

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

MARINA SANDRINI

**MODELAGEM E ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE
MANIPULADORES COM ELOS FLEXÍVEIS**

DISSERTAÇÃO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2023

MARINA SANDRINI

**MODELAGEM E ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE
MANIPULADORES COM ELOS FLEXÍVEIS**

**MODELING AND RELIABILITY ANALYSIS OF
MANIPULATORS WITH FLEXIBLE LINKS**

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Prof. Dr. Edson Hideki Koroishi
Coorientador: Prof. Dr. Fabian Andres Lara Molina

CORNÉLIO PROCÓPIO

2023



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, para fins não comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es) e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer a UTFPR-CP, pela oportunidade e ao PPGEM por todo auxílio no programa de de Mestrado. Gostaria de agradecer a CAPES pela grande oportunidade de realizar o mestrado, com bolsa de pesquisa, que fez um grande diferencial nessa jornada.

Gostaria de agradecer ao meu Orientador Edson Hideki Koroishi, ao meu co-orientador Fabian Andres Lara Molina e ao professor Fernando José Antonio, por todo apoio, dedicação e suporte que me deram, para realização desse trabalho. Pois foram meses difíceis e com certas dificuldades, e sem o apoio deles, isso não seria possível. Gostaria de agradecer ao NUAPE, por proporcionar apoio psicológico, nesse período. E principalmente, agradecer a psicóloga Milena Barbosa, pelo seu profissionalismo, por todas as consultas e orientações, para fazer esse trabalho possível. Agora gostaria de agradecer a minha Família, aos meus pais, Olivio Sandrini Junior e Meire Aparecida da Silva, e minha irmã gêmea, Beatriz Sandrini, por todo apoio, paciência e incentivo que me deram nesse sonho; ao meu avô, Olivio Sandrini, por toda a oportunidade escolar e acadêmica, que me proporcionou a vida toda, para eu ter minha formação no Mestrado; agradeço também a minha avó, tios, tias, padrinho, madrinhas, primos, primas, amigas e amigos, que me deram o total apoio e suporte, antes e durante esses anos.

RESUMO

SANDRINI, Sandrini. **Modelagem e Análise de Confiabilidade de Manipuladores com Elos Flexíveis**. 2023. 43 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2023.

Esta dissertação de mestrado apresenta uma abordagem, a qual baseia-se no método estocástico de elementos finitos com o princípio de Lagrange. Isso foi feito para obter o modelo dinâmico de manipuladores com elos flexíveis e modelar parâmetros incertos dos braços flexíveis, como a rigidez. Neste sentido, o presente trabalho permitiu a análise da resposta dinâmica dos manipuladores flexíveis com incertezas em termos de resposta no domínio do tempo e no domínio da frequência. Já a análise de confiabilidade permitiu avaliar o efeito das incertezas paramétricas sobre as vibrações residuais. Os métodos numéricos baseados na confiabilidade de primeira ordem foram analisados para entender se usados em conjunto com a formulação do modelo dinâmico baseado em elementos finitos estocásticos, se tornam adequados. Os resultados encontrados valida a metodologia estudada e propõe a aplicação de trabalhos futuros no âmbito de projeto ótimo e controle.

Palavras-chave: Manipulador Flexível. Parâmetros Incertos. Monte Carlo. Primeira Ordem. Confiabilidade.

ABSTRACT

SANDRINI, Sandrini. **Modeling and Reliability Analysis of Flexible Link Manipulators**. 2023. 43 p. Dissertation (Master's Degree in Mechanical Engineering) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2023.

This master's dissertation presents an approach based on the stochastic method of finite elements with the Lagrange principle. This was done to obtain the dynamic model of manipulators with them flexible and uncertain model parameters of flexible arms, such as force. In this sense, the present work allowed the analysis of the dynamic response of the flexible manipulators with intermittents in terms of response in the time domain and in the frequency domain. The reliability analysis allowed evaluating the effect of parametric uncertainties on residual vibrations. Numerical methods based on first-order reliability were analyzed to understand whether used in conjunction with the formulation of the dynamic model based on stochastic finite elements, they become adequate. The results found validate the studied methodology and propose the application of future work in the scope of optimal design and control.

Keywords: Flexible Manipulator. Parameters. Monte Carlo. First Order. Reliability.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Robô articulado do tipo KUKA LBR IIWA	11
Figura 2 – Representação do manipulador flexível	15
Figura 3 – Elo i e elemento ij : coordenadas generalizadas e definições geométrica . . .	18
Figura 4 – Autovalores e autofunção para a covariância exponencial $C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$	23
Figura 5 – Probabilidade da função densidade de Z	28
Figura 6 – Algoritmo: Confiabilidade de Primeira Ordem	29
Figura 7 – FRF do manipulador flexível de um elo	31
Figura 8 – Torque da junta e deslocamento da ponta do manipulador flexível de um elo	32
Figura 9 – Convergência do erro máximo para o número de amostras (n_s) usando MCS	33
Figura 10 – Resposta dinâmica do manipulador flexível de um elo com parâmetros incertos	33
Figura 11 – FRF para várias definições de θ_2	34
Figura 12 – Resposta conjunta do manipulador flexível de dois elos.	35
Figura 13 – FRF do manipulador flexível de dois elos com incertezas	35
Figura 14 – Juntas do manipulador flexível de dois elos com incertezas	36
Figura 15 – Vibração residual $\delta(\theta)$	37
Figura 16 – Confiabilidade como função das variáveis h e b	38

LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E ACRÔNIMOS

SIGLAS

FORM	Método de Confiabilidade de Primeira Ordem
MMA	Método dos Modos Assumidos
SMC	Simulação de Monte Carlo

LISTA DE SÍMBOLOS

LETRAS LATINAS

\mathbf{f}	Vetor de forças e momentos generalizados
$\mathbf{H}(\omega)$	Função de resposta de Receptância
$\mathbf{K}_{\psi_{ij}\psi_{ij}}$	Matriz estocástica de rigidez do elemento ij
\mathbf{K}_{ij}	Matriz de Rigidez do elemento ij
$\mathbf{M}_{\psi_{ij}\psi_{ij}}$	Matriz estocástica de massa do elemento ij
\mathbf{M}_{ij}	Matriz de Massa do elemento ij
\mathbf{r}_{ij}	Posição Cartesiana de O_{ij} com relação a O
Ω_x	Domínio geométrico do campo aleatório
$\Phi_k(x_{ij})$	Funções de forma do elo i
ρ	Densidade do elo
θ	Processo randômico.
A	Área da seção transversal do elo
$C(x_1, x_2)$	função de covariância do campo aleatório.
E	Modulo de Young do elo
$f_r(x)$	Autofunção de $C(x_1, x_2)$
$H(x, \theta)$	Campo aleatório unidimensional
I	Momento de inercia da área da seção transversal do elo
i	Índice do elemento finito
j	Número de elemento finito
k	Índice do elo
l_i	Comprimento dos elos
l_j	Comprimento dos de cada elemento finito
m	Número de elos do manipulador
n_g	Número total de coordenadas generalizadas
n_{ij}	Número de elementos do elos i
T	Energia cinética.
t	Tempo
T_{ij}	Energia Cinética do elemento ij
$u_{i,2(j-1)+k}$	Coordenadas generalizadas do elo ij
V	Energia potencial
V_{ij}	Energia Potencial do elemento ij
y_{ij}	Deslocamento transversal dos elos

LETRAS GREGAS

$\lambda_r(x)$	Autovalor de $C(x_1, x_2)$
----------------	----------------------------

ω	Frequência de excitação	[rad/s]
ϕ_i	Posição angular da junta para $i = 1, \dots, m$	
$\xi_r(\theta)$	Variáveis alatoarias	

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	JUSTIFICATIVAS	13
1.2	POSICIONAMENTO DO PROBLEMA DE PESQUISA	14
1.3	OBJETIVOS	15
1.3.1	Objetivo Geral	15
1.3.2	Objetivos Específicos	15
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	17
2.1	MODELAGEM DETERMINÍSTICA DE MANIPULADOR FLEXÍVEL	17
2.2	MODELAGEM DE MANIPULADOR FLEXÍVEL COM INCERTEZAS	21
2.3	MODELAGEM DINÂMICA DE MANIPULADOR COM UM ELO . .	24
2.4	ANÁLISE DE CONFIABILIDADE	25
2.4.1	Conceitos Básicos	26
2.4.2	Métodos para Avaliar a Confiabilidade	27
2.4.2.1	Simulação de Monte Carlo	27
2.4.2.2	Método de Confiabilidade de Primeira Ordem	28
2.4.3	Método de Confiabilidade de Segunda Ordem	30
3	RESULTADOS E DISCUSSÃO	31
3.1	MODELAGEM DOS MANIPULADORES	31
3.1.1	Manipulador com um Elo	31
3.1.2	Manipulador com Dois Elos	34
3.2	ANÁLISE DE CONFIABILIDADE	36
3.2.1	Análise de Confiabilidade	36
4	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	39
	REFERÊNCIAS	40

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, há um crescente interesse em diagnósticos e prognósticos no cenário industrial com o objetivo de evitar futuros problemas. Nos processos de manufatura, os robôs industriais são equipamentos amplamente utilizados no contexto da automação. Em sua grande maioria, esses robôs são do tipo manipulador, isto é, consistem em elos rígidos, que são conectados por juntas que permitem o movimento relativo dos elos adjacentes. Essas juntas são geralmente instrumentadas com sensores de posição, que permitem medir a posição relativa dos elos adjacentes (CRAIG, 2006).

Pela sua complexidade, pode-se afirmar que os componentes mecânicos destes sistemas sofrem desgaste contínuo, o que causa variações nas condições de operação. Neste contexto, a modelagem estrutural e a avaliação da confiabilidade dos manipuladores é relevante para o aprimoramento do desempenho destes sistemas mecânicos. Neste sentido, uma das principais considerações está em analisar em quais níveis de vibração estrutural esses manipuladores operam visando correções de natureza preditiva (LOPEZ *et al.*, 2014).

Os algoritmos de controle do robô devem controlar a vibração do sistema, bem como seu movimento bruto. O gerenciamento de vibração pode ser necessário mesmo em robôs rígidos para reduzir o tempo de ciclo quando submetido a cargas dinâmicas altas em altas velocidades ou ao manipular grandes cargas úteis (SICILIANO; KHATIB, 2016). Por este motivo, é de vital importância estudar seu comportamento dinâmico e avaliar o impacto da variação nas condições operacionais.

Os manipuladores flexíveis são constituídos por elos, e esses são interligados por juntas, as quais são responsáveis pela rotação ou translação do manipulador. Na ponta são colocadas ferramentas, as quais são movimentadas pelos atuadores que podem ser hidráulicos, elétricos ou pneumáticos. E esses são monitorados por sensores de posição e velocidade (TAKANO, 2016).

Os manipuladores flexíveis possuem um sistema de transmissões flexíveis e elos mais leves, o primeiro é responsável por introduzir a flexibilidade nas juntas, já o segundo implica elos com menor área transversal, gerando elos flexíveis. As juntas flexíveis mostram que o deslocamento entre a posição dos elos e a posição dos atuadores é variante no tempo (CHANG; YEN, 2011). Segundo Takano (2016), os trabalhos de Makarov *et al.* (2012) com robôs manipuladores flexíveis, devem possuir uma estrutura mais leves, por causa das áreas de aplicações, as quais são



Figura 1 – Robô articulado do tipo KUKA LBR IIWA

Fonte: TAKANO (2016)

médicas, espaciais, nucleares e industriais. Uma aplicação do robô manipulador seria o KUKA LBR IIWA, o qual foi desenvolvido pela empresa KUKA, como mostra a Figura 1. Esse robô foi projetado para operar em ambientes industriais com materiais leve, além disso possui alta sensibilidade permitindo um ambiente de trabalho seguro (TAKANO, 2016).

Algumas abordagens são mais utilizadas para derivar o modelo de manipuladores flexíveis, classificadas em quatro estratégias principais: abordagem de parâmetros concentrados, abordagem de análise numérica, Método dos Modos Assumidos (MMA) e método de perturbação (AZEVEDO, 2003).

O método simples e mais antigo para modelar a flexibilidade das articulações é denominado *Abordagem de Parâmetros Concentrados*. Este modela o elo flexível, com massas concentradas unidas por molas lineares. Assim, o elo é dividido em quantas massas concentradas forem necessárias para representar o comportamento dinâmico do manipulador (YOSHIKAWA; HOSODA, 1996). De acordo com essa abordagem, um manipulador flexível multi-elos pode ser modelado com base no mecanismo de integridade tensional de triângulo duplo 2D (ZHAO *et al.*, 2021). Porém, a desvantagem para a aplicação desta teoria está no fato de que a análise dinâmica a definição dos coeficientes de rigidez das molas lineares não é evidente (THEODORE, 2012).

Por outro lado, o método de perturbação para modelar os manipuladores de elo flexível consiste em dividir a dinâmica em um conjunto de equações da dinâmica rígida e um conjunto de equações linearizadas sobre o movimento rígido para representar as vibrações do manipulador (JONKER; AARTS, 2001). A desvantagem dessa teoria é o desacoplamento entre as dinâmicas rígida e de vibração (AARTS; JONKER, 2002). Porém, essa abordagem tem mostrado resultados promissores para o controle do manipulador flexível.

A teoria do *Método dos Modos Assumidos* (MMA), propõe derivar modos aproximados para resolver a equação diferencial parcial e, assim, representar a resposta dinâmica do

manipulador de elo flexível. Conseqüentemente, o campo de deslocamento dos elos flexíveis é obtido como funções de forma de soma truncadas associadas aos modos assumidos (LUCA; SICILIANO, 1991).

A posição numérica dos modelos obtidos pelo MMA depende das funções de forma selecionadas e do número de modos considerados. Entretanto, assumir dois modos de vibração para cada elo é satisfatório para representar a dinâmica dos manipuladores de elos flexíveis (KHAIRUDIN *et al.*, 2010).

Além disso, o MMA pode ser comparado ao método dos elementos finitos, para se obter o modelo linear de um manipulador flexível de um elo (MARTINS *et al.*, 2003). O modelo dinâmico obtido pelo método de elementos finitos de manipuladores de elo flexível geralmente é utilizado para a atuação e controle de movimento (SHABANA; BAI, 2021).

O *Método dos Elementos Finitos* (MEF) é uma teoria numérica para a análise de sistemas de engenharia, os quais são aplicados à análise de estruturas e máquina. Assim, esta abordagem discretiza os elos flexíveis em partes menores, chamadas de elementos finitos.

Na sequência, os elementos finitos são combinados em uma equação global do sistema, a qual é escrita em uma matriz que permite calcular a resposta estrutural do sistema considerando as condições de contorno, condições iniciais e entradas. O MEF é aplicado para modelar manipuladores de elo flexível. As equações dinâmicas para um elo robótico flexível de dois elos, foram derivadas para o movimento do plano vertical (LEE; BEN-LI, 1988). O modelo dos manipuladores de elo flexível foi desenvolvido usando o MEF.

Uma aplicação do MEF propõe usar com o princípio de Lagrange para obter o modelo dinâmico do manipulador flexível de dois elos (USORO *et al.*, 1986). O método estocástico de elementos finitos é considerado uma nova teoria para obter o modelo dinâmico de manipuladores com elos flexível. Isto é proposto pelo fato dos elos e elementos dos manipuladores flexíveis serem afetados por incertezas. As principais fontes de incertezas incluem a variação das propriedades mecânicas do manipulador (AZEVEDO, 2003).

O modelo não linear do manipulador flexível de um elo foi desenvolvido com base no MEF associado à abordagem de Lagrange. Este modelo foi aplicado ao controle de realimentação não linear do manipulador (GE *et al.*, 1997). O comportamento dinâmico dos manipuladores flexíveis pode ser obtido considerando uma formulação não linear de elementos finitos, em que tanto os elos quanto as juntas são considerados elementos finitos específicos (JONKER, 1990).

A dinâmica inversa baseada no MEF também é obtida por meio de um modelo dinâmico

não linear geral pode ser formulado para manipuladores flexíveis tridimensionais, os elos foram discretizados pelo MEF com sua inércia concentrada nos nós de cada elemento (DU *et al.*, 1996; RUBINSTEIN *et al.*, 1994). A análise dinâmica de elementos finitos de um robô planar, totalmente paralelo com elos flexíveis, demonstra a influência da configuração do mecanismo na natureza das vibrações elásticas resultantes (PIRAS *et al.*, 2005).

Conforme destacado anteriormente, os manipuladores de elos flexíveis geralmente são afetados por incertezas, ou seja, o repouso dinâmico pode ser afetado por pequenas variações dos parâmetros geométricos, devido a erros de fabricação, ou ainda a flutuações dos parâmetros de inércia e coeficientes de rigidez dos elos (LARA-MOLINA *et al.*, 2014; NGUYEN *et al.*, 2021; COSTA *et al.*, 2018).

Desta forma, pode-se destacar que a principal contribuição do presente trabalho é a proposta de uma metodologia para otimizar o desempenho de um manipulador flexível levando em consideração as incertezas dos parâmetros por meio da modelagem no método dos elementos finitos estocásticos usando a simulação de Monte Carlo para modelar os parâmetros incertos com base nas variáveis aleatórias. Com isso, uma análise de confiabilidade e de probabilidade de falhas desse sistema é realizada com base nos métodos de otimização.

O presente trabalho está dividido em quatro capítulos para melhor entendimento e organização da pesquisa. O primeiro como Introdução, segundo apresenta o estado da arte. Já no terceiro são apresentados conceitos para o bom entendimento do trabalho. A metodologia é apresentada no quarto capítulo. Os resultados e discussões são apresentados no quinto capítulo. Finalmente, no último são apresentadas as conclusões do trabalho.

1.1 JUSTIFICATIVAS

No âmbito econômico e de segurança, há consequências graves de falhas que ocorram em plantas e equipamento. Com isso, torna-se importante se ter um maior controle da qualidade do sistema, afim de reduzir a ocorrência das falhas. Logo, é de grande importância para engenharia, um estudo que aplique métodos para avaliar o efeito das medidas de melhoria implementadas na frequência de ocorrência das falhas com base no histórico de ocorrências (GUSTIN, 2011).

Quando ocorre uma falha, faz-se necessário a identificação dos mecanismos de falha e considerações de alterações no projeto, afim de reduzir a probabilidade de ocorrências de falhas futura nesses mecanismos. Este procedimento acontece repetidamente até atingir os objetivos pré-especificados de confiabilidade do produto. Sendo assim, os métodos de avaliação da existência

de tendência no processo de falhas, tornam-se importantes nesse procedimento (GUSTIN, 2011).

Para avaliar a confiabilidade existe a modelagem via distribuições de probabilidades de variáveis aleatórias contínuas (KAPUR; PECHT, 2014). Estes procedimento baseia-se, de um ponto de vista estatístico, nos tempos de falha observados, os quais são distribuídos de forma independente e idêntica distribuídas que geram eventos (KAPUR; PECHT, 2014).

Um sistema reparável pode ter os intervalos entre falhas, que geram uma tendência decrescente no tempo devido ao efeito das reparações. Normalmente, se modela o tempo até a falha, desde a última reparação de um item reparável por meio de uma distribuição estacionária. Porém essa teoria nem sempre é adequada, pois os tempos podem ser gerados por um processo não constante. Por isso, faz-se necessário reconhecer a tendência na taxa de ocorrência de falhas, para depois se considerar uma distribuição de probabilidade para os tempos de falhas (KAPUR; PECHT, 2014).

O ramo industrial, vem ganhando popularidade com metodologias de avaliação da existência de tendência na taxa instantânea de falhas, pois sua aplicação é muito frequente. Nas indústrias automotiva e telecomunicações são aplicados testes de hipóteses para avaliar a evolução temporal das ocorrências de falhas (KAPUR; PECHT, 2014).

Duane (1964) insere conceitos básicos sobre a engenharia de confiabilidade aplicada a manutenção da aviação, com objetivo de avaliar a confiabilidade do material aeronáutico, por meio da análise do ciclo de vida de um componente mecânico durante seu desempenho. O trabalho de Pedrosa e Gama (2004), estuda a manutenção centrada em confiabilidade aplicada a equipamentos médico-hospitalares. Esses autores mostram que a confiabilidade de sistemas, apresenta os riscos da segurança operacional, do meio ambiente e otimiza os recursos utilizados.

Existem ferramentas gráficas simples e fáceis de implementar, para avaliar a existência de tendência na confiabilidade dos sistemas. Porém, a interpretação é subjetiva, como por exemplo o estudo comparativo baseado em simulações de Monte Carlo (WANG; COIT, 2005).

1.2 POSICIONAMENTO DO PROBLEMA DE PESQUISA

A representação do manipulador flexível e a comparação deste com um manipulador rígido, é apresentado na Figura 2. Essa figura apresenta um manipulador Flexível e um manipulador Rígido e o erro de posicionamento entre eles, assim provando que se tratam de manipuladores distintos.

Tendo visto a grande importância dos manipuladores no setor industrial, além da busca

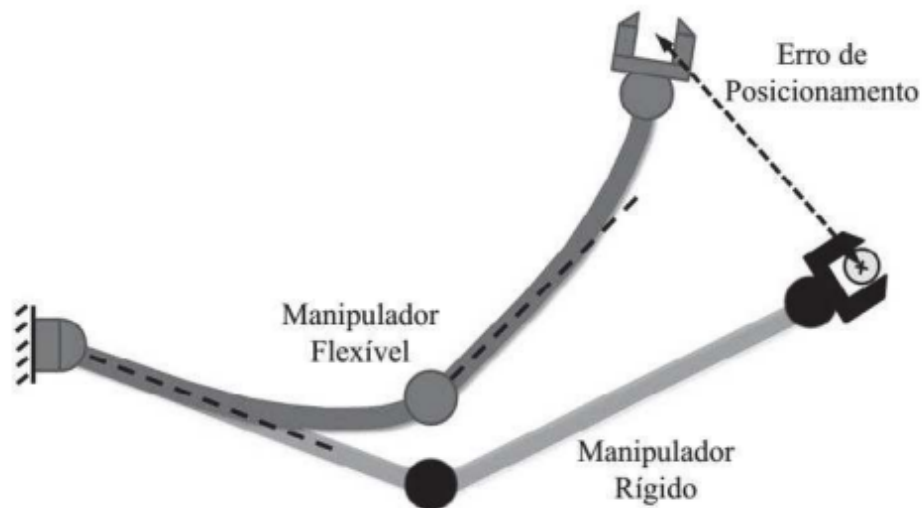


Figura 2 – Representação do manipulador flexível
Fonte: TAKANO (2016)

de prognósticos e diagnósticos a fim de evitar problemas futuros como falhas e avarias desses equipamentos, o presente estudo será realizado com o objetivo de analisar o comportamento dos manipuladores flexíveis sujeitos a incertezas paramétricas, com o intuito de contribuir para esse cenário, que visa a otimização de manipuladores flexíveis baseada em confiabilidade.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo Geral

O objetivo deste trabalho é propor uma abordagem aplicada em manipuladores flexíveis, os quais estão sujeitos a incertezas, com a finalidade de analisar a confiabilidade do sistema.

1.3.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos propostos são:

1. Modelar e simular a dinâmica de um manipulador flexível usando o método dos elementos finitos;
2. Modelar e simular a dinâmica de um manipulador flexível sujeito a incertezas paramétricas usando o método dos elementos finitos estocásticos;
3. Avaliar a confiabilidade do manipulador e estimar a probabilidade de falha;

4. Analisar a confiabilidade do manipulador para diferentes cenários de incerteza e com diferentes parâmetros de projeto.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo apresenta os métodos aplicados para modelar o manipulador flexível com parâmetros incertos, além das teorias de confiabilidade utilizadas e necessárias para realizar este estudo de pesquisa.

2.1 MODELAGEM DETERMINÍSTICA DE MANIPULADOR FLEXÍVEL

A modelagem de manipuladores com elos flexíveis, será formulada com base no modelo de elementos finitos para modelar a elasticidade dos elos. Adicionalmente, a equação dinâmica é escrita com base no método dos elementos finitos e no princípio de Lagrange.

Para um manipulador serial com m elos, o comprimento do elo é definido como l_i , em que $i = 1, \dots, m$. Cada i -ésimo elo é dividido em n_{ij} elementos, que são numerados como $j = 1, 2, \dots, n_{ij}$. O comprimento de cada elemento é definido como $l_j = l_i/n_{ij}$, ver a Figura 3.

O movimento transversal do elo é derivado com base na teoria de viga de Euler-Bernoulli (INMAN; SINGH, 1994). O deslocamento transversal $y_{ij}(x_{ij}, t)$, para $0 \leq x_{ij} \leq l_j$, pode ser aproximado pelas funções de forma $\Phi_k(x_{ij})$ (INMAN; SINGH, 1994) de acordo com a definição dada por

$$y_{ij}(x, t) = \sum_{k=1}^4 \Phi_k(x_{ij}) u_{i,2(j-1)+k} \quad (1)$$

em que $\Phi_k(x_{ij})$ é como

$$\begin{cases} \Phi_1(x) = 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}, \\ \Phi_2(x) = x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}, \\ \Phi_3(x) = 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}, \\ \Phi_4(x) = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}, \end{cases} \quad (2)$$

sendo que x_{ij} foi substituído por x em $\Phi(x)_k$ para simplificar a notação.

As coordenadas generalizadas de cada elemento ij correspondem a duas coordenadas lineares, $u_{i,2(j-1)+1}$ e $u_{i,2(j-1)+3}$, e a duas coordenadas rotacionais $u_{i,2(j-1)+2}$ e $u_{i,2(j-1)+4}$, onde o índice ij refere-se ao j -ésimo elemento do i -ésimo elo (veja a Figura 3). As coordenadas generalizadas correspondentes aos deslocamentos transversais do elemento ij são definidas no vetor $\psi_{ij} = \begin{bmatrix} u_{i,2(j-1)+1} & u_{i,2(j-1)+2} & u_{i,2(j-1)+3} & u_{i,2(j-1)+4} \end{bmatrix}$. Além disso, o número total de

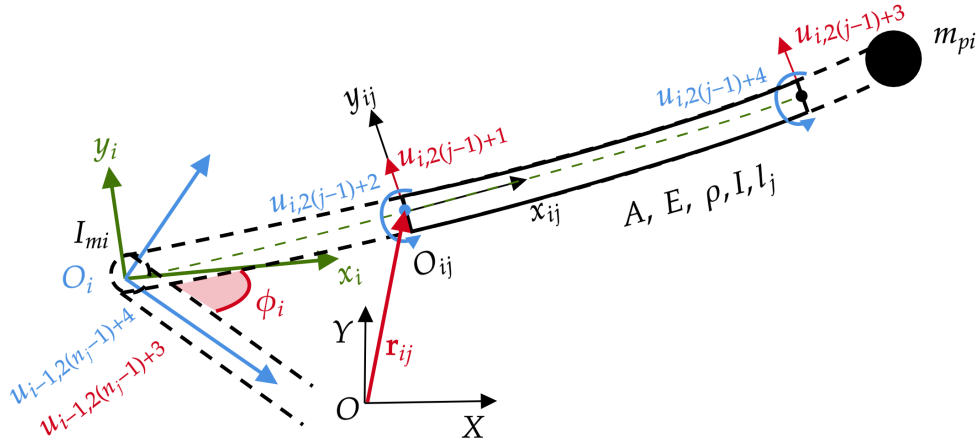


Figura 3 – Elo i e elemento ij : coordenadas generalizadas e definições geométrica

Fonte: Lara-Molina (2020)

coordenadas generalizadas de cada i -ésimo elo, considerando o ângulo da junta ϕ_i , é definido como $n_g = 2(n_{1j} + 1) + 1$; por exemplo, $n_g = 7$ para um elo com dois elementos $n_{1j} = 2$.

A energia cinética T_{ij} e a energia potencial V_{ij} do elemento ij são calculadas, em função das coordenadas generalizadas do elemento ij , que levam em consideração as coordenadas generalizadas dos elos anteriores ($i - 1$), a variável da junta (ϕ_i) e os graus de liberdade flexíveis ϕ_{ij} ; assim, $\mathbf{q}_{ij} = [\dots \phi_{i-1} \ u_{i-1,2(n_{ij}-1)+3} \ u_{i-1,2(n_{ij}-1)+4} \ \phi_i \ \psi_{ij}]$ onde $u_{i-1,2(n_{ij}-1)+3}$ de \mathbf{q}_{ij} e $u_{i-1,2(n_{ij}-1)+4}$ corresponde às coordenadas generalizadas finais do elo anterior $i - 1$ (Figura 3). Além disso, as velocidades das coordenadas generalizadas são definidas como $\dot{\mathbf{q}}_{ij}$. Assim, a energia cinética T_{ij} do elemento ij pode ser expressa como

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_{ij}^T \mathbf{M}_{ij} \dot{\mathbf{q}}_{ij}, \quad (3)$$

em que

$$\mathbf{M}_{ij} = \int_0^{l_j} \rho A \begin{bmatrix} \partial \mathbf{r}_{ij} \\ \partial \mathbf{q}_{ij} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \partial \mathbf{r}_{ij} \\ \partial \mathbf{q}_{ij} \end{bmatrix} dx_{ij} \quad (4)$$

representa as entradas da matriz de massa, \mathbf{r}_{ij} a posição cartesiana da referência O_{ij} em relação à referência inercial O , e \mathbf{r}_{ij} é obtido resolvendo a cinética do modelo do manipulador.

A energia potencial V_{ij} leva em conta a deformação elástica dos elos, que é definida como

$$V_{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{q}_{ij}^T \mathbf{K}_{ij} \mathbf{q}_{ij} = \frac{1}{2} \int_0^{l_j} EI \left[\frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{ij}} \right]^2 dx_{ij}, \quad (5)$$

em que E é o módulo de Young e I é o momento de inércia da seção transversal do elo.

Vale definir que a matriz de massa elementar (\mathbf{M}_{ij}) e a matriz de rigidez elementar

(\mathbf{K}_{ij}) derivadas das Equações (4) e (5) também podem ser escritos na forma

$$\mathbf{M}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ij}^{\phi_i \phi_i} & \mathbf{M}_{ij}^{\phi_i \psi_{ij}} \\ \mathbf{M}_{ij}^{\psi_{ij} \phi_i} & \mathbf{M}_{ij}^{\psi_{ij} \psi_{ij}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{K}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1,4} \\ \mathbf{0}_{4,1} & \mathbf{K}_{ij}^{\psi_{ij} \psi_{ij}} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

em que $\mathbf{M}_{ij}^{\phi_i \phi_i}$ contém os termos não lineares que atuam no eixo da junta e os termos de acoplamento com os links anteriores; $\mathbf{M}_{ij}^{\phi_i \psi_{ij}}$ é o vetor de termos de acoplamento entre graus de liberdade elásticos e ϕ_i ; $\mathbf{M}_{ij}^{\psi_{ij} \psi_{ij}}$ é a matriz de massa dos graus de liberdade elásticos (ψ_{ij}). $\mathbf{K}_{ij}^{\psi_{ij} \psi_{ij}}$ refere-se à matriz de rigidez dos graus de liberdade elásticos (ψ_{ij}).

A energia cinética total deve considerar a energia do elemento T_{ij} , a energia da massa da ponta concentrada $T_{m_{pi}}$ e a energia do cubo $T_{I_{mi}}$. Finalmente, a energia resultante dos elementos é fruto da soma da energia cinética total $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ e a energia potencial total $V(\mathbf{q})$, que foram obtidas nas formas finais como sendo

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_{ij}} T_{ij} + T_{m_{pi}} + T_{I_{mi}}, \quad V(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_{ij}} V_{ij} \quad (7)$$

A Lagrangiana \mathcal{L} é calculada com base na energia total do manipulador, que é definida como $\mathcal{L} = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q})$. A equação dinâmica do manipulador é derivada aplicando o princípio de mínima ação na Lagrangiana, que leva à Equação de Euler-Lagrange, dada por

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{f}, \quad (8)$$

onde \mathbf{f} é o vetor das forças generalizadas, que se devem às forças não-conservativos.

O desenvolvimento da equação de Euler-Lagrange (Equação (8)) leva à equação dinâmica do manipulador na forma (LEWIS *et al.*, 2003)

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f}, \quad (9)$$

em que $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ é a matriz de inércia total, $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ é o vetor de Coriolis/centrípeto, e \mathbf{K} é a matriz de rigidez total.

Vale ressaltar que a matriz de inércia e a matriz de rigidez devem levar em conta as condições de contorno do manipulador. Além disso, a matriz de inércia $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ é dependente de pose do manipulador; o vetor das forças ou momentos de Coriolis é calculado com base na matriz de inércia (LEWIS *et al.*, 2003). Dessa forma, chega-se em

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] \quad (10)$$

A matriz de massa total e a matriz de rigidez total da Equação (9) podem ser escritas

como

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m^{\phi_1\phi_1} & \mathbf{m}^{\phi_1\psi_1} & \dots & m^{\phi_1\phi_i} & \mathbf{m}^{\phi_1\psi_i} \\ \mathbf{m}^{\psi_1\phi_1} & \mathbf{M}^{\psi_1\psi_1} & \dots & \mathbf{m}^{\phi_1\psi_i} & \mathbf{M}^{\psi_i\psi_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ m^{\phi_1\phi_i} & \mathbf{m}^{\phi_1\psi_i} & \dots & m^{\phi_i\phi_i} & \mathbf{m}^{\phi_i\psi_i} \\ \mathbf{m}^{\psi_i\phi_1} & \mathbf{M}^{\psi_1\psi_i} & \dots & \mathbf{m}^{\psi_i\phi_i} & \mathbf{M}^{\psi_i\psi_i} \end{bmatrix} \\ \\ \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^{\psi_1\psi_1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \mathbf{0} \\ & & & \mathbf{0} & \mathbf{K}^{\psi_i\psi_i} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (11)$$

onde $\mathbf{M}_{\psi_i\psi_i}$ está relacionado aos deslocamentos transversais ou aos graus de liberdade elásticos dos elos, que correspondem a ψ_i ; $\mathbf{m}_{\phi_i\psi_i}$ indica o acoplamento entre a junta ϕ_i e estes graus de liberdade elásticos ψ_i e $\mathbf{m}_{\psi_i\phi_i} = \mathbf{m}_{\phi_i\psi_i}^T$; $m_{\phi_i\phi_i}$ leva em conta a dinâmica da junta ou articulação. Além disso, $\mathbf{K}_{\psi_i\psi_i}$ da matriz de rigidez total, é a matriz elementar de rigidez do i -ésimo elo; a matriz de rigidez total não possui um acoplamento entre o movimento articular e os graus de liberdade elásticos.

Além disso, a resposta no domínio da frequência também é analisada. As respostas harmônicas de estado estacionário no domínio da frequência, podem ser usadas com base na Equação (9) assumindo entradas e saídas harmônicas: $\mathbf{f} = \mathbf{F}(\omega)e^{i\omega t}$ e $\mathbf{q} = \mathbf{Q}(\omega)e^{i\omega t}$, sendo ω a frequência de excitação. Vale ressaltar que a matriz de inércia total $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ depende apenas das variáveis das juntas ϕ_i e das velocidades generalizadas $\dot{\mathbf{q}}_{ij}$ são zero na resposta harmônica em regime permanente; assim, o vetor Coriolis $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ que depende da velocidade generalizada é nulo. Assim, obtém-se a seguinte relação entre as amplitudes das forças generalizadas e as amplitudes das respostas harmônicas, dada por

$$\mathbf{Q}(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{F}(\omega), \quad (12)$$

onde $\mathbf{H}(\omega)$ é a matriz de função de resposta em frequência de recepção, definida como

$$\mathbf{H}(\omega) = [\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}(\mathbf{q})]^{-1}. \quad (13)$$

2.2 MODELAGEM DE MANIPULADOR FLEXÍVEL COM INCERTEZAS

A modelagem com incertezas é derivada como uma extensão do modelo determinístico apresentado anteriormente. As incertezas são consideradas nos parâmetros dinâmicos do manipulador. Assim, as incertezas são introduzidas primeiro nas matrizes elementares de massa $\mathbf{M}_{\psi_i\psi_i}$ e rigidez $\mathbf{K}_{\psi_i\psi_i}$ que afetam os graus de liberdade elásticos dos elos (ψ_i). O conhecido método estocástico de elementos finitos proposto por Ghanem e Spanos (2003), baseado na representação espectral dos campos estocásticos é usado na presente contribuição. Além disso, os parâmetros agrupados, como a massa da ponta, são modelados como variáveis aleatórias. Finalmente, a matriz de massa total e a matriz de rigidez total com as incertezas são calculadas.

Nesse estudo de pesquisa, a expansão de Karhunen-Loève (KL), é usada para modelar incertezas da massa e rigidez ao longo dos elos como campos estocásticos. A decomposição de Karhunen-Loève (KL) é uma representação espectral que expressa os campos aleatórios, como uma superposição de variáveis aleatórias ortogonais ponderadas por funções espaciais determinísticas. Um campo aleatório unidimensional $H(x,\theta)$ é definido por seu valor médio, $E[H(x,\theta)]$, e sua função de covariância $C(x_1,x_2) = E\{[H(x_1,\theta) - E(x_1)][H(x_2,\theta) - E(x_2)]\}$, onde x denota a dependência espacial do campo aleatório, $E[\cdot]$ representa o operador de expectativa e θ representa um processo aleatório. O campo aleatório gaussiano homogêneo unidimensional $H(x,\theta)$, pode ser projetado em uma função aleatória truncada ortonormal (GHANEM; SPANOS, 2003), ou seja,

$$H(x,\theta) = E(x) + \sum_{r=1}^{n_{KL}} \sqrt{\lambda_r} f_r(x) \xi_r(\theta), \quad (14)$$

onde $f_r(x)$ e λ_r correspondem às autofunções determinísticas e aos autovalores escalares da função de covariância $C(x_1,x_2)$, respectivamente. Além disso, vale ressaltar que as autofunções $f_r(x)$ e as variáveis aleatórias $\xi_r(\theta)$ são ortonormais.

A expansão KL é definida dentro do domínio unidimensional do elemento, onde $\Omega_x = (x_1,x_2) \in x_{ij}$ para modelar os parâmetros incertos do elemento como aleatórios. Além disso, a solução analítica do autoproblema do campo aleatório gaussiano homogêneo unidimensional, $H(x,\theta)$ foi apresentada por Ghanem e Spanos (2003), considerando a função de covariância exponencial

$$C(x_1,x_2) = \exp\left(-\frac{|x_1 - x_2|}{l_{cor,x}}\right), \quad (15)$$

onde $\{x_1,x_2\} \in [0,l_j]$, l_j é o comprimento do elemento e $l_{cor,y}$ é o comprimento da correlação que define o comportamento decrescente da covariância com a distância entre os pontos x_1 e x_2

na direção x .

Considerando a função de covariância da Equação (15), a solução do autoproblema leva a autofunções $f_r(x)$ e os autovalores λ_r para $r = 1, 2, \dots, n_{KL}$. Essas autofunções e autovalores dependem das raízes $r \omega_r (r \geq 1)$ de duas equações transcendentais, como o procedimento a seguir resume:

- Para r ímpar, com $r \geq 1$, e $0 \leq x \leq l_j$:

$$\lambda_r = \frac{2l_{cor,x}}{l_{cor,x}^2 \omega_r^2 + 1}, \quad f_r(x) = \alpha_r \cos(\omega_r x) \quad (16)$$

onde $\alpha_r = 1/\sqrt{l_j/2 + \sin(\omega_r l_j)/2\omega_r}$ e a raiz ω_r é obtida a partir da solução da equação transcendental

$$1 + l_{cor,x} \omega_r \tan(\omega_r l_j) = 0,$$

definida no domínio $\left[(r-1) \frac{\pi}{l_j}, \left(r - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{l_j} \right]$.

- Para r par, com $r \geq 1$, and $0 \leq x \leq l_j$:

$$\lambda_r = \frac{2l_{cor,x}}{l_{cor,x}^2 \omega_r^2 + 1}, \quad f_r(x) = \alpha_r \sin(\omega_r x) \quad (17)$$

onde $\alpha_r = 1/\sqrt{l_j/2 - \sin(\omega_r l_j)/2\omega_r}$ e a raiz ω_r é obtida da solução da equação transcendental

$$l_{cor,x} \omega_r + \tan(\omega_r l_j) = 0,$$

definida no domínio $\left[\left(r - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{l_j}, r \frac{\pi}{l_j} \right]$.

Como exemplo, para ilustrar a expansão KL, a Figura 4 mostra as autofunções $f_r(x)$ e λ_r autovalores, veja as Equações (16) e (17), da função de covariância exponencial na Equação (15). Inicialmente, os primeiros dez autovalores foram calculados para $\Omega_x = (0, 0,25)$ m, e três diferentes comprimentos de correlação: $l_{cor,x} = 2,5$ m, $0,25$ m e $0,025$ m.

Observou-se que a expansão KL pode aproximar o campo aleatório, considerando os quatro primeiros autovalores (ver Figura 4(a)), uma vez que os autovalores são desprezíveis para $n_{KL} > 4$. Além disso, as primeiras quatro autofunções (para $n_{KL} = 4$) são apresentadas na Figura 4(b) considerando $\Omega_x = (0, 0,25)$ m e $l_{cor,x} = 0,25$ m.

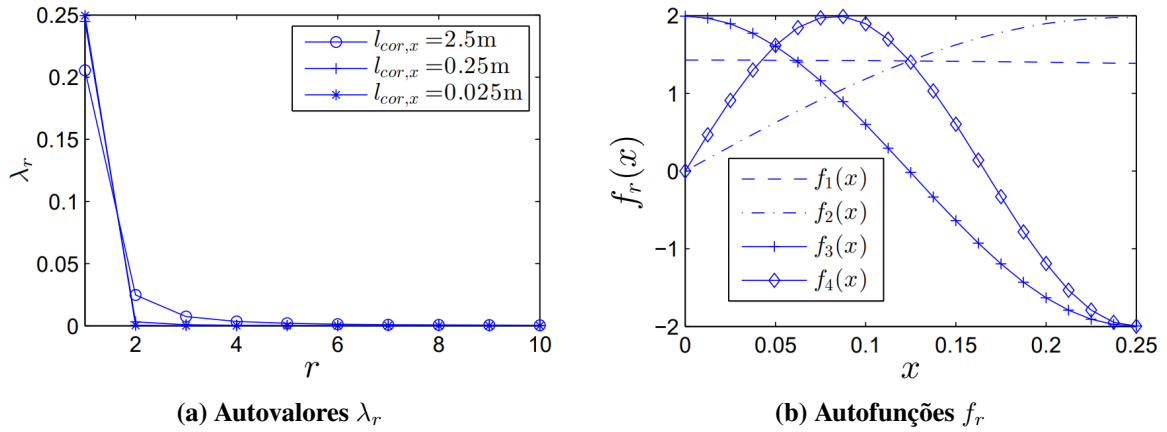


Figura 4 – Autovalores e autofunção para a covariância exponencial $C(x_1, x_2)$

Fonte: Lara-Molina (2020)

A expansão KL apresentada nas Equações (14) a (17) foi usada para modelar as matrizes aleatórias elementares do elemento elo, consequentemente resultando em

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\theta)_{\psi_{ij}\psi_{ij}} &= \mathbf{M}_{\psi_{ij}\psi_{ij}} + \sum_{r=1}^{n_{KL}} \overline{\mathbf{M}}_r^{(s)} \xi_r(\theta) \\ \mathbf{K}(\theta)_{\psi_{ij}\psi_{ij}} &= \mathbf{K}_{\psi_{ij}\psi_{ij}} + \sum_{r=1}^{n_{KL}} \overline{\mathbf{K}}_r^{(s)} \xi_r(\theta) \end{aligned} \quad (18)$$

onde $\mathbf{M}_{\psi_{ij}\psi_{ij}}$ e $\mathbf{K}_{\psi_{ij}\psi_{ij}}$ são a matriz de massa elementar e a matriz de rigidez definidas na Equação (6). Além disso, as matrizes aleatórias $\overline{\mathbf{M}}_r^{(s)}(\theta)$ e $\overline{\mathbf{K}}_r^{(s)}(\theta)$, são calculadas usando a seguinte expressão compacta

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{M}}_r^{(s)} &= \int_{x=0}^{l_j} \sqrt{\lambda_r} f_r(x) \mathbf{N}(x)^T \mathbf{N}(x) dx \\ \overline{\mathbf{K}}_r^{(s)} &= \int_{x=0}^{l_j} \sqrt{\lambda_r} f_r(x) \mathbf{B}(x)^T \mathbf{B}(x) dx \end{aligned} \quad (19)$$

com $\mathbf{N}(x) = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3 \quad \Phi_4]$ com base nas funções de forma da Equação (1), e $\mathbf{B}(x) = \partial^2 \mathbf{N}(x) / \partial x^2$.

Além disso, a massa da ponta m_{pi} e a inércia do eixo I_{mi} são normalmente afetadas pelas incertezas. A incerteza desses parâmetros, pode ser modelada como variáveis aleatórias, de acordo com o modelo que inclui as incertezas. As incertezas desses parâmetros podem ser definidas como

$$\begin{aligned} m_{pi}(\theta) &= m_{pi} + m_{pi} \delta_{m_{pi}} \xi(\theta) \\ I_{mi}(\theta) &= I_{mi} + I_{mi} \delta_{I_{mi}} \xi(\theta) \end{aligned} \quad (20)$$

onde m_{pi} e I_{mi} são a média desses parâmetros, $\delta_{m_{pi}}$ e $\delta_{I_{mi}}$ representam o nível de dispersão e $\xi(\theta)$ é a variável aleatória distribuída normal com θ sendo um processo aleatório que é governado pela distribuição normal.

A matriz de massa aleatória total ($\mathbf{M}(\mathbf{q},\theta)$) e a matriz de rigidez aleatória ($\mathbf{K}(\theta)$), são obtidas com base nas expressões das matrizes elementares da Equação (19) e os parâmetros aleatórios da Equação (20), resultando em

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}(\mathbf{q},\theta) = \begin{bmatrix} m(\theta)^{\phi_1\phi_1} & \mathbf{m}(\theta)^{\phi_1\psi_1} & \dots & m(\theta)^{\phi_1\phi_i} & \mathbf{m}(\theta)^{\phi_1\psi_i} \\ \mathbf{m}(\theta)^{\psi_1\phi_1} & \mathbf{M}(\theta)^{\psi_1\psi_1} & \dots & \mathbf{m}(\theta)^{\phi_1\psi_i} & \mathbf{M}(\theta)^{\psi_i\psi_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ m(\theta)^{\phi_1\phi_i} & \mathbf{m}(\theta)^{\phi_1\psi_i} & \dots & m(\theta)^{\phi_i\phi_i} & \mathbf{m}(\theta)^{\phi_i\psi_i} \\ \mathbf{m}(\theta)^{\psi_i\phi_1} & \mathbf{M}(\theta)^{\psi_1\psi_i} & \dots & \mathbf{m}(\theta)^{\psi_i\phi_i} & \mathbf{M}(\theta)^{\psi_i\psi_i} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}(\theta)^{\psi_1\psi_1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & \mathbf{K}(\theta)^{\psi_i\psi_i} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (21)$$

onde as incertezas $m_{pi}(\theta)$ e $I_{mi}(\theta)$ da Equação (20) afetam os elementos da matriz de massa ($m(\theta)_{\phi_i\phi_i}$ e $\mathbf{m}(\theta)_{\phi_i\psi_i}$) com $i = 1, \dots, m$. A equação dinâmica e a função de resposta em frequência podem ser obtidas com base nas matrizes da Equação (21), portanto,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}(\mathbf{q},\theta) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\theta) + \mathbf{K}(\theta)\mathbf{q} = \mathbf{f} \\ \mathbf{H}(\omega,\theta)\mathbf{F}(\omega) = \mathbf{Q}(\omega) \end{array} \right. \quad (22)$$

Finalmente, a chamada *Simulação de Monte Carlo (SMC)*, combinada com a amostragem do Hipercubo Latino (FLORIAN, 1992), é o método numérico aplicado para obter a resposta dinâmica do manipulador flexível com parâmetros aleatórios apresentados na Equação (22).

2.3 MODELAGEM DINÂMICA DE MANIPULADOR COM UM ELO

Como exemplo ilustrativo, a definição da equação dinâmica considerando um único elemento ($j = 1$) é apresentada a seguir, a fim de ilustrar a modelagem de manipuladores

flexíveis de Seção 2.1. As definições dessas expressões simbólicas podem ser estendidas aos manipuladores com mais de um elemento.

A equação dinâmica do manipulador flexível é apresentada na Equação (9). Considerando um elemento, $j = 1$, as coordenadas generalizadas e as coordenadas generalizadas são $\mathbf{q} = [\phi_1 \ u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]$ e $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, respectivamente.

Ao incluir as condições de contorno em que os deslocamentos de flexão e rotação no cubo são nulos; assim, as coordenadas generalizadas e as forças generalizadas são definidas como $\mathbf{q} = [\phi_1 \ u_3 \ u_4]$ and $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \ 0 \ 0]$, respectivamente. Consequentemente, a matriz de inércia total $\mathbf{M}(\mathbf{q})$, o vetor Coriolis $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, e a matriz de rigidez total \mathbf{K} são definidas como:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 120l^2 + \frac{l(l^2u_4^2 - 11lu_3u_4 + 39u_3^2)}{105} & 147l & -21l^2 \\ 147l & 156 & -22l \\ -21l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6l \\ 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\rho A l^2}{88200} \begin{bmatrix} -2\dot{\phi}_1 (\dot{u}_4(-2u_4l^2 + 11u_3l) - \dot{u}_3(78u_3 - 11lu_4)) \\ -\dot{\phi}_1^2 (78u_3 - 11lu_4) \\ \dot{\phi}_1^2 l (11u_3 - 2lu_4) \end{bmatrix} \quad (25)$$

Sendo a equação do movimento do manipulador flexível:

$$\mathbf{M}_1(\mathbf{q}_1)\ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{h}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) + \mathbf{K}_1\mathbf{q}_1 = \mathbf{f}_1 \quad (26)$$

onde $\mathbf{f}_1 = [\tau_1 \ \mathbf{0}_{1,2(n_{j1}-1)+2}]^T$ significa que o torque de entrada τ_1 é aplicado apenas na articulação ϕ_1 .

2.4 ANÁLISE DE CONFIABILIDADE

Após a a segunda guerra mundial, na década de 60 foi introduzido o conceito de confiabilidade crescente por Duane (1964), o qual estava envolvido no processo de desenvolvimento e teste de motores para aviões. E após esse período alguns testes de avaliação de tendência vêm sendo propostos. Os paramétricos que consideram distribuições de probabilidade, e os não paramétrico, os quais são livre de distribuições de probabilidade, e o desempenho desses testes em diferentes cenários (AMSC; SESS, 2011).

A confiabilidade apresenta como base quatro elementos, o primeiro é a probabilidade, a qual demonstra que confiabilidade pode ser traduzida em termos mensuráveis, por meio da distribuição de probabilidade do tempo de falha. O desempenho é o segundo, o qual mostra que um conjunto de requisitos que definem a função a ser executada. O terceiro, é o tempo de operação, para o qual se pretende que o elemento funcione sem falha. E o quarto trata-se das condições de operação, que são as circunstâncias ambientais e operacionais (PERES, 2016).

A confiabilidade estabelece métodos, os quais levam em consideração, as incertezas para analisar um problema. Portanto, os parâmetros de um problema são modelados como variáveis aleatórias, as quais são agrupadas em um vetor aleatório x , onde $f_X(x)$ é a função de densidade de probabilidade conjunta (BASTIDAS-ARTEAGA; SOUBRA, 2014).

A confiabilidade é expressa pela probabilidade de um elemento funcionar em condições fixas e pré estabelecidas, em um período de tempo definido, o qual pode ser mensurado em unidades como horas, quilômetros, ciclos, semanas, entre outros (PERES, 2016).

2.4.1 Conceitos Básicos

Segundo Bastidas-Arteaga e Soubra (2014) e Pereira (1996), o espaço D de variáveis aleatórias, pode ser dividido em falha e as regiões de segurança, para se analisar a confiabilidade. A região de falha D_f é definida por $D_f = \{X|g(X) \leq 0\}$ e a região de segurança, D_s , por $D_s = \{X|g(X) > 0\}$ onde $g(X)$ representa a função de desempenho. Sendo, $g(X) = 0$ é o limite entre as regiões de falha e segurança, o qual é chamado de superfície de estado limite.

Em casos simples, a função de desempenho $g(X)$ é expressa como a diferença entre a resistência $R(X)$ e a demanda ou solicitação no sistema $S(X)$ — ou seja, $g(X) = R(X) - S(X)$. Já em análises de confiabilidade em engenharia, $g(X)$ é geralmente expresso em termos de deslocamento ou tensão. As funções de desempenho podem ser relacionadas às seguintes condições estruturais, o estado limite de utilização e estado limite final.

Estado limite de utilização, é quando sob condição, a “falha” está relacionada a uma perda de capacidade de utilização, e essa não implica uma degradação significativa da segurança estrutural. Assim, se a análise de confiabilidade de um determinado componente estrutural foca em um deslocamento máximo v_{max} , a função de desempenho pode escrever

$$g(X) = v_{max} - v(X), \quad (27)$$

onde v_{max} pode ser fixado por padrões ou restrições de manutenção específicas, e $v(X)$ é o

deslocamento do ponto de interesse que depende de variáveis aleatórias X , como resistência do material, geometria e carga, entre outras.

No caso de falha, $v(X) > v_{max}$, mas o componente estrutural ainda é considerado seguro. Estado limite final, é quando a condição descreve o estado em que a segurança é altamente afetada, e pode levar à falha total ou colapso. Assim, se a análise de confiabilidade se concentra no momento fletor de uma viga, a função de desempenho é

$$g(X) = M_r(X) - M_s, \quad (28)$$

onde $M_r(X)$ é o momento de flexão resistente da viga que depende de X variáveis aleatórias (como resistência do material, geometria seccional, entre outras) e M_s é o momento de flexão solicitante. Embora M_s seja assumido como determinística na equação acima, esta variável também pode ser considerada como uma variável. Em caso de falha, $S_{ra} > S_r(X)$, levando ao colapso, e ao levar em conta essas definições, a probabilidade de falha, P_f , é determinada por

$$P_f = P[g(X) \leq 0] = \int_{g(X) \leq 0} f_x(X) dx_1 \dots dx_n \quad (29)$$

2.4.2 Métodos para Avaliar a Confiabilidade

2.4.2.1 Simulação de Monte Carlo

Trata-se de um número de simulações necessárias a se realizar, porém isso irá depender essencialmente da ordem de grandeza da probabilidade de falha P_f , como mostra a Figura 5, e da função que descreve o estado limite $g(X)$, ou seja, problema estrutural. Esse número pode aumentar muito para probabilidades muito pequenas, sendo esse o inconveniente do método de Monte Carlo (LOPES, 2007).

Um conjunto de n variáveis aleatórias $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, cada uma caracterizada pela sua respectiva função densidade de probabilidade marginal $f_{x_i}(X_i)$ e respectiva função de distribuição acumulada marginal $F_{x_i}(X_i)$, então a probabilidade de falha, P_f , associada a uma função de estado limite $g(X)$ que define uma região de falha e outra de segurança (MANOJ, 2016), pode ser calculada por

$$P_f = \int_{X/g(X) \leq 0} f_x(X) dX = \int_X I[g(X)] f_x(X) dX, \quad (30)$$

sendo $f_x(X)$ a função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias e $I[g(X)]$

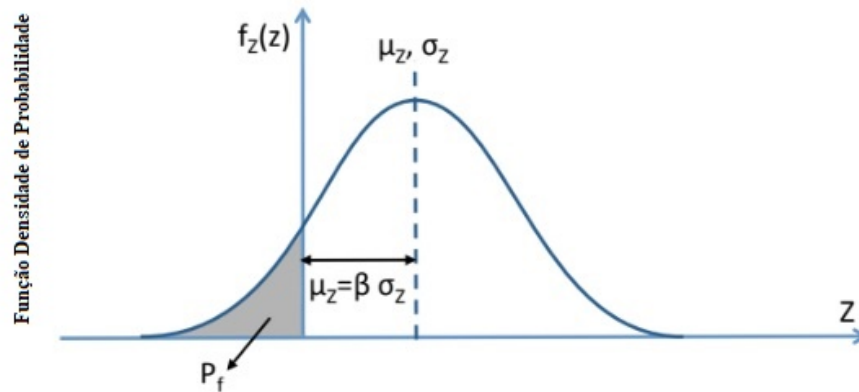


Figura 5 – Probabilidade da função densidade de Z

Fonte: Autoria Própria

uma função indicadora, definida por

$$I[g(X)] = \begin{cases} 1, & \text{se } g(X) \leq 0 & \text{(região de falha)} \\ 0, & \text{se } g(X) > 0 & \text{(região de segurança)} \end{cases}$$

Com o uso da função indicadora é possível calcular a integral da equação de probabilidade de falha sobre todo domínio e não só na região de falha, o que leva a

$$P_f = \int_f f_u(U) du. \quad (31)$$

Além disso, o resultado da Equação (31) representa o valor médio esperado, da função indicadora. Assim, forma a probabilidade de falha pode ser estimada, por meio da expressão

$$p_f = \tilde{p}_f = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I[g(X^j) \leq 0], \quad (32)$$

em que n é o número de simulações, X^j é o j -ésimo vetor de amostras simulado contendo as n variáveis.

Já para se estimar n simulações para um nível de confiança c da estimativa de P_f (LOPES, 2007), é definido como

$$n > \frac{-\ln(1 - c)}{p_f} \quad (33)$$

2.4.2.2 Método de Confiabilidade de Primeira Ordem

O Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM) é utilizado para estimar a probabilidade de falha, usa uma aproximação linear da função de estado limite nas redondezas do ponto de projeto, com a finalidade de obter o índice de confiabilidade β (ROSENBLATT, 1952; BASTIDAS-ARTEAGA; SOUBRA, 2014).

Além disso, o método calcula o índice de confiabilidade independente da expressão utilizada como função de estado limite, conforme ilustrado na Figura 6 (MANOJ, 2016). Para variáveis descorrelacionadas, o vetor de variáveis aleatórias X pode ser transformado em um vetor de variáveis descorrelacionadas no espaço gaussiano padrão U fazendo

$$U = \Phi^{-1}[F_x(X)] \quad (34)$$

onde $F_x(X)$ e Φ^{-1} são respectivamente a função de distribuição acumulada e a inversa da função de distribuição acumulada padrão do vetor de variáveis aleatórias X .

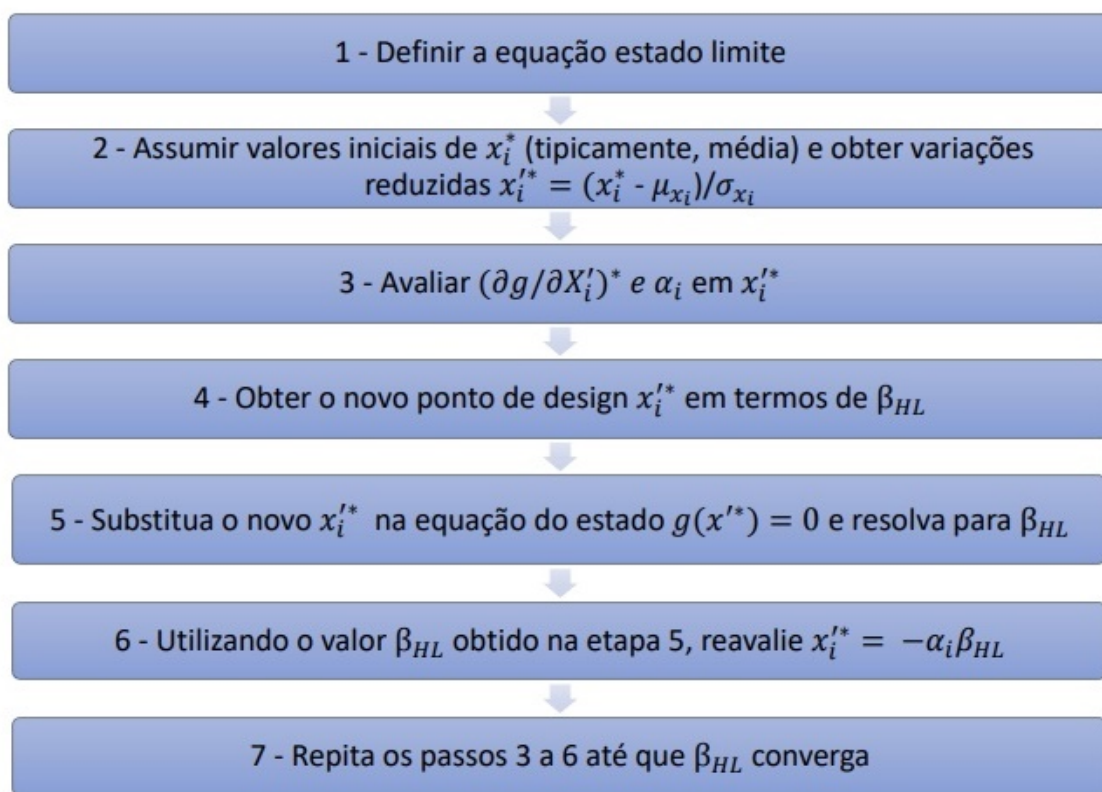


Figura 6 – Algoritmo: Confiabilidade de Primeira Ordem

Fonte: Autoria Própria

Dessa forma, a função margem de segurança $g(X)$ pode ser transformada para o espaço padrão descorrelacionado U , obtendo-se uma nova função de estado limite $H(U)$, de forma que

$$H(U) \equiv g(X) \quad (35)$$

Obtendo-se uma aproximação de primeira ordem para a função de estado limite no ponto de projeto U^* , calcula-se a menor distância da função de estado limite aproximada $H(U) = 0$ com relação à origem do espaço padrão descorrelacionado U , através do uso de um método de

gradiente. O valor desta distância representa o índice de confiabilidade β , ou seja,

$$\beta = \min(U^{*T} \cdot U^*)^{1/2}. \quad (36)$$

2.4.3 Método de Confiabilidade de Segunda Ordem

Este método surgiu para melhorar a precisão dos cálculos de FORM, como a ideia geral é de aproximar a falha superfície por uma hiper-superfície quadrática em vez de por um hiperplano. Este método avalia a confiabilidade do sistema, cujas funções de desempenho são não linear (LARA-MOLINA; DUMUR, 2020). A função de desempenho, $\delta\mathbf{p}(\mathbf{c})$, é baseado no modelo cinemático não linear do manipulador. Sendo, a expansão em série de Taylor do não linear função $\delta\mathbf{p}(\mathbf{u})$ no MMP u^* é definido como

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{p}(u) = \delta\mathbf{p}(u_1, u_2 \dots u_{n_j}) = \delta\mathbf{p}(u_1^*, u_2^* \dots u_{n_j}^*) + \sum_{j=1}^{n_j} \frac{\partial \delta\mathbf{p}}{\partial u_j} (u_j - u_j^*) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{j=1}^{n_j} \frac{\partial^2 \delta\mathbf{p}}{\partial u_k \partial u_j} (u_k - u_k^*)(u_j - u_j^*) \end{aligned} \quad (37)$$

onde as derivadas são avaliadas no MMP u^* . O método SORM trata de ignorar os termos superiores aos termos de segunda ordem. Assim, a probabilidade de falha pode ser calculada usando a teoria de aproximação assintótica (LARA-MOLINA; DUMUR, 2020), o que leva a

$$p_f \approx \Phi(-\beta_{FORM}) \prod_{j=1}^{n_j-1} (1 + \beta_{FORM}^{K_j})^{-1/2} \quad (38)$$

onde K_j representa as principais curvaturas da função de manutenção no MMP, e β_{FORM} é o coeficiente de confiabilidade calculado pelo FORM.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo são apresentados os principais resultados relacionados à modelagem dinâmica dos manipuladores com elos flexíveis. Inicialmente, é apresentada a aplicação da metodologia proposta para a obtenção da equação dinâmica de um manipulador com um elo. Adicionalmente, a simulação dinâmica da equação dinâmica é apresentada para duas aplicações: (i) manipulador com um elo e (ii) manipulador com dois elos.

3.1 MODELAGEM DOS MANIPULADORES

A análise numérica desse trabalho, foi realizada a partir de algumas considerações e a definição de alguns parâmetros, do manipulador flexível. Para um manipulador de um elo, os seguintes parâmetros foram selecionados para esta aplicação numérica: $\rho = 2710 \text{ kg/m}^3$, $E = 7 \times 10^{10} \text{ N/m}$, $l = 1 \text{ m}$, $b = 1 \times 10^{-3} \text{ m}$, $h = 1 \times 10^{-2} \text{ m}$, $A = 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2$, $I = 1,04 \times 10^{-9} \text{ m}^4$, $I_{m1} = 0,1 \text{ kg/m}^2$, $m_{p1} = 0,01 \text{ kg}$ e $n_{1j} = 4$.

3.1.1 Manipulador com um Elo

A Figura 7 apresenta a FRF para o manipulador flexível com um elo, seguindo a expressão apresentada na Equação (13). Observa-se que a primeira e a segunda frequência natural correspondem a 101,2 rad/s e 679,2 rad/s, respectivamente.

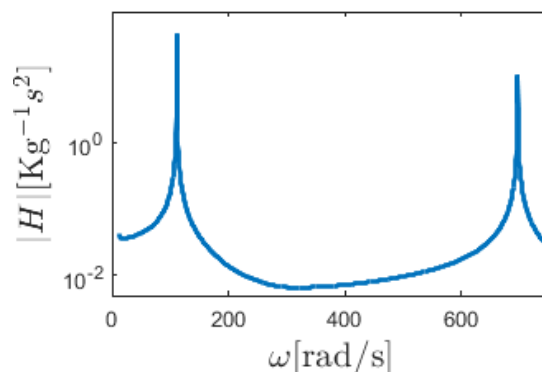


Figura 7 – FRF do manipulador flexível de um elo

Fonte: Autoria Própria

O deslocamento da ponta (ver Figura 8(b)) é obtido integrando a equação dinâmica total da Equação (26); para este procedimento, o manipulador está em repouso na posição inicial

da junta $\phi_1 = 0$, e o torque τ_1 da Figura 8(a) é aplicado. O deslocamento da ponta exibe um movimento de vibração que persiste embora nenhum torque seja aplicado na junta. A vibração residual da ponta surge pela flexibilidade do elo (ver Figura 8(b)).

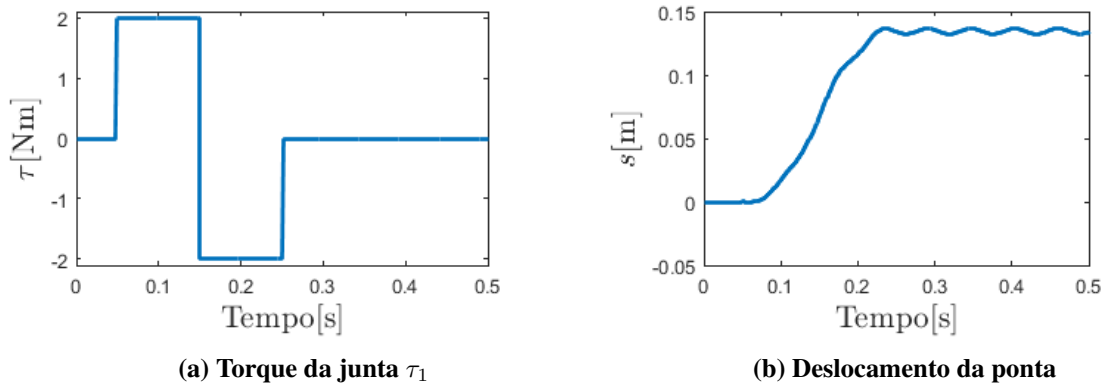


Figura 8 – Torque da junta e deslocamento da ponta do manipulador flexível de um elo

Fonte: Autoria Própria

Para esta aplicação, as incertezas foram introduzidas na massa da ponta (m_p), densidade de massa do enlace (ρ) e módulo de Young do enlace (E). Foi considerado um nível de dispersão de 5% para esses parâmetros de acordo com a definição da Equação (20).

Inicialmente, verifica-se o número de amostras (n_s) necessário para realizar a simulação de Monte Carlo avaliando a convergência da variabilidade da resposta. A convergência quadrática média (RMS) da amplitude do FRF é avaliada em função do número de amostras da realização de θ . Para tanto, considera-se a resposta estocástica $\hat{H}(\omega, \theta)$ e a seguinte expressão para o RMS :

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{n_s} \sum_{n=1}^{n_s} \left| \hat{H}(\omega, \theta) - H(\omega) \right|^2} \quad (39)$$

em que $H(\omega)$ representa a amplitude da FRF.

A Figura 9 mostra os resultados de convergência para n_s . Este resultado apresenta resultados RMS , para os limites inferior e superior das envoltórias da amplitude aleatória da FRF $\hat{H}(\omega, \theta)$. Observa-se que a convergência é obtida para $n_s \geq 80$. Para esta simulação o comprimento da correlação é igual ao comprimento do elemento, portanto ($l_{cor,x} = l_{1j}$). Portanto, os autovalores para $\lambda_r \geq 5$ são desprezíveis com base nos resultados apresentados na Figura 4(a) considerando essas definições.

Portanto, para as seguintes simulações que consideram o elemento finito estocástico:

$$n_{KL} = 5, l_{cor,x} = 0,25 \text{ m e } n_s = 80.$$

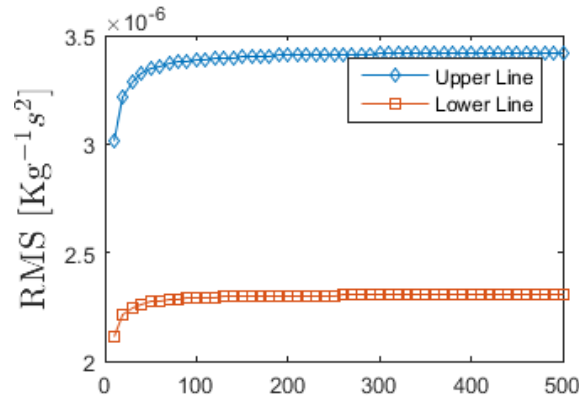


Figura 9 – Convergência do erro máximo para o número de amostras (n_s) usando MCS

Fonte: Autoria Própria

Figura 10 ilustra a resposta estocástica do manipulador flexível. Os envelopes das amplitudes dos FRFs aleatórios são apresentados na Figura 10(a). A dispersão do envelope aumenta para as frequências próximas ao segundo modo. Consequentemente, as incertezas são mais sensíveis à medida que a frequência aumenta.

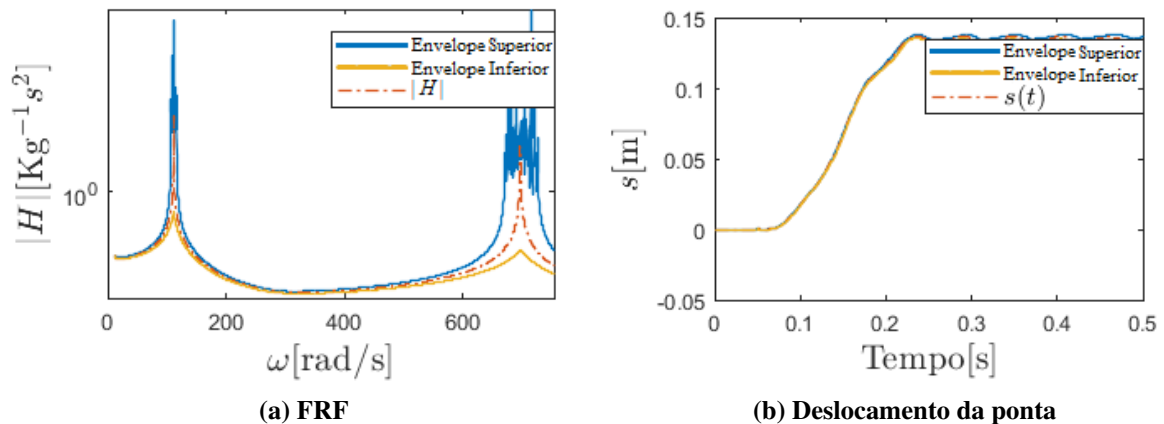


Figura 10 – Resposta dinâmica do manipulador flexível de um elo com parâmetros incertos

Fonte: Autoria Própria

Além disso, a Figura 10(b) mostra como as incertezas influenciam o deslocamento da ponta. Para este caso, os envelopes têm uma dispersão maior na resposta em regime permanente do que na resposta transitória. Na resposta de estado estacionário, a ponta exibe uma vibração residual em torno da posição estacionária. Portanto, os resultados mostram que as incertezas dos elos têm uma influência significativa na amplitude da resposta de vibração. Para esta aplicação, o efeito das incertezas poderia deteriorar a resposta dinâmica se um sistema de controle fosse considerado para suprimir as vibrações.

3.1.2 Manipulador com Dois Elos

A análise numérica desse trabalho, foi realizada a partir de algumas considerações e a definição de alguns parâmetros, do manipulador flexível. Para um manipulador de dois elos, foram definidas os seguintes parâmetros: $\rho_i = 2710 \text{ kg/m}^3$, $E_i = 7 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $l_i = 1$ milhão, $b_i = 1 \times 10^{-3} \text{ m}$, $h_i = 1 \times 10^{-2} \text{ m}$, $A_i = 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2$, $I_i = 1,04 \times 10^{-9} \text{ m}^4$, $I_{mi} = 0,1 \text{ kg/m}^2$, $m_{pi} = 0,01 \text{ kg}$ e $n_{ij} = 2$ para $i = 1,2$. Com os parâmetros estabelecidos, foi feita a análise do FRF, e esse será calculado na posição de repouso, o que quer dizer que, a posição e a velocidade dos graus de liberdade elásticos são iguais a zero. Sendo assim, a matriz de massa irão depender apenas da segunda posição conjunta ϕ_2 . A Figura 11 apresenta a amplitude do FRF, para vários valores de ϕ_2 . Nesta figura é possível observar que há um aumento do modelo de vibração fundamental, à medida que ϕ_2 aumenta, pois a massa do segundo elo e a segunda massa da ponta (m_{p2}) se aproximam do referencial O .

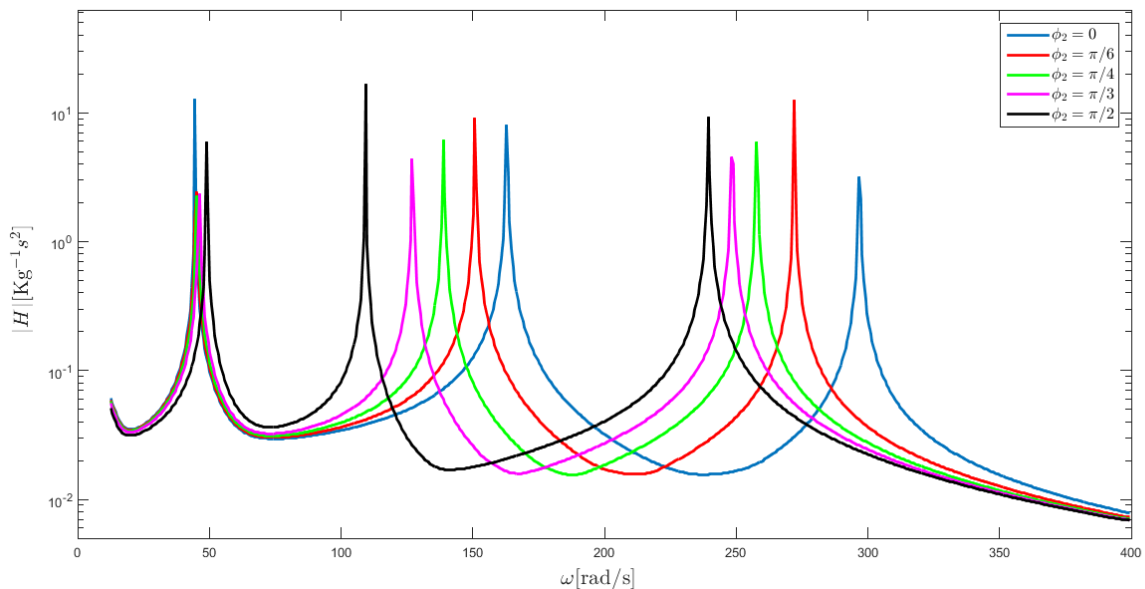
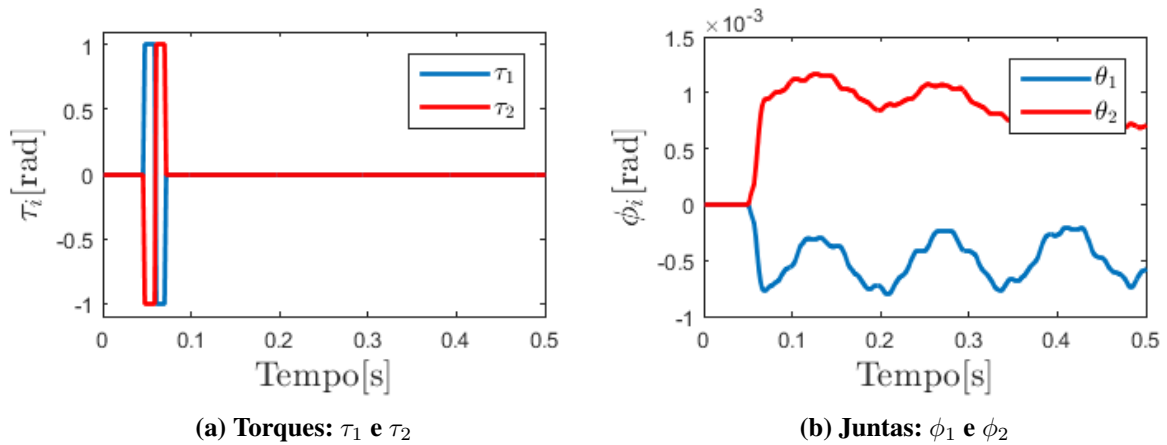


Figura 11 – FRF para várias definições de θ_2

Fonte: Autoria Própria

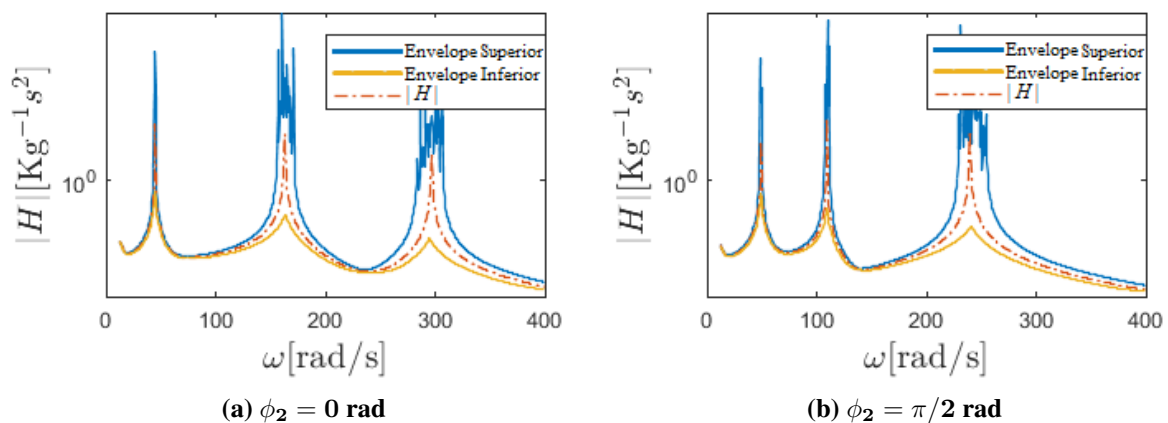
Para se obter a resposta das juntas, foi feita a integração da equação dinâmica total. Nesta simulação, o manipulador inicia o movimento no repouso, ou seja, as posições e velocidades elásticas dos graus de liberdade são zero no início do movimento, e a posição inicial das juntas são $\phi_1 = 0$ e $\phi_2 = 0$. O torque de entrada aplicado às juntas é apresentado na Figura 12(a). No início, as juntas sofrem um deslocamento enquanto o torque de entrada é aplicado. Então, as articulações exibem um movimento de vibração que persiste devido à flexibilidade dos links (ver

Figura 12(b)).

**Figura 12 – Resposta conjunta do manipulador flexível de dois elos.****Fonte: Autoria Própria**

Já as incertezas foram introduzidas nas massas das pontas ($m_{p_i}(\theta)$), densidades de massa dos elos ($\rho_i(\theta)$), e o módulo de Young ($E_i(\theta)$) os elos para $i = 1, 2$. Um nível de dispersão de 5% foi considerado para esses parâmetros incertos.

A Figura 13 mostra a Função de Resposta de Frequência (FRF) com incertezas. Os envelopes dos FRFs com $\phi_1 = 0$ rad e $\phi_2 = (\pi/2)$ rad são apresentados na Figura 13(a) e Figura 13(b), respectivamente. Observa-se que a dispersão da envoltória aumenta para as altas frequências, especialmente fechadas para o segundo e terceiro modos. Portanto, as incertezas têm um efeito maior para frequências altas em ambos os casos quando comparadas a frequências pequenas próximas ao primeiro modo de vibração. O efeito das incertezas é ligeiramente maior para o FRF com $\phi_2 = 0$ rad (veja Figura 13(a)) que considerando $\phi_2 = (\pi/2)$ rad (veja Figura 13(b)).

**Figura 13 – FRF do manipulador flexível de dois elos com incertezas****Fonte: Autoria Própria**

A Figura 14 mostra como as incertezas afetam os ângulos da junta quando os torques de entrada τ_1 e τ_1 da Figura 12(a) são aplicados. Os resultados apresentam que a dispersão dos envelopes persiste quando o torque de entrada é zero. O efeito das incertezas é preponderante para a segunda junta Figura 14. Portanto, os efeitos das incertezas dos elos na segunda junta devem ser especialmente gerenciados, pois essas incertezas produzem grandes variações no posicionamento da segunda junta.

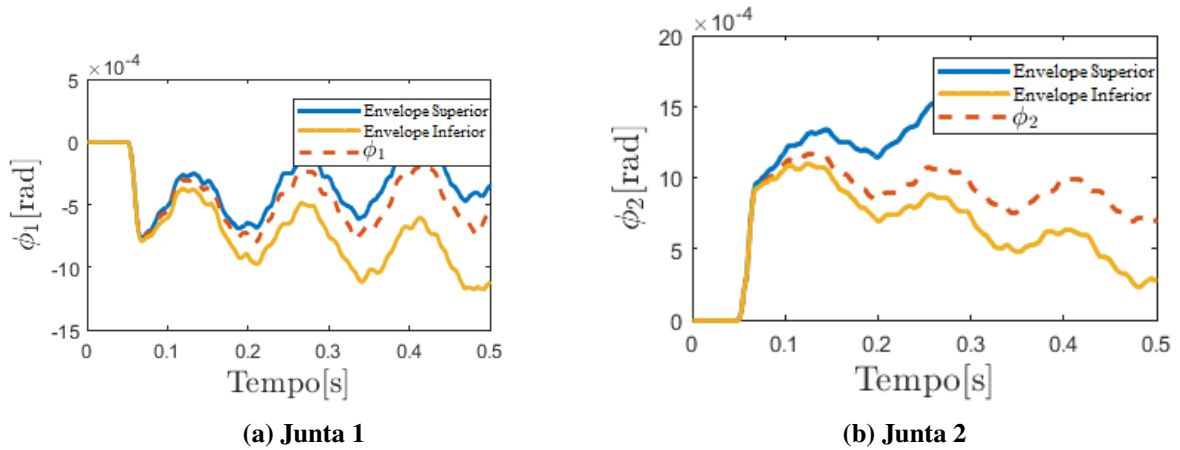


Figura 14 – Juntas do manipulador flexível de dois elos com incertezas

Fonte: Autoria Própria

3.2 ANÁLISE DE CONFIABILIDADE

Os resultados correspondentes a esta análise são restritos ao manipulador com um elo flexível. Nesta seção, inicialmente, será apresentada a forma como avaliou-se a confiabilidade baseada no método de confiabilidade de primeira ordem (FORM). Finalmente, os resultados numéricos das simulações computacionais e análise de resultados são apresentados.

3.2.1 Análise de Confiabilidade

Para esta aplicação particular, a confiabilidade será avaliada considerando a probabilidade de amplitude da vibração residual $\delta(\theta)$ (ver Fig. 15) para ser menor do que o limite desejado definido como $\delta^{(u)}$.

$$R_f = P(\delta(\theta) - \delta^{(u)} \leq 0) \quad (40)$$

A análise da confiabilidade requer a avaliação eficiente da expressão que quantifica a confiabilidade do sistema definida na Eq. (41), a definição matemática de confiabilidade expressa

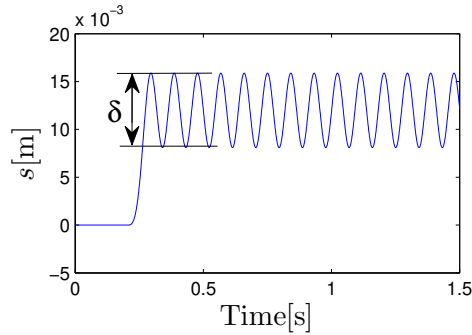


Figura 15 – Vibração residual $\delta(\theta)$

Fonte: Autoria Própria

a probabilidade de uma dada definição das dimensões que determinam a área retangular da seção transversal (b, h) e a inércia da haste do motor I_h ; assim $\mathbf{x}_d = [h \ b \ I_m]$. A confiabilidade pode ser escrita como $R = (1 - P_j)$:

$$P(\mathbf{x}_d, \mathbf{x}_u) = \int_{g_j(\mathbf{x}_d, \mathbf{x}_u) < 0} f_{\mu_{\mathbf{x}_d}, \mu_{\mathbf{x}_u}}(\mathbf{x}_d, \mathbf{x}_u) d\mathbf{x}_d d\mathbf{x}_u \quad (41)$$

com P sendo a probabilidade de falha, e $f_{\mu_{\mathbf{x}_d}, \mu_{\mathbf{x}_u}}$ é a função densidade de probabilidade conjunta de $(\mathbf{x}_d, \mathbf{x}_u)$. $\mathbf{x}_u = [\rho(\theta) \ E(\theta)]$ é o vetor que considera os parametros incertos do manipulador. Não há uma solução analítica para a expressão da Eq. (41) para obter P .

Portanto, o Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM) é usado para estimar a probabilidade de falha P da Equação (41). Este método determina o ponto mais próximo da solução; este ponto é designado como o ponto mais provável (PPF) de falha. Primeiro, os sistemas de coordenadas \mathbf{x} são transformados em um sistema de coordenadas normal padrão independente \mathbf{u} usando a transformação de Rosenblatt (ROSENBLATT, 1952). Em seguida, a função $g_j(\mathbf{x}_d, \mathbf{x}_u) = 0$ ou correspondentemente $G_j(\mathbf{u}) = 0$ é aproximado por um Taylor de primeira ordem no PPF que corresponde a β_j . O coeficiente de confiabilidade β é calculado resolvendo o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}} G_j(\mathbf{u}) \\ \text{subject to: } \beta_j = \|\mathbf{u}^T \mathbf{u}\| \end{aligned} \quad (42)$$

onde $\|\cdot\|$ representa a magnitude do vetor. Finalmente, a probabilidade de falha P_j é estimada de acordo com a seguinte expressão: $P_j = \Phi[-\beta_j]$, onde $\Phi[\cdot]$ representa a distribuição cumulativa normal padrão. O problema de otimização para encontrar o coeficiente de confiabilidade β_j foi resolvido usando o algoritmo proposto por Rackwitz e Fiessler (1976)

A confiabilidade R é avaliada dentro dos limites das dimensões $b = [0.030 \ 0.025]\text{m}$

e $h = [0.001 \quad 0.003]$ m da área da seção transversal, como mostra a definição das variáveis da Tabela 1.

Tabela 1 – Confiabilidade usando a Simulação de Monte Carlo e FORM.

$\mathbf{x}_d = [I_{m1} \quad h \quad b]$	R_f (MCS)	R_f (FORM)	n_f (MCS)	n_f (FORM)
$[2 \times 10^{-5} \quad 0.0025 \quad 0.0290]$	0.7113	0.7268	15000	73
$[2 \times 10^{-5} \quad 0.0020 \quad 0.0290]$	0.3121	0.3212	15000	74
$[2 \times 10^{-5} \quad 0.0010 \quad 0.0290]$	0.0181	0.0178	15000	57
$[5 \times 10^{-5} \quad 0.0025 \quad 0.0290]$	0.6913	0.6870	15000	55
$[5 \times 10^{-5} \quad 0.0020 \quad 0.0290]$	0.3120	0.3212	15000	75
$[5 \times 10^{-5} \quad 0.0010 \quad 0.0290]$	0.0219	0.0178	15000	58
$[5 \times 10^{-5} \quad 0.0025 \quad 0.0250]$	0.0928	0.0934	15000	127
$[5 \times 10^{-5} \quad 0.0010 \quad 0.0250]$	0.0008	0.0000	15000	72
$[5 \times 10^{-6} \quad 0.0025 \quad 0.0270]$	0.2965	0.2978	15000	95
$[5 \times 10^{-6} \quad 0.0010 \quad 0.0270]$	0.0010	0.0000	15000	79

A precisão do FORM para estimar a confiabilidade para vibrações residuais, R_f de Tabela 1, é avaliada considerando o MCS como referência de acordo para (CHEN *et al.*, 2019). A Tabela 1 apresenta os resultados da confiabilidade para vibrações residuais, R_f , na Tabela 1. Pode-se observar que os R_f obtidos usando FORM e MCS são semelhantes na maioria dos casos, pois FORM lida adequadamente com a não linearidade do modelo dinâmico do manipulador flexível. Além disso, n_f representa o número que cada método exige o cálculo do modelo dinâmico para estimar a confiabilidade (R_f). Pode-se observar que o FORM requer menos custo computacional do que o MCS, conforme apresentado na Tabela 1.

Na Figura 16 pode-se observar que a confiabilidade aumenta com o aumento da área da seção transversal do elo, ou seja, quanto maior a área da seção transversal diminui a amplitude da vibração residual na ponta e, portanto, confiabilidade.

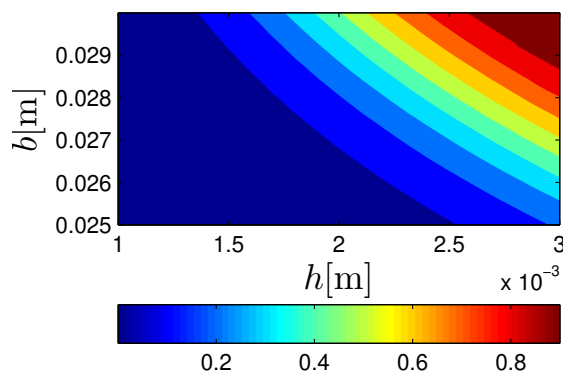


Figura 16 – Confiabilidade como função das variáveis h e b

Fonte: Autoria Própria

4 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Esse trabalho apresentou os parâmetros incertos dos braços flexíveis, como a rigidez, os quais foram modelados como campos estocásticos. O método utilizado modela a aleatoriedade dos parâmetros distribuídos dos braços que atuam nos graus de liberdade elásticos.

Um método numérico baseado na Simulação de Monte Carlo permite determinar o espaço de amostragem para análise de incertezas. O trabalho proposto pode ser aplicado de forma direta aos manipuladores flexíveis de um elo e dois elos. Desta forma, a metodologia proposta permitiu a análise da resposta dinâmica dos manipuladores flexíveis com incertezas em termos de resposta no domínio do tempo e no domínio da frequência.

A abordagem proposta mostrou um método direto para avaliar o impacto das incertezas paramétricas na resposta dinâmica de manipuladores flexíveis em termos de resposta em tempo e resposta em frequência. Especialmente, a presente abordagem permite a avaliação das incertezas juntamente com os parâmetros distribuídos dos braços, usando a abordagem estocástica de elementos finitos. As informações obtidas pela aplicação da abordagem proposta fornecem informações relevantes para a análise de manipuladores de braço flexível, que podem ser aplicadas para o projeto de sistemas de controle sujeitos a parâmetros incertos.

A análise de confiabilidade permitiu avaliar o efeito das incertezas paramétricas sobre as vibrações residuais. Portanto, esta análise pode ser usada como uma metodologia complementar para estudar o comportamento dinâmico dos manipuladores flexíveis sujeitos a incertezas e assim conferir se o manipulador atenderá a um determinado limite na sua resposta vibratória. Os métodos numéricos baseados na confiabilidade de primeira ordem se mostraram adequados para ser usados em conjunto com a formulação do modelo dinâmico baseada em elementos finitos estocásticos.

Os trabalhos futuros podem considerar duas áreas: projeto ótimo e controle. Assim, o projeto ótimo de manipuladores com elos flexíveis sujeitos a incertezas poderá ser desenvolvido para maximizar a confiabilidade e determinar os parâmetros geométricos. Por outro lado, diversas técnicas de controle também poderão ser desenvolvidas com o objetivo de minimizar as vibrações residuais e assim melhorar o desempenho dinâmico dos manipuladores flexíveis.

REFERÊNCIAS

AARTS, Ronald GKM; JONKER, Jan B. Dynamic simulation of planar flexible link manipulators using adaptive modal integration. **Multibody System Dynamics**, Springer, v. 7, n. 1, p. 31–50, 2002.

AMSC, N; SESS, A AREA. **Department of Defense Handbook Reliability Growth Management**. Menachem, 2011. Disponível em: https://fa.reliability-risk.com/wp-content/uploads/2021/08/mil_hdbk_189c.pdf.

AZEVEDO, Álvaro FM. Método dos elementos finitos. **Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto**, v. 1, n. 7, 2003.

BASTIDAS-ARTEAGA, Emilio; SOUBRA, Abdel-Hamid. Reliability analysis methods. **Unknown Location: ALERT Doctoral School**, 2014.

CHANG, Y-C; YEN, H-M. Design of a robust position feedback tracking controller for flexible-joint robots. **IET Control Theory & Applications**, IET, v. 5, n. 2, p. 351–363, 2011.

CHEN, Zhenzhong; WU, Zihao; LI, Xiaoke; CHEN, Ge; CHEN, Guangfeng; GAO, Liang; QIU, Haobo. An accuracy analysis method for first-order reliability method. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 233, n. 12, p. 4319–4327, 2019.

COSTA, Thamiris Lima; LARA-MOLINA, Fabian Andres; JUNIOR, Aldemir Aparecido Cavalini; TAKETA, Erik. Robust h_{∞} computed torque control for manipulators. **IEEE Latin America Transactions**, IEEE, v. 16, n. 2, p. 398–407, 2018.

CRAIG, J.J. **Introduction to Robotics**. Pearson Educación, 2006. (Area ingeniería). ISBN 9789702607724. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=hRzOp_qdxG8C.

DU, H; LIM, MK; LIEW, KM. A nonlinear finite element model for dynamics of flexible manipulators. **Mechanism and machine theory**, Elsevier, v. 31, n. 8, p. 1109–1119, 1996.

DUANE, JT. Learning curve approach to reliability monitoring. **IEEE transactions on Aerospace**, IEEE, v. 2, n. 2, p. 563–566, 1964.

FLORIAN, Aleš. An efficient sampling scheme: updated latin hypercube sampling. **Probabilistic engineering mechanics**, Elsevier, v. 7, n. 2, p. 123–130, 1992.

GE, Shuzhi Sam; LEE, Tong Heng; ZHU, G. A nonlinear feedback controller for a single-link flexible manipulator based on a finite element model. **Journal of Robotic Systems**, Wiley Online Library, v. 14, n. 3, p. 165–178, 1997.

GHANEM, Roger G; SPANOS, Pol D. **Stochastic finite elements: a spectral approach**. Mineola, NY: Courier Corporation, 2003.

GUSTIN, Sara. **Investigation of some tests for homogeneity of intensity with applications to insurance data**. 2011.

INMAN, Daniel J; SINGH, Ramesh Chandra. **Engineering vibration**. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 1994. v. 3.

JONKER, Ben. A finite element dynamic analysis of flexible manipulators. **The International Journal of Robotics Research**, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 9, n. 4, p. 59–74, 1990.

JONKER, Jan B; AARTS, Ronald GKM. A perturbation method for dynamic analysis and simulation of flexible manipulators. **Multibody System Dynamics**, Springer, v. 6, n. 3, p. 245–266, 2001.

KAPUR, Kailash C; PECHT, Michael. **Reliability engineering**. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2014. v. 86.

KHAIRUDIN, M; MOHAMED, Z; HUSAIN, AR; AHMAD, MA. Dynamic modelling and characterisation of a two-link flexible robot manipulator. **Journal of low frequency noise, vibration and active control**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 29, n. 3, p. 207–219, 2010.

LARA-MOLINA, Fabian Andres; DUMUR, Didier. Global performance criterion of robotic manipulator with clearances based on reliability. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Springer, v. 42, n. 12, p. 1–13, 2020.

LARA-MOLINA, Fabian Andres; ROSÁRIO, João Maurício; DUMUR, Didier; WENGER, Philippe. Robust generalized predictive control of the orthoglide robot. **Industrial Robot: An International Journal**, Emerald Group Publishing Limited, 2014.

LEE, James D; BEN-LI, Wang. Dynamic equations for a two-link flexible robot arm. **Computers & structures**, Elsevier, v. 29, n. 3, p. 469–477, 1988.

LEWIS, Frank L; DAWSON, Darren M; ABDALLAH, Chaouki T. **Robot manipulator control: theory and practice**. New York, NY: CRC Press, 2003.

- LOPES, MT d A. Análise de confiabilidade de estruturas aplicada ao projeto de reforço à força cortante de vigas em concreto armado com compósito de fibras de carbono. **Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.. Rio de Janeiro, 2007.**
- LOPEZ, RH; RITTO, TG; SAMPAIO, Rubens; CURSI, JE Souza de. A new algorithm for the robust optimization of rotor-bearing systems. **Engineering Optimization**, Taylor & Francis, v. 46, n. 8, p. 1123–1138, 2014.
- LUCA, Alessandro De; SICILIANO, Bruno. Closed-form dynamic model of planar multilink lightweight robots. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, IEEE, v. 21, n. 4, p. 826–839, 1991.
- MAKAROV, Maria; GROSSARD, Mathieu; RODRIGUEZ-AYERBE, Pedro; DUMUR, Didier. A frequency-domain approach for flexible-joint robot modeling and identification. **IFAC Proceedings Volumes**, Elsevier, v. 45, n. 16, p. 583–588, 2012.
- MANOJ, Neethu Ragi. **First-order reliability method: Concepts and application**. 2016. Tese (Doutorado), 2016.
- MARTINS, JM; MOHAMED, Z; TOKHI, MO; COSTA, J Sa Da; BOTTO, M Ayala. Approaches for dynamic modelling of flexible manipulator systems. **IEE Proceedings-Control Theory and Applications**, IET, v. 150, n. 4, p. 401–411, 2003.
- NGUYEN, Vu Linh; KUO, Chin-Hsing; LIN, Po Ting. Reliability-based analysis and optimization of the gravity balancing performance of spring-articulated serial robots with uncertainties. **Journal of Mechanisms and Robotics**, p. 1–32, 2021.
- PEDROSA, António Manuel de Carvalho; GAMA, Sílvio Marques de Almeida. **Introdução computacional à probabilidade e estatística**. Porto: Porto Editora, 2004.
- PEREIRA, Filipe José Didelet. Modelos de fiabilidade em equipamentos mecânicos. 1996.
- PERES, Marcos Vinicius de Oliveira. Aplicações das distribuições weibull modificada e beta-weibull na presença de frações de cura sob o enfoque frequentista e bayesiano. Universidade Estadual de Maringá, 2016.
- PIRAS, Gabriel; CLEGHORN, WL; MILLS, JK. Dynamic finite-element analysis of a planar high-speed, high-precision parallel manipulator with flexible links. **Mechanism and machine theory**, Elsevier, v. 40, n. 7, p. 849–862, 2005.
- RACKWITZ, Rüdiger; FIESSLER, B. Note on discrete safety checking when using non-normal stochastic models for basic variables. 1976.

ROSENBLATT, Murray. Remarks on a multivariate transformation. **The annals of mathematical statistics**, JSTOR, v. 23, n. 3, p. 470–472, 1952.

RUBINSTEIN, D; GALILI, N; LIBAI, A. Fully inverse dynamics of very flexible beam using a finite element approach and lagrange formulation. **Computers & structures**, Elsevier, v. 53, n. 5, p. 1073–1084, 1994.

SHABANA, Ahmed A; BAI, Zhengfeng. Actuation and motion control of flexible robots: Small deformation problem. **Journal of Mechanisms and Robotics**, p. 1–41, 2021.

SICILIANO, B.; KHATIB, O. **Springer Handbook of Robotics**. Springer International Publishing, 2016. (Springer Handbooks). ISBN 9783319325507. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=QbgKkAEACAAJ>.

TAKANO, Karina Assolari. **Controlador fuzzy takagi-sugeno aplicado a um manipulador com juntas flexíveis**. 2016. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2016.

THEODORE, Rex J. **Dynamic modeling and control analysis of multilink flexible manipulators**. 2012. Tese (Doutorado), 2012.

USORO, PB; NADIRA, R; MAHIL, SS. A finite element/lagrange approach to modeling lightweight flexible manipulators. **J. Dyn. Sys., Meas., Control.**, v. 108, n. 3, p. 198–205, 1986.

WANG, Peng; COIT, David W. Repairable systems reliability trend tests and evaluation. *In*: IEEE. **Annual Reliability and Maintainability Symposium, 2005. Proceedings**. Alexandria, VA, USA, 2005. p. 416–421.

YOSHIKAWA, Tsuneo; HOSODA, Koh. Modeling of flexible manipulators using virtual rigid links and passive joints. **The International Journal of Robotics Research**, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 15, n. 3, p. 290–299, 1996.

ZHAO, Wanda; PASHKEVICH, Anatol; KLIMCHIK, Alexandr; CHABLAT, Damien. Elastostatic modeling of multi-link flexible manipulator based on two-dimensional dual-triangle tensegrity mechanism. **Journal of Mechanisms and Robotics**, American Society of Mechanical Engineers, v. 14, n. 2, p. 021002, 2021.