UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

NAYARA LETÍCIA MONTEIRO RODRIGUES

A UTILIZAÇÃO DA GEOMETRIA ANALÍTICA COMO ABORDAGEM NOS CONTEÚDOS DO ENSINO FUNDAMENTAL - ANOS FINAIS

CURITIBA

2022

NAYARA LETÍCIA MONTEIRO RODRIGUES

A UTILIZAÇÃO DA GEOMETRIA ANALÍTICA COMO ABORDAGEM NOS CONTEÚDOS DO ENSINO FUNDAMENTAL - ANOS FINAIS

On the use of Analitical Geometry as aproach in middle school contents

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciatura em Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Adriano Verdério

CURITIBA

2022

NAYARA LETÍCIA MONTEIRO RODRIGUES

A UTILIZAÇÃO DA GEOMETRIA ANALÍTICA COMO ABORDAGEM NOS CONTEÚDOS DO ENSINO FUNDAMENTAL - ANOS FINAIS

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciatura em Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Data de aprovação: 13/Dezembro/2022

Adriano Verdério
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Angelita Minetto Araújo
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Nara Bobko
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

CURITIBA

2022

A minha família que sempre acreditou em mim
e a todos os professores do curso, que foram
tão importantes na minha vida acadêmica e no
desenvolvimento deste Trabalho de Conclusão
de Curso.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Adriano Verdério, pela sabedoria com que me guiou nesta trajetória.

A todos os meus professores do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná pela orientação e exemplo a ser seguido em sala de aula.

Aos meus colegas de curso, pois foi de tamanha importância todos os debates e trocas de experiência ao longo do curso.

Gostaria de deixar registrado também, o meu reconhecimento à minha noiva Adriana Gomes Nunes, pois acredito que sem o apoio dela seria muito difícil vencer esse desafio.

Aos meus gatos, Jujuba e Pêta, que me fizeram companhia pelas longas noites na realização deste trabalho.

Enfim, a todos os que por algum motivo contribuíram para a realização desta pesquisa.

Não existem métodos fáceis para resolver
problemas difíceis. (DESCARTES, René, 1650)

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo analisar como a Geometria Analítica está inserida, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental - Anos Finais. Para alcançar esse objetivo foi feita uma análise de quais são as abordagens propostas nas coleções dos livros didáticos de Matemática de maior valor aquisitivo do 8° ano e 9° ano do Ensino Fundamental - Anos Finais, de acordo com o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), do ano 2020, em relação as habilidades selecionadas que tangenciam os conceitos de Geometria Analítica. O desenvolvimento deste trabalho seguiu os pressupostos da pesquisa qualitativa. A análise das fontes de produção de dados foi realizada por meio da Análise de Conteúdo. As fontes de dados utilizados foi das duas coleções de livros didáticos de Matemática. A análise permitiu verificar que as habilidades são bem mais desenvolvidas em uma das coleções, propondo mais atividades e conteúdo que se relacionam com a Geometria Analítica. Por fim, foi feito uma proposta de aplicações de exercícios resolvidos de forma algébrica e geométrica, ou seja, abordados com Geometria Analítica.

Palavras-chave: geometria analítica; habilidades; livros didáticos.

ABSTRACT

This estudy aims to analyze how Analytical Geometry it's inserted in collections of textbooks of Mathematics for Middle School, according to the Base Nacional Comum Curricular (BNCC). To achieve this objective, an analysis was made of what are the approaches proposed in the collections of the most chosen Mathematics textbooks for the two last grades before High School, according to the Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), of the year 2020, in relation to the selected skills that touch the concepts of Analytical Geometry. The development of this study followed the requests of qualitative research. The analysis of data production sources was carried out through the content analysis. The data sources used were from the two collections of textbooks of math. The analysis allowed to verify that the skills are much more developed in one of the collections, proposing more activities and content related to geometry analytical. Finally, exercises of applications involving the use of Analytical Geometry were suggested to finding a solution.

Keywords: analytical geometry; skills; textbooks.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho foi motivado pelos estudos realizados no Programa de Iniciação Científica Júnior (PIC) destinado aos alunos premiados na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), para estudantes do 8° ano e 9° ano. Ao realizar esses estudos, foi percebido que em um dos roteiros para a preparação da aula, os conceitos de Geometria Analítica apareciam como uma abordagem para resolução de problemas de Geometria Plana e Álgebra. Inicialmente, os estudantes apresentaram certa dificuldade por falta de contato com esse tipo de abordagem. Mas, ao longo dos estudos compreenderam sua utilização para interpretar e resolver problemas de Geometria Plana e Álgebra. Assim, surgiu a ideia de realizar uma análise detalhada dos livros didáticos no que tange aos conteúdos/conceitos de Geometria Analítica nas habilidades que esta possa ser inserida.

Segundo Nery (2008), a Geometria Analítica é um estudo da Geometria Plana por meio de equações. É composta praticamente por fórmulas, porém existem estratégias didáticas para que se consiga resolver exercícios desta área utilizando o método de coordenadas. É importante ressaltar que para a aprendizagem matemática é interessante que o aluno conheça diferentes métodos de resolução e tenha a liberdade de escolher aquele que se sinta mais confiante utilizar. A Geometria Analítica tem um papel muito importante nesse contexto, uma vez que o estudante que consegue entender seus princípios e propriedades fundamentais pode desenvolver com mais facilidades as habilidades de abstração e generalização do universo matemático.

Richit (2005), afirma que há uma relação direta entre o baixo aproveitamento de Álgebra e a dificuldade de interpretar algebricamente um problema. É mais um fato importante e a favor da importância de se desenvolver no estudante a interpretação de uma construção gráfica, geométrica e algébrica. Diminuindo assim, dificuldades em Álgebra e Geometria Analítica.

Sobre a Geometria Analítica como abordagem de estudos, Wagner (1999) afirma que a Geometria Analítica é uma boa ferramenta que pode ser aplicada em diversos problemas. É também necessário dizer que o método analítico pode ser adequado para alguns problemas e não para outros, mas é uma opção que devemos ter em mente e a sua utilização depende da sensibilidade de cada um ao abordar um novo problema.

Em relação ao ensino da Geometria Analítica, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca que

> A Geometria Analítica deve ser trabalhada de modo articulado com a Álgebra, ampliando a capacidade de visualização. É importante valorizar não apenas a manipulação algébrica, mas enfatizar o significado geométrico dos coeficientes de equações (da reta e da circunferência), de retas paralelas e perpendiculares, entre outras. As articulações entre a Geometria Analítica e outras áreas da Matemática escolar também podem ser enfatizadas quando do estudo de ideias envolvendo crescimento e decrescimento, taxas de variação de uma função, entre outros temas. (BRASIL, 2016, p. 563).

A prática docente em Geometria Analítica precisa priorizar os aspectos que podem levar o estudante a uma maior compreensão dos conteúdos desta disciplina. Entre eles a ampliação das possibilidades de visualização de conceitos e propriedades, a realização de experimentação e a ênfase na interpretação de construções geométricas e gráficas e é por meio destes aspectos que a Geometria e Álgebra se relacionam, pois problemas de Geometria são resolvidos por processos algébricos e relações algébricas são interpretadas geometricamente.

Para que esta articulação seja significativa ao estudante entende-se que o professor pode (e deve) trabalhar duas vias: o entendimento de figuras geométricas via equações e o entendimento de equações via figuras geométricas.

Diante deste contexto, este trabalho busca analisar quais são as abordagens propostas nas coleções dos livros didáticos de Matemática de acordo com o Guia do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) do ano de 2020, em relação as habilidades presentes na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) que tangenciam os conceitos de Geometria Analítica.

Para esta análise, utilizou-se a técnica chamada de Análise de Conteúdo, que foi desenvolvida por Laurence Bardin (1977). De acordo com a pesquisadora, a análise de conteúdo é definida por

> [...] um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção [...] destas mensagens. (BARDIN, 1977, p. 31)

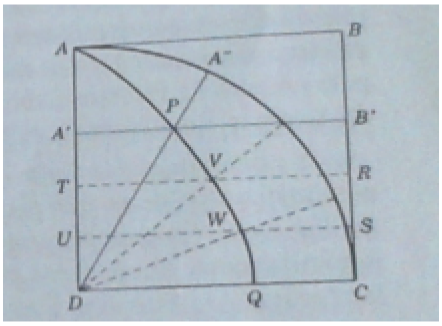
Para atingir este objetivo, o trabalho está organizado da seguinte maneira: no Capítulo 2 é apresentado um breve desenvolvimento da Geometria Analítica. Em seguida, no Capítulo 3, a Base Nacional Comum Curricular é analisada, selecionando as habilidades do 8° ano e 9° ano do Ensino Fundamental - anos finais que podem ser exploradas com uso da Geometria Analítica. Já no Capítulo 4, o Programa Nacional do Livro e do Material Didático entra em destaque, abordando tanto a composição do guia como a seleção dos livros didáticos pelos professores. É feito um estudo comparativo entre duas coleções selecionadas do Guia do PNLD no Capítulo 5, considerando a utilização (ou não) da Geometria Analítica. No Capítulo 6 são apresentados exercícios resolvidos com a utilização da Geometria Analítica. Ao final são tecidas algumas considerações finais.

2 O DESENVOLVIMENTO DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Historicamente, as ideias de Geometria Analítica surgiram de comparação de grandezas curvilíneas com grandezas retilíneas. Os egípcios e babilônios deram os primeiros passos na Geometria por meio do estudo do círculo. Mas, a falta da ideia do método das coordenadas e as deficiências na aritmética eram as grandes dificuldades para o desenvolvimento da Geometria Analítica na época.

Na Grécia, a Geometria era o domínio da grandeza contínua, a Aritmética estava preocupada com o conjunto discreto de números inteiros, ou seja, não havia uma relação entre Geometria e Álgebra. Eram dois campos totalmente independentes, não havia uma análise algébrica. Mas, através do fascínio que os gregos tinham sobre o círculo e a linha reta, o sofista[1] Hipías (425 a.c) nascido em Hels, inventou a primeira curva que não era um círculo, chamada de Trissetriz ou quadratriz de Hipías (BOYER, 1996), conforme a Figura 1.

Figura 1 – Trissetriz ou quadratriz de Hipías



Fonte: Boyer (1996, p.47).

A curva de Hipías foi usada para quadrar o círculo e anunciou uma das ideias básicas da Geometria Analítica - lugar geométrico, sendo este definido como o conjunto de todos os pontos que satisfaça, ou que é determinado, por uma ou mais condições específicas.

Um dos problemas mais famosos da Geometria, a duplicação do cubo (conhecido por problema de Delos), foi o que teve maior importância para a Geometria Analítica. Segundo a história, o povo de Atenas recorreu ao oráculo de Delos para aliviá-los de uma praga devastadora. A praga continuou, e quando a denúncia foi apresentada para o oráculo, o povo lembrou de que tinha aumentado o volume do altar oito vezes, resolvendo geometricamente a equação $x^3 = 8$ e não a equação $x^3 = 2$. A praga finalmente diminuiu, mas continuaram as tentativas de duplicar o cubo. (SANTOS, 2013).

Segundo Boyer (1996), a história apresenta que Menaechmus (369 a.c), tutor de Alexandre, o Grande fez a contribuição mais espetacular do tempo para a Geometria Analítica. Ele conseguiu uma solução tridimensional do problema de Delos, sem ajuda de coordenadas. Sendo assim, o primeiro a ter o plano como lugar geométrico.

[1] Professor itinerante.

Dois mil anos depois, dois franceses, Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650) foram os percussores desse grande avanço científico, mesmo seguindo linhas bem diferentes e sem trabalharem juntos.

O interesse de René Descartes (BOYER, 1996) pela matemática surgiu cedo, no “College de la Fleche”, escola do mais alto padrão, dirigida por jesuítas, aos oito anos de idade. Mas por uma razão muito especial e que já revelava seus pendores filosóficos: a certeza que as demonstrações ou justificativas matemáticas proporcionam. Aos vinte e um anos de idade, depois de frequentar rodas matemáticas em Paris, já graduado em Direito, entrou voluntariamente na carreira das armas, uma das poucas opções “dignas” que se ofereciam a um jovem como ele, vindo da nobreza menor da França. Durante os quase nove anos que serviu em vários exércitos, não se sabe de nenhuma proeza militar realizada por Descartes. É que as batalhas que ocupavam seus pensamentos e seus sonhos travavam-se no campo da ciência e da filosofia. Criou boa parte da Geometria Analítica, em busca de aplicar o seu curioso método de dedução filosófica. Sendo considerado o “pai” da Geometria Analítica.

De acordo com Santos (2003), um exemplo dessa busca se deu em 1628, onde envia para um amigo, através de uma carta, uma regra para a construção de raízes de qualquer equação cúbica ou quadrática, utilizando o seu método de intersecção. Isso evidência a real intenção de Descartes, baseada na conversão de problemas extensos e complexos da álgebra em problemas geométricos simples onde já se sabia a resposta. Foi nesse momento que estava praticamente pronto o sistema de coordenadas, o sistema cartesiano e maneiras de tratar problemas geométricos em análise e vice-versa, utilizando gráficos.

Descartes realizou a tradução da linguagem algébrica em linguagem geométrica, ou seja, apresentou problemas geométricos por meio da álgebra e soluções algébricas por meio da geometria. É importante ressaltar que essa relação já era tratada na Grécia Antiga, mas a diferença para Descartes se deu pela forma de interpretar as equações e formas.

Em 1628, Descartes publicou um trabalho composto por três apêndices, sendo o mais famoso o *"Lá géométrie"* (BOYER, 1996), onde contém os princípios da álgebra geométrica, uma classificação de curvas, um método interessante de construir tangente a curva, resoluções de equações de grau maior que dois, regra de sinais que determinava limites para o número de raízes positivas e negativas de um polinômio.

Segundo Santos (2003), o interesse pela Matemática de Fermat se deu com a leitura de uma tradução latina, por Bachet de Méziriac, de aritmética de Diofanto de Alexandria, um texto sobrevivente da famosa Biblioteca de Alexandria, queimada em 642 d.C., e que compilava cerca de dois mil anos de conhecimentos matemáticos. Fermat descreve simples equações em lugares geométricos e inúmeras operações dentro desses lugares. Em 1631, descobriu o princípio fundamental da Geometria Analítica, fazendo o caminho inverso de Descartes, Fermat partia de uma equação e estudava o lugar correspondente.

Através de Fermat se tem a descoberta das curvas que, atualmente, são conhecidas por Hipérboles, Parábolas e Espirais de Pascal.

Segundo Boyer (1996), a ideia de Sistemas de Coordenadas Polares surgiu em 1691, por Jacob Bernoulli (1654 -1705) matemático suíço que fez inúmeras contribuições para o cálculo. Porém em um certo período, a Geometria Analítica não avançava, pois estava atrelada a vários cálculos algébricos. Somente em 1828, Julius Plucker (1801 - 1868) físico e matemático alemão, publicou vários trabalhos, se tornando um dos primeiros a aprimorar a Geometria Analítica. Ele desenvolveu o emprego das coordenadas analíticas.

Com isso, a Geometria Analítica se consolidou sendo um estudo da Geometria através da Álgebra, combinando fatos geométricos com relações algébricas e relações algébricas com fatos geométricos para uma análise sistemática de figuras geométricas. Utilizando um sistema de coordenadas cartesianas para manusear equações de planos, retas, cônicas e círculos.

As aplicações da Geometria Analítica abrem uma variedade de possibilidades na ciência moderna, capaz de demonstrar e explicar situações relacionadas ao espaço. Suas aplicações são encontradas na Matemática, Engenharia, Química, Medicina, Física, Computação Gráfica, Programação Linear, Economia, entre outras áreas.

Segundo Mlodinov (2010), a representação gráfica é a relação entre o plano cartesiano e a Geometria Analítica. Ele explica que

> o poder dos gráficos em ajudar o não-matemático a analisar padrões de dados origina-se desta mesma conexão de dados com a geometria. A mente humana facilmente reconhece certas formas simples – retas e círculos, por exemplo. Quando olhamos uma coleção de pontos, a nossa mente tenta encaixá-los num desses padrões familiares. Como resultado, quando os dados são representados por meio de gráfico, notamos os padrões geométricos que podemos deixar escapar facilmente quando olhamos para uma tabela de números. (MLODINOV, 2010, p. 80).

Na Educação Básica, o estudo da Geometria Analítica permite que haja diferentes formas de pensamento matemático e análise de dados, ampliando a capacidade de visualizar, compreender e argumentar os problemas com o propósito de encontrar a solução, enriquecendo o seu leque de possibilidades.

3 A MATEMÁTICA NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) define as aprendizagens essenciais e progressivas que todos os alunos devem desenvolver ao longo da Educação Básica, em cada uma das etapas de escolaridade e em todas as dimensões educativas, de modo que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem. No documento oficial, a BNCC (BRASIL, 2018) é definida como

> Documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. (BRASIL, 2018, p. 7)

No documento preliminar da BNCC (BRASIL, 2018) há sugestões que corroboram com estas ideias e acrescentam que o ensino de Matemática precisa ser contextualizado e interdisciplinar, bem como perseguir "o desenvolvimento da capacidade de abstrair, de perceber o que pode ser generalizado para outros contextos, de usar a imaginação" (BRASIL, 2018, p.132).

A Matemática é compreendida como uma construção social proveniente da história da humanidade, que estabelece inúmeras conexões com outras áreas de conhecimento e tem papel fundamental na resolução de problemas, na perspectiva da ampliação do entendimento, da interpretação e da avaliação daquilo que nos rodeia. Nessa perspectiva, o conhecimento matemático não envolve somente a aplicação de fórmulas e técnicas, mas também a resolução de problemas que exigem argumentações significativas e consistentes, nos mais variados contextos.

A Matemática na BNCC (BRASIL, 2018) envolve as áreas de conhecimento e disciplina, contendo um conjunto de competências e habilidades previstas que se espera que os estudantes desenvolvam ao longo de sua trajetória escolar. Estas estão organizados separadamente em três grandes blocos, que incluem um texto introdutório da área/disciplina, uma descrição das unidades temáticas e os quadros de conceitos e habilidades por ano.

Na BNCC (BRASIL, 2018), o letramento matemático é definido como:

> As competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas.É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que tais conhecimentos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo. Além disso, por meio do letramento é possível desenvolver o caráter de jogo intelectual da Matemática como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso. (BRASIL,2018, p. 266).

As Unidades Temáticas, os Objetos de Conhecimento e as Habilidades estão no interior do componente. A unidade temática seria um agrupamento possível para organizar os Objetos de Conhecimento de cada componente curricular ao longo do Ensino Fundamental. Na tentativa de operacionalizar tais Objetos de Conhecimento, os mesmos são apoiados em Habilidades a serem desenvolvidas no sujeito que estuda essa etapa de ensino. Nesse sentido, a BNCC reforça que para se alcançar os objetivos de aprendizagem de matemática, do 6° ao 9° anos, basta que seus conteúdos sejam organizados por Unidades Temáticas nos seguintes blocos: Geometria; Grandezas e Medidas; Estatística e Probabilidades; Números e Operações e, por fim, Álgebra e Funções.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018), os Objetos de Conhecimento são os conteúdos, conceitos e processos organizados em diferentes Unidades Temáticas que possibilitam o trabalho multidisciplinar, e são aplicados a partir do desenvolvimento de um conjunto de Habilidades. E a associação presente na BNCC (BRASIL, 2018) desses elementos com as competências seria

> Para garantir o desenvolvimento das competências específicas, cada componente curricular apresenta um conjunto de habilidades. Essas Habilidades estão relacionadas a diferentes Objetos de Conhecimento – aqui entendidos como conteúdos, conceitos e processos –, que, por sua vez, são organizados em unidades temáticas (BRASIL, 2018, p. 28).

Embora haja no documento argumentos sobre a importância de ter uma visão do conjunto dos objetivos de uma mesma unidade, o que permite identificar as aprendizagens já realizadas pelo estudante em anos anteriores e reconhecer em que medida as aprendizagens a serem efetivadas no atual ano escolar se articulam aquelas dos anos posteriores (BRASIL, 2016, p. 403), não há uma descrição sobre modos de como lidar com os alunos que chegam com dificuldades básicas em matemática nas séries finais.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018), a Unidade Temática Álgebra tem como objetivo desenvolver o pensamento algébrico para compreender e utilizar modelos matemáticos na construção de conceitos associados a representação, análise de grandezas, equivalências, variação, interdependência e proporcionalidade. A Unidade Temática Geometria tem como objetivo desenvolver o pensamento geométrico por meio do estudo de posição e deslocamento no espaço, formas e relações entre figuras planas e espaciais, investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. O trabalho com as transformações geométricas e as Habilidades de construção, representação e interdependência também deve ser contemplado. A Unidade Temática Grandezas e Medidas estabelece inúmeras conexões com outros componentes curriculares, contribuindo com a ampliação e a consolidação de conceitos trabalhados em outras Unidades Temáticas, tais como as noções geométricas, de números e da construção do pensamento algébrico.

Em um primeiro momento, foi feito uma análise em todas as Habilidades do Ensino Fundamental - anos finais em que os conceitos de Geometria Analítica pudessem ser desenvolvidos. No 6° ano foi selecionada uma Habilidade encontrada na Unidade Temática de Geometria (ver o Quadro 1).

Quadro 1 – Unidade Temática, Objeto de Conhecimento e Habilidade selecionada do 6º ano

Unidade Temática	Objeto de Conhecimento	Habilidade
Geometria	Plano cartesiano: associação dos vértices de um polígono a pares ordenados.	(EF06MA16) Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.

Fonte: Brasil (2018, p. 303).

No 7° ano, foram selecionadas cinco Habilidades de três Unidades Temáticas, sendo Álgebra, Geometria e Grandezas e Medidas (ver Quadro 2).

Quadro 2 – Unidade Temáticas, Objetos de Conhecimentos e Habilidades selecionadas do 7º ano

Unidade Temática	Objeto de Conhecimento	Habilidade
Álgebra	Equações polinomiais do 1º grau.	(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade.
Geometria	Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem.	(EF07MA19) Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro. (EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.
Grandezas e Medidas	Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros.	(EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros. (EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.

Fonte: Brasil (2018, p. 308).

Para o 8° ano foram quatro Habilidades de duas Unidades temáticas Álgebra e Grandezas e Medidas (ver Quadro 3).

Quadro 3 – Unidade temáticas, Objetos de Conhecimentos e Habilidades selecionadas do 8º ano

Unidade temática	Objeto de conhecimento	Habilidade
Álgebra		
	Valor numérico de expressões algébricas.	
		(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
	Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano.	
		(EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
	Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano.	
		(EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.
Grandezas e Medidas		
	Área de figuras planas.	
		(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

Fonte: Brasil (2018, p. 314).

E, por fim, foi selecionada apenas uma Habilidade da Unidade Temática Geometria do 9° ano (ver Quadro 4).

Quadro 4 – Unidade Temática, Objeto de Conhecimento e Habilidade selecionada do 9º ano

Unidade temática	Objeto de conhecimento	Habilidade
Geometria		
	Distância entre pontos no plano cartesiano.	
		(EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.

Fonte: Brasil (2018, p. 318).

Porém, devido a quantidade de habilidades, optou-se por direcionar apenas para as duas habilidades do 8° ano da unidade temática Álgebra, (EF08MA07 e EF08MA08) e uma habilidade da unidade temática de Grandezas e Medidas (EF08MA19). Para o 9° ano, foi selecionada (EF09MA16) da unidade temática de Geometria. Buscando focar em uma melhor análise para cada uma dessas habilidades que estão exploradas nos livros didáticos.

Será feito uma análise de como estas habilidades estão sendo abordadas nos livros didáticos selecionados, visando o seu objeto de conhecimento para a inserção da Geometria Analítica.

4 O PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO E DO MATERIAL DIDÁTICO

Em 1985 foi estabelecido para o professor a escolha do livro didático através do Programa Nacional do Livro e do Material Didático - PNLD (BRASIL, 2020) sendo esse programa, responsável pela avaliação, compra e distribuição dos livros para escolas públicas de todo país. Este programa é mediado pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC) sendo como uma ponte em relação aos professores e a produção editorial, como um intermediário entre uma determinada demanda (a dos docentes) e uma determinada oferta de livros didáticos (aquela definida pelo campo editorial). Destinou-se ao Ministério e ao PNLD (BRASIL, 2020) um papel pouco expressivo na definição dos padrões de qualidade do livro escolar e enfatizou da indução a uma oferta e a uma demanda de livros articuladas com as políticas públicas para a educação (BATISTA, 2001).

Em 1996, o MEC publicou um material denominado de Guia do PNLD (BRASIL, 2020) que apresentava um resumo avaliativo de cada livro com o intuito de ajudar aos professores na escolha do livro que viriam a utilizar em suas salas de aula. Esse Guia era referente aos anos iniciais do Ensino Fundamental. Em seguida foram sendo realizadas avaliações dos demais níveis de ensino. Atualmente o programa se realiza em ciclos trienais de avaliação para cada nível de ensino. Nas avaliações, são excluídos livros que apresentam erros conceituais, indução a erros, desatualização, preconceito ou discriminação de qualquer tipo (AMORIN, 2015).

De modo geral, o processo de seleção de novos livros didáticos inicia-se através de uma abertura de edital, que contém o nível da educação básica destinada, critérios para inscrição das obras, regras para a inscrição do livro didático, prazo e os regulamentos para a habilitação e a inscrição das obras pelas editoras que possuem direitos autorais. Em seguida, o Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo (IPT) coleta essas obras e analisa suas características físicas , de acordo com especificações da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), normas da Organização Internacional para Padronização (ISO) e manuais de procedimentos de ensaio pré-elaborados.

Os livros aprovados nessa fase são direcionados para a Secretaria de Educação Básica (SEB/MEC), que designará técnicos do Ministério e equipes da Secretaria de Educação Fundamental – SEF, do Fundo Nacional para o Desenvolvimento da Educação – FNDE, e especialistas das áreas de Universidades e professores para analisá-las pedagogicamente, baseando-se nos critérios comuns e específicos de acordo com as componentes curriculares. Por fim, as resenhas das obras aprovadas passam a compor o Guia dos Livros Didáticos, que é publicado pela (FNDE). O Guia é encaminhado às escolas para subsidiar a escolha pelos professores.

O Guia contém em seu sumário: a importância de se ler o Guia, as Obras Didáticas, princípios e critérios, coleções aprovadas, ficha de avaliações, referências, resenhas de cada livro aprovado do referido ano.

Atualmente, para o Ensino Fundamental - Anos Finais, tem-se o PNLD de 2020, contendo onze coleções diferentes de matemáticas que estão aprovadas. As editoras são SM, MO-

DERNA, FTD, SCIPIONE, SARAIVA, DO BRASIL E ÁTICA. As coleções didáticas aprovadas e seus respectivos autores e editoras estão descritos conforme o Quadro 5.

Quadro 5 – Relação de livros didáticos de Matemática aprovados no Guia do PNLD 2020

LIVROS APROVADOS 2020	AUTORES	EDITORA
A CONQUISTA DA MATEMÁTICA	Jóse Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci	FTD
MATEMÁTICA REALIDADE E TECNOLOGIA	Joamir Souza	FTD
APOEMA - MATEMÁTICA	Adilson Loncen	DO BRASIL
ARARIBÁ MAIS - MATEMÁTICA	Mara Regina Garcia Gay e Willian Raphael Silva	MODERNA
MATEMÁTICA - BIANCHINI	Edwaldo Bianchini	MODERNA
MATEMÁTICA - COMPREENSÃO E PRÁTICA	Ênio Silveira	MODERNA
CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA	Eduardo Chavante	SM
GERAÇÃO ALPHA MATEMÁTICA	Carlos N. C. de Oliveira e Felipe Fugita	SM
MATEMÁTICA ESSENCIAL	Patricia Moreno Pataro e Rodrigo Balestri	SCIPIONE
TRILHAS DA MATEMÁTICA	Fausto Arnaud Sampaio	SARAIVA
TELÁRIS MATEMÁTICA	Luiz Roberto Dante	ÁTICA

Fonte: Brasil (2022).

Todas as coleções são do Ensino Fundamental - Anos Finais, do 6º ao 9º ano, edições 2018 e são divididas em Livro do Estudante (LE), Manual do Professor impresso (MP) e Manual do Professor Digital (MPD). No Guia do PNLD (BRASIL, 2020) possui a resenha detalhada de cada coleção e as suas subdivisões. Conforme a Figura 2 estão as capas das edições de 2018 para o 6° ano do Ensino Fundamental.

A escolha dos livros para serem analisados neste trabalho se deu através dos dados estatísticos disponíveis no Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) , de acordo com o valor de aquisição completa de 2020 dos livros do Ensino Fundamental - Anos finais. Dentre os onze livros aprovados, os livros A CONQUISTA DA MATEMÁTICA (GIOVANNI Jr.; CAS-

Figura 2 – Livros didáticos de Matemática aprovados no Guia PNLD (2020)

Fonte: Brasil (2022).

TRUCCI, 2018a) e (GIOVANNI Jr.; CASTRUCCI, 2018b) e TELÁRIS MATEMÁTICA (DANTE, 2018b) e (DANTE, 2018a) tiveram o maior valor de aquisição.

De acordo com o Guia PNLD (BRASIL, 2020), a coleção A CONQUISTA DA MATEMÁTICA (GIOVANNI Jr.; CASTRUCCI, 2018a) e (GIOVANNI Jr.; CASTRUCCI, 2018b) do estudante aborda os objetos de conhecimento utilizando uma linguagem matemática direta, que facilite a compreensão dos conceitos matemáticos. Os objetos de conhecimentos são apresentados em unidades divididas em: abertura, para quem quer mais, atividades, pense e responda, fórum, descubra mais, um novo olhar por toda parte, educação financeira, tratamento de informação, atualidade em foco e respostas.

Já a coleção TELÁRIS MATEMÁTICA (DANTE, 2018a) e (DANTE, 2018b) do estudante, segundo o Guia PNLD (BRASIL, 2020), favorece o desenvolvimento das habilidades presentes na BNCC (BRASIL, 2018). O livro é dividido em capítulos e cada capítulo contém as seguinte seções: atividades, explorar e descobrir, leitura Matemática, revisando seus conhecimentos, testes oficiais, verifique o que estudou, raciocínio lógico, você sabia?, um pouco de história da Matemática e ao final dos capítulos, as respostas.

5 A GEOMETRIA ANALÍTICA NOS LIVROS DIDÁTICOS

Em relação ao ensino da Geometria Analítica no ensino fundamental, a BNCC (BRASIL, 2018), define que

> Outro ponto a ser destacado é a aproximação da Álgebra com a Geometria, desde o início do estudo do plano cartesiano, por meio da geometria analítica. As atividades envolvendo a ideia de coordenadas, já iniciadas no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, podem ser ampliadas para o contexto das representações no plano cartesiano, como a representação de sistemas de equações do 1º grau, articulando, para isso, conhecimentos decorrentes da ampliação dos conjuntos numéricos e de suas representações na reta numérica. (BRASIL, 2018, p.274).

Com isso, o desenvolvimento da Geometria Analítica na educação básica deve buscar a manipulação algébrica, as representações matemáticas de objetos geométricos, a visualização e a articulação entre a Geometria e a Álgebra.

Em relação ao livro didático, sabe-se que é uma ferramenta muito importante no campo educacional. Segundo Mandarino (2010, p. 5), “o livro didático pode contribuir para o processo de aprendizagem como um interlocutor que dialoga com o professor e com o aluno e possibilita interações de vários tipos”.

Diante deste contexto, este trabalho busca analisar, de forma qualitativa, quais são as abordagens e as atividades propostas nas coleções de livros didáticos de Matemática de maior valor aquisitivo do 8° ano e 9° ano de acordo com o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (2020), em relação as habilidades selecionadas que tangenciam os conceitos de Geometria Analítica.

Retomando a Análise de Conteúdo, as próximas seções são divididas em sequência. A pré-análise é a primeira etapa desta técnica. Definida por Bardin (1977), como a etapa da organização, constituída por leitura, hipóteses, objetivos, etc. Para este trabalho, foram selecionadas as habilidades da BNCC (BRASIL, 2018) já definidas no Capítulo 3. Em seguida, a seleção das coleções de livros a serem analisadas, de acordo com o PNLD (BRASIL, 2020), que foram escolhidos pela maioria de professores brasileiros, apresentados no Capítulo 4.

A segunda etapa é denominada de exploração do material, na qual as coleções selecionadas foram analisadas de acordo com os capítulos e unidades que tratavam as habilidades que poderiam ter a inserção dos conteúdos/conceitos de Geometria Analítica. Também buscou-se verificar o quantitativo de atividades por coleção e ano escolar. Podendo ser resolvidas, propostas e complementadas.

Por fim, a última etapa é definida pelo tratamento dos resultados e interpretação, que será desenvolvida nas seções a seguir.

5.1 Análise de livros didáticos - 8° ano

Para recordar, as Habilidades que serão analisadas nas coleções dos livros do 8° ano da Unidade Temática Álgebra são

- **(EF08MA07)** Associar uma equação linear de 1° grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
- **(EF08MA08)** Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1° grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.

Conforme foi definido no Capítulo 4 serão analisadas o livro A CONQUISTA DA MATEMÁTICA (GIOVANNI Jr.; CASTRUCCI, 2018a) e o livro TELÁRIS MATEMÁTICA (DANTE, 2018a), do 8° ano. Como essas habilidades estão sendo abordadas com um olhar direcionado, buscando a inserção da Geometria Analítica com a Álgebra.

A habilidade EF08MA07 tem como objetivo associar a equação de 1º grau na forma algébrica a uma reta no plano cartesiano. No livro A CONQUISTA DA MATEMÁTICA (GIOVANNI Jr.; CASTRUCCI, 2018a) esse objetivo é abordado na Unidade 5, *Equações*, dividida em sete capítulos. Mas o desenvolvimento do seu conceito e estudo com Geometria analítica nesta só é apresentada no Capítulo 4, em uma seção chamada de *Representação Geométrica*, localizada na página 150, sendo explorado em apenas uma página, contendo uma atividade resolvida e duas propostas nesta mesma página.

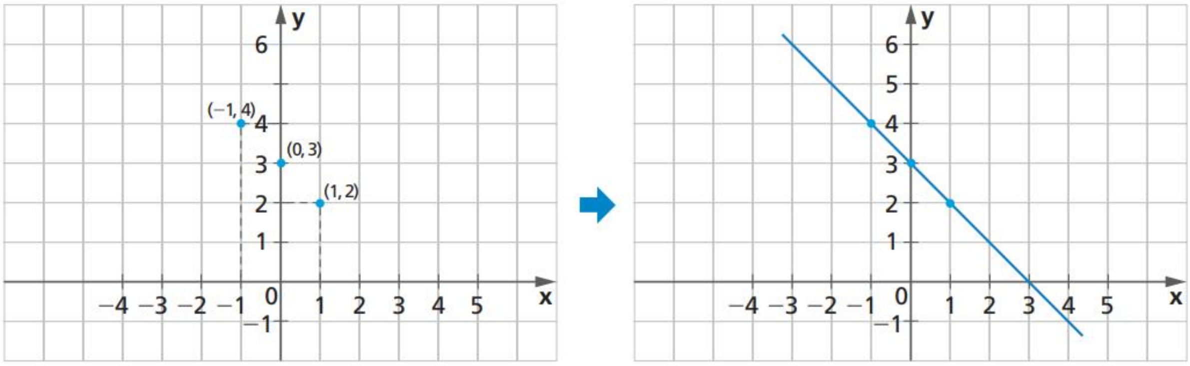
A apresentação do conteúdo se inicia com a resolução de uma atividade proposta, para representar a equação $x + y = 3$ no plano cartesiano. Propondo que deve ser feito um quadro para escolher os valores de x e calcular os valores de y correspondente, encontrando assim os pares ordenado que são soluções da equação. Em seguida, apresenta dois planos cartesianos, sendo que o primeiro contém os pares ordenados localizados e o segundo contendo a reta passando por esses pontos, conforme a Figura 3. Concluindo que a representação de uma equação do 1° grau com duas incógnitas é uma reta.

O autor propõe duas atividades para o estudante, sendo que a primeira solicita encontrar os pares ordenados das equações propostas e a segunda atividade que represente as equações propostas no plano cartesiano. Dessa forma, tem o objetivo de que o estudante consiga praticar o que foi aprendido na seção.

No livro TELÁRIS MATEMÁTICA (DANTE, 2018a), o objetivo da habilidade EF08MA07 se encontra no Capítulo 5 - *Sistema de equações do 1° grau com 2 incógnitas*, dividido em oito subseções. A primeira abordagem com Geometria Analítica é apresentada na página 136, intitulada por *Gráfico das soluções de uma equação do 1° grau com 2 incógnitas*. O objetivo também é trabalhado em uma página, contendo uma atividade resolvida e duas propostas.

Da mesma forma que o livro anterior, propõe que seja representada a equação dada no plano cartesiano. A equação pedida é $3x + y = 1$, sendo que x e y sejam números racionais e

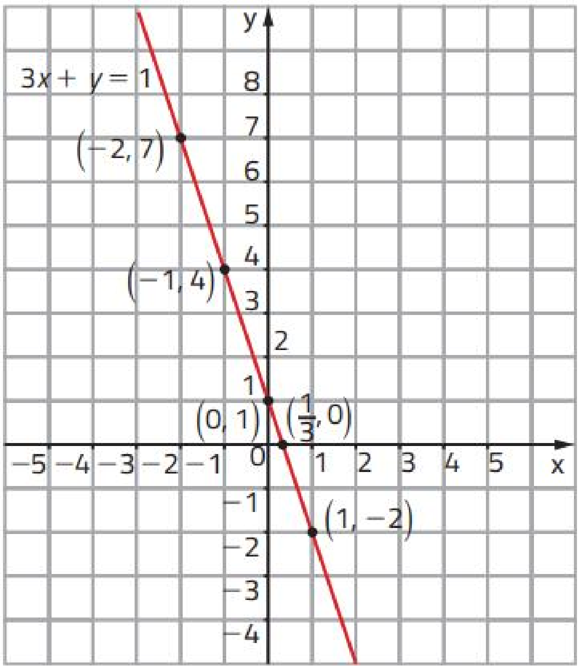
Figura 3 – Representação geométrica da equação $x + y = 3$.



Fonte: Giovanni Jr.;Castrucci (2018a, p. 150).

organiza os pares ordenados em formato de itens, ficando visivelmente preenchido na página. Em seguida, em apenas um plano cartesiano, representa os pares ordenados e a reta passando por eles, conforme a Figura 4.

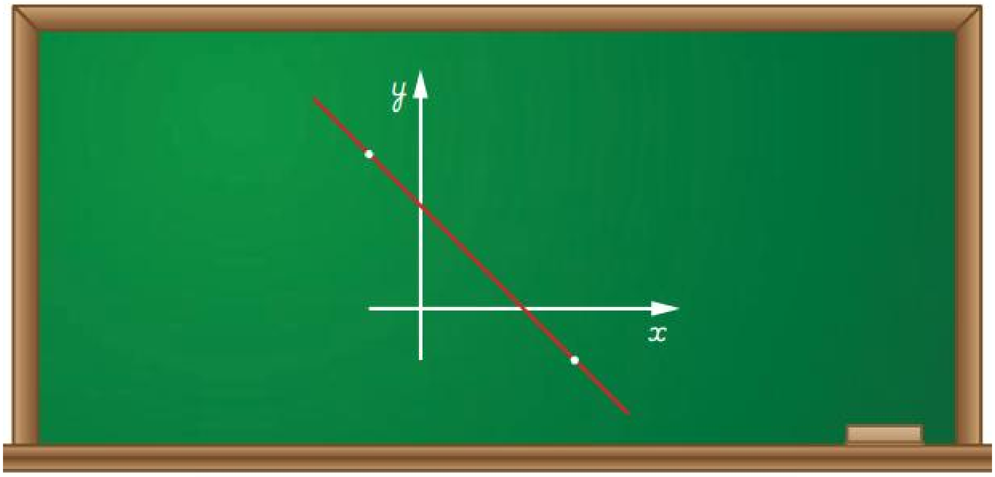
Figura 4 – Representação geométrica da equação $3x + y = 1$.



Fonte: Dante (2018a, p. 138).

Porém, o autor apresenta mais conclusões sobre essa representação, apontando que todos os pares ordenados encontrados anteriormente estão contidos na mesma reta. Sendo assim, conclui que os pares ordenados são soluções da equação se estiverem contidos na mesma reta e basta conhecer dois pares diferentes que são soluções de uma equação para traçar a reta que contém esses pontos correspondentes aos pares. Ou seja, é necessário apenas duas soluções para traçar a reta que contenha todas as outras soluções. Apresentando uma ilustração para representar essas afirmações, conforme a Figura 5.

Figura 5 – Representação geométrica de uma reta através de 2 pontos.



Fonte: Dante (2018a, p. 138).

Nas atividades propostas, o livro consegue explorar bem o conteúdo apresentado, solicitando ao estudante que encontre os pares ordenados da equação dada, represente-a no plano cartesiano e que responda quais as suas posições. Na atividade seguinte, através de alternativas, aborda se o par ordenado fornecido pertence ou não a equação dada.

A habilidade EF08MA08 tem como foco principal, mais uma vez, associar que a solução de um sistema de equações pode ser representado na forma algébrica e geométrica. Este objetivo é explorado na subseção do Capítulo 5, do livro A CONQUISTA DA MATEMÁTICA (GIOVANNI Jr.; CASTRUCCI, 2018a), sendo denominada por *Solução de um sistema de equações do 1°grau com duas incógnitas*, página 153, a última seção que se relaciona com Geometria Analítica.

O livro inicia com algumas definições importantes, relembrando que uma equação possui infinitas soluções, mas para a resolução de um sistema de equações, precisa ser encontrado uma solução que satisfaça as duas equações simultaneamente. Apresenta um exemplo de sistema de equações e tenta verificar vários pares ordenados, procurando o par que satisfaça as duas equações do sistema, de forma algébrica. Em seguida, aborda que o sistema poderia ser resolvido de forma geométrica, representando cada equação no plano cartesiano e verificando qual o ponto que elas se interceptam. Esse ponto é o par ordenado que será a solução do sistema.

A Figura 6 mostra a representação geométrica das equações $2x + y = 24$ e $x + y = 14$ e o par ordenado $(10,4)$ que é o ponto de interseção das duas retas, sendo assim a solução do sistema de equações contendo as duas retas.

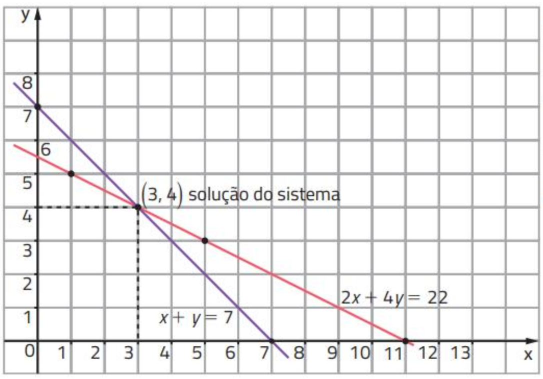
Nesta seção, são propostas cinco atividades, buscando que o estudante verifique se os pares ordenados dados são solução do sistema de equações também dados, seja de forma algébrica ou de forma geométrica, não definem o método. Não exigem que o estudante pratique a representação geométrica de um sistema de equações.

Figura 6 – Solução do sistema de equações com 2 incógnitas de forma geométrica

Fonte: Giovanni Jr.;Castrucci (2018a, p. 160).

Já no livro TELÁRIS MATEMÁTICA (DANTE, 2018a) esta mesma habilidade é explorada na seção *"Soluções de um sistema de 2 equações do 1° grau com 2 incógnitas"* na página 140. De forma similar ao livro anterior, também define que a solução do sistema é um par ordenado que satisfaça as duas equações simultaneamente. Utiliza como exemplo o sistema apresentado na seção anterior, a partir de uma situação-problema. Desenvolve a resolução na forma algébrica, dando pares ordenados e substituindo nas equações, até que satisfaça ambas. Também apresenta um outro método de resolução do sistema, chamada de solução gráfica, conforme a Figura 7.

Figura 7 – Solução gráfica do sistema de equações



Fonte: Dante (2018a, p. 140).

Nas atividades propostas, o livro explora a solução dos sistemas de equações em três atividades, porém apenas na Atividade 3 é solicitado de forma gráfica. Ficando a critério do estudante escolher a forma algébrica ou geométrica para resolver as outras atividades.

Em mais uma seção do livro são explorados com conceitos de Geometria Analítica. Intitulado por *A Classificação de sistemas de 2 equações do 1° grau com 2 incógnitas quanto ao número de soluções"*. Agora, já foram abordadas as duas formas de resolução de sistema:

algébrico e gráfico. O que torna o conteúdo bem interessante e de fácil entendimento para o estudante, que poderá escolher qualquer um dos métodos para a resolução. Sendo este, o maior diferencial em relação ao livro anterior.

Nesta seção são apresentadas duas atividades resolvidas e para o mesmo sistema é feito a resolução de forma algébrica, conforme a Figura 8.

Figura 8 – Método algébrico

$$x + y = 5 \Rightarrow x = 5 - y$$

$$2x + 2y = 6 \Rightarrow 2(5 - y) + 2y = 6 \Rightarrow 10 - 2\cancel{y} + 2\cancel{y} = 6 \Rightarrow 10 = 6 \text{ (sentença falsa)}$$

Fonte: Dante (2018a, p. 149).

Em seguida, este mesmo sistema é resolvido através da representação gráfica das duas retas e encontrando seu ponto de interseção, conforme a Figura 9.

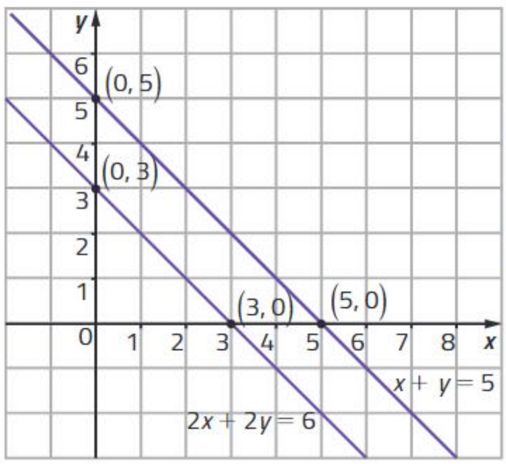
Figura 9 – Resolução pelo método gráfico

$x + y = 5$

x	y
0	5
5	0

$2x + 2y = 6$

x	y
0	3
3	0



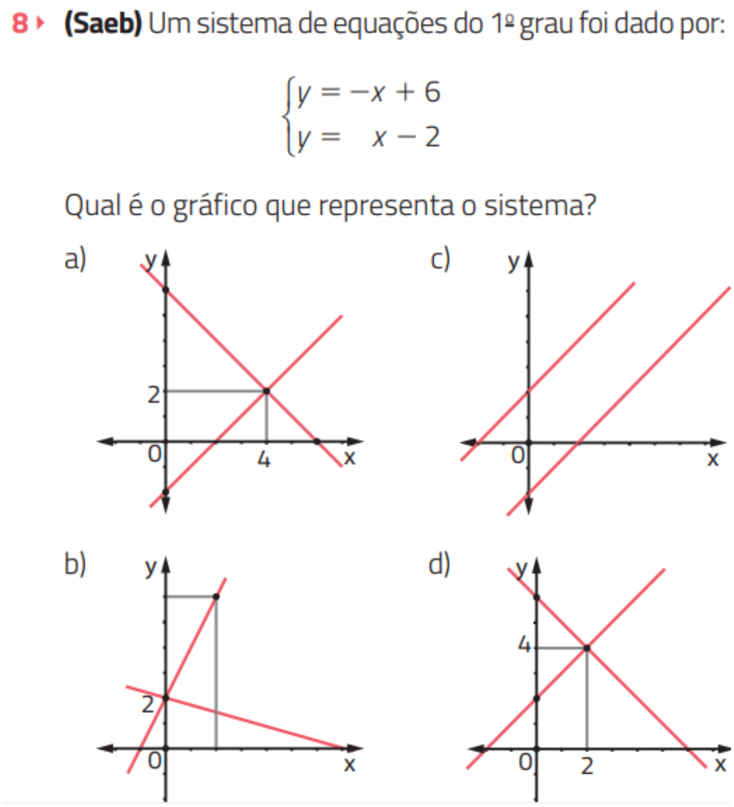
Fonte: Dante (2018a, p. 149).

Os tipos de interseção de retas são explorados, relacionando-os com as classificações do sistema. Se a interseção entre as duas retas for um ponto, o sistema é classificado com possível e determinado e as retas são concorrentes. Se não houver nenhum ponto de interseção, o sistema é impossível e as retas são paralelas. E, se houver vários pontos de interseção, o sistema será possível indeterminado e as retas coincidentes. Retomando a atividade proposta que esta resolvidas de duas formas, conforme a Figura 8 e a Figura 9, o livro conclui que o sistema é impossível, pois as retas que representam as equações são distintas e paralelas. Logo, não tem ponto em comum.

A seção possui apenas uma atividade proposta, com algumas alternativas, solicitando que os estudantes classifiquem os sistemas dados em impossível, possível determinado e possível indeterminado. O método de resolução fica a critério do estudante.

Nas atividades de retomada dos conteúdos desenvolvidos na Unidade 5 do livro A CONQUISTA DA MATEMÁTICA (GIOVANNI Jr.; CASTRUCCI, 2018a) não é cobrado nenhuma atividade em relação a representação geométrica das retas e nem a solução geométrica do sistema de equações. No livro TELÁRIS MATEMÁTICA (DANTE, 2018a) encontra-se uma atividade que envolve representação de figuras geométricas no plano cartesiano na revisão dos conhecimentos. E, nos testes oficiais, o livro apresenta quatro atividades que relacionam os sistemas de equações com a sua representação gráfica, em especial a Questão 8, que foi retirada do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), conforme a Figura 10.

Figura 10 – Questão 8 dos testes oficiais


8 **(Saeb)** Um sistema de equações do 1º grau foi dado por:

$$\begin{cases} y = -x + 6 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

Qual é o gráfico que representa o sistema?

a)

b)

c)

d)

Fonte: Dante (2018a, p. 156).

Finalizando assim, todas as seções dos livros que trabalham com as habilidades da unidade temática Álgebra com a inserção da Geometria Analítica. Percebe-se que a associação de uma reta e sua respectiva representação algébrica foi pouco explorada. Ambos os livros usaram o sentido algébrico para o geométrico, mas não fizeram o caminho inverso, ou seja, a partir de uma reta dada no plano cartesiano e dois pontos que pertencem a ela fazer a conversão para a representação algébrica.

Em relação a resolução de sistemas, os dois livros são bem parecidos, mas apenas o livro TELÁRIS MATEMÁTICA (DANTE, 2018a) explorou o conceito de classificação dos sistemas de acordo com a representação gráfica ou algébrica. Porém, poderia ter associado esses conceitos de retas e posições relativas entre duas retas com Geometria Plana, fazendo com que o estudante interligue esses dois campos matemáticos. O livro A CONQUISTA DA MATEMÁTICA (GIOVANNI Jr.; CASTRUCCI, 2018a) apenas cumpriu o objetivo da habilidade, representou a solução de um sistema na forma gráfica.

Em relação as atividades de ambos os livros, de acordo com o Quadro 6, percebe-se que a quantidade atividades que se relacionam com Geometria Analítica no livro TELÁRIS MATEMÁTICA (DANTE, 2018a) é bem maior do que o livro A CONQUISTA DA MATEMÁTICA (GIOVANNI Jr.; CASTRUCCI, 2018a). Sendo importante ressaltar que este explora uma seção a mais. Além disso, algumas atividades propostas ficam a critério do estudante escolher qual método irá utilizar, podendo ser o algébrico ou o geométrico. E, tendo essa possibilidade de escolha, acaba contemplando a Geometria Analítica.

Quadro 6 – Levantamento quantitativo de atividade que envolvem Geometria Analítica nos livros do 8° ano

	Seções	**Atividades resolvidas**	**Atividades propostas**
A conquista da Matemática	2	2	5
Teláris - Matemática	3	5	11

Fonte: Autoria própria (2022).

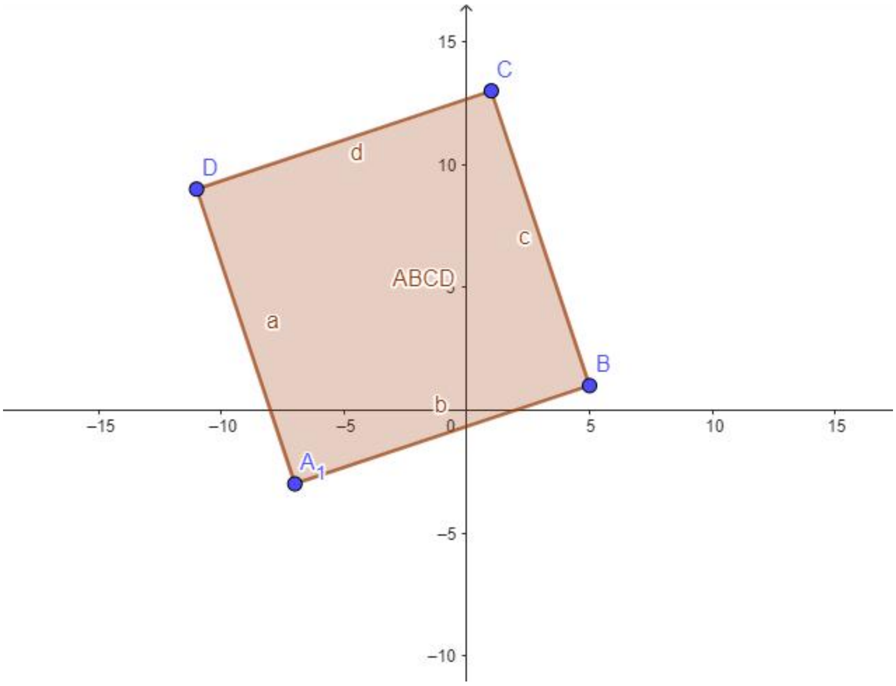
Outro ponto importante para destacar foi a atividade que fazia parte dos testes oficiais, que podem ser usados para mostrar ao estudante que essa relação entre Geometria e Álgebra são explorados em provas, concursos importantes.

A outra habilidade do 8° ano que foi selecionada para ser analisada nos livros didáticos faz parte da unidade temática Grandezas e medidas, sendo

- **(EF08MA19)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos

Porém, em nenhuma das coleções foi explorada com conceitos de Geometria Analítica e não foi feito nenhuma referência com os assuntos abordados nos capítulos anteriores, visto que nessa fase faltam alguns conceitos importantes para que o cálculo de área e perímetro seja intercalado com Geometria Analítica. Porém, poderia ter sido explorada a representação de quadriláteros, triângulos no plano cartesiano. Visto que conceitos como pares ordenados e segmento de reta que passa por dois pontos já foram explorados anteriormente. A representação de figuras planas poderiam ter sido representadas conforme a Figura 11.

Figura 11 – Representação geométrica do polígono $ABCD$



Fonte: Autoria própria (2022).

A Figura 11 representa um polígono representado no plano cartesiano conhecendo os pares ordenados de cada um dos seus vértices por $A = (-7, -3)$, $B = (5{,}1)$, $C = (1{,}13)$ e $D = (-11, 9)$. Assim, alguns conceitos de área e perímetro poderiam ser explorados em conjunto com suas representações geométricas no plano cartesiano.

5.2 Análise de livros didáticos - 9° ano

A Habilidade que será analisada nas coleções do 9° ano faz parte da Unidade Temática Geometria, sendo essa a

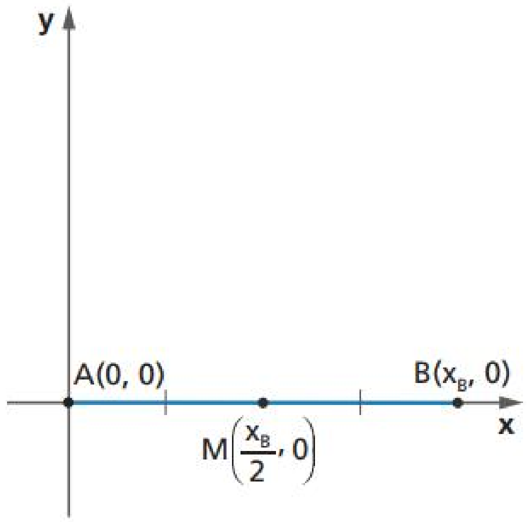
- **(EF09MA16)** Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.

Esta Habilidade contém dois objetivos importantes: calcular o ponto médio e distância entre dois pontos. De forma similar a análise dos livros do 8° ano, serão analisados o livro A CONQUISTA DA MATEMÁTICA (GIOVANNI Jr.; CASTRUCCI, 2018b) e o livro TELÁRIS MATEMÁTICA (DANTE, 2018b), do 9° ano. Como essa habilidade está sendo abordada com um olhar mais direcionado, buscando a inserção da Geometria Analítica.

O estudo da habilidade se encontra na Unidade 8, do livro A CONQUISTA DA MATEMÁTICA (GIOVANNI Jr.; CASTRUCCI, 2018b), denominada por *Figuras planas, espaciais e vistas*, página 222. A unidade aborda polígonos, relações métricas, áreas, representações no plano cartesiano, e figuras espaciais. Sendo que a seção que será analisada com a inserção da Geometria Analítica se encontra no Capítulo 2, nomeada de *Representações no plano cartesiano*, página 236. Neste capítulo está sendo apresentado as coordenadas do ponto médio e a fórmula da distância entre dois pontos, se resumido em apenas duas páginas.

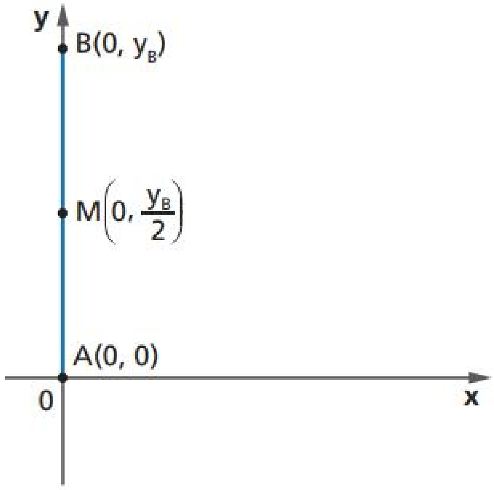
Inicialmente o capítulo retoma o conceito de ponto médio de um segmento de reta, definido como ”o ponto que divide o segmento em duas partes” (GIOVANNI Jr.; CASTRUCCI, 2018b, p. 236). E, em seguida, exemplifica como encontrar o ponto médio M da reta AB, conforme as Figuras 12, 13 e 14.

Figura 12 – Representação do ponto médio no eixo x



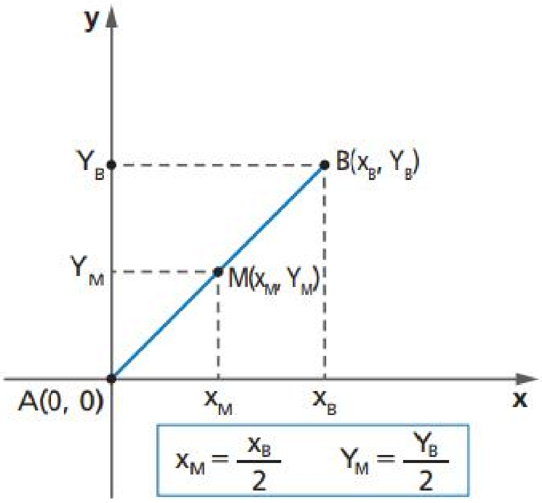
Fonte: Giovanni Jr.;Castrucci (2018b, p. 236).

Figura 13 – Representação do ponto médio no eixo y



Fonte: Giovanni Jr.;Castrucci (2018b, p. 236).

Figura 14 – Representação do ponto médio de dois pontos quaisquer



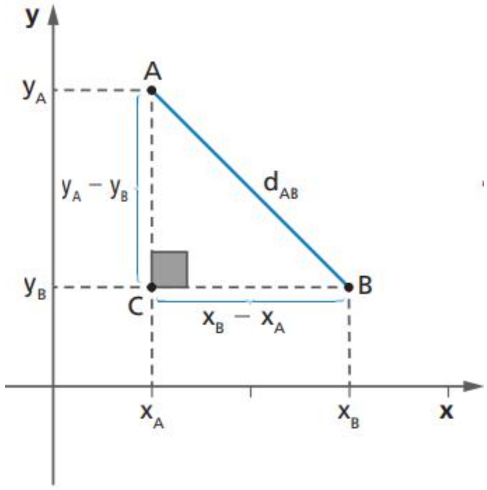
Fonte: Giovanni Jr.;Castrucci (2018b, p. 236).

Porém, não especifica em relação as posições, sendo que a Figura 12 refere-se quando os pontos pertencem ao eixo da abcissas x, a Figura 13 refere-se ao eixo das coordenadas y e a Figura 14 dado dois pontos em quaisquer posição. Sendo assim, o autor conclui que, para qualquer situação, encontrar as coordenadas do ponto médio $M = (x_M, y_M)$, sabendo que as coordenadas do ponto $A = (x_A, y_A)$ e o ponto $B = (x_B, y_B)$, se faz da seguinte forma:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{e} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Em seguida, o autor já apresenta como determinar a distância entre dois pontos, representada por (d_{AB}). A demonstração da fórmula é feita aplicando o teorema de Pitágoras, sem se preocupar com o módulo da raiz quadrada, mobilizando as representações algébricas de acordo com a representação geométrica do triângulo retângulo ABC no plano cartesiano, conforme a Figura 15.

Figura 15 – Representação geométrica do triângulo retângulo ABC



Fonte: Giovanni Jr.;Castrucci (2018b, p. 236).

Para finalizar o capítulo, são apresentadas duas atividades resolvidas, sendo que a primeira busca calcular a distância de dois pontos dados. A segunda já é mais interessante, onde pede- se o cálculo do perímetro de um triângulo com as coordenadas dadas e classificar quanto aos lados, conforme a Figura 16. Importante ressaltar que esse tipo de resolução é feito através do método das coordenadas, mas não é mencionado pelo autor.

Figura 16 – Atividade resolvida do Capítulo 2

2 Determine o perímetro de um triângulo cujos vértices têm as coordenadas O(0, 0), P(−7, 0) e Q(−4, −3) e classifique esse triângulo quanto às medidas de seus lados.

$$d_{OP} = \sqrt{(-7-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$d_{OQ} = \sqrt{(-4-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$d_{PQ} = \sqrt{[-4-(-7)]^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Assim, o perímetro é: $7 + 5 + 3\sqrt{2} = 12 + 3\sqrt{2}$

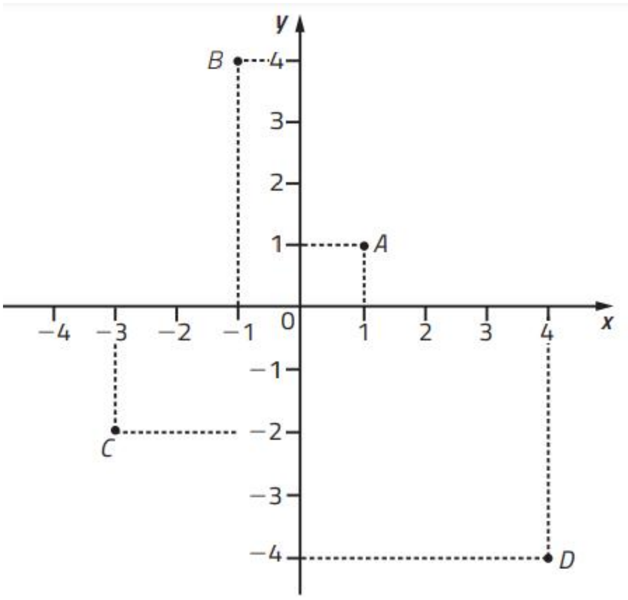
Esse triângulo é escaleno, pois tem os três lados com medidas diferentes entre si.

Fonte: Giovanni Jr.;Castrucci (2018b, p. 237).

Esta seção possui três atividades propostas, baseadas nos exercícios resolvidos, na qual pede o cálculo da distância de dois pontos, cálculo do perímetro do triângulo e a sua classificação de acordo com os lados.

O estudo da habilidade se encontra na Capítulo 8, do livro TELÁRIS MATEMÁTICA (DANTE, 2018b), chamado de *Grandezas e Medidas*, na qual aborda grandezas e medidas no plano cartesiano, volume de sólidos geométricos e unidade de medidas de outras grandezas. A análise será direcionada para a segunda seção que aborda o uso da Geometria Analítica que aproxima o objetivo da habilidade, encontrada na página 238. A seção já inicia o conteúdo apresentando grandezas e medidas no plano cartesiano, trazendo um pouco de História da Matemática, ao mencionar o matemático e filósofo Renê Descarte, como o criador do método das coordenadas. Em seguida, prossegue com o conteúdo relembrando o que é um par ordenado, como encontrá-lo no plano cartesiano e como este plano está dividido em quadrantes, mostrando uma representação gráfica de pontos definidos por pares ordenados, conforme a Figura 17.

Figura 17 – Representações de pontos no plano cartesiano



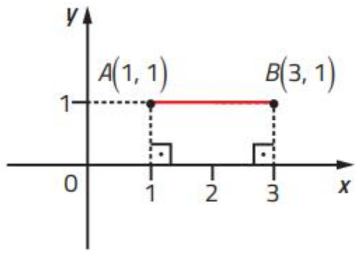
Fonte: Dante (2018b, p. 238).

Na página seguinte, em uma subseção, denominada por *Distância entre 2 pontos*, o autor apresenta como calcular a distância de dois pontos usando as coordenadas dos pontos no plano cartesiano. Separa esse estudo em distância entre dois pontos quando o segmento de reta que passa por esses pontos é paralelo ao eixo x (Figura 18) ou ao eixo y (Figura 19). Determinando que para calcular a distância entre esses pontos, basta realizar diferença das coordenadas dos pontos do eixo que é paralelo.

E, prosseguindo, apresenta a distância entre dois pontos quaisquer com uma atividade proposta, para o estudante explorar e descobrir. Porém, na sequência, ele inicia a explicação de como é feito esse cálculo, considerando o segmento de reta que liga dois pontos como a hipotenusa de um triângulo retângulo e descobrindo as medidas dos catetos, para poder aplicar o teorema de Pitágoras, sem generalizar em fórmula, conforme a Figura 20.

Ao final desta seção, são propostos para o estudante 7 atividades que envolvem determinar e localizar pontos no plano cartesiano, calcular a distância de dois pontos em variadas posições. Todos eles exploram bem o conteúdo trabalhado anteriormente.

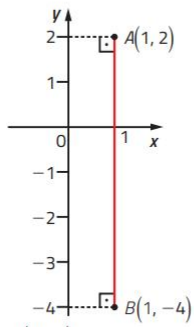
Figura 18 – Distância entre dois pontos paralelo ao eixo x



$$d(A, B) = x_B - x_A = 3 - 1 = 2$$

Fonte: Dante (2018b, p. 239).

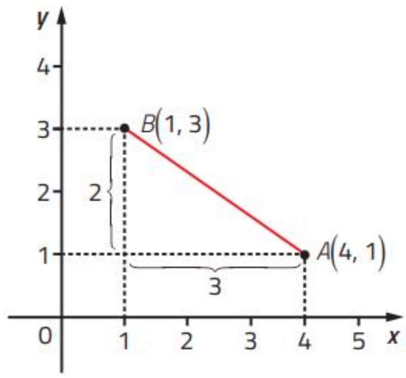
Figura 19 – Distância entre dois pontos paralelo ao eixo y



$$d(A, B) = y_A - y_B = 2 - (-4) = 6$$

Fonte: Dante (2018b, p. 239).

Figura 20 – Distância entre dois pontos quaisquer

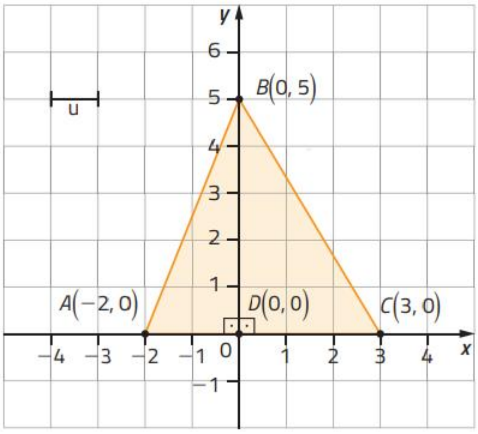


$$[d(A, B)]^2 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{13}$$

Fonte: Dante (2018b, p. 240).

A seção seguinte é muito interessante, nomeada de *Perímetro e área*. A diferença em relação ao livro anterior é que tem-se uma seção para explorar essas aplicações e ainda entra o conceito de área de regiões poligonais cujos vértices são pontos do plano cartesiano. No livro anterior foram propostos atividades apenas sobre o perímetro de regiões poligonais. A seção contém duas atividades resolvidas, sendo a primeira para calcular a área e o perímetro de um retângulo e a segunda para calcular a área e o perímetro de um triângulo. A segunda atividade apresenta o triângulo ABC representado no plano cartesiano, podendo assim identificar as coordenadas x e y de cada vértice. Para calcular seu perímetro, basta encontrar seus lados utilizando a distância entre seus vértices, dois a dois, conforme a Figura 21.

Figura 21 – Cálculo do perímetro do triângulo ABC apresentada pelo livro



O $\triangle ABC$ é retângulo: $[d(A, B)]^2 = 2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29 \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{29}$

O $\triangle BDC$ é retângulo: $[d(B, C)]^2 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34 \Rightarrow d(B, C) = \sqrt{34}$

Medida de comprimento da base do $\triangle ABC$: $d(A, C) = 3 - (-2) = 3 + 2 = 5$

Medida de comprimento da altura do $\triangle ABC$: $d(B, D) = 5 - 0 = 5$

Medida de perímetro do $\triangle ABC$: $d(A, C) + d(A, B) + d(D, C) = 5 + \sqrt{29} + \sqrt{34} \simeq 5 + 4{,}9 + 5{,}8 = 15{,}7$

Fonte: Dante (2018b, p. 242).

Esta seção contém quatro atividades propostas que seguem o mesmo raciocínio das atividades resolvidas, solicitando ao aluno que calcule a área e o perímetro das figuras dadas. Uma das atividades, em especial, solicita ao estudante que represente uma região retangular com o perímetro e área dado, desafiando-o a conseguir representar com as coordenadas que atendem as condições de perímetro e área.

A última seção do livro com Geometria Analítica é destinada ao conteúdo de ponto médio e abrange três páginas. Incia-se apresentando as coordenadas do ponto médio (M) de um segmento de reta, representadas no plano cartesiano, conforme a Figura 22.

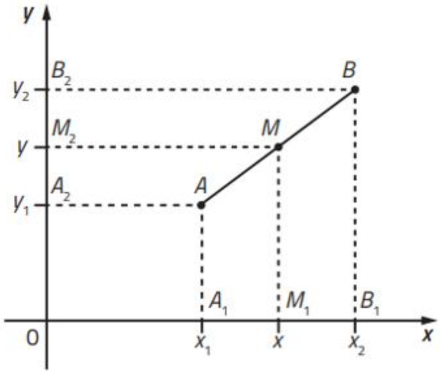
Em seguida, apresenta a demonstração utilizando o teorema de Tales,

$$\frac{AM}{MB} = \frac{A_1M_1}{M_1B_1} \Rightarrow 1 = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \Rightarrow x - x_1 = x_2 - x \Rightarrow 2x = x_2 + x_1 \Rightarrow x = \frac{x_2 + x_1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{A_2M_2}{M_2B_2} \Rightarrow 1 = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \Rightarrow y - y_1 = y_2 - y \Rightarrow 2y = y_2 + y_1 \Rightarrow y = \frac{y_2 + y_1}{2}, \quad (2)$$

Afirmando que essa demonstração independe da localização dos pontos A e B no plano cartesiano. Logo, as coordenadas do ponto médio são determinadas por

Figura 22 – Representação geométrica do ponto médio



Fonte: Dante (2018b, p. 244).

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

As primeiras duas atividades resolvidas são para calcular o ponto médio dada as coordenadas de dois pontos. A terceira atividade resolvida é mais elaborada e, para isso, o livro recorda que "A mediana de um triângulo é o segmento de reta que tem como extremidades um vértice e o ponto médio do lado oposto" (DANTE, 2018b, p. 245). E, sabendo que, todo triângulo tem três medianas e estas se cruzam em um único ponto chamado de baricentro. Diante disso, a Figura 23 apresenta um triângulo ABC com suas medianas determinadas.

Determinando as coordenadas dos vértices A, B e C, o próximo passo é calcular os pontos médios, visto que M_1 é o ponto médio do lado AB, M_2 é o ponto médio do lado AC e M_3 é o ponto médio do lado BC. Após isso, pode-se calcular o comprimento de cada mediana, utilizando o que já foi proposto, a distância de um vértice e o ponto médio do lado oposto, determinados por $d(A,M_3)$, $d(B,M_2)$ e $d(C,M_1)$, finalizando a resolução.

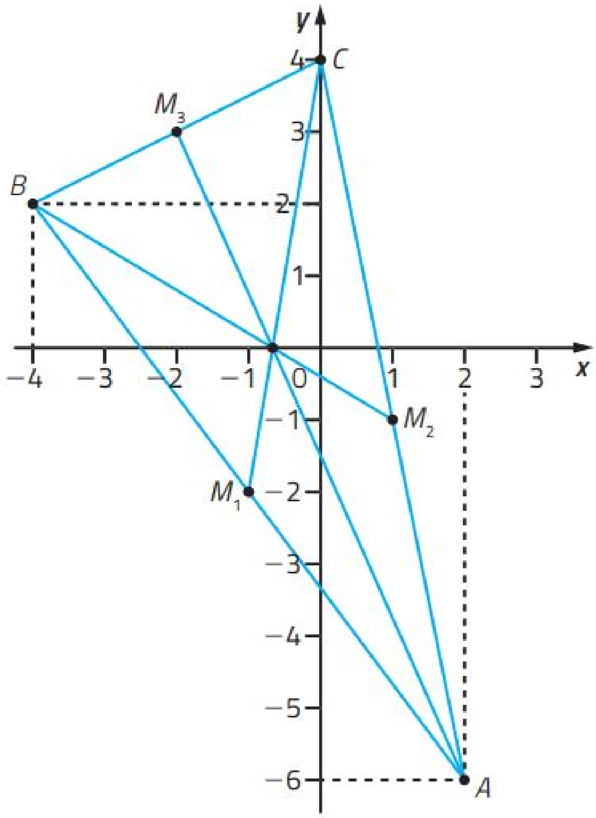
A Atividade 4 pede para determinar as coordenadas do vértice D em que as diagonais de um paralelogramo se interceptam. A resolução do livro é proposta de acordo com os conceitos de ponto médio, calculando o ponto médio das diagonais e em seguida, igualando a equação para encontrar x_d e y_d.

Para encerrar esta seção, o livro propõe quatro atividades para o estudante e todas são baseadas nas atividades resolvidas na seção, sem fugir do tema.

Outras duas atividades que envolvem Geometria Analítica e habilidade surge no final do capítulo, na página 267, nas atividades que pedem para verificar o que foi estudado.

Percebe-se com a análise dos livros, a grande diferença de como a mesma Habilidade foi explorada em cada livro. Além disso, existe uma diferença na ordem de como os assuntos foram abordados. Enquanto A Conquista da Matemática inicia seus estudos com ponto médio, o livro Teláris inicia com distância entre dois pontos, o que facilita para abordar problemas de cálculos de áreas e perímetros. Ambos usaram teorema para demonstrar as fórmulas. Entende-se que a demonstração da fórmula retoma teoremas importantes.

Figura 23 – Triângulo ABC e suas medianas - Atividade 3



Fonte: Dante (2018b, p. 245).

Observa-se no Quadro 7 que há um número expressivo de atividades que foram exploradas pelo livro TELÁRIS MATEMÁTICA (DANTE, 2018b) em relação ao livro A CONQUISTA DA MATEMÁTICA (GIOVANNI Jr.; CASTRUCCI, 2018b). É notório também a quantidade de páginas que cada livro destinou para tratar essa habilidade.

Quadro 7 – Levantamento quantitativo de Geometria Analítica nos livros do 9° ano

	Seções	**Atividades resolvidas**	**Atividades propostas**
A conquista da Matemática	1	2	3
Teláris - Matemática	4	12	17

Fonte: Autoria própria (2022).

Com o fim das análises, também percebe-se que os conceitos que faltavam no 8° ano foram trabalhados agora no 9° ano, permitindo que a distância entre Álgebra e Geometria diminua com a inserção da Geometria Analítica.

6 EXERCÍCIOS RESOLVIDOS COM GEOMETRIA ANALÍTICA

Com as análises dos livros didáticos, percebe-se que a Geometria Analítica pode ser utilizada como abordagem para diversas situações que envolvem Álgebra, Grandezas e Medidas e Geometria. Conceitos como determinar a equação da reta que passa por dois pontos dados, determinar o ponto médio de um segmento, determinar a distância entre dois pontos e aplicações em problemas de áreas e perímetros de figuras foram desenvolvidos nos livros do 8º e 9º ano.

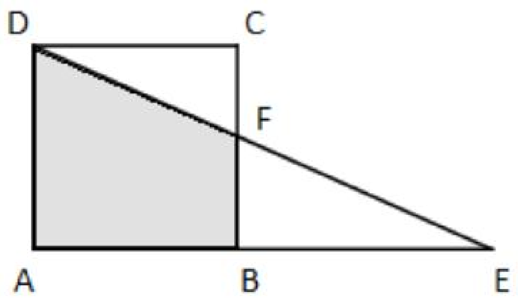
Com isso, a proposta deste capítulo é abordar outros tipos de exercícios que são resolvidos com o uso de Geometria Euclidiana Plana, propriedades das figuras planas, congruência ou semelhança de triângulos, tratando-os algebricamente, com o uso coordenadas. Ou seja, abordá-los com os conceitos de Geometria Analítica vistos nos livros didáticos e ampliando as relações que a Álgebra pode ter com a Geometria. Os sete exercícios que serão desenvolvidos foram retirados e adaptados do roteiro de estudos do Ciclo 5, do Programa de Iniciação Científica Júnior (BRASIL, 2021), edição especial.

A escolha desses exercícios em específico, se deu por abordar situações de áreas de figuras planas em conjunto com equações de retas e coordenadas de um ponto. Além disso, tem-se a intenção de mostrar que qualquer figura poligonal pode ser representada por meio de coordenadas no plano cartesiano.

Importante ressaltar que nos livros didáticos não foi desenvolvido como representar algebricamente a equação de uma reta que passa por dois pontos. Por isso, no Exercício 1 é desenvolvido de forma breve. Da mesma forma que também não foi desenvolvido como encontrar a interseção entre duas retas de forma algébrica. Por isso, foi desenvolvido nos Exercícios 2 e 4. A resolução de um sistema de equações com duas incógnitas não foi detalhado, visto que não é o ponto central.

Exercício 1. Na figura a seguir $ABCD$ é um quadrado de lado 4, os pontos A,B e E estão alinhados e $BE = 5$. O ponto F é a interseção dos segmentos BC e DE. Qual é a área da região sombreada?

Figura 24 – Quadrado $ABCD$ - Exercício 1



Fonte: PIC (2021, p.15).

Resolução: Considera-se um sistema de coordenadas de modo que $A = (0{,}0)$, $B = (4{,}0)$, $C = (4{,}4)$, $D = (0{,}4)$ e $E = (9{,}0)$. A reta DE é determinada utilizando as coordenadas do ponto D e E.

Para determinar uma reta que passa por dois pontos A e B de forma algébrica, é necessário considerar que $A = (x_1{,}y_1)$ e $B = (x_2{,}y_2)$. Basta resolver o sistema linear determinado por

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1, \\ ax_2 + b = y_2. \end{cases}$$

Com isso, encontra-se os valores de a e b e substitui na equação da reta representada por $ax + b = y$.

Agora, é preciso encontrar a reta que passa pelos pontos D e E.

$$\begin{cases} 0a + b = 4, \\ 9a + b = 0. \end{cases}$$

Neste sistema, já tem-se o valor de b, agora substituindo 4 na segunda equação, encontra-se $a = \frac{-4}{9}$.

Substituindo na equação geral da reta $y = ax + b$ e fazendo as manipulações algébricas necessárias, encontra-se a equação desta reta é igual a $4x + 9y = 36$.

Essa reta intersecta a reta CB, representada pela equação $x = 4$ no ponto $F = (4{,}\frac{20}{9})$. A área sombreada pode ser calculada como a diferença entre a área do triângulo AED e área do triângulo BEF.

Lembrando que para calcular a área de um triângulo, podemos utilizar a expressão $\frac{1}{2} \times base(b) \times altura(h)$.

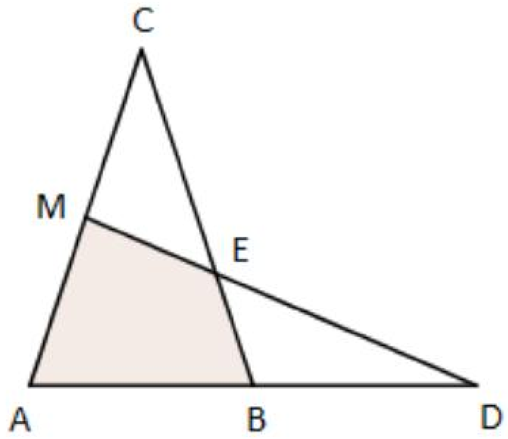
- Triângulo AED tem $b = 9$, coordenada x do ponto E e $h = 4$, coordenada y do ponto D.
- Triângulo BEF tem $b = 5$, coordenada x do ponto E e $h = \frac{20}{9}$, coordenada y do ponto F.

Logo, a área sombreada é:

$$\frac{1}{2} \times 9 \times 4 - \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{20}{9} = \frac{112}{9}.$$

Exercício 2: Na Figura 25, ABC é um triângulo isósceles de base $AB = 4$ e altura 6. O ponto M é o ponto médio do lado AC e B é o ponto médio do segmento AD. O ponto E é a intersecção dos segmentos MD e BC. Calcule a área da região sombreada

Figura 25 – Triângulo isósceles ABC - Exercício 2



Fonte: PIC (2021, p.15).

Resolução: Considera-se um sistema de coordenadas de modo que $A = (0{,}0)$, $B = (4{,}0)$, $C = (2{,}6)$ e $D = (8{,}0)$.

Sendo M o ponto médio do lado AC, pode-se calcular suas coordenadas usando

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Substituindo as coordenadas, tem-se

$$M\left(\frac{0 + 2}{2}, \frac{0 + 6}{2}\right).$$

Logo, $M = (1{,}3)$.

A reta BC tem equação $3x + y = 12$ e a reta MD tem equação $3x + 7y = 24$. Lembrando que, para determinar essas equações, basta utilizar o método que foi apresentado no Exercício 1.

O ponto E é a interseção entre essas duas retas. Para encontrar suas coordenadas é preciso resolver o sistema de equações contendo as equações das retas MD e BC.

$$\begin{cases} 3x + y = 12, \\ 3x + 7y = 24. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontra-se $x = \frac{10}{3}$ e $y = 2$. Logo, obtém-se o ponto $E = (\frac{10}{3}, 2)$.

A área sombreada pode ser calculada como a diferença entre a área do triângulo ADM e a área do triângulo BDE.

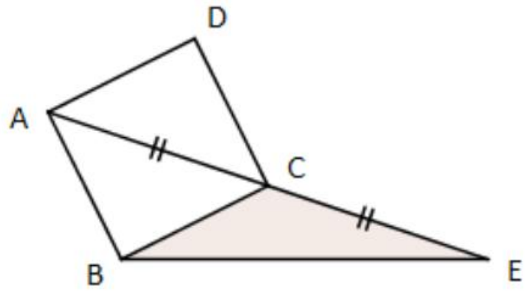
- Triângulo ADM tem $b = 8$, coordenada x do ponto D e $h = 3$, coordenada y do ponto M.
- Triângulo BDE tem $b = 4$, coordenada x do ponto B e $h = 2$, coordenada y do ponto E

Logo, a área sombreada é:

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 3 - \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 8.$$

Exercício 3: Na Figura 26, $ABCD$ é um quadrado de lado 6 e o ponto C é o ponto médio do segmento AE. Calcule a área do triângulo sombreado.

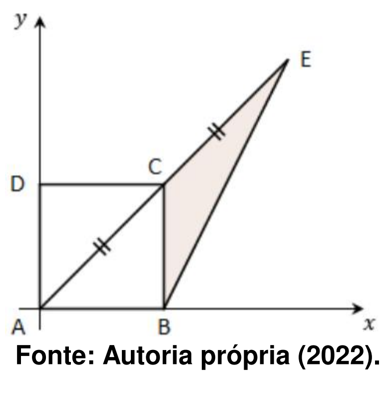
Figura 26 – Quadrado $ABCD$ - Exercício 3



Fonte: PIC (2021, p.15).

Resolução: Rotacionado a Figura 26 ,considera-se um sistema de coordenadas de modo que $A = (0,0), B = (6,0), C = (6,6)$ e $D = (0,6)$, conforme a Figura 27.

Figura 27 – Resolução Exercício 3.



Fonte: Autoria própria (2022).

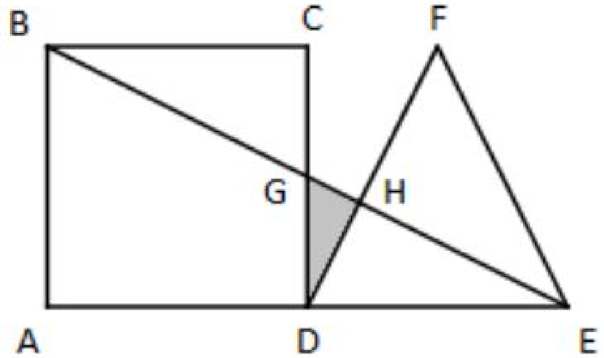
Se esse é o caso então $E = (12,12)$, pois a distância de AC é a mesma distância de CE. O triângulo obtusângulo BCE tem base $BC = 6$ e altura $x_E - x_B = 12 - 6 = 6$.

Logo, a área desse triângulo é igual a

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 8.$$

Exercício 4: Na Figura 28, $ABCD$ é um quadrado de lado 2 e DEF é um triângulo isósceles de base $DE = 2$ e altura 2. Os pontos A,D e E estão alinhados e os pontos B,C, e F também estão alinhados. O segmento BE intersecta os segmentos DC e DF nos pontos G e H. Calcule a área do triângulo DGH.

Figura 28 – Quadrado $ABCD$ e Triângulo DEF - Exercício 4



Fonte: PIC (2021, p.20).

Resolução: Introduza um sistema de coordenadas no plano da figura de modo que $A = (0,0), B = (0,2), C = (2,2), D = (2,0), E = (4,0)$ e $F = (3,2)$.

A reta DC tem equação $x = 2$, a reta BE tem equação $x + 2y = 4$ e a reta DF tem equação $2x - y = 4$.

O ponto G é a interseção entre as retas BE e DC. Então, para determinar suas coordenadas, precisa resolver o sistema de equações

$$\begin{cases} x + 2y = 4, \\ x = 2. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, tem-se $x = 2$ e $y = 1$. Logo, obtém-se o ponto $G = (2,1)$.

O ponto H é a interseção entre as retas BE e DF. Então, para determinar suas coordenadas, precisa resolver o sistema de equações

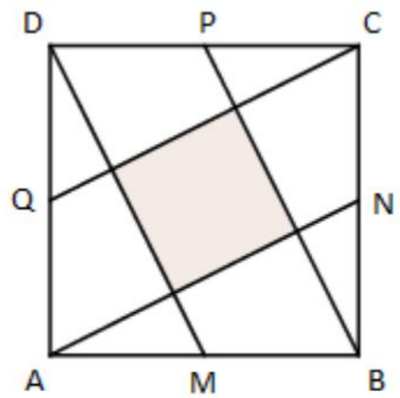
$$\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 2x - y = 4. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, tem-se $x = \frac{12}{5}$ e $y = \frac{4}{5}$. Logo, obtém-se $H = (\frac{12}{5}, \frac{4}{5})$.
Considerando que o triângulo DGH tem base $DG = 1$ e tem altura $x_H - x_D = \frac{12}{5} - 2 = \frac{2}{5}$ podemos calcular a área dese triângulo como:

$$\frac{1}{2} \times base \times altura = \frac{1}{2} \times 1 \times 25 = \frac{1}{5}.$$

Exercício 5: Na Figura 29, $ABCD$ é um quadrado de lado 10. Traçando segmento que ligam vértices a pontos médios dos lados, obtemos a seguinte figura. Calcule a área da região sombreada.

Figura 29 – Quadrado $ABCDE$.



Fonte: PIC (2021, p.20).

Resolução: Introduza um sistema de coordenadas no plano da figura de modo que os vértices do quadrado são dados por $A = (0,0), B = (10,0), C = (10,10), D = (0,10)$.

Nesse caso os pontos médios dos lados são $M = (5,0), N = (10,5), P = (5,10)$ e $Q = (0,5)$.

A partir dessas coordenadas pode-se calcular as equações das seguintes retas:

- reta AN : equação $x - 2y = 0$,
- reta BP: equação $2x + y = 20$,
- reta CQ: equação $-x + 2y = 10$,
- reta DM: equação $2x + y = 10$.

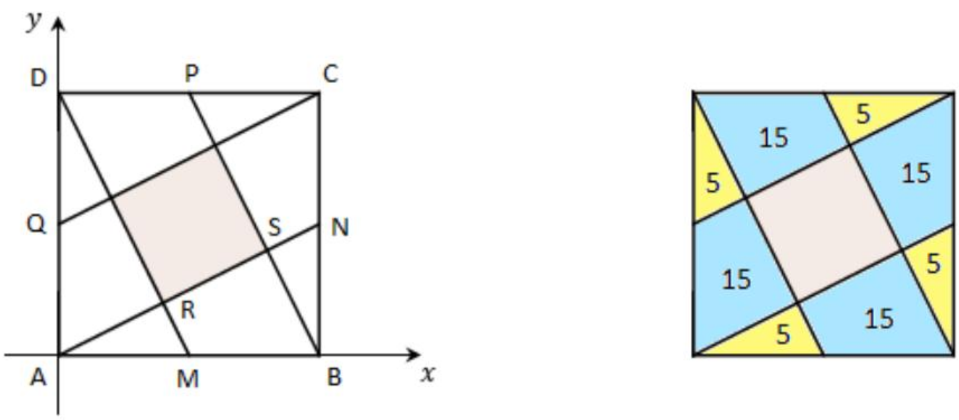
Resolvendo os sistemas de equações, determina-se os pontos R e S de interseção da reta AN com as retas DM e BP. Lembrando que para encontrar a interseção, basta resolver o sistema de equações contendo a equação dessas duas retas. Esses pontos são $R = (4{,}2)$ e $S = (8{,}4)$.

Com isso, basta calcular as seguintes áreas:

- área(AMR) = $\frac{5 \times 2}{2} = 5$,
- área(BNS) = $\frac{5 \times (10-8)}{2} = 5$,
- área(ABN) = $\frac{10 \times 5}{2} = 25$,
- área($MSBR$) = área(ABN) - área(AMR) - área(BNS) = $25 - 5 - 5 = 15$.

Pela simetria da figura, pode-se concluir que todos os triângulos amarelos da Figura 30 pintada a seguir tem mesma área igual a área (AMR) = 5 e que todos os quadriláteros azuis tem área igual a área ($MSBR$) = 15.

Figura 30 – Resolução Exercício 6



Fonte: Autoria própria (2022).

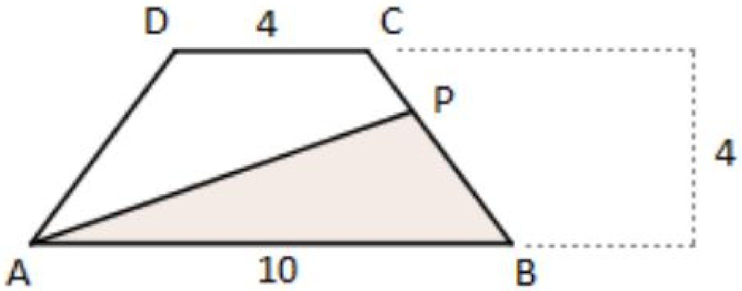
O quadrado $ABCD$ tem lado 10, logo a sua área será $10 \times 10 = 100$.

O quadrilátero central tem, portanto, área igual a

$$100 - 4 \times (5 + 15) = 20.$$

Exercício 6: Na Figura 31, $ABCD$ é um trapézio isósceles de base maior 10, base menor 4 e altura 4. Determine o ponto P do lado BC tal que o segmento AP divide o trapézio em duas regiões de mesma área.

Figura 31 – Trapézio $ABCD$ - Exercício 6



Fonte: PIC (2021, p.21).

Resolução: Considere um sistema de coordenadas tal que $A = (0{,}0), B = (10{,}0), C = (7{,}4)$ e $D = (3{,}4)$. A reta BC tem equação $y = -\frac{4}{3}x + \frac{40}{3}$.

Portanto um ponto P sobre o lado BC tem coordenadas do tipo

$$P = \left(x, -\frac{4}{3}x + \frac{40}{3}\right).$$

A área de um trapézio é dada por

$$A = \frac{(B + b) \times h}{2}.$$

O trapézio $ABCD$ tem área

$$\frac{(10 + 4) \times 4}{2} = 28.$$

Para que o segmento AP divida o trapézio em duas regiões de mesma área, basta que o triângulo ABP tenha área 14. Como esse triângulo tem base 10 e altura $-\frac{4}{3}x + \frac{40}{3}$, sua área é dada por

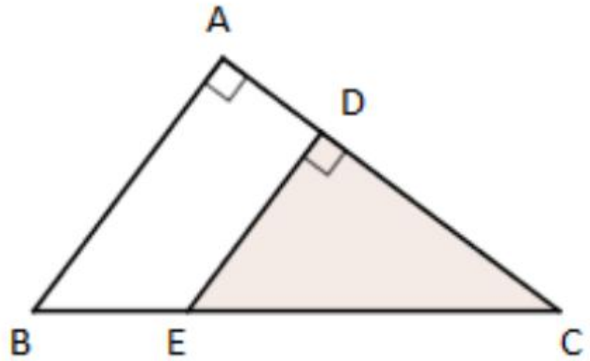
$$\frac{1}{2} \times 10 \times \left(-\frac{4}{3}x + \frac{40}{3}\right) = 14.$$

Resolvendo essa equação obtém-se $x = \frac{79}{10}$. Substituindo na equação da reta BC obtemos $y = \frac{14}{5}$. Portanto, $P = (\frac{79}{10}, \frac{14}{5})$.

Exercício 7 Na Figura 32, ABC é um triângulo retângulo de catetos $AB = 3$ e $AC = 4$ e de hipotenusa $BC = 5$. O segmento DE é paralelo ao cateto AB e ele divide o triângulo ABC em duas regiões de mesma área. Qual é o comprimento do segmento AD?

Resolução: Considere um sistema de coordenadas tal que $A = (0{,}0), B = (3{,}0)$ e $C = (0{,}4)$. Seja $D = (0{,}h)$ um ponto sobre o segmento AC.

Figura 32 – Triângulo ABC - Exercício 7



Fonte: PIC (2021, p. 21).

A reta BC tem equação $4x + 3y = 12$. O ponto de interseção dessa reta com a reta horizontal $y = h$ é o ponto

$$E = \left(\frac{12 - 3h}{4}, h \right).$$

Como a área do triângulo CDE deve ser igual a 3, pois a área do triângulo ABC é dada por $\frac{4 \times 3}{2} = 6$, pode-se escrever a equação da área do triângulo CDE

$$\frac{1}{2} \times \frac{12 - 3h}{4} \times (4 - h) = 3.$$

Essa equação é equivalente a $(4 - h)^2 = 8$. Pela definição de raiz quadrada, devemos ter $4 - h = \sqrt{8}$. Daí segue que $AD = h = 4 - \sqrt{8}$.

7 CONCLUSÃO

Ao selecionar á habilidades na BNCC (BRASIL,2018) para a inserção da Geometria Analítica, percebe-se varias possibilidades, mas levando em consideração o que o estudante teria que ter como requisitos. Quando se passa para a análise de livros, pode-se verificar que a abordagem desses conceitos estão fragmentadas na coleção A Conquista da Matemática. Enquanto a coleção Teláris Matemática consegue articular e desenvolver estes conceitos com outros próximos, fazendo conexões entre os vários campos da Matemática e suas respectivas representações.

No que tange a apresentação dos conceitos e conteúdos, percebeu-se que a coleção A Conquista da Matemática preocupou-se em ser bem direta e resumida, não se atrelando e nem interligando outros conceitos, o que pode contribuir para que os estudantes associem um estudo de Geometria e Álgebra totalmente independentes e que quando se encontram, tem-se apenas fórmulas. Isso ocorreu tanto na coleção do 8° ano quanto na do 9° ano. A coleção Teláris Matemática preocupou-se em demonstrar e apresentar inúmeras atividades resolvidas para melhorar o desenvolvimento do conceito.

Além disso, verificou-se que as atividades resolvidas não partiu de uma situação problema em nenhuma das coleções, apenas utilizaram atividades práticas, sem associar com outros campos matemáticos ou até mesmo com a tecnologia, que poderia contribuir para um melhor entendimento. E, em nenhum momento, em ambas as coleções, teve uma relação ou uma definição do que poderia ser Geometria Analítica, mesmo que os estudantes tivessem bagagem teórica para compreender.

Quanto a relação entre a Álgebra e a representação geométrica, percebe-se que ambos desenvolveram conforme a BNCC (BRASIL,2018). Mas, a diferença entre a forma de como abordaram e desenvolveram é bem grande, principalmente no 9° ano.

Então, vem-se com uma ideia de proposta de alguns exercícios que poderiam ser resolvidos facilmente ou rapidamente com a Geometria Plana, para ser abordado com conceitos de Geometria Analítica. Visando não encontrar uma forma mais fácil e sim diminuir a distância ente Geometria Analítica e outros campos matemáticos. Deixando claro que a Geometria Analítica só é mais uma abordagem para que o estudante desenvolva os conceitos de Geometria e Álgebra e tem em seu leque, varias formas de resolver problemas matemáticos.

Com isso, é necessário perceber que o conteúdo e conceitos de Geometria Analítica não é só visto no Ensino Médio, mas estão inseridas desde os últimos anos da Ensino Fundamental e deve ser definida e utilizada de forma que seja mais um campo matemático a ser explorado.

REFERÊNCIAS

AMORIN, N. D. de. Pnld e o livro didático dos anos iniciais: Estatística. In: **XIX EBRAPEM, Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática**. Pernambuco: [*s.n.*], 2015.

BARDIN, L. **Análise de conteúdos**. Lisboa: Edições 70, 1977.

BATISTA, A. A. G. **Recomendações para uma política do livro didático**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental, 2001.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1996. Tradução de Elsa F. Gomide.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a base. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 15 novembro. 2021.

BRASIL. **Guia Digital PNLD 2020**: Pnld 2020: Matemática. Brasília, 2020. Disponível em: https://www.professoresdematematica.com.br/wa_files/guia_pnld_2020_pnld2020-matematica.pdf. Acesso em: 15 novembro. 2022.

BRASIL. **Programa de Iniciação Científica Junior - PIC - Roteiro de estudos do ciclo 5**. Rio de Janeiro: IMPA, 2021.

BRASIL. **Dinheiro na escola**. Brasília, 2022. Disponível em: Disponívelem:http://www.fnde.gov.br/index.php/perg-dinheiro-direto-na-escola. Acesso em: 08 nov. 2022.

DANTE, L. R. **Teláris matemática, 8º ano**: ensino fundamental, anos finais. 3ª. ed. São Paulo: Ática, 2018a.

DANTE, L. R. **Teláris matemática, 9º ano**: ensino fundamental, anos finais. 3ª. ed. São Paulo: Ática, 2018b.

GIOVANNI Jr., J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática, 8º ano**: ensino fundamental, anos finais. 4ª. ed. São Paulo: FTD, 2018a.

GIOVANNI Jr., J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática, 9º ano**: ensino fundamental, anos finais. 4ª. ed. São Paulo: FTD, 2018b.

MANDARINO, M. C. F. O livro didático de matemática: da avaliação ao uso em sala de aula. In: **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática, Cultura e Diversidade**. BAHIA: Lematec, 2010.

NERY, C. A geometria analítica no ensino médio. **Revista do professor de matemática.**, n. 67, p. 19–20, 2008.

RICHIT, A. **Projetos em Geometria Analítica Usando Software de Geometria Dinâmica**: Repensando a formação inicial docente em matemática. 2005. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2005.

SANTOS, A. T. C. dos. Caminhos e percursos da geometria analítica: estudo histórico e epistemológico. In: **I CEMACYC, I Congresso de Educación Matemática de América Central y El Caribe**. Replubica Dominicana: [*s.n.*], 2013.

WAGNER, E. A geometria analítica no ensino médio. **Revista do professor de matemática.**, n. 41, p. 17–22, 1999.