem XML para representação de músicas e uma nova abordagem através da Teoria de Grafos para a representação de melodias são a proposta de Alberto Pinto e Goffredo Haus no artigo (PINTO; HAUS, 2007) "*A Novel XML Music Information Retrieval Method Using Graph Invariants*". A linguagem XML é um meio eficiente para o armazenamento, interpretação e a modelagem matemática das músicas. Pinto e Haus propõem, além de uma interpretação de áudios e partituras musicais via XML, uma estruturação das melodias via espectro de grafos para uma comparação entre essas.

A representação da harmonia musical através de grafos é um dos temas abordados por Frank Scherbaum, Simha Arom e Frank Kane no artigo (SCHERBAUM; AROM; KANE, ) "*A Graph-Theoretical Approach to the Harmonic Analysis of Georgian Vocal Polyphonic Music*". Um dos principais pontos do trabalho é a representação da progressão de acordes através de grafos direcionados. Nesse trabalho, os vértices dos grafos representam os graus dos acordes, enquanto as arestas a transição dos acordes. Além disso, é utilizado o Mapeamento Sammon para organizar, relacionar e quantificar as músicas selecionadas da base de dados.

O livro "*Generalised Musical Intervals and Transformations*" (LEWIN, 2007), também conhecido como GMT, de David Lewin, apresenta uma abordagem matemática para a análise musical que utiliza a teoria de grupos para modelar o denominado "espaço musical", como por exemplo o intervalo entre duas classes de notas musicais. O trabalho de David Lewin foi um dos mais influentes do século XX no ramo de teoria musical.

Aplicar Sistemas de Intervalos Generalizados, que por sua vez está apoiado em teoria de grupos, é a abordagem de Minseon Song no artigo intitulado "*Generalized Interval System and Its Applications*", (SONG, 2014). A autora apresenta seus estudos tanto com música tonal quanto atonal. Além disso, Song interpreta técnicas e características musicais como transposição, inversão e ritmo em função do Sistema de Intervalos Generalizados (GIS).

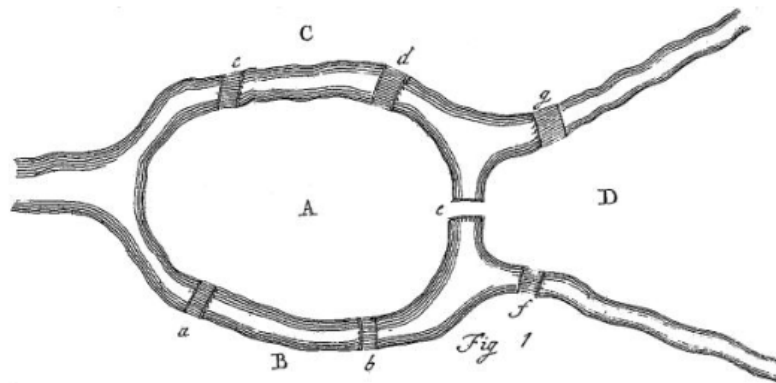
Estudar a música com um âmbito matemático através das séries de Fourier é o tema abordado por Willsander de Jesus e Gilcélia Regiane de Souza no artigo "Identificação e Classificação de Acordes Musicais aplicando a Transformada de Fourier", (JESUS; SOUZA, 2020). Os autores apresentam uma explicação para elementos presentes nas músicas, como os acordes, através conhecimentos matemáticos. Além disso, apresentam um algoritmo para a identificação dessas frequências para a classificação dos acordes.

Novos artigos tem tratado esse tema e, portanto, o assunto continua vivo e evoluindo. Dessa forma, os estudos focados em representação e extração de dados de grafos, sobretudo musicais, tem uma base consolidada, que dá grande margem para novos estudos.

### 3 TEORIA DE GRAFOS

A Teoria de Grafos tem origem incerta, sendo motivada principalmente por problemas do tipo "quebra-cabeças"(BIGGS; LLOYD; WILSON, 1986). No ano de 1735, o famoso matemático Leonhard Euler publicou o artigo intitulado "*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*", contendo o que seria a primeira formalização do que conhecemos por Teoria de Grafos. Nessa publicação, Euler apresentou uma solução para o problema das pontes de *Köningsberg*. O problema consistia em atravessar todas as sete pontes da cidade uma única vez. Euler mostrou que o desafio era impossível, utilizando argumentos baseados em grafos. O primeiro uso da palavra grafo, como apresentado nesse capítulo, foi feito pelo matemático inglês James Joseph Sylvester, no livro "*American Journal of Mathematics: Pure and Applied*", publicado em 1878, (SYLVESTER, 1878).

**Figura 1 – Respresentação das pontes de *Köningsberg***



**Fonte: Frederico José Andries Lopes e Plínio Zornoff Táboas.**

Um grafo  $G$  pode ser descrito como um par de conjuntos  $(V(G), E(G))$ , sendo  $V(G)$  um conjunto de vértices,  $E(G)$  um conjunto de arestas e  $\psi_G$  uma função de incidência que associa cada aresta de  $G$  a um par de vértices, não necessariamente distintos, de  $G$ . Os grafos são comumente utilizados para descrever relações entre elementos de um conjunto. Muitas situações reais e cotidianas podem ser descritas como tais relações (BONDY; MURTY, 2008), por exemplo, relações entre pessoas de um grupo ou entre moléculas de um composto químico.

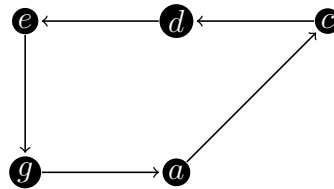
Os grafos possuem características próprias de acordo com sua construção, como quantidade de arestas e vértices, ordem e etc e também características inerentes ao fenômeno que eles visam descrever. A primeira particularidade é o conceito de incidência. Uma aresta é dita incidente sobre  $(a,b)$  se liga os vértices  $a$  e  $b$ . Vértices adjacentes ou vizinhos são aqueles que possuem uma mesma aresta em comum, ou que uma mesma aresta incide sobre eles. Já arestas adjacentes são aquelas que possuem um vértice em comum. O grau de um grafo  $G(V,E)$ ,  $|G|$ , é a quantidade de vértices que este tem. O grau de um vértice  $v$ , nomeado  $d(v)$ , representa quantos vértices são adjacentes a esse, ou seja, quantas arestas incidem no vértice. Um grafo  $G(V,E)$  é dito regular quando possui todos os vértices com o mesmo grau, ou que satisfaz

$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ , em que  $|E|$  é a cardinalidade do conjunto  $E$ . Um laço, também chamado de *loop*, é uma aresta que liga um vértice a ele próprio. Um caminho entre dois vértices  $(u, v)$  é a sequência de arestas tais que a primeira aresta parte de  $u$  e a última aresta incide em  $v$ . Seja um caminho qualquer com  $n$  vértices, então teremos um caminho de comprimento igual a  $n - 1$  arestas.

Existem diferentes classificações para os grafos. Primeiro caracterizamos o **grafo vazio** como aquele que tem  $V = \emptyset$  ou  $E = \emptyset$ . Seja  $H$  um grafo qualquer,  $H$  é dito completo quando tiver todos os vértices adjacentes, ou seja,  $\frac{n(n-1)}{2}$  arestas, onde  $n = |V|$ . Um **grafo orientado**, também chamado de **dígrafo**, é aquele que a ordem dos vértices no par que descreve a aresta indica o sentido da aresta, por exemplo a aresta  $(x, y)$  tem sentido do vértice  $x$  para o vértice  $y$ . Um grafo orientado **simétrico** é aquele que para toda a aresta  $(a, b)$  existe a aresta  $(b, a)$ . **Grafos ponderados** são aqueles a que são atribuídos pesos as arestas, com o objetivo de quantificar a relação entre os vértices. Um **grafo conexo** (ABREU *et al.*, 2014) é aquele que possui um caminho ligando qualquer par de vértices, o contrário é definido como **grafo desconexo**.

**Exemplo 1.** O grafo  $H=(V(H), E(H))$ , com  $V(H) = \{c, d, e, g, a\}$ ,  $E(H) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ ,  $\psi_H(e_1) = \{cd\}$ ,  $\psi_H(e_2) = \{de\}$ ,  $\psi_H(e_3) = \{eg\}$ ,  $\psi_H(e_4) = \{ga\}$ ,  $\psi_H(e_5) = \{ac\}$ , pode ser representado pela Figura 2.

Figura 2 – Representação gráfica do grafo  $H$ .



Fonte: Autoria Própria.

As representações gráficas dos grafos ajudam muito na compreensão destes, porém não são a melhor forma de tratá-los matematicamente e computacionalmente. A forma mais eficiente de tratar os grafos é através de matrizes associadas a sua estrutura, (BONDY; MURTY, 2008).

A primeira e mais importante matriz associada a um grafo é a de adjacência,  $A$ . Essa matriz é quadrada e de tamanho igual a ordem do grafo, com entradas  $A_{ij}$  sendo o número de arestas orientadas do vértice  $i$  para o  $j$  no caso de grafo orientado e o número de arestas entre os vértices  $i$  e  $j$  caso o grafo não seja orientado. Outra matriz importante para a representação dos grafos é a Matriz de Graus,  $D$ . Nesta, os elementos  $D_{ii}$  são o número de arestas que saem do vértice  $i$  no caso de grafo orientado e  $D_{ii}$  é igual o número de arestas conectadas ao vértice  $i$  no caso de grafo não orientado. Os elementos  $D_{ij}$  são nulos se  $i \neq j$ . Portanto, em  $D$  teremos valores não nulos apenas na diagonal principal. Dessas duas matrizes, iremos obter a Matriz Laplaciana ( $L$ ), subtraindo  $A$  de  $D$ , portanto  $L = D - A$ . Veja abaixo as matrizes  $A$ ,  $D$  e  $L$  referentes ao grafo do Exemplo 1.



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## Teoria Espectral de Grafos

A Teoria Espectral de Grafos é a área que estuda características de um grafo através das matrizes associadas a ele. Chamamos de **autovalores e autovetores de um grafo** aos autovalores e autovetores de sua matriz laplaciana.

**Teorema 1.** *Todo grafo é determinado por seus autovalores e por uma base de autovetores correspondentes, (CVETKOVIC; ROWLINSON; SIMIC, 2004).*

*Demonstração.* Dado um grafo  $G$ , com  $n$  vértices e autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  e autovetores linearmente independentes  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , ou seja formam uma base. Seja  $V = (v_1 | v_2 | \dots | v_n)$  e  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , então:

$$L = VDV^{-1}.$$

□

A partir do momento que calculamos as matrizes de um grafo, podemos obter seu espectro, que consiste dos autovalores de  $L$ . O polinômio característico  $P_G(\lambda)$  da matriz  $L(G)$  é  $\det(\lambda I - L(G)) = 0$ , sendo  $\lambda$  autovalor de  $L(G)$  e uma raiz de  $P_G$ . Vamos supor que o espectro de  $L(G)$  está ordenado tal que  $\lambda_1 > \dots > \lambda_k, k \leq n$ , em que os  $\lambda_i$  são os autovalores distintos de  $L(G)$ . O espectro de  $L(G)$  pode ser representado através de uma matriz de duas linhas, sendo a primeira linha dedicada aos autovalores e a segunda à multiplicidade algébrica ( $m_a \lambda_n$ ) destes, (JESUS, 2018).

$$\text{Espectro}(L(G)) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ m_a \lambda_1 & \dots & m_a \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Existem algumas propriedades que são extraídas do espectro da Laplaciana que são importantes, principalmente para caracterizar suas propriedades estruturais. Por exemplo, o segundo menor autovalor da Laplaciana de  $G$ ,  $\lambda_{n-1}$ , é chamado de conectividade algébrica do grafo  $G$ , denotado por  $a(G)$ , e representa importantes invariantes dos grafos tais como o diâmetro, ou seja, o maior número de arestas entre dois vértices, (ABREU *et al.*, 2014). Além disso, o maior autovalor de  $G$  é chamado de índice de  $G$ .

No caso em que o grafo não é orientado a matriz laplaciana,  $L$ , é simétrica e seu espectro,  $\{\lambda_i\}$ , associado aos respectivos autovetores,  $e_i$ , permite reescrever  $L$  como

$$L = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i e_i^T.$$

Outra possibilidade é reescrever  $L$  usando a fatoração de Cholesky

$$L = \Phi \Phi^T,$$

com  $\Phi = (\sqrt{\lambda_1}e_1, \sqrt{\lambda_2}e_2, \dots, \sqrt{\lambda_n}e_n)$ , (WILSON; HANCOCK; LUO, 2005).

Dado um grafo  $G$  regular, ou seja, aquele que todos os vértices tem mesmo grau, sendo esse igual a  $r$ , então:

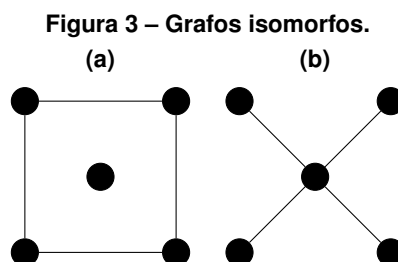
- $r$  é um autovalor de  $G$ ;
- $G$  é um grafo conexo se, e somente se,  $r$  tem multiplicidade 1;
- para todos os autovalores  $\lambda$  de  $G$  temos que  $|\lambda| \leq r$ .

### Coespectralidade de Grafos

Grafos são ditos co-espectrais se possuem os mesmos autovalores. A co-espectralidade de grafos é importante para este trabalho, pois iremos comparar grafos através dos espectros de suas matrizes. Problemas envolvendo co-espectralidade de grafos são muito utilizados na área computacional, sendo úteis, por exemplo, para o reconhecimento de padrões, (ABREU *et al.*, 2014).

Para compararmos dois grafos  $\mathcal{G}_1 = (\mathcal{V}_1, E_1)$  e  $\mathcal{G}_2 = (\mathcal{V}_2, E_2)$ , precisamos mapear a correspondência entre os vértices de  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$ , (WILSON; HANCOCK; LUO, 2005).

Se os grafos são isomorfos, então existe uma matriz de permutação  $P$  que satisfaz  $L_1 = PL_2P^T$ , sendo  $L_1$  e  $L_2$  as matrizes laplacianas dos grafos. Dois grafos isomorfos tem o mesmo espectro, porém a recíproca não é verdadeiro. Veja na Figura 3 um exemplo de dois grafos que são isomorfos porém com estruturas geométricas diferentes.



Fonte: Autoria Própria.

A norma de Frobenius  $\|L_1 - PL_2P^T\|$  pode ser aplicada entre duas matrizes para medir o grau de similaridade entre dois grafos.

O isomorfismo de grafos pode ser um problema para nosso trabalho, visto que poderíamos ter grafos de músicas diferentes, porém com mesmo espectro, o que mostraria inconsistência dos métodos empregados. Porém, algumas artigos tratam a co-espectralidade de grafos, como o "*A Study of Graph Spectra for Comparing Graphs*", (ZHU; WILSON, 2005), que mostra que a matriz Laplaciana sem sinal ocasiona apenas 3,8% de co-espectralidade em grafos não orientados com 11 vértices. Esse resultado foi obtido através de um algoritmo recursivo que gera árvores de grafos e está melhor apresentado no artigo "*The Advantages of Forward Thinking in Generating Rooted and Free Trees*", (LI; RUSKEY, 1999). Esse resultado é de grande interesse, visto que iremos trabalhar com grafos orientados e não orientados de exatamente 12 vértices.

## 4 TEORIA MUSICAL

Uma das áreas utilizadas como base para esse trabalho é a Teoria Musical. Portanto, é de suma importância uma breve introdução aos termos utilizados no mundo da música para aqueles que não estão familiarizados. A Teoria Musical é uma linguagem utilizada pela música ocidental (HARNUM, 2001), sendo ela a ferramenta que os músicos usam para ler e interpretar a música, independentemente de qual instrumento usam.

O desenvolvimento da música ocidental nos leva a Grécia antiga, onde a música era associada a cerimônias religiosas. Além disso, curiosamente, a teoria musical grega era também chamada de harmonia, sendo o manuscrito "*Elementos de Harmonia*" de Aristóxeno (360A.C – 300A.C) o mais antigo a tratar de questões como notas, intervalos, sistemas de escalas, tons, modulação e composição melódica (GROUT; PALISCA, 2001). O filósofo Pitágoras, por exemplo, não dissociava o ensinamento da música e da Aritmética, (GROUT; PALISCA, 2001). Porém, a evolução da música ocorreu de fato na Idade Média com os monges da Igreja Católica, destacando-se o monge italiano Guido de Arezzo (992D.C-1050D.C) que fez uma série de revoluções na música. Dentre seus marcos históricos, o que talvez seja mais relevante foi a nomeação das notas musicais para dó = C, ré = D, mi = E, fá = F, sol = G, lá = A, si = B.

Uma nota musical é diferenciada de um som qualquer através de sua frequência base. Uma nota lá em sua terceira oitava,  $A_3$ , corresponde a vibração de  $440Hz$  (pela ISO 16:1975, essa afinação padrão corresponde a nota A na clave de sol). Para cada uma das 12 notas musicais é dado um nome, sendo eles  $\{A, A\sharp, B, C, C\sharp, D, D\sharp, E, F, F\sharp, G, G\sharp\}$ , onde " $\sharp$ " são os sustenidos ( $A\sharp$  = lá sustenido, por exemplo). Os símbolos  $\flat$  e  $\natural$  representam os chamados "acidentes", onde o primeiro símbolo, nomeado **bemol**, indica que uma nota está meio tom abaixo e o segundo símbolo, **sustenido**, indica que a nota está meio tom acima.

Neste parágrafo são explicados alguns elementos fundamentais para o entendimento da teoria musical. A começar pela **Oitava**, que é o intervalo entre notas que corresponde à metade ou o dobro de sua frequência. Por exemplo:  $A_3 = 220Hz$  e  $A_4 = 440Hz$ . Pode-se dizer que a oitava está associada com uma razão numérica 2 : 1, (STEWART, 2013). A **Melodia** é uma sequência linear e principal que dá sentido a composição. Basicamente aquilo que conseguimos assobiar é o que classificamos como melodia. A **Harmonia** é a combinação de notas e sons tocados simultaneamente afim de criar sons agradáveis ou notáveis aos ouvidos. O **Intervalo** é a relação entre duas notas adjacentes que indica a distância entre estas, (NETTLES, 1987). A **Inversão** se refere a mudança da direção do intervalo entre as notas, onde a nota mais grave se torna mais aguda e vice-versa, (MARCONDES, 2020). Já a **Transposição** se refere a escrever uma mesma sequência melódica ou de acordes em um outro tom. O **Ritmo** pode ser entendido como batida, pulso. "movimento ordenado dos sons no tempo", (CARDOSO; MASCARENHAS, 1973). O **Timbre** é o estímulo multidimensional que nos permite distinguir sons de mesma frequência (ERICKSON, 1975).

A música pode ser interpretada de diversas maneiras, mas na música ocidental as principais notações musicais são as partituras, cifras e tablaturas. As **partituras** são formadas pela pauta, ou pentagrama, consistindo em um conjunto de 5 linhas horizontais com quatro espaços. A esquerda da partitura está fixada a clave, que orienta qual a altura das notas a serem tocadas na sequência.

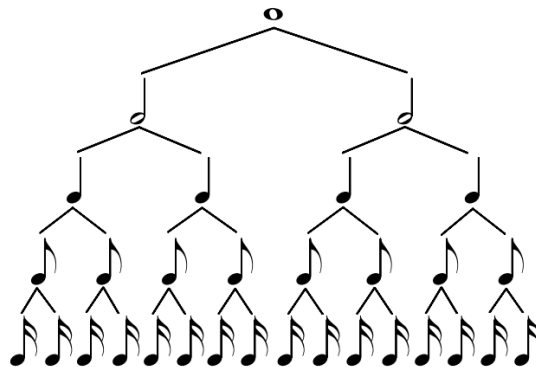
Figura 4 – Exemplo de partitura com clave de sol.



Fonte: Cardoso e Mascarenhas (1973)

As figuras de notas representam as durações, ou seja, o tempo de duração de cada nota. Em ordem decrescente: semibreve, mínima, semínima, colcheia, semicolcheia, fusa, semifusa.

Figura 5 – Notas agrupadas de forma hierárquica de duração.



Fonte: Pilhofer e Day (2007)

Outro elemento importante das partituras são os **compassos** (ou assinaturas de tempo), representados por frações e fixados no começo da partitura. O numerador dessa fração representa a quantidade de batidas para cada compasso. Já o denominador representa qual tipo de nota está baseada a batida. Por exemplo, se a assinatura de tempo é  $\frac{3}{4}$ , então cada compasso terá 3 batidas e cada batida equivale a uma semínima (em inglês, *a quarter note*).

## Intervalos Musicais

Os **intervalos**, na Teoria Musical, correspondem a distância entre as notas. Essa medida é feita através de tons ou semi-tons. Por exemplo, a distância entre duas teclas brancas no piano é de 1 tom, com exceção dos intervalos mi (*E*) e fá (*F*), sí (*B*) e dó (*C*). Já a distância entre uma tecla branca e uma tecla preta - adjacentes - é de um semi-tom. Existem os intervalos harmônicos e os melódicos. O primeiro tipo é caracterizado por duas notas sendo tocadas

simultaneamente. Já o segundo, por notas tocadas consecutivamente. Além disso, podemos ter intervalos ascendentes, aqueles que a primeira nota tocada é mais grave que a segunda, e descendentes, quando a primeira nota é mais aguda que a segunda. Abaixo está uma tabela com os principais intervalos melódicos. A nota de referência utilizada na Tabela 1 é dó ( $C$ ).

**Tabela 1 – Classificação de intervalos melódicos.**

Classificação dos intervalos	Nota	Distância em Tons	Distância em Semi-Tons
Fundamental	$C$	0	0
Segunda Menor	$C\sharp$	$\frac{1}{2}$	1
Segunda Maior	$D$	1	2
Terça Menor	$D\sharp$	$1\frac{1}{2}$	3
Terça Maior	$E$	2	4
Quarta Justa	$F$	$2\frac{1}{2}$	5
Quarta aumentada	$F\sharp$	$3\frac{1}{2}$	6
Quinta Justa	$G$	3	7
Sexta Menor	$G\sharp$	4	8
Sexta Maior	$A$	$4\frac{1}{2}$	9
Sétima Menor	$A\sharp$	5	10
Sétima Maior	$B$	$5\frac{1}{2}$	11

Fonte: Autoria Própria.

Através do conjunto de classes de notas, podemos representar os intervalos com a função nomeada de **int**, onde **int**:  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ . Dados duas notas  $s$  e  $t$ , **int**( $s,t$ ) =  $t - s$ , (CAMPOS, 2014). Por exemplo, o intervalo entre as notas mi ( $E$ ) e sol ( $G$ ) através da função **int** é:

$$\mathbf{int}(E,G) = \mathbf{int}(4,7) = 7 - 4 = 3. \text{ }^1$$

### Teoria de Conjuntos e Música.

A Teoria de Conjuntos é utilizada principalmente na **música atonal**, que é aquela que não têm uma tonalidade central, para análise e comparação de estruturas musicais, (SCHUIJER, 2008). É nomeado  $S$  o espaço musical das 12 notas musicais da escala cromática. Para cada elemento de  $S$  é relacionado um número inteiro, iniciando-se, por exemplo, com a nota dó( $C$ )= 0, dó sustenido ( $C\sharp$ ) = 1.

**Tabela 2 – Notas e números inteiros.**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nota	Dó	Dó $\sharp$	Ré	Ré $\sharp$	Mi	Fá	Fá $\sharp$	Sol	Sol $\sharp$	Lá	Lá $\sharp$	Sí

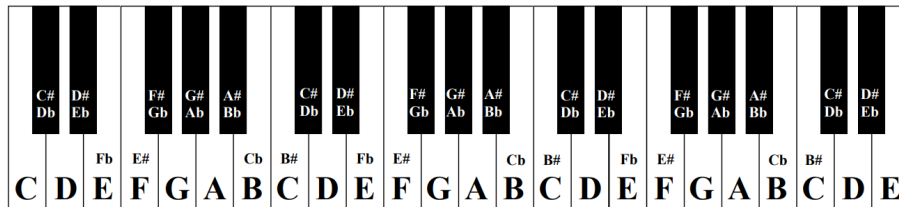
Fonte: Autoria Própria.

Um dos elementos mais importantes para entendermos a relação de equivalência na música são as oitavas. Notas que estão a uma oitava de distância são tidas como equivalentes.

<sup>1</sup> Podemos entender também que **int**( $E,G$ ) equivale a 3 semi-tons.

Dessa forma, não nos preocuparemos mais com as oitavas e sim com a posição das notas, onde  $C_3$  (dó em sua terceira oitava), equivale a  $C_4$  (dó em sua quarta oitava) em  $S$ , por exemplo. A forma mais simples de se observar as oitavas é através de um piano, como o da Figura 6. Cada uma das teclas do piano está afinada nas frequências de cada nota musical. A distância entre duas notas que estão em uma mesma oitava é de 12 teclas.

Figura 6 – Teclas de um piano nomeadas.



Fonte: <https://www.onlinepianocoach.com/support-files/printable-piano-keyboard-diagram2.pdf>

Seja  $n$  uma nota qualquer de  $S$ ,  $n + 1$  representa a nota meio tom acima de  $n$  e  $n - 1$ , meio tom abaixo, (CAMPOS, 2014). A Figura 7 mostra a relação de  $S$  com  $\mathbb{Z}$ . Às oitavas é dado um mesmo valor, visto que elas tem uma posição fixa, logo elas são ditas equivalentes para todas as 12 tonalidades tanto acima quanto abaixo de uma nota.

Uma nota com o número de tom " $a$ " representa uma classe de notas que consiste em todas as notas equivalentes a  $a$ , e é denotada como " $a \bmod 12$ ". A seguir, esta expressão será entendida como a atribuição  $a$  do seu resto módulo 12. Por exemplo,  $E^{\flat 4}$  é denotado  $3 \bmod 12 = 3$ ,  $E^{\flat 5}$  é denotado  $15 \bmod 12 = 3$ , e  $E^{\flat 2}$  é denotado  $-21 \bmod 12 = 3$ , (SCHUIJER, 2008).

A relação entre os elementos de  $S$  pode ser definida como a congruência módulo 12 (SCHUIJER, 2008). Seja  $R$  uma relação de equivalência sobre o conjunto  $S$ , então:

- (i) se  $s \in S$  então  $s = s$  (Reflexiva);
- (ii) se  $s, t \in S$  e  $sRt$  então  $tRs$  (Simétrica);
- (iii) se  $s, t, u \in S$  e  $sRt$  e  $tRu$ , então  $sRu$  (Transitiva).

A relação de congruência módulo  $m$  (com  $m \in \mathbb{Z}$  e  $m > 1$ ) sobre  $\mathbb{Z}$  é uma relação de equivalência (DOMINGUES; IEZZI, 2003), sendo para os elementos de  $S$ :

$$(\forall s)(s \in \mathbb{Z} \Rightarrow s \equiv s \pmod{12});$$

$$(\forall s, t)(s \equiv t \pmod{12} \Rightarrow t \equiv s \pmod{12})$$

$$(\forall s, t, u)(s \equiv t \pmod{12} \text{ e } t \equiv u \pmod{12} \Rightarrow s \equiv u \pmod{12})$$

Figura 7 – Conjunto de classes de notas.



Fonte: (SCHUIJER, 2008)

### Um breve estudo sobre os Acordes

Qualquer som que escutamos é provindo de uma onda mecânica longitudinal, propagada por um meio, normalmente pelo ar, (YOUNG; FREEDMAN; FORD, 2011). Essas ondas possuem 5 características fundamentais, sendo elas: amplitude, frequência, período, velocidade e comprimento. Os seres humanos são capazes de ouvir ondas sonoras de frequências que vão de  $20Hz$  a  $20.000Hz$ . Porém, algumas destas são mais perceptíveis ao ouvido humano, dentre eles estão os sons musicais, esses que tem formas de onda bem mais complexas do que simples senoides. O que diferencia sons de mesma frequência é uma propriedade chamada de timbre, como quando podemos distinguir uma mesma nota tocada em um violão e depois no piano, por exemplo.

As músicas são feitas através de instrumentos musicais, estes que são separados em 3 categorias diferentes. Os primeiros sendo os de sopro (flauta, clarinete), com o som gerado por colunas de ar vibrantes. Existem os de cordas (violino, guitarra), onde a vibração das cordas é passada para uma caixa de ressonância e depois para o ar. E por último, os de percussão (bateria, pandeiro), onde a vibração da superfície bidimensional gera o som. O fato é que podemos facilmente distinguir qual instrumento emite cada som, mesmo quando vários instrumentos tocam ao mesmo tempo, como é o caso das orquestras. Esse fenômeno pode ser modelado através das Séries de Fourier, que decompõem funções periódicas em uma soma entre senos e cossenos.

Dada uma amplitude ( $A$ ) e uma frequência ( $F$ ), podemos representar uma nota musical através da função trigonométrica:

$$f(t) = A \sin(2\pi Ft).$$

Um dos obstáculos deste trabalho é análise da melodia em conjunto com a harmonia musical. Isto é, quando duas ou mais notas são tocadas ao mesmo tempo, fisicamente essas ondas sonoras se somam em um meio físico como o ar, por exemplo. Essa combinação de notas musicais tocadas ao mesmo constitui o que chamamos de harmonia. Uma das bases da harmonia são os **acordes**, que constituem num conjunto de três notas diferentes tocadas



simultaneamente. Nosso cérebro consegue distinguir essas diferentes frequências sonoras. Por exemplo, quando tocamos um acorde de dó maior ( $C$ ) em um piano, estamos pressionando 3 teclas brancas ao mesmo tempo que correspondem as notas dó, ou tônica, mí ( $E$ ), que é a terça maior e sol ( $G$ ), que corresponde a quinta justa. O artigo intitulado "Identificação e Classificação de Acorde Musicais aplicando a Transformada de Fourier", (JESUS; SOUZA, 2020), define um acorde musical (ACM) como:

$$ACM(t) = \sum_{i=1}^n A_i \sin(2\pi F_i t).$$

## 5 INDEXAÇÃO MUSICAL POR GRAFOS

A representação de músicas através de grafos está fundamentada e consolidada no trabalho de Alberto Pinto e Paolo Tagliolato, (PINTO; TAGLIOLATO, 2008). Portanto, esse trabalho segue uma linha teórica baseada principalmente nos estudos feitos por esses autores.

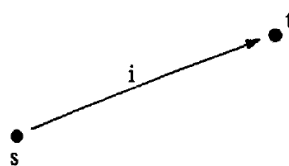
Em um grafo representando uma melodia, os vértices pertencem a um conjunto  $S = \{A, A\sharp, B, C, C\sharp, D, D\sharp, E, F, F\sharp, G, G\sharp\}$  - 12 notas musicais - e as arestas representam o intervalo entre duas notas consecutivas.

Dado o grafo orientado  $G$  de uma sequência melódica  $M$  de tamanho  $m = |M|$ , sendo  $V = \mathbb{Z}_{12}$  o espaço métrico das notas musicais. Então,  $V(G)$  descreverá o espaço métrico, ou seja, os objetos invariantes de todas as transformações musicais, que neste caso, são as notas musicais. Para representar o grafo  $G$  de uma melodia  $M$ , será utilizado a matriz de Adjacência ( $A$ ). Essa matriz é quadrada e de tamanho igual a ordem do grafo, com  $(i, j)$  entradas orientadas do vértice  $i$  para o  $j$ . Outra matriz importante para a representação dos grafos é a Matriz de Graus ( $D$ ). Nesta, os elementos de  $D$  são o número de arestas que saem de cada vértice. Portanto, em  $D$  teremos valores apenas na diagonal principal. Tomadas essas duas matrizes, iremos obter a Matriz Laplaciana ( $L$ ), subtraindo  $D$  e  $A$ , portanto  $L = D - A$ . Para caracterizarmos um grafo e, conseqüentemente, a música associada a ele, utilizaremos o conjunto de autovalores da matriz Laplaciana do grafo, isto é, o espectro dessa matriz.

Para ponderar arestas, será utilizado o Sistema de Intervalos Generalizados  $\mathcal{GIS}$  de David Lewin, que é composto de estruturas algébricas. Com ele, é possível representar não somente conjuntos de classes das notas musicais mas também elementos musicais como o ritmo e timbre através de uma abordagem transformacional. A intuição de intervalos é apresentada geometricamente por Lewin (2007) como na Figura 8, onde  $s$  e  $t$  são elementos de um espaço musical, e a aresta  $i$  representa o intervalo de  $s$  para  $t$ , ou seja,  $\mathbf{int}(s, t)$ . Em resumo, para obtermos um  $\mathcal{GIS}$ , precisamos definir um espaço  $S$ , composto por um conjunto de elementos, um grupo de intervalos,  $\mathbf{IVLS}$ , e uma função  $\mathbf{int}$  de  $S \times S \rightarrow \mathbf{IVLS}$  (OCKELFORD, 2016), tal que:

- Para todo  $r, s, t \in S$ ,  $\mathbf{int}(r, s)\mathbf{int}(s, t) = \mathbf{int}(r, t)$ ;
- Para todo  $s \in S$  e para todo  $i \in \mathbf{IVLS}$ , existe um único  $t \in S$  tal que satisfaz a equação  $\mathbf{int}(s, t) = i$ . (LEWIN, 2007).

Figura 8 – Representação de um intervalo para David Lewin



Fonte: Lewin (2007)

Através da interseção da teoria de conjuntos, da teoria de tons musicais (*Pitch Classes*) e o *GIS* temos uma forma concisa de criação de grafos musicais, (PINTO; TAGLIOLATO, 2008). Podemos ordenar notas musicais dispostas em torno de um "relógio", onde cada nota fica ordenada no lugar das "horas". Dessa forma,  $\mathbf{int}(s,t)$  será o número de "minutos" entre o "minuto"  $s$  para o "minuto"  $t$ . Por exemplo:  $\mathbf{int}(C,C) = 0$ ,  $\mathbf{int}(C,E) = 4$ ,  $\mathbf{int}(E,G) = 3$ , etc. Perceba que esses valores equivalem aos semitons. Além disso,  $(S,(\mathbb{Z}_{12,+}),\mathbf{int})$  é um *GIS*, esse que é nomeado  $\mathcal{PC}$ .

Para descrevermos o ritmo de uma melodia através do *GIS*, definimos  $S$  como sendo a sucessão de tempos equidistantes. O primeiro *GIS* para a definição de ritmo é nomeado "*Tactus*", onde:

- $\mathbf{IVLS} = (\mathbb{Z},+)$ ;
- $\mathbf{int}: (s,t) \mapsto t - s$ , número de unidades temporais entre  $s$  e  $t$ .

É nomeado como  $\mathcal{O}_{ns}$  o seguinte *GIS*:

- $\mathbf{IVLS} = (\mathbb{R},+)$ ;
- $\mathbf{int}: (s,t) \mapsto t - s$ .

Outro *GIS*, nomeado  $\mathcal{D}_{ur}$ , é caracterizado como a média entre o tempo de duração de duas notas consecutivas, ou seja:

- $S = \{\mathbb{Q}, \mathbf{IVLS}\} = (\mathbb{Q}^*, \cdot)$ ;
- $\mathbf{int}(x,y) \mapsto \frac{y}{x}$ .

Dadas as definições de *GIS*, é possível fazer produtos entre  $\mathcal{PC}$  e os *GIS* dos ritmos. Será nomeado  $\mu_{pc}$  a sequência de notas da melodia,  $\mu_{O_{ns}}$  a sequência de instantes em que as notas da melodia são tocadas e  $\mu_{D_{ur}}$  a sequência de tempos de duração da execução de cada nota. Para simplificar a notação, nomeamos  $\mathcal{O}_{cc}$  o conjunto que marca as posições em que duas notas ocorrem em sequência. Dado duas classes musicais  $pc_1$  e  $pc_2$ , podemos definir  $\mathcal{O}_{cc}(pc_1,pc_2) = \{n \in \mathbb{N} \mid \mu_{pc}(n) = pc_1 \text{ e } \mu_{pc}(n+1) = pc_2\}$ , com  $\mathcal{O}_{cc}$  sendo o conjunto de classes das notas, ou seja, a posição em relação ao  $\mathcal{PC}$ . Além disso, são definidas as funções intervalo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{int}_{\mathcal{O}_{cc}}(\mu_{\mathcal{O}_{cc}}(n),\mu_{\mathcal{O}_{cc}}(m)) &= m - n; \\ \mathbf{int}_{\mathcal{O}_{ns}}(\mu_{\mathcal{O}_{ns}}(n),\mu_{\mathcal{O}_{ns}}(m)) &= \mu_{\mathcal{O}_{ns}}(m) - \mu_{\mathcal{O}_{ns}}(n); \\ \mathbf{int}_{\mathcal{D}_{ur}}(\mu_{\mathcal{D}_{ur}}(n),\mu_{\mathcal{D}_{ur}}(m)) &= \frac{\mu_{\mathcal{D}_{ur}}(m)}{\mu_{\mathcal{D}_{ur}}(n)}. \end{aligned}$$

Definidas as funções de intervalo, podemos definir os pesos das arestas, nomeadas de  $w_{Occ}$ ,  $w_{Ons}$  e  $w_{Dur}$ , sendo eles:

$$\begin{aligned} w_{Occ}(pc_1, pc_2) &= \sum_{n \in Occ(pc_i, pc_j)} \mathbf{int}_{Occ}(\mu_{Occ}(n), \mu_{Occ}(n+1)), \\ w_{Ons}(pc_1, pc_2) &= \sum_{n \in Occ(n_i, n_j)} \mathbf{int}_{Ons}(\mu_{Ons}(n), \mu_{Ons}(n+1)), \\ w_{Dur}(pc_1, pc_2) &= \sum_{n \in Occ(n_i, n_j)} \mathbf{int}_{Dur}(\mu_{Dur}(n), \mu_{Dur}(n+1)). \end{aligned}$$

Veja que  $w_{Occ}$  representa o número de ocorrências da sequência  $\{pc_i, pc_j\}$ . O peso  $w_{Ons}$  representa o produto  $\mathcal{PC} \times Ons$ . Analogamente,  $w_{Dur}$  representa a recorrência da razão entre os objetos de  $Dur$ . Podemos ainda tomar a média aritmética e geométrica dos pesos anteriores, obtemos os seguintes parâmetros <sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} w_{\overline{Ons}}(pc_1, pc_2) &= \frac{\sum_{n \in Occ(pc_i, pc_j)} \mathbf{int}_{Ons}(\mu_{Ons}(n), \mu_{Ons}(n+1))}{\#Occ(pc_1, pc_2)}; \\ w_{\overline{Dur}}(pc_1, pc_2) &= \#Occ(pc_1, pc_2) \sqrt{\prod_{n \in Occ(pc_1, pc_2)} \mathbf{int}_{Dur}(\mu_{Dur}(n), \mu_{Dur}(n+1))} = \#Occ(pc_1, pc_2) \sqrt{w_{Dur}}; \\ w_{Dur+}(pc_1, pc_2) &= \frac{\sum_{n \in Occ(n_i, n_j)} \mathbf{int}_{Dur}(\mu_{Dur}(n), \mu_{Dur}(n+1))}{\#Occ(pc_1, pc_2)} = \frac{w_{Ons}}{\#Occ(pc_1, pc_2)}. \end{aligned}$$

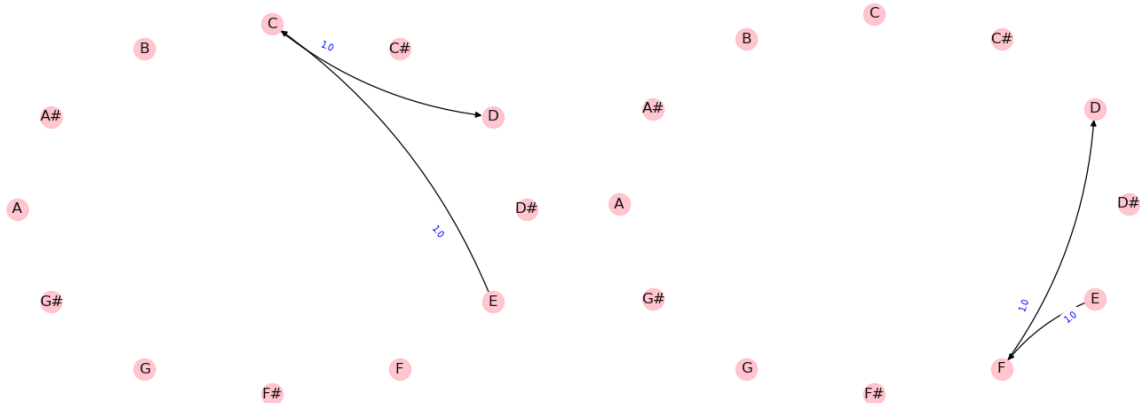
Além do ponderamento utilizando propriedades dos números reais, propõem-se o ponderamento de arestas do grafo de uma melodia através de um número complexo (PINTO; TAGLIOLATO, 2008). Essa abordagem é de extrema importância, visto que quando organizamos autovalores, a posição da classe de notas associada aos vértices é esquecida, o que apesar de ser uma forma de encontrar similaridade através de transformações - como por exemplo a rotação - pode também ser um ponto fraco dependendo da forma de ponderamento, como no caso  $w_{Occ}$ . Tal afirmação é válida, visto que melodias que não apresentam similaridade nenhuma - musicalmente - podem conter grafos iguais e portanto autovalores iguais.

Por exemplo, os espectros dos grafos da Figura 9 são iguais, apesar dos grafos apresentarem percepções musicais diferentes. Para contornar esse problema, é possível uma abordagem utilizando as propriedades dos números complexos. Dados dois pesos  $(w_1, w_2)$ , conseguimos representa-los como um número complexo  $z = w_1 + iw_2$ .

Dessa forma, é possível atribuir dois pesos para uma aresta. Além disso, podemos utilizar desse método para fixar a classe de notas e os intervalos através do peso:  $w_{Ritmo} + iw_{\mathcal{PC}} = w_{Ritmo} + iw_{\mathcal{PC}}$ . Outra forma de ponderar as arestas utilizando um número complexo, mas agora

<sup>1</sup>  $\#Occ(pc_1, pc_2)$  representa a cardinalidade de  $Occ(pc_1, pc_2)$

**Figura 9 – Transformação de grafos musicais**  
**(a) Sequência Melódica 1**                      **(b) Sequência Melódica 2**



Fonte: Fonte: Autoria Própria..

fixando a posição dos vértices é:

$$w_{Ritmo}e^{PC} = w_{Ritmo}e^{\frac{i\pi}{6}wPC}$$

$$w_{Ritmo}e^{PC} = w_{Ritmo}\left(\cos\left(\frac{\pi wPC}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi wPC}{6}\right)\right)$$

Através desses pesos, extraímos matrizes com variáveis complexas, porém com os elementos da diagonal principal  $[A_{ii}] \in \mathbb{R}$ .

### Análise dos espectros de grafos de músicas

Aqui apresentamos alguns experimentos numéricos com o objetivo principal de realizar uma análise e comparação mais aprofundada dos espectros de grafos relacionados a melodias. Além dos métodos apresentados no início desse capítulo, apresentamos uma nova abordagem através da análise dos autovetores relacionados aos grafos.

Para representarmos melodias através dos grafos, iremos seguir a abordagem de (PINTO; TAGLIOLATO, 2008). O primeiro passo para criar um grafo de uma melodia qualquer é verificar o conjunto de notas presentes no trecho a ser estudado. Os vértices são fixados ordenadamente como se estivessem em um relógio, estando nas posições equivalentes as horas. Os vértices estão dispostos em sentido horário, começando com a nota  $C$  na hora 0 (ou 12). A diferença "em horas" entre duas notas representam o intervalo entre as mesmas, isto é, sejam  $x, y$  duas notas quaisquer,  $\mathbf{int}(x, y) = |y - x|$  representa o intervalo de  $x$  para  $y$ .

O primeiro exemplo a ser utilizado será a música "*Jarabe Tapatío*" (conhecida como "*Mexican Hat Dance*"), composta por Jesus Gonzalez Rubio. Foram selecionados 8 com-

passos da composição para fazermos o estudo. O conjunto de notas é composto por  $S = \{A, B, C, C\sharp, D, D\sharp, E, F\sharp, G, G\sharp\}$ . A relação entre o intervalo de notas, nomeado de  $GIS\ PC^2$  é:

$$\begin{aligned} \text{int}(E, D\sharp) &= 11, & \text{int}(C, C\sharp) &= 1, & \text{int}(A, E) &= 7, \\ \text{int}(D\sharp, C\sharp) &= 10, & \text{int}(A, G\sharp) &= 10, & \text{int}(C\sharp, D) &= 1, \\ \text{int}(E, F\sharp) &= 2, & \text{int}(G\sharp, A) &= 1, & \text{int}(B, C\sharp) &= 2, \\ \text{int}(B, D) &= 3, & \text{int}(B, G) &= 8, & \text{int}(B, A) &= 10, \\ \text{int}(F\sharp, G) &= 1, & \text{int}(E, E) &= 0, & \text{int}(F\sharp, B) &= 5. \end{aligned}$$

As durações das notas, representadas por  $\mu_{Dur} = \{1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1\}$ .

Figura 10 – Partitura e Tablatura da Música *Jarabe Tapatio*.

The image shows a musical score and guitar tablature for the piece "Jarabe Tapatio". The score is in 6/8 time with a tempo of 180. It features a melody in the treble clef and a guitar accompaniment in the bass clef. The tablature includes fret numbers and a "vase" marking. The piece is marked "mf".

Fonte: <https://tabs.ultimate-guitar.com/tab/misc-traditional/mexican-hat-dance-guitar-pro-3105929>

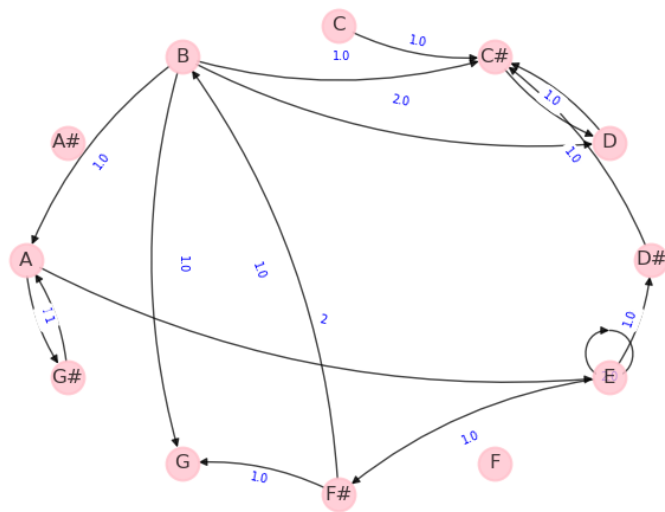
### Comparação espectral de Grafos de Músicas

Para compararmos músicas através de grafos, precisamos primeiramente representar seus respectivos grafos. Para isso, escolhemos duas introduções de músicas que apresentam similaridades melódicas e harmônicas. As duas músicas escolhidas foram "*Old man*", (YOUNG, 1971), e "*If I Ever Get Around To Living*", (MAYER, 2012).

Os grafos utilizados nos exemplos a seguir serão não-direcionados. Serão utilizadas as 30 primeiras notas das duas músicas, sendo estes com arestas ponderadas por  $GIS\ PC$ . Dessa forma, obtemos os seguintes grafos:

<sup>2</sup>  $PC$  é igual ao grupo  $(S, (\mathbb{Z}_{12}, +), \text{int})$

Figura 11 – Grafo da música Jarabe Tapatio.



Fonte: Autoria Própria.

Figura 12 – Partitura e tablatura das introduções de *Old Man* e *If I Ever Get Around In Living*

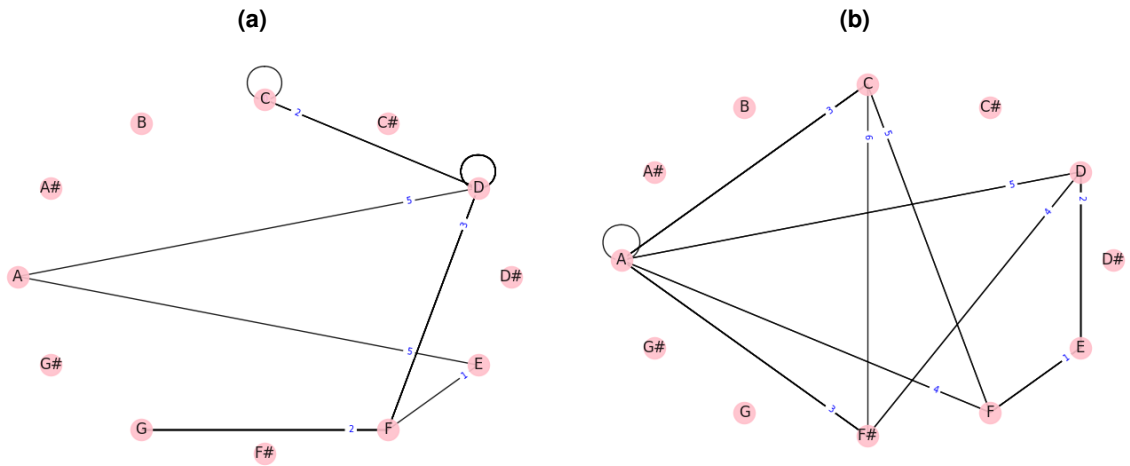
The image displays two musical pieces with their respective guitar parts:

- Top piece:** Standard tuning, tempo  $\downarrow = 138$ . It features an introduction with a melody in the treble clef and a guitar accompaniment in the bass clef. The guitar part includes a P.M. (Percussion Mute) section and various techniques like hammer-ons (H) and pull-offs (P.O.).
- Bottom piece:** Standard tuning, tempo  $\downarrow = 80$ . It features a melody in the treble clef and a guitar accompaniment in the bass clef. The guitar part includes various techniques like vibrato (V), bends (B), and pull-offs (P.O.).

Fonte: Autoria própria.

Dados os grafos (a) e (b), iremos calcular suas respectivas matrizes Laplacianas,  $L_a$  e  $L_b$ . Lembrando que  $L = D - A$ , onde  $D$  é a matriz de graus e  $A$  é a matriz de adjacência dos grafos.

Figura 13 – Representação dos grafos das melodias de *Old Man* e *If I Ever Get Around In Living*.



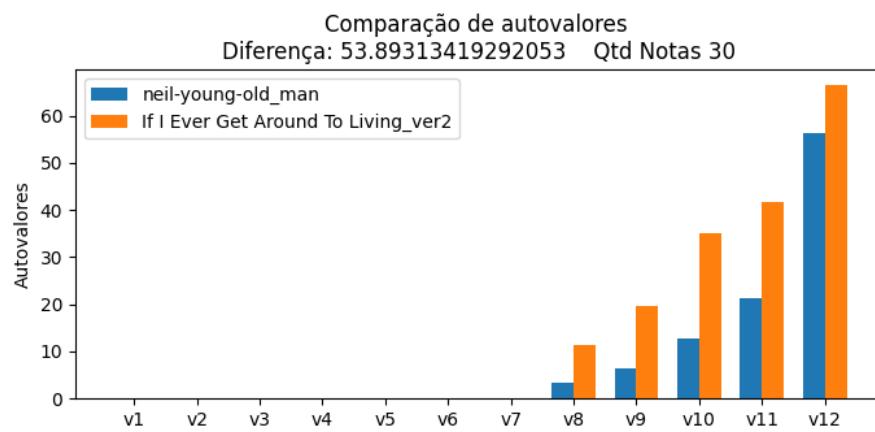
Fonte: Fonte: Autoria Própria.

$$L_a = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 32 & 0 & 0 & -21 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -21 & 0 & -1 & 34 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L_b = \begin{bmatrix} 34 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & -6 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & 0 & -8 & 0 & -8 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 12 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 0 & -4 & 22 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 29 & 0 & 0 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -18 & 0 & -10 & 0 & 0 & -8 & -15 & 0 & 0 & 51 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A partir das matrizes  $L_a$  e  $L_b$ , podemos calcular seus autovalores. O gráfico de barras representado pela Figura 14 compara os autovalores calculados a partir das duas músicas propostas. A diferença apresentada se dá pelo módulo da diferença entre os autovalores.



**Figura 14 – Autovalores de *Old Man* e *If I Ever Get Around In Living*.**



Fonte: Fonte: Autoria Própria.

## 6 PROPOSTA DE USO DE AUTOVETORES PARA A REPRESENTAÇÃO DE MÚSICAS

Os autovetores são tão importantes quanto os autovalores na decomposição espectral de uma matriz. Os autovetores representam as direções que são preservadas quando entendemos a matriz como um operador de uma transformação linear. Porém, os artigos com a temática de análise espectral de grafos relacionados a músicas exploram somente as propriedades dos autovalores.

Portanto, este capítulo tem o objetivo de apresentar uma forma de usar os autovetores da matriz Laplaciana de grafos de músicas para caracterizar as respectivas músicas.

Passamos então a descrição de nossa proposta de caracterização. A forma de obter um grafo a partir de uma música é a mesma apresentada no capítulo 5. Desse grafo obtemos a matriz Laplaciana e seu respectivos autovalores e autovetores. Note que até aqui seguimos o mesmo itinerário apresentado anteriormente.

Cada linha e cada coluna da matriz Laplaciana está associada a uma das 12 notas musicais. Por exemplo, a primeira coluna descreve as relações da nota  $C$  com as demais notas. A segunda coluna tem as adjacência de  $C\sharp$  com as demais notas. Assim na entrada  $(1,2)$ , por exemplo, da matriz Laplaciana está descrita as relações entre as notas  $C$  e  $C\sharp$ .

Portanto, os autovetores da matriz Laplaciana, que representam as direções que são preservadas, podem ser compreendidos como uma combinação linear entre as notas musicais. Dizendo de outra forma, é como se cada nota fosse um vetor canônico do  $\mathbb{R}^{12}$  e os autovetores são combinações lineares desses vetores.

Sob essa ótica, o ideal seria visualizar esses autovetores, pois entenderíamos quais combinações entre notas formaria uma auto direção. Contudo a dimensão 12 nos impede de ter tal visualização.

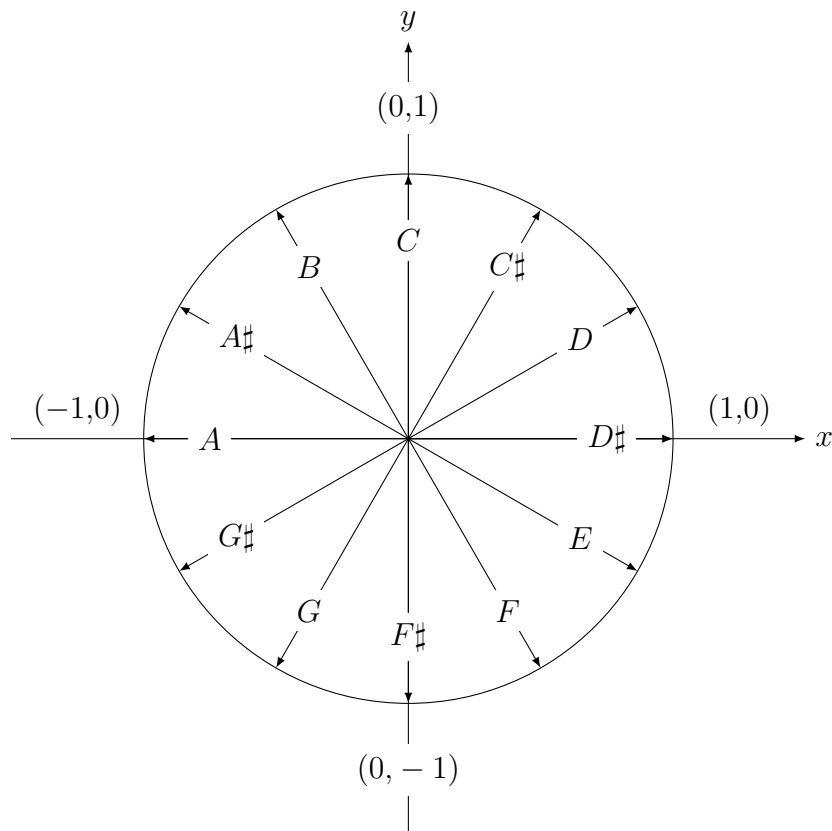
Nossa proposta consiste em "projetar"esses autovetores sobre um conjunto de 12 vetores do plano,  $\mathbb{R}^2$ , em que cada elemento representa uma das notas.

Esses 12 vetores foram escolhidos como se fossem o ponteiro das horas de um relógio. Mais precisamente, tomaremos vetores de norma 1, a nota  $C$  será representada pelo vetor  $(0,1)$  e as demais notas serão representadas pelo vetor  $(0,1)$  rotacionado em sentido horário  $\frac{\pi}{6}$  radianos, ou 30 graus, assim como mostra a Figura 15.

Dessa forma, os vetores do plano que representam as 12 notas são:

$$\begin{array}{lll}
 \vec{C} = (\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}), & \vec{C\sharp} = (\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}), & \vec{D} = (\cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6}) \\
 \vec{D\sharp} = (\cos 0, \sin 0) & \vec{E} = (\cos \frac{-\pi}{6}, \sin \frac{-\pi}{6}) & \vec{F} = (\cos \frac{-\pi}{3}, \sin \frac{-\pi}{3}) \\
 \vec{F\sharp} = (\cos \frac{-\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}) & \vec{G} = (\cos \frac{-2\pi}{3}, \sin \frac{-2\pi}{3}) & \vec{G\sharp} = (\cos \frac{-5\pi}{6}, \sin \frac{-5\pi}{6}) \\
 \vec{A} = (\cos \pi, \sin \pi) & \vec{A\sharp} = (\cos \frac{5\pi}{6}, \sin \frac{5\pi}{6}) & \vec{B} = (\cos \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3})
 \end{array}$$

Figura 15 – Vetores associados as notas no  $\mathbb{R}^2$



Fonte: Autoria própria.

Seja  $(\alpha_i, \vec{v}_i)$  um par de autovalor e autovetor de uma matriz Laplaciana  $L$  associada a um grafo e  $v_{j,i}$  a  $j$ -ésima entrada de  $\vec{v}_i$ . A "projeção" de  $\vec{v}_i$  sobre o conjunto de vetores do plano que representam as notas é

$$\vec{V}_i = [v_{1,i} \vec{C} + v_{2,i} \vec{C}\sharp + v_{3,i} \vec{D} + \dots + v_{12,i} \vec{B}].$$

Note que se uma nota não é utilizada na música então sua respectiva coluna na matriz Laplaciana é o vetor nulo e por consequência teremos um autovalor nulo associado a um autovetor que será canônico. Ou seja, embora os autovetores sejam importantes a magnitude do autovalor também representa a importância da auto-direção.

Isso nos motiva a multiplicar cada um dos autovetores projetados no plano  $\vec{V}_i$  por seu respectivo autovalor  $\alpha_i$ , a fim de ponderarmos a importância da direção através dos autovalores. Obtemos assim os autovetores projetados e ponderados

$$\vec{W}_i = \alpha_i \vec{V}_i.$$

Desejamos criar um objeto gráfico que represente a música com base nos autovetores projetados e ponderados. Assim, criamos para cada música um polígono cujos vértices são as

pontas dos autovetores projetados e ponderados, sendo que a origem desses vetores é tomada como a origem do plano.

Uma questão pertinente é por que usar autovetores e não algum outro vetor qualquer associado a matriz Laplaciana? Note que se no grafo de uma música considerarmos todas as arestas com o mesmo peso e alterarmos esse grafo trocando um vértice sobre o qual incide algumas arestas por outro que não tem nenhuma aresta incidindo, ou ainda trocar dois vértices de papel no grafo, como no Exemplo 16, isso modificará a matriz Laplaciana de forma que linhas e colunas sejam permutadas. Por exemplo, se em um grafo todas as arestas que incidem em  $C$  passam a incidir em  $C_{\#}$  e reciprocamente, todas as arestas que incidem em  $C_{\#}$  passam a incidir em  $C$  então da matriz Laplaciana do grafo original para a matriz Laplaciana do grafo após a modificação a diferença estará nas colunas e linhas 1 e 2 que foram permutadas.

Essa operação de troca de colunas e de linhas pode ser feita pré e pós multiplicando, respectivamente, a matriz Laplaciana por uma matriz de permutação. Uma matriz de permutação,  $P$ , é definida como uma matriz identidade com as colunas que se deseja permutar trocadas. Essa matriz de permutação tem algumas propriedades importantes. A primeira propriedade é a simetria, de forma que  $P = P^T$ , e a segunda é que  $P = P^{-1}$ . Disto, observamos que as modificações exemplificadas acima preservam os autovetores, a menos na aplicação da própria permutação.

Sejam  $(\alpha_i, v_i)$  um par autovalor e autovetor de  $L$  e  $P$  uma matriz de permutação, assim

$$Lv_i = \alpha_i v_i$$

$$PLv_i = \alpha_i Pv_i$$

$$PLP^{-1}Pv_i = \alpha_i Pv_i$$

$$(PLP)(Pv_i) = \alpha_i (Pv_i)$$

ou seja,  $(\alpha_i, Pv_i)$  é um par de autovalor e autovetor de  $PLP$ .

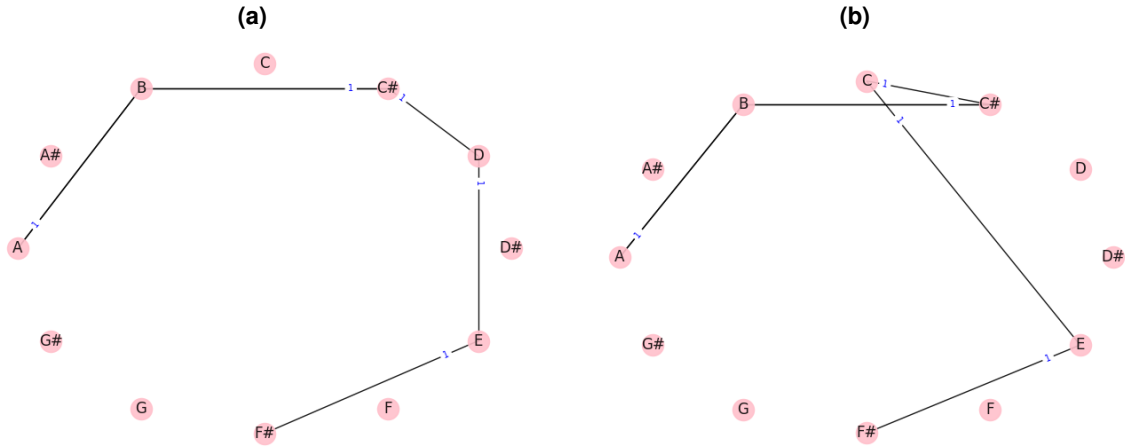
## Experimentos Numéricos

Neste capítulo, serão apresentados alguns experimentos envolvendo sequências de notas musicais. Para isso, são utilizadas algumas das caracterizações apresentadas nos capítulos anteriores, desde a indexação de músicas via espectro de grafo até a representação poligonal. Os dados a serem apresentados foram obtidos através de um código desenvolvido em linguagem *Python*.

No primeiro exemplo, será utilizada uma sequência contendo as 8 primeiras notas de "Cânone em ré maior", composta por Johann Pachelbel. Estudaremos os grafos com arestas de peso 1, não-direcionadas. Este experimento inicial se faz necessário para explicitar como se

comportam os autovalores e autovetores da matriz Laplaciana quando trocamos um único par de vértices do grafo. As sequências utilizadas serão nomeadas de  $S_1$  e  $S'_1$ , onde segunda difere da primeira por uma única nota, que neste caso será  $C$  ao invés de  $D$ .

Figura 16 – Grafos das sequências  $S_1$  e  $S'_1$



Fonte: Fonte: Autoria Própria.

Neste experimento, os autovalores de  $S_1$  e  $S'_1$  são iguais, pois os pesos das arestas é o mesmo, além de que foi modificado o grau da nota  $D$  para  $C\sharp$ , não alterando o espectro dos grafos. Porém, o mesmo não ocorre com os autovetores. Vamos observar as matrizes  $L_{S_1}$  e  $L'_{S_1}$ , referentes as duas sequências de notas. Como somente um único vértice difere entre os dois grafos, podemos obter uma matriz de permutação  $P$  de forma que  $L'_{S_1} = PL_{S_1}P$ .

$$L_{S_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, L'_{S_1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Observando ambas as matrizes, é possível através de algumas operações elementares entre as matrizes  $L_{S_1}$  e  $L'_{S_1}$ , resultar na matriz de permutação  $P_{12 \times 12}$ . Seja  $\lambda$  um autovalor de

$L_{S_1}$  e  $\vec{X}$  um autovetor de  $L_{S_1}$ . Vale a igualdade apresentada em 6:

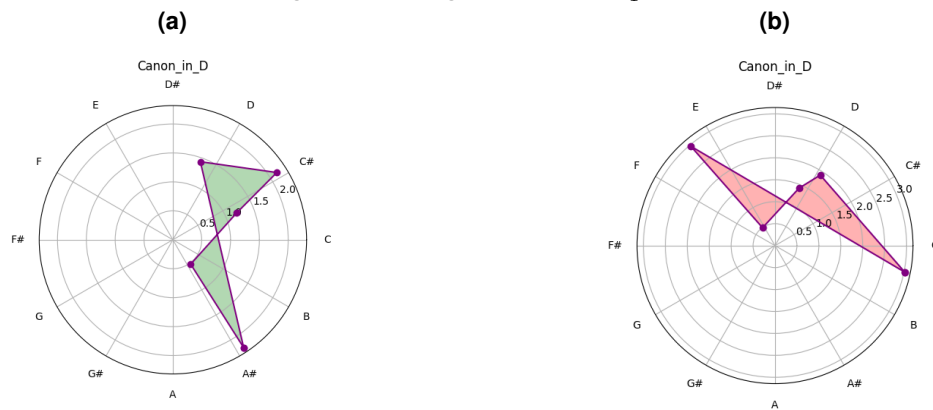
$$\begin{aligned} L_{S_1} \vec{X} &= \lambda \vec{X} \\ PL_{S_1} \vec{X} &= \lambda P \vec{X} \\ PL_{S_1} (P^{-1} P) \vec{X} &= \lambda P \vec{X} \\ PL_{S_1} P^{-1} (P \vec{X}) &= \lambda (P \vec{X}) \end{aligned}$$

Onde  $PL_{S_1} P^{-1} P$  é igual a  $L_{S_1}$  após a permutação de linhas e colunas. Assim, se  $(\lambda, \vec{X})$  é um par autovalor, autovetor de  $L_{S_1}$ , então  $(\lambda, P \vec{X})$  é um par autovalor, autovetor de  $PL_{S_1} P^{-1}$ .

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Agora, serão projetados os autovetores das matrizes Laplacianas do experimento 1, utilizando o método apresentado no começo do capítulo 6. Para projetarmos os autovetores iremos realizar a multiplicação entre as matrizes dos autovetores ( $X_1$  e  $X'_1$ ) pela matriz de projeção de notas,  $N$ . Os produtos internos  $\langle N, X_1 \rangle$  e  $\langle N, X'_1 \rangle$  pelos respectivos autovalores de  $L_{S_1}$  e  $L'_{S_1}$ , resultam nas projeções dos polígono das sequências  $S_1$  e  $S'_1$  no  $\mathbb{R}^2$  e podem ser observadas abaixo:

Figura 17 – Polígonos de  $S_1$  e  $S'_1$



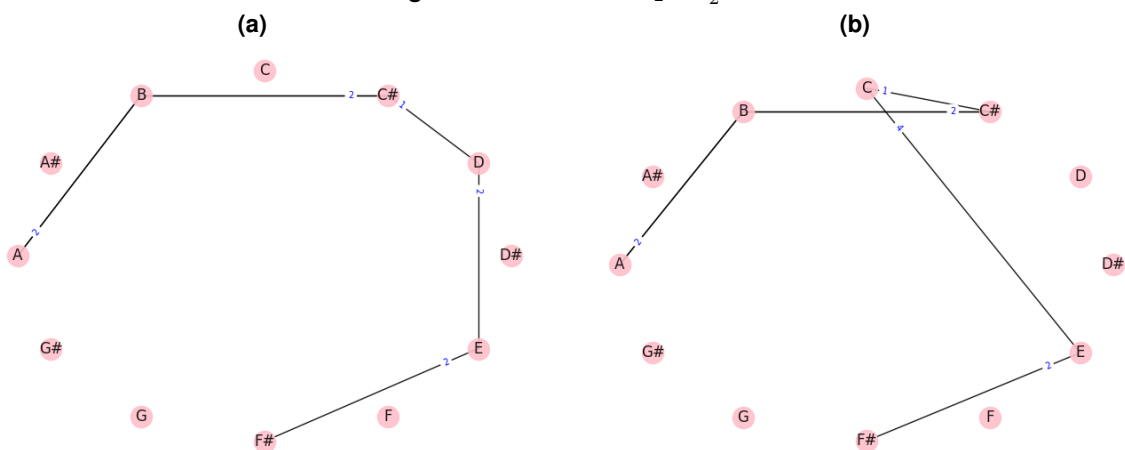
Fonte: Fonte: Autoria Própria.

No primeiro exemplo, utilizamos peso 1 nas arestas. Agora, será realizado um segundo experimento com arestas ponderadas, utilizando o método definido pelo  $GIS\ PC$ , isto é, o peso da aresta entre o par  $(s,t)$  é definido como  $\text{int}(s,t) = t - s$ . A sequência de notas é a mesma utilizada no primeiro exemplo, porém nomearemos as sequências de  $S_2$  e  $S'_2$ , onde

$$S_2 = [(F\#, E', 2), (E', D', 2), (D', C\#, 1), (C\#, B', 2), (B', A', 2), (A', B', 2), (B', C\#, 2)];$$

$$S'_2 = [(F\#, E', 2), (E', C', 4), (C', C\#, 1), (C\#, B', 2), (B', A', 2), (A', B', 2), (B', C\#, 2)].$$

Figura 18 – Grafos de  $S_2$  e  $S'_2$



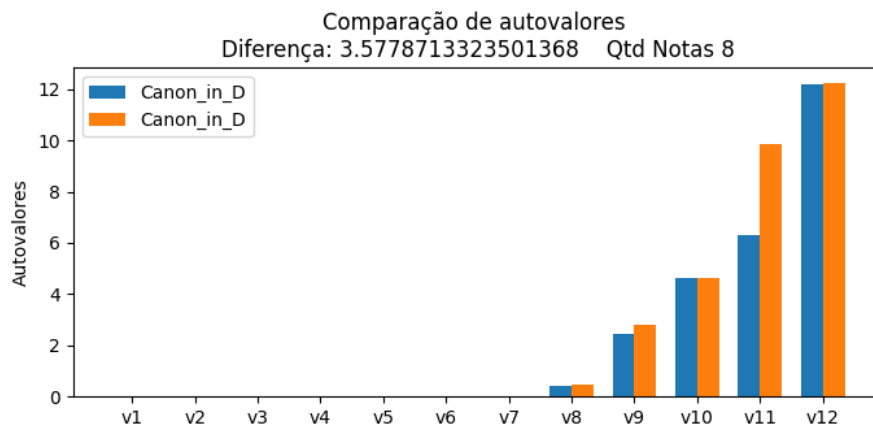
Fonte: Fonte: Autoria Própria.

Agora iremos analisar o comportamento das matrizes laplacianas  $L_{S_2}$  e  $L_{S'_2}$ .

$$L_{S_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}, L_{S'_2} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

A matriz de permutação,  $P$ , entre  $L_{S_2}$  e  $L_{S'_2}$  será exatamente a mesma matriz de permutação entre  $L_{S_1}$  e  $L'_{S_1}$ . Podemos concluir que mesmo com os pesos diferentes entre os grafos dos experimentos 1 e 2, não temos diferenças nas estruturas das laplacianas, visto que as matrizes de incidência são iguais. Porém, o mesmo não ocorre com os autovalores e autovetores e, conseqüentemente, com a projeção poligonal no  $\mathbb{R}^2$ . Na Figura 19 está o gráfico de barras com os autovalores de  $L_{S_2}$  e  $L_{S'_2}$ , além do módulo da diferença entre ambas.

**Figura 19 – Comparação dos autovalores de  $L_{S_2}$  e  $L_{S'_2}$**



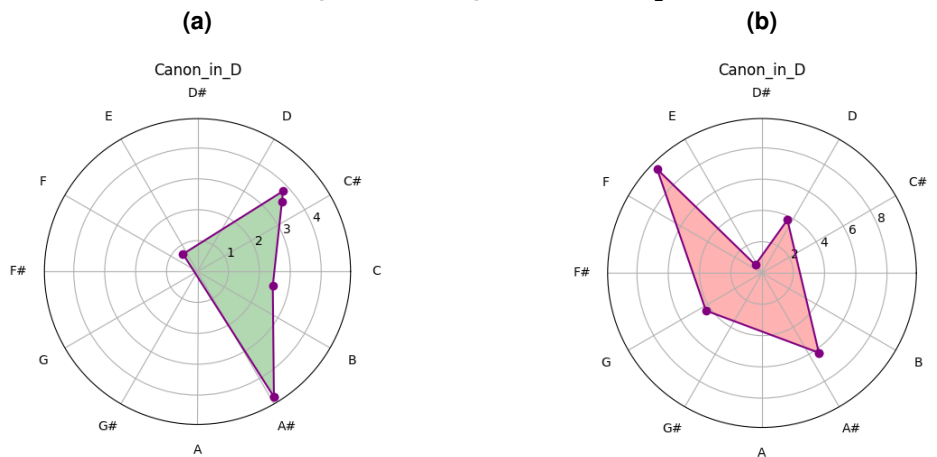
Fonte: Fonte: Autoria Própria.

Agora iremos projetar os autovetores de  $L_{S_2}$  e  $L_{S'_2}$  no  $\mathbb{R}^2$  seguindo as seguintes operações matriciais:

$$\vec{W}_i = \alpha_i \vec{V}_i.$$

Onde  $\lambda_i$  são os autovalores de  $L_{S_2}$  e  $\vec{V}_i$  é a matriz  $2 \times 12$  com as projeções dos autovetores no  $\mathbb{R}^2$ .



Figura 20 – Polígonos de  $S_2$  e  $S'_2$ 

Fonte: Fonte: Autoria Própria.

Agora vamos comparar as matrizes com as projeções dos polígonos no  $\mathbb{R}^2$  de  $S_1$  e  $S_2$ , ou seja, o grafo com peso 1 e o ponderado por  $GIS\ PC$ . Nomearemos as projeções como  $W_{S_1}$  e  $W_{S_2}$ . Podemos ver que o módulo da diferença entre os vetores coluna das duas projeções é relativamente pequeno. Por exemplo, na primeira coluna, onde temos a projeção do autovetor associado a nota  $C$ , o módulo da diferença será:  $|W_{S_1} - W_{S_2}| \approx 0,032$ . Além disso, temos as colunas 7,8,9,10,11,12, entre as duas matrizes, são iguais.

$$W_{S_1} = \begin{bmatrix} 0.19605 & 0.3169 & 0.1849 & 1.3322 & 0.2988 & -0.91117 & 0 & 1 & 0.5 & -0.5 & -0.866 & -0.866 \\ -0.2975 & 0.13293 & 0.5232 & 0.8586 & 0.2988 & 1.3391 & 1 & 0 & -0.866 & -0.866 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix};$$

$$W_{S_2} = \begin{bmatrix} 0.2023 & 0.38734 & 0.5989 & 1.1139 & -0.2988 & -1.0583 & 0 & 1 & 0.5 & -0.5 & -0.866 & -0.866 \\ -0.3322 & -0.0732 & 0.5636 & 0.9175 & -0.29885 & 1.2787 & 1 & 0 & -0.866 & -0.866 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

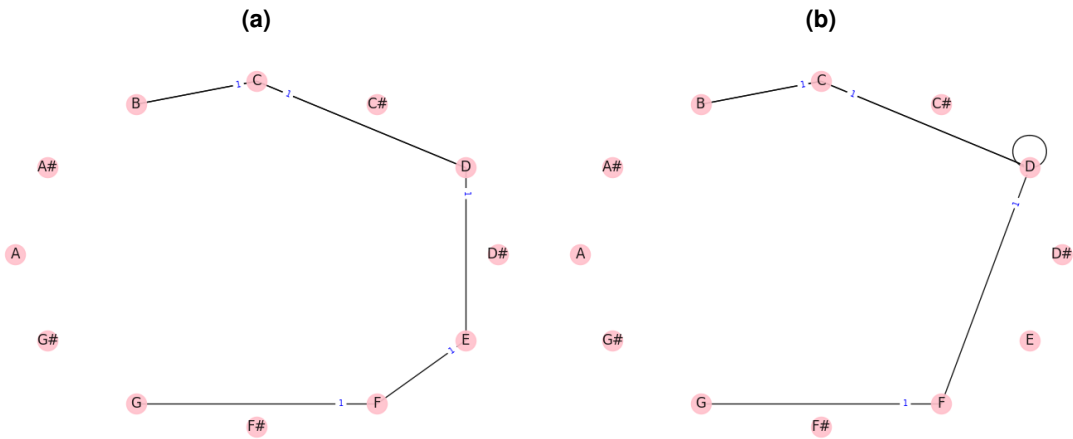
O próximo teste será o da transposição de meio tom a cima da música "Cânone em Ré maior". Isso significa que todos os vértices andaram "uma hora" no sentido horário de  $\mathcal{PC}$ . A nova sequência transposta será  $S_3$ . Abaixo, podemos ver a diferença entre a sequência original,  $S_1$ , e a modificada,  $S_3$ . Perceba a mudança de um único meio-tom em todas as notas de  $S_3$ :

$$S_1 = [(F\sharp, E', 1), (E', D', 1), (D', C\sharp, 1), (C\sharp, B', 1), (B', A', 1), (A', B', 1), (B', C\sharp, 1)];$$

$$S_3 = [(G', F', 1), (F', E', 1), (E', D', 1), (D', C', 1), (C', B', 1), (B', C', 1), (C', D', 1)].$$

Começaremos com o ponderamento de arestas igual a 1. Iremos comparar as sequências  $S_3$  e  $S'_3$ , sendo que  $S'_3$  contém a uma única aresta diferente, sendo esta a aresta  $(F, D)$ , ao invés de  $(F, E)$  como em  $S_3$ . Os grafos podem ser observados abaixo:

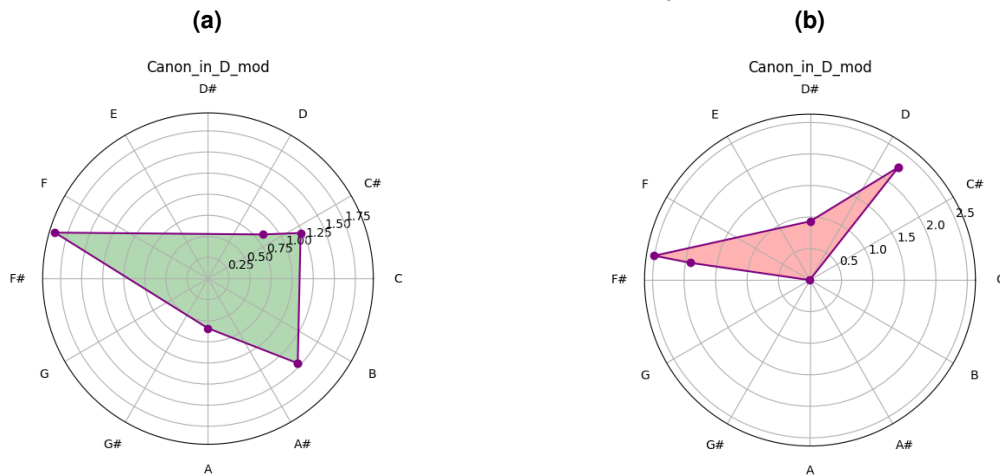
**Figura 21 – Grafos de  $S_3$  e  $S'_3$**



**Fonte: Fonte: Autoria Própria.**

Os polígonos gerados por  $W_{S_3}$  e  $W'_{S_3}$ , isto é, a junção das extremidades dos vetores projetados no  $\mathbb{R}^2$ , são:

**Figura 22 – Grafos de  $S_3$  e  $S'_3$**



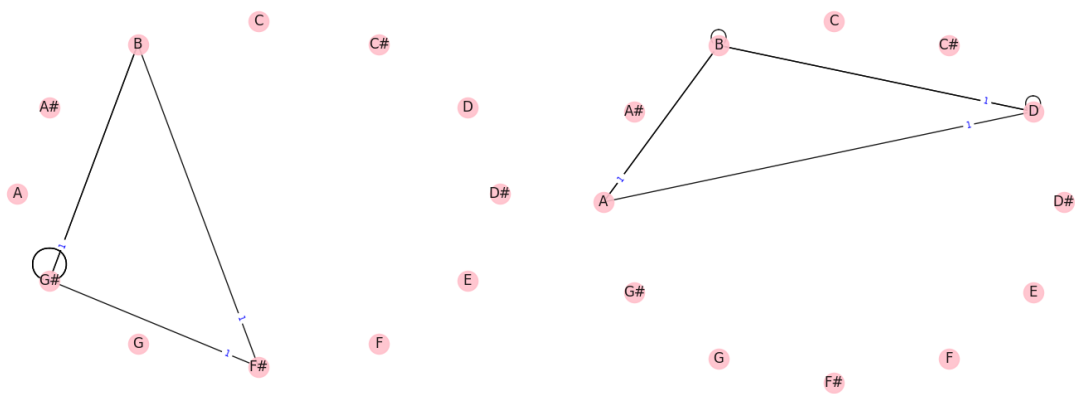
**Fonte: Fonte: Autoria Própria.**

Como quarto experimento, iremos observar as mudanças nos grafos e nas matrizes laplacianas de  $S_1$  e  $S_3$ , ou seja, será estudado qual o comportamento entre duas sequências iguais, onde uma delas teve transposição de tom. Calcularemos a matriz de permutação  $P$  de  $L_{S_1}$  para  $L_{S_3}$ , que corresponde a rotação do grafo de  $S_1$ .



O quinto experimento será sobre duas músicas onde existe grande similaridade entre as melodias. Os casos escolhidos são provindos de plágios, isto é, a apropriação de trabalho artístico alheio, (BUENO, 1996). As músicas escolhidas são "My Sweet Lord" do músico britânico George Harrison, gravada em 1970, e a música "He's so Fine" do grupo estado-unidense "The Chiffons", publicada em 1962. Harrison foi considerado culpado, sob a lei violação de direitos autorais, por cópia subconsciente de "He's so Fine", em julgamento que ocorreu em 8 de setembro de 1976, em Nova York, Estados Unidos, (TIMES, 1976). Os grafos das 8 primeiras notas, com arestas de peso 1, são:

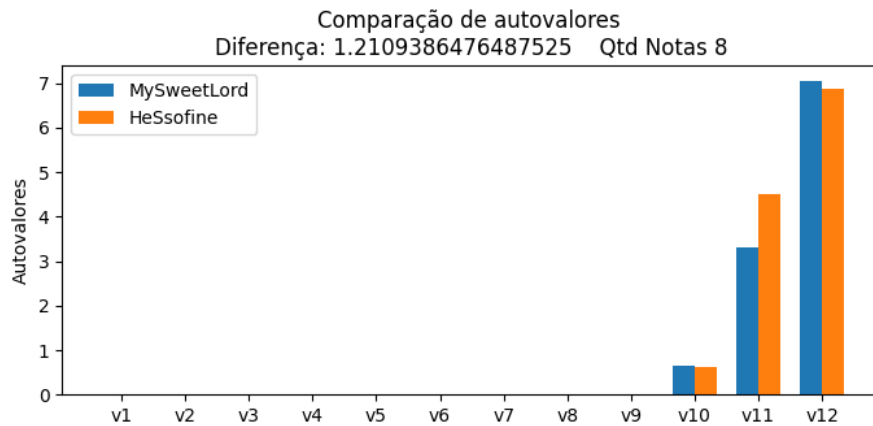
**Figura 24 – Grafos de "My Sweet Lord" e "He's so fine".**



Fonte: Fonte: Autoria Própria.

As estruturas dos grafos de ambas as músicas, que nomearemos de  $S_4$  e  $S'_4$ , neste trecho são quase idênticas. Se girarmos um dos grafos, isto é, transpor o tom de uma das músicas, elas ficariam praticamente iguais. O gráfico de barras dos autovalores de  $S_4$  e  $S'_4$  nos mostram o quão próximos os espectros estão:

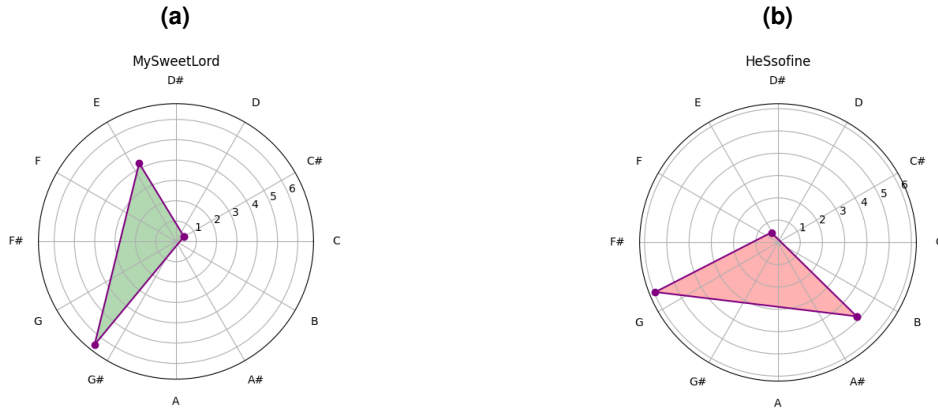
**Figura 25 – Autovalores de "My Sweet Lord" e "He's so fine".**



Fonte: Fonte: Autoria Própria.

As projeções poligonais de  $S_4$  e  $S'_4$ , com peso 1, são praticamente iguais, como podemos ver através da Figura 26.

**Figura 26 – Projeções poligonais de "My Sweet Lord" e "The Chiffons"**



Fonte: Fonte: Autoria Própria.

## 7 CONCLUSÃO

Neste trabalho estudamos e implementamos algumas formas de caracterizar músicas através do espectro de grafos. Para isso, nos baseamos em artigos que já visavam abordagens interdisciplinares entre a Teoria de Grafos e a Teoria Musical. Fizemos também uma breve introdução a Teoria de Grafos, a Teoria Espectral de Grafos, que foram as bases para a criação e comparação das melodias, e a Teoria Musical. Além disso, aplicamos uma nova abordagem para a interpretação dos autovetores, criando uma projeção destes no  $\mathbb{R}^2$ . Para o estudo, exemplificação e caracterização dos grafos das músicas, foi criado um programa através da linguagem de programação *Python*.

Existem diversas perspectivas para que o trabalho continue gerando mais estudos. Uma dessas é a o estudo relativo as transformações necessárias no grafo para que uma música possa se igualar ou ficar próxima a outra. Além disso, a aplicação de diferentes pesos apresentados por (PINTO; TAGLIOLATO, 2008) para a projeção dos autovetores pode ser entendida como uma extensão relevante deste Trabalho de Conclusão de Curso.

## REFERÊNCIAS

- ABREU, N. *et al.* Teoria espectral de grafos: Uma introdução. In: UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA. [S.l.], 2014.
- BIGGS, N.; LLOYD, E. K.; WILSON, R. J. **Graph Theory, 1736-1936**. USA: Clarendon Press, 1986. ISBN 0198539169.
- BONDY, J.; MURTY, U. **Graph Theory**. 1st. ed. [S.l.]: Springer Publishing Company, Incorporated, 2008. ISBN 1846289696.
- BUENO, F. d. S. **Minidicionário da língua portuguesa**. 1. ed. [S.l.]: FTD, 1996. 703 p.
- CAMPOS, G. P. A teoria de conjuntos e a música de villa-lobos: uma abordagem didática. Universidade de São Paulo, 2014.
- CARDOSO, B.; MASCARENHAS, M. **CURSO COMPLETO DE TEORIA MUSICAL E SOLFEJO**. 1. ed. [S.l.]: Irmãos Vitale S.A., 1973.
- CVETKOVIC, D.; ROWLINSON, P.; SIMIC, S. **Spectral Generalizations of Line Graphs: On graphs with least eigenvalue**. 1. ed. [S.l.]: The Press Syndicate of the University of Cambridge, 2004. 298 p. ISBN 0 521 83663 8.
- DOMINGUES, H.; IEZZI, G. **Álgebra Moderna**: volume único. 4. ed. [S.l.]: Atual, 2003. 371 p. ISBN 85-357-0401-9.
- ERICKSON, R. **Sound Structure in Music**. University of California Press, 1975. ISBN 9780520023765. Disponível em: [https://books.google.com.br/books?id=t3j6\\_ShXeWYC](https://books.google.com.br/books?id=t3j6_ShXeWYC).
- GROUT, D. J.; PALISCA, C. V. **História da Música Ocidental**. 2. ed. [S.l.]: Gradiva, 2001.
- HARNUM, J. **Basic Music Theory: How to read, write, and understand written music**. 1. ed. [S.l.]: Sol-Ut Press, 2001. ISBN 0-9707512-9-X.
- JESUS, J. V. O. d. **Introdução à Teoria Espectral de Grafos**. 2018. Dissertação (Mestrado) — Universidade da Madeira, 2018.
- JESUS, W. d.; SOUZA, G. R. d. Identificação e classificação de acordes musicais aplicando a transformada de fourier. **Revista de Matemática da UFOP**, 2020. ISSN 2237-8103.
- LEWIN, D. **Generalized Musical Intervals and Transformations (2007)**. 2. ed. Cidade: Oxford University Press, 2007.
- LI, G.; RUSKEY, F. The advantages of forward thinking in generating rooted and free trees. In: **SODA '99**. [S.l.: s.n.], 1999.
- MARCONDES, J. **Como inverter um intervalo musical?** 2020. Disponível em: <https://souzalima.com.br/blog/como-inverter-um-intervalo-musical>. Acesso em: 16 de Novembro de 2021.
- MAYER, J. **If I Ever Get Around to Living**. Columbia Records, 2012. Disponível em: <https://open.spotify.com/track/6Oi3mUl8WwfTVRqEwByZ7R?si=55fdcc5b5a24454a>.
- NETTLES, B. **Harmony 1**. [S.l.]: Berklee College of Music, 1987.
- OCKELFORD, A. **Repetition in Music: Theoretical and metatheoretical perspectives**. 1. ed. [S.l.]: Routledge, 2016. 151 p. ISBN 978-0-7546-3573-4.

PILHOFER, M.; DAY, H. **Music Theory for Dummies**. [S.l.]: Wiley Publishing, Inc, 2007. ISBN 978-0-7645-7838-0.

PINTO, A.; HAUS, G. A novel xml music information retrieval method using graph invariants. **ACM Trans. Inf. Syst.**, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, v. 25, n. 4, p. 19–es, out. 2007. ISSN 1046-8188. Disponível em: <https://doi.org/10.1145/1281485.1281490>.

PINTO, A.; TAGLIOLATO, P. A generalized graph-spectral approach to melodic modeling and retrieval. p. 8, 2008.

SCHERBAUM; AROM; KANE. A graph-theoretical approach to the harmonic analysis of georgian vocal polyphonic music. 6th international workshop on folk music analysis.

SCHUIJER, M. **Analysing atonal music: pitch-class set theory and its contexts**. [S.l.]: University of Rochester Press, 2008. 330 p. ISBN 978–1–58046–270-9.

SONG, M. A generalized interval system and its applications. Maio 2014. Disponível em: <https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/2014/songm.pdf>.

STEWART, I. **Dezessete equações que mudaram o mundo**. 1. ed. [S.l.]: Zahar, 2013. 479 p. ISBN 853781041.

SYLVESTER, J. J. On an application of the new atomic theory to the graphical representation of the invariants and covariants of binary quantics, with three appendices. **American Journal of Mathematics**, Johns Hopkins University Press, v. 1, n. 1, p. 64–104, 1878. ISSN 00029327, 10806377. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2369436>.

TIMES, T. N. Y. **George Harrison Guilty of Plagiarizing, Subconsciously, a '62 Tune for a '70 Hit**. 1976. Acesso em 16 de Novembro de 2022. Disponível em: <https://www.nytimes.com/1976/09/08/archives/george-harrison-guilty-of-plagiarizing-subconsciously-a-62-tune-for.html>.

WILSON, R.; HANCOCK, E.; LUO, B. Pattern vectors from algebraic graph theory. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v. 27, n. 7, p. 1112–1124, 2005.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A.; FORD, A. L. **University physics: with modern physics**. 13. ed. [S.l.]: Addison-Wesley, 2011. 1598 p. ISBN 13: 978-0-321-69686.

YOUNG, N. **Old Man**. Quadraphonic Sound Studio, 1971. Disponível em: <https://open.spotify.com/track/4rWbao8Vde6ioqH2jZI4ee?si=fa1c1751bd514730>.

ZHU, P.; WILSON, R. C. A study of graph spectra for comparing graphs. In: **Proceedings of the British Machine Vision Conference**. [S.l.]: BMVA Press, 2005. p. 69.1–69.10. ISBN 1-901725-29-4. Doi:10.5244/C.19.69.