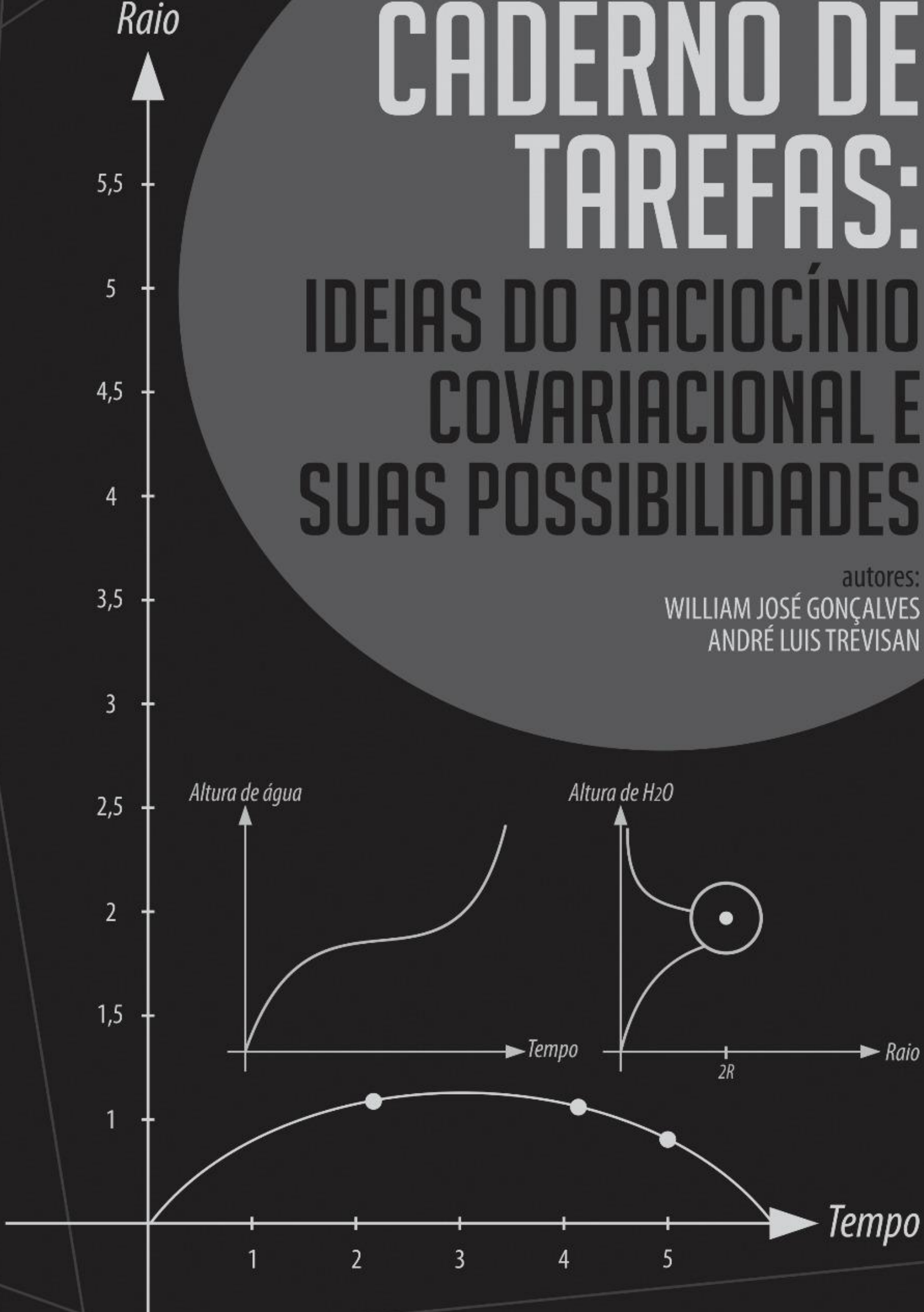
CADERNO DE TAREFAS:

IDEIAS DO RACIOCÍNIO COVARIACIONAL E SUAS POSSIBILIDADES

autores:
WILLIAM JOSÉ GONÇALVES
ANDRÉ LUIS TREVISAN



PPGMAT
UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA - PPGMAT
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

WILLIAM JOSÉ GONÇALVES

CADERNO DE TAREFAS: IDEIAS DO RACIOCÍNIO COVARIACIONAL E SUAS POSSIBILIDADES

Produto Educacional apresentado como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. André Luis Trevisan

LONDRINA
2018

SUMÁRIO

Caro(a) colega professor(a)

Este material é fruto de uma dissertação intitulada RACIOCÍNIO COVARIACIONAL EM AULAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: POSSIBILIDADES DE DESENVOLVIMENTO A PARTIR DO USO DE TAREFAS, do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PPGMAT) da Univerdidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Londrina/Cornélio Procópio. Pesquisa desenvolvida em uma turma de Engenharia de Materiais (período integral) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) Câmpus Londrina, ingressantes no curso no 2º semestre de 2017 e matriculados na disciplina de CDI 1 (1º semestre), cujo professor responsável foi o orientador deste trabalho. Em alguns momentos (que caracterizaram o Estágio de Docência do curso de mestrado (PPGMAT)), estivemos responsável pela condução do trabalho em sala de aula; em outros, acompanhamos a condução realizada pelo orientador do trabalho (enquanto professor regente das turmas).

Durante o processo, aplicamos um conjunto de tarefas como parte da pesquisa e realizamos as análises dos dados obtidos a partir da produção escrita e do áudio dos grupos enquanto trabalhavam com as tarefas, bem como das anotações feitas pelo pesquisador em seu diário de campo. Após a pesquisa, organizamos seis tarefas que, juntas, compõem este caderno. Reformulações e aprimoramentos que julgamos importantes foram realizados nas situações propostas ao longo de todo o desenvolvimento da pesquisa, e também ao final dela.

Neste caderno, inicialmente, apresentamos o motivo maior que nos moveu a pesquisar o tema em tela, logo após apresentamos o conceito atual que se tem de funções e a seguir o conceito de Raciocínio Covariacional. Por fim trazemos as tarefas propostas sendo que em cada uma delas fazemos alguns apontamentos bem como sugestões para sua utilização em sala de aula. É importante ressaltar que, em cada tarefa, faremos alguns apontamentos a título de sugestões que podem vir a serem utilizadas durante a aplicação em sala de aula.

Desde já, esperamos que este material possa, de alguma forma, contribuir para a prática docente e, quem sabe, despertar nos estudantes o interesse pelo pensamento covariacional.

Somos gratos.
William José Gonçalves
André Luis Trevisan

1 REFLEXIONANDO: MODELO TRADICIONAL DE ENSINO E A ABORDAGEM USUAL AO DERREDOR DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Se observarmos o contato que os estudantes tiveram com conceitos matemáticos, em especial o de função, nos anos que antecedem o ingresso nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI)[1], observamos que as ideias vistas até então não guardam relação com o desenvolvimento dos cenários e ideias que serão apresentadas no curso de CDI. Nessa mesma linha, Bonomi (1999, p.5) apresenta que, “para a maioria dos alunos, o conhecimento matemático, desenvolvido anteriormente, na escola secundária [ensino médio], pouco ou nada tem a ver com o que lhe é apresentado no curso de Cálculo”.

Outrossim, Barufi (2002, p. 69) destaca:

> [...] para a maioria dos alunos a Matemática da Escola no Ensino Médio pouco ou nada tem a ver com o que lhes é apresentado no Cálculo, e o caráter de análise com o qual passa a se defrontar parece se constituir em grande dificuldade.

Além disso, o modo como lhes são apresentados os conceitos, por meio de definições, seguidas de exemplos e resolução de “exercícios modelo”, contribui muitas vezes para que essa dificuldade na compreensão seja potencializada. Nesse sentido, podemos mencionar que os autores Trevisan e Mendes (2017, p. 4) destacam da fala de Freudenthal (1973) “que o CDI não seja tratado com um amontoado de definições que estão acima de qualquer suspeita”.

Podemos trazer, por exemplo, a seguinte ideia apresentada por Trevisan e Mendes (2013, p. 137) :

> Novos pontos de vista a respeito da disciplina de CDI pedem por tarefas que favoreçam ao estudante o desenvolvimento de competências de conexão e reflexão, para além da mera reprodução e memorização. Tais tarefas devem ter como pressuposto o fato de que o conhecimento matemático mostra-se dinâmico e construído a partir das relações, justificativas, análise e validações estabelecidas pelos envolvidos e não como algo pronto e acabado. Aos estudantes devem ser incentivados a justificarem seus pensamentos por meio da exploração de situações, questionamentos e conjecturas.

De modo geral, transitamos por um conceito “formal” de função (que, em pouco – ou nada, “carrega” a essência desse conceito: o aspecto covariacional das grandezas envolvidas). Podemos questionar então se a definição proposta pelos materiais didáticos é adequada? Os livros tendem, quase todos, a abordar o conceito de função da mesma forma: iniciam com relações e relações binárias, após isso, diagramas de flechas e então

[1] Neste trabalho utilizamos a sigla CDI quando nos referimos ao Cálculo Diferencial e Integral enquanto área da matemática e CDI 1 para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral que, em nosso contexto de pesquisa, contém sua ementa o estudo de funções de uma variável real e seus limites, derivadas e integrais.

classificação de relações em funções ou não, nesse momento já “impondo” as condições a serem atendidas para receber a denominação como tal. Comumente caímos naquele exemplo clássico do táxi que cobra uma taxa fixa denominada bandeira e um valor em reais por quilômetro rodado (O que chega a ser uma ironia em tempos de Uber!).

Uma função relaciona-se a um conceito matemático que descreve como duas ou mais quantidades variam uma em relação à outra (e é essa a ideia que pretendemos enfatizar neste trabalho). Tal relação pode ser descrita por palavras, símbolos matemáticos e representações, como gráficos ou tabelas. Smith (2008, *apud* MESTRE, 2014, p. 71) refere-se

> ao pensamento funcional como o pensamento representacional que se foca nas relações entre duas (ou mais) quantidades que variam, e mais especificamente, como o tipo de pensamento que conduz das relações específicas para a generalização dessas relações.

2 CONCEITO DE FUNÇÃO

Apresentamos aqui algumas reflexões em torno do conceito de função, em especial aspectos históricos, que nos permitem compreender o modo como esse conceito está presente no ensino de CDI. Buscamos enfatizar a ideia subjacente a tal conceito, ou seja, compreender como duas ou mais quantidades variam uma em relação à outra, tendo como pano de fundo o Raciocínio Covariacional (RC)[2].

Função é um conceito importante e unificador para a matemática contemporânea, central em várias áreas, e essencial para que qualquer aluno compreenda o CDI. Carlson (1998) menciona a presença do objeto matemático “função” tanto nessa disciplina quanto em outras, para determinar, por exemplo, na área de Análise, para determinar se dois conjuntos têm a mesma cardinalidade ou se dois espaços topológicos são homeomorfos, bem como enquanto elementos de estruturas matemáticas (espaços vetoriais, anéis, grupos). Além disso, são utilizadas em diversas ciências para modelar fenômenos.

Atualmente define-se função como um tipo particular de correspondência entre duas quantidades. Vale ressaltar que não temos a intenção neste momento de observar a evolução e/ou alteração em torno da definição de funções.

Historicamente, uma primeira definição mais sistematizada de funções é proposta por Bernoulli em 1718, como apresentado por Ponte (1990, p. 3): “uma quantidade que é composta de qualquer forma dessa variável e constante (?)”. Mais tarde, é reformulada

[2] Chamaremos Raciocínio Covariacional de RC.

por Euler que troca o termo “quantidade” por “expressão analítica”. Tal definição vigorou entre os séculos XVIII e XIX, sendo novamente reformulada por Dirichlet, com base na ideia de correspondência entre conjuntos. Já no século XX, é estendida para incluir tudo que seja correspondência arbitrária entre quaisquer conjuntos numéricos ou não. Do exposto, podemos dizer que o conceito passou pelas seguintes ideias, nesta ordem: quantidade → correspondência → relação.

Segundo Vallejo e Gómez (2014, p.10, tradução nossa):

> a análise da evolução do conceito histórico de função nos mostra que este é muito complexo e, para alcançar a definição atual, teve que passar por um longo e laborioso processo no que matemáticos notáveis tiveram sérias dificuldades e problemas. [...] a definição de função, na sua forma atual, é um objeto muito sofisticado, consequência de numerosas generalizações feitas através de uma evolução de mais de 2000 anos, e, ainda mais, considera-se que este conceito continua em evolução.

Oehrtman, Carlson e Thompson (2008) evidenciam que o uso da definição atual como introdução ao conceito de função no âmbito escolar é inadequado, pois trata-se de uma resposta a problemas que os estudantes sequer podem conceber, uma vez que foi motivada largamente por debates entre matemáticos na busca de respostas a questões internas da própria Matemática.

Nessa linha, Oehrtman, Carlson e Thompson (2008, p. 153, tradução nossa) fazem a seguinte recomendação:

> [...] que os currículos escolares e o ensino incluam um foco maior na compreensão de ideias de covariação e múltiplas representações de covariação (por exemplo, usando sistemas de coordenadas diferentes), e que sejam oferecidas mais oportunidades para estudantes experimentarem diversos tipos de funções enfatizando múltiplas representações das mesmas funções. Os currículos da faculdade poderiam então se basear nessa base. Isso seria promover uma visão mais flexível e robusta das funções - uma que não leva a inadvertidamente equiparar funções e fórmulas.

Esses autores sobreditos destacam que, há pelo menos mais de um século, tem sido reconhecido que os currículos escolares deveriam enfatizar o conceito de função como ideia unificadora da matemática, mas ainda hoje os estudantes continuam a sair do Ensino Médio e dos primeiros anos dos cursos universitários com uma compreensão empobrecida desse conceito. Argumentam que o conceito de função é complexo e se desenvolve lentamente, e sua aprendizagem envolve diferentes aspectos que, segundo Carlson (1998), haviam sido tratados separadamente em estudos anteriores, mas que ela busca apresentar de forma articulada no seu trabalho. Esses aspectos são relacionados à habilidade dos estudantes em:

> - caracterizar relações funcionais do “mundo real” utilizando a notação de função;

- operar com um tipo particular de função, como uma fórmula, uma tabela ou um gráfico;
- transitar entre diferentes representações de uma mesma função;
- representar e interpretar aspectos covariantes de uma situação funcional (isto é, reconhecer e caracterizar como a variação de uma variável afeta a variação da outra);
- interpretar informações funcionais "estatísticas" e "dinâmicas" (isto é, interpretar gráficos, representando posição e taxa de variação);
- interpretar e descrever propriedades locais e globais da função: inclinação, continuidade e diferenciabilidade;
- construir funções utilizando fórmulas e outras funções;
- reconhecer funções, não-funções e tipos de função;
- conceitualizar uma função tanto como processo quanto como objeto;
- interpretar e compreender a linguagem da função; e
- caracterizar a relação entre uma função e uma equação (CARLSON, 1998, p. 117, tradução nossa).

Oehrtman, Carlson e Thompson (2008, p. 11-12, tradução nossa) apresentam algumas recomendações didáticas, que utilizamos na organização das tarefas apresentadas neste caderno:

- peça aos alunos para explicar os fatos básicos da função em termos de entrada e saída;
- pergunte sobre o comportamento das funções em intervalos inteiros, além de pontos únicos;

- peça aos alunos para fazer e comparar julgamentos sobre funções em várias representações;
- com base na visão de função como processo, aplicar o raciocínio covariacional.

3 RACIOCÍNIO COVARIACIONAL

Destacamos que a nomenclatura raciocínio covariacional pode apresentar-se nas literaturas de forma variada, tais como pensamento covariacional, função como covariação, aspectos covariantes de uma situação covariacional. etc.

Reconhecemos que, nas obras de Thompson na década de 1980, existe uma ideia prefacial de RC apresentada com as temáticas "quantidade" e "raciocínio quantitativo", no intuito de caracterizar o conceito de taxa, aspecto central quando se pensa em uma função sob o viés covariacional. Thompson (1990, 1992, 1994b) apresenta um modelo teórico organizado sobre estágios para a caracterização do raciocínio quantitativo, sustentado na ideia de abstração reflexiva de Piaget em pesquisas a respeito de campos conceituais: aditivo e multiplicativo.

Nesse modelo, uma *quantidade* é definida como uma qualidade de algo passível de mensuração. *Quantificação* é o processo pelo qual se atribuem valores numéricos às qualidades de um objeto. Uma *operação quantitativa* é uma ação mental por meio da qual se reconhece uma quantidade como aquela cujo valor varia (ou pode variar) e se concebe uma nova quantidade em relação a uma ou mais quantidades já conhecidas. Uma operação quantitativa não é, necessariamente, numérica, pois tem a ver com a compreensão de uma situação (reconhecer que uma quantidade cresce/decresce, ou que o “modo” como cresce/decresce pode mudar, ou, ainda, que duas quantidades crescem – ou não, na mesma direção). Uma operação numérica, por sua vez, pode ser usada para quantificar/mensurar essas mudanças.

Thompson (1994b) destaca que o desenvolvimento do conceito de *taxa* passa inicialmente pelo reconhecimento de mudança em alguma quantidade, progride para uma imagem vagamente coordenada entre duas quantidades e se consolida em uma imagem da covariação de duas quantidades cujas medidas permanecem em proporção constante.

Uma definição de covariação encontrada de maneira mais sistematizada em Saldanha e Thompson (1998, p. 299, tradução nossa) é a seguinte: “nossa noção de covariação é de alguém que tenha em mente uma imagem sustentada [sustained, no original] dos valores de duas quantidades [que variam] simultaneamente.”.

Nesse viés,

> No desenvolvimento inicial, coordenam-se [mentalmente] valores de duas quantidades – pense em um, depois o outro, depois o primeiro, depois o segundo, e assim por diante. Imagens posteriores de covariação implicam a compreensão do tempo como uma quantidade contínua, de modo que, na sua imagem, os dois valores de quantidades persistem (SALDANHA; THOMPSON, 1998, p.289).

Carlson, Larsen e Jacobs (2002, p.3), ao discutirem conceitos de taxa média de variação e de taxa de variação instantânea, destacam que, à época de sua pesquisa, pouco se conhecia sobre a importância do RC na compreensão dessas ideias. Para eles, o RC envolve a “coordenação de imagens de duas quantidades que variam e o modo como uma varia em relação à outra”.

Mais recentemente, Thompson e Carlson (2017) revisaram as estruturas covariacionais anteriores de duas maneiras: (i) analisando o raciocínio variacional dos alunos separadamente do seu raciocínio covariacional; (ii) analisando como os alunos coordenam suas imagens de valores de quantidades variando. Propuseram seis significados para a *variação*, sendo eles: a variável é uma letra, não há variação, variação discreta grosseira [chunky], variação contínua grosseira e variação contínua suave.

Como apoiar o pensamento dos alunos no intuito de ajudá-los a imaginar relacionamentos entre quantidades que mudam continuamente, visto que, em geral, estão “condicionados” a conectar pontos para formar um gráfico? Uma abordagem possível seria levar os alunos a pensarem em pequenas mudanças nas quantidades como forma de promover seu raciocínio com variação contínua. Porém, para Thompson e Carlson (2017), apoiados em trabalhos de Castillo-Garsow, isso não é suficiente: “pensar em variação contínua envolve, necessariamente, pensar em movimento” (em analogia ao conceito de *fluentes* de Newton – a raiz do CDI).

Em síntese, entendemos raciocínio covariacional quando podemos relacionar variações entre grandezas. A título de exemplo, uma grandeza x altera (podemos entender altera no sentido de crescimento ou decrescimento) com o passar do tempo e uma grandeza y altera também com o passar do tempo (tempo passando igual para ambas). Se, por via de alguma relação e/ou representação, conseguirmos relacionar essas duas variações, dizemos então que na situação as grandezas estão covariando.

4 OBJETIVOS COM O CADERNO DE TAREFAS

Com base nas ideias supracitadas, gostaríamos de trazer à baila que este caderno de tarefas tem como objetivo maior evidenciar situações que exploram ideias do RC. As tarefas apresentadas bem como seus enunciados foram escolhidas/pensadas de modo a mobilizar durante sua resolução múltiplas representações do conceito de função (linguagem natural, gráfico, tabelas, expressões algébricas) no viés do RC.

Para a organização das tarefas, levamos em consideração um conjunto de ideias do RC que poderiam ser mobilizadas nas tarefas propostas:

- (i) Constituir quantidades envolvidas na situação (reconhecer atributos de uma situação passíveis de medição);
- (ii) Raciocinar sobre o processo de medição dessas quantidades;
- (iii) Imaginar medidas de quantidades variando continuamente;
- (iv) Coordenar duas quantidades que variam juntas:
    - (a) reconhecer que as quantidades se relacionam;
    - (b) reconhecer direção de crescimento - ambas crescem/decrescem, por exemplo;

- (c) reconhecer a existência de taxas de variação - cresce mais rápido/mais lento, ou cresce a uma taxa crescente ou decrescente;
- (d) identificar eventuais mudanças na taxa de crescimento.

Neste átimo, gostaríamos de destacar que as tarefas, se adaptadas em seu formato de aplicação, podem ser utilizadas em outros níveis de ensino, em especial no estudo do conceito de função no 9º ano do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

5 ALGUMAS ORIENTAÇÕES EM TORNO DA ORGANIZAÇÃO DAS TAREFAS

No texto apresentado a seguir, utilizamos os símbolos [1], [2], [3], [4] e [5] para apresentar diferentes aspectos que consideramos na organização de cada uma das tarefas. Abaixo apresentamos com detalhes o nosso objetivo com cada item: [1] apresentamos as referências que nos permitiram pensar num primeiro formato das tarefas e, a partir disso, fizemos alguns ajustes que julgamos necessários com base em nossos objetivos de pesquisa e no cenário de aplicação; [2] a tarefa na sua forma mais completa, ou seja, no decorrer das aplicações, em alguns momentos, sugerimos o uso de alguns aplicativos, com maior intensidade no caso da tarefa da garrafa; [3] comentários a fim de contribuir para a proposta de aplicação e sugestões para fomentar as discussões em sala de aula, tais comentários são oriundos das experiências vividas durante a pesquisa e de algumas discussões com o orientador deste caderno; [4] tarefa no seu formato final. Após todo o caminho percorrido durante o período de construção da dissertação, fizemos alguns ajustes nas tarefas; [5] algumas sugestões de tarefas que podem ir ao encontro das discussões presentes nas tarefas sugeridas. Durante as aplicações das tarefas, por motivos diversos, não foi possível aplicar algumas outras que havíamos planejado. Para esses itens, não faremos os comentários colocados em [3].

É importante destacar que, em algumas tarefas, os itens [2] e [4] podem ser iguais e teremos casos em que o item [5] não será apresentado.

6 TAREFAS PROPOSTAS

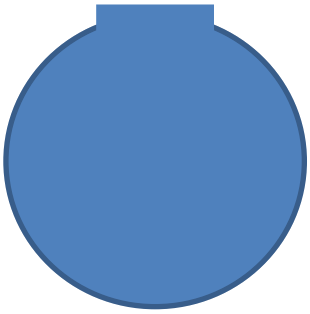
A seguir destacamos um conjunto de 6 tarefas tendo como referência as ideias apresentadas e objetivadas anteriormente. A ordem das tarefas será conforme segue abaixo.

- Tarefa da Garrafa
- Tarefa das Tabelas
- Tarefa do Político
- Tarefa do Medicamento Injetado
- Tarefa Depósito Bancário
- Tarefa da Relação entre Perímetro e Área

6.1 Tarefa da Garrafa

[1] - Esta tarefa é uma situação clássica dentro das discussões do Raciocínio Covariacional, por exemplo, Carlson (1998), Carlson *et al*. (2002), Carlson, Oerhrtman e Engelke (2010) e Thompson e Carlson (2017).

[2] - Água é derramada em um vaso a uma taxa constante. Use essa informação e a forma do vaso para responder às perguntas a seguir.

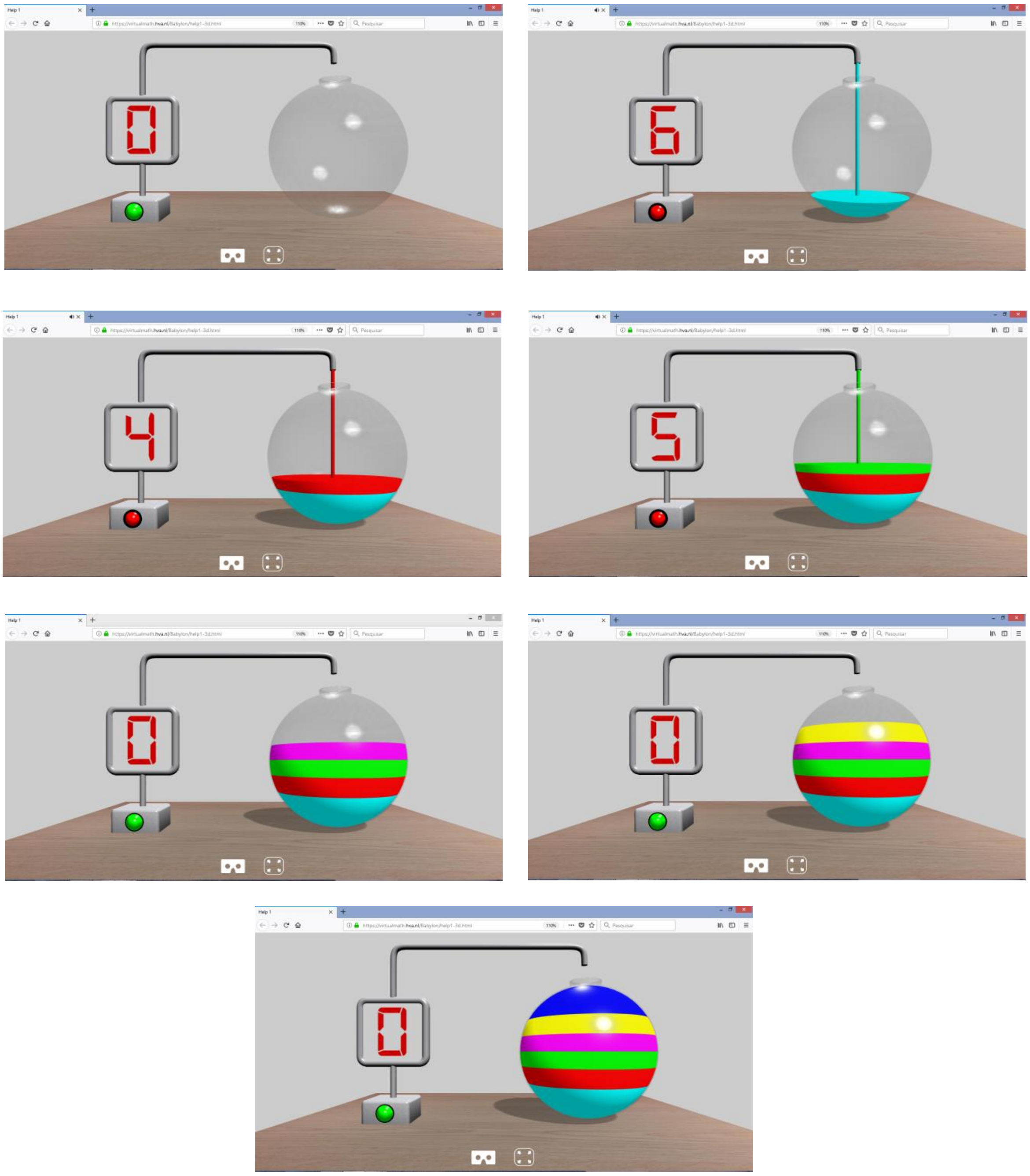


a) O que você entende por taxa constante de derrame de água nessa situação?
b) Imagine a cena do vaso sendo cheio e escreva o que você acha que pode ser medido nessa situação.
c) Esboce um gráfico que relacione a altura de água na garrafa com o passar do tempo. Explique o raciocínio que levou ao seu esboço.

Abra o aplicativo 1 de ajuda (https://virtualmath.hva.nl/Babylon/help1-3d.html) e acione o enchimento do vaso. Perceba os intervalos de tempo, a variação da altura e a queda da água. Nesse aplicativo, o usuário clica em um bota com temporizador (inicia em 10 segundos até zerar) e assim vai preenchendo o vaso com “água”.

A partir disso, você acha que alguma de suas respostas (a, b e c) está incorreta? Se sim, responda-a novamente e explique o que está errado e por que você acha que está incorreto. Se não, vá para a próxima questão.

Segue alguns *prints* do aplicativo mencionado.



Fonte: https://virtualmath.hva.nl/Babylon/help1-3d.html data de acesso 08-09-2017

d) Construa gráficos que relacionem as diferentes grandezas envolvidas nessa situação.

[3] Na Tarefa da Garrafa, podemos explorar ideias do RC, tais como:

No item (a), pode ser explorado de início o conceito em torno da expressão “taxa constante de derrame”, uma vez que, de modo geral, as tarefas giram em torno dos conceitos de crescimento e decrescimento a taxas crescentes e/ou decrescentes.

No item (b), o máximo de grandezas que os estudantes listarem será interessante, pois o objetivo desta tarefa é, além de observar como eles desenvolvem ideias presentes no RC, a representação gráfica das situações que relacionam, por exemplo: tempo e altura, tempo e volume, tempo e raio, altura e volume, raio e altura.

No item (c), na discussão, podem ser explorados elementos importantes, tais como o gráfico cresce a uma taxa crescente ou decrescente, a concavidade da curva é a mesma em todo o período de observação? Em algum momento, o gráfico muda a concavidade? O que podemos entender em relação a esse comportamento? Podemos dizer que, na situação, temos um ponto de inflexão, em termos de taxas o que isso representa?

No item (d), na discussão, algumas ideias podem ser exploradas:

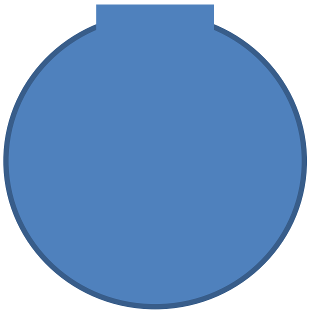
- quando se relaciona o volume em função do tempo, temos uma função linear, e podemos provocar os estudantes no sentido de indagar: como podemos entender a taxa nessa situação? E se invertemos os eixos, o que se altera?
- quando se relaciona o raio em função do tempo, qual será a representação gráfica? Uma reta também? Podemos afirmar que é crescente em todo o período observado? Em algum momento, o gráfico muda seu comportamento? Podemos inferir que esse ponto de mudança de comportamento pode ser chamado também de ponto de inflexão?
- quando se relaciona volume em função da altura acontece algo bastante interessante: se voltar ao gráfico proposto na situação (c) e observar essa relação, as ideias de começar a crescer a uma taxa decrescente e crescer a uma taxa decrescente e os reflexos que essas ideias têm nas representações gráficas podem ser discutidas.
- quando se relaciona a altura da água dentro do recipiente em função dos raios das secções no vaso, teremos uma representação gráfica que permite discutir que existem situações que a representação gráfica não pode ser tomada como uma representação de função, pois, se realizado o teste das retas paralelas explorados nos testes para verificar se um gráfico é uma função, essa curva será “cortada” em dois pontos.

Nos casos em que relacionamos as grandezas apresentadas anteriormente, uma sugestão possível seria inverter as grandezas, por exemplo, no último item desta seção sugerimos altura em função dos raios, a proposta poderia ser apresentar graficamente a relação dos raios em função da altura.

[4] Tarefa das tabelas para impressão, este item apresentaremos na próxima página.

TAREFA DA GARRAFA[3]

Água é derramada em um vaso a uma taxa constante. Use essa informação e a forma do vaso para responder às perguntas a seguir.



a) O que você entende por taxa constante de derrame de água nessa situação?

b) Imagine a cena do vaso sendo enchido e escreva o que você acha que pode ser medido nessa situação.

c) Esboce um gráfico que relacione a altura de água na garrafa com o passar do tempo. Explique o raciocínio que levou ao seu esboço.

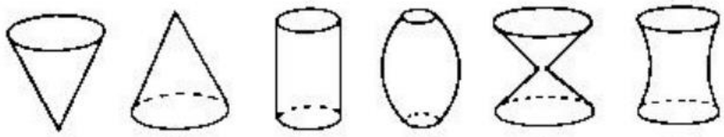
Abra o aplicativo 1 de ajuda (https://virtualmath.hva.nl/Babylon/help1-3d.html) e acione o enchimento do vaso. Perceba os intervalos de tempo, a variação da altura e a queda da água. Nesse aplicativo, o usuário clica em um bota com temporizador (inicia em 10 segundos até zerar) e assim vai preenchendo o vaso com "água".
A partir disso, você acha que alguma de suas respostas, a), b) e c), estão incorretas? Se sim, responda-a novamente e explique o quê e o porquê você acha que está incorreto. Se não, vá para a próxima questão.

d) Construa gráficos que relacionem as diferentes grandezas envolvidas nessa situação.

[3] Este material é parte do caderno de tarefas: ideias do Raciocínio Covariacional e suas possiblidades, organizado por William José Gonçalves e André Luis Trevisan.

[5] – A seguir apresentamos algumas tarefas que podem ser utilizadas, uma vez que envolve ideias que vão ao encontro das tarefas anteriores.

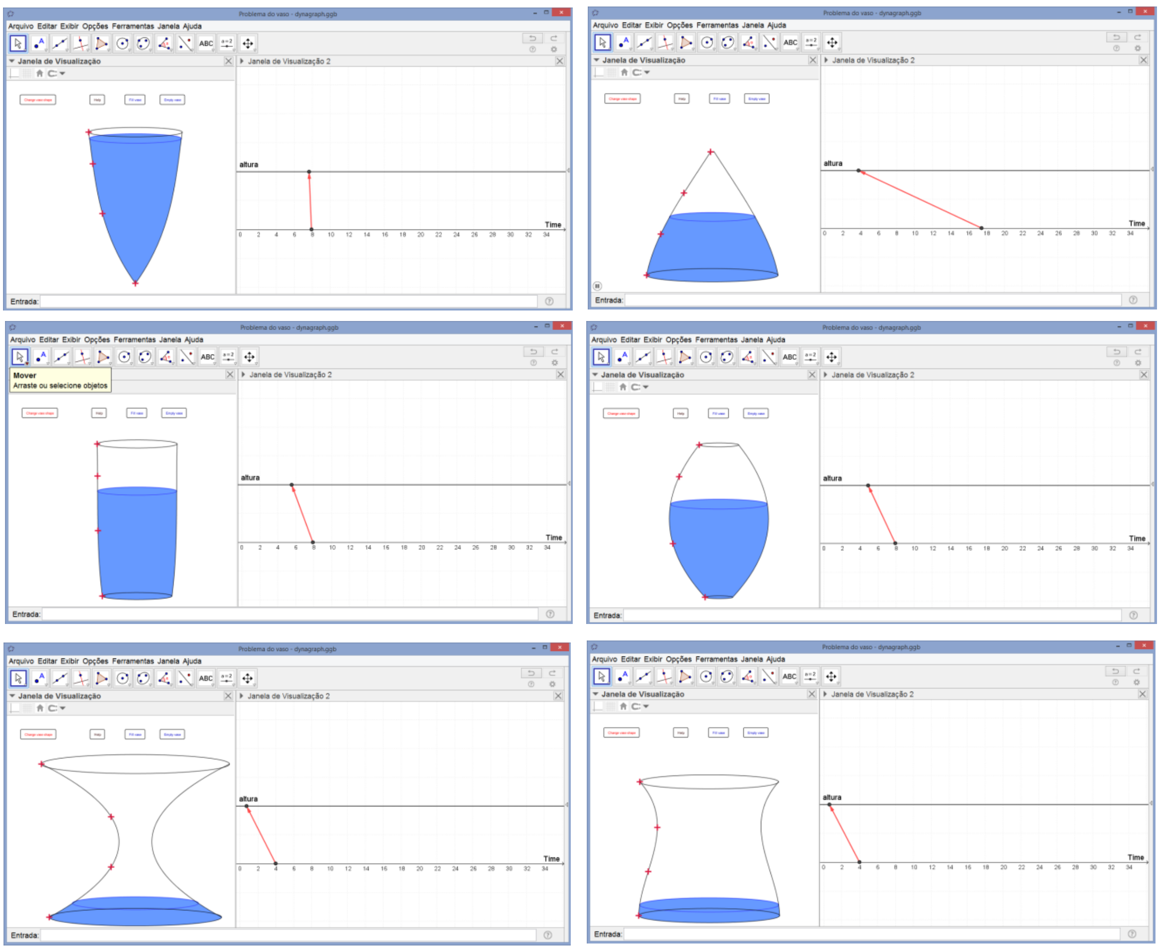
e) Agora, considerando que todos os vasos seguintes têm a mesma altura, esboce gráficos da altura em função do volume.



(1) (2) (3) (4) (5) (6)

Para auxiliar, utilize-se do aplicativo “Problema do vaso – Dynagraph”, que pode ser solicitado pelo e-mail williamboatematica@gmail.com. Nele é possível mudar as formas do vaso clicando em “Change vase chape”. A janela de visualização 2 traz um Dynagraph, uma relação entre a altura e o tempo, para auxiliar na visualização da situação. Nesse aplicativo, o usuário pode movimentar os x vermelhos dando o formato desejado ao vaso.

Abaixo alguns *prints* do aplicativo supracitado.



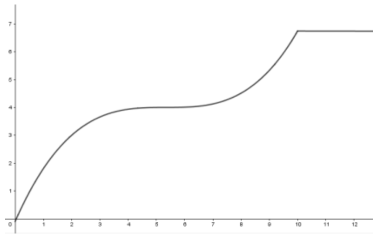
Fonte: Os autores e Daniel Daré.

Esboce o gráfico do recipiente:

f) O que seria mudado nos gráficos, se partíssemos de vasos cheios e assumíssemos que estivessem furados na parte inferior, esvaziando-se ao longo do tempo a taxa constante?

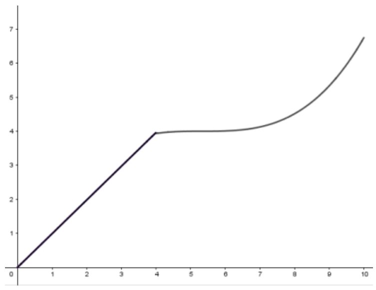
g) A partir dos esboços de gráficos a seguir, represente os possíveis vasos que podem tê-los originado.

(altura)



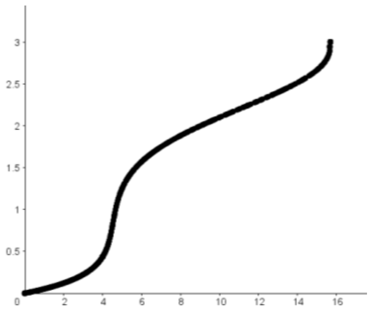
(tempo)

(Volume)



(altura)

(altura)



(volume)

6.2 Tarefas das Tabelas

[1] Esta tarefa foi adaptada da literatura: **Funções para modelar variações: uma preparação para o cálculo** de Connally, Varriale e Roque (2009). A adaptação foi em torno da ideia “descrever para uma pessoa que não esteja vendo o gráfico”.

[2] Como você descreveria, para uma pessoa que não esteja vendo as tabelas, o gráfico que representa cada uma delas?

X	0	1	3	6
f(x)	1	1,3	1,7	2,2

X	12	15	18	21
h(x)	21,40	21,53	21,75	22,02

[3] Na tabela 1, pode-se observar que os valores de x apresentados variam de modo não uniforme e, no caso da tabela 2, eles aumentam sempre 3 unidades. Podemos destacar que ambas as tabelas representam funções crescentes. Um ponto importante nessa tarefa é que os valores estão crescendo, porém um deles a uma taxa crescente e o outro a uma taxa decrescente. É importante observar se os estudantes mencionarão que a curva está côncava para baixo e no outro para cima.

A articulação entre as representações numéricas e gráficas se faz presente e cabe destacar que, dentro do RC, pensar de forma não discreta é importante. Sendo assim, enquanto se aplica a tarefa, pode-se observar se, na primeira situação, foram marcados pontos para auxiliar no traço do gráfico, e indagar se é possível representar a segunda situação sem a marcação de pontos.

[4] Tarefa das tabelas para impressão. Este item apresentaremos na próxima página.

TAREFA DAS TABELAS[4]

Como você descreveria, para uma pessoa que não esteja vendo as tabelas, o gráfico que representa cada uma delas?

X	0	1	3	6
f(x)	1	1,3	1,7	2,2

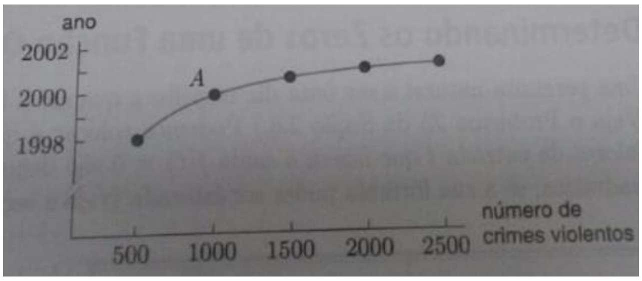
X	12	15	18	21
h(x)	21,40	21,53	21,75	22,02

[4] Este material é parte do caderno de tarefas: ideias do Raciocínio Covariacional e suas possiblidades, organizado por William José Gonçalves e André Luis Trevisan.

6.3 Tarefas do Político

[1] A **Tarefa do Político** teve como referência a literatura: **Funções para modelar variações**: uma preparação para o cálculo, de Connally, Varriale e Roque (2009).

[2] Um político concorrendo à reeleição declarou que o número de crimes violentos não está mais crescendo e que, atualmente, está sob controle. O gráfico apresentado na figura abaixo confirma essa afirmação? Por que sim ou por que não?



[3] Nesta tarefa, a discussão maior é em torno de os eixos estarem “trocados”. Podem-se provocar os estudantes indagando se os eixos horizontais e verticais (em relação às grandezas dispostas sobre cada um) podem ser trocados O que tal fato modifica na representação gráfica? Altera a concavidade? O que vai ser alterado?

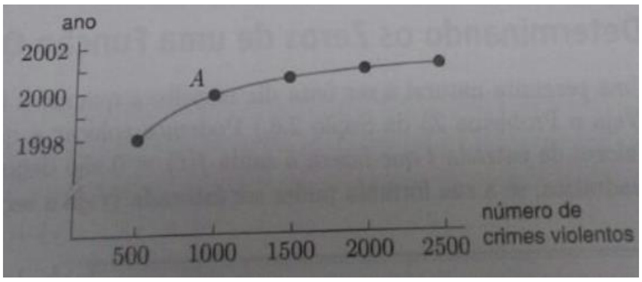
Outro ponto importante é explorar o conceito de taxas e como justificar a resposta usando esse conceito.

É importante trazer à baila a questão das múltiplas representações conforme mencionamos anteriormente. Em alguns casos, as tarefas são apresentadas apenas pelo texto, em outros pela tabela e em outros por gráficos.

[4] Tarefa das tabelas para impressão. Apresentaremos este item na próxima página.

TAREFA DO POLÍTICO[5]

Um político concorrendo à reeleição declarou que o número de crimes violentos não está mais crescendo e que, atualmente, está sob controle. O gráfico apresentado na figura abaixo confirma essa afirmação? Por que sim ou por que não?



[5] Este material é parte do caderno de tarefas: ideias do Raciocínio Covariacional e suas possiblidades, organizado por William José Gonçalves e André Luis Trevisan.

6.4 Tarefas do Medicamento Injetado

[1] A **Tarefa do Medicamento Injetado** teve como referência a literatura: **Funções para modelar variações**: uma preparação para o cálculo, de Connally, Varriale e Roque (2009).

[2] Quando um medicamento é injetado na circulação sanguínea de uma pessoa, a quantidade da droga presente no corpo começa a crescer rapidamente. Se a pessoa toma injeções diárias, o corpo metaboliza a droga, mas a quantidade de droga presente no corpo continua crescendo, porém a uma taxa decrescente. Por fim, a quantidade se torna constante em um nível de saturação. Construa um gráfico que represente essa situação.

[3] Tarefa apresentada na forma de texto, algumas palavras, como "continua crescendo, mas a uma taxa decrescente", podem fazê-los pensar em algumas situações que tenham realizado.

A questão de uma assíntota horizontal pode surgir durante a realização das tarefas, e o professor pode usar partes do texto a fim de discutir essa ideia.

[4] Tarefa das tabelas para impressão. Este item será apresentado na próxima página.

TAREFA MEDICAMENTO INJETADO[6]

Quando um medicamento é injetado na circulação sanguínea de uma pessoa, a quantidade da droga presente no corpo começa a crescer rapidamente. Se a pessoa toma injeções diárias, o corpo metaboliza a droga, de modo que a quantidade de droga presente no corpo continua crescendo, mas a uma taxa decrescente. Por fim, a quantidade se torna constante em um nível de saturação. Construa um gráfico que represente essa situação.

[6] Este material é parte do caderno de tarefas: ideias do Raciocínio Covariacional e suas possiblidades, organizado por William José Gonçalves e André Luis Trevisan.

6.5 Tarefas Depósito Bancário

[1] A **Tarefa Depósito Bancário** teve como referência a literatura: **Funções para modelar variações**: uma preparação para o cálculo, de Connally, Varriale e Roque (2009).

[2] Quando se faz um depósito bancário, a quantia depositada na conta cresce lentamente no início. À medida que o saldo vai aumentando, a quantia de dinheiro cresce mais rapidamente, visto que a conta vai recebendo os juros sobre os novos juros e também sobre a quantia original. Faça uma representação dessa situação.

[3] Pode-se explorar a questão da constituição de quantidades.

Nesta tarefa, podem-se explorar ideias parecidas com a situação da garrafa no sentido de pedir que os estudantes listem quais grandezas podem ser medidas na situação e como elas podem se correlacionar.

Novamente o conceito de taxa pode ser explorado na situação, mas vale ressaltar que o ideal (imaginando que os estudantes já realizaram algumas ou todas as tarefas anteriores) é que pensem de forma não discreta e sem marcação de pontos que venham a auxiliar nas representações gráficas, ou seja, que sejam capazes de visualizar o traço do gráfico "mentalmente".

[4] Tarefa das tabelas para impressão, item a ser apresentado na próxima página.

TAREFA DEPÓSITO BANCÁRIO[7]

Quando se faz um depósito bancário, a quantia depositada na conta cresce lentamente no início. À medida que o saldo vai aumentando, a quantia de dinheiro cresce mais rapidamente, visto que a conta vai recebendo os juros sobre os novos juros e também sobre a quantia original. Faça uma representação dessa situação.

[7] Este material é parte do caderno de tarefas: ideias do Raciocínio Covariacional e suas possiblidades, organizado por William José Gonçalves e André Luis Trevisan.

[5] A seguir apresentamos algumas tarefas que podem vir a ser utilizadas uma vez que envolvem ideias que vão ao encontro das tarefas anteriores. A próxima tarefa foi embasada na mesma referência da Tarefa do Depósito Bancário.

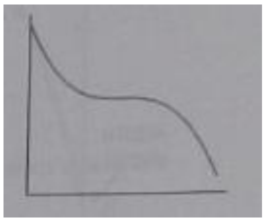
Tarefa do Boato

Quando surge um boato, o número de pessoas que o ouviram começa crescendo lentamente. À medida que o boato se espalha, a taxa de crescimento torna-se maior (à medida que mais pessoas continuam a contar o boato aos seus amigos), em seguida, diminui novamente (quando quase todos já ouviram). Como se poderia representar essa situação?

Tarefa Descreva a Situação

A **Tarefa Descreva a Situação** é de autoria do Professor e Pesquisador desta pesquisa.

Descreva uma situação (de modo análogo ao apresentado nas questões anteriores) cuja representação corresponda ao gráfico ao lado. Em seguida, construa uma tabela que possa representar esse gráfico.



Tarefa Escuro ou Frio

A **Tarefa Escuro ou Frio** foi adaptado da literatura: **Cálculo e aplicações**. (HUGHES-HALLETT *et al*.,1999).

Você está sozinho em seu quarto mal iluminado e mal aquecido e acende uma única vela, de forma a "espantar a amaldiçoada escuridão". Deprimido com a situação, você caminha, afastando-se da vela, suspirando (mas sem apagá-la). A temperatura (em ºC) e a iluminação (em % da capacidade da vela) decrescem à medida que sua distância (em metros) da vela aumenta. Na verdade, você tem tabelas mostrando a situação. Suponha que você sente frio quando a temperatura está abaixo de 4,5º C e que você estará no escuro quando a iluminação é de, no máximo, 50%. Você estará no escuro antes de sentir frio ou vice-versa? Explique

.

Distância(m)	Temp(º C)	Ilum(%)
0	13,0	100
0,30	12,4	84
0,55	12,0	75
0,90	10,9	67
1,30	10,0	60
1,70	8,3	56
2,00	6,4	53

6.6 Tarefas da Relação Entre Perímetro e Área

[1] Esta tarefa está embasada na proposta de Carlson, Oehrtman e Engelke (2010) na obra; **The Precalculus Concept Assessment: A Tool for Assessing Students' Abilities and Understandings.**

[2] Construir um gráfico que relacione o perímetro e a área de uma praça supondo que ela tenha formato:

a) Circular

b) Quadrado

[3] Pode-se destacar que o perímetro e a área são dependentes de uma variável que não está explícita no enunciado (raio e lado) e que, de certa forma, pode contribuir na formulação da representação gráfica.

Existe um momento (um valor) na discussão que o perímetro deixa de ser maior que a área. Caso o aplicador deseje, pode explorar com os estudantes se existem ferramentas matemáticas que podem ser empregadas a fim de encontrar esse valor sem ser por via do pensamento e de ir listando os valores (?).

Nesta tarefa, a discussão acerca de os gráficos serem crescentes e com taxas diferentes pode ser explorada também.

[4] Tarefa das tabelas para impressão. Apresentaremos este item na próxima página.

TAREFA RELAÇÃO ENTRE PERÍMETRO E ÁREA[8]

Construir um gráfico que relacione o perímetro e a área de uma praça supondo que ela tenha formato:

a) Circular

b) Quadrado

[8] Este material é parte do caderno de tarefas: ideias do Raciocínio Covariacional e suas possiblidades, organizado por William José Gonçalves e André Luis Trevisan.

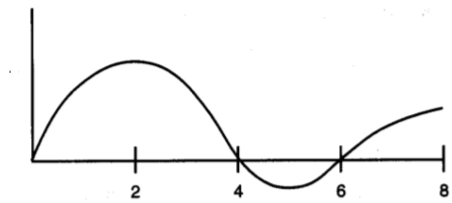
[5] A seguir apresentamos algumas tarefas que podem ser utilizadas, uma vez que envolvem ideias que vão ao encontro das tarefas anteriores. As próximas tarefas foram embasadas na mesma referência da Tarefa da Relação entre Perímetro e Área.

Tarefa da Bola no Lago

Uma bola é lançada em um lago, criando uma onda circular que aumenta a uma velocidade de 5 cm por segundo. Representar, de duas maneiras diferentes, uma relação entre a área A da onda e o tempo.

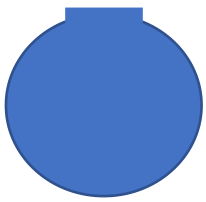
Tarefa Variação da Temperatura

O gráfico ao lado fornece a taxa de variação da temperatura de certo material ao longo do tempo. Esboce o gráfico da temperatura nesse mesmo intervalo de tempo. Assuma que a temperatura no tempo t = 0 é 0º C.



Tarefa da Garrafa

Imagine que estejamos enchendo a garrafa representada na figura a seguir com água a uma taxa de derrame constante. Construir dois possíveis gráficos que relacionem a altura com a quantidade de água na garrafa.



REFERÊNCIAS

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral.** Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2002.

BOLITE F., J. ; d ; POWELL, A. B. . **Explorando Tarefas com Tecnologias Digitais para o Ensino de Fenômenos Periódicos**: Quando o Movimento Fictivo se torna Factivel. Educação e Cultura Contemporânea , v. 10, p. 29-49, 2013.

BONOMI, M. C. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral.** Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 1999.

CARLSON, M. A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *In*: DUBINSKY, E.; SCHOENFELD, A.H.; KAPUT, J.J. (Eds.). **Research in collegiate mathematics education III**. Providence: American Mathematical Society, 1998, p. 114-162.

CARLSON, M.; JACOBS, S.; COE, E.; LARSEN, S.; HSU, E. Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study**. Journal for Research in Mathematics Education,** v. 33, n. 5, p. 352-378, 2002.

DUBINSKY, E.; HAREL, G., The nature of the process conception of function. In: DUBINSKY, E; e HAREL, G. (Ed.) **The concept of function:** aspects of epistemology and pedagogy. Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 1992, p. 85-106.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an Educational Task**. Dordrecht, The Netherlands: Reidel, 1973.

MESTRE, C. M. M. V. **O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade:** uma experiência de ensino. 2014. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Lisboa. Lisboa, 2014.

OEHRTMAN, M. C.; CARLSON, M. P.; THOMPSON, P. W**.** Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function. In: CARLSON, M. P.; RASMUSSEN, C. (Eds.). **Making the connection**: Research and practice in undergraduate mathematics Washington, DC: Mathematical Association of America, 2008, p. 27-42.

PONTE, J. P. O conceito de função no currículo de Matemática. **Revista Educação e Matemática**, APM, Portugal, n.15, p. 3-9, 1990.

SALDANHA, L.; THOMPSON, P. W. Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. *In:* BERENSAH, S. B.; COULOMBE, W. N. (Eds.). **Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education**. Raleigh, NC: North Carolina State University, 1998.

THOMPSON, P. W. **A theoretical model of quantity-based reasoning in arithmetic and algebraic.** Center for Research in Mathematics & Science Education: San Diego State University. (1990).

THOMPSON, P. W., THOMPSON, A. G. **Images of rate. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association**, San Francisco, CA. (1992, April).

THOMPSON, P. W. Images of rate and operational understanding of the fundamental the Teorem of calculus**. Educational Studies in Mathematics**, v. 26, p. 229–274, 1994.

THOMPSON, P. W.; CARLSON, M. P. Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically**.** In CAI, J. (Ed.), **Compendium for research in mathematics education**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2017, p. 421-456.

TREVISAN, A. L.; MENDES, M. T. Possibilidades para matematizar em aulas de Cálculo. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 6, p. 129-138, 2013.

TREVISAN, A. L.; MENDES, M. T**.** Integral antes de derivada? Derivada antes de integral? Limite, no final? Uma proposta para organizar um curso de Cálculo. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 19, n. 3, p. 353-373, 2017.

VALLEJO, C. A. C.; GÓMEZ J. L. D. La historia de la matemática un factor imprescindible en la elaboración de una propuesta didáctica. El caso del concepto de función. **El cálculo y su Enseñanza 5**, C Cuevas, JL Díaz. p. 165-179, 2014.