

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

ALEX SANDRO DE CASTILHO

**OBJETOS DE APRENDIZAGEM COM *FEEDBACKS* PARA A
AUTORREGULAÇÃO DA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS
MATEMÁTICOS NECESSÁRIOS PARA O CÁLCULO DIFERENCIAL E
INTEGRAL**

TESE

PONTA GROSSA

2024

ALEX SANDRO DE CASTILHO

**OBJETOS DE APRENDIZAGEM COM *FEEDBACKS* PARA A
AUTORREGULAÇÃO DA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS
MATEMÁTICOS NECESSÁRIOS PARA O CÁLCULO DIFERENCIAL E
INTEGRAL**

**Learning Objects with Feedback for Self-Regulation in Learning
Mathematical Concepts Necessary for Differential and Integral
Calculus**

Tese apresentada como requisito para obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciência e Tecnologia, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. André Luis Trevisan
Coorientador: Prof. Dr. Diego Marczał

PONTA GROSSA

2024



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, para fins não comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es) e que licenciem as novas criações sob termos idênticos. Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Ponta Grossa



ALEX SANDRO DE CASTILHO

**OBJETOS DE APRENDIZAGEM COM FEEDBACKS PARA A AUTORREGULAÇÃO DA
APRENDIZAGEM DE CONCEITOS MATEMÁTICOS NECESSÁRIOS PARA O CÁLCULO
DIFERENCIAL E INTEGRAL**

Trabalho de pesquisa de doutorado apresentado como requisito para obtenção do título de Doutor Em Ensino De Ciência E Tecnologia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ciência, Tecnologia E Ensino.

Data de aprovação: 24 de Junho de 2024

Andre Luis Trevisan, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Albino Szesz Junior, Doutorado - Universidade Estadual de Ponta Grossa (Uepg)

Maici Duarte Leite, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Sani De Carvalho Rutz Da Silva, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Sergio Carrazedo Dantas, Doutorado - Universidade Estadual do Paraná (Unespar)

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 24/06/2024.

Dedico este trabalho a meus pais, por sempre me apoiar e incentivar a ir além, apesar das limitações. A minha esposa que sempre esteve ao meu lado nos momentos mais difíceis, toda gratidão.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, que com sua graça e misericórdia tem me conduzido durante esta jornada.

Agradeço à minha família por todo o carinho, compreensão e motivação em todos os momentos. Em especial, minha esposa Gisele que é a pessoa mais importante na minha vida, sem ela nada disso seria possível. Ao meu pai, Valter, e à minha mãe, Zulmira, que sempre estiveram em oração por minha vida e diziam que eu conseguiria ir mais além, apesar das limitações.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. André Luis Trevisan, pela sabedoria e paciência com que me guiou nesta trajetória.

Agradeço também ao meu coorientador, Prof. Dr. Diego Marczal, pela ajuda e todo trabalho realizado na reestruturação da FARMA.

Aos meus colegas, professores e técnicos do programa de pós-graduação da UTFPR-PG. Em especial, meus colegas Belmiro, Glauber e Michel pelas idas e vindas de Ponta Grossa, foram momentos especiais de boas conversas e descontração.

Não poderia deixar de agradecer à equipe médica que cuidou dos meus olhos durante todo o processo de cirurgias e recuperação, minha gratidão aos doutores Alexandre, Lucas e Tulio.

Gostaria de registrar também, o meu agradecimento à UTFPR campus Guarapuava pela oportunidade de realizar o doutorado em período integral.

Enfim, a todos os que por algum motivo contribuíram para a realização desta pesquisa, meu muito obrigado.

Você nunca saberá que Deus é tudo o que você precisa até que ele seja tudo o que você tiver (Rick Warren, 2024).

RESUMO

Devido aos altos índices de reprovação nos cursos de Engenharia, é de fundamental importância buscar alternativas que minimizem as dificuldades que os estudantes ingressantes nas universidades brasileiras, em particular na UTFPR, apresentam nas disciplinas da área de matemática. Uma alternativa é o uso de Objetos de Aprendizagem (OA) que possibilitem a conscientização dos erros cometidos de modo a incentivar a capacidade de formular hipóteses e resolver situações-problemas, aspectos esses, fundamentais para a autorregulação da aprendizagem. Deste modo, o objetivo deste trabalho é conceber um OA que ofereça *feedbacks* imediatos que possam ser utilizados para a autorregulação da aprendizagem, em termos de conceitos de Matemática necessários para o Cálculo Diferencial e Integral 1 (CDI 1). Esse OA foi implementado em uma versão da plataforma FARMA, denominada FARMA-Calc. Para o desenvolvimento da pesquisa, utilizou-se a metodologia pautada em *Design Science Research* - DSR. Na primeira fase, seguindo as diretrizes do modelo da DSR, procurou-se apresentar a relevância do problema e a proposta de *design* do artefato (OA), bem como uma primeira etapa de avaliação desse *design*. Em uma segunda fase, se deu a implementação da versão completa do OA, para aplicação e avaliação com um grupo de alunos iniciantes em CDI 1. Essa versão completa do OA é composta de um conjunto de 20 questões com *feedbacks*, definidas a partir de estudos sobre os instrumentos de avaliação do Pré-Cálculo, em especial o *Calculus Concept Readiness* (CCR) e os estratos de conhecimento de Matemática. Por fim, o OA foi submetido a uma avaliação final com três turmas de CDI 1. Os resultados obtidos apontam um alto índice de receptibilidade por parte dos alunos em relação ao OA e sua potencialidade como instrumento de autorregulação da aprendizagem de conceitos de Pré-Cálculo. Como resultado, essa pesquisa oferece esse OA na forma de um produto educacional, denominado FARMA-Calc, com potencial para auxiliar os alunos em suas dificuldades em conceitos de Matemática necessários para a aprendizagem de CDI 1.

Palavras-chave: ensino de cálculo diferencial e integral; tdic; objetos de aprendizagem; *feedbacks*; autorregulação da aprendizagem.

ABSTRACT

Due to the high failure rates in Engineering courses, it is of fundamental importance to seek alternatives that minimize the difficulties that students entering Brazilian universities, particularly UTFPR, present in mathematics subjects. An alternative is the use of Learning Objects (LO) that enable awareness of mistakes made in order to encourage the ability to formulate hypotheses and solve problem situations, aspects that are fundamental for self-regulation of learning. Therefore, the objective of this work is to design an LO that offers immediate feedback that can be used for self-regulation of learning, in terms of Mathematics concepts necessary for Differential and Integral Calculus 1 (DIC 1). This LO was implemented in a version of the FARMA platform, called FARMA -Calc. To develop the research, the methodology based on Design Science Research - DSR was used. In the first phase, following the guidelines of the DSR model, we sought to present the relevance of the problem and the artifact design proposal (LO), as well as a first stage of evaluation of this design. In a second phase, the complete version of the LO was implemented, for application and evaluation with a group of students beginning in DIC 1. This complete version of the LO is made up of a set of 20 questions with feedback, defined based on studies on the Pre-Calculus assessment instruments, especially the Calculus Concept Readiness (CCR) and the Mathematics knowledge strata. Finally, the LO was subjected to a final evaluation with three DIC 1 classes. The results obtained indicate a high level of receptivity on the part of students in relation to the LO and its potential as an instrument for self-regulation in learning Pre-Calculus concepts. As a result, this research offers this LO in the form of an educational product, called FARMA-Calc, with the potential to help students with their difficulties in Mathematics concepts necessary for learning DIC 1.

Keywords: teaching differential and integral calculus; dict; learning objects; feedbacks; self-regulation of learning.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Uma taxonomia funcional de múltiplas representações	49
Figura 2 - Mapeamento dos elementos da DSR na construção dos OA.....	54
Figura 3 - Arquitetura funcionalista dos OA.....	57
Figura 4 - Exercício 1 do AO.....	59
Figura 5 - Exemplos de <i>feedbacks</i> apresentados após um erro.....	59
Figura 6 - Verificação do Rigor da Pesquisa	63
Figura 7 - Estrutura do OA.....	71
Figura 8 - Exemplo de questão com <i>feedback</i> de exemplo similar.....	73
Figura 9 - Exemplo de questão com <i>feedback</i> com definição ou conceito	74
Figura 10 - Exemplo de questão com <i>feedback</i> com mudança de representação.....	75
Figura 11 - Botão de voltar quando o passo a passo é concluído	92
Figura 12 - <i>Layout</i> da calculadora.....	94

SUMÁRIO

1	APRESENTAÇÃO DA PESQUISA.....	11
1.1	Trajetória profissional.....	11
1.2	Caracterização do problema de pesquisa.....	13
1.3.1	Objetivos específicos.....	18
2	ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O CDI E SEU ENSINO.....	20
2.1	Transição do ensino médio para o ensino superior.....	20
2.2	Instrumentos para avaliação de conhecimento em Pré-Cálculo e CDI.....	25
2.2.1	Prontidão de conceitos de cálculo.....	25
2.2.2	Estratos do conhecimento matemático.....	28
2.2.3	Exames de avaliação do conhecimento matemático no brasil.....	30
2.3	Os exames de avaliação e o objeto de aprendizagem proposto.....	33
3	TDIC NAS PRÁTICAS DE ENSINO DE CDI.....	34
3.1	TDIC e o ensino de CDI.....	34
3.2	Ambientes virtuais de ensino e aprendizagem.....	37
3.3	Sistemas tutores inteligentes.....	38
3.4	Objetos de aprendizagem.....	40
4	REMEDIAÇÃO DE ERROS E AUTORREGULAÇÃO DA APRENDIZAGEM.....	43
4.1	Remediação de erros.....	43
4.2	Feedbacks.....	44
4.3	Autorregulação da aprendizagem.....	46
4.4	Múltiplas representações externas.....	48
5	METODOLOGIA DA PESQUISA.....	52
5.1	Design science research.....	52
5.1.1	Relevância do problema.....	55
5.1.2	Design do artefato.....	56
5.1.3	Processo de busca de solução.....	60
5.1.4	Rigor da pesquisa.....	63
5.1.5	Avaliação.....	63
5.1.6	Contribuições da pesquisa.....	64
5.1.7	Comunicação da pesquisa.....	64
6	PROPOSTA DO OBJETO DE APRENDIZAGEM.....	65
6.1	Estrutura e organização das questões do OA.....	65
6.1.1	Grupo de questões que avaliam o estrato numérico.....	65
6.1.2	Grupo de questões que avaliam o estrato algébrico.....	67
6.1.3	Grupo de questões que avaliam o estrato funcional.....	68
6.2	Escolha dos feedbacks.....	71
6.2.1	Exemplo similar resolvido.....	72
6.2.2	Definição matemática do conceito abordado.....	73
6.2.3	Apresentação de outro registro de representação para o conceito.....	74
6.2.4	Disponibilização de conteúdo complementar.....	75
6.2.5	Resolução passo a passo.....	76

6.3	Implementação da FARMA-Calc	76
7	RESULTADOS E DISCUSSÕES	79
7.1	Relevância do problema	79
7.2	O artefato e o processo de busca da solução	80
7.3	Rigor da pesquisa	81
7.4	Avaliação.....	82
7.4.1	Primeira avaliação	82
7.4.2	Segunda avaliação	85
7.4.3	Terceira avaliação	88
7.5	Contribuições e comunicação da pesquisa.....	96
7.6	Discussão sobre o capítulo	97
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	99
	REFERÊNCIAS.....	103
	APÊNDICE A - ROTEIRO PARA OBSERVAÇÃO DO PARTICIPANTE	111
	APÊNDICE B - QUESTIONÁRIO DE PESQUISA	113
	ANEXO A - ESTRUTURA DO OA COM AS 20 QUESTÕES E SEUS <i>FEEDBACKS</i>	116

1 APRESENTAÇÃO DA PESQUISA

Este capítulo tem por objetivo fazer uma apresentação geral da pesquisa proposta nesta tese, iniciando com a trajetória profissional do autor, seguida da contextualização e caracterização do problema de pesquisa. Por fim, são apresentados o objetivo geral e específico e a organização geral do trabalho.

1.1 Trajetória profissional

Minha trajetória profissional é de um professor universitário de Matemática que transitou entre o ensino público e o privado desde 2009. Ao longo desse período, sempre lecionei nos primeiros períodos dos cursos de Engenharia e em diversos cursos nas áreas de Ciências Exatas e Biológicas, ministrando, dentre outras, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI).

Quando colaborador na Universidade Estadual de Londrina (UEL) e na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus Londrina, já percebia as dificuldades dos alunos com os conceitos matemáticos da Educação Básica. Tais dificuldades foram as mesmas encontradas como aluno ingressante no bacharelado em Matemática da UEL, no início de 2003. Nesse período, havia um curso de nivelamento denominado "Reconstruindo os Alicerces", coordenado por veteranos e professores do Departamento de Matemática, que era ministrado aos sábados à tarde fora do horário de aula, o que me ajudou muito. Sou muito grato por desfrutar dessa oportunidade de melhorar meus conhecimentos de Matemática e meu desempenho acadêmico, além de fortalecer e estabelecer novos relacionamentos entre os alunos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática.

Em 2011, observando as dificuldades encontradas pelos meus alunos do período noturno e inspirado pelo projeto da UEL no início da minha Graduação, ministrei os cursos de Pré-Cálculo na UTFPR para Licenciatura em Química e na Faculdade Arthur Thomas (atual Universidade Positivo de Londrina) para o curso de Administração de Empresas.

A partir de 2013, iniciei minhas atividades na UTFPR campus Guarapuava como professor efetivo. Desde então, ministro aulas de todas as disciplinas do quadro de Matemática dos quatro cursos ofertados pelo campus UTFPR-GP (Engenharia

Mecânica - EM, Engenharia Civil - EC, Tecnologia em Sistemas para Internet - TSI e Tecnologia em Manutenção Industrial - TMI). Em especial, devido ao meu mestrado em Matemática Aplicada e Computacional - UEL, no curso de TSI, desenvolvi e participei de vários projetos ligados à Matemática da Educação Básica, incluindo o Pré-Cálculo, bem como da preparação e aplicação de testes diagnósticos, de forma escrita e virtual, para calouros do curso. Destaco também a participação, no campus UTFPR-GP, como colaborador no projeto de aprimoramento da Ferramenta de Autoria para a Remediação de erros com Mobilidade na Aprendizagem (FARMA), sob responsabilidade do coorientador desta pesquisa, que tem por objetivo a construção de Objetos de Aprendizagem (OA) para o ensino de Matemática. A FARMA é uma plataforma *online* que permite a construção de OA voltados à aprendizagem de conceitos de indução analítica que envolvem expressões aritméticas e/ou algébricas. Suas principais características são constituir uma ferramenta simples e objetiva para o desenvolvimento de OA altamente interativos e promover uma aprendizagem por meio da remediação de erros, os quais são registrados desde a hora em que ocorrem (Marczal; Direne, 2012).

Depois de vários anos trabalhando o Pré-Cálculo nos cursos de engenharias e tecnologias, percebi que poderia tentar outras abordagens, considerando o baixo desempenho dos alunos ingressantes na universidade em disciplinas matemáticas. Após algumas “conversas de corredor” com professores e técnicos administrativos, decidi propor um curso de Matemática em escolas da Educação Básica, com dois propósitos. O primeiro era divulgar a UTFPR nas escolas, por ser uma instituição relativamente nova na cidade e ficar longe do centro e próxima a bairros mais humildes. O segundo era fornecer um curso simples, mas preparatório de Matemática para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), aos alunos do terceiro ano do Ensino Médio, em especial ao Colégio Dulce, que fica no bairro “Xarquinho” próximo a UTFPR. Sinto-me orgulhoso em dizer que esse projeto deu vários frutos.

A partir das experiências vividas ao longo desses anos de magistério, percebi que poderia associar as práticas docentes ao uso de tecnologias (em especial, a FARMA), com o objetivo de colaborar para a qualidade do ensino de Matemática e dar oportunidades de aprendizagens aos alunos que cursam ou cursarão CDI 1, visando a uma diminuição da retenção e da evasão nos cursos da UTFPR.

Para aproximar-me da pesquisa em ensino, cursei algumas disciplinas como

aluno especial no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus Ponta Grossa, e percebi que a linha de pesquisa “Fundamentos e metodologias para o ensino de ciências e matemática” era adequada ao meu tema de pesquisa. Assim, propus um projeto e me candidatei ao doutorado, iniciando como aluno regular em 2019 no PPGECT, sob orientação do professor André Luis Trevisan. Meu pré-projeto, intitulado “Aplicação da FARMA na remediação do aprendizado de Matemática em CDI 1” tinha por objetivo elaborar OA e aplicar a FARMA como alternativa às abordagens pedagógicas tradicionais que se apoiam em aparatos tecnológicos e otimizar a aprendizagem de conteúdos matemáticos dos acadêmicos ingressantes no ensino superior. O referencial teórico estava pautado nos trabalhos de Marczal (2014), que propôs a construção de OA na FARMA e pesquisas que exploram o uso de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) no Ensino de CDI (Fornari *et al.*, 2017; Borssoi; Trevisan; Elias, 2017; Trevisan; Mendes, 2018).

Ao cursar disciplinas do Programa e participar de atividades do grupo de pesquisa “Raciocínio matemático e formação de professores”¹, coordenado pelo orientador dessa pesquisa, tive a oportunidade de aprofundar estudos teóricos e discutir questões relacionadas ao ensino de CDI, levando à adequação do problema e das questões de pesquisa, detalhados a seguir.

1.2 Caracterização do problema de pesquisa

Os problemas relacionados à aprendizagem de conceitos matemáticos da Educação Básica, no caso de alunos que ingressam nos diferentes cursos superiores das áreas de Ciências Exatas, são tópicos comuns em discussões no meio acadêmico, tanto no âmbito nacional quanto internacional. Em especial, em eventos de Educação Matemática, como o Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), o Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), Psychology of Mathematics Education (PME) e International Congress on Mathematics Education (ICME), apontam os altos e crescentes índices de reprovações nas disciplinas matemáticas, ocasionando também um número significativo de desistências, especialmente nos cursos de Engenharia, fato que

¹ <https://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/781023>

preocupa gestores e professores que ministram aulas nos primeiros períodos dos cursos de graduação (Feitosa *et al.*, 2020; Homa, 2020).

A defasagem de conhecimento de parte dos alunos que ingressam nos cursos de graduação concentra-se principalmente no que se costuma denominar “conteúdos de matemática básica”, sem haver, entretanto, muita clareza ou consenso do que seriam esses “conteúdos” (Menestrina; Moraes, 2011).

Em consonância com os apontamentos de Zarpelon, Resende e Reis (2017), na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), contexto de trabalho e de pesquisa, os maiores índices de insucesso, nos cursos de Engenharia, estão presentes nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI I) e Geometria Analítica e Álgebra Linear, oferecidas no primeiro semestre da grade curricular. Além disso, a percepção e a experiência enquanto professor dessas disciplinas é que o conhecimento de matemática básica por parte dos alunos ingressantes vem decaindo ao longo dos anos. Relatos preliminares e iniciativas pedagógicas institucionais indicam que esse seja um dos motivos para o alto índice de reprovações e evasões nessas disciplinas. Zarpelon, Resende e Reis (2017) respaldam essa hipótese, apontando estudos que destacam que essa deficiência de formação em matemática básica é um dos fatores relevantes para justificar a falta de êxito na disciplina de CDI I, foco de interesse deste trabalho (Oliveira *et al.*, 2020; Menestrina; Moraes, 2011). Outros trabalhos apontam para a rigidez e a inflexibilidade na organização da disciplina de CDI, assim como para as práticas docentes (Oliveira, 2020; Garzella, 2013).

Além do fator citado acima, ao iniciar um curso superior, os acadêmicos parecem deparar-se com um ambiente desconhecido e, muitas vezes, hostil. Em particular, o aluno de Engenharia, logo no primeiro semestre, se vê frente a definições, demonstrações e propriedades associadas aos diferentes conceitos explorados em disciplinas matemáticas. Tais elementos são desconhecidos, o que gera um abismo na transição do Ensino Médio para o Ensino Superior.

Alvarenga e Sampaio (2016) destacam que o aluno ingressante no Ensino Superior se encontra, na disciplina de CDI, com “a necessidade de mobilizar conhecimentos integrados, inter-relacionados e na busca de compreender e analisar fenômenos os quais aí são tratados, ele se vê numa situação de inércia” (p.132). Trevisan e Mendes (2018), por sua vez, afirmam que ao iniciar a disciplina de CDI 1:

nosso estudante geralmente apresenta características oriundas de sua rotina de estudos na Educação Básica, tais como: falta de experiências anteriores com tarefas de caráter investigativo; expectativa de aulas expositivas, sucedidas pela resolução de tarefas similares aos exemplos apresentados pelo professor; concepções equivocadas acerca de alguns conceitos matemáticos (muitas vezes decorridas do foco na mecanização de processos, em vez de compreensão e atribuição de significado); hábito de trabalhar, na maioria das vezes, de forma individual, tendo dificuldade em expor e discutir suas ideias em grupo ou para toda a sala (Trevisan; Mendes, 2018, p. 213).

Para Godoy e Gerab (2018), é necessário um olhar mais atento para esse momento crítico na fase inicial da vida acadêmica de um aluno ingressante no Ensino Superior. Os autores ressaltam que o docente deve visitar frequentemente sua prática docente, pois, assim, poderá contribuir para o sucesso acadêmico desses jovens ingressantes no processo de ensino e aprendizagem.

Nesse contexto, torna-se fundamental refletir sobre o modelo tradicional de ensino de Matemática vigente na universidade, em que o professor expõe o conteúdo, dá exemplos e, em seguida, aplica provas para verificar se o estudante consegue reproduzir o que foi “passado” (Mendes; Trevisan; Elias, 2018). Deve-se pensar em formas de trabalho em que o estudante tenha um papel mais ativo no seu processo de elaboração de conhecimentos, em um processo mediado pelo uso de TDIC e pelo trabalho com tarefas de natureza investigativa. Além disso, a autorregulação surge como alternativa para que o estudante seja mais ativo no processo de ensino e aprendizagem, pois se refere ao grau em que o indivíduo atua, em nível metacognitivo, motivacional e comportamental, em relação aos seus próprios processos de aprendizagem e na realização de atividades escolares (Zimmerman, 1986).

Tais aspectos são alinhados às orientações presentes nas *Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia* (Resolução CNE/CES n.º 2/2019) (Brasil, 2019). Nesse documento é apontado o perfil do egresso do curso de graduação em Engenharia que deve, entre outras, compreender as seguintes características: “comunicar-se eficazmente nas formas escrita, oral e gráfica: a) ser capaz de expressar-se adequadamente, seja na língua pátria ou em idioma diferente do português, inclusive por meio do uso consistente das TDIC, mantendo-se sempre atualizado em termos de métodos e tecnologias disponíveis” (p. 2). Ressalta, também, que, no curso, deve ser estimulado o uso de metodologias para aprendizagem ativa, para promover uma educação mais centrada no aluno.

Com base no perfil dos seus ingressantes, a Resolução CNE/CES n.º 2/2019 no Art. 7º define que o Projeto Pedagógico do Curso (PPC) deve prever sistemas de

acolhimento e nivelamento, visando à diminuição da retenção e da evasão, ao considerar:

- I. as necessidades de conhecimentos básicos que são pré-requisitos para o ingresso nas atividades do curso de graduação em Engenharia;
- II. a preparação pedagógica e psicopedagógica para o acompanhamento das atividades do curso de graduação em Engenharia;
- III. a orientação para o ingressante, visando melhorar as suas condições de permanência no ambiente da educação superior (p. 5).

Com essas diretrizes e o avanço tecnológico, a utilização de TDIC vem se tornando cada vez mais necessária nos processos de ensino e de aprendizagem, nas diversas áreas de conhecimento. Em particular, questões relativas à Matemática do Ensino Superior têm ganhado forma no âmbito da pesquisa, e são diversos os autores que versam sobre o uso de TDIC nesse contexto, em especial nas disciplinas de CDI.

Como discutido por Trevisan, Fonseca e Palha (2018), as TDIC podem contribuir para a compreensão de conceitos matemáticos, pois possibilitam visualização, reflexão e deduções para refinar o conhecimento. Os autores alertam, porém, que, por si só, nenhuma tecnologia garante tais processos. Para tanto, é necessário um cuidadoso planejamento para utilizá-la, em especial, na elaboração, aplicação e no refinamento de tarefas que façam uso desse recurso, o que configura a importância do papel ativo do aluno frente a essas tarefas.

Assim, propõe-se, como foco deste trabalho, pensar estratégias que façam uso de TDIC, em especial a partir da concepção de um OA (Objeto de Aprendizagem) que possibilite aos acadêmicos ingressantes no Ensino Superior, a autorregulação da aprendizagem de conteúdos matemáticos necessários à aprendizagem. Pretende-se, por meio deste OA, contribuir na minimização de deficiências matemáticas dos alunos em CDI e, como consequência, seu melhor desempenho na disciplina e um aumento no número de aprovações.

A proposta concebida neste trabalho caracteriza-se como uma forma de remediação de erros, fundamentada na teoria de Múltiplas Representações Externas (MRE) (Leite; Pimentel; Pietruchinski, 2012), viabilizada a partir de diferentes tipos que *feedbacks* apresentados a partir de tentativas, sem sucesso, de resolver questões propostas no OA.

Ao construir um OA que possibilite diagnosticar erros em conceitos necessários à aprendizagem de CDI, relativos aos conteúdos de Matemática da Educação Básica, assume-se que teremos dados relevantes sobre as dificuldades do aluno na resolução

de diferentes questões, antecipando diferentes tipos que *feedback* que podem ser oferecidos.

Assim, entendemos que o OA tem uma dupla função: a primeira (foco de interesse deste estudo) é promover a aprendizagem individual no momento de sua utilização, na medida em que o aluno, ao conscientizar-se do seu erro, amplia sua capacidade de pensar e resolver as questões, criar hipóteses e, assim, chegar a um novo conhecimento, aspectos esses fundamentais para a autorregulação da sua aprendizagem (Hadwin; Oshige, 2011; Mendes, 2014). A segunda é oferecer informações para possíveis intervenções posteriores ao uso do OA, porque o professor, ao ter acesso aos modos de interação dos alunos, pode diagnosticar os erros relativos aos conteúdos de Matemática da Educação Básica e levantar dados relevantes sobre as dificuldades na resolução das tarefas propostas e intervir em seus processos de aprendizagem (Leite; Marczal; Pimentel, 2013; Marczal; Direne, 2012).

Este trabalho se desenvolve no âmbito de um Programa de Pós-Graduação que tem por intenção fomentar o desenvolvimento de produtos educacionais inovadores, a partir da elaboração de trabalhos que, além da fundamentação e reflexão teórica, se utilizem da pesquisa aplicada e que o produto final da pesquisa resulte em ações potencialmente aplicáveis no sistema educacional. Além disso, este trabalho está inserido em uma interface da Educação Matemática, visto que o orientador da pesquisa provém dessa área, e da Informática na Educação, área a qual o coorientador é pesquisador.

Com base nesse contexto, a seguir será apresentada a problematização da pesquisa com seus objetivos.

Questão de pesquisa: Que elementos considerar para elaborar um OA que ofereça *feedbacks* imediatos que possam ser utilizados para a autorregulação da aprendizagem, em termos de conceitos de Matemática necessários para o CDI 1.

1.3 Objetivo geral

Conceber um OA que ofereça *feedbacks* imediatos que possam ser utilizados para a autorregulação da aprendizagem, em termos de conceitos de Matemática necessários para o CDI 1.

1.3.1 Objetivos específicos

1. Levantar, a partir da revisão de literatura, quais dificuldades matemáticas são encontradas por alunos ingressantes no Ensino Superior em relação à disciplina de CDI.
2. Sistematizar, a partir da revisão de literatura, conceitos matemáticos considerados necessários para a aprendizagem de CDI.
3. Elaborar um modelo para a construção de OA que possibilitem ao aluno a autorregulação da sua aprendizagem.
4. Identificar percepções de alunos ingressantes em CDI sobre as contribuições do OA para a autoregulação da sua aprendizagem.
5. Avaliar potencialidades e limitações do OA na visão de alunos ingressantes no CDI.

1.4 Organização do trabalho

Pretendendo responder à problemática da pesquisa e visando alcançar os objetivos propostos, este trabalho foi estruturado em cinco capítulos. Este primeiro capítulo apresenta a contextualização do tema, o problema de pesquisa e seus objetivos.

No Capítulo 2, são apresentadas as relações entre ensino de CDI e a transição do Ensino Médio para o Ensino Superior. O foco deste capítulo é analisar, classificar e levantar alternativas para as dificuldades encontradas pelos alunos ingressantes no Ensino Superior, em particular nos cursos de Engenharia da UTFPR, o contexto desta investigação. Também são apresentadas as diferentes formas de avaliar o conhecimento matemático dos alunos nesse nível de ensino, no Brasil e no exterior.

O Capítulo 3 traz os dados sobre uso de TDIC no ensino da Matemática, com foco em Ambientes Virtuais de Ensino e Aprendizagem, Sistemas Tutores Inteligentes e Objetos de Aprendizagem.

O Capítulo 4 trata dos conceitos de remediação de erros e autorregulação da aprendizagem em Matemática. Também discute o uso de *feedbacks* e como eles estão relacionados com múltiplas representações externas e os registros de

representação semiótica.

No Capítulo 5, apresentam-se os procedimentos metodológicos usados na pesquisa, bem como as etapas da metodologia baseada no *Design Science Research* e a construção do OA pautada na metodologia iterativa INTERA (Inteligência, Tecnologias Educacionais e Recursos Acessíveis). Além disso, apresentam-se as etapas de desenvolvimento da pesquisa.

O Capítulo 6 foi destinado para a apresentação da proposta do OA. Assim como, sua estrutura pautada nos conceitos da teoria CCR e os estratos de conhecimento matemático: numérico, algébrico e funcional. Além disso, a fundamentação das escolhas dos tipos de *feedbacks* que foram utilizados e a implementação do OA na plataforma FARMA-Calc.

No Capítulo 7 são apresentadas as descrições das três avaliações, os resultados e as discussões sobre os resultados obtidos sobre as potencialidades do OA e a aceitabilidade dos alunos frente a um OA voltado para autorregulação da aprendizagem de conceitos necessários para o ensino de CDI 1. Por fim, no Capítulo 8 são apresentadas as considerações finais desta pesquisa.

2 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O CDI E SEU ENSINO

Este capítulo trata das dificuldades encontradas por ingressantes na disciplina de CDI, como a transição do Ensino Médio para o Ensino Superior, e aponta, por meio de levantamento bibliográfico, o que diferentes pesquisas têm investigado sobre o tema. Apresenta, ainda, trabalhos que discutem a questão dos conceitos matemáticos considerados necessários para a aprendizagem de CDI, bem como propostas de testes de avaliação diagnóstica desses conceitos já existentes na literatura.

2.1 Transição do ensino médio para o ensino superior

O término do Ensino Médio é um marco na vida de todos os jovens, pois, para uma grande parte deles, é o momento de escolher uma carreira profissional. Ao escolher um curso de graduação que se encaixe em seus planos, o indivíduo passa por processos de seleção, como vestibular ou o ENEM. Segundo o relatório *Education at Glance* da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), apenas 17% dos estudantes brasileiros optam por cursos na área de Tecnologias, Engenharias e Matemáticas. Esse índice posiciona o país atrás da China (40%) e Índia (35%) e é pequeno em relação aos países desenvolvidos, em que a porcentagem está em torno de 24% (Falcão, 2019). Esse relatório avaliou os 35 países mais ricos e 11 emergentes, incluindo o Brasil, que só está à frente de Argentina e Costa Rica, ambos com 14%.

Segundo relatório feito por Tonini e Pereira (2019) para a ABENGE – Associação Brasileira de Educação em Engenharia, as causas da evasão não apenas se relacionam às questões pessoais do ingressante, mas podem ser influenciadas também pela formação escolar anterior desse aluno que chega ao Ensino Superior com déficit de conhecimentos e não consegue acompanhar a intensa rotina de estudos exigida, culminando, assim, em reprovações sucessivas.

Juntamente com o crescente índice de evasão e os altos índices de reprovações nesses cursos, vários fatores podem ser levantados a respeito dessa questão na área de Engenharia, como o fator socioeconômico e a forma de ingresso no Ensino Superior, citados por Gomez *et al.* (2015) em uma análise feita sobre a evasão nos cursos de Engenharia no campus Medianeira da UTFPR. Godoy e Gerab

(2018), em um estudo realizado com docentes de uma escola de Engenharia do ABC Paulista, apontam que, além dos fatores citados anteriormente, os estudantes demonstram um certo desânimo devido às dificuldades encontradas na Matemática da Educação Básica e às dificuldades de adaptação na transição do Ensino Médio para o Ensino Superior.

Cunha e Carrilho (2005) ressaltam que, apesar das dificuldades de adaptação e de rendimento acadêmico dos alunos na transição do Ensino Médio para o Ensino Superior, um processo de adaptação bem-sucedido, no início da graduação, pode ser um fator determinante na persistência e no sucesso dos alunos ao longo de sua vida acadêmica. Isso aponta para a importância de um olhar mais cuidadoso na transição desses dois níveis de ensino muito distintos.

Nessa direção, Corriveau e Bednarz (2016) propõem uma reflexão sobre a mudança na cultura matemática de cada nível escolar e exploram as Formas de Fazer Matemática (FFM) com professores de Ensino Médio e Ensino Superior no Canadá. Essas FFM estão vinculadas ao contexto de ensino e, portanto, “incluem pensar e planejar como fazer matemática com os alunos e como representar o conceito matemático para fins de ensino” (Corriveau; Bednarz, 2026, p. 4). Os autores ressaltam que não é o que diferencia as formas de fazer matemática que caracteriza os professores do Ensino Médio e Superior, mas, sim, uma questão de como e quando os professores vão explorar juntos as questões de transição, ou seja, quando as FFM passam a ser vistas em termos dos significados específicos com que são adotadas em cada ambiente na prática. Apontam, também, quais FFM estão relacionadas ao uso do simbolismo em cada nível de ensino.

Primeiramente, os autores apresentam três características das FFM compartilhadas entre os professores do Ensino Médio.

- i) Simbolismo progressivo: refere-se a um simbolismo que é implementado gradualmente, por meio de notações intermediárias, ou seja, trabalhar a partir de um simbolismo “básico / familiar” e, aos poucos, ir modificando-o. Exemplo: ao trabalhar com funções, os professores apresentam inicialmente uma função básica, como a função quadrática, e usam notações básicas, $f(x) = x^2$, para estudar suas propriedades e, em seguida, transformá-la para introduzir gradualmente seus parâmetros, $f(x) = (ax + b)^2 + k$, procedimento comum aos professores canadenses.

- ii) Simbolismo transparente: refere-se à abordagem da simbolização com o objetivo de tornar o significado dos símbolos mais acessível aos alunos, ou seja, pode-se usar um determinado simbolismo por um longo período, como, no estudo de funções, em que eles usam sempre a mesma letra (a, b, k) para todas as funções estudadas durante o ano.
- iii) Simbolismo escolhido: refere-se ao simbolismo que é escolhido pelos próprios professores. Eles optam por não introduzir nenhuma definição simbólica formal no estudo de variação de funções.

Em seguida, com o objetivo de mapear um “território” para professores do Ensino Médio, Corriveau e Bednarz (2016) apresentam duas ideias das FFM compartilhadas entre os professores do Ensino Superior.

- i) Simbolismo explicado: a) **Traduzir o simbolismo**, em contextos de funções, traz certa preocupação aos professores, pois encontram dificuldade em traduzir definições que simbolizam matematicamente um processo de estudo de funções que explicaram de maneira formal anteriormente, ou seja, apresentar um simbolismo formal em um simbolismo que era apresentado de forma fragmentada no Ensino Médio; b) **Explicar/especificar o significado dos símbolos** para introduzir novos objetos matemáticos usando seus símbolos associados e explicar o significado do símbolo ao introduzi-lo pela primeira vez. c) **Dar voz ao símbolo** está ligado ao anterior, pois, na introdução de limites, os professores fazem uma abordagem intuitiva para introduzir a noção de limite e, em seguida, apresentam a notação associada, dando uma voz ao símbolo.
- ii) Simbolismo exterior determinado: a) **Apresentar/Traduzir um simbolismo pré-dado**, em que os professores usam um simbolismo convencional, ou seja, aquele que é reconhecido pela comunidade científica, não sendo necessariamente a escolha do professor. b) **Substituir e usar um simbolismo que varia**. Aqui é empregado um simbolismo que varia conforme as circunstâncias que envolvem seu uso, como pode ser verificado ao se usar a velocidade em função do tempo, quando a representação muda de $f(x)$ para $v(t)$.

Fazendo um comparativo, os autores apontam que as diferenças nas FFM permitem discernir algumas dificuldades enfrentadas pelos alunos, pois um mesmo simbolismo não possui a mesma condição nos dois níveis de ensino. Assim, o desafio

enfrentado pelos alunos no início do Ensino Superior pode ser decorrente da introdução de novos símbolos e novas regras que, em princípio, podem parecer semelhantes, mas as FFM são muito diferentes. Portanto, ao lidar com o modo informal de cultura encontrado em cada nível, os autores trazem à luz a complexidade da transição de uma cultura matemática para outra, em particular, mostrando as “diferentes regras do jogo matemático”. Essas culturas correspondem não apenas às diferentes FFM, mas também às diferentes lógicas.

Visando à transição de culturas e às diferentes FFM, Andrade, Esquincalha e Oliveira (2019) investigaram a disciplina de Pré-Cálculo ofertada em cursos de Licenciatura em Matemática de dezesseis universidades públicas do RJ. Os autores entendem que o Pré-Cálculo compõe a fase de transição do Ensino Médio para o Ensino Superior, e apontam três eixos de pesquisa sobre essa transição, que são detalhados a seguir: as dificuldades e o ensino de cálculo; os aspectos contextuais e psicológicos na chegada à universidade; e as metodologias de ensino no Pré-Cálculo.

Sobre o primeiro eixo, destacamos o trabalho de Lithner (2011), que discute a noção das dificuldades de aprendizagem e apresenta alguns *insights* relacionados ao tema, entre os quais estão a necessidade do uso de ferramentas de diagnóstico especiais e se os alunos podem reconhecer ou compreender suas próprias dificuldades. Em relação à transição da Matemática do Ensino Médio para o CDI, o autor aponta que as dificuldades estão relacionadas a fenômenos individuais, sociais e institucionais. Uma de suas preocupações está na pressão política e orçamentária para ajudar mais alunos a ingressar no Ensino Superior, levando a uma redução nas qualificações e pré-requisitos dos alunos nos cursos de graduação na Suécia.

O mesmo pode ser observado no cenário brasileiro, e Borges e Aquino (2012) chamam a atenção para

o perigo de uma expansão de vagas em detrimento da qualidade do ensino, o que representaria o sucateamento da Universidade Pública. Aponta as contradições do REUNI com ações improvisadas e condicionamento das verbas, mediante o cumprimento de metas. Por um lado, reconhece o aumento de vagas na Educação Superior, e, por outro, reafirma que a democratização do acesso exige Universidades com autonomia financeira, cursos bem estruturados com currículos inovadores, professores bem qualificados, infraestrutura adequada e condições de oferecer ensino de boa qualidade, com pesquisa para a produção de conhecimentos novos e extensão universitária (Borges; Aquino, 2012, p.117).

Andrade, Esquincalha e Oliveira (2019) apontam certas características que podem esclarecer tais dificuldades de aprendizagem dos alunos em CDI: dificuldades

de ordem cognitiva, ou decorrentes do processo didático e/ou de natureza epistemológica, fatores que podem interferir diretamente nesse processo.

Em relação ao segundo eixo, os aspectos contextuais e psicológicos na chegada do aluno ingressante à universidade, são fatores a serem considerados na transição. Por exemplo, para Almeida, Araújo e Martins (2016), as variáveis que influenciam durante esse processo vão além dos conteúdos. Os autores analisaram os aspectos sociais e psicológicos propondo algumas ações, como cursos de curta duração, sessões de métodos de estudo com apoio de tutores presenciais ou a distância, além de estimular a interação entre alunos por meio de grupos de apoio, assim como o incentivo a práticas de uma vida saudável.

Alguns desses elementos podem ser identificados no contexto da UTFPR, que tem realizado trabalhos de acompanhamento estudantil, como, por exemplo, as políticas de permanência, que englobam não somente aporte financeiro, mas também ações pedagógicas voltadas às seguintes questões: a distância da família, a dificuldade de adaptação ao curso, questões pessoais, dificuldades pedagógicas, problemas de saúde, entre outros (Gomez *et al.*, 2015). Para os autores, essas ações podem minimizar a evasão, a retenção acadêmica, a influência de fatores socioeconômicos no desempenho dos alunos.

No caso do terceiro eixo, destacam-se os vários tipos de cursos de Pré-Cálculo que são propostos com o objetivo de suavizar a dura transição dos alunos que ingressam em cursos de exatas. A proposta de uma disciplina ou curso de extensão que aborda conteúdo do Ensino Médio, que reforçaria a base do conhecimento matemático dos alunos, é o foco da pesquisa de vários autores.

Em pesquisa realizada por Andrade *et al.* (2020), os autores relatam que, em geral, os estudos feitos no Brasil sobre o Pré-Cálculo têm uma abordagem qualitativa, baseada em estudo de caso, disposta em vários formatos de carga horária, conteúdo e ensino presencial ou em EaD. No trabalho, são identificadas quatro categorias temáticas.

- i) **Abordagens Diferenciadas** - pesquisas sobre uso de TDIC, resolução de problemas, modelagem matemática e tarefas investigativas com o uso do GeoGebra.
- ii) **Compreensões acerca de Pré-Cálculo** - pesquisas sobre análise curricular dessas disciplinas, reflexão sobre a especificidade de Pré-Cálculo em cada

curso de graduação e o uso da disciplina como curso de nivelamento.

- iii) **Saberes dos Estudantes** - pesquisas que procuram identificar os erros matemáticos cometidos em relação ao tema Pré-Cálculo, compreensão das mudanças nas relações com o saber, influência das condições socioeconômicas e características culturais do aluno.
- iv) **Prática Docente** - pesquisas que mostram o professor como mediador, por exemplo, em ambientes virtuais de aprendizagem e no modelo de “sala de aula invertida”.

A falta de um consenso, de um maior aprofundamento e embasamento em pesquisas sobre as disciplinas de Pré-Cálculo, e sua relação com a diminuição (ou não) dos altos índices de retenção em CDI, demonstram que existe uma lacuna na investigação dessa temática. Além disso, suscitam a necessidade de determinar critérios mais claros e objetivos que possibilitem avaliar se os alunos ingressantes nas Engenharias e em outros cursos das Ciências Exatas têm conhecimento suficiente para cursar CDI, ou seria necessário, antes, cursar Pré-Cálculo. Embora esse não seja o foco desta tese, a proposta de investigação de OA com *Feedbacks* como recurso na autorregulação da aprendizagem de conceitos de matemática para o Ensino de CDI pode oferecer elementos que contribuam nessa direção.

2.2 Instrumentos para avaliação de conhecimento em Pré-Cálculo e CDI

Nesta seção, são apresentadas algumas propostas de instrumentos usados para avaliação de conceitos considerados necessários para a aprendizagem de CDI, a constar: o Instrumento para Prontidão de Conceitos de Cálculo (Carlson; Madison; West, 2015) e a proposta que explora os estratos do conhecimento matemático (Cuevas-Vallejo; Pineda; Reyes, 2018). Também são discutidos instrumentos para a análise dos conhecimentos matemáticos do aluno que sai do Ensino Médio: o Exame Nacional do Ensino (ENEM) Médio, o Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), a Prova Brasil, e o Pisa.

2.2.1 Prontidão de conceitos de cálculo

Carlson, Madison e West (2015) apresentam uma visão geral da literatura que identifica habilidades básicas de raciocínio no nível de Pré-cálculo e as habilidades que os alunos precisam desenvolver para compreender ideias-chave de CDI. Para tanto, propõem uma taxionomia denominada *Calculus Concept Readiness (CCR)*, ou Prontidão de Conceitos de Cálculo.

Os 23 itens na taxonomia estão organizados e distribuídos com base em cinco categorias (Quadro 1). O teste, na totalidade, não é de domínio público, mas, nesta pesquisa, utilizaremos os conceitos propostos pelos autores e alguns itens encontrados em artigos.

Quadro 1: Taxonomia do CCR

Habilidades de raciocínio
<ul style="list-style-type: none"> • R1 - Raciocínio Proporcional: Observar que duas grandezas que estão mudando juntas estão relacionadas por uma constante multiplicativa e que, como as duas grandezas mudam juntas, a razão de uma grandeza para a outra permanece constante; em seguida, usar esse conhecimento para determinar novos valores de uma quantidade para valores específicos da outra quantidade; • R2 - Visão de Função como Processo: Visualizar uma função como um processo que mapeia os valores de entrada no domínio da função para valores de saída na imagem da função; • R3 - Raciocínio Quantitativo e Covariacional: Conceituar quantidades em várias situações e pensar sobre como duas quantidades em uma situação mudam juntas.
Compreender, representar e interpretar padrões de crescimento de função
<ul style="list-style-type: none"> • F1 - Linear; • F2 - Exponencial; • F3 - Polinomial não linear; • F4 - Racional; • F5 - Periódica.
Compreender e usar os seguintes conceitos ou ideias
<ul style="list-style-type: none"> • U1- Grandeza; • U2 - Variável; • U3 - Inclinação / Taxa constante de variação; • U4 - Taxa média de variação; • U5 - Composição de função; • U6 - Função inversa; • U7 - Translações de funções (deslocamentos horizontais e verticais).
Compreender ideias centrais da trigonometria
<ul style="list-style-type: none"> • T1 - Medida de ângulo; • T2 - Radiano como unidade de medida; • T3 - As funções seno e cosseno como a covariação do comprimento de um arco (medido em unidades do raio do círculo) e a coordenada horizontal ou vertical do término do arco (medida em unidades do raio do arco). Essas perguntas exploram a

ideia de que todo círculo pode ser considerado um círculo unitário; <ul style="list-style-type: none"> • T4 - As funções seno e cosseno como uma representação da relação entre uma medida de ângulo e os lados de um triângulo retângulo.
Outras habilidades
<ul style="list-style-type: none"> • H1- Resolver equações; • H2 - Representar e interpretar inequações; • H3 - Usar e resolver sistemas de equações; • H4 - Compreender e usar a notação de função para expressar uma quantidade em termos de outra.

Fonte: Adaptado de Carlson, Madison e West (2015, p. 216).

Essa Taxonomia CCR contém três habilidades de raciocínio primárias fundamentais na aprendizagem e no uso de conceitos necessários para a aprendizagem de CDI. Inclui, ainda, a compreensão de vários tipos de funções que surgem da análise de padrões de variação em dados e outras compreensões que foram identificadas, na pesquisa de Carlson *et al.* (2010), como essenciais para construir ou interpretar fórmulas e gráficos de funções. Por fim, a taxonomia apresenta uma categoria que descreve as ideias trigonométricas necessárias para modelar o crescimento periódico e para entender e conectar o círculo unitário e a trigonometria no triângulo.

Com base nessa Taxonomia, os autores organizam um

exame de múltipla escolha de 25 itens, com cada questão tendo cinco opções de resposta. Dezoito dos vinte e cinco itens do CCR avaliam ou contam na compreensão do aluno sobre o conceito de função. Cinco itens avaliam a compreensão do aluno ou o uso de funções trigonométricas, e quatro itens avaliam a compreensão do aluno ou a capacidade de usar funções exponenciais. Dez itens estão situados num contexto aplicado (ou problema contextualizado) e exigem que os alunos raciocinem sobre as quantidades e usem ideias de função, composição de função ou função inversa para representar como as grandezas variam juntas. (Carlson; Madison; West, 2015, p. 215, tradução própria).

Para os autores proponentes do CCR, os dados obtidos a partir dele podem ser úteis para avaliar a eficácia de um curso de Pré-Cálculo ou na preparação dos alunos para o CDI. Apontam que o CCR é uma boa forma de verificar se os alunos estão preparados para aprender e entender o CCI, e assim apresentam ideias e conceitos que contribuíram para o presente trabalho. Trata-se de um bom caracterizador da aprendizagem dos alunos, independentemente dos resultados de outras avaliações a que eles sejam submetidos antes ou depois do CDI. Assume-se que o CCR e sua taxonomia permitem inferir, parcialmente, o nível de preparação dos

alunos para cursar a disciplina e aferir o nível de compreensão de conceitos necessários para a aprendizagem de CDI.

Em sua essência, o CCR trata de aspectos relacionados ao conceito de função, no entanto, as dificuldades dos alunos em CDI podem remeter a conceitos anteriores, como o raciocínio covariacional, raciocínio proporcional, medidas de ângulo e funções trigonométricas.

O raciocínio covariacional, em especial, está relacionado com o raciocínio quantitativo, pois é comum que os alunos precisem conceituar quantidades na resolução de um problema e considerar como essas quantidades estão relacionadas e mudam juntas (Thompson, 2010, 2012). Já Castillo-Garsow (2010) mostra que os alunos demonstram dificuldades em reconhecer situações em que duas quantidades variáveis estão relacionadas proporcionalmente, o que se torna um problema no nível de pré-cálculo. Em relação às medidas de ângulos e funções trigonométricas, estão sendo subdesenvolvidas em alunos do nível Pré-Cálculo (Moore, 2012).

Sendo assim, como o CCR está dentro do contexto norte-americano, no caso do Brasil, entendeu-se que era preciso agregar outros conteúdos aos OA que estão sendo propostos e serão apresentados a seguir.

2.2.2 Estratos do conhecimento matemático

Além das habilidades básicas de raciocínio no nível de Pré-cálculo, como apresentado na seção anterior, considera-se pertinente analisar também modelos teóricos que tratam de estratos do conhecimento matemático, bem como alguns trabalhos pontuais que propõem instrumentos para a avaliação desses conhecimentos.

Adjage e Pluinage (2012) definem quatro níveis de competência que tratam dos estratos do conhecimento matemático. Os autores descrevem as especificidades desses estratos e as dificuldades ligadas às suas mudanças e apontam uma hierarquia entre eles correspondendo à ordem em que são apresentados.

1 - Estrato numérico: é o estrato da capacidade de dominar os números inteiros e os números decimais, bem como as quatro operações elementares, formando números, usando as regras de numeração decimal e expressões aritméticas, produzindo igualdades para resolver um problema.

2 - Estrato racional: dominar as razões e as proporções, bem como o produto e o quociente dos números reais.

3 - Estrato algébrico: inclui cálculo com letras ou cálculo formal, mas não se limita ao domínio de escritas literais, pois existem atividades no nível do estrato algébrico que não usam letras e atividades que usam letras e que estão no nível do estrato numérico.

4 - Estrato funcional: O estudo das funções revela novos problemas em comparação com os da Álgebra. Processos como interpolação e extrapolação, com base em abordagens de modelagem, levam a novas noções e notações, como as de derivação e diferenciação com base em variações, depois às de integração, com base em "médias", a fim de antecipar e prever.

Assim, refletindo sobre a introdução dos conceitos de CDI, supõe-se que seja necessária a aquisição de uma nova forma de pensar, caracterizada como funcional, e de outra linguagem, que introduz novidades no que diz respeito à Álgebra. Pode-se verificar que, para aprender CDI, o aluno deve inserir um novo estrato diferente do estrato algébrico, que é o estrato funcional (Cuevas; Martínez; Pluinage, 2012).

Nesse cenário, Cuevas, Martínez e Pluinage (2012) promovem uma discussão sobre o pensamento funcional para a compreensão dos conceitos básicos de CDI e apresentam um experimento com o uso TDIC dentro da disciplina de CDI 1 em cursos de Engenharia no México. Os autores propõem um cenário diferente do cenário dos cursos de recuperação (Pré-Cálculo), em que o pensamento funcional não é visto como um pré-requisito, mas como um objeto próprio do curso de CDI. O experimento foi dividido em três fases: (i) um teste diagnóstico; (ii) introdução da unidade curricular em conjunto de Cenários Didáticos Interativos Computacionais (EDIC) para explorar os conceitos de variável e de relação funcional; (iii) uso do *software* CalcVisual para trabalhar polinômios que modelam problemas reais. Os resultados da pesquisa apontam que as deficiências iniciais detectadas no teste diagnóstico foram significativamente reduzidas na população experimental.

Com o CalcVisual, cada conceito (raízes, variações, pontos críticos, etc.) é explorado com o objetivo de fornecer elementos para analisar e construir o gráfico de um polinômio. O *software* gera, aleatoriamente, uma grande variedade de exercícios, propondo *feedback* para o usuário. Isso será feito de forma semelhante, nesta tese, por meio da FARMA, mas com a característica de que o conjunto de questões será

elaborado com base nos conceitos de matemática necessários para o ensino de CDI, não apenas sobre polinômios. Além disso, os *feedbacks* serão apresentados conforme os princípios das Múltiplas Representações Externas, que serão discutidas na seção 4.4.

Fundamentados nos conceitos de estratos do conhecimento, Reyes, Soberanes-Martín e Soto (2017) apresentam a correlação de dados sobre raciocínio verbal, lógica matemática, pensamento analítico e pensamento funcional, que são competências relacionadas aos conhecimentos matemáticos iniciais de ingressantes no curso de Engenharia na universidade mexicana. Por meio da análise de testes de diagnósticos, demonstrou-se um baixo nível operacional dos alunos na área de Matemática. Cuevas-Vallejo, Pineda e Reyes (2018), por sua vez, propõem iniciar o curso de CDI com um “reforço de pensamento matemático básico”, segundo expressão utilizada pelos autores, que inclui o pensamento funcional. A pesquisa aponta evidências de que o *design* de atividades didáticas baseadas nessa proposta promove substancialmente a compreensão do conceito de função real, que é um dos primeiros e principais tópicos a ser abordado em livros de CDI.

2.2.3 Exames de avaliação do conhecimento matemático no Brasil

Devido às dificuldades e às limitações encontradas sobre o Ensino de Matemática no Brasil, especificamente no Ensino Fundamental e Médio, e a relevância desse tema para a tese, nesta seção é apresentada uma breve caracterização de exames nacionais que avaliam, entre outros, o conhecimento matemático do aluno que finaliza o Ensino Médio (ENEM, SAEB e Prova Brasil).

ENEM

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) foi instituído em 1998 com o objetivo de “avaliar o desempenho escolar dos estudantes ao término da educação básica” (Brasil, 2021a). Em 2009, o exame passou a ser utilizado como mecanismo de acesso ao Ensino Superior, por meio do Sistema de Seleção Unificada (Sisu) e do Programa Universidade para Todos (ProUni). Contudo, segundo Soares, Soares e Santos (2021), o número de estudos voltados para a análise da qualidade do exame e dos itens de Matemática que o compõem ainda é pequeno. Os autores analisaram

a qualidade psicométrica da Prova de Matemática da edição de 2018 do ENEM, sugerindo que os processos de criação, revisão, testes e calibração das questões sejam aprimorados, garantindo, assim, a isonomia do exame.

Em Zarpelon *et al.* (2015), os autores avaliam a relação entre o resultado das provas de Matemática do ENEM e o desempenho dos calouros dos cursos de Engenharia na disciplina de CDI. Segundo a pesquisa, a UTFPR adota pesos diferenciados para as cinco provas que compõem o ENEM, baseando-se na crença “de que alunos que possuem um bom desempenho em Matemática/Física poderão cursar Engenharia e, conseqüentemente, terão um bom desempenho ao longo do curso, mas principalmente em disciplinas do ciclo básico” (Zarpelon *et al.*, 2015). Os resultados obtidos, porém, indicam que não houve uma melhora significativa nos índices de aprovação, apontando a possibilidade de que o desempenho dos acadêmicos em CDI pode ter pouca relação com o seu desempenho nas provas de Matemática do ENEM.

Saeb

O Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) é um conjunto de avaliações externas em larga escala que permite ao Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep/MEC) realizar um diagnóstico da Educação Básica brasileira e de fatores que podem interferir no desempenho do estudante (Brasil, 2021b). O Saeb permite que as escolas e as redes municipais e estaduais de ensino avaliem a qualidade da educação oferecida aos estudantes, oferecendo subsídios para a melhoria e o aprimoramento de políticas educacionais com base em evidências.

Sendo assim, as avaliações do Saeb, como a Prova Brasil, atuam enquanto uma avaliação do currículo prescrito pelos documentos oficiais. Sua estruturação elaborada sobre conteúdos pré-selecionados acaba refletindo nas ferramentas para a aquisição das habilidades e competências que se esperam de cada aluno, ao final de um ciclo (Moraes; Jelinek, 2017).

Prova Brasil

A Prova Brasil é uma avaliação para diagnóstico, em larga escala, desenvolvida pelo INEP. Tem o objetivo de avaliar a qualidade do ensino oferecido pelo sistema

educacional brasileiro a partir de testes padronizados e questionários socioeconômicos (Brasil, 2021c). Os testes são aplicados no quinto e nono ano do Ensino Fundamental e os estudantes respondem questões de Língua Portuguesa e Matemática, com foco na leitura e na resolução de problemas, respectivamente.

Com enfoque na avaliação e resolução de problemas na Prova Brasil, Moraes e Jelinek (2017) apontam que as habilidades e competências relacionadas com a Matemática estão divididas em quatro blocos: Espaço e Forma; Grandezas e Medidas; Números e Operações; Álgebra e Funções e Tratamento da Informação. Os blocos enfatizam a associação entre conteúdos curriculares e operações mentais desenvolvidas pelo aluno para, através das Matrizes de Referência, explicitar as habilidades esperadas pelos alunos ao final do ciclo avaliado.

Pisa

Em nível global, o *Programme for International Student Assessment - Pisa* (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes) é um estudo comparativo internacional realizado a cada três anos pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). O programa proporciona informações sobre o desempenho dos estudantes, dentro da faixa etária dos 15 anos, que já terminaram as fases de educação básica obrigatória na maioria dos países, o que inclui dados sobre seus conhecimentos prévios e suas atitudes em relação à aprendizagem dentro e fora da escola (Brasil, 2021d).

Os resultados do Pisa permitem que cada país avalie os conhecimentos e as habilidades de seus estudantes em comparação com os de outros países, aprenda com as políticas e práticas aplicadas em outros lugares e formule suas políticas e programas educacionais visando à melhora da qualidade e da equidade dos resultados de aprendizagem (Brasil, 2021d).

O Pisa avalia os domínios de leitura, matemática e ciências, além de avaliar também os domínios chamados inovadores, como resolução de problemas, letramento financeiro e competência global.

O Brasil participa do Pisa desde sua primeira edição, em 2000, sendo o único país da América do Sul a participar do programa. Entretanto, o país ainda não apresenta bons índices, principalmente em matemática, e está estagnado no nível 2 desde 2009. Isto é, os estudantes brasileiros não possuem nível básico de matemática, o mínimo para o exercício pleno da cidadania. Além disso, o Brasil se

manteve em 2018 num patamar inferior ao de todos os países da Europa e da América Latina avaliados (Liao; Motta; Fernandes, 2021).

2.3 Os exames de avaliação e o objeto de aprendizagem proposto

Os exames e instrumentos de avaliação apresentados neste capítulo são fundamentais para a elaboração e construção do OA proposto por esta tese. Em especial, o CCR é o instrumento que deu base teórica à pesquisa, pois identifica habilidades básicas de raciocínio no nível de Pré-Cálculo e as habilidades que os alunos precisam desenvolver para compreender ideias-chave de CDI. Tais habilidades estão relacionadas com as pesquisas sobre os estratos de conhecimento matemático. Sendo assim, o OA foi elaborado a partir de três grupos, que consideram as habilidades apresentadas no CCR e os estratos de conhecimento. Ou seja, foram escolhidas questões focadas em operações numéricas, expressões algébricas e operações com funções.

Além dos exames internacionais, os exames nacionais foram utilizados por possuírem bancos de questões já validadas que foram selecionadas a partir dos critérios do CCR e incluídas no OA em formato de questões ou *feedbacks*. Ressalta-se ainda que a combinação entre os elementos dos instrumentos internacionais e os exames de avaliação nacional mostrou-se como uma possibilidade de elaborar um OA que se aproxime da realidade educacional dos estudantes brasileiros.

Por fim, a importância de se analisar os exames citados anteriormente faz-se necessária devido a outros fatores, como os baixos resultados dos estudantes brasileiros em exames como o *Pisa*, indicam que nossos alunos não possuem conhecimento básico de Matemática, e isto está refletindo no Ensino Superior, com o aumento de índices de evasão e reprovação em disciplinas iniciais, como o CDI 1.

Outro fator, é que a comparação entre exames, nacionais e internacionais, que avaliam conceitos de Matemática adquiridos pelos alunos durante sua vida escolar, proporciona a elaboração de um produto educacional que seja bem fundamentado, mas adequado às necessidades e dificuldades encontradas por nossos acadêmicos ao entrarem no Ensino Superior.

3 TDIC NAS PRÁTICAS DE ENSINO DE CDI

Neste capítulo, será discutido o uso de TDIC nas práticas de ensino de Matemática, tanto no Ensino Básico quanto no Ensino Superior. Inicialmente, é apresentada uma contextualização sobre o uso de TDIC no ensino e aprendizagem em uma sociedade informatizada. Em seguida, são apresentados os conceitos que formam a base para o uso de TDIC nesta tese, como os Ambientes Virtuais de Aprendizagem, os Sistemas Tutores Inteligentes e os Objetos de Aprendizagem *online*. Este último, será o foco principal desta pesquisa, que propõe como resultado um produto educacional denominado FARMA-Calc, cujo objetivo é ser um OA com feedbacks para a autorregulação da aprendizagem de conceitos matemáticos necessários para o CDI 1.

3.1 TDIC e o ensino de CDI

A utilização de TDIC, Applets, Objetos de Aprendizagem, YouTube e outros se tornaram comuns no ensino e aprendizagem de todas as áreas da ciência. Na Matemática, há uma transformação em termos de multimodalidade, com diferentes interfaces, produção de vídeos e mobilidade (Gadanidis; Borba, 2008).

Sob a perspectiva de que se vive em uma sociedade informacional, evidencia-se que as TDIC são ferramentas essenciais para o acesso à informação e, segundo Pereira (2018), há necessidade de discussão e consolidação da cultura digital entre os professores que estão em sala de aula.

Essa necessidade está baseada na premissa de que os alunos estão incluídos digitalmente, usam as ferramentas digitais disponíveis para buscar as informações necessárias e rejeitam as estratégias pedagógicas tradicionais, especialmente as que ainda enfatizam a memorização e a repetição (Pereira, 2018, p. 27).

A utilização das TDIC no ensino pode modificar o papel do professor, que deixará de ser, em alguns casos, um mero “transmissor” de conhecimento e se tornará criador de um ambiente de aprendizagem, adequando sua relação de trabalho com uma nova geração de estudantes conectados e com acesso rápido à Internet. Por esse motivo, o nome Tecnologias Digitais de Comunicação e Informação (TDIC) ocupou o lugar das TIC (Tecnologias de Informação e Comunicação), pois é considerado mais abrangente no cenário atual.

A palavra “digital” significa dedo, assim, tecnologias digitais podem se referir a termos acesso a milhares de informações ao simples “toque dos dedos”. Segundo Corrêa e Brandemberg (2021), o que diferencia as TIC das TDIC é o fato de que as TIC se referem aos dispositivos eletrônicos e tecnológicos mais antigos, como o rádio, a televisão e o jornal, podendo até ser considerados alguns mais atuais, como o computador e a Internet. Tais tecnologias têm a finalidade de informar e comunicar. Já o nome TDIC é usado para designar os dispositivos mais atuais, como o computador, o *tablet*, os *smartphones* e outros dispositivos que funcionam de forma digital e não analógica. Para os autores, as TDIC devem ser compreendidas como “um conjunto de equipamentos e aplicações tecnológicas que geralmente utilizam a internet e diferenciam-se das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) também pela presença do termo digital” (Corrêa; Brandemberg, 2021, p. 38).

Portanto, uma cuidadosa atenção deve ser dada à relação entre a educação no século XXI e a nova geração de “nativos digitais”, pois, segundo Bittencourt e Albino (2017), o uso das TDIC na educação é um trabalho desafiador e exige que o processo de ensino e de aprendizagem se adapte para que, ao usá-las, o professor prepare seus alunos para serem cidadãos críticos e ativos nesse processo.

No Ensino Superior, em particular, no Ensino de CDI, muito se discute o uso de TDIC e as mudanças que elas estão gerando nos últimos anos, tais como novas abordagens metodológicas e quais são as melhores formas de aproveitar essas ferramentas em sala de aula como recurso didático (Santos; Reis; Silva, 2020). Os autores apontam que a intersecção CDI/TDIC como recurso didático-pedagógico em sala de aula pode favorecer os processos de ensino e de aprendizagem dos conteúdos das disciplinas, uma vez que o uso dos softwares Geogebra, Hipertexto e Graphmatica pode potencializar e ressignificar a construção dos conhecimentos matemáticos.

Para Borba e Penteado (2019), a utilização de TDIC, aliadas ao ensino de CDI, muitas vezes, é relacionada somente com a fragmentação de conteúdos e substituição do professor por uma plataforma de aprendizagem virtual. Certamente, a sua utilização pode ser vista por muitos com receio, no que diz respeito a mudanças na forma de ensinar, pois creem que ainda não estão preparados, enquanto outros demonstram uma certa desconfiança. Assim, para que o professor comece a utilizar novas tecnologias, é preciso que ele reflita sobre o assunto e tenha como princípio de

que todos podem produzir Matemática, nas suas diferentes expressões. O que nos leva a refletir sobre uma mudança no processo de ensino e aprendizagem e o uso de TDIC, em particular na disciplina de CDI 1.

Vários autores investigam o tema. Pereira e Junior (2019) fizeram um mapeamento do uso de Modelagem Matemática associado às TDIC no ensino de CDI a partir de uma revisão sistemática de dissertações e teses brasileiras. Os autores mostram que há poucos trabalhos abordando o tema e ressaltam que o uso de TDIC em atividades tem potencial de viabilizar a aprendizagem de tópicos de CDI. Em relação às tecnologias mais utilizadas, destaca-se o uso do *software* Excel, seguido do GeoGebra; Excel como ferramenta auxiliadora na modelagem das atividades e na análise dos resultados encontrados e Geogebra como auxiliar na formulação de modelos de resolução, assim como na interpretação gráfica.

Conforme as ideias de Trevisan; Fonseca; Palha (2018), as TDIC podem contribuir para a compreensão de conceitos matemáticos, pois possibilitam visualização, reflexão e deduções para refinar o conhecimento. Os autores defendem que, por si só, nenhuma tecnologia garante tais processos. Portanto, é necessário um cuidadoso planejamento para sua utilização, em especial, na elaboração, aplicação e no refinamento de tarefas que façam uso desse recurso, configurando a importância da atividade para a aprendizagem de determinado conteúdo matemático, mais especificamente, as conexões com a integralização da disciplina de CDI.

Em ambos os trabalhos citados, os autores ressaltam a escassez de pesquisas envolvendo a utilização de TDIC na disciplina de CDI como recurso pedagógico. No entanto, esses apontamentos mostram a importância de um olhar mais atento para essa questão, e um estudo mais aprofundado sobre o tema se torna extremamente relevante para o ensino e a aprendizagem de CDI, como é o caso desta tese.

Mediante as análises do uso de TDIC no Ensino de Cálculo, constataram-se algumas lacunas de investigação sobre o tema, tais como: uso de TDIC como intervenção na aprendizagem (Santos; Reis; Silva, 2020); concepção e uso de TDIC que proporcionam a criatividade, o senso crítico e os movimentos interativos entre alunos e professores (Flores; Rosário Lima; Müller, 2018). Em pesquisa realizada por Nesi *et al.* (2019) quanto à inserção de OA em tarefas matemáticas, os autores apontam a importância do uso desse recurso no ambiente escolar como prática pedagógica e na construção do conhecimento. Nesta pesquisa, não é apontado

nenhum trabalho voltado para o uso de OA no Ensino de Cálculo.

A seguir serão apresentados alguns elementos das TDIC que serão utilizados nesta tese, com o objetivo de oferecer um OA que possa ser uma alternativa para as diversas questões levantadas nesta seção.

3.2 Ambientes virtuais de ensino e aprendizagem

Como caso particular de possibilidades de inserção de TDIC no CDI, os Ambientes Virtuais de Ensino e Aprendizagem (AVEA) têm um papel importante nas novas relações de ensino e aprendizagem. São softwares ou plataformas educacionais *online*, originalmente destinados a dar suporte a atividades de educação a distância, que hoje já são incorporadas no ensino presencial. Os AVEA utilizam-se de vários elementos de TDIC, que permitem que o aluno desenvolva suas atividades em seu próprio tempo, espaço e ritmo de estudos (Morais; Eduardo; Moraes, 2018). Um dos AVEA mais utilizados nas instituições de Ensino Superior é o *Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment* - MOODLE, plataforma gratuita e com código aberto. Por meio dela, a aprendizagem está voltada a criação e disponibilização dos conteúdos (recursos), atividades e interação entre professor e alunos e alunos com alunos (Fornari *et al.*, 2017). Os autores da pesquisa fazem uma análise da implementação no MOODLE de duas disciplinas de Matemática, CDI 1 e GAAL, ambas ofertadas em formato EAD para vários campi da UTFPR, ressaltando as limitações e dificuldades encontradas por alunos e professores que optam por trabalhar com esse modelo de ensino. Como exemplos, podem ser citados a necessidade de desenvolver autonomia e autodisciplina por parte dos estudantes e, no EaD, o fato de que o professor não é mais o centro do processo de ensino e aprendizagem, mas atuar como orientador e mediador desse processo, o que é desafiador para ambos.

Apesar de estar se popularizando no Brasil nos últimos anos (e potencializado pelo momento de pandemia Covid-19), a utilização dos AVEA no Ensino Superior ainda apresenta desafios e gera dúvidas em termos da compreensão do seu papel no processo de aprendizagem. Para Fornari *et al.* (2017), isso ocorre por alguns motivos, como limitações no acompanhamento dos alunos de forma eficaz por parte dos professores tutores, pois há, muitas vezes, um grande número de alunos e de

atividades impossibilitando o acompanhamento e o desenvolvimento de cada aluno.

Em uma tentativa de resolver alguns desses problemas, nos últimos anos, a utilização de AVEA associados a Sistemas Tutores Inteligentes (STI) vem ganhando espaço, pois existe grande potencial em combinar sistemas inteligentes e mediação humana, com o propósito de aumentar a motivação dos alunos e facilitar o trabalho dos professores, além de propor alternativas para problemas que eram típicos da EAD e passaram a fazer parte de contextos presenciais (Martins *et al.*, 2021).

3.3 Sistemas tutores inteligentes

Os STI são ferramentas educacionais que têm por objetivo auxiliar alunos e professores no processo de ensino e aprendizagem. A possibilidade de trabalhar com os erros dos alunos é uma das características que se destaca nos STI (Morais; Eduardo; Moraes, 2018). Os professores, a partir dos erros cometidos pelos alunos, podem identificar as dificuldades individuais e, então, fornecer um *feedback* apropriado para corrigir desvios na formação de conceitos (Marczal, 2014). As ações realizadas por um STI estão baseadas em teorias de aprendizagem, como as propostas pela ACT-R (*Adaptive Control of Thought Rational*).

A ACT-R é uma arquitetura cognitiva híbrida, composta por um conjunto de mecanismos de processamento de informações programáveis que podem ser usados para prever e explicar o comportamento humano, incluindo cognição e interação com o ambiente (Ritter; Tehranchi; Oury, 2019). Um aprofundamento na teoria da ACT-R está além do escopo desta pesquisa, mas alguns dos princípios importantes para a educação estão detalhados em Ritter *et al.* (2007), e são apresentados brevemente a seguir.

Primeiro, existem dois tipos básicos de conhecimento, o processual e o declarativo. O conhecimento declarativo inclui fatos, imagens e sons; o processual consiste na compreensão de como fazer as coisas. A execução de qualquer tarefa envolve uma combinação dos dois tipos de conhecimento. Geralmente, começa-se com o conhecimento declarativo, que passa a ser processado por meio da prática. O conhecimento processual tende a ser mais fluente e automático do que o conhecimento declarativo. Os elementos do conhecimento processual são chamados de regras ou produções porque eles especificam as condições sob as quais são

aplicáveis às ações (incluindo mudanças no estado mental) que resultam da sua aplicação. O conhecimento declarativo tende a ser mais flexível e, também, mais amplamente aplicável do que o conhecimento processual. Frequentemente, a referência a elementos do conhecimento declarativo é feita como "fatos".

Em segundo lugar, o conhecimento necessário para realizar tarefas complexas pauta-se pela decomposição dessas tarefas em componentes de conhecimentos individuais, levando a um modelo pedagógico que enfatiza a prática de componentes individuais, independentemente do nível da tarefa. Ao mesmo tempo, alguns componentes de conhecimento (integração de informações de pequenos componentes) são inerentes a uma tarefa maior, o que fornece outra razão para enfatizar o desempenho em um contexto apropriado. Ou seja, a aprendizagem é mais eficiente se os alunos dominarem as habilidades dos componentes primeiro e, posteriormente, receberem um suporte sobre como integrá-los a tarefas mais complexas.

O terceiro princípio mostra que tanto o conhecimento declarativo quanto o processual tornam-se fortalecidos com o uso (e enfraquecidos com o desuso). Conhecimento forte pode ser lembrado rapidamente e com alguma certeza. Recuperação de conhecimento fraco pode ser demorado, trabalhoso ou impossível. Diferentes componentes de conhecimento podem representar diferentes estratégias ou métodos para realizar uma tarefa (incluindo as respostas incorretas). A força relativa desses componentes ajuda a determinar qual estratégia é usada. A aprendizagem envolve o desenvolvimento e o fortalecimento de conhecimentos corretos, eficientes e componentes apropriados.

Os princípios da ACT-R, para a Educação Matemática, são fundamentais na concepção e construção de OA propostos por esta pesquisa. Em específico, a ACT-R embasou o momento em que é apresentado a remediação do erro ao aluno durante a interação, por meio do mapeamento do caminho ideal para o aprendizado de um conceito durante o processo de resolução. O destaque desta arquitetura é a possibilidade de alertar o aluno quando se desvia da trajetória de estratégia correta, permitindo que revise suas etapas no processo de resolução, de tal forma que haja uma retomada à estratégia de resolução correta, passando pelo processo de pensamento, como alternativa ao processo de tentativa e erro (Leite, 2013). A avaliação desta tese se deteve na aplicação da arquitetura proposta a um Objeto de

Aprendizagem com *feedbacks* voltado para a autorregulação da aprendizagem de conceitos necessários para o CDI 1, através da plataforma FARMA-Calc.

3.4 Objetos de aprendizagem

Os OA podem ser definidos de diferentes maneiras, dependendo do que cada autor pretende ressaltar, seja de maneira mais geral ou específica, como se pode ver a seguir.

- i) Segundo Risk (2002), um OA caracteriza-se por uma entidade que pode ser utilizada, reutilizada ou referenciada em um processo de aprendizado assistido por computador.
- ii) Behar (2009, p.65) define um OA como “qualquer material digital como, por exemplo, textos, animações, vídeos, imagens, aplicações, páginas web de forma isolada ou em combinação, com fins educacionais”.
- iii) Ribeiro *et al.* (2012, p. 315) afirmam que “um OA pode ser qualquer material, desde que seja utilizado com fins educativos e embasamento pedagógico. Esses materiais podem ser estruturados como módulos de um determinado conteúdo ou como uma estrutura completa”.
- iv) Para Audino e Nascimento (2010), um OA pode ser qualquer material, desde que seja utilizado em algum processo de ensino e aprendizagem com o auxílio de tecnologia.

Nesta tese, será adotada a definição de OA baseado em Audino e Nascimento (2010), e um OA será utilizado como um recurso cognitivo para auxiliar e ampliar o ensino e a aprendizagem de matemática com as seguintes características: a acessibilidade, a interoperabilidade, a granularidade, e a reusabilidade (Marczal, 2014).

A acessibilidade visa a determinar como um OA pode ser encontrado e acessado. Segundo Wiley (2002), os OA devem estar facilmente acessíveis via internet, razão pela qual podem atingir um público muito maior e sua distribuição pode viabilizar o acesso simultâneo pelos usuários.

A interoperabilidade, segundo Audino e Nascimento (2010), refere-se à capacidade de serem utilizados em ambientes ou plataformas múltiplas que operam por meio de uma variedade de hardware e sistemas operacionais sem a necessidade

de modificações ou adequações, buscando alcançar os objetivos esperados. A plataforma utilizada neste trabalho será a FARMA-Calc, um ambiente *online* que pode ser utilizado em qualquer computador, *tablet* ou *smartphone*.

A granularidade, segundo Wiley (2002), um OA deve conter componentes instrucionais em partes menores, isto é, OA menores podem ser mais facilmente combinados com outros OA. O autor afirma que, os OA devem ser contextualizados até o ponto instrucional sobre determinado conteúdo a ser ensinado, e que seja capaz de promover a sua combinação com um conjunto de outros AO relacionados ao mesmo tema. Quanto mais granular for um OA, maior será o seu grau de reutilização.

Nesta tese, o OA proposto pode ser dividido em temas de estudo, como tópicos de operações algébricas e estudo de funções. Além de poder ser associado a outros OA dependendo do tema e da atividade que o professor estiver trabalhando com os alunos.

A reusabilidade, para Wiley (2002), por serem de alta granularidade, os OA abordam componentes instrucionais pequenos, que geralmente lidam com uma pequena parte do conteúdo didático, ou seja, estão contextualizados geralmente com o desenvolvimento de poucas habilidades, o que gera a possibilidade de utilizar os objetos em múltiplos contextos de repositórios, plataformas educacionais, sítios, aplicativos móveis, dentre outros. Deve-se, porém, tomar cuidado para que sejam pequenos e com relevância de conteúdo.

Segundo Maia *et al.* (2017),

Objetos de aprendizagem (OA) contribuem para diversificar as práticas de ensino e promover aprendizagem. Entretanto, é preciso que estes recursos sejam conhecidos e apropriados pelos docentes para que possam ser integrados às aulas, sobretudo em áreas com baixos índices de proficiência, como é a Matemática (Maia *et al.*, 2017, p. 744).

Da utilização de TDIC no ensino de Matemática, surge a oportunidade de experimentar novas formas de trabalho, como a construção de OA por meio de ambientes virtuais. Para Marczal (2014),

Autoria de material digital, ou simplesmente autoria, em Educação é o processo de organizar ou produzir uma sequência de informações de modo a compor um material para o ensino e aprendizagem, (e.g., Sistemas Tutores Inteligentes, Objeto de Aprendizagem) que possibilite a interação do usuário com partes de um domínio específico. Com isso, pode-se definir uma ferramenta de autoria como um software em que um tutor humano possa manipular, criar, alterar ou excluir sessões de ensino (Marczal, 2014, p. 14).

Pode-se pensar em uma maior interação entre o aluno e o conteúdo matemático na disciplina de CDI por meio de OA. Com inspiração no trabalho de Marczal (2014), que propõe a construção de OA na *Ferramenta de Autoria para a Remediação de Erros com Mobilidade na Aprendizagem* (FARMA) para remediação de conteúdos matemáticos, este trabalho vislumbra-os como uma alternativa às dificuldades e necessidade supracitadas sobre o desempenho dos alunos em CDI.

De acordo com Marczal *et al.* (2016), a FARMA permite a construção de tarefas voltadas à aprendizagem de conceitos de indução analítica que envolvem expressões aritméticas e/ou algébricas. Sua principal característica é ser uma ferramenta simples e objetiva para o desenvolvimento de OA altamente interativos e promover uma aprendizagem por erros, os quais são registrados desde a hora em que ocorrem. Assim, os alunos podem, posteriormente, explorar seus próprios erros, além de permitir que os professores tenham acesso integrado ou individual aos resultados de seus alunos. Desse modo, os OA criados na FARMA-Calc, poderão ser utilizados como instrumentos de diagnóstico e, também, para remediação/intervenção de erros cometidos pelos alunos durante seu processo inicial de aprendizagem de CDI 1. Sendo assim, o produto resultante desta tese será de forma geral um Sistema Tutor Inteligente, denominado FARMA-Calc, baseado em um Objeto de Aprendizagem com *feedbacks* imediatos que proporcionarão ao estudante sua autorregulação da aprendizagem de conceitos necessários para CDI 1.

Para tanto, propõe-se a reestruturação da FARMA para a nova plataforma FARMA-Calc, onde o foco é a elaboração de OA voltados especificamente para conteúdo de Matemática necessários para o ensino de CDI 1, em específico, conceitos de Pré-Cálculo. No próximo capítulo serão apresentados dois conceitos fundamentais para a formulação de um OA na FARMA- Calc, a saber remediação de erros e autorregulação da aprendizagem.

4 REMEDIAÇÃO DE ERROS E AUTORREGULAÇÃO DA APRENDIZAGEM

Como visto no capítulo anterior, nesta seção será apresentado o conceito de remediação de erros e o de autorregulação da aprendizagem para elaboração do OA proposto. Tais termos têm por objetivo, nesta pesquisa, se inter-relacionarem de tal modo que a apresentação de feedbacks durante a resolução de um exercício, possa proporcionar a autorregulação da aprendizagem do aluno através da remediação/intervenção de erros cometidos.

4.1 Remediação de erros

A remediação de erros constitui um elemento fundamental na construção de conceitos. A partir dos erros, é possível que o aluno amplie mais sua base de conhecimentos, ou seja, remediar significa, nesse caso, auxiliar o aprendiz a se recuperar de um erro. Um exemplo são os ambientes de aprendizagem baseados em ACT-R, em que o erro cometido conduz o aprendiz a refletir e entender melhor ações e procedimentos (Marczal, 2014).

A palavra “remediação” vem do verbo remediar e, segundo o DICIO, Dicionário Online de Português (2021), tem origem no latim (*remediare*), e seu significado pode ser entendido como reparar uma situação; fazer correções; evitar; oferecer remédio a; providenciar o necessário; possuir o básico para suprir uma necessidade, falta ou dificuldade. Para esta pesquisa, remediar é assumido com o significado de auxiliar o aluno a se recuperar de um erro. De acordo com o Dicionário Priberam da Língua Portuguesa (2021), a “remediação” significa, também, “prover do que é indispensável”.

Para Kutzek (2015), remediação de erros é a ação tomada, em geral, por STI, quando um erro é capturado. Nesse instante, é dada ao sistema uma oportunidade de expressar fatos e regras que possam levar o aluno a corrigir o erro simplesmente mostrando conceitos esquecidos, ou permitindo que os alunos constatem seus próprios equívocos.

Por meio do erro, podem-se oferecer duas principais formas de aprendizagem: a remediação de erros, na qual o aluno recebe um *feedback* imediato sobre a falha, permitindo a sua recuperação e a continuação dos estudos; e a retroação aos erros,

em que o aprendiz pode explorar os seus erros e, a partir disso, tentar refazer a interação em que o erro foi cometido para entender seu motivo e, então, solucioná-lo (Leite, 2013).

Em Educação, o termo “remediação” pode ser entendido como um conjunto de intervenções feitas pelo professor em um processo de ensino associado à regulação da aprendizagem, que tem o papel de fornecer informação de retorno (*feedback*). O retorno pode otimizar e regular a aprendizagem, fazendo com que o aluno alcance pleno conhecimento de um conteúdo. Uma das funções da regulação é o *feedback*, que deve fornecer informações necessárias em etapas vencidas e nas dificuldades encontradas durante uma atividade (Mendes, 2014; Trevisan; Mendes; Buriasco, 2014).

4.2 Feedbacks

Os primeiros estudos voltados ao ensino e à aprendizagem utilizando o termo *feedback* remontam ao behaviorismo, no qual era usado como um mecanismo para reforçar ou descartar respostas. No entanto, o *feedback* não fornecia meios para correção/remediação dos erros, o que limitava sua relação com a regulação da aprendizagem. Todavia, com o surgimento da teoria cognitivista, nos anos de 1970 e 1980, o *feedback* passou a ser visto como uma fonte de informação a respeito dos processos cognitivos dos alunos (Cardoso, 2011), sendo assim, vários pesquisadores da Educação definem o conceito de *feedback*. Para Shute (2007), o *feedback* pode ser como uma instrução formativa, que representa a informação comunicada ao aluno com o propósito de modificar sua forma de pensar ou seu comportamento, visando à melhora na aprendizagem.

Na mesma direção, Paiva (2003) *define feedback* como:

a reação à presença ou ausência de alguma ação com o objetivo de avaliar ou pedir avaliação sobre o desempenho no processo de ensino-aprendizagem e de refletir sobre a interação de forma a estimulá-la, controlá-la, ou avaliá-la (p. 2).

A autora também enfatiza que a interação em um ambiente virtual é objeto de avaliação e prefere não usar termos como professor, aluno e aprendiz, pois o *feedback* pode ser fornecido por alguém externo ao ambiente de aprendizagem.

Costa *et al.* (2016) propõem a classificação dos *feedbacks* em duas classes: (i)

feedbacks como informações fornecidas ao estudante sobre o seu desempenho e (ii) *feedbacks como* informações que modelam o conhecimento do estudante, auxiliando em sua aprendizagem. Os autores referem-se ao *feedback* como um recurso pedagógico que pode despertar nos estudantes uma ação reflexiva e que contribua para sua aprendizagem. Ressaltam, ainda, que a eficiência de um *feedback*

... está vinculada a diversos fatores, que influenciam diretamente no sucesso da interação entre estudante e feedback, tais como: a complexidade da atividade, fatores internos do estudante (ex.: conhecimento a priori, habilidade de processar informação, vontade de superar erros, entre outros), o objetivo pedagógico do feedback, o procedimento de diagnóstico (capacidade do sistema para avaliar o estudante, identificar o problema e selecionar o feedback adequado) e a qualidade do feedback (Costa *et al.* 2016, p. 5).

Dentre as várias características e definições de *feedback*, Cardoso (2011) aponta que cada *feedback* pode ser analisado segundo (i) o seu conteúdo, que está relacionado ao tipo de informação, objetivos e ao nível de complexidade; (ii) o direcionamento, que pode ser individualizado ou direcionado para o grupo todo; (iii) o momento em que ele é fornecido, de forma imediata ou com atraso e (iv) em relação a sua fonte, o que pode ser fornecido pelo professor, computador (com *feedbacks* automáticos) ou pelos alunos.

Nesse contexto, vários autores exploram a ideia do uso de *feedbacks* em ambientes virtuais para o ensino de Matemática. Melo, Lima e Canto Filho (2018) apresentam uma proposta de uso de vídeo-*feedbacks* em atividades desenvolvidas na disciplina de matemática do Ensino Médio. O objetivo de utilizar vídeo-*feedbacks* imediatos era promover a melhoria do desempenho do aluno de forma personalizada. Cordeiro *et al.* (2021) avaliam o uso de *feedbacks* em Jogos Educacionais Digitais (JEDs), voltados ao ensino de operações básicas de matemática, e apontam que não foi observado o uso de *feedbacks* efetivos nos quatro JEDs de matemática avaliados. Ressaltam, porém, que seu uso poderia contribuir para um melhor desempenho do aluno nessa área. No contexto de ensino remoto, Nóbriga e Dantas (2021) apresentaram uma proposta de atividade a ser realizada no GeoGebra e que contenha exercícios com *feedbacks* automáticos. O artigo tem por objetivo provocar na comunidade acadêmica reflexões e debates sobre o uso de materiais didáticos com *feedbacks* automáticos no ensino de Matemática.

Leite, Marczal e Pimentel (2013) propõem a remediação de erros por meio de *feedbacks* que se utilizam de Múltiplas Representações Externas em Objetos de

Aprendizagem implementados na FARMA. Os autores apresentam a aplicação do *Objeto de Aprendizagem Pitágoras* e demonstram que o OA permitiu que os alunos aprofundassem seus conhecimentos conceituais usando as conexões, que foram adquiridas através da manipulação do OA.

Nesta tese propõe-se a elaboração de *feedbacks* voltados para a melhoria do conhecimento do estudante e que auxiliem na sua aprendizagem de conceitos matemáticos necessários para o CDI, os quais serão fornecidos automaticamente por meio da interação com OA na plataforma FARMA.

4.3 Autorregulação da aprendizagem

Em busca de um papel mais ativo por parte dos estudantes no processo de ensino e aprendizagem, a autorregulação tem sido objeto de estudos desde os anos 1980. Zimmerman (1986) refere-se à autorregulação da aprendizagem como o grau em que o indivíduo atua, em nível metacognitivo, motivacional e comportamental, em relação aos seus próprios processos de aprendizagem e na realização de atividades escolares.

Segundo Hadwin e Oshige (2011), modelos de aprendizagem autorregulada têm reconhecido, cada vez mais, aspectos da influência do contexto social em seu processo. Há uma grande diversidade no posicionamento teórico nesses modelos, que podem ser tomados em três perspectivas: aprendizagem autorregulada, aprendizagem corregulada e regulação socialmente compartilhada da aprendizagem. A primeira relaciona-se ao plano individual do sujeito; as duas últimas, ao plano social.

Silva, Simão e Sá (2004) apresentam um modelo teórico por fases para a autorregulação da aprendizagem, dividido em quatro fases.

- i) Antecipação e definição de objetivos: refere-se a conhecimentos anteriormente adquiridos e relacionados às tarefas a serem realizadas, juntamente com estratégias cognitivas e metacognitivas previamente estabelecidas. O condicionamento do aluno a crenças motivacionais, de autoeficácia, expectativas de resultados, e as orientações motivacionais influenciam nos processos para estabelecer os objetivos de aprendizagem, como domínio do conteúdo e evitar a reprovação.
- ii) Planejamento estratégico: o aluno deve recolher e organizar informações

necessárias, compreender o que é proposto pela tarefa, selecionar quais serão as estratégias adequadas a se tomar durante a execução da tarefa e, para a efetivação, determinar os passos a seguir.

- iii) Monitorização/execução e controle volitivo: os alunos usam os processos ou estratégias que acompanham a realização do plano estratégico definido anteriormente, o que ajuda a dirigir a ação. Para que a autorregulação seja eficaz, é necessário que o aluno seja capaz de observar e dar atenção às ações que está prestes a realizar, assim como os procedimentos que serão adaptados e os resultados a serem obtidos. Nessa fase, as estratégias metacognitivas assumem um papel fundamental, pois é a fase de testar, verificar e rever. Os autores também chamam essa fase de automonitoração.
- iv) Autorreflexão e autorreação: essa fase se diferencia da autoavaliação, pois a utilização das estratégias de aprendizagem requer um sistema autorregulador que está fundamentado na reflexão consciente que o aluno faz “ao explicar o significado dos problemas que vão aparecendo e ao tomar decisões sobre a sua possível resolução numa espécie de diálogo consigo mesmo” (Silva; Simão; Sá, 2004, p. 70). Assim, um aluno que emprega uma estratégia está sempre consciente dos seus propósitos e, caso se desvie deles, é capaz de se reorientar e regular a sua ação. Logo, as estratégias de aprendizagem formam um processo autorregulatório.

Os autores enfatizam que, em um processo autorregulatório, o professor é uma peça fundamental para a regulação da aprendizagem e que “é necessário que previamente o professor seja capaz de aprender e ensinar estrategicamente os conteúdos curriculares” (Silva; Simão; Sá, 2004, p 70).

Voltando o olhar para o âmbito universitário, Rosário *et al.* (2010) avaliam um projeto envolvendo a eficácia da autorregulação da aprendizagem para alunos com índices de insucesso na universidade. O programa teve por objetivo capacitar os alunos com um conjunto de estratégias que incluíam: (i) estabelecimento de objetivos; (ii) organização do tempo; (iii) tomada de apontamentos; (iv) lidar com a ansiedade face aos testes; (v) estratégias de memorização da informação, permitindo que os alunos abordem a aprendizagem de uma forma mais eficaz. Os autores constataram a eficácia da promoção da autorregulação e a diminuição de abordagens superficiais

por parte dos alunos.

No âmbito do Ensino de CDI, Buriasco e Mendes (2015) analisaram a utilização da Prova em Fases como instrumento de ensino e de aprendizagem em uma turma de CDI I, tendo como um dos focos de interesse compreender seu papel como recurso para a regulação da aprendizagem, de tal modo que o aluno saiba descrever o processo de resolução de uma determinada questão referindo-se aos conteúdos, estratégias e procedimentos possivelmente aprendidos no Ensino Médio.

Como as autoras propuseram *feedbacks* escritos como meio para a autorregulação da aprendizagem, isso, porém, não é de forma imediata. Esta pesquisa tem por intenção conceber OA que ofereçam *feedbacks* imediatos, o que permitirá uma intervenção mais eficiente.

4.4 Múltiplas representações externas

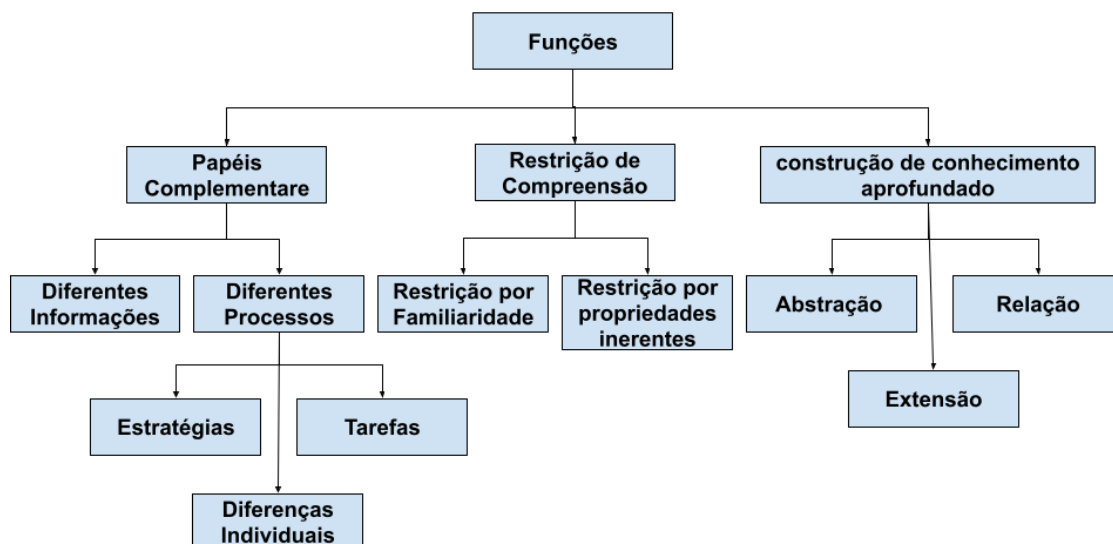
A expressão Representação Externa (RE) refere-se às diversas formas de representação expressas em termos de linguística e de modalidades gráficas, isto é, sentenças em linguagem natural e formal, tabelas, listas, gráficos, mapas, planos, diagramas e outros (Cox; Brna, 1995). Tais representações são utilizadas no cotidiano, por exemplo, quando se calcula uma rota no GPS para encontrar um endereço ou fazer uma lista de compras. Esses exemplos mostram o uso de Representações Externas para resolver problemas ou atividades que estão relacionadas.

Ainsworth (2006) propõe a taxonomia de Múltiplas Representações Externas (MRE), ilustrada na Figura 1, para relacionar várias representações, que está fundamentada no uso de técnicas para representar, organizar e apresentar o conhecimento, dividindo-a em três funções principais a serem exploradas em situações de aprendizagem.

- i) Função de papéis complementares: ao combinar representações diferentes, espera-se que os alunos se beneficiem das vantagens de cada uma das representações individuais em um processo cognitivo.
- ii) Função de restrição de compreensão: restringe possíveis representações sobrepostas ou irrelevantes para determinados conceitos.
- iii) Função de construção de conhecimento aprofundado: explora a possibilidade

do uso de múltiplas representações para a criação de um conhecimento aprofundado, ou seja, quando os alunos integram informações de MRE para obter uma visão que seria difícil de obter com apenas uma única representação.

Figura 1 - Uma taxonomia funcional de múltiplas representações



Fonte: Ainsworth (2006, p. 187).

As funções da MRE podem ter muitas funções vantajosas em materiais de ensino mais abrangentes, e essas funções diferentes se enquadram nas três diferentes categorias. No entanto, deve-se reconhecer que as MRE podem apoiar mais do que uma dessas funções simultaneamente (Ainsworth, 2006).

Leite, Pimentel e Pietruchinski (2012) apresentam uma aplicação da remediação de erros a partir da classificação do erro matemático e sua ligação com as funções de MRE em um OA de conteúdos matemáticos. Os autores vinculam a MRE ao erro apresentado pelo aluno, no intuito de viabilizar uma remediação mais precisa. Assim, na construção do OA, devem ser possíveis a identificação do erro cometido pelo aluno, sua classificação e a comparação da solução do aluno com a solução considerada ideal. Por fim, o OA deve ser capaz de vincular a função da MRE mais adequada ao erro cometido e apresentar a MRE mais adequada ao aluno, no intuito de facilitar a aprendizagem.

4.5 Remediação, autorregulação e *feedbacks* no OA proposto

Neste capítulo, foram apresentados os conceitos de remediação de erros, autorregulação da aprendizagem, *feedbacks* e múltiplas representações externas. Tais conceitos têm por objetivo fundamentar a elaboração e apresentação de intervenções a serem realizadas por meio do OA durante a resolução das questões e, assim, proporcionar a autorregulação da aprendizagem por meio da remediação de erros cometidos pelos alunos.

A remediação do erro aqui está relacionada a uma intervenção imediata por meio de um *feedback* quando um erro é cometido pelo aluno durante a resolução de uma questão. Esta intervenção pode ser entendida de forma mais clara como um processo formativo e interativo de construção de conhecimento, no qual os estudantes recebem uma informação relevante para o seu desempenho, conferem sentido a essa informação e atuam em função dela, de tal modo que possam corrigir o erro. Esse *feedback* estruturado deve traduzir-se em processos dialógicos, que informem os estudantes sobre o seu desempenho e promovam a sua capacidade de autorregulação em tarefas futuras (Almeida *et al.*, 2022).

Para tanto, os *feedbacks* foram elaborados baseando-se na teoria de múltiplas representações externas (MRE), de tal forma que cada *feedback* possa ter ao menos uma das características das funções da MRE, como elementos que representem papéis complementares, restrição de compreensão ou de construção de conhecimento aprofundado. Fazendo com que os *feedbacks* tenham as seguintes características dentro do OA:

- i) Ajudar a clarificar o que é um bom desempenho;
- ii) Facilitar o desenvolvimento da autoavaliação ou reflexão no processo de aprendizagem;
- iii) Criar oportunidades para superar a distância entre o desempenho atual e o desempenho desejado em Pré-Cálculo ou CDI 1;
- iv) Fornecer informações aos professores que podem ser usadas para adequar o ensino.

Com o uso de *feedbacks* com essas características, pretende-se incentivar a capacidade de autorregulação dos estudantes em relação à aprendizagem de conceitos de CDI 1.

Além disso, os conceitos apresentados neste capítulo subsidiarão a análise das avaliações realizadas durante o processo de implementação do OA, por exemplo, se

os *feedbacks* cumprem os papéis pré-definidos pelos princípios da MRE e se os alunos reconhecem que conseguem melhorar sua aprendizagem através do processo de autorregulação proposto. No próximo capítulo, será apresentada a metodologia da pesquisa, assim como o processo de avaliação do OA.

5 METODOLOGIA DA PESQUISA

Neste capítulo, apresenta-se uma descrição dos procedimentos metodológicos desta pesquisa. Em busca de respostas às questões levantadas, os conceitos teóricos anteriormente apresentados foram aliados à intenção de conceber um OA que possa ser utilizado como instrumento que possibilite a autorregulação de conceitos de Matemática, assim como, quais *feedbacks* são mais apropriados no contexto do CDI. O intuito é alcançar o seguinte objetivo geral: conceber Objetos de Aprendizagem que usem *Feedbacks* que possibilitem ao aluno uma autorregulação da aprendizagem de conceitos de Matemática necessários para o CDI.

Assim, optou-se por investigação de natureza qualitativa de cunho interpretativo (Bogdan; Biklen, 1994), orientada pelas diretrizes do *Design Science Research - DSR* (Dresch; Lacerda; Antunes, 2015). A DSR é caracterizada como um processo metodológico para conduzir uma pesquisa com um caráter mais rigoroso. Além de apresentar modos de conceber o conhecimento e de realizar pesquisas científicas, a DSR também pode ser vista como um conjunto de técnicas analíticas que permitem o desenvolvimento de pesquisas em diversas áreas (Lacerda *et al.*, 2013). Em particular, a DSR fundamenta o processo de elaboração e validação do artefato proposto por esta tese.

5.1 Design science research

Apesar da DSR originalmente ter sido aplicada na Engenharia, pode-se observar sua crescente utilização em diversas áreas de pesquisa. Em Sistemas de Informação, por exemplo, Rocha, Pimentel e Diniz (2014) descrevem o processo e os resultados de uma pesquisa realizada sobre a influência do tamanho do grupo na participação em bate-papo educacional, na qual a DSR orientou a realização de uma pesquisa comportamental e a produção de um artefato (modelo matemático para estimar o tamanho do grupo de bate-papo). Na Educação, Santos, Filippo e Pimentel (2020) apresentam a pesquisa sobre os Tapetes Musicais Inteligentes, em que o método da DSR está atrelado ao processo de pensar-fazer. Em Ensino, Szesz Junior (2021) apresenta uma Tecnologia Assistiva (MATH2TEXT) que possibilita aos alunos cegos acesso a expressões matemáticas por meio do computador. A DSR também é

uma das metodologias sugeridas pela Comissão Especial de Informática na Educação (Pimentel; Filippo; Santoro, 2020).

Em DSR, o artefato é projetado com base em conjecturas teóricas, e a avaliação do artefato fornece novos dados sobre as conjecturas elaboradas visando aumentar o conhecimento teórico (Rocha; Pimentel; Diniz, 2014).

A noção de artefato não se restringe a objetos físicos, pois um artefato pode ser definido como algo projetado, um engenho, uma artificialidade e abstrações. Em essência, qualquer coisa projetada para alcançar um objetivo pode ser considerada um artefato (Peppers *et al.*, 2007). A seguir são apresentados alguns tipos de artefatos propostos por March e Smith (1995).

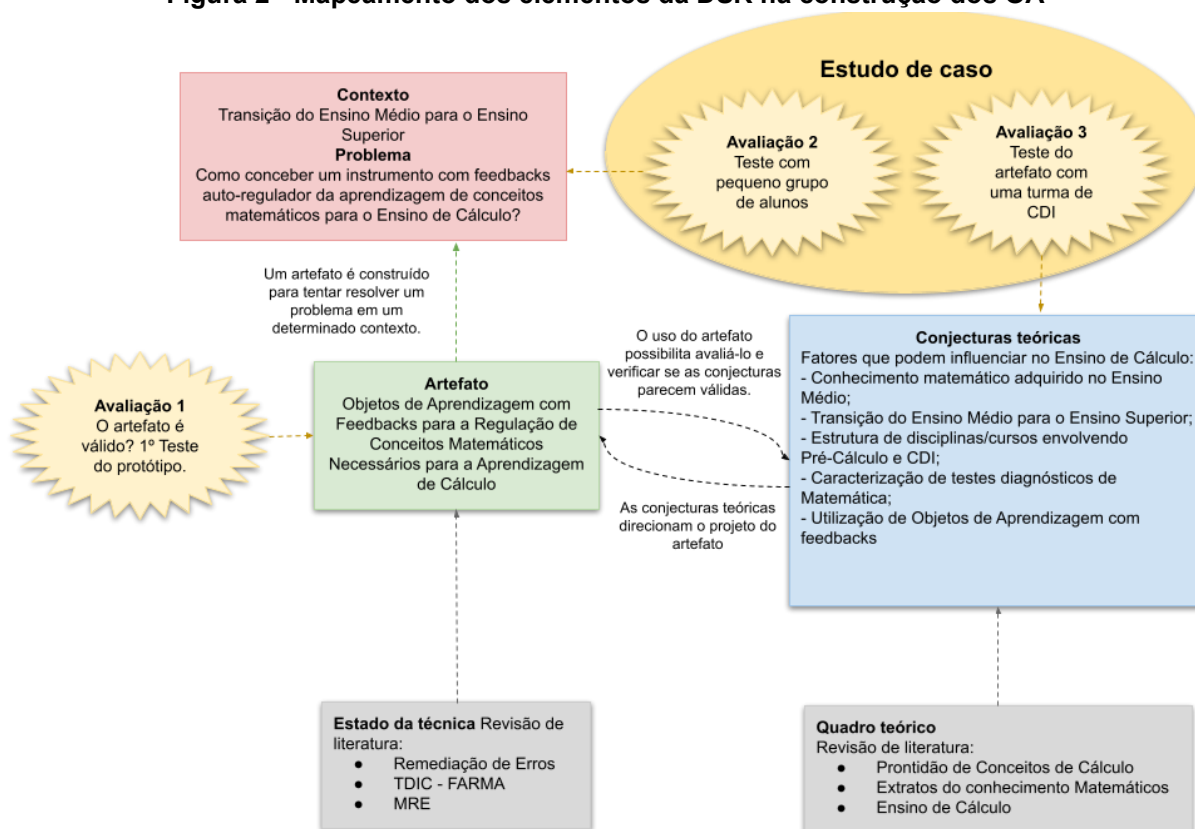
- i) **Constructos:** Constructos ou conceitos formam o vocabulário de um domínio. Eles constituem uma conceituação utilizada para descrever os problemas dentro do domínio e para especificar as respectivas soluções. Conceituações são extremamente importantes em ambas as ciências, natural e de design. Eles definem os termos usados para descrever e pensar sobre as tarefas. Eles podem ser extremamente valiosos para designers e pesquisadores.
- ii) **Modelo:** Um modelo é um conjunto de proposições ou declarações que expressam as relações entre os constructos. Em atividades de design, modelos representam situações como problema e solução. Ele pode ser visto como uma descrição, ou seja, como uma representação de como as coisas são. Cientistas naturais muitas vezes usam o termo 'modelo' como sinônimo de 'teoria', ou 'modelos' como as teorias ainda incipientes. Na Design Science, no entanto, a preocupação é a utilidade de modelos, não a aderência de sua representação à Verdade. Não obstante, embora tenda a ser impreciso sobre detalhes, um modelo precisa sempre capturar a estrutura da realidade para ser uma representação útil.
- iii) **Método:** Um método é um conjunto de passos (um algoritmo ou orientação) usado para executar uma tarefa. Métodos baseiam-se em um conjunto de constructos subjacentes (linguagem) e uma representação (modelo) em um espaço de solução. Os métodos podem ser ligados aos modelos, nos quais as etapas do método podem utilizar partes do modelo como uma entrada que o compõe. Além disso, os métodos são, muitas vezes, utilizados para traduzir um modelo ou representação em um curso para resolução de um problema. Os

métodos são criações típicas das pesquisas em Design Science.

iv) **Instanciação:** Uma instanciação é a concretização de um artefato em seu ambiente. Instanciações operacionalizam constructos, modelos e métodos. No entanto, uma instanciação pode, na prática, preceder a articulação completa de seus constructos, modelos e métodos. Instanciações demonstram a viabilidade e a eficácia dos modelos e métodos que elas contemplam.

Devido à característica desta pesquisa, o artefato proposto pode ter as características de um “modelo” e/ou de uma “instanciação”. A Figura 2 representa um mapa conceitual dos princípios da DSR, aplicada para esta pesquisa. Também segue os princípios de Hevner *et al.* (2004). Para os autores, há 7 diretrizes a serem consideradas em uma pesquisa pautada em DSR, apontadas no Quadro 2, e que são tomadas como etapas desta pesquisa.

Figura 2 - Mapeamento dos elementos da DSR na construção dos OA



Fonte: Baseado em Hevner (2004), inspirado em Rocha, Pimentel e Diniz (2014).

Quadro 2 – Diretrizes gerais para a condução e avaliação da DSR

Diretrizes	Descrição
D1 -Design como Artefato	A pesquisa fundamentada em Design Science deve produzir um artefato viável, na forma de um constructo, modelo, método e/ou uma instanciação.
D2 - Relevância do Problema	O objetivo da pesquisa fundamentada em Design Science é desenvolver soluções baseadas em tecnologia para problemas gerenciais importantes e relevantes.
D3 - Avaliação do Design	A utilidade, qualidade e eficácia do artefato devem ser, rigorosamente, demonstradas por meio de métodos de avaliação bem executados.
D4 - Contribuições do Design	Uma pesquisa fundamentada em Design Science deve prover contribuições claras e verificáveis nas áreas específicas dos artefatos desenvolvidos, e apresentar fundamentação clara em fundamentos de design e/ou metodologias de <i>design</i> .
D5 - Rigor da Pesquisa	A pesquisa em Design Science é baseada em uma aplicação de métodos rigorosos, tanto na construção como na avaliação dos artefatos.
D6 - Design como um Processo de Pesquisa	A busca por um artefato eficaz e efetivo exige a utilização de meios que sejam disponíveis, para alcançar os fins desejados, ao mesmo tempo que satisfaz as leis que regem o ambiente em que o problema está sendo estudado.
D7 - Comunicação da Pesquisa	A pesquisa em Design Science deve ser apresentada tanto para o público mais orientado à tecnologia quanto para aquele mais orientado à gestão.

Fonte: Adaptado de Dresch, Lacerda e Antunes Junior (2015).

As diretrizes apresentadas em forma de etapas (Quadro 2) são fundamentais para o desenvolvimento da pesquisa em DSR, pois envolvem a criação de um artefato (Objeto de Aprendizagem - D1) para um problema em especial (aprendizagem de conceitos para o Ensino de Cálculo - D2). A adequação dessas diretrizes à presente pesquisa é descrita a seguir.

5.1.1 Relevância do problema

A partir da caracterização do problema de pesquisa, da experiência do pesquisador e por meio de levantamento bibliográfico (Capítulos 2, 3 e 4) sobre o perfil dos ingressantes nos cursos de Engenharia, Ensino de CDI e o uso de TDIC, e remediação de erros e autorregulação da aprendizagem, buscou-se explicitar a relevância do tema.

Segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais dos Cursos de Graduação em Engenharia (Brasil, 2019), em um curso de Engenharia, sistemas de nivelamento

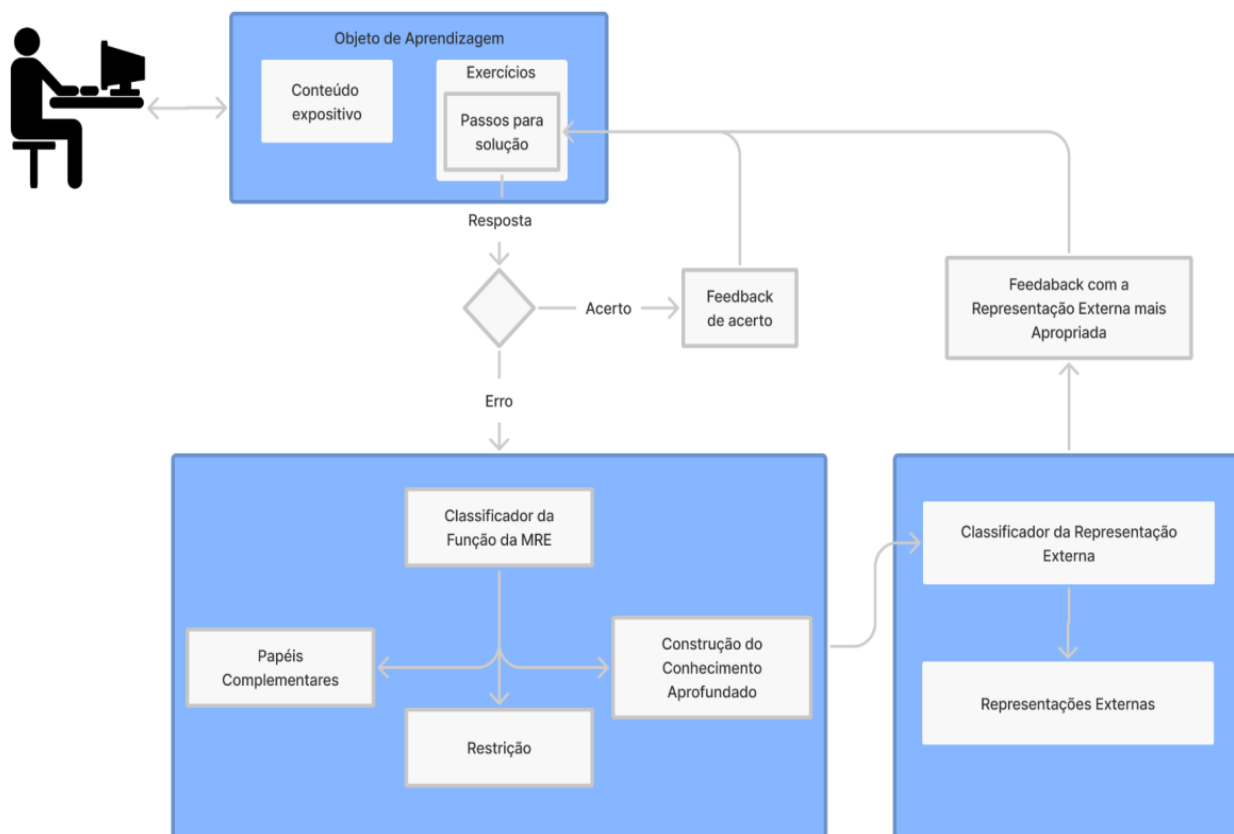
devem ser previstos visando à diminuição da retenção e da evasão, considerando as necessidades de conhecimentos básicos que são pré-requisitos para o ingresso nas atividades do curso. Isso mostra a relevância de pensar de uma forma sistemática, por meio da pesquisa, quais seriam esses conhecimentos básicos e compreender como essa problemática tem sido discutida no âmbito da pesquisa. Por exemplo, Carlson, Madison e West (2015) apresentam uma visão geral de literatura que identifica habilidades básicas de raciocínio no nível de Pré-cálculo e as compreensões que os alunos precisam para entender ideias-chave de CDI, que são base para o desenvolvimento do OA. Também, será considerado o modelo teórico que trata de estratos do conhecimento matemático (Cuevas-Vallejo; Pineda, Reyes, 2018), bem como alguns trabalhos pontuais que propuseram instrumentos para a avaliação desses conhecimentos básicos (Reyes; Soberanes-Martín, Soto, 2017).

Como citado na introdução deste trabalho, em um contexto local, Zarpelon, Resende e Reis (2017) apontam que, na UTFPR, os maiores índices de insucesso, nos cursos de Engenharia, estão presentes em CDI 1. Segundo os autores, alguns estudos destacam que a deficiência na formação em matemática básica é um fator relevante para justificar a falta de êxito nesta disciplina. Esses fatores demonstram a relevância do tema proposto.

5.1.2 Design do artefato

O artefato proposto é concebido para ser um conjunto de questões que usam *Feedbacks*, os quais devem possibilitar ao aluno a autorregulação de sua aprendizagem em relação aos conceitos de Matemática necessários para a aprendizagem de CDI. A arquitetura funcionalista do OA está representada na Figura 3, e é composta por módulos a serem acionados caso o aluno erre. Assim, o módulo classificador de funções das MRE recebe os dados para identificar acerto ou erro. Se um erro for detectado, o módulo identifica o erro classificado e desencadeia o processo de remediação de erros, sendo apresentada ao aluno uma lista de *feedbacks* contendo elementos que representam as funções da MRE (papéis complementares, restrição e construção do conhecimento aprofundado). O aluno, então, acessa os *feedbacks* que “acredita” serem necessários para avançar em sua estratégia de resolução.

Figura 3 - Arquitetura funcionalista dos OA



Fonte: Autoria própria (2024).

Para o seu desenvolvimento, será utilizada como base a ferramenta de autoria FARMA, concebida como alternativa às abordagens pedagógicas tradicionais no ensino de Matemática, por meio de feedbacks imediatos a partir dos erros. Em específico, esta tese propõe a validação, avaliação, divulgação e disponibilização do artefato supracitado em uma plataforma derivada da FARMA, denominada por FARMA-Calc.

O OA construído na FARMA-Calc será composto por um conjunto de questões elaboradas a partir do Instrumento de Prontidão de Conceitos de Cálculo (*Calculus Concept Readiness – CCR*), proposto por Carlson, Madison e West (2015), organizado com base na taxonomia de 23 itens distribuídos em cinco categorias (Quadro 1), a partir de questões já validadas baseadas no ENEM, Prova Brasil, Pisa e materiais didáticos em geral, que contemplam os estratos do conhecimento matemático (Cuevas-Vallejo; Pineda; Reyes, 2018).

Tendo em vista que o CCR é um teste de múltipla escolha aplicado em uma plataforma *online*, e com custos para o usuário (que necessita adquiri-lo), propõe-se, aqui, uma versão gratuita, mais adequada à realidade brasileira, na forma de OA

construído na FARMA/FARMA-Calc. Em vez de questões de múltipla escolha do tipo “correto/incorreto”, a FARMA utiliza o processo de retroação de erros, em que cada questão é desenvolvida para dar a possibilidade de que o estudante volte ao contexto do erro, de maneira autônoma, possibilitando alcançar uma dinâmica de autoestudo. Espera-se que, ao refletir sobre seu erro, ele possa melhorar seu desempenho e habilidades em Matemática da Educação Básica e, assim, obter resultados mais satisfatórios na disciplina de CDI.

O OA construído na FARMA/FARMA-Calc foi desenvolvido de tal modo que, para cada questão, e a cada erro cometido pelo estudante em uma das etapas de resolução, seja apresentado um ou vários tipos de *feedbacks* diferentes. A variação dos *feedbacks* teve por objetivo contemplar tipos de intervenção que sejam mais eficazes em uma nova tentativa de resolução do mesmo item. Foram adotados os seguintes tipos de *feedbacks*: definição matemática do conceito abordado na questão; apresentação de outro registro de representação para o conceito; explicação curta da questão; sugestão de vídeo, com abordagem dos conceitos, a partir de repositórios já existentes (Canais no Youtube, Sites de Universidades, etc.); apresentação de exemplos similares.

A Figura 4 representa um exemplo de questão do OA que explora o conceito de função composta, cujo objetivo, segundo o instrumento CCR, é verificar se o aluno:

- a) consegue visualizar a função como um processo;
- b) compreende o que significa avaliar uma função;
- c) entende como compor duas funções dadas em um contexto de representação gráfica.

Figura 4 - Exercício 1 do AO

Use os gráficos de f e g para calcular o valor de $g(f(2))$.

Item 1:
Calcule o valor de $f(2)$?

Resposta:

Clique aqui para responder

Item 2:
Para qual valor de x temos $g(x) = 1$?

Resposta:

Clique aqui para responder

Item 3:
Usando a definição de função composta e os resultados ob

Resposta:

Clique aqui para responder

Fonte: Autoria própria (2024).

A Figura 5 apresenta exemplos de *feedbacks* em um processo de remediação modular. Ao iniciar a classificação do erro matemático, é apresentada uma intervenção externa, que pode explorar figuras, tabelas, imagens, gráficos, a partir de um modelo de aprendizagem focado na retenção da informação, mediante práticas iterativas e com diferentes níveis de dificuldade (Leite; Marczal; Pimentel, 2013), o que pode levar o estudante a refletir sobre sua resposta e corrigir seu erro.

Figura 5 - Exemplos de *feedbacks* apresentados após um erro

Resposta:

Incorreto

4

Resposta incorreta, analise a dica e tente novamente

Tentativa: 3 Dica: 2

Observe que o domínio de g é igual a imagem de f .

Exemplo:

Determine o $g \circ f(x)$ e $f \circ g(x)$ das funções $f(x) = 2x + 2$ e $g(x) = 5x$.

$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(2x + 2) = 5(2x + 2) = 10x + 10$

$f \circ g(x) = f[g(x)] = f(5x) = 2(5x) + 2 = 10x + 2$

Resposta:

Incorreto

3

Resposta incorreta, analise a dica e tente novamente

Tentativa: 2 Dica: 2

Veja um exemplo na imagem abaixo:

Observe que $2, 5 \in \text{Im}(f)$, respectivamente.

Fonte: Autoria própria (2024).

A plataforma FARMA-Calc possibilitará a verificação e a validação contínuas

do artefato. No entanto, na garantia do rigor necessário para a pesquisa em DSR, é necessário o detalhamento do processo metodológico em busca de uma solução.

5.1.3 Processo de busca de solução

O processo de busca de solução para a concepção dos OA pautou-se pela DSR e utilizou-se a taxonomia de Múltiplas Representações Externas (MRE) proposta por Ainsworth (2006), que relaciona várias representações e está fundamentada na aplicação de técnicas para representar, organizar e apresentar o conhecimento. Neste trabalho, as MRE darão suporte à remediação/intervenção de erros de Matemática em OA.

Seguindo as ideias de Leite, Pimentel e Pietruchinski (2012), definiu-se o papel das três funções das MRE para a remediação de erros (Quadro 3).

Quadro 3 – Composição da classificação de erros

Tipo de erro	Subclassificação	Função das MRE	Remediação
Interpretação equivocada	-	Papéis complementares	Propor outras formas de apresentar o problema possibilitando uma releitura através de simbolização matemática.
Diretamente identificáveis	Deficiência do domínio ou uso inadequado de dados.	Restrição de interpretação	Mostrar que embora a estratégia possa estar correta, a deficiência se encontra no uso das informações
	Deficiência de regra, teorema ou definição.	Compreensão mais aprofundada	Apresentar a regra ou teorema, com o objetivo de reorganizar conceitos ou generalizar.
	Deficiência na escolha do operador correto.	Compreensão mais aprofundada	Demonstrar que o equívoco se encontra na escolha do operador.
Indiretamente identificáveis	-	Restrição de interpretação	Demonstrar que a lógica adotada não resulta na solução do problema.
Solução não categorizável	-	Compreensão mais aprofundada	Propor a revisão de conceitos elementares ou presente na base de domínio.

Fonte: Leite, Pimentel e Pietruchinski (2012, p. 4)

Assim, pensando em possíveis respostas dadas pelos alunos e com base no Quadro 1 do CCR, é possível elaborar *feedbacks* para cada questão elaborada no

OA.

Em uma primeira etapa da pesquisa, foi construído um protótipo de OA (artefato) para teste na FARMA com duas questões inspiradas no teste CCR e com *feedbacks* pautados nas funções das MRE. Para sua validação, foram convidados dois grupos, um deles formado por dois professores de CDI, também pesquisadores da Educação Matemática (denominados especialistas – E1, E2), e outro formado por 7 professores da Educação Básica e Ensino Superior, que cursavam uma disciplina de Ensino de CDI ofertada pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia, no 2º semestre de 2020, do qual o autor é integrante (denominados apenas como professores – P1, P2, ..., P7).

Foi proposto que os dois grupos testassem e avaliassem o OA, assumindo um papel de alunos ingressantes em CDI, como de orquestração de discussões e antecipação de respostas à uma tarefa matemática (Elliott *et al.*, 2009). Posteriormente, foram realizadas conversas informais com os dois grupos (Batista; Matos; Nascimento, 2017), para determinar as suas impressões sobre o OA, e apresentadas algumas perguntas direcionadas sobre os *feedbacks*. Apenas para direcionar as conversas um pequeno roteiro foi predefinido, contendo (i) apresentação do objetivo da pesquisa e apresentação do OA na FARMA; (ii) perguntas dirigidas aos especialistas sobre quais são as suas percepções do OA em relação a disposição dos elementos, clareza, divisão das questões em passos e sua estrutura; (iii) pergunta sobre avaliação geral do OA; (iv) pergunta sobre sugestões para o aperfeiçoamento do OA e/ou da plataforma FARMA e (v) quais dos *feedbacks* propostos seriam mais apropriados aos diferentes conceitos abordados nas questões. Foi deixado claro aos avaliadores que eles tinham liberdade para dar sugestões e fazer críticas em relação à usabilidade da FARMA e quais tipos de *feedbacks* poderiam ser usados. O resultado dessa avaliação (que será detalhado no Capítulo 7) ofereceu elementos que foram fundamentais para reorganização da proposta inicial, e para o design completo do OA, e sua implantação na plataforma FARMA. Esse processo ocorreu ao longo dos anos de 2021 e 2022.

Assim, foi desenvolvido e implementado o OA completo, composto por 20 questões que envolviam os conceitos de matemática para a aprendizagem de CDI, tendo como base os estratos de conhecimento matemático (numérico, algébrico e funcional). Para validação das questões e dos *feedbacks*, 3 doutorandos que integram

o grupo de pesquisa “Raciocínio matemático e formação de professores” foram convidados a explorar o OA, sugerindo ao pesquisador ajustes pontuais que poderiam ser realizados

Em uma segunda etapa de avaliação, que ocorreu no final do 2º semestre de 2022, esse instrumento foi apresentado a um grupo de sete alunos de CDI 1, sendo realizadas entrevistas pré e pós-teste, sendo o processo gravado em áudio e vídeo.

Por fim, após ajustes que se mostraram necessários a partir do retorno desse grupo, uma terceira etapa de avaliação/validação foi realizada. O instrumento completo e implementado na FARNA-Calc foi submetido a uma avaliação com alunos de turmas de CDI 1, no 1º semestre de 2023, na UTFPR câmpus Guarapuava.

Em Guarapuava, a UTFPR oferece os cursos de Engenharia Civil e Engenharia Mecânica, até a data de coleta de dados, além de dois cursos de Tecnologia. A terceira avaliação foi realizada com as duas turmas de calouros de Engenharia e uma turma de calouros do curso de Tecnologia em Sistemas para a Internet, esta foi escolhida devido à natureza do OA que foi desenvolvida em uma plataforma online e o fato de que o autor desta tese e seu coorientador estão diretamente ligados a este curso e pesquisas relacionadas a ele, como a FARMA e FARMA-Calc. O total de alunos que avaliaram o OA foi 99.

O desenvolvimento da terceira avaliação contou com a colaboração dos coordenadores dos cursos e os professores das disciplinas de CDI 1 que cederam o tempo de suas aulas para o experimento. A avaliação ocorreu com cada turma separadamente no laboratório de informática do campus em um período de 3 horas/aula.

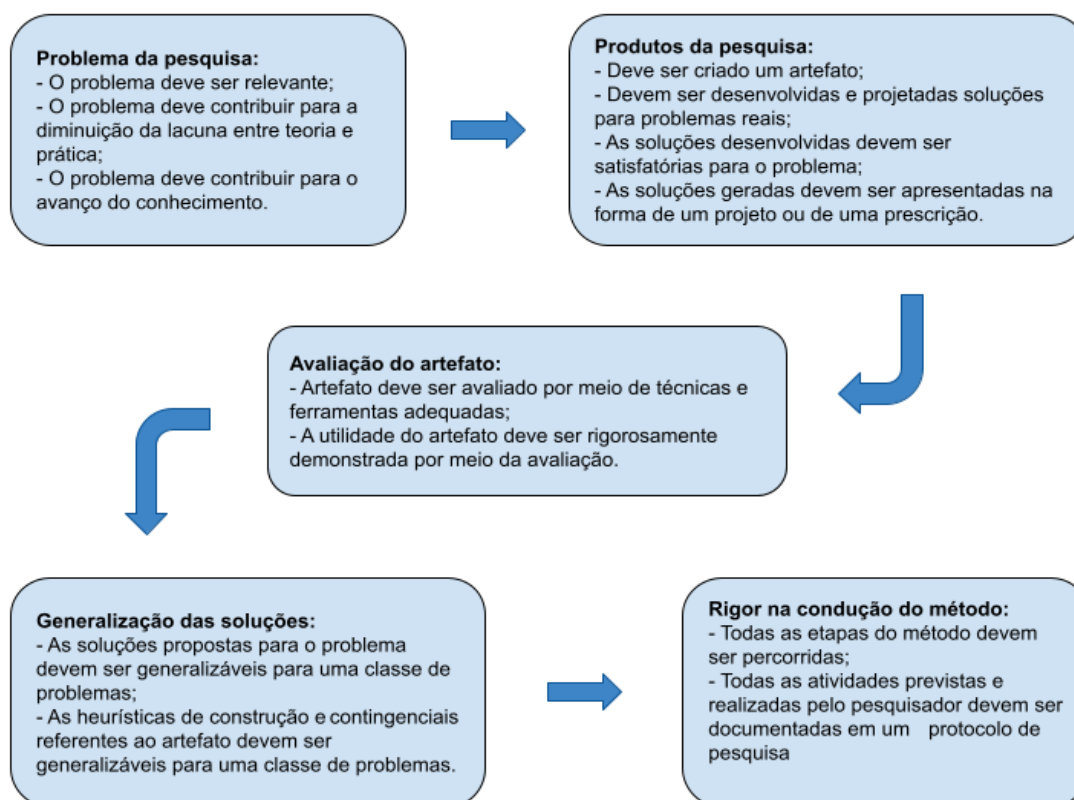
Inicialmente, o professor/pesquisador fez uma fala sobre o objetivo da pesquisa e uma breve explicação sobre o procedimento a ser feito. Depois, foi aberto um período de 15 minutos para experimentação da plataforma FARMA-Calc e tirar dúvidas, pois a FARMA-Calc era uma novidade para todos os alunos. Logo após, o teste foi realizado no restante da aula. Por fim, foi solicitado que os alunos respondessem um questionário de satisfação sobre o OA (Apêndice B).

Os resultados e discussões das avaliações durante as três etapas serão apresentados no Capítulo 7. Ressalta-se, que a pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética da UTFPR (processo nº 08957619.3.0000.5547; parecer nº 4.683.713).

5.1.4 Rigor da pesquisa

Para garantir a qualidade e o rigor da pesquisa, Dresch, Lacerda e Antunes Junior (2015) propõem cinco parâmetros de verificação do rigor (Figura 6).

Figura 6 - Verificação do Rigor da Pesquisa



Fonte: Adaptado de Dresch, Lacerda e Antunes Junior (2015).

Os parâmetros aqui apresentados foram utilizados como caminho metodológico para garantir o rigor desta pesquisa.

5.1.5 Avaliação

No que diz respeito à avaliação do *design*, recorreu-se à literatura que trata da validação de OA. Braga, Pimentel e Dotta (2013), por exemplo, propõem uma metodologia iterativa denominada INTERA (Inteligência, Tecnologias Educacionais e Recursos Acessíveis), que considera o processo de desenvolvimento de um OA como sendo um projeto dividido em vários componentes (fases, papéis, etapas e artefatos). A INTERA aborda, de forma adequada, questões pedagógicas e de validação na

elaboração de um OA, satisfazendo os princípios da pesquisa baseada em DSR. Os autores afirmam que é necessário um esforço colaborativo de uma equipe multidisciplinar para produzir um OA de alta qualidade e que seja reutilizável. Uma das etapas propostas são os Testes e a Qualidade, que verificam a aceitação dos OA pelos usuários.

Sendo assim, foram realizadas três avaliações do OA durante o desenvolvimento da pesquisa. Os resultados das avaliações do OA serão descritos no Capítulo 7,

5.1.6 Contribuições da pesquisa

As contribuições da pesquisa serão demonstradas por meio dos resultados obtidos durante as etapas de testes, com entrevistas direcionadas às interações dos alunos com o artefato proposto. Além disso, a construção do OA na FARMA-Calc pode ser vista como uma alternativa às dificuldades e às necessidades supracitadas sobre o desempenho dos alunos em CDI 1.

5.1.7 Comunicação da pesquisa

Como última etapa de uma pesquisa pautada em DSR, a comunicação da pesquisa, além de apresentar à comunidade científica trabalhos relacionados a esse estudo e os resultados obtidos ao longo da pesquisa (Castilho, 2021; Castilho; Trevisan; Marczał, 2021; 2022). Foi disponibilizado um artefato desenvolvido em plataforma digital, denominado FARMA-Calc², em formato aberto e de código livre.

² <https://farma-calc.educacional.mat.br/>

6 PROPOSTA DO OBJETO DE APRENDIZAGEM

Neste capítulo, será apresentado o *design* e a estrutura do OA, como proposta de produto educacional para esta tese, assim como a justificativa da escolha das questões que o compuseram e a forma de apresentação dos *feedbacks* ao aluno. Destaca-se que, o OA foi elaborado com vinte questões que foram implementadas em uma plataforma online FARMA-Calc derivada da ferramenta de autoria FARMA (Marczal, 2013).

6.1 Estrutura e organização das questões do OA

O OA desenvolvido foi elaborado a partir de três grupos de questões que abordam os estratos de conhecimento matemático, a saber: estrato numérico, estrato algébrico e estrato funcional (Carlson; Madison; West, 2015; Cuevas-Vallejo; Pineda; Reyes, 2018). Tais estratos podem ser trabalhados de forma individual ou em conjunto, com uso de questões adaptadas a partir dos instrumentos de avaliação apresentados anteriormente, como o ENEM, Saeb, Prova Brasil e Pisa.

A seguir serão apresentados os três grupos de questões baseados nos estratos de conhecimento matemático. A estrutura completa do OA pode ser vista no Anexo A.

6.1.1 Grupo de questões que avaliam o estrato numérico

Neste grupo, foram escolhidos dois tipos de questões. Primeiramente, questões que exploram o raciocínio aritmético dos alunos (Questões 1, 2 e 3), com foco nas seguintes habilidades:

- i) efetuar as quatro operações com números inteiros (adição, subtração, multiplicação, divisão);
- ii) efetuar operações que envolvam potenciação e radiciação com números inteiros;
- iii) resolver problemas simples do cotidiano utilizando as quatro operações com números inteiros.

Segundo a matriz da Prova Brasil (Brasil, 2011), uma grande parcela dos alunos não dominam essas habilidades, errando subtração e potenciação envolvendo

números negativos. Para um melhor desenvolvimento dessas habilidades, sugere-se a realização de atividades com números inteiros, inicialmente apenas com uma operação e posteriormente mesclando as quatro operações básicas. Além disso, reconhecer regularidades numéricas ou geométricas evidencia a importância do estudo de funções lineares que estão relacionadas à resolução de problemas simples do cotidiano. Por exemplo, a Questão 3:

Um vendedor trabalha por comissão, recebendo 3 reais por item vendido. O vendedor trabalha de segunda a sexta-feira. Paga diariamente 20 reais para poder vender no mercado e 12 reais de transporte. Quantos produtos um comerciante deve vender em uma semana para que, subtraindo suas despesas, restem 70 reais para cada dia de trabalho? (adaptado de Cuevas, Martínez e Pluinage (2012) e Prova Brasil (2011)).

Enquanto o raciocínio aritmético corresponde ao conhecimento dos números e das operações aritméticas, que incluem números inteiros e racionais (Cuevas-Vallejo et al., 2018), o estrato racional representa o domínio das operações com razões e proporções, bem como o produto e o quociente dos números racionais (Adjage; Pluinage, 2012), Questões 4 e 5, com foco nas seguintes habilidades:

- i) reconhecer frações em diversas representações e diferentes significados, como por exemplo, partes de um inteiro, resultado de uma divisão, operador e razão;
- ii) resolver problemas utilizando-se das cinco operações com números racionais;
- iii) efetuar cálculos de expressões com diferentes representações dos números racionais e envolvendo as operações básicas do conjunto Q ;
- iv) resolver problemas que envolvam variação proporcional entre grandezas expressas por números racionais.
- v) Veja o exemplo da Questão 4:

A estrada que liga Recife a Caruaru será recuperada em três etapas. Na primeira etapa, serão recuperados $\frac{3}{8}$ da estrada e, na segunda etapa, $\frac{2}{5}$ da estrada. Qual é a fração que corresponde à terceira etapa? (adaptado da Prova Brasil 2011)

No estrato numérico pode-se observar que as questões selecionadas abordam basicamente a interpretação e a habilidade de o aluno operar as quatro operações elementares. Nesta situação inicial espera-se que um aluno ingressante em um curso de Engenharia tenha domínio sobre esses conteúdos, o que não se mostra verdadeiro

nas pesquisas apresentadas anteriormente (Zarpelon; Resende; Reis, 2017; Trevisan; Mendes, 2018) e durante os testes de validação deste instrumento, que serão analisados no próximo capítulo.

6.1.2 Grupo de questões que avaliam o estrato algébrico

O estrato algébrico inclui reconhecer e analisar padrões, estudar e representar relações, fazer generalizações e analisar como as coisas mudam. Ele também contém os sistemas matemáticos de sinais (SMS); resoluções de equações e manipulação de expressões que incluem variáveis e parâmetros, como cálculo com letras ou cálculo formal. Mas não se pode limitar este estrato ao domínio de escritos literais, pois existem atividades no nível algébrico que não usam letras, e atividades que usam letras e que estão no nível do estrato numérico. A principal ruptura do estrato algébrico para o estrato numérico está na capacidade de não apenas formar frases, mas de processar frases, por exemplo: “*Para um atendimento domiciliar, um técnico em informática cobra R\$ 60,00 a visita e R\$ 45,00 a hora de trabalho*” pode ser substituída pela expressão algébrica $60 + 45 \cdot h$ (Questão 11). Vale lembrar que a aquisição deste raciocínio facilitaria a compreensão do simbolismo abstrato e o trabalho com relações algébricas (Cuevas-Vallejo *et al.*, 2018; Adjage; Pluvinaige, 2012).

No grupo questões sobre o estrato algébrico foram escolhidas 6 questões que avaliam as seguintes habilidades:

- i) Q6. Manipulação algébrica: avaliar a habilidade de o aluno identificar a expressão algébrica que representa a função que rege os dados indicados em uma tabela dada.
- ii) Q7. Resolução de equações e/ou sistemas de equações: avaliar a habilidade do aluno construir a equação de uma reta a partir de dois de seus pontos ou então a partir de um ponto e de sua inclinação.
- iii) Q8. Resolução de equações: pretende-se avaliar a habilidade de o aluno resolver problemas em que seja necessário utilizar uma equação de 2º grau.
- iv) Q9. Manipulação algébrica: avaliar a habilidade de o aluno efetuar cálculos de expressões algébricas em diferentes contextos, em particular, resolver problemas em que seja necessário utilizar uma equação de 2º grau.
- v) Q10. Resolução de sistemas lineares: Pretende-se avaliar a habilidade de o

aluno relacionar dois importantes conceitos matemáticos: a resolução de problemas que envolvam um sistema de equações com duas incógnitas e a determinação do ponto de interseção de duas retas.

- vi) Q11. Inequações: Pretende-se avaliar a habilidade de o aluno identificar as expressões algébricas que representam o problema e fazer a mudança de representação adequada (Linguagem natural para algébrica), assim como a realização do tratamento (Cálculo numérico) para encontrar a solução de uma inequação.

As questões escolhidas para avaliar o raciocínio algébrico foram extraídas e adaptadas do Plano de Desenvolvimento para Educação (Saeb, 2011) e dos trabalhos de Cuevas, Martínez e Pluinage (2012), Iezzi *et al.* (2013) e Rezende e Travassos (2017).

6.1.3 Grupo de questões que avaliam o estrato funcional

O estrato do raciocínio funcional é uma atividade cognitiva do raciocínio matemático que permite estabelecer relações de dependência entre grandezas, além de relações aritméticas e algébricas que podem ser aplicadas a vários contextos. Assim, foram escolhidas questões que envolvem habilidades de raciocínio proporcional, covariacional e quantitativo. Tendo em vista que este estrato possui conceitos fundamentais de CDI, as questões escolhidas para este grupo estão fundamentadas nas diretrizes da Taxionomia CCR (Quadro 1) de Carlson *et al.* (2015) e nos apontamentos de Cuevas-Vallejo *et al.* (2018).

Para este estrato foram escolhidas nove questões que avaliam as habilidades de raciocínio proporcional, covariacional e quantitativo:

- i) Q12. Função Exponencial: Pretende-se avaliar a habilidade de o aluno compreender, representar e resolver problemas envolvendo uma função exponencial (F2), aplicação muito comum no contexto de fenômenos químicos, biológicos, entre outros.
- ii) Q13. Função Logarítmica: Pretende-se avaliar a habilidade de o aluno reconhecer a representação algébrica ou gráfica de uma função logarítmica e associá-la a uma função exponencial (U6).
- iii) Q14. Função composta: Pretende-se avaliar a habilidade de o aluno reconhecer a representação gráfica de duas funções e reconhecer a

necessidade de compor duas funções para obter uma nova função.

- Segundo Carlson, Madison e West (2015), os alunos que deram uma resposta correta a esta questão:
 - (a) possuíam uma visão da função como um processo (R2),
 - (b) entenderam como compor duas funções (U5) dadas em um contexto de representação gráfica (RG).
- iv) Q15. Reconhecimento de parâmetros: Pretende-se avaliar a habilidade de que o aluno reconheça variáveis e parâmetros (U2) em funções reais, e use corretamente os processos de manipulação algébrica na busca de solução do problema (R2).
- v) Q16. Função racional: Pretende-se avaliar o raciocínio covariacional dos alunos, ou seja, a habilidade de pensar sobre como os valores da saída de $f(x)$ mudam enquanto observa as mudanças ocorridas em x (R3).
- vi) Q17. Taxa de variação: Pretende-se avaliar o raciocínio covariacional durante o processo mental de relacionar duas quantidades variáveis requer que os alunos pensem sobre como as duas quantidades que estão variando juntas, ou seja:
 - Visualizar a função como um processo (R1) e identificar e aplicar procedimentos e cálculos algébricos apropriados (R3) para construir uma fórmula algébrica (RA) da taxa média de variação de uma situação contextual (RC).
- vii) Q18. Composição de função e inversa: Avaliar a habilidade de o aluno interpretar a frase “definir a área, A , de um círculo em função do comprimento, c , de sua circunferência” como um comando para construir uma fórmula (A5). Capacidade de identificar as variáveis a serem relacionadas (U1) em uma situação problema.
 - Os alunos devem lembrar as fórmulas para a área e perímetro de um quadrado e ver essas fórmulas/funções como processos que mapeiam valores de uma variável para valores de outra variável (R2).
 - Para obter a função que relaciona as duas fórmulas de um quadrado, os alunos devem reconhecer que as duas fórmulas podem ser combinadas se eles primeiro invertem a fórmula que define o perímetro em termos

de seu lado (U5).

- Eles também reconhecem que ao compor (U4) a fórmula da área com perímetro invertido, forma-se uma nova fórmula.

viii) Q19. Funções trigonométricas: Avaliar se os alunos desenvolveram conceitos robustos de função (R2), medida de ângulo (T1), radiano como unidade (T2) e função seno (T3).

- Serem capazes de relacionar duas variáveis que estão mudando juntas (medida de ângulo e distância) (R3).
- Tenham a concepção de que a função seno está representando a covariação de uma medida de ângulo e a distância de um ponto no círculo unitário (T3, R3).
- Determinar a função que expressa h em termos de k também requer que os alunos conceituem uma medida de ângulo em relação ao comprimento de arco.
- Responder a esta questão requer que os alunos entendam as ideias de medida de ângulo, radianos e função seno. Eles também devem raciocinar sobre as variáveis, sua variação e covariação (como os valores de duas variáveis mudam em conjunto).

ix) Q20. Raciocínio proporcional: Avaliar a habilidade de o aluno estabelecer relações proporcionais (raciocínio proporcional) entre duas variáveis. O uso do raciocínio proporcional demonstra compreensão da ideia de taxa constante de variação.

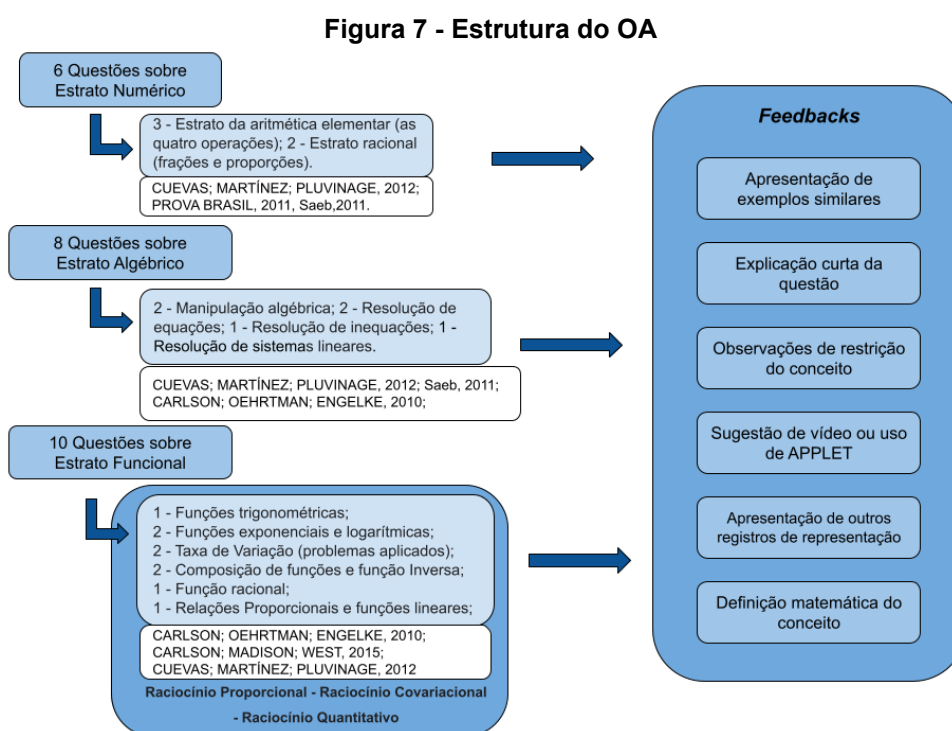
A título de exemplo, consideremos uma questão na qual o estudante deve *“definir a área, A , de um círculo em função do comprimento, c , de sua circunferência”*. Ele deve, inicialmente, reconhecê-la como um comando para relacionar duas variáveis que estão mudando juntas, bem como ter a capacidade de identificar as variáveis a serem relacionadas nessa situação. Deve lembrar as fórmulas para a área e perímetro de um quadrado e ver essas fórmulas/funções como processos que mapeiam valores de uma variável para valores de outra variável. Para obter a função que relaciona as duas fórmulas de um quadrado, os alunos devem reconhecer que as duas fórmulas podem ser combinadas se eles primeiro invertem a fórmula que define o perímetro em termos de seu lado. Por fim, reconhecer que, ao compor a fórmula da área com perímetro invertido, forma-se uma nova fórmula.

Neste trabalho, as questões escolhidas para avaliar o raciocínio funcional foram extraídas e adaptadas do Plano de Desenvolvimento para Educação (Saeb, 2011) e dos trabalhos de Cuevas, Martínez e Pluinage (2012), Carlson, Oehrtman e Engelke (2010) e Carlson, Madison e West (2015).

Na próxima seção, serão apresentados os tipos de *feedbacks* que foram associados a cada questão e o processo de escolha para cada um deles.

6.2 Escolha dos feedbacks

Para cada questão, serão associados os *feedbacks* mais adequados, dentre os apresentados no lado direito da Figura 7.



Fonte: Autoria própria (2024).

Nesta seção serão apresentados os tipos de feedbacks utilizados no OA, como foram escolhidos e elaborados visando a melhoria do conhecimento do estudante. Estes *feedbacks* têm por objetivo auxiliar a aprendizagem de conceitos matemáticos necessários para o CDI, os quais serão fornecidos automaticamente por meio da interação com o OA na plataforma FARMA-Calc. Os tipos de feedbacks adotados nesta pesquisa foram selecionados, primeiramente, a partir da experiência do autor

desta tese e de seus orientadores, mas com fundamentação teórica na teoria de Múltiplas Representações Externas - MRE (Ainsworth, 2006; Leite; Pimentel; Pietruchinski, 2012).

O OA foi desenvolvido de tal modo que, para cada questão, a cada erro cometido pelo estudante em uma das etapas de resolução, seja apresentado um tipo de *feedback* diferente. A variação dos *feedbacks* teve por objetivo contemplar tipos de intervenção que sejam mais eficazes em uma nova tentativa de resolução do mesmo item (Castilho; Trevisan; Marczal, 2022). Foram adotados os seguintes tipos de *feedbacks*: exemplo similar resolvido; definição matemática do conceito abordado na questão; apresentação de outro registro de representação para o conceito; explicação curta da questão; sugestão de vídeo, com abordagem dos conceitos, a partir de repositórios já existentes (Canais no Youtube, Sites de Universidades etc.); disponibilização de conteúdo complementar. Por fim, é oferecida ao aluno uma opção para que ele resolva o exercício Passo a Passo, isto é, o aluno é conduzido a uma resolução guiada.

6.2.1 Exemplo similar resolvido

O *feedback* denominado exemplo similar resolvido é um dos modelos mais utilizados em sala de aula por professor e em materiais didáticos, e este é um dos que se encaixam no modelo tradicional de ensino e aprendizagem da Matemática (Mendes; Trevisan; Elias, 2018). Este tipo de *feedback* pode favorecer o aluno no processo de autorregulação de sua aprendizagem, pois é algo que já faz parte de sua rotina de estudos e deve agir como um elemento facilitador na transição do Ensino Médio para o Ensino Superior, em relação à disciplina de CDI 1, como vimos no Capítulo 2.

Vejamos uma exemplificação deste tipo de *feedback*. A Figura 8 apresenta a questão 9 com um *feedback* de exemplo similar, após um erro cometido.

Figura 8 - Exemplo de questão com *feedback* de exemplo similar

FARMA-Calc HOME

Manipulação algébrica

Dada a equação abaixo, calcule o valor de n:

$$\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{4}$$

Observação: Caso encontre duas soluções, responda separando as duas com ponto e vírgula: n_1 ; n_2

Resposta:

Incorreto

3

Resposta incorreta, analise as dicas e tente novamente!

Exemplos resolvidos:

Encontre o valor de x para a seguinte equação:

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{x} = 1$$

Resposta:

$$\frac{2 \cdot x + 3 \cdot 2}{3 \cdot x} = 1$$

$$2 \cdot x + 6 = 3 \cdot x$$

$$6 = 3 \cdot x - 2 \cdot x$$

$$x = 6$$

Observação: Uma equação fracionária é toda equação que apresenta frações algébricas em cujo denominador aparecem as variáveis.

Equação do 2º grau é toda equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$.

Exemplo:

$$x \cdot (x - 2) = -1$$

$$x^2 - 2 \cdot x + 1 = 0$$

$$(x - 1) \cdot (x - 1) = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1 \text{ (raiz única)}$$

Fonte: Autoria própria (2024).

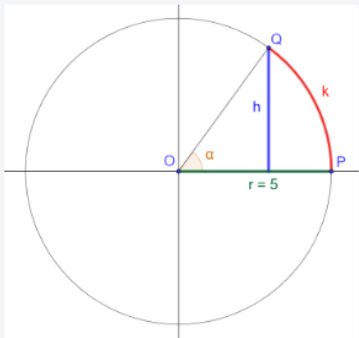
Neste exemplo, podemos observar a aplicação de uma MRE com a característica de restrição de interpretação, a qual usa dois exemplos similares para demonstrar a lógica adotada. De forma geral, para cada questão do OA foi pensado em um exemplo similar que direcionasse o estudante a trilhar um caminho parecido para resolver seu problema.

6.2.2 Definição matemática do conceito abordado

Para este tipo de *feedback*, o aluno é motivado a relembrar os conceitos e definições que estão envolvidos na resolução da questão. Assim como no exemplo similar resolvido, as definições e conceitos também ajudam a facilitar o processo de transição para o CDI 1, pois é uma disciplina que se utiliza com frequência de definições, propriedades e teoremas.

Segundo os princípios da MRE, um *feedback* que envolve uma definição ou conceito é considerado como compreensão mais aprofundada que apresenta uma regra ou teorema, com o objetivo de reorganizar conceitos ou generalizar parâmetros. Como podemos observar na Figura 9.

Figura 9 - Exemplo de questão com *feedback* com definição ou conceito



Se h representa a altura de Q em relação ao eixo horizontal, como pode ser expresso h como uma função de k ?

Passo 1:

Observe que h é o cateto oposto ao ângulo α no triângulo. Assim, podemos estabelecer uma relação com a função *seno*. Qual é a expressão que representa *seno*(α) no triângulo retângulo.

Restosta: $\sin(\alpha) = ?$

Resposta:

Incorreto

1

Resposta Incorreta, analise as dicas e tente novamente!

Definição:

Por definição $\sin(\alpha) = \frac{\text{cat. opost}}{\text{hipotenusa}}$.

Cat. oposto = h

Hipotenusa = raio = 5

Portanto, $\sin(\alpha) = \frac{h}{5}$.

Fonte: Autoria própria (2024).

Para fins práticos e com base nas duas primeiras fases de avaliação do OA, optou-se por apresentar a maioria dos *feedbacks* desse tipo em formato de vídeos curtos ou material complementar em formato de apostilas.

6.2.3 Apresentação de outro registro de representação para o conceito

Neste tipo de *feedback*, pode-se abordar várias formas de representação de um mesmo conceito, como a apresentação de uma tabela, um diagrama ou um gráfico. Neste último, pode-se usar uma imagem de um gráfico ou até mesmo um gráfico dinâmico. Neste trabalho, optou-se por utilizar diversos APPLETs no software GeoGebra de autoria do próprio autor ou de versões adaptadas de outros usuários na própria plataforma.

Na Figura 10, vemos dois exemplos de mudança de representação, uma tabela e um gráfico no mesmo *feedback*.

Figura 10 - Exemplo de questão com *feedback* com mudança de representação

FARMA-Calc HOME

▶ **Função exponencial:**

Em uma pesquisa realizada, constatou-se que a população A de determinada bactéria cresce segundo a expressão $A(t) = 20 \cdot 2^t$, onde t representa o tempo em horas. Qual será o tempo necessário para atingir uma população de 1280 bactérias?

Resposta:

Incorreto

Resposta incorreta, analise as dicas e tente novamente!

Exemplo resolvido:

Vídeo sobre funções exponenciais:

Representação por tabela e gráfico:

Acese o link do [GeoGebra](#) e explore a tabela e a função exponencial correspondente.

	x	y_1
	0	20
	1	40
	2	80
	3	160
	4	320
	5	640

Fonte: **Autoria própria (2024).**

Segunda a teoria de MRE, ao combinar representações diferentes, espera-se que os alunos se beneficiem das vantagens de cada uma das representações individuais em um processo cognitivo que considera a função de papéis complementares.

6.2.4 Disponibilização de conteúdo complementar

O conteúdo complementar refere-se à indicação de algum material já disponível na rede que contém definições, propriedades, exemplos e lista de exercícios, cujo objetivo é proporcionar a melhora na autorregulação da aprendizagem do aluno. Tais conteúdos foram retirados de sites de universidades públicas brasileiras, as quais utilizam estes materiais em cursos de nivelamento de Matemática e disciplinas de Pré-Cálculo.

6.2.5 Resolução passo a passo

Este *feedback* foi criado com o objetivo de oferecer ao aluno uma resolução guiada da questão, isto é, através do processo de remediação de erros, o aluno é conduzido a refletir e entender melhor ações e procedimentos por meio da compreensão de erros cometidos (Marczal, 2014). A resolução passo a passo é inspirada na versão original da plataforma FARMA, mas neste trabalho, foi implementada como uma aba adicional junto aos outros *feedbacks* sugeridos pelo OA dentro da FARMA-Calc.

No passo a passo o professor/tutor pré-define os caminhos de resolução que o aluno/aprendiz deve seguir, prevendo, através de sua experiência ou com o auxílio de um sistema tutor inteligente, quais os possíveis erros que este aluno irá cometer, e de forma imediata é apresentado um *feedback* correspondente ao erro cometido. Sendo assim, por meio da remediação de erros, o aluno recebe um *feedback* imediato sobre a falha, permitindo a sua recuperação e a continuação do estudo, e a retroação aos erros, faz com que o aprendiz possa explorar os seus erros e, a partir disso, tentar refazer a interação em que o erro foi cometido para entender seu motivo e, então, solucioná-lo (Leite, 2013).

Portanto, o OA com *feedbacks* imediatos pode promover a aprendizagem individual do aluno no momento de sua utilização, na medida em que este, ao conscientizar-se do seu erro, amplia sua capacidade de pensar e resolver situações-problema, criar hipóteses e, assim, chegar a um novo conhecimento, aspectos esses fundamentais para a autorregulação da sua aprendizagem (Hadwin; Oshige, 2011; Mendes, 2014).

Vale destacar que uma função adicional do OA é oferecer informações para possíveis intervenções posteriores ao seu uso, porque o professor, ao ter acesso aos modos de interação dos alunos com o OA, pode diagnosticar os erros relativos aos conteúdos de Matemática da Educação Básica e levantar dados relevantes sobre as dificuldades na resolução das tarefas propostas e intervir em seus processos de aprendizagem (Leite; Marczal; Pimentel, 2013; Marczal; Direne, 2012).

6.3 Implementação da FARMA-Calc

Foi proposto nesta tese a reformulação da ferramenta de autoria FARMA

(Ferramenta de Autoria para a Remediação de Erros com Mobilidade na Aprendizagem) de Marczal (2015), cujas principais características são a de constituir uma ferramenta simples e objetiva para o desenvolvimento de objetos de aprendizagens altamente interativos e promover uma aprendizagem por erros, os quais são registrados desde a hora em que ocorrem. A nova versão da FARMA, denominada FARMA-Calc, foi desenvolvida a partir das necessidades e dificuldades apresentadas pelos alunos ingressantes em cursos de Engenharia, em particular na disciplina de CDI 1.

Neste contexto, após a formulação do referencial teórico e do OA formado por questões que abordam os conceitos necessários para o aprendizado de CDI 1 (Carlson; Madison; West, 2015; Cuevas-Vallejo; Pineda; Reyes, 2018), foi feito um protótipo com duas questões na plataforma FARMA original. Este protótipo foi submetido a uma avaliação por especialistas (Avaliação 1), descrita no próximo capítulo, e em sequência demos início a reestruturação da FARMA para a FARMA-Calc. Durante esse processo, levou-se em consideração os apontamentos feitos pelos especialistas, como o *design* do OA, tipo de *feedbacks* e ordem e formulação das questões.

Para o redesign do OA, decidimos atualizar o layout da plataforma, adotando um estilo minimalista com design limpo e uma ênfase no espaço negativo. Nosso objetivo foi criar um layout mais simplificado, com menos elementos distrativos, destacando a essência do conteúdo. Além disso, foram implementados novos recursos para construção de um OA para professores/autores e estudantes, a constar:

- a) **Usabilidade:** Foram adicionadas opções de navegações a partir dos *feedbacks* positivos, como, por exemplo, o aluno poder ir para o próximo exercício diretamente pela dica recebida.
- b) **Duplicação de conteúdos do OA:** Para facilitar a criação do OA, foram desenvolvidos os recursos para duplicar, introdução, exercícios, passos de soluções, dicas, etc. **Novas opções de *feedback*:** Na versão original os *feedbacks* eram apenas por número de tentativas incorretas, agora o professor autor, tem a opção de usar esse tipo de *feedback*, ou ainda mostrar todos de uma vez, e também cadastrar *feedbacks* para os acertos dos aprendizes. Podendo definir também a ordem dos *feedbacks*. Antes os *feedbacks* não tinham título, agora tem.

- c) **Resolução passo a passo:** está opção de *feedback* é uma novidade na nova versão, agora a plataforma oferece o recurso de fragmentar a solução de uma questão e oferece aos alunos um caminho predefinido pelo professor com *feedbacks* específicos de erros cometidos a cada passo realizado pelo aluno.
- d) **Recursos adicionais para *feedbacks*:** Geogebra, reestruturação de apresentação de vídeos, visualização de arquivos em PDF (conteúdo complementar ou outros). Permite o professor autor vincular exercícios de outros OA nos *feedbacks*, ou seja, para entendimento do erro, solicitar que o aluno resolva outro exercício.
- e) **Outros recursos:** Remoção do cabeçalho na visualização do OA; aumentar o tamanho do título do exercício, quebrava no fazer as cópias; alterado o layout de apresentação de dicas, passando a usar o accordion³ para apresentação das dicas.

Sobre os tipos de *feedbacks*, esses foram associados aos conceitos da MRE e dos instrumentos de avaliação de Pré-Cálculo, como foi descrito na seção anterior. Por fim, a ordem das questões foi estabelecida pelos estratos de conhecimento matemático, a saber numérico, algébrico e funcional, respectivamente.

Em uma segunda etapa, foi realizada uma avaliação teste com um grupo pequeno de alunos para refinamento e ajustes do OA e da plataforma FARMA-Calc. Após esta avaliação, foram feitas algumas correções de erros de usabilidade da plataforma e ajustes nas questões do OA. Nesta etapa, foi levado em consideração a definição de usabilidade de uma interface, proposta por Nielsen (1994), que deve ter as seguintes características: facilidade de aprendizado, eficiência de uso, facilidade de memorização, erros cometidos pelo usuário e satisfação subjetiva. Por fim, já com o instrumento ajustado e completo, submetemos o OA a uma avaliação em turmas de calouros dos cursos de Engenharia Civil, Engenharia Mecânica e Tecnologia em Sistemas para Internet, da UTFPR campus Guarapuava.

Os resultados das avaliações estão descritos no próximo capítulo e estão de acordo com a metodologia *Design Science Research* (DSR). Destaca-se ainda que, a FARMA-Calc está registrada no Instituto Nacional da Propriedade Industrial com registro de Programa de Computador n.º: BR512024000850-0.

³ <https://getbootstrap.com/docs/5.0/components/accordion/>

7 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, respaldados pelo trabalho realizado por Szesz Junior (2021) em sua análise dos resultados obtidos durante o desenvolvimento da Tecnologia Assistiva Math2Text, iremos discutir os resultados desta pesquisa, por meio das diretrizes do DSR e da metodologia INTERA para avaliação do OA dentro da plataforma FARMA-Calc.

Para tanto, o capítulo foi dividido em várias seções, que seguem as etapas do DSR definidas na metodologia. Destacam-se, na primeira seção, os pontos sobre a relevância do problema de pesquisa; na segunda, apresentam-se o artefato e o seu processo de busca de solução. Na terceira seção, são realizadas discussões sobre o rigor da pesquisa; na quarta, apresentam-se os resultados das avaliações e seus resultados. Na quinta seção, as contribuições da pesquisa e, por fim, na sexta seção, a comunicação da pesquisa e a disponibilização da FARMA-Calc.

7.1 Relevância do problema

Ao apresentarmos a caracterização do problema de pesquisa, sobre as dificuldades enfrentadas pelos ingressantes nos cursos de Engenharia ao cursarem a disciplina de CDI 1 e o uso de TDIC no processo de ensino e aprendizagem de conceitos necessários para o estudo de CDI 1, buscou-se explicitar a relevância do tema através da pesquisa bibliográfica.

Seguindo as Diretrizes Curriculares Nacionais dos Cursos de Graduação em Engenharia (Brasil, 2019), o OA foi desenvolvido de forma que possa ser usado como um curso ou material de nivelamento em um curso de Engenharia. O OA visa, também, à diminuição da retenção e da evasão, além de fornecer conhecimentos básicos que são pré-requisitos para o ingresso nas atividades do curso. Por meio da pesquisa, foram levantadas questões envolvendo esses conceitos, em particular a pesquisa de Carlson, Madison e West (2015) apresenta uma visão geral de literatura que identifica habilidades básicas de raciocínio no nível de Pré-cálculo e as compreensões que os alunos precisam para entender ideias-chave de CDI. Também foi considerado o modelo teórico que trata de estratos do conhecimento matemático

(Cuevas-Vallejo; Pineda, Reyes, 2018), bem como alguns trabalhos pontuais que propuseram instrumentos para a avaliação desses conhecimentos básicos (Reyes; Soberanes-Martín, Soto, 2017). Estes trabalhos formaram a base para o desenvolvimento do OA.

Em um contexto local, Zarpelon, Resende e Reis (2017) apontam que, na UTFPR, os maiores índices de insucesso, nos cursos de Engenharia, estão presentes na disciplina de CDI 1. Além disso, no ano de 2020 iniciou-se um período de quarentena no Brasil e em quase todos os países do mundo, devido à pandemia do vírus COVID-19. Este acontecimento iniciou um período de quase 18 meses de atividades remotas, afetando desde o Ensino Básico ao Ensino Superior. Este ambiente, favoreceu ou acelerou a importância da utilização de TDIC no ensino. Por isso, o artefato proposto foi a FARMA-Calc, um OA virtual que possibilita ao aluno autorregular sua aprendizagem de conceitos matemáticos necessários para a disciplina de CDI 1. Portanto, esses fatores demonstram a relevância do tema proposto.

7.2 O artefato e o processo de busca da solução

O artefato proposto é um OA, denominado FARMA-Calc, concebido para ser um conjunto de questões que usam *feedbacks*, os quais devem possibilitar ao aluno a autorregulação de sua aprendizagem em relação aos conceitos de Matemática necessários para a aprendizagem de CDI.

Para que este OA fosse desenvolvido foi feito um estudo sobre conceitos necessários para a aprendizagem de CDI 1, como análise das Diretrizes Curriculares Nacionais dos Cursos de Graduação em Engenharia (Brasil, 2019); levantamento dos cursos de Pré-Cálculo e similares utilizados nas universidades brasileiras, assim como, os instrumentos de avaliação de Pré-Cálculo nacionais e internacionais. Os quais foram utilizados para elaboração das vinte questões que formam o artefato proposto.

O processo de construção e elaboração do artefato está descrito no Capítulo 6, onde cada elemento escolhido para o OA é justificado e associado às diretrizes elencadas pelos instrumentos de avaliação de Pré-Cálculo de Carlson, Madison e West (2015) e Cuevas, Martínez e Pluinage (2012). Assim como, as escolhas dos

feedbacks estão associadas às características das Múltiplas Representações Externas apresentadas por Leite, Pimentel e Pietruchinski (2012).

Durante o desenvolvimento desta pesquisa, foram realizadas três avaliações do OA/artefato por especialistas e usuários, estes são alunos ingressantes nos cursos de graduação da UTFPR. Os resultados das avaliações serão apresentados na seção 7.4.

7.3 Rigor da pesquisa

Seguindo os parâmetros da DSR de Dresch, Lacerda e Antunes Junior (2015), para garantir a qualidade e o rigor da pesquisa, foram considerados os cinco parâmetros de verificação do rigor:

- i) O **problema de pesquisa** foi demonstrado relevante e deve contribuir para o avanço do conhecimento em pesquisas da área de Ensino e Educação Matemática, em relação às dificuldades e limitações enfrentadas por estudantes ingressantes no Ensino Superior, em particular nos conceitos necessários para a aprendizagem de CDI 1.
- ii) O **produto da pesquisa** é um Objeto de Aprendizagem projetado para ser um instrumento de avaliação dos conceitos necessários para o ensino de CDI 1 em uma plataforma *online*, denominada FARMA-Calc.
- iii) A **avaliação do artefato** foi realizada por meio da metodologia INTERA, que aborda, de forma adequada, questões pedagógicas e de validação na elaboração de um OA.
- iv) As **generalizações das soluções** do artefato proposto estão na versatilidade no uso do OA, que pode ser utilizado como um exame de avaliação de Pré-Cálculo, curso de curta duração de matemática, material complementar à disciplina de Cálculo, etc.
- v) O **rigor de condução do método** foi realizado cumprindo-se todas as etapas estabelecidas, assim como, todas as atividades e protocolos estão descritos nesta tese.

Com estes parâmetros bem estabelecidos, o artefato apresentado nesta tese é um OA que seguiu os princípios da DSR, denominado FARMA-Calc, que foi elaborado, avaliado e seus resultados serão apresentados na próxima seção.

7.4 Avaliação

Para a avaliação do artefato, recorreu-se à literatura que trata da validação de OA. Seguindo a proposta de Braga, Pimentel e Dotta (2013), utilizou-se a metodologia iterativa INTERA, que considera o processo de desenvolvimento de OA como sendo um projeto dividido em vários componentes (fases, papéis, etapas e artefatos). A INTERA aborda, de forma adequada, questões pedagógicas e de validação na elaboração de um OA, satisfazendo os princípios da pesquisa baseada em DSR.

Neste estudo, seguindo as diretrizes da DSR e da metodologia INTERA, foram realizadas três avaliações do OA durante o desenvolvimento da pesquisa. A seguir serão descritos e apresentados os resultados de cada uma das avaliações.

7.4.1 Primeira avaliação

Para uma primeira validação do artefato, foi construído um protótipo do OA, ainda na plataforma FARMA, constituído por duas questões, do CCR, envolvendo o conceito/ideia de composição de funções (U5), associado a padrões de crescimento não linear (F3) e habilidade de compreender e usar a notação de função para expressar uma grandeza em termos de outra (H4). A escolha dessas duas questões foi definida pelo fato de ambas terem características e conceitos muito utilizados em CDI e que poderiam ser exploradas de forma abrangente na FARMA.

Em seguida, foram convidados dois grupos de avaliadores, um deles formado por dois professores de CDI e pesquisadores da Educação Matemática (denominados especialistas – E1, E2), e outro formado por 7 professores da Educação Básica e Ensino Superior, que cursavam uma disciplina de Ensino de CDI, ofertada pelo Programa de Pós-Graduação que o autor faz parte (denominados apenas como professores – P1, P2, ..., P7).

Foi proposto que os dois grupos testassem e avaliassem o OA, como se fossem alunos ingressantes em CDI. Posteriormente foram feitas entrevistas com os dois grupos, para determinar as suas impressões sobre o OA e foram apresentadas algumas perguntas direcionadas sobre os *feedbacks*.

Um roteiro para as conversas foi predefinido (ver Capítulo 5, seção 5.1.3), com apresentação do objetivo da pesquisa e o OA na FARMA. Em seguida, foi perguntado aos especialistas quais foram suas percepções sobre o OA em relação à disposição dos elementos, clareza, divisão das questões em passos e sua estrutura. Por fim, qual seria sua avaliação de forma geral e quais sugestões teriam para o aperfeiçoamento do OA e/ou da plataforma FARMA. Também, quais dos *feedbacks* propostos seriam mais apropriados aos diferentes conceitos abordados nas questões. Deixamos claro aos avaliadores que tinham liberdade para dar sugestões e críticas, em relação à usabilidade da FARMA e quais tipos de *feedbacks* poderiam ser usados.

A seguir são apresentados e analisados os dados coletados, que subsidiarão o aprimoramento e a construção de uma nova versão do OA mais ampla e próxima às necessidades de seus usuários.

Iniciamos com um comentário sobre a visão geral do OA de uma das especialistas.

E1: Eu erreí três vezes e a cada erro ele me deu um feedback, na quarta tentativa ele me dá resposta. Eu gostei bastante, mas quando se fala em objeto de aprendizagem me vem a ideia de dinâmico e eu achei um pouco estático... O feedback do vídeo poderia ser mais focado no pré-requisito da função composta.

Em relação à ordem apresentada nos *feedbacks*.

E1: O 1º erro levou para a definição, se formos pensar da maneira que você pensa cálculo, talvez esse fosse o último feedback, não o primeiro! ... Eu acho que o feedback deve ser mais provocativo, pois soltar a definição provoca muito pouco!

E2: A definição parece mais complexa do que o próprio exercício!

Sobre a questão 2, os especialistas tiveram dificuldades em sua compreensão, pelo modo como o enunciado havia sido elaborado e pela necessidade de fornecer, como resposta, uma expressão algébrica.

E1: Acho que vocês devem melhorar a formulação da pergunta!

E2: Eu não consegui ver a resposta que eu acho que é a correta! A resposta é $a = \frac{c^2}{4\pi}$? Deve ser algum problema na plataforma!

Uma questão levantada pelos especialistas foi sobre o público-alvo da pesquisa.

E1: As questões devem ser formuladas pensando em um público de Pré-Cálculo? O tipo de questão que vocês estão colocando atende ao aluno de Cálculo? Essas questões podem não refletir um direcionamento na realidade dos alunos de Pré-Cálculo!

E2: As questões deveriam ser mais abertas, mais atrativas, mais atribuição de significados.

E1: Dentro do contexto da (Universidade em que a especialista e os autores do artigo atuam), eu acho que outras pessoas comprariam essa ideia de ter o instrumento que todo mundo pode aplicar aqui, para repensar suas práticas de ensino... mas não usaria dentro de um contexto de sala de aula... poderia ser um protocolo de diagnóstico com feedbacks guiados aos conceitos básicos. Como um guia de estudos aproveitando a estrutura da ferramenta.

Esse diálogo com os especialistas da Educação Matemática foi bastante produtivo, pois levou a uma reflexão sobre alguns aspectos do OA que não estavam claros, o que nos fez repensar especialmente em delimitar qual seria o público-alvo e rever a formulação das questões.

Vejamos agora alguns relatos dos professores sobre suas percepções do OA.

A1: Eu achei muito interessante, coloquei respostas incorretas para ver até onde ia. Vi que tem vídeos e aí chega um ponto que dá a resposta, na quarta tentativa. Acho que o aluno seria autosuficiente com o uso dessa plataforma.

A3: É bastante interessante porque dá os feedbacks e, no final, um vídeo que ajuda a complementar e depois dá a resposta.

Foram feitos apontamentos sobre algumas limitações do AO, vinculadas à plataforma FARMA.

A2: O que mais me incomodou foi as duas flechas azuis, pois eu achei que tinha mais ajuda, mas não aparecia nada, só depois de outro erro que aparecia a próxima ajuda.

A2: Incomoda as coisas ficarem bem no canto. O layout deve ser mais amigável.

A4: No quarto erro, ele já me dá a resposta, então para que eu preciso digitar a resposta de novo?

*A5: Eu tentei uns doze minutos e ele dava erro no 4π , pois é $4 * \pi$ né?*

Alguns comentários gerais sobre o uso do OA foram feitos.

A3: A minha dúvida era, se isso é mais como um reforço escolar? Pois as primeiras dicas eram definições com simbologias e tal, aí percebi que o aluno tem que ter o conhecimento das definições para lembrar. Assim, deduzi que era como reforço!

A3: será que a definição como primeira dica é a mais eficiente? Será que usar o gráfico não seria mais interessante?

A2: Acho que a definição ao final fica mais interessante!

A5: Eu também concordo, porque com as dicas numéricas e gráficas ele vai construindo o conceito e a definição lá no fim.

Ao examinar as respostas dos dois grupos, pode-se fazer uma análise sobre os seguintes aspectos: *Design do OA, Tipo de Feedbacks e Ordem e Formulação das Questões.*

Sobre o design do OA, de forma geral, ele foi bem aceito. Mas um dos pontos levantados foi a questão de estar muito estático, o que nos leva a pensar na formulação das questões com caráter mais dinâmico e mais claras para o usuário. Houve problemas no preenchimento da resposta com uma fórmula.

Os tipos de *feedbacks* foram apontados como um ponto positivo, mas a ordem de apresentação precisou ser revista, pois, na visão dos especialistas, o aluno poderia receber os *feedbacks* de tal forma que ele vá construindo os conceitos até chegar à definição formal.

Em relação à formulação das questões, não pareciam muito atrativas, apresentando um caráter muito técnico, o que poderia desmotivar o aluno. Assim, haverá a necessidade de uma reestruturação das questões e uma ampliação no número de exercícios, pois alguns dos avaliadores ficaram com a sensação de “quero mais!”.

7.4.2 Segunda avaliação

Descreveremos aqui os resultados da segunda avaliação do OA, a qual faz parte do processo de validação do artefato por meio do estudo de caso, segundo a metodologia da DSR. Para tanto, após a primeira avaliação, demos início ao processo de reestruturação da FARMA para a FARMA-Calc. Durante esse processo, levou-se em consideração os apontamentos feitos pelos especialistas, como o *design* do OA, tipo de *feedbacks* e ordem e formulação das questões.

Tendo concluído a fase de construção do OA e reestruturação da FARMA-Calc, foram convidados 7 alunos que já tinham cursado a disciplina de CDI 1, para fazerem uma nova avaliação do OA, agora com o objetivo de avaliar a usabilidade e aceitação do público-alvo. Além disso, pretendia-se nesta etapa observar qual é a relevância do OA como recurso auxiliar no processo de autorregulação da aprendizagem dos conceitos necessários para o CDI 1.

A avaliação foi realizada com cada estudante individualmente e dividida em três momentos: entrevista preliminar com o grupo focal; observação durante a utilização do OA; e entrevista com o grupo focal após o teste do OA (ver Apêndice A).

A entrevista preliminar com o grupo focal tinha por objetivo levantar dados sobre a afinidade dos estudantes com a matemática e se os conteúdos aprendidos no Ensino Médio auxiliam na aprendizagem de CDI. Ao ser questionado sobre a matemática que aprendeu na Educação Básica auxilia a aprendizagem de CDI, um dos estudantes apontou que sem esses conceitos não é possível resolver alguns problemas de CDI, conforme trecho transcrito a seguir.

E2: É importantíssimo! Se você não tiver esse conhecimento de operação de fração do mais elementar, você não pode chegar “numa” questão de cálculo e conseguir resolver. Questões como, ... alguma coisa que está multiplicando algo dentro do parênteses e você já abre como polinômio... Se você não tiver essas sutilezas, essa visão, você não consegue resolver as questões. Se não tiver as operações de exponenciação e radiciação, simplesmente não flui! A fração também é uma coisa da dor de cabeça. Tem umas questões simples envolvendo frações e polinômios... A questão mais elementar que tem no livro, se você olhar a questão e não ver que é algo simples e como faria isso ou aquilo.

A4: Com certeza, as questões das 4 operações isso é imprescindível, porque apesar de ter que fazer as derivadas e integrais as operações elementares são muito importantes.

A3: Ajudou, ajudou! Não tem como não falar que não ajudou. Igual, se você foi bom em matemática no EM, não quer dizer que vai ser bom aqui na UTFPR, nos cálculos... Existe uma relação, mas bem mínima assim (math do EM com o ES). é totalmente fora da caixinha. No ENEM eu tirei 850 em matemática e aqui eu só danço nos cálculos cara... Falta essa relação!

Em geral, os estudantes relataram suas dificuldades com os conteúdos de matemática vistos no Ensino Médio e a sua importância para o aprendizado de CDI. Outro aspecto observado foi a dificuldades que eles encontram em relacionar os conteúdos do Ensino Médio com o Ensino Superior, como citado pelo aluno A3 em sua fala anterior.

Já a observação durante a utilização do OA, o pesquisador observou algumas características ou comportamentos apresentados pelos estudantes durante o uso do OA na plataforma FARMA-Calc, como dificuldades na utilização da plataforma; passividade dos alunos; as interações e interpretações dos alunos com o OA (questões claras e objetivas? os feedbacks mostram-se promissores?); e a condução da atividade pelo professor.

Os alunos mostraram alguma dificuldade inicial pelo fato de a plataforma FARMA-Calc ser uma novidade para todos, mas com pequenas intervenções do pesquisador todos conseguiram compreender como era o uso do OA. Esta situação fez com que fosse elaborado e disponibilizado na página inicial da FARMA-Calc um OA exemplo, denominado Teorema de Pitágoras, e um tutorial a fim de que o usuário tenha um modelo de como utilizar a plataforma. Mesmo assim, o OA mostrou-se atrativo aos alunos, tanto ao navegarem pela plataforma como na interação e interpretação das questões e *feedbacks*.

No entanto, alguns problemas foram encontrados, como erro de digitação e manipulação da aba de resolução “Passo a Passo”. Após esta avaliação foi realizada uma revisão ortográfica e uma melhoria na aba de “Passo a Passo”, a versão final deste item será descrita mais adiante.

Por fim, na entrevista com o grupo focal, após o teste do OA, os alunos responderam questões que versavam sobre a utilização de um OA online para a aprendizagem dos conceitos de matemática “básica” necessários para o CDI (ver Apêndice A).

Pergunta 1: Mudou alguma coisa sua relação/visão com a disciplina de matemática depois dessa nova maneira de trabalho?

E4: Sim! Porque aqui dá várias opções (feedbacks) para achar a mesma resposta, e aí você pode procurar aquela que você tem mais afinidade. Muitas vezes que você vai buscar num livro, só tem aquilo ali e pronto. Não tem outra opção né.

Os alunos apontam que as várias opções de *feedbacks* auxiliam na compreensão e resolução de uma questão, além de terem mais autonomia e tempo para realizar a atividade. Estes argumentos convergem com as funções das MRE, em específico, os *feedbacks* estão relacionados com os elementos de papéis complementares, restrição de compreensão e construção de conhecimento aprofundado (Ainsworth, 2006).

Pergunta 2: O que mais você gostou no OA?

E1: Eu gostei muito da forma que ela é feita, como o passo a passo é feito e não é aquela aprendizagem que você se sente mal ao pegar ela. Ela te ajuda mais a olhar a conta e não se perder, eu gostei também da forma que é colocada as questões, que vai evoluindo com o tempo e não é temporizado.

Em geral, pela análise das respostas, os alunos mostram interesse pela resolução “Passo a Passo” e a opção de *feedbacks* apresentados quando cometem um erro. Neste caso, o OA proporciona a autorregulação da aprendizagem, cumprindo o objetivo apontado por Buriasco e Mendes (2015), de tal modo que o aluno saiba descrever o processo de resolução de uma determinada questão de CDI 1, referindo-se aos conteúdos, estratégias e procedimentos possivelmente aprendidos no Ensino Médio. Além disso, o OA parece ter cumprido o papel de proporcionar a remediação de erros definido por Marczal (2015).

Por fim, os alunos foram questionados sobre quais contribuições achavam que o OA poderia trazer para sua aprendizagem de Matemática (ou CDI). Alguns os estudantes relataram que o OA poderá auxiliá-los a melhorar seu desempenho na

disciplina de CDI devido a facilidade de acesso dos conteúdos, como apontam os relatos a seguir:

E1: Pode ajudar muitos alunos, pois a gente bate muito na trave, a gente reprova muito! ... Isso pode auxiliar os alunos de CDI a terem uma certa facilidade de a gente não chegar tão “cru”, chegar a gente entendendo. É claro que o 1º semestre é um tempo da gente aprender a estudar na universidade. A gente não está acostumado com um tanto de trabalhos, conteúdos e provas. A plataforma pode ajudar bastante nesse requisito.

E3: Pela facilidade, “né”! Vou dar um exemplo, as coisas que eu dancei em cálculo,,, Sobre os conteúdos terem fácil acesso, sabe? A Farma, por exemplo, você dá um click na resposta errada e tem lá as coisas, vídeo, conteúdo complementar. Você pode colocar um vídeo da matéria, como o conteúdo de matrizes para o aluno que quer se aprofundar.

E5: Acho que várias, porque é uma forma mais... mais ... interativa! ... posso aprender sem a ajuda do professor!

Ao analisarmos esses comentários, observou-se que o OA foi bem aceito pelos alunos e que, na sua percepção, pode auxiliá-los em sua autorregulação da aprendizagem de conceitos de matemática necessários para a aprendizagem de CDI 1. Ao analisarmos algumas falas específicas, pode-se observar que o OA está estritamente ligado com a fase de transição do Ensino Médio para o Ensino Superior discutida no Capítulo 2, e pode ser uma alternativa para sanar as dificuldades encontradas pelos alunos nesse processo de transição. Além disso, os alunos reconhecem que estão “crus” no primeiro semestre, como relatado pelo estudante E1, e que a FARMA-Calc pode ajudá-los a se adaptar e passar por essa fase, a qual é um dos motivos de aumento do índice de reprovação e evasão na UTFPR (Zarpelon; Resende; Reis, 2017).

Ao completar essa etapa de avaliação do OA, concluiu-se que o OA estava adequado à demanda do problema de pesquisa, sendo necessários alguns pequenos ajustes em relação a usabilidade e acessibilidade, como exemplo a implementação dos botões de “voltar” no passo a passo e “próxima página” dentro dos elementos do OA. Após esses ajustes, o artefato foi submetido a uma avaliação final realizada com o público-alvo desta pesquisa. Os resultados serão apresentados a seguir.

7.4.3 Terceira avaliação

Para completar o processo de validação do OA na FARMA-Calc, seguindo o método INTERA e as diretrizes da DSR, foi realizada uma terceira avaliação como

estudo de caso do público-alvo, que nesta tese são alunos ingressantes nos cursos de Engenharia da UTFPR, em particular do campus Guarapuava.

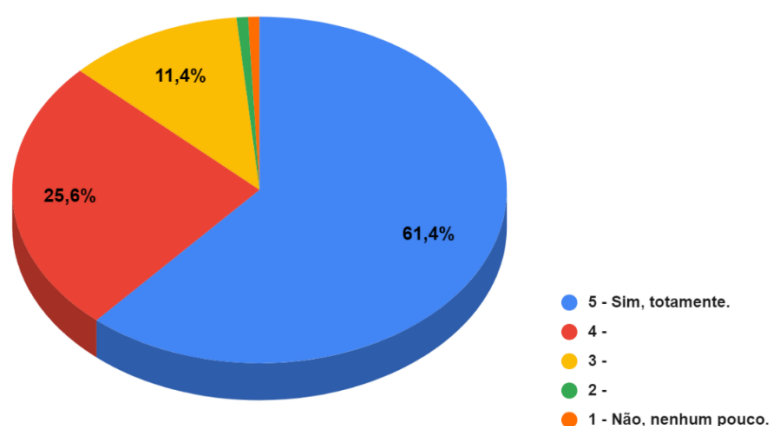
O objetivo da terceira avaliação, dentro da presente pesquisa, foi reconhecer contribuições no uso de um OA com *feedbacks* no processo de autorregulação da aprendizagem de conceitos matemáticos necessários para alunos matriculados na disciplina de CDI 1. Em especial, evidenciar as potencialidades e a receptividade dos alunos frente ao OA, sendo este o quarto e último objetivo específico da pesquisa.

A seguir serão apresentados os resultados desta terceira avaliação, os quais foram retirados do questionário de satisfação do OA (Apêndice B - adaptado de Leite (2013)). O questionário é formado por um conjunto de 15 perguntas divididas em três tópicos: Facilidade no uso do OA (6); *Feedbacks* (6); Resolução das questões usando o objeto de aprendizagem (3). A apresentação das respostas das perguntas de satisfação apresentava uma escala de 1 a 5.

Facilidade no uso do OA

Neste tópico, as primeiras seis perguntas apresentadas verificam questões de acessibilidade, usabilidade e se o estudante tem facilidade no uso do OA, os resultados podem ser vistos no gráfico do Gráfico 1.

Gráfico 1 - Facilidade no uso do AO



Fonte: Autoria própria (2024).

Como se pode observar no Gráfico 1 referente à facilidade no uso do OA, 61,4% dos alunos confirmaram a escala máxima, mostrando que o OA satisfaz a quesitos em relação à apresentação do conteúdo de forma clara, facilidade de memorização em relação às informações que são importantes para seu uso, controle

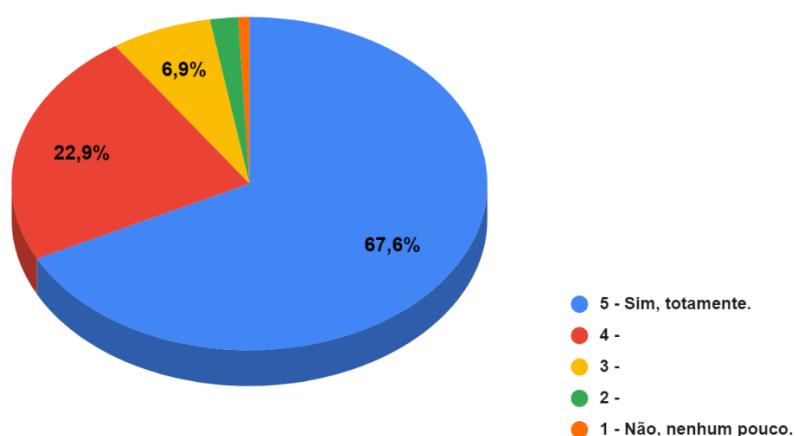
sequencial de interação entre as etapas de cada atividade e entre atividades, localização da informação, compreensão da dinâmica da interação e navegação.

Com esses dados, também, pode-se observar que as relações de interações entre as etapas de cada atividade e localização da informação, compreensão da dinâmica da interação e navegação podem ser melhoradas.

Feedbacks

Em relação aos *feedbacks* o Gráfico 2 apresenta 67,6% de satisfação referente aos *feedbacks* presentes na resolução do problema. O fato de o aluno receber *feedbacks* durante o processo de resolução de uma questão contribui para a solução do problema é muito significativa para os alunos. A dica apresentada antes mesmo de concluir a resolução final ajuda no processo de solução, e os *feedbacks* apresentados durante a resolução das questões foram suficientes para encontrar a resposta correta para a metade dos alunos. Uma pergunta que teve certa relevância durante a avaliação foi a opção do “passo a passo”, onde 71% afirmaram que o uso desse recurso ajuda a resolver as questões.

Gráfico 2 – Feedbacks



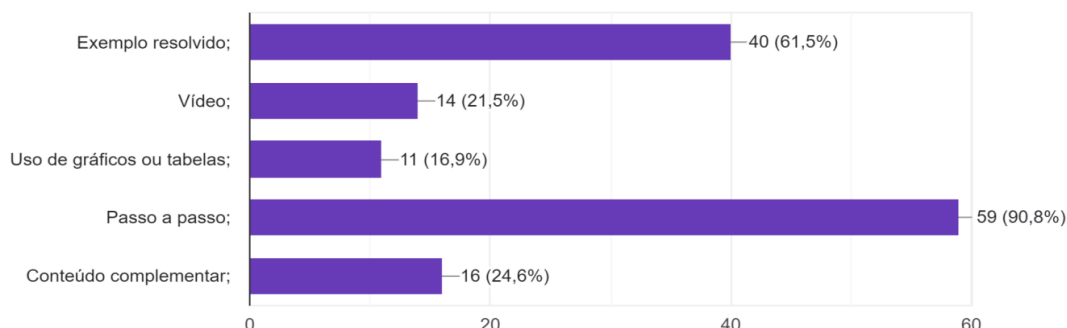
Fonte: Autoria própria (2024).

No Gráfico 3, é apresentado um gráfico dos tipos de *feedbacks* que os alunos reconhecem que mais ajudaram na resolução da questão, dentre os quais se destacam o Exemplo Resolvido e o Passo a Passo.

Gráfico 3 - Feedbacks mais utilizados

12 - Quais dos tipos de feedbacks mais ajudou na resolução da questão?

65 respostas



Fonte: Autoria própria (2024).

Como o *feedback* de resolução “passo a passo”, em particular, se destacou como um item de grande relevância na segunda avaliação, foi perguntado aos alunos o que acharam desse recurso e em quais questões foi utilizado, a seguir veremos alguns comentários:

E1: Achei uma ferramenta ótima, deixando muito mais clara e fácil a compreensão da questão, utilizei em questões que precisavam de um conhecimento mais específico, de fórmulas, etc.

E5: Muito mais fácil para entender as contas, principalmente nas questões com funções e frações que eram maiores no teste, mostrava o passo a passo de cada.

E6: Nas questões mais difíceis para o final, achei eles muito útil para entender melhor a ideia.

E7: Nas questões, digamos, mais complexas, no caso com mais detalhes.

E11: Achei o acompanhamento muito bom e claro, utilizei mais durante as últimas questões.

E21: Deixa a resolução mais simples.

E31: Totalmente útil, dando dicas de como fazer, somente a resposta final do passo a passo que quando resolvida corretamente poderia ir automática para a resposta do exercício.

E33: Gostei, realizar uma sequência torna mais fácil. Permite que a gente pense em coisas as quais não havia pensado antes.

E39: Como faz algum tempo que saí do ensino médio (5 anos) acabei usando em todas as que consegui responder, pois lembrava pouca coisa, quase nada, do conteúdo apresentado. Para mim, ela também acabou sendo o principal meio de resolução por não poder haver uma maneira de fazer anotações no site, se resolvido uma parte da equação tem de se anotar o número em algum outro lugar ou mantê-lo em mente. Mas em duas das questões que respondi realmente consegui recordar os exercícios e reaprendê-los graças ao recursos passo a passo. Às vezes, receber a resposta direto me atrapalhou,

pois eu não lembrava uma operação básica e acabei empacado (mesmo sabendo da resposta), não aprendendo.

E46: muito boa, principalmente ao destaque (mudança de cor) para identificar o que resolver primeiramente no problema.

E58: Realmente muito bom a função passo a passo, que dá as dicas e mesmo assim faz com que o aluno tente fazer e não fique só colando da internet.

Os comentários sobre a resolução passo a passo foram todos de forma geral positivos, ressaltamos aqui alguns termos elencados: “*muito útil*”, “*ajudou bastante*” e “*deixa a resolução mais simples*”. Além disso, outros pontos importantes foram colocados, como lembrar conceitos do Ensino Médio, o processo de resolver em partes ajuda na aprendizagem, *layout* diferenciado e o uso do recurso em exercícios mais complexos.

Mas outros pontos foram negativos, como alguns erros no software e a falta de um botão que volte à questão de origem. Nestes casos, ambos foram resolvidos como visto na Figura 11.

Figura 11- Botão de voltar quando o passo a passo é concluído



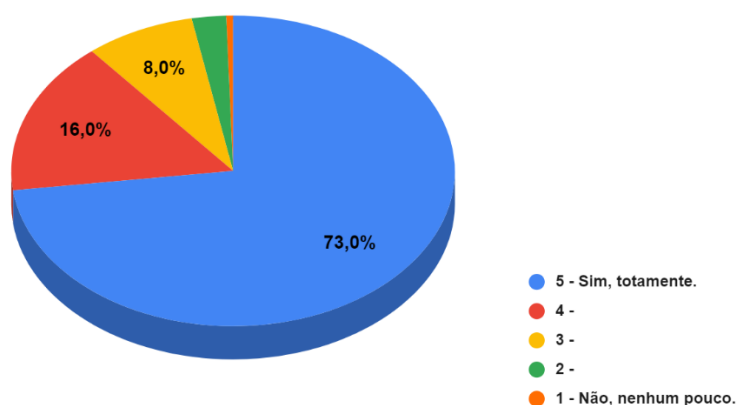
Fonte: Autoria própria (2024).

Uma das sugestões ainda não implementadas, devido ao grau de dificuldade de implementação e ao tempo de conclusão desta tese, foi a aba para fazer anotações no lugar do uso papel ou outro aplicativo no computador.

Resolução das questões usando o Objeto de Aprendizagem

Sobre a utilização de um OA *online* com *feedbacks* para resolver questões sobre conceitos de Matemática necessários para o CDI 1, em relação à motivação ao uso do recurso e a melhoria na aprendizagem, os resultados sobre a resolução das questões usando o OA estão representados no Gráfico 4.

Gráfico 4 - Resolução das questões usando o objeto de aprendizagem



Fonte: Autoria própria (2024).

Observa-se um índice de satisfação de 73% em relação ao uso do AO para resolução de questões. Além disso, os recursos utilizados no OA são muito motivadores para a maioria dos alunos. Sobre a opinião de estudar conceitos de matemática através de um OA *online* pode ajudar em sua aprendizagem, os alunos confirmam que sim. Já sobre a relevância de se utilizar esse tipo de recurso em disciplinas de Pré-Cálculo, CDI e outras, 77,3% disseram ser importante a utilização de OA *online* com *feedbacks* nessas disciplinas.

Por fim, os alunos deram seus pareceres sobre a experiência de se trabalhar com um OA *online* de questões com conceitos de Matemática necessários para o CDI 1. A seguir estão alguns dos comentários.

E21: A ferramenta é altamente útil, especialmente para relembrar propriedades matemáticas que são fáceis de esquecer se você não tem contato com cálculo periodicamente.

E26: A ferramenta ajuda muito na resolução e no processo de entendimento de determinada matéria.

E33: Parabéns pelo projeto, acredito que o mesmo trará um auxílio amplo na educação, pois a plataforma está com o objeto correto, atrair a dificuldade dos alunos para assim conciliar com soluções amplas e bem explicativas.

E37: Em se tratando de Educação, toda e quaisquer ferramentas são sempre bem-vindas, considerando o déficit que o aluno universitário tem consigo do ensino fundamental e médio, assim, agregar conhecimento para que ele possa, ainda que na vida universitária, resgatar esse conteúdo.

E68: A variedade de dicas permite que todos possam compreender a resolução da melhor forma para si. O único detalhe é em relação ao layout, mas de resto, muito bom!

Neste primeiro bloco de comentário, pode-se ver comentários extremamente positivos sobre o OA e pontos já citados anteriormente. No bloco seguinte estão

comentários também positivos, mas com críticas e sugestões positivas para a melhoria do OA e da plataforma FARMA-Calc.

E1: Gostei muito da plataforma, da ferramenta de realizar a questão passo a passo, entendendo cada etapa com mais clareza, só não consegui achar onde posso estar salvando minhas respostas para, em seguida, enviá-las.

E: o site é bem competente, precisa apenas de uma lapidação do layout para tornar a ferramenta ainda mais simples no uso, o único ponto a melhorar seriam as vídeo aulas que apesar de boas às vezes são mais complexas que o necessário.

E5: O conteúdo da plataforma está completo ajuda totalmente no ensino, pra ampliar acho que poderiam deixar alguns questionário como o que a gente fez com temas separados sabe, pq aí conseguimos fazer o que é mais complicado pra gente.

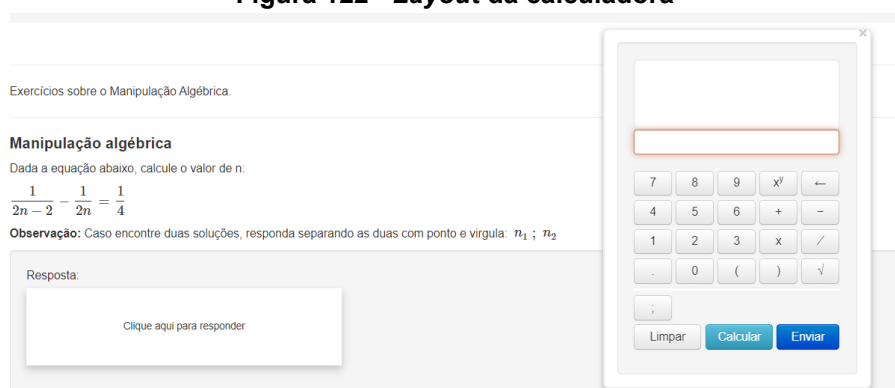
E6: Acho que a plataforma em um geral ficou muito boa, apesar de a interface ser um pouco desgastante de ser usar por muito tempo por ter uns problemas de algumas coisas serem muito pequenas e não tão confortável para a visualização fora isso achei a plataforma muito boa.

E7: Num geral é nota 10, poderia ser visualmente mais agradável.

E12: A calculadora poderia manter o dado que foi inserido, quando fechado a interface da mesma. um missclick acaba afetando na linha do raciocínio pois perde a informação que foi inserida.

Nestes comentários destaca-se a melhoria no *layout*, os quais a maioria foram resolvidos ou implementados, por exemplo, a calculadora foi deixada com fundo transparente na janela *popup*, e ajuste de posição na tela para visualização da questão, ver Figura 12.

Figura 122 - Layout da calculadora



Fonte: Autoria própria (2024).

Os comentários relevantes foram destacados, mas alguns deles não puderam ser implementados.

E24: As dicas pré envio de uma resposta poderia ser mais clara ou até mesmo possuir uma dica crucial ou fator importante para a resolução (às vezes precisamos de apenas um detalhe para a resolução) assim não precisando enviar uma resposta incorreta para conseguir a ajuda...

E58: Acho que o site poderia ser um pouco mais interativo, claro que está só começando e eu entendo isso, mas acho que o último passo poderia ser deixá-lo mais interativo mesmo que o público alvo seja universitários coisas diferentes chamam atenção de qualquer público. Um exemplo pode ser algo como o moodle, com as letras maiores e mais figuras, e quando clicar em links como exemplo ou passo a passo deixe as abas abertas na plataforma, assim mesmo estando no passo a passo eu possa voltar e ver um exemplo sem sair do passo a passo.

As dicas pré-envio de respostas podem ser disponibilizadas pelo professor dentro da área de apresentação da questão, mas no momento não é viável implementar outro recurso para esse fim. Sobre a questão da interatividade, foram feitas algumas melhorias pautadas em *design* de sites, mas é possível melhorar, tendo em vista que a pesquisa continuará após o término desta tese.

Conclui-se esta seção com um comentário geral sobre as três avaliações. A primeira avaliação com os especialistas nos ajudou a construir um OA robusto e fundamentado em instrumentos de avaliação relevantes para o estudo de CDI 1, assim como a escolha de *feedbacks* relevantes para a autorregulação da aprendizagem.

A segunda avaliação mostrou quais eram as dificuldades reais dos alunos, tanto com os conceitos de matemática como na utilização do OA *online*. Pois foi uma avaliação individual com um pequeno grupo de alunos de CDI 1. Nesta etapa, o professor pesquisador pode interagir com os alunos e ver quais melhorias poderiam ser feitas para melhorar a eficácia na utilização do OA.

Por último, a terceira avaliação, mostrou como seria a utilização do OA em turmas completas de 30 a 40 alunos. Nesta situação, podem-se verificar algumas restrições e limitações da pesquisa. Por exemplo, o número de computadores insuficiente no laboratório de informática, o que desmotivou alguns alunos a completarem a avaliação ou até mesmo realizar a atividade em duplas. Este pode ser o motivo pelo qual apenas 68 alunos de 99 preencheram o questionário de avaliação do OA.

A partir dos apontamentos levantadas e da problemática definida, considera-se que a utilização de um OA com *feedbacks* para autorregulação da aprendizagem de conceitos necessários para o ensino de CDI permitiu desenvolver um instrumento com várias funcionalidades, podendo ser usado como instrumento de avaliação diagnóstica, indicação de material de apoio ou conteúdo complementar, ou mesmo como material para um curso de curta duração (na forma de “nivelamento”), que pode ser usado por professores e alunos interessados em abordar tais conceitos.

7.5 Contribuições e comunicação da pesquisa

A principal contribuição desta pesquisa é disponibilizar, de forma gratuita e *online*, um OA que pode ser utilizado como um instrumento de avaliação de conceitos de Matemática, ou como conteúdo complementar em disciplinas de Pré-Cálculo e CDI 1 ou ainda como um minicurso de Matemática Básica nas universidades e escolas de Educação Básica.

Espera-se que esta pesquisa possa demonstrar que existe uma gama de possibilidades para o uso de OA e TDIC para o ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Superior. Além disso, as respostas dos estudantes às questões propostas no OA podem ser objeto de investigação para futuras pesquisas em relação a vários focos de estudo, como autorregulação da aprendizagem, dificuldades em conteúdos matemáticos específicos na transição do Ensino Médio e os estratos do conhecimento de Matemática.

Como forma de divulgar os resultados desta pesquisa, foram apresentados à comunidade científica os itens:

- i) Publicações realizadas durante a pesquisa em anais de eventos.
 - CASTILHO, A. S.; TREVISAN, A. L. Objeto de aprendizagem online com feedbacks para a aprendizagem de conceitos necessários para o Cálculo. In: **III Encontro Paranaense de Tecnologia na Educação Matemática (EPTM)**, 2023, Apucarana. Anais do III EPTM, 2023.
 - CASTILHO, A. S.; TREVISAN, A. L.; MARCZAL, D. Modelo para a Avaliação de Conceitos Necessários à Aprendizagem de Cálculo. In: **XVI Conferencia Interamericana de Educación Matemática**, Lima, 2023.
 - CASTILHO, A. S.; TREVISAN, A. L.; MARCZAL, D. Concepção de um objeto de aprendizagem envolvendo conceitos matemáticos necessários para a disciplina de cálculo. In: **VII Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia (SINECT 2022)**, 2022, Ponta Grossa. Anais do Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia (SINECT 2022), 2022. v. 1. p. 718-727.
 - CASTILHO, A. Objetos de aprendizagem com feedbacks para a regulação de conceitos matemáticos necessários para a aprendizagem

- de cálculo. In: **XXV EBRAPEM**, 2021.
- CASTILHO, A. S.; THEODOROVSKI, R.; NEGRINI, M. V.; ARAUJO, T. T.; TREVISAN, A. L. Ensino de Cálculo e Tarefas Exploratórias com Objetos de Aprendizagem no GeoGebra. In: **Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática, 2022, On-line**. Anais do(a) Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática. online: Even3, 2022.
 - CASTILHO, A. S.; TREVISAN, A. L.; MARCZAL, D. Objeto de aprendizagem para remediação de erros envolvendo conceitos necessários para o cálculo. In: **VI WCTI - Workshop de Ciência, Tecnologia e Inovação, 2021**, Francisco Beltrão. ANAIS DO VI WCTI, v. VI. p. 154-158, 2021.
- ii) Publicações realizadas durante a pesquisa em periódicos.
- CASTILHO, A. S.; TREVISAN, A. L.; MARCZAL, D. Conception of learning objects with feedback for self-regulation of learning mathematical concepts necessary for differential and integral calculus. **Acta Scientiae**, v. 24, n. 7, p. 176-201, 2022. <http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/7073>
 - Castilho, A. S.; Trevisan, A. L.; Marczal, D. Modelo para avaliação de conceitos necessários para aprendizagem de cálculo. **REVEMAT** – eISSN 1981-1322 – Em editoração
- iii) Disponibilização do OA em um portal específico.
- <https://farma-calc.educacional.mat.br/>
- iv) Disponibilização da FARMA-Calc em código aberto, através de repositório para colaboração e desenvolvimento pela comunidade.
- <https://github.com/Farma-Authoring-Tool/farma-calc>
- v) Registro da FARMA-Calc no Instituto Nacional da Propriedade Industrial com registro de Programa de Computador Nº: BR512024000850-0.

7.6 Discussão sobre o capítulo

Neste capítulo foram apresentados os resultados de uma pesquisa pautada nos princípios da metodologia do *Design Science Research* (DSR), cujo foco estava na análise das três avaliações realizadas com um grupo de especialistas e dois grupos

de alunos de CDI1. Desta análise pode-se extrair dois tópicos para discussão.

O primeiro trata das percepções dos alunos ingressantes em CDI1 sobre as contribuições do OA para autorregulação de sua aprendizagem. Neste tópico, a aceitação e a motivação dos alunos em utilizar um OA de Matemática em uma plataforma digital vem ao encontro dos apontamentos de Pereira (2018) e Bittencourt e Albino (2017) que afirmam que a geração de “nativos digitais” busca nas TDIC informações necessárias para sua aprendizagem. Além disso, Trevisan, Fonseca e Palha (2018) apontam que as TDIC podem ajudar na compreensão de conceitos matemáticos, possibilitando a visualização, reflexão e deduções para refinar o conhecimento.

Um fator relevante levantado pelos alunos é que o OA possibilita recuperar ou relembrar os conceitos matemáticos aprendidos no Ensino Médio, o que mostra que a utilização do OA em disciplinas de CDI1 pode auxiliar nas dificuldades encontradas na transição dos alunos do Ensino Médio para o Ensino Superior. Devido à escassez de materiais voltados para o ensino de Pré-Cálculo, apontado por Andrade, Esquinca e Oliveira (2019), o OA proposto por esta tese também surge como uma alternativa de material didático preparatório para o CDI1.

Falando ainda sobre as percepções dos alunos sobre as contribuições do OA, a escolha das vinte questões baseadas, no teste CCR (Carlson; Madison; West, 2015) e nos estratos de conhecimento matemático (Cuevas; Martínez; Pluinage, 2012), associadas à elementos dos exames nacionais de avaliação de Matemática, mostrou-se positiva, pois reconheceram questões que envolviam conceitos numéricos, algébricos e operação com funções.

O segundo tópico a ser levando sobre este capítulo são as potencialidades e limitações do OA. Em relação a usabilidade, os alunos apontam que o OA é muito estático e que poderia ser melhorado a apresentação do conteúdo. Estes pontos serão revistos em novas versões da FARMA-Calc e em pesquisas futuras, como exemplo a de melhoria, está previsto a implementação e adaptação da plataforma para aplicativos moveis em sistemas IOS e Android. Por fim, o OA dentro da FARMA-Calc poderá ser utilizado como recurso didático em disciplinas de Matemática do Ensino Médio e teste diagnóstico de Pré-Cálculo e CDI1.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta de elaborar um Objeto de Aprendizagem (OA) com *feedbacks* voltado para as dificuldades de Matemática enfrentadas por alunos ingressantes nos cursos de Engenharia, em específico os conteúdos necessários para a aprendizagem de CDI 1, foi motivado pela observação do autor desta tese durante sua experiência em sala de aula durante os últimos 15 anos, ao ver as dificuldades dos alunos em compreender os conceitos de CDI 1, os altos índices de reprovação e as taxas de evasão escolar no âmbito da UTFPR.

A proposição e investigação de alternativas frente a esse contexto torna-se cada vez mais necessária e mostra-se relevante no âmbito de pesquisas tanto no escopo da Educação Matemática quanto na área de Informática na Educação. Inclusive esta demanda está presente nas Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia (Resolução CNE/CES n.º 2/2019) (Brasil, 2019), que orientam que em um Projeto Pedagógico de Curso (PPC) deve-se prever sistemas de acolhimento e nivelamento, visando à diminuição da retenção e da evasão dos estudantes. Portanto, implantar um OA como o proposto nesta tese pode ser uma alternativa viável para suprir as necessidades dos alunos ingressantes nos cursos de Engenharia.

Para tanto, em busca de solução para o problema de pesquisa, buscaram-se na literatura quais conceitos são necessários para a aprendizagem de CDI 1. Como resultado esta pesquisa pautou-se em elaborar questões fundamentadas em dois instrumentos de aprendizagem, a taxonomia Calculus Concept Readiness (CCR), ou Prontidão de Conceitos de Cálculo de Carlson, Madison e West (2015) e os estudos sobre os estratos de conhecimento matemático (Cuevas; Martínez; Pluvillage, 2012; Cuevas-Vallejo; Pineda; Reyes, 2018). Ambos os autores avaliam as habilidades de raciocínio e conceitos necessários para a aprendizagem de CDI.

Nesta tese, optou-se por trabalhar com uma plataforma online denominada FARMA-Calc, que é uma reestruturação da plataforma FARMA para as necessidades levantadas sobre os conceitos de CDI 1. A FARMA-Calc tem por funcionalidade a implementação do OA com as 20 questões e seus *feedbacks* correspondentes elaborados durante a fase de pesquisa, tendo por objetivo fornecer *feedbacks* imediatos que devem proporcionar a autorregulação da aprendizagem do estudante

durante o processo de resolução que questões que abordam os conceitos necessários para o estudo de CDI 1. Os *feedbacks*, aqui utilizados foram fundamentados na teoria de Múltiplas Representações Externas (MRE) em três funções principais a serem exploradas em situações de aprendizagem, a saber: função de papéis complementares; função de restrição de compreensão; e função de construção de conhecimento aprofundado (Ainsworth, 2006).

Para a realização e validação da pesquisa, optou-se por uma investigação de natureza qualitativa de cunho interpretativo (Bogdan; Biklen, 1994), orientada pelas diretrizes do Design Science Research - DSR (Dresch; Lacerda; Antunes, 2015). Em DSR, o objeto de estudo é um artefato que é projetado com base em conjecturas teóricas, e a avaliação do artefato fornece novos dados sobre as conjecturas elaboradas visando aumentar o conhecimento teórico (Rocha; Pimentel; Diniz, 2014). Neste estudo, o artefato avaliado foi o OA com *feedbacks* para a autorregulação da aprendizagem de conceitos Matemáticos necessários para o Cálculo Diferencial e Integral 1.

Seguindo as diretrizes da DSR, o OA foi elaborado e avaliado em três etapas, sendo a primeira avaliação feita por especialistas, a segunda por um pequeno grupo do público-alvo (alunos de CDI 1). Por fim, foi realizada uma terceira avaliação com 99 alunos de CDI 1, de duas turmas de Engenharia e uma turma do curso de Tecnologia.

Na primeira avaliação pode-se observar, segundo a ótica dos especialistas, que o OA tinha potencialidades de ser uma ferramenta alternativa para se trabalhar conceitos de Matemática necessários para a aprendizagem de CDI 1. Além disso, esta avaliação proporcionou o aprimoramento da plataforma FARMA, surgindo então uma nova versão denominada FARMA-Calc. Nesta versão, foram implementadas novas funcionalidades e melhorias sugeridas pelos especialistas, como: mudança no layout; *feedbacks* de retorno para acertos e não somente para erros; mudança na organização e apresentação dos *feedbacks* proporcionando uma maior interação do usuário com o OA.

Já na segunda avaliação, pode-se observar, individualmente, o uso do OA por um grupo reduzido de estudantes. Segundo eles, a FARMA-Calc proporcionou várias opções que contribuem para a autorregulação da aprendizagem, como os exemplos similares resolvidos, vídeos explicativos e em especial a resolução “passo a passo”.

Esta última opção proporcionou ao aluno uma resolução guiada do exercício, formulada pelo professor, com *feedbacks* específicos para cada passo da resolução. Ainda nesta etapa de avaliação, foram levantados vários pontos de melhoria da FARMA-Calc, como melhorias na navegação e funcionalidades da plataforma, as quais foram descritas no capítulo anterior.

Por fim, na terceira avaliação com as três turmas, o OA implementado na FARMA-Calc foi submetido a condições reais de sala de aula, turmas grandes com 30 a 40 alunos. A principal contribuição desta avaliação para a pesquisa foi a confirmação de que o OA pode ser uma alternativa para a autorregulação da aprendizagem de conceitos matemáticos para o CDI 1, o que é confirmado pela fala de alguns alunos que na FARMA-Calc o professor pode selecionar as melhores opções de *feedbacks* para um problema específico e o aluno não precisa ficar perdido buscando conteúdos em livros ou na *internet* sem nenhum direcionamento.

Com a validação positiva por parte do público-alvo, pretende-se oferecer do OA na FARMA-Calc como um instrumento alternativo para suprir as necessidades e dificuldades dos alunos e professores com relação à defasagem dos conceitos de Matemática, tanto no âmbito acadêmico quanto de sala de aula.

No entanto, sabe-se que o OA precisa ser melhorado, principalmente em relação à usabilidade da plataforma FARMA-Calc e suas funcionalidades. O OA em si, mostra-se promissor como teste de nivelamento de Pré-Cálculo, conteúdo complementar de Matemática e instrumento de autorregulação da aprendizagem de Matemática. Fato este que é confirmado pelos resultados das três avaliações realizadas.

A aplicação do OA experimentado nesta pesquisa não só agregou a experimentação do artefato proposto em um ambiente real e com uma situação contextualizada, mas permitiu ao pesquisador agregar conhecimentos tanto referente à aplicação do experimento quanto à análise dos resultados.

Por fim, relata-se a necessidade de ressaltar a possibilidade de continuidade da pesquisa, a fim de ampliar os pontos que ficaram limitados ou com lacunas. Em particular, a continuidade da reestruturação da plataforma FARMA-Calc juntamente com a FARMA, projeto de pesquisa em andamento do qual o autor e seu coorientador fazem parte.

Uma das frentes de trabalho subsequente é um novo *layout* das plataformas e melhorias na funcionalidade. Além disso, pretende-se fazer a expansão para dispositivos móveis em formato de aplicativo.

Na área de Ensino e Educação Matemática, pretende-se continuar o refinamento do instrumento, tendo em vista aumentar a contribuição para estudos voltados para as dificuldades dos alunos ingressantes no Ensino Superior em relação à Matemática. Espera-se, ainda, que esta contribua e inspire novas pesquisas sobre o uso de TDIC para o ensino de CDI.

REFERÊNCIAS

- ADJIAGE, R.; PLUVINAGE, F. Strates de compétences en mathématiques. **Reperes IREM**, Nancy, v. 88, p. 43-72, 2012.
- AINSWORTH, S. DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. **Learning and instruction**, v. 16, n. 3, p. 183-198, 2006.
- ALMEIDA, L. S. *et al.* **Inovação pedagógica no ensino superior: cenários e caminhos de transformação**. Agência de Avaliação e Acreditação do Ensino Superior: Lisboa, Portugal, 2022.
- ALMEIDA, L. S.; ARAÚJO, A. M.; MARTINS, C. Transição e adaptação dos alunos do 1º ano: variáveis intervenientes e medidas de atuação. *In*: ALMEIDA, L. S., & VIEIRA DE CASTRO, R. (Eds.), **Ser estudante no Ensino Superior: o caso dos estudantes do 1º ano**. Braga, Universidade do Minho: Centro de Investigação em Educação, p. 146-164, 2016,
- ALVARENGA, K.B.; SAMPAIO, M.M. Obstáculos referentes às relações de representação aritmética e algébrica de grandezas. *In*: FONSECA, L. (Org.). **Didática do Cálculo: epistemologia, ensino e aprendizagem**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, p. 131-144, 2016.
- ANDRADE, F.; ESQUINCALHA, A.; OLIVEIRA, A. T. O Pré-Cálculo nas licenciaturas em matemática das instituições públicas do Rio de Janeiro: o prescrito. **VIDYA**, v. 39, n. 1, p. 131-151, 2019.
- ANDRADE, F. C. *et al.* Um estado da arte das pesquisas brasileiras sobre Pré-Cálculo. **Revista Boem**, v. 8, n. 16, p. 91-111, 2020.
- AUDINO, D. F.; SILVA NASCIMENTO, R. Objetos de aprendizagem - diálogos entre conceitos e uma nova proposição aplicada à educação. **Revista Contemporânea de Educação**, v. 5, n. 10, 2010.
- BATISTA, E. C.; MATOS, L. A. L.; NASCIMENTO, A. B. A entrevista como técnica de investigação na pesquisa qualitativa. **Revista Interdisciplinar Científica Aplicada**, Blumenau, v.11, n.3, p.23-38, TRI III 2017.
- BEHAR, P. A. **Modelos pedagógicos em educação a distância**. Artmed Editora, 2009.
- BITTENCOURT, P. A. S.; ALBINO, J. P. O uso das tecnologias digitais na educação do século XXI. **Revista Ibero-Americana de estudos em educação**, p. 205-214, 2017.
- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**, Porto Editora, 1994.
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e educação matemática**. Autêntica Editora, 2019.

BORGES, M. C.; AQUINO, O. F. Educação superior no Brasil e as políticas de expansão de vagas do REUNI: avanços e controvérsias. **Revista Educação: Teoria e Prática**, n. 39, p. 117 - 138, 2012.

BORSSOI, A. H.; TREVISAN, A. L.; ELIAS, H. R. Percursos de aprendizagem de alunos ao resolverem uma tarefa de Cálculo Diferencial e Integral. **Vidya**, v. 37, n. 2, p. 459-477, 2017.

BRAGA, J. C.; PIMENTEL, E.; DOTTA, S. Metodologia INTERA para o desenvolvimento de objetos de aprendizagem. *In: Brazilian Symposium on Computers in Education* (Simpósio Brasileiro de Informática na Educação - SBIE), [S.l.], p. 306-315, nov. 2013.

BRASIL. **Exame Nacional do Ensino Médio (Enem)**. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). 2021a. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem>.

BRASIL. **Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB)**. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). 2021b. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb>.

BRASIL. **Prova Brasil**. Ministério da Educação. 2021c. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/prova-brasil/apresentacao>.

BRASIL. **Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa)**. Ministério da Educação. 2021d. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/pisa>.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. **Resolução CNE/CES 2/2019**, publicada em 26 de abril de 2019. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia (seção 1, pp. 43 e 44). Brasília, DF: Diário Oficial da União, 2019.

BURIASCO, R. L. C.; MENDES, M. T. Uma pesquisa qualitativa: regulação da aprendizagem um contexto de aulas de Cálculo. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 8, n. 18, 2015.

CORDEIRO, E.; SATO, G.; PINHEIRO, N.; SILVA, S. O uso de feedbacks em jogos educacionais digitais para o ensino de operações básicas de matemática: um estudo exploratório. **Em Teia | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**. v.12, n.1, 2021.

CARDOSO, A. C.S. Feedback em contextos de ensino-aprendizagem on-line. **Linguagens e Diálogos**, Rio de Janeiro, v. 2, n. 2, p. 17-34, 2011.

CARLSON, M. P.; MADISON, B.; WEST, R. D. A study of students' readiness to learn calculus. **International Journal of Research in Undergraduate Mathematics**

Education, v. 1, n. 2, p. 209-233, 2015.

CARLSON, M.; OEHRMAN, M.; ENGELKE, N. The precalculus concept assessment: A tool for assessing students' reasoning abilities and understandings. **Cognition and Instruction**, v. 28, n. 2, p. 113-145, 2010.

CASTILLO-GARSOW, C. **Teaching the Verhulst model**: a teaching experiment in covariational reasoning and exponential growth. Arizona State University, 2010.

CORRÊA, J. N. P.; BRANDEMBERG, J. C. Tecnologias digitais da informação e comunicação no ensino de matemática em tempos de pandemia: desafios e possibilidades. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 8, n. 22, p. 34-54, 2021.

CORRIVEAU, C.; BEDNARZ, N. The secondary-tertiary transition viewed as a change in mathematical cultures: an exploration concerning symbolism and its use. **Educational Studies in Mathematics**, p. 1-19, 2017.

COSTA, E. B. *et al.* An approach that support multiple linked representations within an intelligent tutoring system for helping students to develop skills on designing digital circuits. *In: New Advances in Information Systems and Technologies*: v. 2. Cham: Springer International Publishing, p. 255-264, 2016.

COX, R.; BRNA, P. Supporting the use of external representations in problem solving: The need for flexible learning environments. **Journal of Artificial Intelligence in Education**, v. 6, p. 239-302, 1995.

CUEVAS-VALLEJO, C. A.; PINEDA, M. D.; REYES, M. M. Una propuesta para introducir el pensamiento funcional y concepto defunción real, antes de un curso de cálculo diferencial. **Revista Logos, Ciencia & Tecnología**, v. 10, n. 2, p. 20-38, 2018.

CUEVAS, C. A., MARTÍNEZ, M. Y PLUVINAGE, F. Promoviendo el pensamiento funcional en la enseñanza del cálculo: un experimento con el uso de tecnologías digitales y sus resultados. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, 17, 137-168, 2012.

CUNHA, S. M.; CARRILHO, D. M. O processo de adaptação ao ensino superior e o rendimento acadêmico. **Psicologia escolar e educacional**, v. 9, p. 215-224, 2005.

DRESCH, A.; LACERDA, D. P.; ANTUNES JUNIOR, J. A. V. **Design science research**: método de pesquisa para avanço da ciência e tecnologia. Porto Alegre: Bookman, 2015.

ELLIOTT, R. *et al.* Conceptualizing the work of leading mathematical tasks in professional development. **Journal of Teacher Education**, East Lansing, v. 60, n. 4, p. 364-379, 2009.

FALCÃO, M. Falta interesse por formação em ciências exatas. **Valor**, Recife, 14 de out. 2019. Disponível em: <https://valorinveste.globo.com/objetivo/empreenda->

se/noticia/2019/10/14/falta-interesse-por-formacao-em-ciencias-exatas.ghtml.

FEITOSA, D. L. S. *et al.* **O estudante e o ensino de cálculo diferencial e integral.** Série Educar-Volume 25 Matemática, p. 6-14, 2020.

FLORES, J. B.; ROSÁRIO LIMA, V. M.; MÜLLER, T. J. O uso das tecnologias da informação e comunicação no ensino de cálculo diferencial e integral: reflexões a partir de uma metanálise. **Abakós**, Belo Horizonte, v. 6, n. 2, p. 21-35, 2018.

FORNARI, A.; CARGNIN, C.; GASPARIN, P. P.; ARAÚJO, E. C. Cálculo diferencial e integral e geometria analítica e álgebra linear na educação a distância. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 23, n. 2, Bauru, p. 475-492, Abr-Jun 2017.

GADANIDIS, G.; BORBA, M. Our lives as performance mathematicians. **For the learning of mathematics**, v. 28, n. 1, p. 44-51, 2008.

GODOY, E. V.; GERAB, F. Transição ensino médio-ensino de engenharia na perspectiva do professor de matemática. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 11, n. 2, p. 361-385, 2018.

GOMEZ, M. F. *et al.* Evasão na engenharia: o caso dos cursos da UTFPR campus Medianeira tendo como acesso o SISU. **Revista Eletrônica Científica Inovação e Tecnologia**, v. 1, n. 11, p. 73 - 89, 2015.

GARZELLA, F. A. C. **A disciplina de Cálculo I: a análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos.** 2013. 298f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, São Paulo. 2013.
HEVNER, A. R.; MARCH, S.T.; PARK, J. Design Science in Information Systems Research. **MIS Quaterly**, v. 28, n. 1, p. 75-105, 2004.

HOMA, A.I. R. As dificuldades em álgebra dos estudantes de engenharia: um experimento com avaliação diagnóstica auxiliada por computador. **Acta Scientiae**, v. 22, n. 5, p. 254-272, 2020.

LACERDA, D. P. *et al.* Design science research: método de pesquisa para a engenharia de produção. **Gestão & produção**, v. 20, p. 741-761, 2013.

LEITE, M. D. **Arquitetura para remediação de erros baseada em múltiplas representações externas.** Tese (Doutorado em Informática), Universidade Federal do Paraná, UFPR, 2013.

LEITE, M. D.; MARCZAL, D.; PIMENTEL, A. R. objeto de aprendizagem pitágoras: uma aplicação do uso de múltiplas de representações externas na remediação de erros matemáticos. *In: Workshop de desafios da computação aplicada à educação (desafie!)*, 2., 2013, Maceió-AL. Anais [...]. Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 2013 . p. 1434-1442.

LEITE, M. D.; PIMENTEL, A. R.; PIETRUCHINSKI, M. H. Remediação de erros baseada em múltiplas representações externas e classificação de erros aplicada a Objetos de Aprendizagem Inteligentes. *In: Brazilian Symposium on Computers in*

Education (Simpósio Brasileiro de Informática na Educação-SBIE). 2012.

LIAO, T.; MOTTA, M. S.; FERNANDES, C. O. Avaliando o " PISA" Matemática. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 16, p. 1-20, 2021.

LITHNER, J. University mathematics students' learning difficulties. **Education Inquiry**, v. 2, n. 2, p. 289-303, 2011.

MAIA, D. L. *et al.* Objetos de aprendizagem para Matemática: yes we can. *In: Congresso sobre Tecnologias na Educação (Ctrl+ E 2017)*, p. 744-750, 2017.

MARCH, S. T.; SMITH, G. F. Design and natural science research on information technology. **Decision support systems**, v. 15, n. 4, p. 251-266, 1995.

MARCZAL, D. *et al.* Metodologia e software educacional para a investigação e remediação de erros conceituais em matemática. **Revista Brasileira de Informática na Educação**, v. 24, n. 02, p. 77, 2016.

MARCZAL, D. **Farma**: uma ferramenta de autoria para objetos de aprendizagem de conceitos matemáticos. 174 f. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2014.

MARCZAL, D.; DIRENE, A. Farma: Uma ferramenta de autoria para objetos de aprendizagem de conceitos matemáticos. *In: Anais do Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, v. 23, 2012.

MELO, J. N. B.; LIMA, J. V.; CANTO FILHO, A. B. Feedback imediato em ambientes informatizados através de vídeos na disciplina de matemática. **Informática na educação: teoria & prática**, v. 21, n. 2, Mai/Ago, 2018.

MARTINS, D. S. *et al.* **uso das tecnologias digitais como suporte para a aprendizagem na era da educação e indústria 4.0**, v. 2. EDUFT, 2021.

MENDES, M. T. **Utilização da prova em fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo**. 2014. Tese (Doutorado em Educação). Londrina: Universidade Estadual de Londrina.

MENDES, M. T.; TREVISAN, A. L.; ELIAS, H. R. A utilização de TDIC em tarefas de avaliação: uma possibilidade para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral. **Debates em Educação**, v. 10, n. 22, p. 140-163, 2018.

MENESTRINA, T. C., MORAES, A. F. Alternativas para uma aprendizagem Significativa em Engenharia: Curso de Matemática Básica. **Revista Brasileira de Ensino de Engenharia**, v. 30, n. 1, p. 52 - 60, 2011.

MORAES, G. C.; JELINEK, K. R. Escola e Prova Brasil: como as práticas escolares podem influenciar os índices de proficiência em Matemática. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, v. 3, n. 2, p. 94-103, 2017.

MORAIS, B. T.; EDUARDO, A. F., MORAIS, P. H. A importância dos ambientes

virtuais de aprendizagem-AVA e suas funcionalidades nas plataformas de ensino à distância-EaD. *In: Anais do V Conedu-Congresso Nacional de Educação*. Fortaleza. 2018. p. 01-10.

MOORE, K. C. Coherence, quantitative reasoning, and the trigonometry of students. *In: Quantitative reasoning and mathematical modeling: A driver for STEM integrated education and teaching in context*, v. 2, p. 75 - 92, 2012.

NESI, T. L. *et al.* Objetos de aprendizagem de matemática: um panorama do que diz em alguns estudos no Brasil. **RENOTE**, v. 17, n. 1, p. 557-566, 2019.

NIELSEN, J. Enhancing the explanatory power of usability heuristics. **Proceedings of the SIGCHI Conference on Human Factors in Computing Systems**, p. 152-158, 1994.

NÓBRIGA, J. C. C.; DANTAS, S. C. Uma proposta de atividade com feedbacks automáticos no GeoGebra. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 34, p. 1-21, 2021.

OLIVEIRA, L. D. *et al.* **Conhecimentos de Matemática básica de graduandos nos anos iniciais de Engenharia: desafios, fragilidades e enfrentamentos possíveis**. 2020.

OLIVEIRA, A. T. G. **Fracasso escolar em matemática no ensino superior: um estudo exploratório à luz da psicologia histórico-cultural**. 2020. 148f. Dissertação (Mestrado em Psicologia) - Centro de Ciências Humanas, Letras e Artes, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2020.

PAIVA, V. L. M. O. Feedback em Ambiente Virtual. *In: LEFFA, V. (Org.) Interação na aprendizagem das línguas*. Pelotas: EDUCAT, 2003.

PEFFERS, K. *et al.* A design science research methodology for information systems research. **Journal of management information systems**, v. 24, n. 3, p. 45-77, 2007.

PEREIRA, F. H. **Um estudo sobre o ensino de geometria com o uso da FARMA**. 109 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2018.

PEREIRA, G. M. R.; SOUZA JUNIOR, A. J. Tecnologias digitais e Modelagem Matemática: um mapeamento de dissertações e teses brasileiras no ensino de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Superior. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 10, n. 2, p. 160-175, 2019.

PIMENTEL, M.; FILIPPO, D.; SANTORO, F. M. Design science research: fazendo pesquisas científicas rigorosas atreladas ao desenvolvimento de artefatos computacionais projetados para a educação. *In: Metodologia de Pesquisa Científica em Informática na Educação: Concepção de Pesquisa*. Porto Alegre. SBC, v. 1, 2020. Disponível em: <https://metodologia.ceie-br.org/livro-1/>.

REMEDIAR. In: **DICIO, Dicionário online de português**. Porto: 7Graus, 2021. Disponível em: <https://www.dicio.com.br/remediar/>.

REYES, M. M.; SOBERANES-MARTÍN, A.; SOTO, J. M. S. Análisis correlacional de competencias matemáticas de pruebas estandarizadas y pre-requisitos matemáticos en estudiantes de nuevo ingreso a Ingeniería en Computación. **RIDE. Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo**, v. 8, n. 15, p. 946-974, 2017.

RIBEIRO, A. C. R.; LONGARAY, A. N. C.; BEHAR, P. A. Práticas criativas na web 2.0: a construção de um objeto de aprendizagem. In: **Brazilian Symposium on Computers in Education** (Simpósio Brasileiro de Informática na Educação-SBIE). 2012.

RISK, U. Draft standard for learning object metadata. **IEEE standard**, v. 1484, n. 1, 2002.

RITTER, F. E.; TEHRANCHI, F.; OURY, J. D. ACT-R: A cognitive architecture for modeling cognition. **Wiley Interdisciplinary Reviews: Cognitive Science**, v. 10, n. 3, p. 21 - 35, 2019.

RITTER, S. *et al.* Cognitive Tutor: applied research in mathematics education. **Psychonomic bulletin & review**, v. 14, n. 2, p. 249-255, 2007.

ROCHA, E. B.; PIMENTEL, M.; DINIZ, M. C.. Desenvolvimento de um modelo da participação em bate papo seguindo a abordagem design science research. In: **Anais do X Simpósio Brasileiro de Sistemas de Informação**. SBC, 2014. p. 32-43.

ROSÁRIO, P. *et al.* Processos de auto-regulação da aprendizagem em alunos com insucesso no 1º ano de Universidade. **Psicologia Escolar e Educacional**, v. 14, p. 349-358, 2010.

SANTOS, G. M. T.; REIS, J. P. C.; SILVA, M. M. Tecnologias digitais na educação superior: reflexões acerca da disciplina de cálculo diferencial e integral I. **Brazilian Journal of Development**, v. 6, n. 8, p. 55191-55201, 2020.

SHUTE, V. **Focus on formative feedback**. ETS Research e Development. Princeton, NJ, March 2007.

SILVA, A. L.; SIMÃO, A. M. V.; SÁ, I. A auto-regulação da aprendizagem: estudos teóricos e empíricos. **Intermeio: Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação-UFMS**, v. 10, n. 19, 2004.

SOARES, D. J. M., SOARES, T. E. A.; SANTOS, W. Análise da qualidade psicométrica da prova de matemática do Exame Nacional do Ensino Médio brasileiro de 2018. **Revista Actualidades Investigativas en Educación**, v. 21, n. 1, p. 1-29, 2021.

SZESZ JUNIOR, A. **Math2Text**: ferramenta tecnológica para acessibilidade de

estudantes cegos a expressões matemáticas. Tese (Doutorado em Ensino de Ciência e Tecnologia) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2021.

THOMPSON, P. W. Quantitative reasoning and mathematical modeling. **New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education**, p. 33 - 57, 2010.

THOMPSON, P. W. Advances in research on quantitative reasoning. **Mayes, R., Bonillia**, p. 143-148, 2012.

TONINI, A. M., PEREIRA, T. R. D. S. **Desafios da educação em engenharia: empreendedorismo, indústria 4.0, Formação do Engenheiro, Mulheres em STEM**. ABENGE, 2019.

TREVISAN; A. L.; MENDES, M. T. Ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral organizados a partir de episódios de resolução de tarefas: uma proposta. **Revista Brasileira de Ensino e Tecnologia**, Ponta Grossa, v. 11, n. 1, p. 209-227, 2018.

TREVISAN; A. L.; MENDES, M. T.; BURIASCO, R. L. C. O conceito de regulação no contexto da avaliação escolar. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 7, n. 1, p. 235-250, 2014.

TREVISAN, A. L.; FONSECA, M. O. S.; PALHA, S. A. G.. Proposição de tarefas com TDIC em aulas de Cálculo. **Revista Diálogo Educacional**, v. 18, n. 58, p. 713-738, 2018.

UTFPR. **Deliberação nº 04/2009 de 24 de abril de 2009**. Deliberações do Counci. Univ. Tec. Federal do Paraná, 2009. Disponível em: <http://www.utfpr.edu.br/documentos/conselhos/counci/deliberacoes/2009>.

WARREN, R. **Uma vida com propósitos: para que estou na terra?** Recife: Vida, 2024.

WILEY, D. A. **The instructional use of learning objects**. Vol. 1. Bloomington: Agency for instructional technology, 2002.

ZARPELON, E. *et al.* Provas do ENEM e o desempenho na disciplina de cálculo 1 nos cursos de engenharia: análise de possíveis relações. *In: Anais do XLIII CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA - COBENGE*. São Bernardo do Campo, SP, Brasil, 2015.

ZARPELON, E.; RESENDE, L. M. M.; REIS, E. F. Análise do desempenho de alunos ingressantes de engenharia na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. **Interfaces da educação**, v. 8, n. 22, p. 303-335, 2017.

ZIMMERMAN, B. J. Becoming a self-regulated learner: which are the key subprocesses? **Contemporary educational psychology**, v. 11, n. 4, p. 307-313, 1986.

APÊNDICE A - ROTEIRO PARA OBSERVAÇÃO DO PARTICIPANTE

Link para transcrição das entrevistas:

<https://drive.google.com/drive/folders/1YVuqp3B8SkFnDCAoue70qyPPPCyWAZle?usp=sharing>

Data: Avaliação 2: Teste com estudantes calouros.

Alunos:

Conteúdo: OA com 8 questões (3 estrato Num, 3 estrato Alg e 2 estrato Fun).

Objetivo: como o sujeito interage com a plataforma no sentido de calibrar a estrutura do OA.

ASPECTOS OBSERVADOS

A) Dificuldades na utilização da Plataforma pelos alunos:

B) Contribuições do OA referentes à passividade dos alunos (nível de interesse):

C) As interações e interpretações dos alunos com o OA (questões claras e objetivas? os feedbacks mostram-se promissores?)

D) Condução da atividade pelo professor:

ROTEIRO DA ENTREVISTA COM O GRUPO FOCAL (ANTES)

1- Você gosta de estudar matemática? Por quê?

2- É importante estudar matemática? Por quê?

3- Quais dificuldades vocês têm com relação à matemática? Por quê?

4- A matemática que aprendeu no colégio tem auxiliado em sua aprendizagem de CDI? Justifique a resposta.

ROTEIRO DA ENTREVISTA COM O GRUPO FOCAL (DEPOIS)

1- Mudou alguma coisa sua relação/visão à disciplina de matemática depois dessa nova maneira de trabalho? Justifique sua resposta.

2- O que mais você gostou no OA de matemática?

3- Qual foi a dificuldade encontrada em participar da atividade propostas?

4- Quais contribuições você acha que o OA pode trazer para sua aprendizagem de Matemática (ou CDI).

5- No que o OA foi insatisfatório, e no que pode melhorar?

APÊNDICE B - QUESTIONÁRIO DE PESQUISA

Google Forms - <https://forms.gle/ceHEyPcmUi4q6iMB8>

QUESTIONÁRIO DE SATISFAÇÃO (Farma-Calc)

O objetivo deste questionário é fazer um levantamento sobre o nível de satisfação do usuário ao utilizar o Objeto de Aprendizagem sobre conceitos necessários para o Pré-Cálculo.

Obs: As notas devem ser dadas de 1 à 5, sendo 1 (Não, nem um pouco) e 5 (Sim totalmente).

Nome:

E-mail:

FACILIDADE NO USO DO OA

1 - O conteúdo foi apresentado de forma clara?

5 4 3 2 1

2 - O OA apresenta facilidade de memorização das informações que são importantes para seu uso?

5 4 3 2 1

3 - O OA permite a navegação livre, ou seja, permite que você controle a sequência de uso durante a utilização?

5 4 3 2 1

4 - O OA possui mecanismo que facilitam a localização da informação durante a sua utilização?

5 4 3 2 1

5 - As formas de navegação e interação do software são facilmente compreendidas?

5 4 3 2 1

6 - Durante a navegação é fácil voltar às informações anteriores?

5 4 3 2 1

FEEDBACKS

7 - O fato de você receber feedbacks durante o processo de resolução de uma questão contribui para sua resolução?

5 4 3 2 1

8 - A dica apresentada antes mesmo de concluir sua resolução final ajudou você?

5 4 3 2 1

9 - Os feedbacks apresentados durante a resolução das questões foram suficientes para você encontrar a resposta correta?

5 4 3 2 1

10 - A opção de resolver Passo a Passo (caso tenha utilizado) ajudou você a resolver as questões?

5 4 3 2 1

11 - O que achou da Resolução Passo a Passo? Em quais questões você mis utilizou esse recurso?

12 - Quais dos tipos de feedbacks mais ajudou na resolução da questão?

- Exemplo resolvido;
- Vídeo;
- Uso de gráficos ou tabelas;
- Passo a passo;
- Conteúdo complementar;

RESOLUÇÃO DAS QUESTÕES USANDO O OBJETO DE APRENDIZAGEM

13 - Os recursos utilizados são motivadores?

5 4 3 2 1

14 - Você acha que estudar conceitos de matemática através de um OA online pode ajudar em sua aprendizagem?

5 4 3 2 1

15 - Você acha importante este tipo de aplicação para ensino de Pré-Cálculo, CDI ou outra disciplina?

5 4 3 2 1

Sugestões: Deixe suas sugestões, reclamações e elogios. Escreva o que você gostou e o que não gostou, contribuindo para o aprimoramento da ferramenta.

ANEXO A - Estrutura do OA com as 20 Questões e seus *Feedbacks*.

Link para acesso: <https://farma-calc.educacional.mat.br/published/los/>

Grupo 1: Estrato Numérico.

Questão 1. Adaptado Prova Brasil (2011)

Estrato da aritmética elementar: Avalia a habilidade de o aluno efetuar as quatro operações com números inteiros (adição, subtração, multiplicação, divisão).

Exercício: Calcular o valor da expressão:

$$-1 - (-5) \cdot (-3) + (-4)^3 : (-4)$$

Resposta:

- Correta
 - o Próxima Questão!!!
 - o **Material Complementar:**
- Erro
 - o Tentar novamente!!!
 - o **Feedbacks:**
 - Vídeo com explicação e exemplo: <https://youtu.be/w0gO7MjvhVs?t=664>
 - Exemplo resolvido:
 - Calcular o valor da expressão:
 - $(-3) \cdot 2 - (-4)^3 : (-6)$
 - $(-3) \cdot 2 - (-4)^3 : (-6)$ [regra de sinais no produto]
 - $-6 - (-12) : (-6)$ [regra de sinais na divisão]
 - $-6 - (+2)$ [regra de sinais no produto]
 - $-6 - 2 = -8$
 - o Resolução passo a passo:
 - Passo 1: calcular as operações que envolvem multiplicação:
 - $-1 - (-5) \cdot (-3) + (-4)^3 : (-4)$
 - o $(-5) \cdot (-3) = [\quad]$
 - Erro: No produto $(- \times -) = +$. R: 15
 - o $(-4) \cdot 3 = [\quad]$
 - Erro: No produto $(- \times +) = -$. R: -12
 - Passo 2: calcular a operação que envolve divisão:
 - $-1 - 15 + (-12) : (-4)$
 - o $(-12) : (-4) = [\quad]$
 - Erro: Na divisão $(- / -) = +$. R: 3
 - Passo 3: calcular as operações de adição e subtração:
 - $-1 - 15 + 3 = [\quad]$
 - o Erro: $-1 - 15 + 3 = -16 + 3 = -13$
 - o **Material Complementar:**
 - https://farma-calc.educacional.mat.br/ckeditor_assets/attachments/62ff8fb6c29ad9d81a000108/exercicio_1_-_apostila_de_pre-calculo_-_ufrg_-_2019.pdf?1660915638

Questão 2. Adaptado de Cuevas, Martínez e Pluvinage (2012)

Estrato da aritmética: Avalia a habilidade de o aluno efetuar operações que envolvam potenciação e radiciação com números inteiros, além das quatro operações elementares.

Exercício: Calcular o valor da expressão:

$$3(5 - 7)^3 + 3[2\sqrt{4 + 5} - 5\sqrt{6 - 2}]$$

Resposta:

- Correta
 - Próxima Questão!!!
 - **Material Complementar:**
- Erro
 - Tentar novamente!!!
 - Feedbacks:
 - Vídeo com explicação e exemplo: <https://youtu.be/lkHsra91HTE?t=1195>
 - Exemplo Resolvido:
 - $-4(-3 + 2)^2 + 5\sqrt{25 - 9}$
 - $-4(-3 + 2)^2 + 5\sqrt{25 - 9}$
 - $-4(-1)^2 + 5\sqrt{16}$
 - $-4.1 + 5.4$
 - $-4 + 20 = 16$
 - Resolução passo a passo:
 - Passo 1. calcular as expressões dentro dos parenteses:
 - $3(5 - 7)^3 + 3[2\sqrt{4 + 5} - 5\sqrt{6 - 2}]$
 - $3(-2)^3 + 3[2\sqrt{9} - 5\sqrt{4}]$
 - Passo 2. Calcule a potência e as raízes:
 - $(-2)^3 = [\quad]$.
 - Erro: Quando uma potência possui base negativa e expoente ímpar, o resultado é negativo. R: -8
 - $\sqrt{9}; \sqrt{4} = [\quad]; [\quad]$.
 - Erro: Quais são os números que elevados ao quadrado são 9 e 4, respectivamente. R: 3; 2
 - Passo 3. Use os resultados anteriores para calcular a expressão:
 - $3(5 - 7)^3 + 3[2\sqrt{4 + 5} - 5\sqrt{6 - 2}] = [\quad]$
 - Erro: fazendo as substituições corretamente, temos:
 - $3(-8) + 3[2.3 - 5.2] = 3(-8) + 3[-4] = -36$
 - **Material Complementar:**
 - https://farma-calc.educacional.mat.br/ckeditor_assets/attachments/63ee6700c720e7a1e30001fb/exercicio_2_-_apostila_de_matematica_basica_-_unemat.pdf?1676568320

Questão 3. Adaptado de Cuevas, Martínez e Pluvinage (2012) e Prova Brasil (2011)

Raciocínio aritmético: Avalia a habilidade de o aluno resolver problemas simples do cotidiano utilizando as quatro operações com números inteiros.

- O estudo das funções inicia-se no ensino fundamental, com o reconhecimento de regularidades numéricas ou geométricas, e amplia-se no ensino médio. A importância do estudo da função de primeiro grau está relacionada à necessidade de resolução de problemas simples do cotidiano.

Exercício: Um vendedor trabalha por comissão, recebendo 3 reais por item vendido. O vendedor trabalha de segunda a sexta-feira. Paga diariamente 20 reais para poder vender no mercado e 12 reais de transporte.

Quantos produtos ele deve vender em uma semana para que, subtraindo suas despesas, restem 70 reais para cada dia de trabalho?

Resposta:

- Correta
 - Próxima Questão!!!
 - **Material Complementar:**
- Erro
 - Tentar novamente!!!
 - **Feedbacks:**
 - Exemplo resolvido:
 - O custo de produção de uma pequena empresa é composto por um valor fixo de R\$ 1.500,00 mais R\$ 10,00 por peça fabricada. Qual o número de peças fabricadas quando o custo é de R\$ 3.200,00?
 - Resposta: O custo para se produzir as peças é $3200 - 1500 = 1700$. Logo $1700/10=170$. Assim, para produzir 170 peças o custo será de R\$ 3.200,00.
 - Obs: Tome cuidado com a interpretação do seu exercício.
 - Mudança de representação:
 - Transpor os dados numéricos apresentados em uma equação de 1º grau:
 - $y = ax + b$. onde $a = 3$ e $b = -(20 + 12)$
 - y e x representam o lucro e o número de itens.
 - Representação gráfica
 - <https://www.geogebra.org/m/BmZYb1cE>
 - Resolução passo a passo:
 - Qual o valor do item vendido: [] R: 3
 - Qual é o valor do custo diário: [] R: 32
 - Qual o valor recebido a cada dia de trabalho: [] R: 70
 - Sabe-se que ao fim de cada dia ele deve ter acumulado o valor do lucro + custo igual a: [] R: $70 + 32 = 102$
 - Para saber quantos itens devem ser vendidos por dia basta dividir o montante pelo número de itens, que é igual: []
 - R: $102 / 3 = 34$.

- Como a resposta deve ser a quantidade itens por semana, temos: R:
 $34 \times 5 = 170$.
- **Material Complementar:**
https://farmacalc.educacional.mat.br/ckeditor_assets/attachments/62ffd752c29ad9d81a00014c/exercicio_3_-_apostila_de_matematica_basica_-_unemat.pdf?1660933970

Questão 4. Adaptado de Prova Brasil (2011)

Estrato racional (fração e proporção): A habilidade de o aluno reconhecer frações em diversas representações como, por exemplo, partes de um inteiro; resolver problemas utilizando-se das cinco operações com números racionais; efetuar cálculos de expressões com diferentes representações dos números racionais e envolvendo as operações básicas do conjunto \mathbb{Q} .

Exercício: A estrada que liga Recife a Caruaru será recuperada em três etapas. Na primeira etapa, será recuperado $\frac{3}{8}$ da estrada e na segunda etapa $\frac{2}{5}$ da estrada.

Qual é a fração que corresponde à terceira etapa?

Resposta:

- Correta
 - Próxima Questão!!!
 - **Material Complementar:**
- Erro
 - Tentar novamente!!!
 - **Feedbacks:**
 - Vídeo com explicação sobre operações com frações: <https://youtu.be/WVdO2UJ3URl>
 - Exemplo Resolvido:
 - João comeu $\frac{1}{4}$ de uma pizza, Pedro comeu $\frac{1}{3}$. Quanto sobrou da pizza?
 - Vamos somar o que Pedro e João comeram.
 - Para somar as duas frações, precisamos encontrar um número que seja o menor múltiplo de 4 e 3 simultaneamente, que é o número 12.
 - $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 4} + \frac{4 \cdot 1}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{3+4}{12} = \frac{7}{12}$.
 - Para descobrir quanto sobrou da pizza basta subtrair esse valor do todo que é 1,
 - $1 - \frac{7}{12} = \frac{12}{12} - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$.
 - Resolução passo a passo:
 - Primeiro vamos somar as duas primeiras etapas da estrada já recuperadas: Para $\frac{3}{8}$ e $\frac{2}{5}$, qual o número que é o menor múltiplo de 8 e 5 simultaneamente: [] R: 40
 - Qual é a soma das frações $\frac{3}{8} + \frac{2}{5}$: [] R: $\frac{3}{8} + \frac{2}{5} = \frac{15}{40} + \frac{16}{40} = \frac{31}{40}$.
 - Para descobrir quanto sobrou da estrada basta subtrair esse valor do todo que é 1, e o resultado é: [] R: $1 - \frac{31}{40} = \frac{40}{40} - \frac{31}{40} = \frac{9}{40}$.
 - **Material Complementar:**
 - https://farma-calc.educacional.mat.br/ckeditor_assets/attachments/63004312c29ad9d81a00022e/exercicio_4_-_apostila_de_pre-calculo_-_ufrg_-_2019.pdf?1660961554

Questão 5. Adaptado se Saeb (2011)

Estrato racional (proporção): Avaliar a habilidade do aluno em resolver problemas que envolvam variação proporcional entre grandezas.

Exercício: Um pai vai repartir 180 reais entre seus dois filhos, diretamente proporcional à idade de cada um. O mais novo dos filhos tem 7 anos e o outro, 11 anos. Qual a quantia, em reais, que o filho mais velho receberá?

Resposta:

- Correta
 - o Próxima Questão!!!
 - o **Material Complementar:**
- Erro
 - o Tentar novamente!!!
 - o **Feedbacks:**
 - Vídeo com explicação e exemplo:
https://youtu.be/zsP5uDI5_g?t=1331
 - Exemplo resolvido:
 - Regra de três simples e grandezas diretamente proporcionais:
 - o Calcule $\frac{4}{5}$ de 120:
 - Sabe-se que $1 = \frac{5}{5}$, logo podemos dividir o todo (120) em 5 partes iguais: $\frac{120}{5} = 24$.
 - Agora basta multiplicar $24 * 4 = 96$.
 - o Resolução passo a passo:
 - Qual é a soma das idades: [] R: 18
 - Qual é a fração que representa a idade do filho mais velho: [] R: 11/18
 - Qual o valor em reais que o filho mais velho receberá: []
 - o R: Dividindo $\frac{\text{valor}}{\text{soma das idades}} = \frac{180}{18} = 10$. Agora, basta multiplicar 10 por 11 (idade do filho mais velho), $10 \cdot 11 = 110$.
 - o **Material Complementar:**
https://farma-calc.educacional.mat.br/ckeditor_assets/attachments/63f13f2cc720e7e41200010d/exercicio_5_-_apostila_de_pre-calculo_-_ufrg_-_2019.pdf?1676754732

Grupo 2. Estrato Algébrico

Questão 6. Adaptado de Saeb (2011) e Cuevas, Martínez e Pluvillage (2012)

Manipulação algébrica: Avaliar a habilidade de o aluno identificar a expressão algébrica que representa a função que rege os dados indicados em uma tabela dada.

Exercício: Uma empresa, em processo de reestruturação, propôs a seus funcionários, admitidos há pelo menos dois anos, uma indenização financeira para os que pedissem demissão, que variava em função do número de anos trabalhados. A tabela abaixo era utilizada para calcular o valor (i) da indenização, em função do tempo trabalhado (t).

Tempo trabalho (em anos)	Valor de Indenização (em reais)
1	450
2	950
3	1450
4	1950

Qual é a expressão que permite determinar o valor da indenização i para t anos trabalhados?

Resposta:

- Correta
 - o Próxima Questão!!!
 - o **Material Complementar:**
- Erro
 - o Tentar novamente!!!
 - o **Feedbacks:**
 - Exemplo resolvido:
 - A tabela abaixo corresponde a uma função linear.

F(x)	-5	-2	1	4		
x	-1	0	1	2		
 - Determine a expressão que representa $F(x)$.
 - Primeiramente vamos completar a tabela, afim de estabelecer

F(x)	-5	-2	1	4	7	10
x	-1	0	1	2	3	4

 um padrão que relacione x com $F(x)$:
 - Pode-se ver que a cada 1 unidade acrescida em x obten-se um acréscimo de 3 unidades em $F(x)$, ou seja,
 - o $F(x) = 3.x + b$ (equação linear).
 - Para encontrar o valor de b basta substituir uma das colunas da tabela na equação:
 - o Se $x = 0$ e $F(x) = -2$, então $-2 = 3.0 + b \rightarrow b = -2$
 - Logo, $F(x) = 3.x - 2$.
 - Representação Gráfica:
 - Link GeoGebra
 - o Resolução passo a passo:

- Passo 1. Qual é o valor acrescido à indenização por cada ano trabalhado? []
 - Erro: A diferença entre um ano para outro é $950 - 450 = 1450 - 950 = 1950 - 1450 = 500$. R: 500
- Passo 2. Assim, podemos dizer que a cada ano (t) a indenização (i) aumenta 500, ou seja, $i = 500.t + b$. Qual é o valor de b ? []
 - Erro: Seja $t = 1$ e $i = 450$, logo $450 = 500.1 + b \rightarrow b = -50$. R: - 50.
- Passo 3. Qual é a expressão que permite determinar o valor da indenização i para t anos trabalhados? []
 - Como $i = a.t + b$, temos que, $i = 500.t - 50$.
- **Material Complementar:**
https://farma-calc.educacional.mat.br/ckeditor_assets/attachments/63025aa4c29ad9d81a0002de/exercicio_6_-_apostila_de_pre-calculo_-_ufrg_-_2019.pdf?1661098660

Questão 7. Adaptado Saeb (2011)

Resolução de equações e/ou sistemas de equações: Avaliar a habilidade de o aluno construir a equação de uma reta a partir de dois de seus pontos ou então a partir de um ponto e de sua inclinação.

Exercício: Dados dois pontos (3, 5) e (4, -2) no plano cartesiano. Qual é a equação da reta que contém esses pontos?

Obs: Sua resposta de ser do tipo: $y = a * x + b$

Resposta:

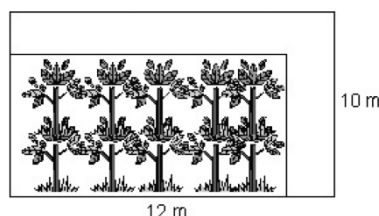
- Correta
 - o Próxima Questão!!!
 - o **Material Complementar:**
- Erro
 - o Tentar novamente!!!
 - o **Feedbacks:**
 - Exemplo resolvido por sistema linear:
 - Qual é a equação da reta que contém os pontos (2,0) e (0,-2).
 - o Resolução de um sistema de duas equações de primeiro grau ($y=ax+b$), a fim de determinar os valores dos coeficientes envolvidos nas equações:
 - Substituímos os valores das coordenadas na equação para descobrir os coeficientes a e b , assim:
 - $\begin{cases} 0 = a * 2 + b \\ -2 = a * 0 + b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ b = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$
 - Assim, $a = 1$ e $b = -2$, logo a equação da reta é dada por $y = x - 2$.
 - Vídeo sobre equação da reta e seus coeficientes:
 - <https://youtu.be/GHYSo8HObEE?t=48>
 - Visualização gráfica:
 - <https://www.geogebra.org/m/azxwbv2k>
 - o Resolução passo a passo:
 - Vamos resolver usando um sistema de duas equações de primeiro grau ($y=ax+b$), a fim de determinar os valores dos coeficientes envolvidos nas equações, pois desta forma não é necessário decorar fórmulas:
 - Passo 1. Seja $A = (3, 5)$ e $B = (4, -2)$, quais os valores para:
 - o $x_A = [\quad]$
 - o $y_A = [\quad]$
 - o $x_B = [\quad]$
 - o $y_B = [\quad]$
 - Passo 2. Substituindo os valores das coordenadas na equação $y=ax+b$, obtemos duas equações:
 - o Qual é a equação para o ponto A: $[\quad]$

- R: $5 = a \cdot 3 + b \rightarrow 3 \cdot a + b = 5$
 - Qual é a equação para o ponto B: [].
 - R: $-2 = a \cdot 4 + b \rightarrow 4 \cdot a + b = -2$
- Passo 3. Resolvendo o sistema sistema com as duas equações:
 - Qual é o valor de a: []
 - R: $\begin{cases} 3 \cdot a + b = 5 \\ 4 \cdot a + b = -2 \end{cases} \xrightarrow{L2-L1} \begin{cases} 3 \cdot a + b = 5 \\ a = -7 \end{cases} \rightarrow a = -7$
 - Qual é o valor de b: []
 - R: $\begin{cases} 3 \cdot a + b = 5 \\ a = -7 \end{cases} \rightarrow 3 \cdot (-7) + b = 5 \rightarrow -21 + b = 5$
 - $\rightarrow b = 5 + 21 = 26$
- Passo 4. Com os valores encontrados qual é a equação da reta que passa por A = (3, 5) e B = (4, -2): []
 - R: $y = -7 \cdot x + 26$
- **Material Complementar:**
 - https://farma-calc.educacional.mat.br/ckeditor_attachments/63f7c2bcc720e77d870002fe/exercicio_7_-_apostila_de_matematica_basica_-_unemat.pdf?1677181628

Questão 8. Adaptado de Saeb (2011) e Cuevas, Martínez e Pluvinage (2012).

Resolução de equações: Pretende-se avaliar a habilidade de o aluno resolver problemas em que seja necessário utilizar uma equação de 2º grau.

Exercício: Em um terreno retangular de 10 m x 12 m, deseja-se construir um jardim com 80 m² de área, deixando uma faixa para o caminho (sempre de mesma largura), como mostra a figura.



Qual é a largura (x) do caminho?

Resposta:

- Correta
 - Próxima Questão!!!
 - **Material Complementar:**
- Erro
 - Tentar novamente!!!
 - **Feedbacks:**
 - Vídeo sobre valor numérico de uma expressão:
 - <https://youtu.be/p90-fEdVF1Q>
 - Exemplo 1 Resolvido de equação do 2º grau:
 - Resolva a equação:

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$
 - Usando a fórmula de Baskara: $a = 2, b = -3$ e $c = -2$
 - $$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$
 - Logo, $x = \frac{3+5}{4} = 2$ ou $x = \frac{3-5}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$.
 - Exemplo 2: Exemplo 2: Uma senhora comprou uma quantidade de blusas e gastou R\$ 540,00. Contudo, observou que, se tivesse comprado três blusas a mais, pagaria R\$ 15,00 a menos por cada uma.
 - Quantas blusas esta senhora comprou?
 - Material sobre equações do 2º grau (GeoGebra).
 - <https://www.geogebra.org/m/vuf5gv6j>
 - Resolução Passo a Passo:
 - Passo 1. Vamos identificar a largura da faixa para o caminho como sendo um valor arbitrário " x ". Assim, a área do jardim é dada pela multiplicação dos lados do terreno, que tem formato de um retângulo, em que cada lado deve ser subtraído o valor " x ".

- Qual é a equação que representa a área do jardim com 80 m²:
[]
 - Erro: $\text{Área} = \text{Comprimento} \times \text{Largura}$
 - $\rightarrow 80 = (12 - x) \cdot (10 - x)$
 - $\rightarrow 80 = 120 - 12 \cdot x - 10 \cdot x + x^2$
 - $\rightarrow 80 = 120 - 22 \cdot x + x^2$
 - $\rightarrow 120 - 80 - 22 \cdot x + x^2 = 0$
 - $\rightarrow x^2 - 22 \cdot x + 40 = 0$
- Passo 2. Usando a fórmula de Baskara:
 - Quais são os valores de:
 - $a = [] R: 1,$
 - $b = [] R: -22,$
 - $c = [] R: 40$
- Passo 3. Substitua os valores de a, b e c, na fórmula e calcule os valores de x: [;]
 - Erro:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-22) \pm \sqrt{(-22)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40}}{2 \cdot 1} =$$

$$\frac{22 \pm \sqrt{484 - 160}}{2} = \frac{22 \pm \sqrt{324}}{2} = \frac{22 \pm 18}{2}$$
 - Logo, $x = \frac{22+18}{2} = 20$ ou $x = \frac{22-18}{2} = \frac{4}{2} = 2.$
- Passo 4. Qual é o valor de x que representa a largura do caminho de passeio: []
 - Erro: Observe que 20 m é maior que ambos os lados do terreno, logo a única solução possível é 2 m.
- **Material Complementar:**
https://farma-calc.educacional.mat.br/ckeditor_attachments/63fb6f53c720e7abc30002a6/exercicio_8_-_apostila-matematica-cefet-mg.pdf?1677422419

Questão 9. Adaptado de Cuevas, Martínez e Pluinage (2012)

Manipulação algébrica: avaliar a habilidade de o aluno efetuar cálculos de expressões algébricas em diferentes contextos, em particular resolver problemas em que seja necessário utilizar uma equação de 2º grau.

Exercício: Dada a equação abaixo, calcule o valor de n:

$$\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{4}$$

Resposta:

- Correta
 - Próxima Questão!!!
 - **Material Complementar:**
- Erro
 - Tentar novamente!!!
 - **Feedbacks:**
 - Exemplo resolvido:
 - Encontre o valor de x para a seguinte equação:
 - $\frac{2}{3} + \frac{2}{x} = 1$
 - $\frac{2x+3.2}{3x} = 1$
 - $2.x + 6 = 3.x$
 - $6 = 3.x - 2.x$
 - $x = 6$
 - Obs: Uma equação fracionária é toda equação que apresenta frações algébricas em cujo denominador aparecem as variáveis.
 - Equação do 2º grau é toda equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$.
 - Exemplo:
 - $x.(x - 2) = -1$
 - $x^2 - 2.x + 1 = 0$
 - $(x - 1).(x - 1) = 0$
 - $x - 1 = 0$
 - $x = 1$ (raiz única)
 - Vídeo sobre equações fracionarias:
 - <https://youtu.be/Po9BpJRyc4I?t=1433>
 - Material sobre equações do 2º grau (GeoGebra).
 - <https://www.geogebra.org/m/vuf5qv6j>
 - Resolução Passo a Passo:
 - Passo 1. Primeira mente some as frações do lado esquerdo da igualdade: $\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n} = [\quad]$
 - Obs: Resposta deve ser no formato (...)/(...).
 - Erro:

- $\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n} = \frac{(2n) - (2n-2)}{2n(2n-2)} = \frac{2}{2n(2n-2)} = (2)/(2n \cdot (2n - 2))$
- Passo 2. Qual é a equação gerada pela simplificação da equação $\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{4}$ []
 - Erro: usando a simplificação do passo 1 tem-se:
 - $\frac{2}{2n(2n-2)} = \frac{1}{4} \rightarrow 8 = 2n(2n - 2)$
 - $\rightarrow 8 = 4n^2 - 4n \rightarrow 4n^2 - 4n - 8 = 0$
 - Simplificando $n^2 - n - 2 = 0$.
- Passo 3. Quais são os valores de n para a equação obtida no passo 2: [;]
 - Erro: Use a formula de Baskara: $a = 1, b = -1 e c = -2$
 - $n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$.
 - Logo $n = \frac{1+3}{2} = 2$ ou $n = \frac{1-3}{2} = -1$.
- **Material Complementar:**
 - https://farma-calc.educacional.mat.br/ckeditor_assets/attachments/6302fc67c29ad9d81a000323/exercicio_9_-_apostila_de_matematica_basica_-_unemat.pdf?1661140070

Questão 10. Adaptado de Saeb (2011)

Resolução de Sistemas lineares: Pretende-se avaliar a habilidade de o aluno relacionar dois importantes conceitos matemáticos: a resolução de problemas que envolvam um sistema de equações com duas incógnitas e a determinação do ponto de interseção de duas retas.

Exercício: Qual é o ponto de interseção das retas com as seguintes equações:

$$x + 3y - 1 = 0 \text{ e } x - y + 3 = 0$$

Resposta:

- Correta
 - Próxima Questão!!!
 - **Material Complementar:**
- Erro
 - Tentar novamente!!!
 - **Feedbacks:**
 - Vídeo com exemplo similar:
 - <https://youtu.be/p8NaejEanKY?t=1855>
 - Vídeo sobre resolução de sistemas lineares 2x2 (Regra da Adição e Regra de Cramer):
 - <https://youtu.be/iQVL1r2y7Bk>
 - Representação Gráfica (GeoGebra):
 - <https://www.geogebra.org/m/ev4tmar8>
 - Resolução passo a passo:
 - Passo 1. Observe que o ponto de interseção pode ser encontrado por meio da solução de um sistema linear do tipo:
 - $$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$
 - Qual é a equação da 1ª linha do sistema: [] R: $x + 3y = 1$
 - Qual é a equação da 2ª linha do sistema: [] R: $x - y = -3$
 - Passo 2. Resolva o sistema linear e encontre:
 - O valor de y: []
 - R: $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ x - y = -3 \end{cases} \xrightarrow{L2-L1} \begin{cases} x + 3y = 1 \\ -4y = -4 \end{cases} \rightarrow y = 1$
 - O valor de x: []
 - R: $x + 3y = 1 \rightarrow x + 3 \cdot 1 = 1 \rightarrow x = 1 - 3 = -2$
 - Passo 3. Qual é o ponto de interseção das retas: [] R: (-2,1)
 - **Material Complementar:**
 - https://farma-calc.educacional.mat.br/ckeditor_assets/attachments/633dbbe2c29ad9d81a004a6/exercicio_10_-_apostila_de_matematica_basica_-_unemat.pdf?1664990178

Questões 11. Adaptado de Iezzi *et al.* (2013) e Rezende e Travassos (2017)

Inequações: Pretende-se avaliar a habilidade de o aluno identificar as expressões algébricas que representam o problema e fazer a mudança de representação adequada (Linguagem natural para algébrica), assim como a realização do tratamento (Cálculo numérico) para encontrar a solução de uma inequação.

Exercício: Para um atendimento domiciliar, um técnico em informática X cobra R\$ 60,00 a visita e R\$ 45,00 a hora de trabalho; um técnico Y cobra R\$ 40,00 a visita e R\$ 50,00 a hora de trabalho. A partir de quanto tempo de serviço é mais econômico contratar o técnico X?"

Observação: Sua resposta deve ser do tipo: $x > a$.

Resposta:

- Correta
 - Próxima Questão!!!
 - **Material Complementar:**
- Erro
 - Tentar novamente!!!
 - **Feedbacks:**
 - Vídeo sobre Mudança de representação (Linguagem natural para algébrica):
 - <https://youtu.be/NHea4TtPLfw?t=1074>
 - Exemplo sobre resolução de inequações:
 - Para que valores de x a inequação $2(4x-7) - 1 > x - 1$ é verdadeira?
 - $2(4x - 7) - 1 > x - 1$
 - $8x - 14 - 1 > x - 1$
 - $8x - 15 > x - 1$
 - $8x - x > 15 - 1$
 - $7x > 14$
 - $x > 2$
 - Resolução passo a passo:
 - Passo 1. Qual é a expressão algébrica que representa o técnico X:
[]
 - Erro: (custo var)X(horas trab) + (custo visita) = $45 \cdot x + 60$
 - Passo 2. Qual é a expressão algébrica que representa o técnico Y:
[]
 - Erro: (custo var)X(horas trab) + (custo visita) = $50 \cdot x + 40$
 - Passo 3. Usando as propriedades de desigualdade, Descubra a partir de quanto tempo de serviço é mais econômico contratar o técnico X:
[]
 - Erro:
 - $X < Y$
 - $45x + 60 < 50x + 40$
 - $45x - 50x < 40 - 60$
 - $-5x < -20$

- $-x < -4$
 - $x > 4$
- **Material Complementar:**
https://farma-calc.educacional.mat.br/ckeditor_assets/attachments/63fdee54c720e7abc3000453/exercicio_11_-_apostilamatematicabasica_-_utfpr.pdf?1677586004

Grupo 3. Estrato Funcional

Questão 12. Adaptado de Saeb (2011) e Carlson, Madison e West (2015)

Função Exponencial: Pretende-se avaliar a habilidade de o aluno compreender, representar e resolver problemas envolvendo uma função exponencial, aplicação muito comum no contexto de fenômenos químicos, biológicos, entre outros.

Exercício: Em uma pesquisa realizada, constatou-se que a população A de determinada bactéria cresce segundo a expressão $A(t) = 20 \cdot 2^t$, onde t representa o tempo em horas. Qual será o tempo necessário para atingir uma população de 1280 bactérias?

Resposta:

- Correta
 - Próxima Questão!!!
 - **Material Complementar:**
- Erro
 - Tentar novamente!!!
 - **Feedbacks:**
 - Exemplo Similar:
 - Qual o valor de t na função exponencial $y = 25 \cdot 2^t$, quando $y = 400$.
 - $y = 400 \rightarrow 400 = 25 \cdot 2^t$
 - $\frac{400}{25} = 2^t \rightarrow 16 = 2^t \rightarrow 2^4 = 2^t \rightarrow t = 4$.
 - Vídeo com propriedades e exemplos de funções exponenciais:
 - https://youtu.be/BmEhp_shn2s?t=710
 - Representação do problema em forma de uma Tabela:

t (horas)	A(t) (População)
0	20
1	40
2	80
3	160
4	320
5	640
⋮	⋮

- Resolução passo a passo:
 - Passo 1. Qual é a equação que representa o problema, considerando que o número de bactérias desejado é 1280: []
 - Erro: Observe que $A(t) = 1280$, logo temos $1280 = 20 \cdot 2^t$.
 - Passo 2. Simplificando a equação encontrada, qual é o valor de t : []
 - Erro: $1280 = 20 \cdot 2^t \rightarrow 64 = 2^t \rightarrow 2^6 = 2^t \rightarrow t = 6$.

- **Material Complementar:**

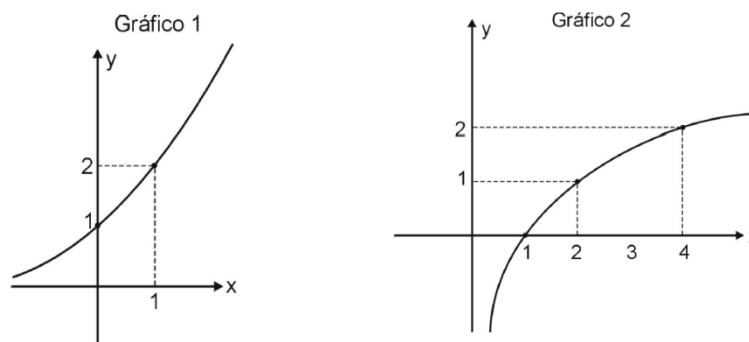
<https://farma->

[calc.educacional.mat.br/ckeditor_assets/attachments/6303b8c9c29ad9d81a00034a/exercicio_12_-_apostila_de_pre-calculo_-_ufrg_-_2019.pdf?1661188297](https://farma-calc.educacional.mat.br/ckeditor_assets/attachments/6303b8c9c29ad9d81a00034a/exercicio_12_-_apostila_de_pre-calculo_-_ufrg_-_2019.pdf?1661188297)

Questão 13. Adaptado Saeb (2011) e Carlson, Madison e West (2015)

Função Logarítmica: Pretende-se avaliar a habilidade de o aluno reconhecer a representação algébrica ou gráfica de uma função logarítmica e associá-la a uma função exponencial.

Exercício: Abaixo estão representados os gráficos de uma função exponencial e logarítmica.



Qual é o valor de y no gráfico 2, quando $x = 8$?

Resposta:

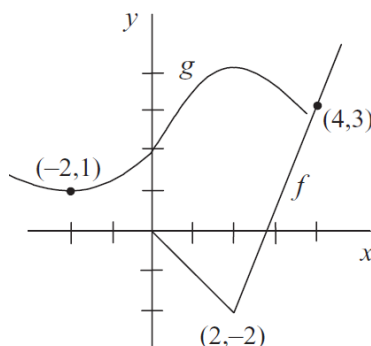
- Correta
 - Próxima Questão!!!
 - **Material Complementar:**
- Erro
 - Tentar novamente!!!
 - **Feedbacks:**
 - Representação gráfica das funções log e exponencial:
 - <https://www.geogebra.org/m/pXfHPKvH>
 - Vídeo sobre propriedades de logarítmico:
 - <https://youtu.be/XvClv-PVINI?t=383>
 - Exemplo: calcule o valor de t para $\log_3 81 = t$.
 - Sabe-se que:
 - $\log_a x = y \leftrightarrow x = a^y$
 - $\log_3 81 = t \leftrightarrow 81 = 3^t$
 - $81 = 3^4 \rightarrow 3^4 = 3^t \leftrightarrow t = 4$.
 - Resolução passo a passo:
 - Passo 1. Primeiro observe a relação de simetria entre os dois gráficos.
 - Qual é o valor de y no gráfico 2 quando $x = 1$ no gráfico 1? []
 - Erro: Os pontos (1,2) (graf 1) e (2,1) (graf 2) são simétricos, logo $x_1 = y_2 \rightarrow y_2 = 1$.
 - Qual é o ponto simétrico no gráfico 1 correspondente ao ponto (4,2) no gráfico 2? []
 - Erro: Por relação de simetria $x_1 = y_2$ e $x_2 = y_1$, logo o ponto no gráfico 1 é (2,4).
 - Passo 2. Observando a relação de simetria entre os gráficos. Qual é o valor de a na função exponencial $y = a^x$ que representa o gráfico 1? []

- Erro: Observe que,
 - $x = 0 \rightarrow y = 1 = 2^0$
 - $x = 1 \rightarrow y = 2 = 2^1$
 - $x = 2 \rightarrow y = 4 = 2^2$
- O que significa que a base a é igual a 2.
- Passo 3. Usando a relação de equivalência $\log_a x = y \leftrightarrow x = a^y$. Qual é o valor de y no gráfico 2, quando $x = 8$? []
 - Erro: Usando a relação de simetria:
 - $\log_2 8 = y \leftrightarrow 8 = 2^y \rightarrow 2^3 = 2^y \rightarrow y = 3$.
- **Material Complementar:**
https://farma-calc.educacional.mat.br/ckeditor_assets/attachments/63feab9cc720e7abc30005bb/exercicio_13_-_apostila_de_pre-calculo_-_ufrg_-_exp_e_log.pdf?1677634460

Questão 14. Adaptado de Carlson, Oehrtman e Engelke (2010) e Carlson, Madison e West (2015)

Função composta: Pretende-se avaliar a habilidade de o aluno reconhecer a representação gráfica de duas funções e reconhecer a necessidade de compor duas funções para obter uma nova função.

Exercício: Use os gráficos de f e g para calcular $g(f(2))$.



Resposta:

- Correta
 - Próxima Questão!!!
 - **Material Complementar:**
- Erro
 - Tentar novamente!!!
 - **Feedbacks:**
 - Exemplo Resolvido:
 - Determine o gof e o fog das funções $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = x^2$.
 - $(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 3$
 - $(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = (2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$
 - Representação Gráfica (explore as características de uma função composta no GeoGebra):
 - <https://www.geogebra.org/m/np5scdwj>
 - Vídeo com definição e exemplos:
 - <https://youtu.be/e4rOd9YfDms>
 - Resolução passo a Passo:
 - Passo 1. Qual é o valor da imagem de f no ponto $(2, -2)$? []
 - Erro: A imagem de uma função em um ponto (x, y) é representada pela segunda coordenada, isto é, $y = -2$.
 - Passo 2. Qual é o valor do domínio de g no ponto $(-2, 1)$? []
 - Erro: O domínio de uma função em um ponto (x, y) é representada pela primeira coordenada, isto é, $x = -2$.
 - Passo 3. Use a definição de função composta para encontrar $g(f(2))$: []
 - Erro: $g(f(2)) = g(-2) = 1$.

- **Material Complementar:**

https://farmacalculacional.mat.br/ckeditor_assets/attachments/6303c569c29ad9d81a000376/exercicio_14_-_bases_matematicas_-_ufabc.pdf?1661191529

Questão 15. Adaptado de Cuevas, Martínez e Pluinage (2012)

Reconhecimento de parâmetros: Pretende-se avaliar a habilidade de que o aluno reconheça variáveis e parâmetros em funções reais, e use corretamente os processos de manipulação algébrica na busca de solução do problema.

Exercício: Seja $f(x)=x^2+2x$ uma função dada e $g(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, onde h é uma constante. Simplifique $g(x)$ de forma que possa ser calculado $g(3)$ quando $h=0$.

Resposta:

- Correta
 - o Próxima Questão!!!
 - o **Material Complementar:**
- Erro
 - o Tentar novamente!!!
 - o **Feedbacks:**
 - Exemplo resolvido:
 - Calcule o valor de $f(x+3)$ para $f(x) = x^2 - 5$:
 - o $f(x + 3) = (x + 3)^2 - 5$
 - o $f(x + 3) = (x + 3)^2 - 5$
 - o $f(x + 3) = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 9 - 5$
 - o $f(x + 3) = x^2 + 6 \cdot x + 4$
 - Vídeo sobre divisão de polinômio por monômio:
 - <https://youtu.be/UBH613mUwt4?t=758>
 - o Resolução Passo a Passo:
 - Passo 1. Calcule o valor de $f(x+h)$: []
 - Erro: Se $f(x) = x^2 + 2x$, podemos substituir x por $x+h$ obtendo:
 - o $f(x + h) = (x + h)^2 + 2 \cdot (x + h)$
 - o $f(x + h) = (x^2 + 2 \cdot x \cdot h + h^2) + 2 \cdot x + 2 \cdot h$
 - o $f(x + h) = x^2 + 2 \cdot x \cdot h + h^2 + 2 \cdot x + 2 \cdot h$
 - Passo 2. Calcule $f(x+h) - f(x)$: []
 - Erro: Os termos em comum devem ser subtraídos:
 - o $f(x + h) - f(x)$
 - o $= (x^2 + 2 \cdot x \cdot h + h^2 + 2 \cdot x + 2 \cdot h) - (x^2 + 2 \cdot x)$
 - o $= 2 \cdot x \cdot h + 2 \cdot h + h^2$
 - Passo 3. Lembrando que não pode-se fazer divisão por zero. Qual é a expressão simplificada de $g(x)$: []
 - Erro: Usando a divisão de polinômio por um monômio, tense:
 - o $g(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2 \cdot x \cdot h + 2 \cdot h + h^2}{h} = 2 \cdot x + 2 + h$
 - Passo 4: Qual é o valor de $g(3)$ quando $h=0$: []
 - Erro: Substituindo $x = 3$ e $h = 0$, temos: $g(3)=8$.
 - o **Material Complementar:**

https://farmacal.educacional.mat.br/ckeditor_assets/attachments/63ff90dcc720e7abc3000665/exercicio_15_-_bases_matematicas_-_ufabc.pdf?1677693148

Questão 16. Adaptado de Cuevas, Martínez e Pluinage (2012) e Carlson, Madison e West (2015)

Função racional: Pretende-se avaliar o raciocínio covariacional dos alunos, ou seja, a habilidade de pensar sobre como os valores da saída de $f(x)$ mudam enquanto observa as mudanças ocorridas em x .

Exercício: Observe o comportamento da função racional:

$$P(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$$

Determine para qual valor $P(x)$ está se aproximando, quando os valores de x se aproximam de 2 no domínio de f . Se necessário simplifique a função.

Resposta:

– Correta

○ Próxima Questão!!!

○ **Material Complementar:**

– Erro

○ Tentar novamente!!!

▪ Você pode ter chegado em uma indeterminação 0/0. Simplifique a expressão e tente novamente.

○ **Feedbacks:**

▪ Representação por uma tabela:

• Observe o comportamento de:

○ $P(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$, quando $x \rightarrow 2$.

x	P(x)
0	-0,667
1	-1,500
1,5	-2,333
1,9	-3,545
1,99	-3,950
1,999	-3,995
⋮	⋮

▪ Exemplo resolvido de simplificação de função racional:

• Simplifique a expressão $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$:

$$\circ \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1) \cdot (x + 1)}{x - 1} = x + 1$$

▪ Vídeo explicativo sobre produtos notáveis:

• https://youtu.be/iD_SQbQS4Lk

○ Resolução passo a passo:

▪ Passo1. Vamos simplificar separadamente o numerador do denominador:

• Qual é a representação de $x^2 - 4$ na forma de produto notável:

[]

- Erro: Use a igualdade $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$:
 - $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2) \cdot (x + 2)$
- Qual é a representação de $x^2 - 5x + 6$ como produto de suas raízes: []
 - Erro: Use a forma fatorada, onde (α) e (β) são raízes da equação:
 - $ax^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x - \alpha) \cdot (x - \beta)$
 - $x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$
- Vídeo complementar sobre raízes de uma equação do 2º grau (soma e produto e fatoração):
 - https://youtu.be/WM7whUDd_Rc
- Passo 2: Use o passo anterior para encontrar a expressão resultante da simplificação de $\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$: [] R: (...)/(...)
 - Erro:
 - $\frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{(x-2) \cdot (x-3)} = \frac{(x+2)}{(x-3)}$
- Passo 3: Qual deve ser o valor de P(x) quando x assume valores próximos de 2: []
 - Erro: Usando o passo 2. Podemos observar que podemos usar $P(x) = \frac{(x+2)}{(x-3)}$, onde $x \neq 2$, para calcular o valor aproximado P(x) quando x se aproxima de 2.
 - $\frac{(x+2)}{(x-3)} = \frac{(2+2)}{(2-3)} = \frac{(4)}{(-1)} = -4$.
- **Material Complementar:**
 - https://farma-calc.educacional.mat.br/ckeditor_attachments/6400a225c720e7abc3000869/exercicio_16_-_p_calculo_revisao_2009_uff.pdf?1677763109

Questão 17. Adaptado de Carlson, Oehrtman e Engelke (2010) e Carlson, Madison e West (2015)

Taxa de variação: Pretende-se avaliar o raciocínio covariacional durante o processo mental de relacionar duas quantidades variáveis requer que os alunos pensem sobre como as duas quantidades que estão variando juntas.

Exercício: A distância S (em metros) de um carro movendo-se em linha reta é dada por $S = t^2 + t$, onde t é medido em segundos. Encontre a taxa média de variação (velocidade) para o período de tempo de $t = 1$ a $t = 4$.

Resposta:

- Correta
 - o Próxima Questão!!!
 - o **Material Complementar:**
- Erro
 - o Tentar novamente!!!
 - o **Feedbacks:**
 - Representação com um exemplo gráfico (GeoGebra):
 - <https://www.geogebra.org/m/c8urkxg3>
 - Vídeo sobre taxa de variação média (velocidade):
 - <https://youtu.be/tHO8SubqgM0>
 - o Resolução Passo a Passo:
 - Passo 1. Qual é a variação do tempo t : []
 - Erro: Observe que a variação do tempo é a diferença entre o tempo final e o tempo inicial.
 - o $\Delta t = t_f - t_i = 4 - 1 = 3$
 - Passo 2. Qual é a variação da distância S : []
 - Erro: Observe que a variação da distância S é a diferença entre o $S(t_f)$ e $S(t_i)$.
 - o $\Delta S = S(t_f) - S(t_i) = S(4) - S(1) =$
 - o $= (4^2 + 4) - (1^2 + 1) = 20 - 2 = 18$
 - Passo 3. Qual é a taxa média de variação (velocidade) para o período de tempo de $t = 1$ a $t = 4$. []
 - Erro: Usando a definição de velocidade média, temos:
 - o $\Delta V = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{18}{3} = 6$
 - o **Material Complementar:**
 - https://farma-calc.educacional.mat.br/ckeditor_assets/attachments/6400f235c720e7abc3000a49/exercicio_17_-_apostila_de_pre-calculo_-_ufrg_-_2019.pdf?1677783605

Questão 18. Adaptado de Carlson, Oehrtman e Engelke (2010) e Carlson, Madison e West (2015)

Composição de função e inversa: Avaliar a habilidade de o aluno interpretar a frase “definir a área, A , de um círculo em função do comprimento, c , de sua circunferência” como um comando para construir uma fórmula (A5). Capacidade de identificar as variáveis a serem relacionadas (U1) em uma situação problema.

Exercício: Defina uma fórmula que represente a área, A , de um círculo em função do comprimento, c , de sua circunferência. A seguir calcule a área de um círculo que possui comprimento $c = 31,4$ cm.

Resposta:

- Correta
 - Próxima Questão!!!
 - **Material Complementar:**
- Erro
 - Tentar novamente!!!
 - **Feedbacks:**
 - Vídeos sobre círculo e circunferência:
 - Área de um círculo:
 - https://youtu.be/PpaZvso_au8?t=48
 - Comprimento de uma circunferência:
 - <https://youtu.be/jymkRQuesno?t=1498>
 - Exemplo de Composição de funções com função inversa:
 - Seja $y = t^2$ e $x = 3t + 4$. Qual é a função que expressa y como função de x :
 - Observe que t é a variável comum nas duas funções, logo podemos inverter a função x , isto é:
 - $x = 3t + 4 \rightarrow t = \frac{x-4}{3}$
 - Agora substituímos o t encontrado na função y .
 - $y = t^2 = \left(\frac{x-4}{3}\right)^2 = \frac{x^2-8.x+16}{3}$
 - $y(x) = \frac{x^2-8.x+16}{3}$
 - Resolução Passo a Passo:
 - Passo 1. Qual é a fórmula da área do círculo: []
 - Erro: $A = \pi.r^2$
 - Passo 2. Qual é a fórmula do comprimento da circunferência: []
 - Erro: $c = 2.\pi.r$
 - Passo 3. Qual é a fórmula inversa do comprimento da circunferência em termos de r : [] R: (...)/(...)
 - Erro: $r = c/(2.\pi)$
 - Passo 4. Qual é a fórmula que represente a área, A , de um círculo em função do comprimento, c , de sua circunferência: [] R: (...)/(...)
 - Erro: Sabendo que $r = c/(2.\pi)$, podemos substituir r na fórmula da área:

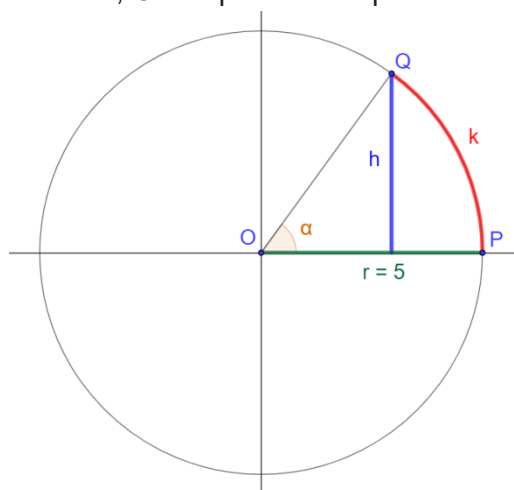
- $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{c}{2\pi}\right)^2 = \frac{(c^2)}{(4\pi)}$
- Passo 5. Qual é o valor da área de um círculo que possui comprimento $c = 31,4$ cm. []
 - Erro: Para encontrar o valor da área basta substituir $c = 31,4$ na fórmula:
 - $A(c) = \frac{(c^2)}{(4\pi)} \rightarrow A(31,4) = \frac{31,4^2}{4\pi} = \frac{3,14^2 \cdot 10^2}{4 \cdot 3,14} = 3,14 \cdot 25 = 78,5$
- **Material Complementar:**
https://farma-calc.educacional.mat.br/ckeditor_assets/attachments/640220f8c720e7abc3000bb7/exercicio_18_-_bases_matematicas_-_ufabc.pdf?1677861112

Questão 19. Adaptado de Carlson, Oehrtman e Engelke (2010) e Carlson, Madison e West (2015)

Funções trigonométricas: Avaliar se os alunos desenvolveram conceitos robustos de função (R2), medida de ângulo (T1), radiano como unidade (T2) e função seno (T3).

- Serem capazes de relacionar duas variáveis que estão mudando juntas (medida de ângulo e distância) (R3).
- Tenham a concepção de que a função seno está representando a covariação de uma medida de ângulo e a distância de um ponto no círculo unitário (T3, R3).
- Determinar a função que expressa h em termos de k também requer que os alunos conceituem uma medida de ângulo em relação ao comprimento de arco.
- Responder a esta questão requer que os alunos entendam as ideias de medida de ângulo, radianos e função seno. Eles também devem raciocinar sobre as variáveis, sua variação e covariação (como os valores de k e d , mudam em conjunto).

Exercício: Começando em P e terminando em Q , um objeto viaja no sentido anti-horário k (comprimento do arco \widehat{PQ}) ao longo de um círculo com raio 5 cm. Se h representa a altura de Q em relação ao eixo horizontal, Como pode ser expresso h como uma função de k ?



Resposta:

- Correta
 - Próxima Questão!!!
 - **Material Complementar:**
- Erro
 - Tentar novamente!!!
 - **Feedbacks:**
 - Representação Gráfica:
 - <https://www.geogebra.org/m/zEpUdwCJ>
 - Vídeos sobre a trigonometria envolvido no problema:
 - Comprimento de arco:
 - https://youtu.be/VfXQHwv_Rjc?t=348
 - Função seno no círculo unitário:
 - <https://youtu.be/PLSwurB7NYo>
 - Exemplo Resolvido:

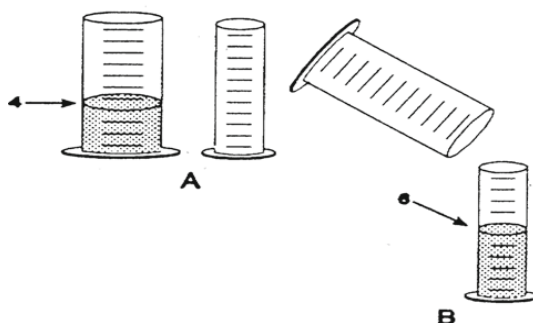
- Calcule o comprimento do arco (c) de um ângulo de 220° em uma circunferência de raio 5 cm. ($\pi=3,14$)
 - Sabemos que:
 - $360^\circ \rightarrow 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3,14 \cdot 5 = 31,4$
 - $220^\circ \rightarrow c$
 - Por regra de três:
 - $360 \cdot c = 220 \cdot 31,4$
 - $c = \frac{220 \cdot 31,4}{360} = \frac{11 \cdot 31,4}{18} = 19,18 \text{ cm}$
- Resolução Passo a Passo:
 - Passo 1. Qual é a expressão que representa $\text{sen}(\alpha)$ no triângulo retângulo: []
 - Erro: Por definição $\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cat.oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{h}{5}$
 - Passo 2. Qual é a expressão que representa o comprimento de arco k em função do ângulo α : []
 - Erro. Por definição de comprimento de arco:
 - $\text{comp. arc} = \text{raio} \cdot \hat{\text{ângulo}} \rightarrow k = 5 \cdot \alpha$
 - Passo 3. Qual é a expressão que representa α em função de k (inversa): []
 - Erro: Como $k = 5 \cdot \alpha$, logo $\alpha = \frac{k}{5}$.
 - Passo 4. Usando os passos anteriores. Qual é a expressão que representa h como uma função de k : []
 - Sabemos que $\text{sen}(\alpha) = \frac{h}{5}$ e $\alpha = \frac{k}{5}$, fazendo a substituição de $\alpha = \frac{k}{5}$ na primeira expressão obtemos:
 - $\text{sen}\left(\frac{k}{5}\right) = \frac{h}{5} \rightarrow h = 5 \cdot \text{sen}\left(\frac{k}{5}\right)$.
- **Material Complementar:**

https://farma-calc.educacional.mat.br/ckeditor/assets/attachments/640246c0c720e7abc3000e09/exercicio_19_-_apostila_de_pre-calculo_-_ufrg_-_2019.pdf?1677870784

Questão 20. Adaptado de Carlson, Madison e West (2015).

Raciocínio proporcional: Avaliar a habilidade de o aluno estabelecer relações proporcionais (raciocínio proporcional) entre duas variáveis. O uso do raciocínio proporcional demonstra compreensão da ideia de taxa constante de variação.

Exercício: Abaixo estão os desenhos de um cilindro largo e um estreito. Os cilindros têm marcas igualmente espaçadas neles. A água é despejada no cilindro largo até a 4ª marca (ver A). Esta água sobe para a 6ª marca quando derramado no cilindro estreito (ver B).



Ambos os cilindros são esvaziados e a água é despejada no cilindro estreito até a 11ª marca. Quão alto essa água subiria se fosse derramada no cilindro largo e vazio?

Resposta:

- Correta
 - Próxima Questão!!!
 - **Material Complementar:**
- Erro
 - Tentar novamente!!!
 - **Feedbacks:**
 - Vídeo sobre grandezas proporcionais:
 - https://youtu.be/Utg_UdlvMUc
 - Aplicação Geométrica de proporcionalidade:
 - <https://www.geogebra.org/m/cqgzp7uu>
 - Exemplo Resolvido:
 - Sejam duas circunferências c_1 e c_2 , com raios $r_1 = 3$ e $r_2 = 4$, respectivamente. Observe que a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro é a mesma para c_1 e c_2 .
 - Sabe-se $comp_{circ} = 2 \cdot \pi \cdot r$ e $diam_{circ} = 2 \cdot r$:
 - $comp_{c_1} = 2 \cdot \pi \cdot 3 = 6 \cdot \pi$ e $diam_{c_1} = 2 \cdot 3 = 6$;
 - $comp_{c_2} = 2 \cdot \pi \cdot 4 = 8 \cdot \pi$ e $diam_{c_2} = 2 \cdot 4 = 8$;
 - Logo,
 - $\frac{comp_{c_1}}{diam_{c_1}} = \frac{6 \cdot \pi}{6} = \pi$;
 - $\frac{comp_{c_2}}{diam_{c_2}} = \frac{8 \cdot \pi}{8} = \pi$

- Resolução passo a passo:
 - Passo 1. Represente as fórmulas para o volume dos dois cilindros:
 - $Vol_{largo} = [\quad]$
 - Erro: $V_l = \pi \cdot R^2 \cdot h = \pi \cdot R^2 \cdot 4$
 - $Vol_{fino} = [\quad]$
 - Erro: $V_f = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot 6$
 - Passo 2. Descubra qual é a razão entre o raio menor e o raio maior dos dois cilindros:
 - Sabemos que $V_l = V_f$, logo:
 - $V_l = V_f$
 - $\pi \cdot R^2 \cdot 4 = \pi \cdot r^2 \cdot 6$
 - $R^2 \cdot \frac{4}{6} = r^2$
 - $r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R \Rightarrow Razão = \sqrt{\frac{2}{3}}$
 - Passo 3. Se a água é despejada no cilindro estreito até a 11ª marca. Qual seria a altura h da água se fosse derramada no cilindro largo e vazio?
 - Sabemos que $V_l = V_f$:
 - $V_l = V_f$
 - $\pi \cdot R^2 \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot 11$, onde $r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R$.
 - $\pi \cdot R^2 \cdot h = \pi \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R \right)^2 \cdot 11$
 - $\pi \cdot R^2 \cdot h = \pi \cdot \frac{2}{3} R^2 \cdot 11$
 - $h = \frac{2}{3} \cdot 11 = \frac{22}{3}$
- **Material Complementar:**
 - https://farma-calc.educacional.mat.br/ckeditor_assets/attachments/6402bc47c720e7abc3000f43/exercicio_20_-_apostila_de_matematica_basica_-_unemat.pdf?1677900871