

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

CAROLINE WITT GUERBER

**USANDO PUZZLES, ORIGAMI E TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ESTUDO DE
FRAÇÕES, NÚMEROS IRRACIONAIS E ÁREAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

CURITIBA

2025

CAROLINE WITT GUERBER

**USANDO PUZZLES, ORIGAMI E TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ESTUDO DE
FRAÇÕES, NÚMEROS IRRACIONAIS E ÁREAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

**Using puzzles, origami, and digital technologies in the study of fractions, irrational
numbers, and areas in Elementary Education**

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestra em Matemática, Área de Concentração: Matemática na Educação Básica, no Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR.

Linha de pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias.

Orientador: Rudimar Luiz Nós.

Coorientadora: Olga Harumi Saito.

CURITIBA

2025



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho licenciado para fins não comerciais, desde que atribuam ao autor o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.



CAROLINE WITT GUERBER

USANDO PUZZLES, ORIGAMI E TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ESTUDO DE FRAÇÕES, NÚMEROS IRRACIONAIS E ÁREAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Matemática Na Educação Básica.

Data de aprovação: 25 de Agosto de 2025

Dr. Rudimar Luiz Nos, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Diane Rizzotto Rossetto, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Elisandra Bar De Figueiredo, Doutorado - Fundação Universidade do Estado de Santa Catarina (Udesc)

Dra. Gisele Teixeira Paula, Doutorado - Universidade Federal do Paraná (Ufpr)

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 25/08/2025.

Dedico este trabalho aos meus pais, Eleni Moro Witt e Valmir Witt, que, ao longo de suas vidas, lutaram incansavelmente para me proporcionar a oportunidade de estudar e alcançar os meus objetivos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por despertar em meu coração o anseio constante pelo estudo e por me conceder os meios necessários para o alcance desse objetivo.

Aos meus pais, Eleni Moro Witt e Valmir Witt, pelo incansável esforço e pelo constante incentivo que sempre me ofereceram, particularmente no que tange aos meus estudos. Tenho plena consciência de que, em diversas ocasiões, eles se sacrificaram para viabilizar minha educação e permitir que eu alcançasse meus objetivos.

Ao meu marido, Ediacir Guerber, pela compreensão e pelo apoio incondicional ao longo de todo o curso.

Às minhas amigas, Adrieli Muchau Kosinski e Denise Jankoski, pela parceria, apoio, incentivo e auxílio constantes ao longo de todo o curso. Sem dúvida, nossa amizade tornou o processo consideravelmente mais leve e gratificante.

Aos meus orientadores, Prof. Dr. Rudimar Luiz Nós e Prof^a Dra. Olga Harumi Saito, pela paciência e pelo valioso auxílio dispensados ao longo da elaboração desta dissertação.

À Sociedade Brasileira de Matemática que, na busca da melhoria do ensino de matemática na Educação Básica, viabilizou a implementação do PROFMAT.

À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior.

*A educação é a arma mais poderosa que você
pode usar para mudar o mundo.*

Nelson Mandela (1918 – 2013): líder e ati-
vista africano.

RESUMO

Apresentamos neste trabalho atividades dinâmicas com os *puzzles* Tangram, *Stomachion* de Arquimedes, *Disorientation* e *Trinity Quartet*. Esses quatro quebra-cabeças são explorados com o objetivo de dinamizar e tornar mais lúdico o estudo de frações, números irracionais e cálculo da área de figuras planas na Educação Básica. As atividades foram organizadas em um livro digital, que constitui o recurso educacional desenvolvido neste trabalho, utilizando a plataforma GeoGebra. Além disso, propomos a construção dos *puzzles* por meio de *origami*, a arte milenar japonesa de dobrar papel, sem cortes ou uso de cola. Concluímos que a abordagem de resolução de problemas geométricos empregando quebra-cabeças, dobraduras e tecnologias digitais, está alinhada às competências e habilidades específicas previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Essa estratégia torna o ensino da matemática mais atrativo e significativo, sem abrir mão da teoria e do rigor matemático.

Palavras-chave: Dobraduras; *Disorientation*; *Stomachion* de Arquimedes; *Trinity Quartet*; Tangram; GeoGebra.

ABSTRACT

This work presents dynamic activities involving the puzzles Tangram, Stomachion by Archimedes, Disorientation, and Trinity Quartet. These four puzzles are explored to make the study of fractions, irrational numbers, and the calculation of the area of plane figures more engaging and playful in Elementary Education. The activities have been organized into a digital book, the educational resource developed in this project, using the GeoGebra platform. Additionally, we propose constructing the puzzles through origami, the ancient Japanese art of paper folding, without cuts or the use of glue. We conclude that solving geometric problems through puzzles, origami, and digital technologies aligns with the specific skills and competencies outlined in the National Common Curricular Base (BNCC). This strategy makes mathematics teaching more attractive and meaningful, without compromising theoretical rigor and mathematical precision.

Keywords: Paper folding; Disorientation; Stomachion of Archimedes; Trinity Quartet; Tangram; GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Denominação das habilidades da BNCC	26
Figura 2.1 – Segmentos comensuráveis \overline{AB} e \overline{CD}	30
Figura 2.2 – Segmentos incomensuráveis \overline{AB} e \overline{CD}	30
Figura 2.3 – Representações do número racional cinco décimos: (a) ilustração; (b) reta numérica	31
Figura 2.4 – Tangram de 7 peças	33
Figura 2.5 – Versões do Tangram: (a) coração; (b) circular; (c) oval	34
Figura 2.6 – Outras versões do Tangram	34
Figura 2.7 – (a) Figuras formadas com as sete peças do Tangram; (b) vértices dos polígonos que compõem o Tangram em um quadrado 1×1	35
Figura 2.8 – Passo 1 da construção do Tangram com <i>origami</i> no GeoGebra	36
Figura 2.9 – Passos 2 e 3 da construção do Tangram com <i>origami</i> no GeoGebra	36
Figura 2.10–Passo 4 da construção do Tangram com <i>origami</i> no GeoGebra	37
Figura 2.11–Passo 5 da construção do Tangram com <i>origami</i> no GeoGebra	37
Figura 2.12–Passo 6 da construção do Tangram com <i>origami</i> no GeoGebra	37
Figura 2.13–Passo 7 da construção do Tangram com <i>origami</i> no GeoGebra	38
Figura 2.14–Passo 8 da construção do Tangram com <i>origami</i> no GeoGebra	38
Figura 2.15–Passo 9 da construção do Tangram com <i>origami</i> no GeoGebra	38
Figura 2.16–Construção do Tangram com <i>origami</i>	39
Figura 2.17– <i>Stomachion</i> : (a) peças em MDF; (b) formas obtidas com o rearranjo das peças	40
Figura 2.18–Vértices dos polígonos que compõem o <i>Stomachion</i> em um quadrado 1×1	41
Figura 2.19–Passo 1 da construção do <i>Stomachion</i> com <i>origami</i> no GeoGebra	41
Figura 2.20–Passo 2 da construção do <i>Stomachion</i> com <i>origami</i> no GeoGebra	42
Figura 2.21–Passo 3 da construção do <i>Stomachion</i> com <i>origami</i> no GeoGebra	42
Figura 2.22–Passo 4 da construção do <i>Stomachion</i> com <i>origami</i> no GeoGebra	43
Figura 2.23–Passo 5 da construção do <i>Stomachion</i> com <i>origami</i> no GeoGebra	43
Figura 2.24–Passo 6 da construção do <i>Stomachion</i> com <i>origami</i> no GeoGebra	44
Figura 2.25–Passo 7 da construção do <i>Stomachion</i> com <i>origami</i> no GeoGebra	44
Figura 2.26–Passo 8 da construção do <i>Stomachion</i> com <i>origami</i> no GeoGebra	45
Figura 2.27–Passo 9 da construção do <i>Stomachion</i> com <i>origami</i> no GeoGebra	45
Figura 2.28–Construção do <i>Stomachion</i> com <i>origami</i>	46
Figura 2.29–Aproximações de Fujimoto para $\frac{1}{5}$	47
Figura 2.30–Primeiro teorema de Haga: determinação de $\frac{3}{8}$ e $\frac{2}{3}$	49
Figura 2.31–Segundo teorema de Haga: determinação de $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$	50
Figura 2.32–Terceiro teorema de Haga: determinação de $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$	51
Figura 2.33–Generalização do teorema de Haga	52

Figura 2.34–Peças do <i>Disorientation</i> em MDF	54
Figura 2.35–Pontos <i>E</i> e <i>G</i> no quadrado <i>ABCD</i> para gerar o <i>Disorientation</i>	55
Figura 2.36–Medidas dos polígonos que compõem o <i>Disorientation</i> em um quadrado de lado ℓ	56
Figura 2.37–Passo 1 da construção do <i>Disorientation</i> com <i>origami</i> no GeoGebra	56
Figura 2.38–Passo 2 da construção do <i>Disorientation</i> com <i>origami</i> no GeoGebra	57
Figura 2.39–Passo 3 da construção do <i>Disorientation</i> com <i>origami</i> no GeoGebra	57
Figura 2.40–Passo 4 da construção do <i>Disorientation</i> com <i>origami</i> no GeoGebra	57
Figura 2.41–Passo 5 da construção do <i>Disorientation</i> com <i>origami</i> no GeoGebra	58
Figura 2.42–Construção do <i>Disorientation</i> com <i>origami</i>	58
Figura 3.1 – Diagonal <i>d</i> do quadrado de lado 1	60
Figura 3.2 – Peças do <i>Trinity Quartet</i> em MDF	63
Figura 3.3 – <i>Trinity Quartet</i> : eixo vertical de simetria	63
Figura 3.4 – <i>Trinity Quartet</i> : altura do triângulo equilátero <i>CDE</i>	64
Figura 3.5 – <i>Trinity Quartet</i> : altura do triângulo equilátero <i>AIE</i>	64
Figura 3.6 – <i>Trinity Quartet</i> : altura do triângulo equilátero <i>NOE</i>	65
Figura 3.7 – <i>Trinity Quartet</i> : medida dos lados e das alturas dos triângulos equiláteros	66
Figura 3.8 – Passo 1 da construção do <i>Trinity Quartet</i> com <i>origami</i> no GeoGebra	67
Figura 3.9 – Passo 2 da construção do <i>Trinity Quartet</i> com <i>origami</i> no GeoGebra	67
Figura 3.10–Passo 3 da construção do <i>Trinity Quartet</i> com <i>origami</i> no GeoGebra	68
Figura 3.11–Passo 4 da construção do <i>Trinity Quartet</i> com <i>origami</i> no GeoGebra	68
Figura 3.12–Passo 5 da construção do <i>Trinity Quartet</i> com <i>origami</i> no GeoGebra: segmento $\sqrt{3}a$	68
Figura 3.13–Passo 6 da construção do <i>Trinity Quartet</i> com <i>origami</i> no GeoGebra	69
Figura 3.14–Passo 7 da construção do <i>Trinity Quartet</i> com <i>origami</i> no GeoGebra	69
Figura 3.15–Passo 8 da construção do <i>Trinity Quartet</i> com <i>origami</i> no GeoGebra	70
Figura 3.16–Passo 9 da construção do <i>Trinity Quartet</i> com <i>origami</i> no GeoGebra	70
Figura 3.17–Passo 10 da construção do <i>Trinity Quartet</i> com <i>origami</i> no GeoGebra	71
Figura 3.18–Passo 11 da construção do <i>Trinity Quartet</i> com <i>origami</i> no GeoGebra	72
Figura 3.19–Passo 12 da construção do <i>Trinity Quartet</i> com <i>origami</i> no GeoGebra	72
Figura 3.20–Construção do <i>Trinity Quartet</i> com <i>origami</i> : versão compacta	73
Figura 3.21–Construção do <i>Trinity Quartet</i> com <i>origami</i> : versão completa	74
Figura 3.22–Retângulo brônzeo	75
Figura 3.23–Passos 1 e 2 da construção do retângulo brônzeo com <i>origami</i> no GeoGebra	75
Figura 3.24–Passo 3 da construção do retângulo brônzeo com <i>origami</i> no GeoGebra	76
Figura 3.25–Passo 4 da construção do retângulo brônzeo com <i>origami</i> no GeoGebra	76
Figura 3.26–Passo 5 da construção do retângulo brônzeo com <i>origami</i> no GeoGebra	76
Figura 3.27–Passo 6 da construção do retângulo brônzeo com <i>origami</i> no GeoGebra	77
Figura 3.28–Passo 7 da construção do retângulo brônzeo com <i>origami</i> no GeoGebra	77

Figura 3.29–Construção do retângulo brônzeo com <i>origami</i>	78
Figura 4.1 – Áreas de figuras decompostas em quadrados unitários: quadrado; triângulo equilátero; trapézio retângulo	79
Figura 4.2 – Área do retângulo de dimensões $a = 5$ e $b = 3$	80
Figura 4.3 – Área do quadrado de lado $\ell = 3$	81
Figura 4.4 – Triângulo ABC equicomposto ao retângulo $ABFE$	81
Figura 4.5 – Paralelogramo $ABCD$ equicomposto ao retângulo $GECD$	82
Figura 4.6 – Figuras formadas com as sete peças do Tangram quadrangular	84
Figura 4.7 – As sete peças do Tangram em um quadrado de lado 1	84
Figura 4.8 – Decomposição sucessiva do quadrado para obter a menor peça do Tangram	86
Figura 4.9 – Peças do Tangram quadrado a partir da peça de menor área	86
Figura 4.10–Frações percentuais das peças do Tangram quadrado	87
Figura 4.11–Polígonos que compõem o <i>Stomachion</i> em um quadrado de lado 1	87
Figura 4.12–Polígonos reticulados	91
Figura 4.13–Polígono reticulado: (a) simples; (b) não simples	92
Figura 4.14– <i>Stomachion</i> em um quadrado reticulado 12×12	92
Figura 4.15–Frações percentuais das peças do <i>Stomachion</i>	94
Figura 4.16–Triângulos que compõem o <i>Disorientation</i>	95
Figura 4.17–Frações percentuais das peças do <i>Disorientation</i>	96
Figura 4.18–Triângulos que compõem o <i>Trinity Quartet</i>	97
Figura 4.19–Frações percentuais das peças do <i>Trinity Quartet</i>	98
Figura 5.1 – Capa do livro <i>A arte dos puzzles: desafios matemáticos</i>	99
Figura 5.2 – Porcentagens e frações	100
Figura 5.3 – Figuras compostas com as sete peças do Tangram quadrado	101
Figura 5.4 – Questões sobre frações e Tangram	101
Figura 5.5 – Frações e Tangram no GeoGebra	102
Figura 5.6 – Questão sobre porcentagens e Tangram	102
Figura 5.7 – Porcentagens e Tangram no GeoGebra	102
Figura 5.8 – Rotação de um polígono no GeoGebra	102
Figura 5.9 – Construção da figura de um cavalo com as sete peças do Tangram quadrado	103
Figura 5.10–Questões sobre perímetro e área no Tangram	103
Figura 5.11–Composição de uma obra de arte no GeoGebra com o Tangram	104
Figura 5.12– <i>Stomachion</i> confeccionado em madeira	104
Figura 5.13–Peças numeradas do <i>Stomachion</i>	105
Figura 5.14–Construção no GeoGebra da figura de um elefante com as catorze peças do <i>Stomachion</i>	106
Figura 5.15– <i>Disorientation</i> no GeoGebra: (a) peças; (b) espaço para cálculos	106
Figura 5.16–Questões sobre o <i>Disorientation</i> : (a) área dos triângulos; (b) porcentagem	107
Figura 5.17–Questão sobre a fração relativa às áreas dos triângulos do <i>Disorientation</i>	108

Figura 5.18–Ampliação ou redução dinâmica do <i>Disorientation</i> no GeoGebra	108
Figura 5.19–Espiral Pitagórica	109
Figura 5.20–Questão sobre a Espiral Pitagórica	109
Figura 5.21–Árvore Pitagórica	110
Figura 5.22–Exemplos de questões sobre a Árvore Pitagórica	111
Figura 5.23– <i>Trinity Quartet</i> no GeoGebra: (a) peças; (b) desafio proposto por Catriona Shearer	112
Figura 5.24–Questão sobre o cálculo da área das triângulos que compõem o <i>Trinity Quartet</i>	112
Figura 5.25–Questão sobre triângulos equivalentes no <i>Trinity Quartet</i>	113
Figura 5.26–Questão sobre triângulos congruentes no <i>Trinity Quartet</i>	113
Figura 5.27–Questão sobre porcentagem no <i>Trinity Quartet</i>	114
Figura 5.28–Trinta e três peças que compõem os <i>puzzles</i> Tangram (4), <i>Stomachion</i> (14), <i>Disorientation</i> (4) e <i>Trinity Quartet</i> (8)	114
Figura A.1–Hidrômetro	125
Figura A.2–Cartas	126
Figura A.3–Quantidade de mochilas e o custo total	129
Figura A.4–Rolos circulares	130
Figura A.5–Sistema de dutos	131
Figura A.6–Vista superior: piscina	131
Figura A.7–Antenas	132
Figura A.8–Pula-pula	133
Figura A.9–Placa	134
Figura A.10–Tampas de vidro	134
Figura A.11–Museu de Arte Contemporânea (MAC)	135
Figura A.12–Tronco de um cone circular reto	135
Figura A.13–Polias	136
Figura A.14–Embalagens	137
Figura A.15–Triângulo ABC	137
Figura A.16–Quadro	138
Figura A.17–Planta baixa	139
Figura A.18–Azulejos	140
Figura A.19–Edifício residencial	141
Figura A.20–Logomarca	141

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1 – Dissertações do Profmat	22
Tabela 2.1 – Dobras da tira de papel para $\frac{1}{5}$	48

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CREP	Currículo da Rede Estadual Paranaense
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
IPTU	Imposto Predial e Territorial Urbano
MAC	Museu de Arte Contemporânea
MDF	Medium Density Fiberboard (Painel de Fibra de Média Densidade)
PCN's	Parâmetros Curriculares Nacionais
PSS	Processo Seletivo Simplificado
UDESC	Universidade do Estado de Santa Catarina
UEPG	Universidade Estadual de Ponta Grossa
UFPR	Universidade Federal do Paraná
UNC	Universidade do Contestado

LISTA DE SÍMBOLOS

\equiv	Congruente a
\mathbb{Z}	Conjunto dos números inteiros
\mathbb{I}	Conjunto dos números irracionais
\mathbb{Q}	Conjunto dos números racionais
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\neq	Diferente de
$>$	Maior do que
Φ	Phi
\in	Pertence a
\sim	Semelhante a
\overline{AB}	Segmento de reta de extremos A e B
$AB = n$	Medida n do segmento de reta de extremos A e B
$proj_{\overline{AB}}P$	Projeção ortogonal do ponto P sobre o segmento \overline{AB}
$\mathcal{A}(\Delta ABC)$	Área do triângulo ABC

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Justificativa para a escolha do tema	18
1.2	Revisão da bibliografia	20
1.3	Objetivos	24
1.3.1	Objetivo geral	24
1.3.2	Objetivos específicos	24
1.4	Procedimentos metodológicos	24
1.5	Recurso educacional	25
1.6	Estrutura do trabalho	27
2	PUZZLES E NÚMEROS RACIONAIS	29
2.1	Segmentos comensuráveis	29
2.2	Propriedades dos números racionais	31
2.3	Tangram	33
2.4	<i>Stomachion</i> de Arquimedes	40
2.4.1	Aproximações de Fujimoto	47
2.4.2	Teoremas de Haga	48
2.5	<i>Disorientation</i>	54
3	PUZZLES E NÚMEROS IRRACIONAIS	59
3.1	Segmentos incomensuráveis	59
3.1.1	Propriedades dos números irracionais	61
3.2	<i>Trinity Quartet</i>	62
3.2.1	Medida dos lados dos triângulos	63
3.3	Segmento de medida irracional	67
3.3.1	Retângulo brônzeo	75
4	PUZZLES E ÁREAS	79
4.1	Área de figuras geométricas planas	79
4.2	Área das peças do Tangram	83
4.2.1	Frações percentuais no Tangram	86
4.3	Área das peças do <i>Stomachion</i>	87
4.3.1	Determinantes	90
4.3.2	Teorema de Pick	91
4.3.3	Frações percentuais no <i>Stomachion</i>	93
4.4	Área das peças do <i>Disorientation</i>	94

4.4.1	Frações percentuais no <i>Disorientation</i>	95
4.5	Área das peças do <i>Trinity Quartet</i>	96
4.5.1	Frações percentuais no <i>Trinity Quartet</i>	98
5	RECURSO EDUCACIONAL – ATIVIDADES NO LIVRO DIGITAL .	99
5.1	Números racionais	99
5.2	Tangram	101
5.3	<i>Stomachion</i> de Arquimedes	104
5.4	<i>Disorientation</i>	106
5.5	Números irracionais	108
5.6	<i>Trinity Quartet</i>	111
5.7	Você é o artista!	114
6	CONCLUSÃO	115
	REFERÊNCIAS	117
	APÊNDICE A – QUESTÕES DO ENEM	123
	Índice	144

1 INTRODUÇÃO

Ao abordar a temática da Matemática, observamos que, frequentemente, essa disciplina suscita sentimentos de aversão por grande parte dos estudantes. Tal fenômeno muitas vezes decorre de dificuldades relacionadas ao entendimento da área do conhecimento, as quais podem estar associadas a lacunas de conteúdos não previamente abordados, às metodologias de ensino empregadas pelo professor ou, ainda, à falta de motivação e determinação dos estudantes em manter uma rotina de estudos regular. No que tange às metodologias utilizadas na prática pedagógica, enquanto docentes de Matemática, é imprescindível considerar que:

A Matemática é construída ao longo dos tempos e com avanços da humanidade e, com isso, entende-se que a contextualização deste componente se faz de forma significativa quando respeitada essa construção. Com isso, deve haver uma organização de planejamento com articulações de metodologias que sejam coerentes e significativas para o estudante.

Além da diversidade de metodologias e uso de recursos, o(a) estudante e seu processo de aprendizagem devem ser avaliados de forma coerente e condizente com a realidade. Nesse contexto, é fundamental o papel do(a) professor(a), que também irá monitorar, mediar, acompanhar, intervir e avaliar os estudantes, entendendo que os erros cometidos podem ser uma oportunidade de aprendizagem e sistematização dos conteúdos (Paraná, 2021, p. 6-7).

Percebemos que a utilização de metodologias diferenciadas constitui uma estratégia de grande relevância na promoção de um ambiente de aprendizagem estimulante e motivador, voltado ao desenvolvimento de uma compreensão significativa por parte dos estudantes. Além disso, é altamente recomendável estabelecer articulações entre os conteúdos a serem trabalhados e situações do cotidiano, de modo a contextualizar o aprendizado e torná-lo mais relevante e acessível.

O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição) (Brasil, 2018, p. 266).

Nessa conjuntura, a utilização de atividades concretas tende a captar a atenção dos estudantes e a motivá-los a participar do processo de ensino e aprendizagem de maneira mais significativa (Monzon, 2010). Além disso, questiona-se: por que não empregar metodologias diferenciadas no ensino de conteúdos como, por exemplo, frações, números irracionais e cálculo de áreas de figuras geométricas planas?

1.1 JUSTIFICATIVA PARA A ESCOLHA DO TEMA

Ser professora sempre foi o meu sonho! Desde a infância, essa profissão despertava em mim um brilho especial nos olhos. Assim, quando me perguntavam sobre qual carreira desejava seguir ao crescer, minha resposta era sempre rápida e espontânea. No entanto, a minha trajetória em relação à área de atuação nem sempre foi completamente clara. Até o final do Ensino Fundamental II, em 2008, eu não havia considerado a possibilidade de atuar como professora de Matemática. Foi no ano seguinte, ao ingressar no Ensino Médio, que conheci um professor de Matemática que despertou ainda mais minha paixão pelas ciências exatas. Através do seu método de ensino e da segurança que transmitia, passei a sentir maior confiança em relação aos conteúdos matemáticos. Sempre tive uma afinidade especial por essa área do conhecimento e, durante minha trajetória escolar, percebi que possuía certa facilidade com os temas matemáticos. Meu pai, inclusive, costuma afirmar que o gosto pela Matemática é algo que herdamos de nossa família, que está enraizado em nosso sangue. Isso se deve, também, ao fato de que meu falecido avô, Affonso, possuía grande facilidade com cálculos e raciocínios matemáticos.

Em 2011, no último ano do Ensino Médio, realizei exames vestibulares para diversas universidades de meu interesse. Inicialmente, prestei vestibular para a Universidade do Contestado (UNC), localizada na cidade onde residia na época, Mafra, Santa Catarina. Posteriormente, participei do Processo Seletivo Seriado (PSS) e do vestibular de inverno da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG). Além disso, também prestei vestibular para a Universidade Federal do Paraná (UFPR), na qual cursei Licenciatura em Matemática de 2012 a 2015.

No segundo ano da graduação, iniciei minha atuação profissional em um colégio particular, inicialmente como estagiária e, posteriormente, fui contratada como professora-corregente de Matemática. Nesse cargo, atuava como professora de reforço, atendendo aos estudantes que apresentavam maiores dificuldades nesse componente curricular. Trabalhei por três anos nesta instituição de ensino e, ao concluir minha formação, retornei à minha cidade natal em 2015.

Em 2016, comecei a atuar em outro colégio particular, desta vez ministrando aulas para o 4º e 5º anos do Ensino Fundamental. A proposta desta instituição era contar com um professor especialista em Matemática desde o final do Ensino Fundamental I, com o objetivo de reduzir as dificuldades enfrentadas pelos estudantes nessa área. Trabalhei nesta escola por sete anos e, em 2022, iniciei minha atuação na rede pública de ensino.

Ao longo de toda a minha trajetória como professora, busquei e continuo buscando trabalhar a Matemática de forma diferenciada, concreta e lúdica, sempre que possível. A intenção é utilizar estratégias variadas e materiais concretos, visando minimizar as dificuldades que possam surgir no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos.

A Matemática é uma área do conhecimento frequentemente considerada desafiadora por muitos estudantes, e há tópicos específicos que representam verdadeiros obstáculos para eles. No meu cotidiano docente, percebo que determinados temas geram dúvidas mais intensas do que

outros, destacando-se, por exemplo, as frações, os números irracionais e o cálculo de áreas. Esses temas foram também escolhidos como foco de estudo nesta dissertação. Além disso, compreendo que um entendimento claro e bem fundamentado desses conteúdos facilita significativamente a aprendizagem de novos tópicos, inclusive em outras áreas do conhecimento.

Diante disso, questiono: por que não utilizar estratégias diferenciadas no trabalho com conteúdos considerados difíceis pelos estudantes? Quais benefícios a adoção de recursos variados pode trazer para o estudo desses temas?

Acredito que o uso de materiais concretos, lúdicos e digitais pode promover um processo de ensino-aprendizagem mais relevante e eficiente, considerando os inúmeros benefícios que essas metodologias podem oferecer nesse contexto. Assim, a implementação de abordagens diferenciadas no ensino de frações, números irracionais e cálculo de áreas representa uma estratégia valiosa para aprimorar o ensino da Matemática.

Desta forma, empregamos nesta dissertação *puzzles*, *origami* e o GeoGebra (2025) como técnicas motivadoras no ensino de frações, números irracionais e cálculo de áreas. O ensino de números racionais e irracionais é essencial à formação matemática dos estudantes, uma vez que esses conceitos fundamentam diversas áreas do conhecimento e possuem ampla aplicabilidade. Os próprios Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática destacam competências voltadas ao ensino de números racionais e irracionais.

Resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais, ampliando e consolidando os significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.
Selecionar e utilizar diferentes procedimentos de cálculo com números naturais, inteiros, racionais e irracionais (Brasil, 1997, p. 81).

Além disso, questões que abordam números racionais, irracionais e o cálculo da área de figuras planas são recorrentes no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). No Apêndice deste trabalho, elencamos questões do ENEM que abordam esses conteúdos.

Quanto aos *puzzles*, selecionamos o Tangram, o *Stomachion* de Arquimedes e o *Disorientation* para motivar o estudo dos números racionais, e optamos pelo *Trinity Quartet* para instigar o estudo dos números irracionais. Todos os quatro *puzzles* são utilizados para estimular o cálculo da área de figuras planas poligonais, particularmente de triângulos e quadriláteros. Para a redação deste texto e do livro digital, os quebra-cabeças foram construídos com *origami* e no GeoGebra; para o trabalho em sala de aula, os *puzzles* foram confeccionados em MDF (Painel de Fibra de Média Densidade) pelo Laboratório FAB3D da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), Campus Joinville (Figueiredo, 2025).

1.2 REVISÃO DA BIBLIOGRAFIA

O estudo da Matemática ocorre frequentemente de maneira mecânica e totalmente tradicional, fundamentada na explicação de conteúdos e na resolução de exercícios. Nesse cenário, alguns conceitos podem tornar-se extremamente abstratos e de difícil compreensão para os estudantes, como frações, números irracionais e o cálculo de áreas, por exemplo. Ao longo de meus dez anos de atuação na área de Ensino de Matemática, pude perceber que, embora esses conteúdos estejam bastante presentes no cotidiano dos estudantes, eles despertam pouco interesse por parte deles, além de gerar muitas dúvidas e dificuldades. Diante dessa realidade, torna-se imprescindível que o docente busque estratégias diferenciadas para trabalhar esses temas, a fim de promover uma aprendizagem mais engajadora.

Colocar os alunos como parte atuante em sua formulação de conhecimentos, torna, de fato, a aprendizagem mais significativa e centrada em aplicações que para eles lhes seriam úteis. Quando falamos em aprendizagem que ocorre de maneira significativa estamos basicamente construindo um quebra-cabeça, onde novas peças (novas ideias) são colocadas em cima de uma parte já montada (conhecimentos prévios). Para a eficácia desse processo de construção, e para que o quebra-cabeça seja completado, professores e alunos trabalham por meio de uma complementaridade a fim de ambos cumprirem um mesmo objetivo (Santos, 2023, p. 26).

A qualidade do processo de ensino e aprendizagem da Matemática envolve diversas variáveis. Além do envolvimento e do comprometimento do estudante, outros fatores também desempenham papel fundamental nessa análise. Para ministrar qualquer disciplina, é imprescindível que o docente realize uma preparação adequada e elabore seu planejamento de forma antecipada. É importante considerar as diferentes abordagens de ensino, uma vez que a Matemática pode, muitas vezes, tornar-se excessivamente teórica e abstrata. O nível de rigor, as técnicas, as regras e a própria teoria podem acabar por gerar um sentimento de intimidação nos estudantes, levando-os a desenvolver medo da disciplina e a enfrentar maiores dificuldades relacionadas ao desenvolvimento do pensamento matemático.

O conceito de qualidade do ensino, na verdade é relativo e modifica-se historicamente, sofrendo determinações socioculturais e políticas. Em termos mais específicos, varia de acordo com as concepções epistemológicas, axiológico-teológicas e didático-metodológicas daqueles que tentam produzir as inovações ou as transformações do ensino (Fiorentini, 1995, p. 2).

Estabelecer uma abordagem de ensino eficiente em Matemática é uma tarefa árdua, uma vez que cada turma é única e composta por indivíduos com suas particularidades. Como professores, devemos desenvolver múltiplas estratégias de ensino dos conteúdos matemáticos, com o objetivo de alcançar, de maneira positiva, o maior número possível de estudantes. Nessas estratégias, podemos empregar jogos, quebra-cabeças e tecnologias digitais (Brasil, 2018).

O professor pode contar com o auxílio dos jogos e quebra-cabeças didáticos (material e virtual) com o intuito de deixar a aula mais interessante e fazer a junção do divertimento para o aluno junto com um recurso metodológico. Com o auxílio dos jogos e quebra-cabeças, o aluno passa a desenvolver a sua autoconfiança, sua capacidade de concentração, raciocínio lógico, melhora o convívio social, o respeito pelos colegas, desenvolve técnicas intelectuais, além de ser fonte de diversão, deixando as aulas de matemática mais prazerosas, mudando um pouco a rotina da sala de aula (Nascimento, 2011, p. 21).

Certamente, antes de introduzir um jogo ou quebra-cabeça em sala de aula, o docente deve analisá-lo e experimentá-lo, identificando suas potencialidades e possíveis dificuldades. Além disso, é imprescindível que seu uso seja fundamentado e esteja articulado a algum conteúdo matemático a ser explorado. Neste sentido, acreditamos que o uso de materiais concretos e diferenciados facilita o ensino de Matemática.

O uso dos jogos educativos no ensino da Matemática tem objetivos de fazer com que os alunos gostem de aprender essa disciplina, mudando a rotina da classe e despertando o interesse do aluno envolvido. A aprendizagem através de jogos que envolve estratégias que são a base do pensamento matemático, como labirintos, de encaixe, de memória, permite que o aluno faça da aprendizagem um processo interessante e até divertido. Para isso, eles devem ser utilizados ocasionalmente para sanar as lacunas que se produzem na atividade escolar diária (Lima *et al.*, 2021, p. 27).

Ensinar Matemática não é uma tarefa fácil, uma vez que muitos conteúdos são abstratos. Além disso, há muitos estudantes que têm aversão à disciplina, principalmente devido às dificuldades enfrentadas anteriormente. Um bom professor busca promover o aprendizado para o maior número possível de estudantes, sendo que a superação dos bloqueios representa um grande desafio. Uma análise importante diz respeito ao fato do docente promover a (re)significação dos conteúdos, contextualizando-os.

A Matemática não é uma ciência cristalizada e imóvel; ela está afetada por uma contínua expansão e revisão dos seus próprios conceitos. Não se deve apresentar a Matemática como uma disciplina fechada, homogênea, abstrata ou desligada da realidade. Ao longo do tempo, ela esteve ligada à diferentes áreas do conhecimento, respondendo a muitas questões e necessidades do homem, ajudando-o a intervir no mundo que o rodeava (Santos; França; Santos, 2007, p. 9).

Outro ponto a ser considerado é o emprego de materiais concretos/manipuláveis, como jogos e quebra-cabeças.

Os materiais manipulativos tiveram destaque por facilitar a aquisição e uso de conceitos de número racional, quando ressaltaram a compreensão das crianças ao simular situações concretas a fim de compreender conceitos matemáticos abstratos (Berh, 1983 apud Grando, 2015, p. 395).

Por meio do uso de recursos concretos, os discentes têm maiores chances de assimilar o conteúdo a ser estudado, colocá-lo em prática e visualizar de forma mais clara os conceitos associados. No entanto, é importante destacar que a teoria não deve ser negligenciada, pois ela fornece a base para toda manipulação matemática. Grandó (2015) afirma que talvez seja mais interessante iniciar um estudo utilizando o material concreto e, posteriormente, evoluir para os conceitos matemáticos mais abstratos.

Além disso, outros recursos que também devem ser considerados são as tecnologias e os jogos digitais, uma vez que estes estão cada vez mais presentes no cotidiano das pessoas. Tanto professores quanto estudantes estão imersos em um universo tecnológico em constante evolução.

Um recurso tecnológico além de trazer novos significados na participação dos alunos, traz uma quebra no modelo padrão de aulas, isso estimula o interesse dos mesmos pelo conteúdo que vem sendo aplicado. Assim, fazemos uso de uma aprendizagem que significativamente promove inúmeros aportes para a formação acadêmica de cada indivíduo (Santos, 2023, p. 6).

Ao comparar este trabalho com as dissertações publicadas no repositório do Profmat, disponível em <https://sca.profmatt-sbm.org.br/busca_tcc.php>, constatamos os resultados elencados na Tabela 1.1.

Tabela 1.1 – Dissertações do Profmat

Termo para a busca	Número de dissertações
área	188
<i>disorientation</i>	0
frações	112
GeoGebra	469
irracionais	27
<i>origami</i>	35
<i>puzzles</i>	1
racionais	68
<i>stomachion</i>	2
tangram	15
tecnologias digitais	17
<i>trinity quartet</i>	0

Fonte: Autora em 04/07/2025.

Dos trabalhos relacionados na Tabela 1.1, alguns poucos propõem a utilização do Tangram e do *Stomachion* de Arquimedes como recurso educacional no estudo de frações, áreas e perímetros. E nenhum dos mais de oito mil trabalhos disponíveis no repositório faz menção aos *puzzles Disorientation* e *Trinity Quartet*.

Os trabalhos no repositório do Profmat que abordam o *puzzle Stomachion* são as dissertações de Rodrigues (2020b) e de Silva (2017). Rodrigues (2020b) apresenta: um breve histórico

sobre a vida de Arquimedes e suas contribuições à Matemática e à Física; o processo de construção de um palimpsesto (pergaminho); a associação do *Stomachion* à análise combinatória e de Arquimedes aos primeiros registros de estudos sobre o tema. Ainda, analisa a questão norteadora do *puzzle Stomachion*: De quantas maneiras o quadrado do *Stomachion* pode ser remontado a partir de suas 14 peças?, assim como a relação de comensurabilidade com o quadrado. A autora também propõe a utilização de determinantes e do teorema de Pick para calcular a área das peças do *Stomachion*. O trabalho é finalizado com uma sequência didática sobre permutações simples explorando o quebra-cabeça e o *software Peces*, o qual permite que o usuário forme figuras combinando as peças do *Stomachion*, evitando desta forma os tradicionais recortes em papel.

Por sua vez, Silva (2017) destaca os legados de Arquimedes, como o cálculo da área do círculo, as relações entre o cilindro e a esfera e o estudo de quebra-cabeças como o *Stomachion*. O autor discorre sobre os livros *Códex B* e *Códex C*, nos quais estão os registros relacionados ao *Stomachion*, e as possibilidades de montagem do quadrado utilizando todas as catorze peças do quebra-cabeça. Para calcular a área das peças, o autor emprega determinantes e o teorema de Pick. Silva finaliza o trabalho sugerindo atividades pedagógicas que exploram o uso de recursos computacionais, como a coleção Matemática Multimídia - Coleção M^3 .

Quanto ao quebra-cabeça Tangram, há no repositório do Profmat dissertações que abordam a utilização do *puzzle* no ensino de frações, no cálculo de áreas e perímetros, além do estudo de formas geométricas. Destes trabalhos, destacamos as dissertações de Miranda (2015) e de Barbosa (2023).

Miranda (2015) apresenta estratégias lúdicas para ensinar geometria por meio do Tangram. Nesse sentido, apresenta alguns tipos de Tangram e conceitos geométricos básicos, como polígonos, área e perímetro, além de discorrer sobre algumas formas geométricas específicas: triângulos, quadrados, retângulos, losangos, paralelogramos e trapézios. O autor relata propostas didáticas que exploram o Tangram através da sua história, da construção e do cálculo da área das peças por meio da decomposição em quadrados unitários. Ainda, propõe a montagem de figuras construídas a partir das sete peças do *puzzle* por meio de sombras e o cálculo do perímetro destas imagens. Por fim, Miranda sugere o acesso a alguns sites específicos que permitem preencher uma dada figura empregando as sete peças do Tangram.

Já Barbosa (2023) usa o Tangram em uma proposta de ensino voltada ao estudo de expressões algébricas no 8º e 9º anos do Ensino Fundamental. O autor inicia discorrendo sobre a origem da álgebra e o seu ensino no Brasil, particularmente sua presença nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e nos documentos norteadores do ensino no estado de Goiás. Na sequência, o autor explora conceitos relacionados à anéis de polinômios, estrutura fundamental para o estudo das operações polinomiais, e também aborda a importância da adoção de metodologias ativas no Ensino de Matemática, dentre estas a aprendizagem em pares. Barbosa finaliza o trabalho apresentando uma sequência didática que explora o Tangram na construção de figuras geométricas com quantidades específicas de peças do

quebra-cabeça. No desenvolvimento da atividade, sugere aplicar a metodologia da aprendizagem em pares e a gamificação.

Em relação às dissertações do repositório do Profmat anteriormente destacadas, nosso trabalho se diferencia pela construção dos *puzzles* com *origami* e também pela organização de um livro digital na plataforma GeoGebra que explora os quebra-cabeças de forma interativa.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 OBJETIVO GERAL

Empregar *puzzles*, *origami* e o GeoGebra como ferramentas pedagógicas no ensino de frações, números irracionais e cálculo da área de figuras planas na Educação Básica.

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Identificar metodologias adequadas e eficazes no estudo da temática.
2. Propor atividades diversificadas e criativas que enriqueçam o ensino de frações, números irracionais e cálculo da área de figuras planas, estimulando o interesse dos estudantes.
3. Utilizar o GeoGebra como uma ferramenta no ensino dos tópicos abordados, facilitando a visualização e a compreensão de conceitos matemáticos.
4. Estimular o uso do *origami* na concepção de quebra-cabeças.
5. Incentivar a incorporação da Matemática Recreativa na Educação Básica, promovendo um ambiente de aprendizagem mais lúdico, motivador e participativo.

1.4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A metodologia adotada nesta dissertação, no que diz respeito à abordagem, caracteriza-se como qualitativa, uma vez que busca aprofundar a compreensão dos temas abordados, sem ênfase na representatividade numérica. Além disso, as características da pesquisa qualitativa incluem:

[...] objetivação do fenômeno; hierarquização das ações de descrever, compreender, explicar; precisão das relações entre o global e o local em determinado fenômeno; observância das diferenças entre o mundo social e o mundo natural; respeito ao caráter interativo entre os objetivos buscados pelos investigadores, suas orientações teóricas e seus dados empíricos; busca de resultados os mais fidedignos possíveis; oposição ao pressuposto que defende um modelo único de pesquisa para todas as ciências (Gerhardt; Silveira, 2009, p. 32).

Quanto à natureza, a pesquisa é classificada como aplicada, pois visa gerar conhecimentos voltados para aplicações práticas. Em relação aos objetivos, trata-se de uma pesquisa exploratória,

cujo propósito é proporcionar maior familiaridade com o problema, com o intuito de torná-lo mais explícito ou de construir hipóteses (Gerhardt; Silveira, 2009, p. 35).

No que tange aos procedimentos, a pesquisa caracteriza-se como bibliográfica, uma vez que foram realizadas análises e estudos com base em referências teóricas previamente selecionadas.

1.5 RECURSO EDUCACIONAL

Lecionar Matemática vai muito além da simples transmissão de conceitos teóricos; trata-se de uma atividade mais complexa e aprofundada. Um professor competente deve buscar estratégias e metodologias diferenciadas para trabalhar com esse componente curricular, considerando que a disciplina frequentemente é percebida como difícil e predominantemente teórica. Embora alguns conteúdos matemáticos exijam uma abordagem mais técnica e expositiva, nada impede que o docente planeje e implemente atividades inovadoras com o objetivo de consolidar os conceitos e promover um engajamento mais significativo por parte dos estudantes. Nesse contexto, é fundamental promover atividades que estimulem a curiosidade e o interesse, bem como desenvolvam habilidades de investigação e de formulação de hipóteses ...

[...] que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo. Ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais “formais”, incluindo a demonstração de algumas proposições (Brasil, 2018, p. 542).

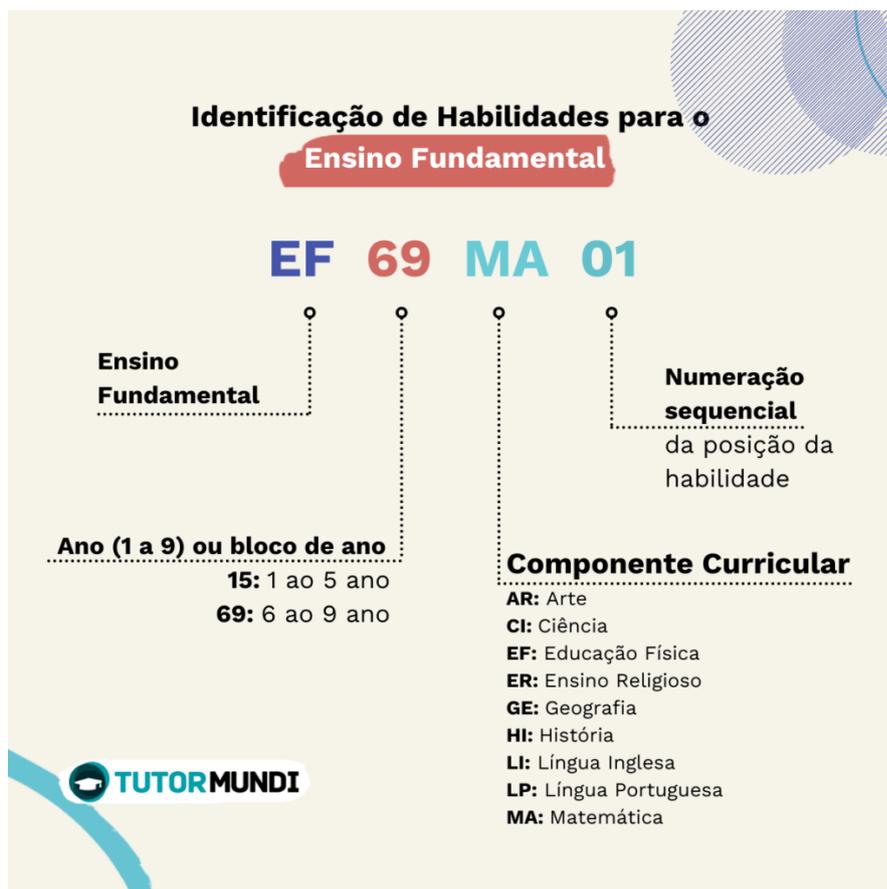
Neste âmbito, elaboramos como recurso educacional o livro digital *A arte dos puzzles: desafios matemáticos* (Guerber, 2025), fundamentado nas seguintes habilidades da BNCC:

1. EF06MA07, EF06MA09 – representações e cálculos com frações;
2. EF09MA02 – compreensão e representações de números irracionais;
3. EF07MA31, EF07MA32 – equivalência e cálculo de área de figuras planas.

As habilidades exploradas no recurso educacional são pertinentes ao sexto, sétimo e nono anos do Ensino Fundamental, como ilustra a Figura 1.1.

O uso de quebra-cabeças e softwares de geometria dinâmica constitui uma estratégia eficaz para promover o desenvolvimento das habilidades previstas na BNCC. Essas ferramentas estimulam o raciocínio lógico, a criatividade e a capacidade de investigação dos estudantes, ao proporcionar experiências de aprendizagem interativas e desafiadoras. Os quebra-cabeças, por exemplo, incentivam a resolução de problemas, o pensamento crítico e a compreensão de

Figura 1.1 – Denominação das habilidades da BNCC



Fonte: Benedetti (2021).

conceitos geométricos de forma lúdica e envolvente. Já os softwares de geometria dinâmica possibilitam a manipulação de figuras e a visualização de propriedades geométricas de maneira prática e intuitiva, facilitando a compreensão de relações espaciais e propriedades matemáticas. Assim, a integração dessas abordagens contribui para o desenvolvimento de habilidades como a argumentação, a comunicação matemática e a resolução de problemas, alinhando-se às diretrizes da BNCC para uma aprendizagem contextualizada.

Da mesma forma que na fase anterior, a aprendizagem em Matemática no Ensino Fundamental-Anos Finais também está intrinsecamente relacionada à apreensão de significados dos objetos matemáticos. Esses significados resultam das conexões que os alunos estabelecem entre os objetos e seu cotidiano, entre eles e os diferentes temas matemáticos e, por fim, entre eles e os demais componentes curriculares. Nessa fase, precisa ser destacada a importância da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação. Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos (Brasil, 2018, p. 300).

Além disso, o livro digital também aborda conteúdos conceituais e procedimentais presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1997, p. 55), como, por exemplo, a “exploração dos diferentes significados das frações em situações-problema: partetodo, quociente e razão”. Acreditamos ainda que o uso de tecnologias digitais potencializa o engajamento e o interesse dos estudantes, uma vez que esses recursos são bastante atuais e fazem parte do cotidiano dos discentes. Nesse contexto, a utilização do GeoGebra surge como uma estratégia bastante relevante para o ensino da Matemática, contribuindo para uma aprendizagem mais interativa e significativa.

O software GeoGebra é um programa configurado a partir de propriedades matemáticas, constituído como finalidade da universalização do conhecimento no ambiente escolar. É um aplicativo dinâmico que faz a junção de conceitos de geometria e de álgebra em uma interface gráfica, que promove a construção de vários conceitos no campo matemático (Moura; Santos; Silva, 2016, p. 3).

Desta forma, consideramos que a integração do uso de quebra-cabeças e do software GeoGebra pode proporcionar diversos benefícios ao processo de ensino e aprendizagem, especialmente no entendimento de conceitos relacionados às frações, aos números irracionais e ao cálculo de áreas de figuras planas. Essa combinação de recursos didáticos favorece a construção de conhecimentos de forma mais interativa, dinâmica e contextualizada, promovendo maior engajamento dos estudantes, além de estimular o raciocínio lógico, a visualização espacial e a compreensão aprofundada dos conceitos matemáticos. Assim, a adoção dessas estratégias pedagógicas pode contribuir significativamente para o desenvolvimento de habilidades essenciais, alinhadas às diretrizes curriculares e às demandas contemporâneas de uma educação mais inovadora e inclusiva.

1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho está estruturado em seis capítulos e um apêndice.

1. Capítulo 1 – Introdução: apresentamos a contextualização do tema, a justificativa para esta escolha, a revisão bibliográfica, os objetivos geral e específicos, além dos procedimentos metodológicos e de uma breve explicação sobre o recurso educacional desenvolvido.
2. Capítulo 2 – *Puzzles* e números racionais: exploramos, no GeoGebra e com *origami*, os quebra-cabeças Tangram, *Stomachion* de Arquimedes e *Disorientation* como recurso didático direcionado ao trabalho com frações.
3. Capítulo 3 – *Puzzles* e números irracionais: investigamos, no GeoGebra e com *origami*, a representação de alguns números irracionais por meio do quebra-cabeça *Trinity Quartet*.
4. Capítulo 4 – *Puzzles* e áreas: empregamos os *puzzles* Tangram, *Stomachion* de Arquimedes, *Disorientation* e *Trinity Quartet* para calcular a área de figuras planas poligonais.

5. Capítulo 5 – Recurso educacional: introduzimos o livro digital *A arte dos puzzles: desafios matemáticos* (Guerber, 2025), disponível em <<https://www.geogebra.org/m/ghv2ufjt>>, composto por sete capítulos e as referências bibliográficas. No livro, exploramos conceitos matemáticos de forma envolvente e interativa, utilizando uma poderosa ferramenta tecnológica: o GeoGebra. Capítulo a capítulo, desvendamos a Matemática por trás de diversos desafios e quebra-cabeças, tornando o aprendizado mais acessível e instigante. A cada etapa, mostramos como o GeoGebra pode ser utilizado para visualizar conceitos, testar hipóteses e desenvolver o raciocínio lógico de maneira intuitiva. O objetivo é transformar a experiência matemática em algo dinâmico e prazeroso, permitindo que estudantes e entusiastas explorem padrões, estratégias e soluções de forma criativa.
6. Capítulo 6 – Conclusão: apresentamos as considerações finais.
7. Apêndice A: elencamos questões do ENEM que abordam os conteúdos pertinentes ao tema deste trabalho.

2 PUZZLES E NÚMEROS RACIONAIS

Apresentamos neste capítulo conceitos e relações matemáticas associadas à comensurabilidade, concepção importante na definição de número racional e na medida de um segmento. Ademais, exibimos três quebra-cabeças: Tangram, *Stomachion* de Arquimedes e *Disorientation*, juntamente com o passo a passo das suas respectivas construções. Esses *puzzles* podem ser utilizados no ensino dos números racionais, possibilitando o desenvolvimento de habilidades de pensamento espacial e criatividade. Complementamos o capítulo com dois métodos de dobraduras, as aproximações de Fujimoto e os teoremas de Haga, empregados para representar graficamente frações.

2.1 SEGMENTOS COMENSURÁVEIS

A definição de número racional utilizada nesta dissertação é baseada em Lima (2013). E, para que possamos compreendê-la, faz-se necessária a explanação de alguns conceitos relacionados à medida de segmentos.

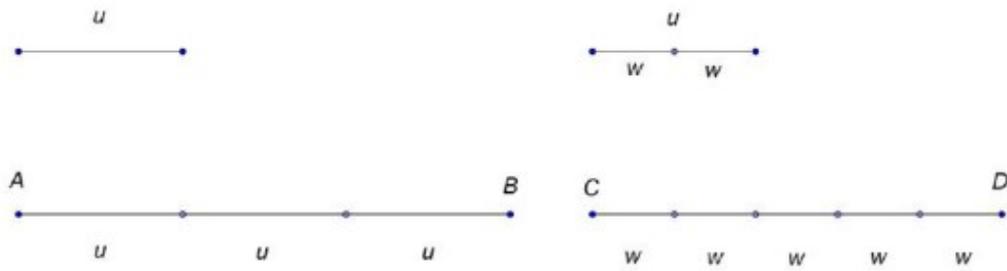
Consideremos um segmento de reta \overline{AB} . Para determinar a medida desse segmento, ou seja, a distância entre os pontos A e B , devemos fixar uma unidade de medida padrão u , denominada segmento unitário ou segmento de medida 1. Dividindo o segmento \overline{AB} em n segmentos justapostos, com $(n - 1)$ pontos interiores, a medida de \overline{AB} será a soma das medidas desses n segmentos. Caso estes n segmentos sejam todos congruentes¹ a u , então $AB = n$, isto é, u cabe n vezes em \overline{AB} .

Contudo, pode ocorrer de u não caber um número inteiro de vezes em \overline{AB} . Neste caso, a medida de \overline{AB} não será dada por um número inteiro positivo, o que conduz à definição de número racional ou fração. Para tanto, consideremos um segmento de reta r que caiba n vezes em u e m vezes em \overline{AB} . Assim, o segmento r será uma medida comum de u e \overline{AB} , estes denominados segmentos comensuráveis, isto porque existe uma unidade comum para expressar a medida de ambos. Desta forma, temos que $r = \frac{1}{n}u$ e, conseqüentemente, $AB = \frac{m}{n}u$.

Segundo Lima *et al.* (1997, p. 63): “Quando o segmento considerado é comensurável com a unidade escolhida, sua medida é um número racional (inteiro ou fracionário)”. A Figura 2.1 ilustra segmentos comensuráveis.

¹ Mesma medida.

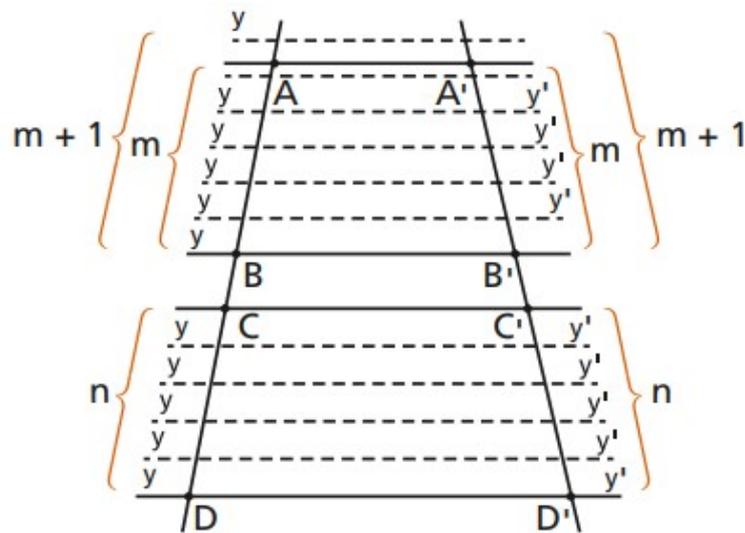
Figura 2.1 – Segmentos comensuráveis \overline{AB} e \overline{CD}



Fonte: Broetto (2016).

Segmentos não comensuráveis são denominados incomensuráveis. Neste caso, os segmentos não podem ser medidos com base em outra unidade de medida, como ilustra a Figura 2.2.

Figura 2.2 – Segmentos incomensuráveis \overline{AB} e \overline{CD}



Fonte: Dolce e Pompeo (2013a).

A partir da comensurabilidade, pode-se estabelecer o conceito de número racional - Definição 2.1.

Definição 2.1. *Número racional é todo número que pode ser representado por meio de uma fração $d = \frac{m}{n}$, onde $m, n \in \mathbb{Z}$, com $n \neq 0$.*

Por conseguinte, o conjunto dos números racionais \mathbb{Q} é representado como:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}, \text{ com } m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0 \right\},$$

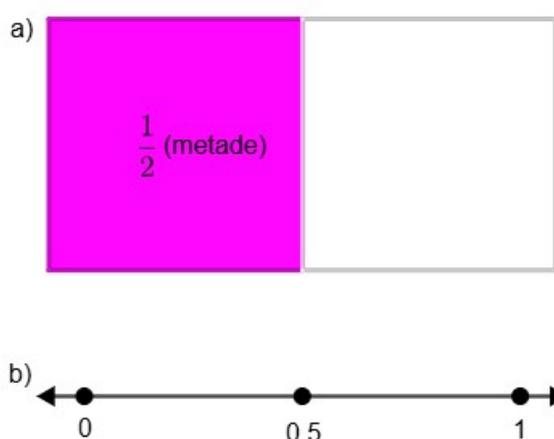
abrangendo os números naturais (\mathbb{N}) e os números inteiros (\mathbb{Z}).

Nesta perspectiva, é importante destacarmos que existem diversas maneiras de definir os números racionais. De acordo com Charalambous e Pitta-Pantazi (2007 apud Quaresma; Ponte, 2012, p. 40), podemos relacionar cinco significados diferentes para os números racionais:

(i) parte-todo – caso em que existe uma comparação entre a parte de um todo contínuo ou discreto, ou seja, o número racional representa a relação entre o numerador que indica o número de partes que se tomam do todo e o denominador que é o número de partes em que o todo está dividido, a compreensão deste significado é fundamental para a compreensão dos restantes significados; (ii) razão – designa uma comparação entre duas quantidades da mesma natureza ou de natureza distinta; (iii) operador – transforma o cardinal de um conjunto discreto, pode ser partitivo (no caso da fração $\frac{1}{b}$) ou multiplicativo partitivo (no caso da fração $\frac{a}{b}$, com $a \neq 0$); (iv) quociente – um número racional visto como resultado de uma divisão entre dois números naturais, onde o numerador e o denominador representam o todo; e (v) medida – situação que se traduz na comparação entre duas grandezas, em que uma delas é considerada a unidade.

Assim, um número racional é representado por uma fração, a qual corresponde a um número inteiro ou a um decimal finito ou a uma dízima periódica². Ainda, podemos representar um número racional por meio de recursos gráficos, como ilustrações e retas numéricas. O número racional cinco décimos (que significa a metade de 1 inteiro), por exemplo, pode ser representado pela fração irredutível³ $\frac{1}{2}$ – Figura 2.3(a) – e pelo número decimal 0,5 – Figura 2.3(b).

Figura 2.3 – Representações do número racional cinco décimos: (a) ilustração; (b) reta numérica



Fonte: Autora.

2.2 PROPRIEDADES DOS NÚMEROS RACIONAIS

Após definirmos e mencionarmos as formas de representação de um número racional, destacamos as propriedades que regem as suas operações (Sodré, 2020).

² “Dízimas periódicas são números com infinitas casas decimais, nos quais a partir de alguma casa decimal, um algarismo ou um grupo de algarismos passa a se repetir infinitamente. O algarismo ou algarismos que se repetem infinitamente constituem o período da dízima” (Triches; Lima, 2022, p. 15).

³ Fração em que o numerador e o denominador não têm divisores comuns além de 1.

• **Propriedades da soma**

1. **Fechamento:** a soma de dois números racionais também é um número racional.
2. **Associativa:** para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $a + (b + c) = (a + b) + c$.
3. **Comutativa:** para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}$, $a + b = b + a$.
4. **Elemento neutro:** o número zero é o elemento neutro da soma porque $p + 0 = p$ para todo $p \in \mathbb{Q}$.
5. **Elemento oposto:** para todo $q \in \mathbb{Q}$ existe $-q \in \mathbb{Q}$ tal que $q + (-q) = 0$.

Observação 2.1. A diferença de dois números racionais a e b é a soma de a com o oposto de b , isto é, $a - b = a + (-b)$.

• **Propriedades da multiplicação**

1. **Fechamento:** o produto de dois números racionais também é um número racional.
2. **Associativa:** para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
3. **Comutativa:** para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \cdot b = b \cdot a$.
4. **Elemento neutro:** o número um é o elemento neutro da multiplicação pois $p \cdot 1 = p$ para todo $p \in \mathbb{Q}$.
5. **Elemento inverso:** para todo $q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, com $q \neq 0$, existe $q^{-1} = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

Observação 2.2. O quociente de dois números racionais a e b é o produto de a pelo inverso de b , ou seja, $a \div b = a \cdot b^{-1}$.

Introduzir o conjunto dos números racionais na Educação Básica é um grande desafio, devido principalmente ao nível de abstração exigido para trabalhar a definição, as propriedades e as operações pertinentes a esse conjunto numérico. A BNCC destaca, na unidade temática Números, que:

Com referência ao Ensino Fundamental – Anos Finais, a expectativa é a de que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos (Brasil, 2018, p. 269).

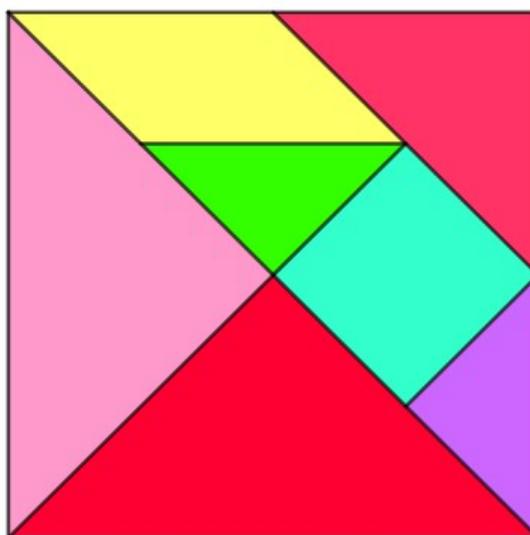
O uso de recursos metodológicos diferenciados pode amenizar o desafio. Desta forma, propomos que o professor de Matemática da Educação Básica explore alguns *puzzles*, ou seja, “jogos que desafiam a mente, exigindo raciocínio lógico, criatividade e habilidades de resolução de problemas. Eles podem assumir diversas formas, como quebra-cabeças, jogos de lógica, e desafios visuais” (Santos, 2024, n.p), para desenvolver o estudo dos números racionais através de uma abordagem menos abstrata.

2.3 TANGRAM

O primeiro quebra-cabeça que investigamos é o Tangram. Este é um recurso educativo voltado para o desenvolvimento de habilidades cognitivas, espaciais e matemáticas, que estimula a criatividade, a curiosidade e a imaginação, e que pode ser explorado em todas as faixas etárias (Marques, 2023).

O Tangram é um quebra-cabeça antigo, de origem chinesa. Reza a lenda que um rei, que adorava colecionar azulejos, solicitou a um de seus servos que levasse um azulejo de presente a um amigo. No percurso, o serviçal tropeçou e derrubou o azulejo, que se quebrou em exatas sete peças: dois triângulos retângulos isósceles grandes, um triângulo retângulo isósceles médio, dois triângulos retângulos isósceles pequenos, um quadrado e um paralelogramo (Gobert, 2017), conforme ilustra a Figura 2.4.

Figura 2.4 – Tangram de 7 peças



Fonte: Autora.

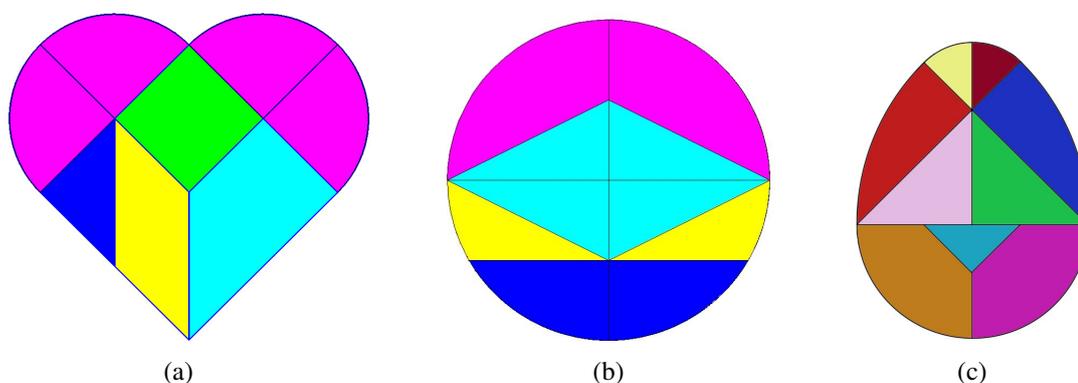
Depois de recolher as peças, o serviçal retornou ao castelo e informou ao rei o que havia acontecido. Ao manipularem as partes do azulejo, perceberam que com as setes peças era possível organizar diversas formas e, por tal feito, acreditaram que o quebra-cabeça formado era mágico (Gobert, 2017).

A palavra Tangram tem uma etimologia incerta, com várias teorias para explicar a sua origem. Uma dessas teorias sugere que Tangram deriva da expressão chinesa *Tchi Tchiao Pan*, que significa “sete peças da sabedoria”. Outra teoria sugere que o nome possa advir do inglês *tangam*, com o significado de “misturas” ou “desconhecidos”. Há ainda uma teoria que alega que a palavra advém da dinastia chinesa *Tang*, ou até mesmo do barco cantonês *bundumocu*.

O Tangram quadrado de sete peças, denominadas *tans* – Figura 2.4, é o mais conhecido. No entanto, destacamos a existência de outras variações, como o Tangram em formato de coração

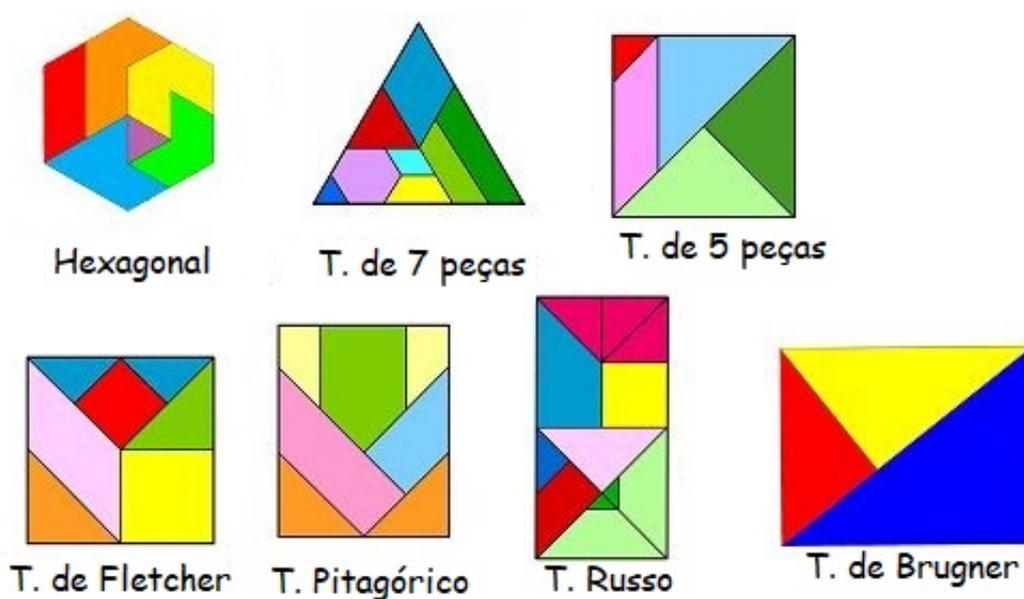
– Figura 2.5(a), o circular – Figura 2.5(b), e o oval – Figura 2.5(c). Além destes, há versões menos conhecidas, como o hexagonal, o triangular, o de cinco peças, o de Fletcher, o pitagórico, o russo e o de Brugner, ilustrados na Figura 2.6.

Figura 2.5 – Versões do Tangram: (a) coração; (b) circular; (c) oval



Fonte: Benevenuti e Santos (2016).

Figura 2.6 – Outras versões do Tangram



Fonte: Adaptado de Profelico (2023).

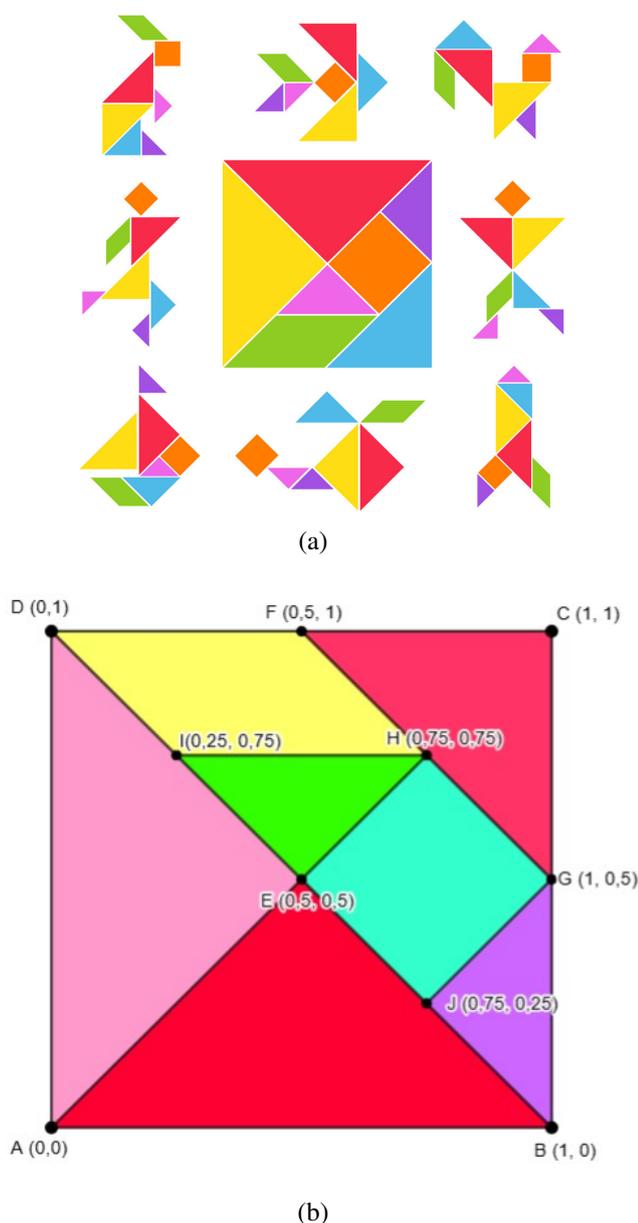
Neste trabalho, empregamos o Tangram original, ou seja, o Tangram quadrado de sete peças. Através deste, podemos explorar diversos conteúdos matemáticos, como áreas, perímetros, polígonos, composição e decomposição de figuras, ângulos, congruência e semelhança de triângulos, simetria, além de proporção, porcentagem e frações.

O tangram, como recurso didático, estimula o espírito de investigação, o interesse, a criatividade, a curiosidade e o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas. As vantagens em se utilizar o tangram, como recurso didático, são inúmeras e desenvolvem diversas competências como: remontar,

discutir, analisar, comentar, corrigir, praticar, entre outras. E quanto mais o aluno manuseá-lo, maior será sua criatividade e seu raciocínio geométrico, percebendo — assim — formas, construção, representação e desconstrução das mesmas (Benevenuti; Santos, 2016, p. 6).

A razão entre a área de cada peça do Tangram e a área total do quadrado formado por todas as peças é um número racional (Fernandes, 2018; Nós; Fernandes, 2019; Nós; Fernandes, 2018). As peças do Tangram podem ser utilizadas para construir diferentes figuras, como animais, objetos, pessoas ou formas abstratas - Figura 2.7(a). O rearranjo das peças é uma atividade que estimula a imaginação, desenvolvendo habilidades de raciocínio espacial e aprendizado sobre proporções e simetria.

Figura 2.7 – (a) Figuras formadas com as sete peças do Tangram; (b) vértices dos polígonos que compõem o Tangram em um quadrado 1×1

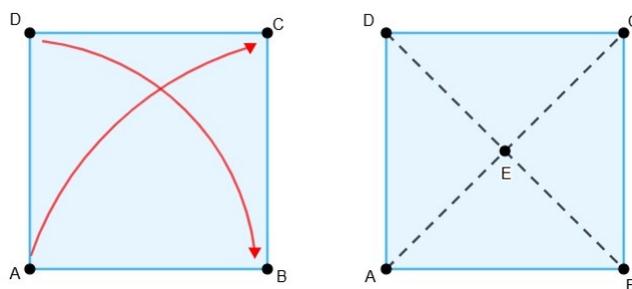


Fonte: a) Peters (s. d.); b) Autora.

Podemos construir o Tangram usando *origami*, que é a arte japonesa de dobrar papel para criar figuras e objetos incríveis, sem usar tesoura ou cola. As dobraduras, ou vincos, podem ser simuladas no GeoGebra empregando-se um quadrado $ABCD$ de lado 1. As coordenadas dos vértices das sete peças são os pontos $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$, $D(0, 1)$, $E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $F\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $G\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $H\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$, $I\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ e $J\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$, como ilustra a Figura 2.7(b). O passo a passo da divisão do quadrado com *origami* é descrito a seguir no GeoGebra.

1. No quadrado $ABCD$, simulamos duas dobras levando o vértice A sobre o vértice C e, em seguida, o vértice D sobre o vértice B – Figura 2.8, definindo os segmentos \overline{AC} e \overline{BD} .

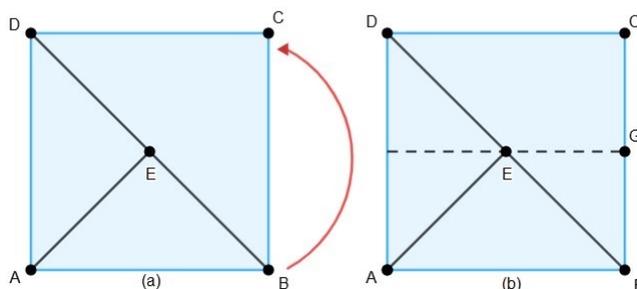
Figura 2.8 – Passo 1 da construção do Tangram com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

2. Na interseção dos vincos \overline{AC} e \overline{BD} , definimos o ponto E e destacamos os segmentos \overline{BD} e \overline{AE} , conforme mostra a Figura 2.9(a).
3. Determinamos a dobra levando o vértice B sobre o vértice C , e definimos o ponto G , interseção da dobra com o segmento \overline{BC} – Figura 2.9(b).

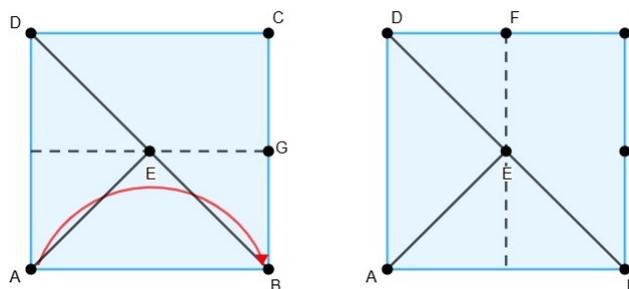
Figura 2.9 – Passos 2 e 3 da construção do Tangram com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

4. Realizamos a dobra levando o vértice A sobre o vértice B , estabelecendo o ponto F , interseção da dobra com o segmento \overline{CD} – Figura 2.10.

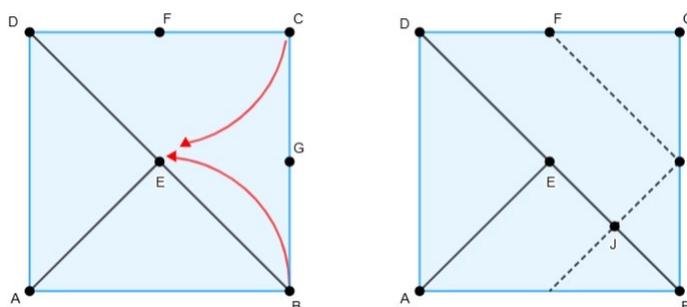
Figura 2.10 – Passo 4 da construção do Tangram com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

5. Efetuamos a dobra levando o vértice C sobre o ponto E , determinando o segmento \overline{FG} . Logo após, desenvolvemos a dobra levando o vértice B sobre o ponto E , definimos o ponto J (ponto médio do segmento \overline{BE}), interseção da dobra com o segmento \overline{BD} – Figura 2.11.

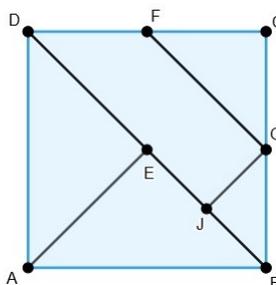
Figura 2.11 – Passo 5 da construção do Tangram com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

6. Traçamos o segmento \overline{JG} , conforme ilustra a Figura 2.12.

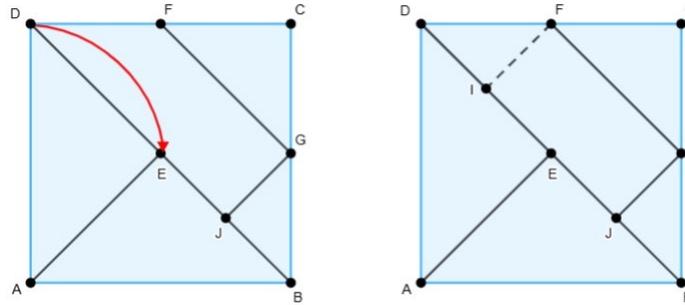
Figura 2.12 – Passo 6 da construção do Tangram com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

7. Efetuamos a dobra levando o vértice D sobre o ponto E , definindo o ponto I (ponto médio do segmento \overline{DE}), interseção da dobra com o segmento \overline{BD} – Figura 2.13.

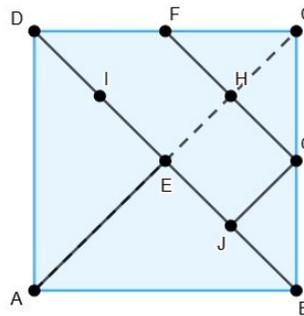
Figura 2.13 – Passo 7 da construção do Tangram com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

8. Determinamos a dobra levando o ponto F sobre o ponto G , estabelecendo o ponto H (ponto médio de \overline{FG}), interseção da dobra \overline{AC} com a dobra \overline{FG} , conforme ilustra a Figura 2.14.

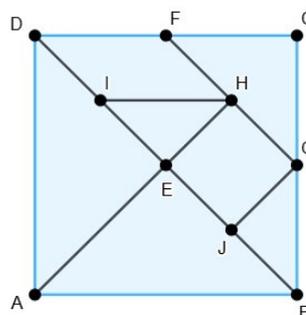
Figura 2.14 – Passo 8 da construção do Tangram com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

9. Traçamos os segmentos \overline{IH} e \overline{EH} , conforme ilustra a Figura 2.15.

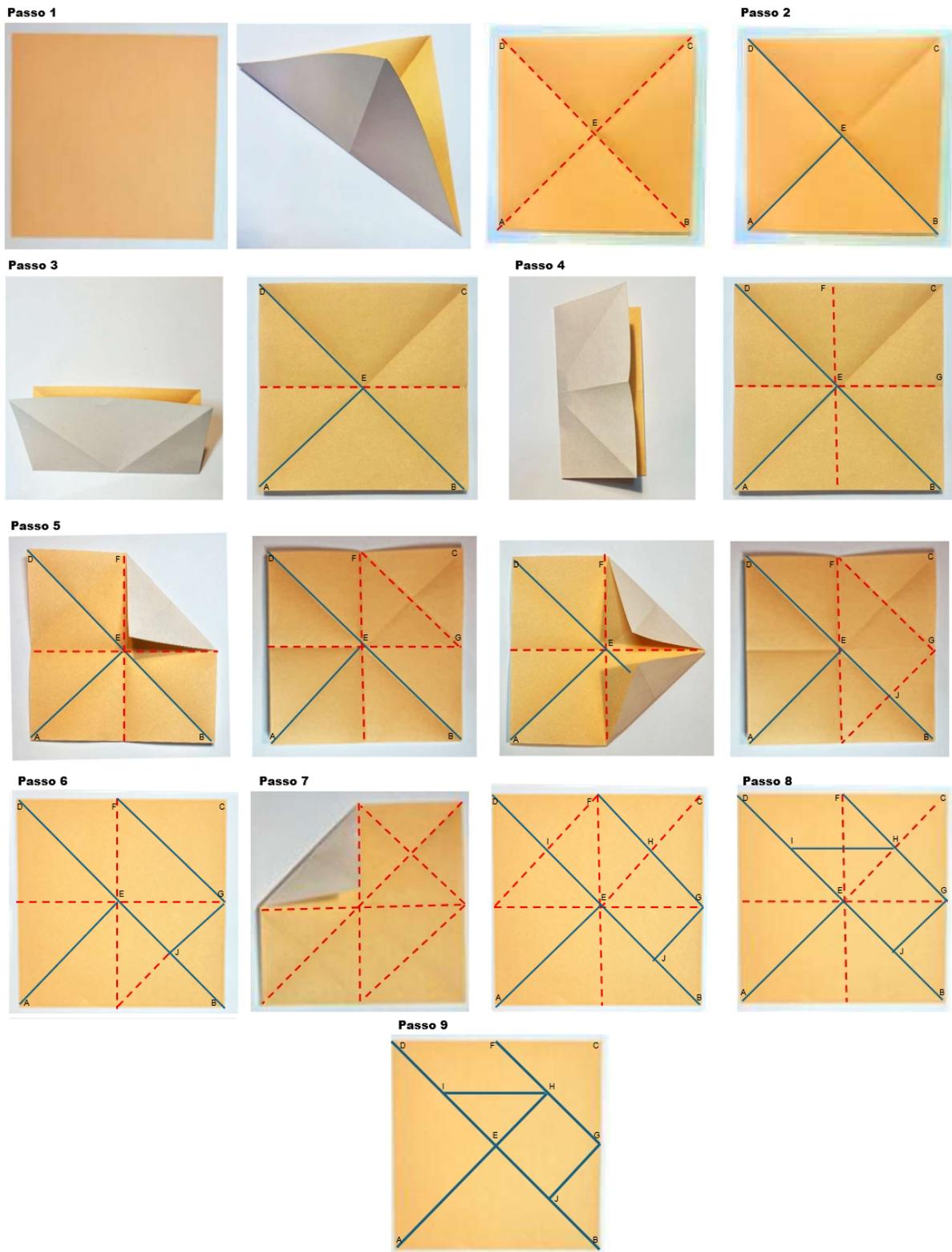
Figura 2.15 – Passo 9 da construção do Tangram com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

A Figura 2.16 ilustra as dobraduras para construir o Tangram com *origami*.

Figura 2.16 – Construção do Tangram com *origami*



Fonte: Saito (2025a).

Assim, obtemos de forma simples, com a ideia de dobrar ao meio, os vértices dos polígonos que compõem o Tangram quadrado de 7 peças.

2.4 STOMACHION DE ARQUIMEDES

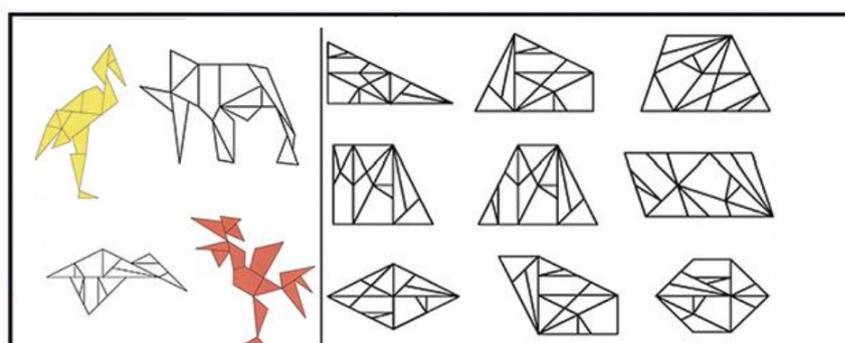
O *puzzle Stomachion*, também conhecido como *Ostomachion* ou *Loculus Archimedi* (caixa de Arquimedes), é um dos mais antigos quebra-cabeças geométricos que se conhece e sua invenção é atribuída a Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.), matemático e filósofo grego que residiu na cidade italiana de Siracusa. A tradução de *Stomachion* é pouco conhecida, mas muitos associam o termo com a palavra estômago (Oliveira; Silva; Brito, 2018, p. 1).

O *Stomachion* é um quebra-cabeça constituído de 14 peças poligonais, oriundas da decomposição de um quadrado – Figura 2.17(a), e que podem ser rearranjadas na forma de animais e de diversos polígonos, como ilustra a Figura 2.17(b) (García, 2011; Nos; Fernandes, 2019).

Figura 2.17 – *Stomachion*: (a) peças em MDF; (b) formas obtidas com o rearranjo das peças



(a)



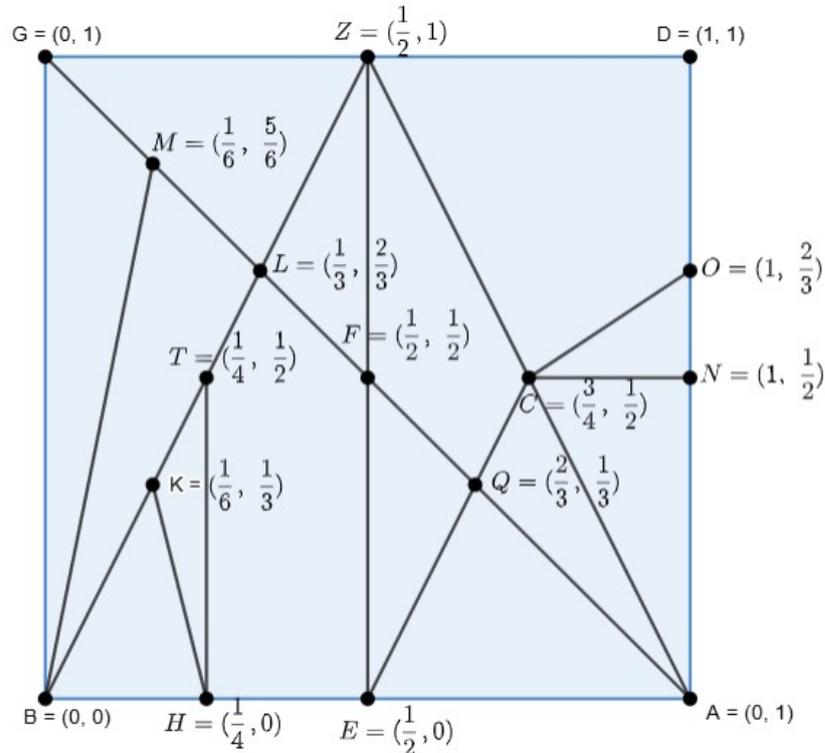
(b)

Fonte: a) Figueiredo (2025); b) Gauci (2018).

Assim como no Tangram, a razão entre a área de cada peça do *Stomachion* e a área total do quadrado formado por todas as peças é um número racional (Fernandes, 2018; Nós; Fernandes, 2019; Nós; Fernandes, 2018). Também podemos construir o *Stomachion* usando *origami*, cujas dobraduras podem ser simuladas no GeoGebra a partir de um quadrado $ABGD$ de lado 1. As coordenadas dos vértices das catorze peças são os pontos $B(0, 0)$, $A(0, 1)$, $G(0, 1)$,

$K\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$, $M\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$, $T\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $H\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, $L\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $Q\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $E\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $Z\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $C\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $N\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $O\left(1, \frac{2}{3}\right)$ e $D(1, 1)$, como ilustra a Figura 2.18.

Figura 2.18 – Vértices dos polígonos que compõem o *Stomachion* em um quadrado 1×1

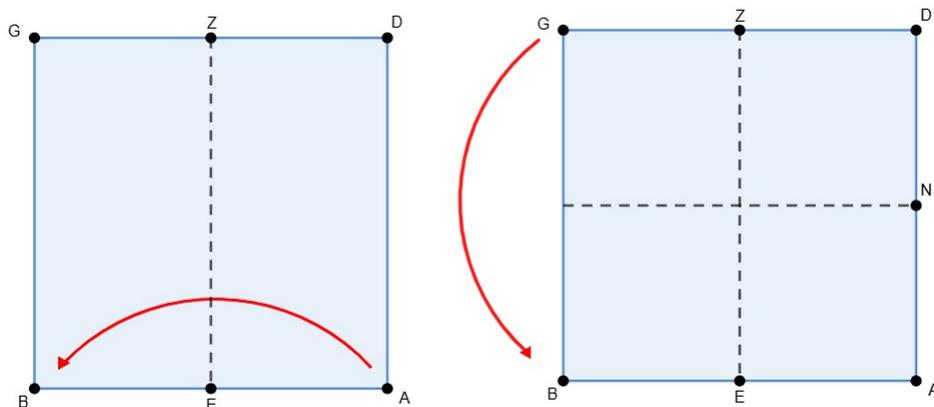


Fonte: Autora.

O passo a passo da divisão do quadrado com *origami* é descrito a seguir no GeoGebra.

1. No quadrado $ABGD$, efetuamos duas dobras: na primeira, levamos o vértice A sobre o vértice B ; na segunda, levamos o vértice G sobre o vértice B . Nas interseções dessas duas dobras com os lados do quadrado, definimos os pontos médios Z , E e N , onde $Z \in \overline{DG}$, $E \in \overline{AB}$ e $N \in \overline{AD}$, conforme ilustra a Figura 2.19.

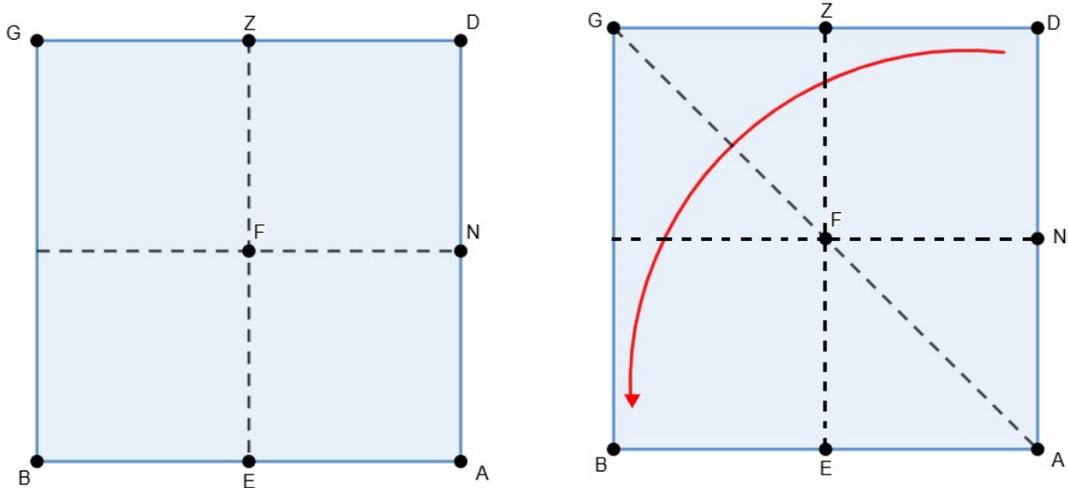
Figura 2.19 – Passo 1 da construção do *Stomachion* com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

2. Na interseção das duas dobras estabelecidas no Passo 1, definimos o ponto F , centro geométrico do quadrado $ABGD$. Em seguida, levamos o vértice D sobre o vértice B , obtendo a dobra \overline{AG} , uma das diagonais do quadrado $ABGD$ – Figura 2.20.

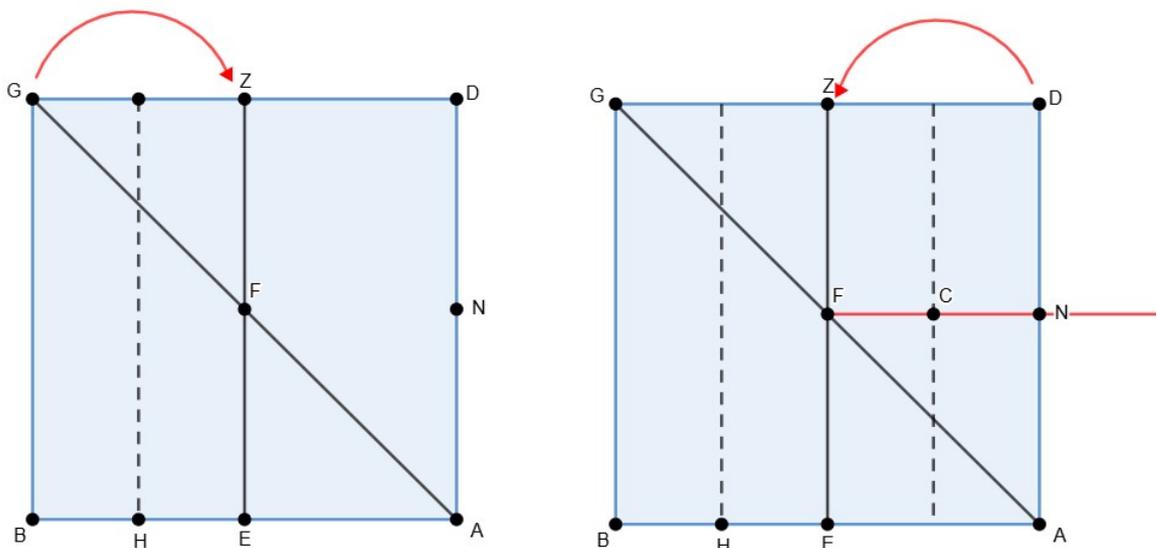
Figura 2.20 – Passo 2 da construção do *Stomachion* com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

3. Estabelecemos o vinco levando o vértice G sobre o ponto Z (ou o vértice B sobre o ponto E), determinando um segmento paralelo ao segmento \overline{ZE} , à esquerda deste, sobre o qual posicionaremos o ponto H , sendo este a interseção da dobra com o segmento \overline{AB} . Logo após, determinamos o vinco levando o vértice D sobre o ponto Z (ou o vértice A sobre o ponto E), estabelecendo um segmento paralelo ao segmento \overline{ZE} , à direita deste, e definindo o ponto C , interseção da dobra com a semirreta \overrightarrow{FN} – Figura 2.21.

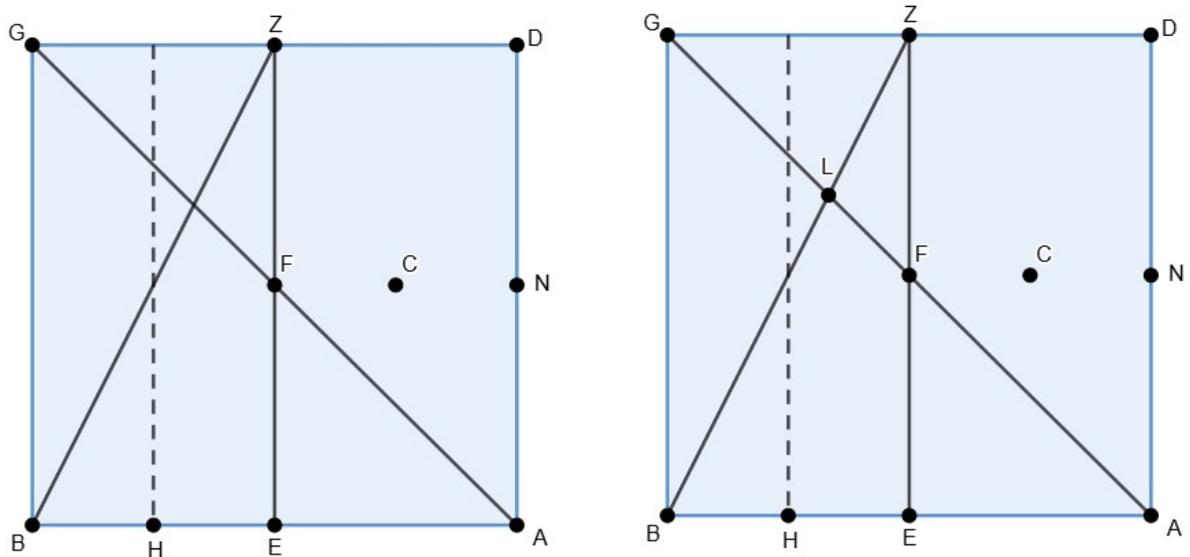
Figura 2.21 – Passo 3 da construção do *Stomachion* com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

4. Fazemos o vinco que passa pelos pontos B e Z , obtendo o segmento \overline{BZ} . Em seguida, definimos o ponto L , interseção dos segmentos \overline{BZ} e \overline{AG} , como ilustra a Figura 2.22.

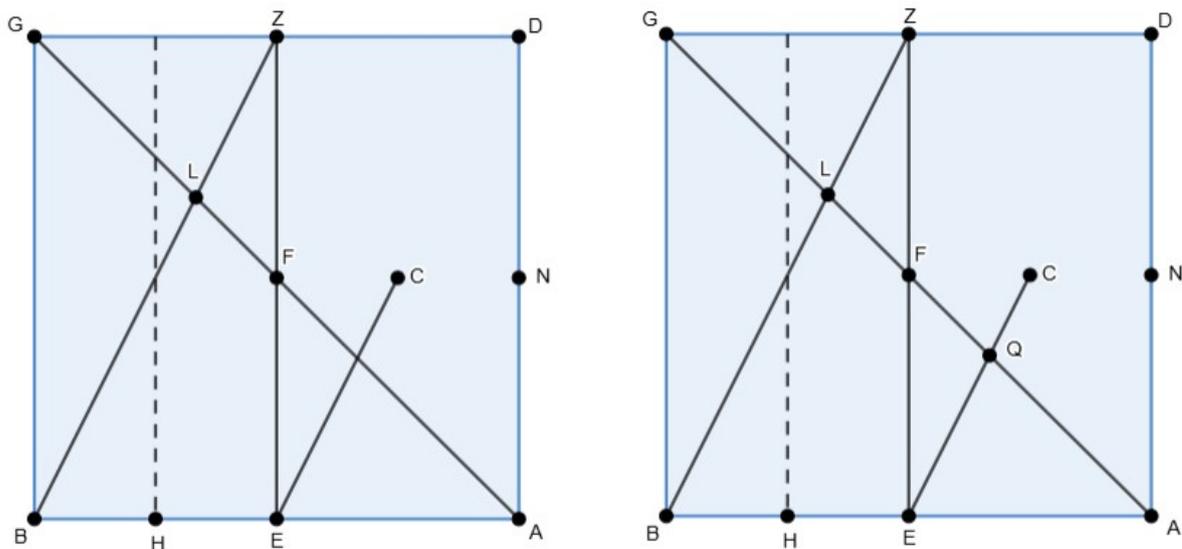
Figura 2.22 – Passo 4 da construção do *Stomachion* com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

5. Ligamos o ponto E ao ponto C , obtendo o segmento \overline{EC} . Logo após, estabelecemos o ponto Q , interseção do segmento \overline{EC} com o segmento \overline{AG} , como ilustra a Figura 2.23.

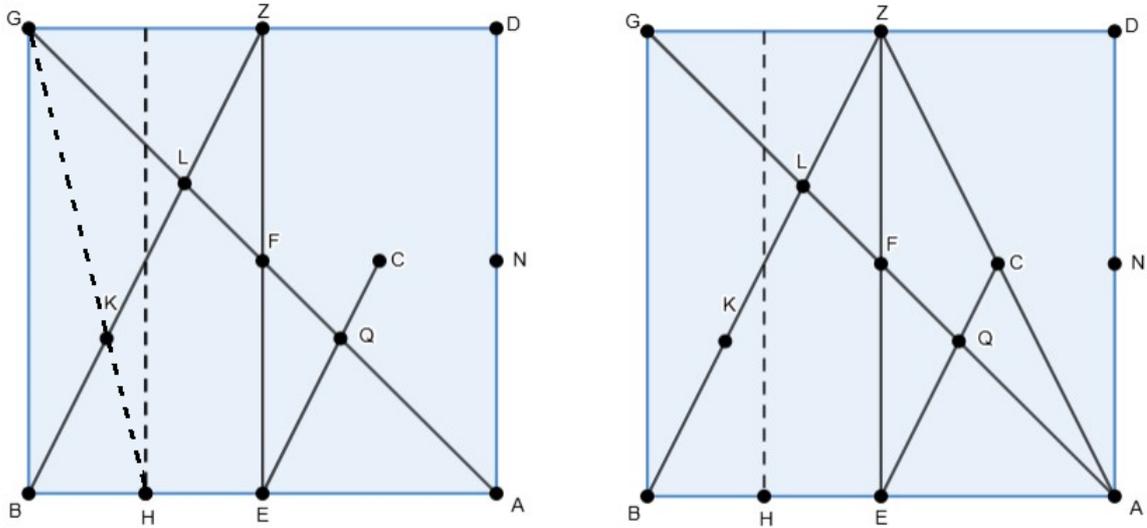
Figura 2.23 – Passo 5 da construção do *Stomachion* com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

6. Determinamos o ponto K , interseção do segmento \overline{HG} com o segmento \overline{BZ} . Em seguida, ligamos o ponto A ao ponto Z , obtendo o segmento \overline{AZ} , como ilustra a Figura 2.24.

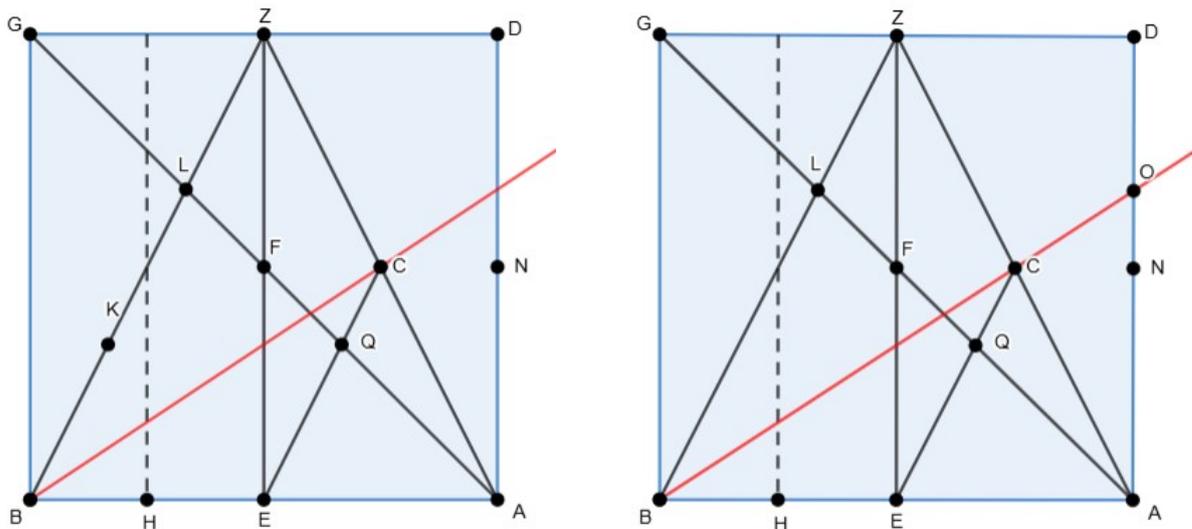
Figura 2.24 – Passo 6 da construção do *Stomachion* com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

7. Efetuamos a dobra que passa pelos pontos B e C , ou seja, traçamos a semirreta \overrightarrow{BC} . Logo após, determinamos o ponto O , interseção da semirreta \overrightarrow{BC} com o lado \overline{AD} , como ilustra a Figura 2.25.

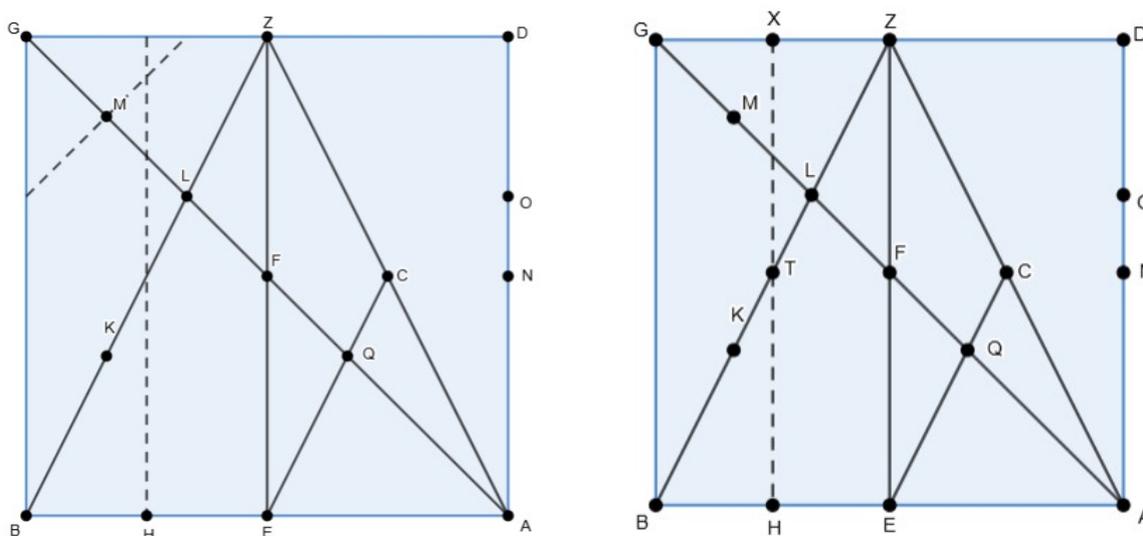
Figura 2.25 – Passo 7 da construção do *Stomachion* com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

8. Determinamos o vinco levando o ponto G sobre o ponto L , definindo o ponto M (ponto médio do segmento \overline{GL}), interseção da dobra com o segmento \overline{GL} . Em seguida, definimos o ponto X , interseção da dobra que passa pelo ponto H com o lado \overline{DG} , e o ponto T , interseção dos segmentos \overline{HX} e \overline{BZ} , como ilustra a Figura 2.26.

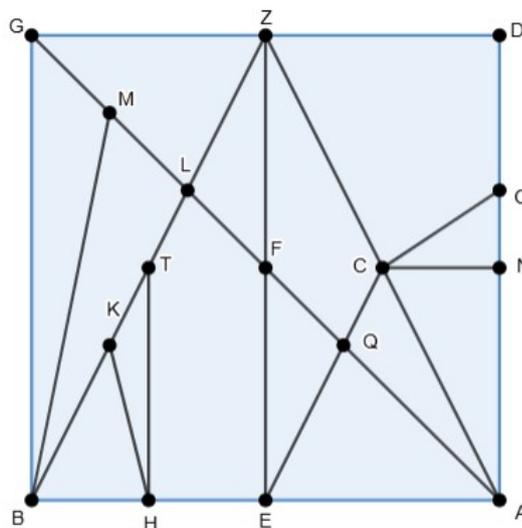
Figura 2.26 – Passo 8 da construção do *Stomachion* com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

9. Traçamos os segmentos \overline{HK} , \overline{HT} , \overline{BM} , \overline{CO} e \overline{CN} . Assim, definimos as catorze peças que compõem o *Stomachion* – Figura 2.27.

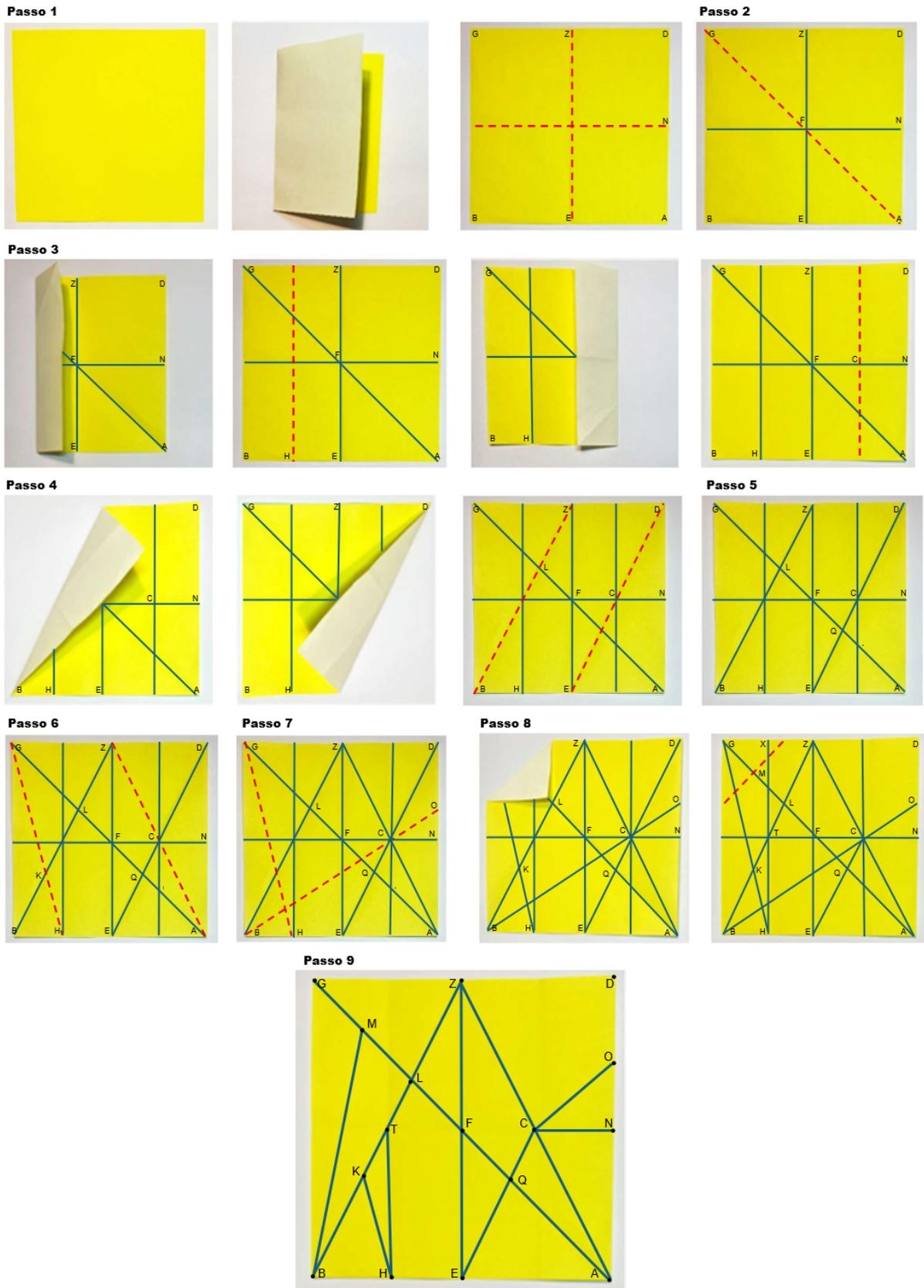
Figura 2.27 – Passo 9 da construção do *Stomachion* com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

A Figura 2.28 ilustra as dobraduras para construir o *Stomachion* com *origami*.

Figura 2.28 – Construção do *Stomachion* com origami



Fonte: Saito (2025a).

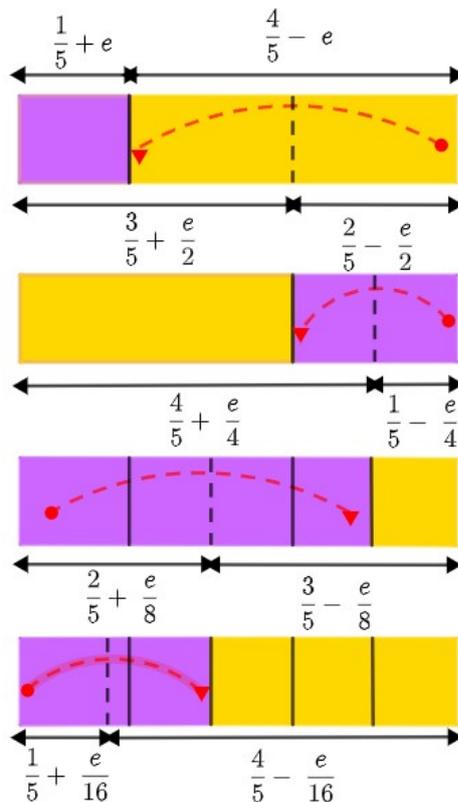
Para determinar as razões $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$ e $\frac{5}{6}$ com *origami*, importantes na divisão do quadrado para se obter as catorze peças do *Stomachion*, podemos empregar o método de aproximação de Fujimoto ou os teoremas de Haga (Fleischmann, 2019).

2.4.1 APROXIMAÇÕES DE FUJIMOTO

A representação por dobraduras de frações com denominadores pares é um processo relativamente simples, o que já não ocorre com frações com denominadores ímpares. Para este caso, Shuzo Fujimoto (1922–2015) desenvolveu um método de aproximação para simbolizar frações do tipo $\frac{1}{n}$, com n ímpar. A ideia consiste em marcar um vinco como uma aproximação da fração que se deseja representar. O primeiro vinco é definido na provável posição da n -ésima parte, que produz um erro de aproximação. A partir desse vinco, ocorre a sequência de dobraduras, ou para a direita ou para a esquerda. A cada dobra, o erro diminui pela metade, ou seja, o erro decai segundo potências de 2. O processo pode ser repetido até que não haja diferença perceptível nos vincos sucessivos para $\frac{1}{n}$ (Saito; Kitani; Fleischmann, 2023).

A Figura 2.29 representa o passo a passo da construção da aproximação de Fujimoto para $\frac{1}{5}$. Ao realizar as dobras, devemos observar que a dobradura deve ser feita do lado da tira com uma quantidade par de quintos, conforme mostra a Tabela 2.1.

Figura 2.29 – Aproximações de Fujimoto para $\frac{1}{5}$



Fonte: Adaptado de Saito, Kitani e Fleischmann (2023).

Tabela 2.1 – Dobras da tira de papel para $\frac{1}{5}$

<i>Lado esquerdo do papel</i>	<i>Lado direito do papel</i>	<i>Dobra a partir da borda</i>
$\frac{1}{5} + e$	$\frac{4}{5} - e$	<i>Direita</i> ←
$\frac{3}{5} + \frac{e}{2}$	$\frac{2}{5} - \frac{e}{2}$	<i>Direita</i> ←
$\frac{4}{5} - \frac{e}{4}$	$\frac{1}{5} + \frac{e}{4}$	<i>Esquerda</i> →
$\frac{2}{5} + \frac{e}{8}$	$\frac{3}{5} - \frac{e}{8}$	<i>Esquerda</i> →
$\frac{1}{5} + \frac{e}{16}$	$\frac{4}{5} - \frac{e}{16}$	

Fonte: Autora.

2.4.2 TEOREMAS DE HAGA

Os teoremas de Haga em *origami* referem-se a um conjunto de princípios geométricos descobertos por Kazuo Haga, professor de biologia (aposentado) na Universidade de Tsukuba, Japão, que permitem a divisão do lado de um quadrado em qualquer fração racional desejada usando técnicas específicas de dobra (Haga, 2008). Esses teoremas utilizam reflexões e triângulos semelhantes derivados das dobras a partir dos vértices do quadrado.

Teorema 2.1. (*Primeiro de Haga*) *Seja* $ABCD$ *um quadrado de lado* 1 *e* $P \in \overline{AB}$ *tal que* $\overline{AP} \equiv \overline{PB} = \frac{1}{2}$. *Se* $T \in \overline{BC}$ *é o ponto definido levando-se o vértice* D *sobre o ponto* P , *então* $AS = \frac{3}{8}$ *e* $BT = \frac{2}{3}$, *onde* S *é o ponto determinado pela dobra no lado* \overline{AD} .

Demonstração. No triângulo retângulo PAS – Figura 2.30, consideremos $AS = x$. Consequentemente, $PS = 1 - x$. Aplicando o teorema de Pitágoras nesse triângulo, obtemos que:

$$\begin{aligned} (1 - x)^2 &= x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2; \\ 1 - 2x + x^2 &= x^2 + \frac{1}{4}; \\ 2x &= \frac{3}{4}; \\ x &= \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Desta forma, $AS = \frac{3}{8}$ e $PS = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.

Como os triângulos PAS e TBP são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo),

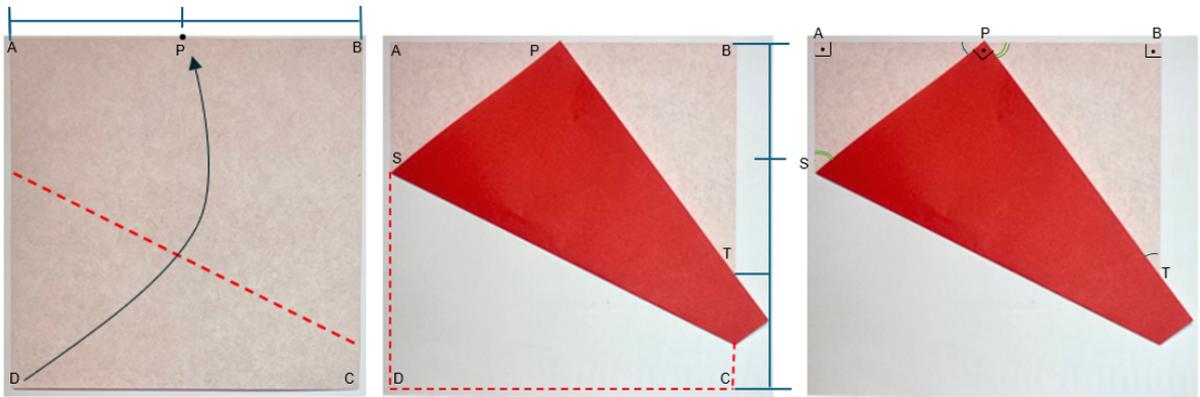
concluimos que:

$$\begin{aligned}\frac{AP}{BT} &= \frac{AS}{BP}; \\ \frac{\frac{1}{2}}{BT} &= \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}}; \\ BT &= \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

□

A Figura 2.30 ilustra a dobra segundo o Teorema 2.1. Para obtermos $\frac{1}{3}$, basta levarmos o ponto B sobre o ponto T , determinando com a dobra o ponto médio de \overline{BT} .

Figura 2.30 – Primeiro teorema de Haga: determinação de $\frac{3}{8}$ e $\frac{2}{3}$



Fonte: Saito (2025a).

Teorema 2.2. (Segundo de Haga) Seja $ABCD$ um quadrado de lado 1 e $P \in \overline{AB}$ tal que $\overline{AP} \equiv \overline{PB} = \frac{1}{2}$. Se S é o ponto obtido levando-se o vértice A em direção ao interior de $ABCD$ de tal maneira a definir a dobra DP , e $T \in \overline{BC}$ é o ponto determinado pela dobra ao se levar o vértice C sobre o ponto S , então $BT = \frac{2}{3}$, com $S \in \overline{PT}$.

Demonstração. No triângulo retângulo PBT – Figura 2.31, consideremos $BT = x$. Consequentemente, $ST = 1 - x$. Aplicando o teorema de Pitágoras nesse triângulo, temos que:

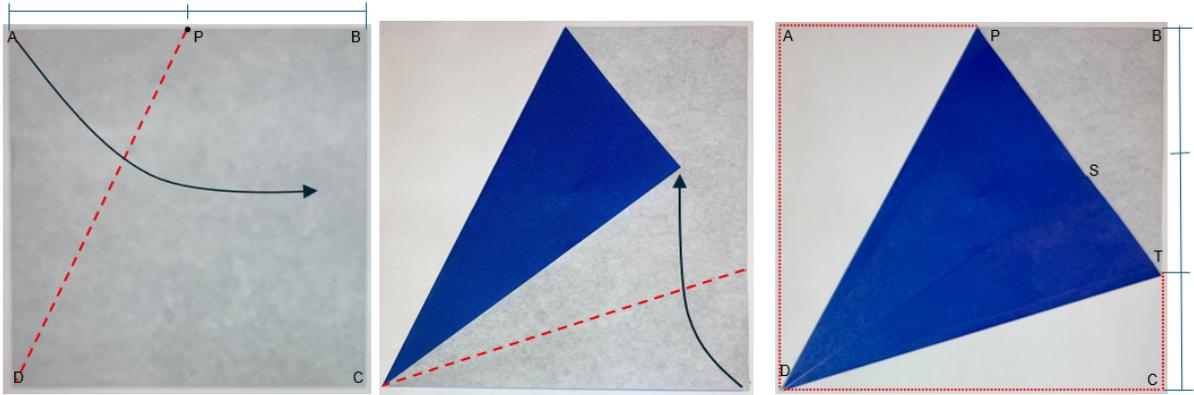
$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2} + 1 - x\right)^2 &= x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2; \\ \frac{9}{4} - 3x + x^2 &= x^2 + \frac{1}{4}; \\ 3x &= 2; \\ x &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

$$\text{Assim, } BT = \frac{2}{3} \text{ e } ST = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

□

A Figura 2.31 ilustra as dobras segundo o Teorema 2.2.

Figura 2.31 – Segundo teorema de Haga: determinação de $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$



Fonte: Saito (2025a).

Teorema 2.3. (Terceiro de Haga) Seja $ABCD$ um quadrado de lado 1 e $P \in \overline{AB}$ tal que $\overline{AP} \equiv \overline{PB} = \frac{1}{2}$. Se $T \in \overline{BC}$ e $S \in \overline{CD}$ são os pontos definidos levando-se o vértice D sobre o lado \overline{BC} de tal maneira que o lado \overline{AD} passe pelo ponto P , então $BT = \frac{2}{3}$.

Demonstração. Consideremos $BT = x$. Consequentemente, $TC = 1 - x$. Como os triângulos retângulos PBT e TCS são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo) – Figura 2.32, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{PB}{CT} &= \frac{BT}{CS}; \\ \frac{\frac{1}{2}}{1-x} &= \frac{x}{CS}; \\ CS &= 2x(1-x). \end{aligned}$$

Logo, $ST = 1 - (2x(1-x))$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo TCS , concluímos que:

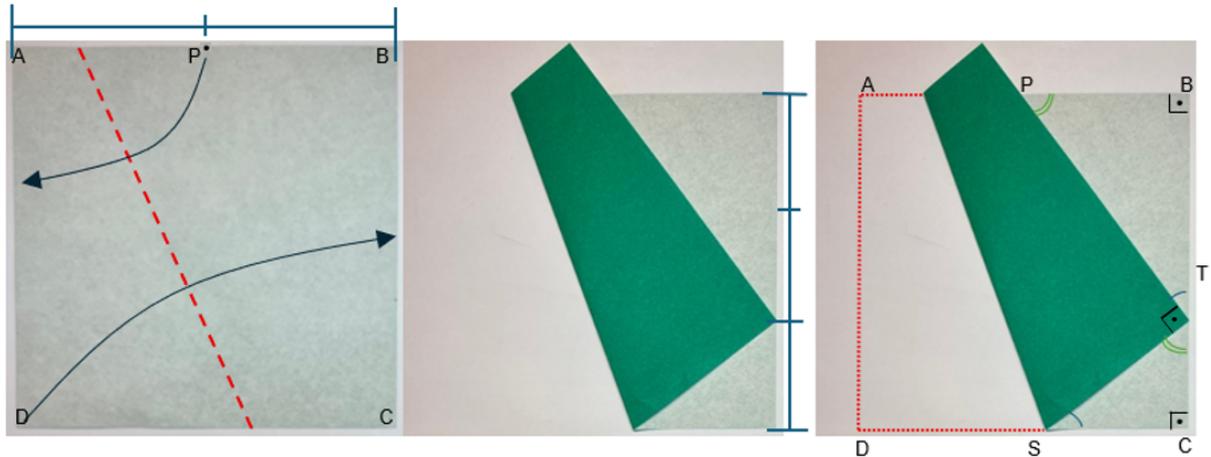
$$\begin{aligned} (1 - 2x(1-x))^2 &= (2x(1-x))^2 + (1-x)^2; \\ 1 - 4x(1-x) + 4x^2(1-x)^2 &= 4x^2(1-x)^2 + 1 - 2x + x^2; \\ 1 - 4x + 4x^2 &= 1 - 2x + x^2; \\ 3x^2 - 2x &= 0; \\ x(3x - 2) &= 0; \\ x &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Portanto, $BT = \frac{2}{3}$, $TC = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, $CS = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$ e $ST = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.

□

A Figura 2.32 ilustra a dobra segundo o Teorema 2.3.

Figura 2.32 – Terceiro teorema de Haga: determinação de $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$



Fonte: Saito (2025a).

Os Teoremas 2.1, 2.2 e 2.3 estabelecem, de maneiras distintas, as dobras para determinarmos os segmentos de comprimentos $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$. Nesses teoremas, P é o ponto médio do lado \overline{AB} (P é determinado pela dobra que estabelece a mediatriz do lado). Contudo, os teoremas de Haga não servem apenas para determinar $\frac{1}{3}$ em uma folha quadrada de papel. Ao conduzirmos um dos vértices do quadrado sobre um ponto, distinto do ponto médio e dos extremos do lado, de um lado não adjacente, estabelecemos outras frações. Este procedimento – Teorema 2.4 – generaliza o Teorema 2.1.

Teorema 2.4. (*Haga generalizado*) Seja $ABCD$ um quadrado de lado 1. Se P é o ponto obtido levando-se o vértice D sobre o lado \overline{AB} , com P distinto de A e de B , e S e T são os pontos definidos pela dobra nos lados \overline{AD} e \overline{BC} , respectivamente, então

$$BT = \frac{2 \cdot AP}{1 + AP}. \quad (2.1)$$

Demonstração. Consideremos $AP = x$, $AS = w$ e $BT = y$. Consequentemente, temos que $PB = 1 - x$ e $PS = 1 - w$ – Figura 2.33.

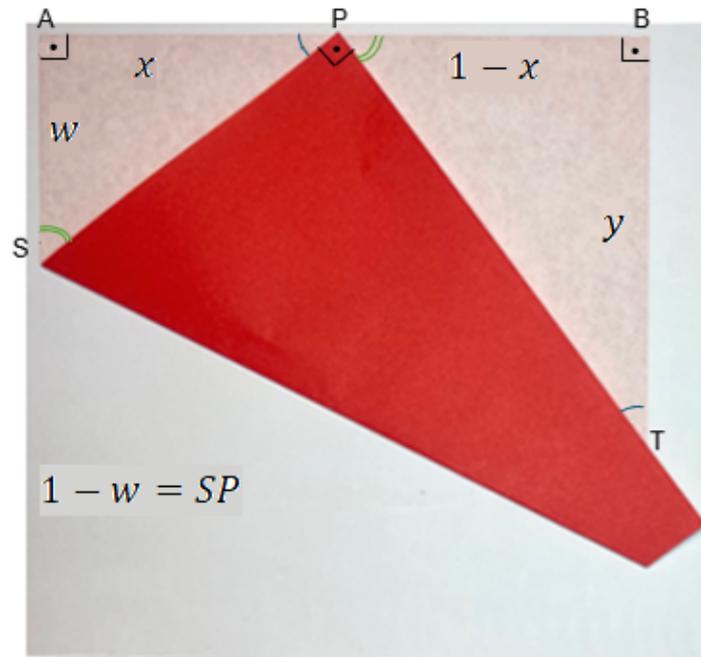
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo PAS , obtemos que:

$$\begin{aligned} (1 - w)^2 &= w^2 + x^2; \\ 1 - 2w + w^2 &= w^2 + x^2; \\ 1 - x^2 &= 2w; \\ w &= \frac{1 - x^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Como os triângulos PAS e TBP são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo), temos que:

$$\frac{w}{x} = \frac{1 - x}{y}. \quad (2.3)$$

Figura 2.33 – Generalização do teorema de Haga



Fonte: Saito (2025a).

Substituindo (2.2) em (2.3), concluímos que:

$$\begin{aligned} \frac{1-x^2}{2} &= \frac{1-x}{y}; \\ x(1-x) &= y \left(\frac{1-x^2}{2} \right); \\ y &= \frac{x(1-x)}{\frac{1-x^2}{2}}; \\ y &= \frac{2x(1-x)}{1-x^2}; \\ y &= \frac{2x(1-x)}{(1-x)(1+x)}; \\ y &= \frac{2x}{1+x}. \end{aligned}$$

Portanto, $BT = \frac{2 \cdot AP}{1 + AP}$.

□

Assim, podemos empregar a relação (2.1) para estabelecer a medida do segmento \overline{BT} a partir da medida do segmento \overline{AP} (e vice-versa), ou seja, a partir da posição do ponto P no lado \overline{AB} . Os Exemplos 2.1, 2.2 e 2.3 ilustram a generalização do Teorema 2.1.

Exemplo 2.1. Qual deve ser a posição de P em \overline{AB} para que $BT = \frac{2}{5}$?

$$\begin{aligned} BT &= \frac{2 \cdot AP}{1 + AP} \\ \frac{2}{5} &= \frac{2 \cdot AP}{1 + AP} \\ 2 + 2 \cdot AP &= 10 \cdot AP \\ 8 \cdot AP &= 2 \\ AP &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Desta forma, para determinar a posição de P em \overline{AB} basta efetuar duas dobras para estabelecer primeiramente a mediatriz M de \overline{AB} e, em seguida, a mediatriz P de \overline{AM} . Ainda, estabelecendo a dobra que define a mediatriz do segmento \overline{BT} , temos um segmento de medida $\frac{1}{5}$.

Exemplo 2.2. Qual deve ser a posição de P em \overline{AB} para que $BT = \frac{1}{2}$?

$$\begin{aligned} BT &= \frac{2 \cdot AP}{1 + AP} \\ \frac{1}{2} &= \frac{2 \cdot AP}{1 + AP} \\ 1 + AP &= 4 \cdot AP \\ 3 \cdot AP &= 1 \\ AP &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Assim, para determinar a posição de P em \overline{AB} basta aplicar o primeiro teorema de Haga – Teorema 2.1 – para obter $\frac{2}{3}$ e, com uma dobra, determinar a mediatriz e estabelecer um segmento de medida $\frac{1}{3}$. Neste segmento, com uma dobra definimos a mediatriz e, conseqüentemente, um segmento de medida $\frac{1}{6}$.

Exemplo 2.3. Qual deve ser a posição de P em \overline{AB} para que $BT = \frac{1}{5}$?

$$\begin{aligned} BT &= \frac{2 \cdot AP}{1 + AP} \\ \frac{1}{5} &= \frac{2 \cdot AP}{1 + AP} \\ 1 + AP &= 10 \cdot AP \\ 9 \cdot AP &= 1 \\ AP &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Logo, para determinar a posição de P em \overline{AB} basta aplicar o primeiro teorema de Haga – Teorema 2.1 – para obter $\frac{2}{3}$ e, com uma dobra, determinar a mediatriz e estabelecer um segmento de medida $\frac{1}{3}$. Aplicando novamente o Teorema 2.1, dividimos o segmento de medida $\frac{1}{3}$ em três partes congruentes, obtendo um segmento de medida $\frac{1}{9}$.

Outros exemplos sobre a generalização de Haga podem ser encontrados em Fleischmann (2019).

2.5 DISORIENTATION

Em 2018, Catriona Shearer (1981–), professora de Matemática em Cambridge, Reino Unido, começou a publicar no X (antigo Twitter) *puzzles* geométricos criados por ela como hobby. Entre esses quebra-cabeças, que foram solucionados de maneiras engenhosas e criativas por diferentes pessoas (Shearer, 2020; Rodrigues, 2020a), está presente o *Disorientation* (*desorientação*, em tradução livre), representado na Figura 2.34. Este é um quebra-cabeças de formato quadrado, decomposto em quatro triângulos, sendo um triângulo isósceles (verde), um triângulo retângulo (azul) e dois triângulos escalenos (amarelo e rosa).

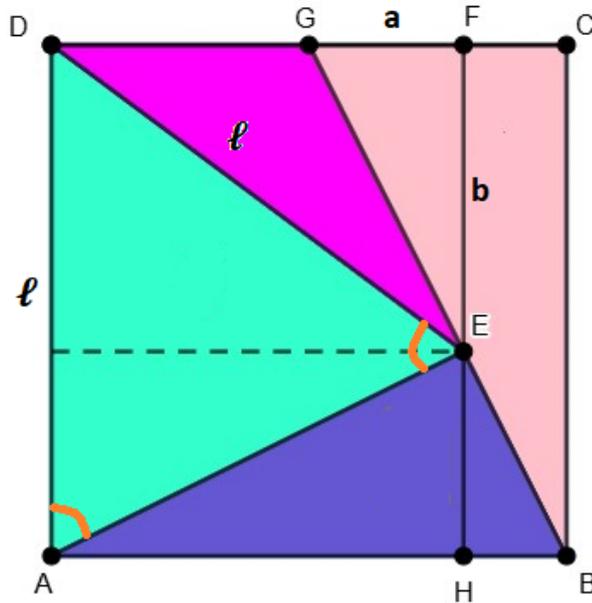
Figura 2.34 – Peças do *Disorientation* em MDF



Fonte: Figueiredo (2025).

Para construir esse quebra-cabeça, precisamos estabelecer os pontos de seção. Seja $ABCD$ um quadrado de lado de medida ℓ , $\ell > 0$ e $\ell \in \mathbb{Q}$, onde: G é o ponto médio do segmento \overline{CD} ; os pontos F , H e E são colineares, com $\overline{FH} \perp \overline{CD}$, $FE = b$ e $FG = a$. Como o triângulo ADE é isósceles de base \overline{AE} , temos que $\overline{AD} \equiv \overline{DE} = \ell$ – Figura 2.35. Nossa principal tarefa é determinar as coordenadas do ponto E .

Inicialmente, constatamos que os triângulos GFE e GCB são semelhantes pelo caso

Figura 2.35 – Pontos E e G no quadrado $ABCD$ para gerar o *Disorientation*

Fonte: Autora.

AA (ângulo-ângulo). Desta forma, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{GF}{GC} &= \frac{FE}{CB}; \\ \frac{a}{\frac{\ell}{2}} &= \frac{b}{\ell}; \\ 2a &= b. \end{aligned} \quad (2.4)$$

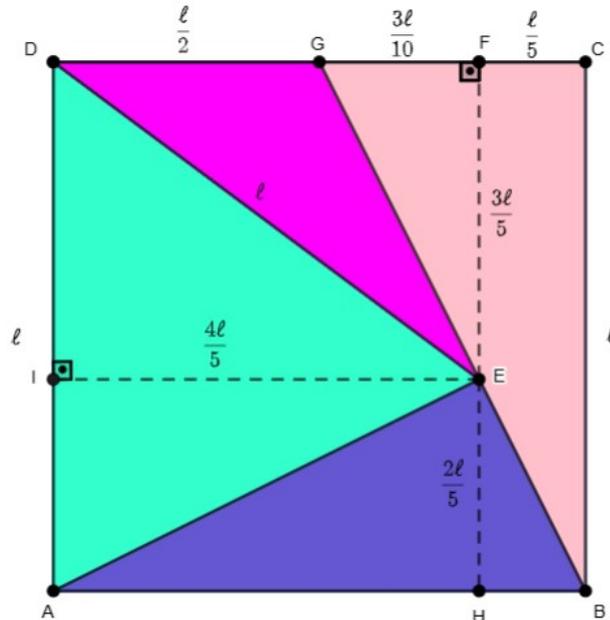
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo DFE e utilizando (2.4), obtemos que:

$$\begin{aligned} \ell^2 &= \left(\frac{\ell}{2} + a\right)^2 + b^2; \\ \ell^2 &= \frac{\ell^2}{4} + \ell a + a^2 + (2a)^2; \\ \ell^2 &= \frac{\ell^2}{4} + \ell a + a^2 + 4a^2; \\ 5a^2 + \ell a - \frac{3\ell^2}{4} &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Solucionando a equação de segundo grau (2.5) na variável a , concluímos que $a = \frac{3\ell}{10}$.

Como $a = \frac{3\ell}{10}$, temos, conseqüentemente, que: $FE = b = 2a = \frac{3\ell}{5}$; $FG = a = \frac{3\ell}{10}$;
 $FC = \frac{\ell}{2} - a = \frac{\ell}{2} - \frac{3\ell}{10} = \frac{\ell}{5}$; $EH = \ell - \frac{3\ell}{5} = \frac{2\ell}{5}$; $AH = \ell - \frac{\ell}{5} = \frac{4\ell}{5}$ – Figura 2.36.

Figura 2.36 – Medidas dos polígonos que compõem o *Disorientation* em um quadrado de lado ℓ

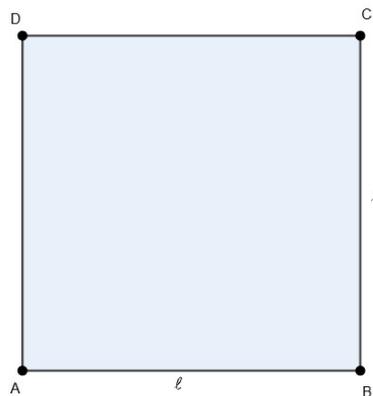


Fonte: Autora.

Podemos construir o *Disorientation* usando *origami*, cujas dobraduras podem ser simuladas no GeoGebra empregando-se um quadrado $ABCD$ de lado ℓ . As coordenadas dos vértices das quatro peças são os pontos $A(0, 0)$, $B(\ell, 0)$, $C(\ell, \ell)$, $D(0, \ell)$, $G\left(\frac{\ell}{2}, \ell\right)$ e $E\left(\frac{4\ell}{5}, \frac{2\ell}{5}\right)$. O passo a passo da divisão do quadrado com *origami* é descrito a seguir no GeoGebra.

1. Construimos o quadrado $ABCD$ de lado ℓ – Figura 2.37.

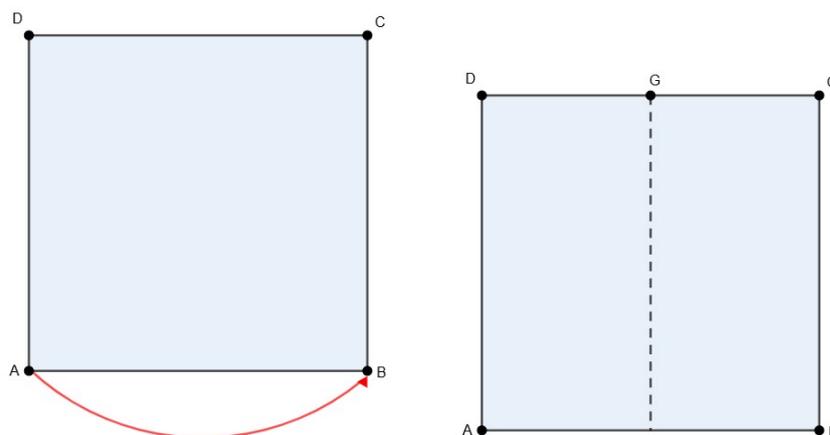
Figura 2.37 – Passo 1 da construção do *Disorientation* com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

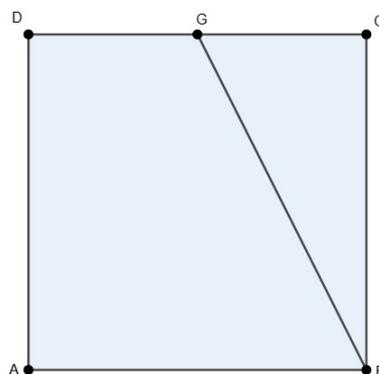
2. Levamos o ponto A sobre o ponto B , obtendo G , ponto médio do segmento \overline{CD} , conforme ilustra a Figura 2.38.
3. Efetuamos a dobra que determina o segmento \overline{BG} – Figura 2.39.

Figura 2.38 – Passo 2 da construção do *Disorientation* com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

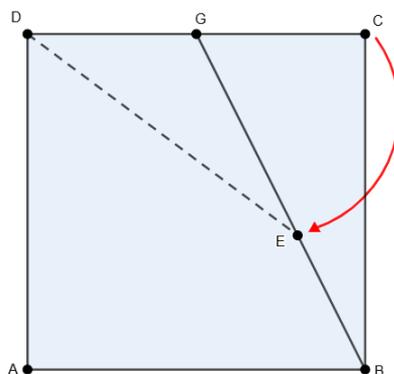
Figura 2.39 – Passo 3 da construção do *Disorientation* com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

4. Levamos o ponto C em direção ao segmento \overline{BG} , definindo o ponto E de modo que $\overline{DE} \equiv \overline{DC}$ – Figura 2.40.

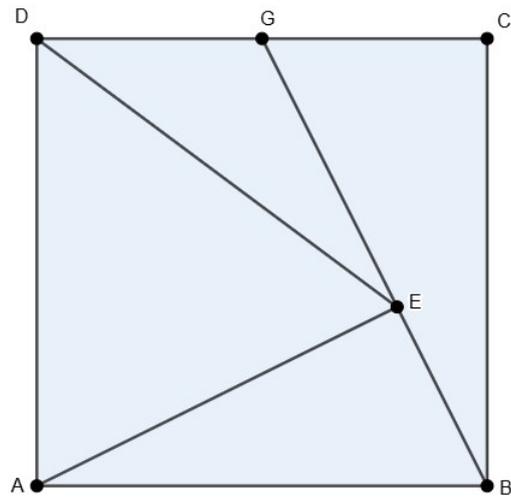
Figura 2.40 – Passo 4 da construção do *Disorientation* com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

5. Construimos as dobras que determinam os segmentos \overline{AE} e \overline{DE} , como ilustra a Figura 2.41. Desta forma, definimos as quatro peças que compõem o *Disorientation*.

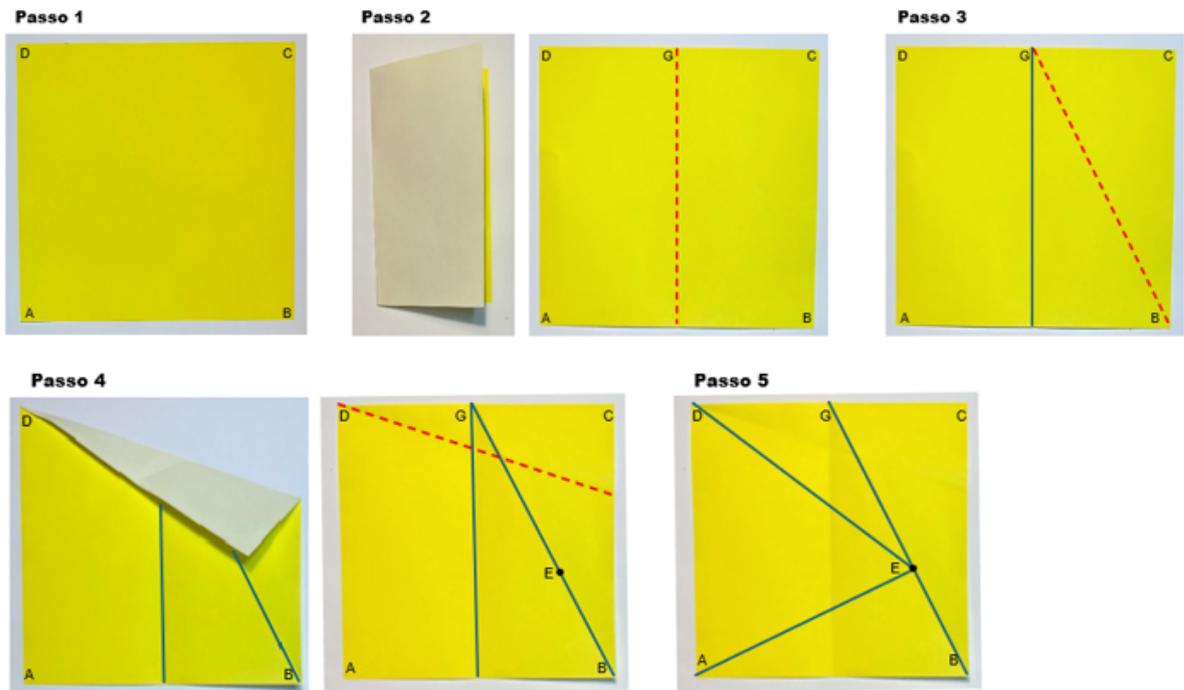
Figura 2.41 – Passo 5 da construção do *Disorientation* com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

A Figura 2.42 ilustra as dobraduras para construir o *Disorientation* com *origami*.

Figura 2.42 – Construção do *Disorientation* com *origami*



Fonte: Saito (2025a).

3 PUZZLES E NÚMEROS IRRACIONAIS

Neste capítulo, apresentamos a relação entre segmentos incomensuráveis e os números irracionais, assim como algumas propriedades desses números. Além disto, inserimos o *puzzle Trinity Quartet* para associar os números irracionais à medida de segmentos, e descrevemos a construção do retângulo brônzeo, quadrilátero presente na estrutura do quebra-cabeça.

3.1 SEGMENTOS INCOMENSURÁVEIS

Dois segmentos \overline{AB} e \overline{CD} são comensuráveis se existir um número $x > 0, x \in \mathbb{R}$, tal que: o comprimento de \overline{AB} é um múltiplo de x , ou seja, $AB = nx, n \in \mathbb{N}$; o comprimento de \overline{CD} é também um múltiplo de x , isto é, $CD = mx, m \in \mathbb{N}$ (Lima, 2013). Contudo, nem sempre o comprimento de um segmento será um múltiplo de x .

O problema mais sério é que por muito tempo se pensava que dois segmentos quaisquer eram sempre comensuráveis: sejam quais fossem AB e CD, aceitava-se tacitamente que haveria sempre um segmento EF que caberia um número exato n de vezes em AB e um número exato m de vezes em CD. Esta crença talvez adviesse da Aritmética, onde dois números naturais quaisquer têm sempre um divisor comum (na pior hipótese, igual a 1). A ilusão da comensurabilidade durou até o quarto século antes de Cristo (Lima *et. al.*, 1997, p. 53).

Assim, percebeu-se que “os números naturais mais as frações são insuficientes para medir todos os segmentos de reta” (Lima, 1997, p. 54). Nesse contexto, ficou evidente a necessidade de um outro tipo de número.

A solução que se impunha, e que foi finalmente adotada, era a de ampliar o conceito de número, introduzindo os chamados números irracionais, de tal modo que, fixando uma unidade de comprimento arbitrária, qualquer segmento de reta pudesse ter uma medida numérica. Quando o segmento considerado é comensurável com a unidade escolhida, sua medida é um número racional (inteiro ou fracionário). Os números irracionais representam medidas de segmentos que são incomensuráveis com a unidade (Lima *et. al.*, 1997, p.54).

O advento dos números irracionais foi um marco importante na história da Matemática, ocorrendo principalmente na Grécia Antiga. Durante esse período, matemáticos como os pitagóricos acreditavam que todos os números podiam ser expressos como razões de dois números inteiros, ou seja, como frações. No entanto, a descoberta de que certas diagonais, como a do quadrado unitário, não podiam ser representadas por frações, revelou a existência de números que não poderiam ser expressos dessa forma, como ressalta o Teorema 3.1. Essa descoberta, atribuída a uma lenda envolvendo o matemático Hipaso de Metaponto, levou ao reconhecimento dos números irracionais, cujo conceito está estabelecido na Definição 3.1. Essa revelação desafiou as

concepções tradicionais da época e expandiu significativamente a compreensão dos números, abrindo caminho para o desenvolvimento de uma Matemática mais abrangente e sofisticada.

Definição 3.1. *Número irracional é todo número que não pode ser escrito/representado como o quociente/razão de dois números inteiros.*

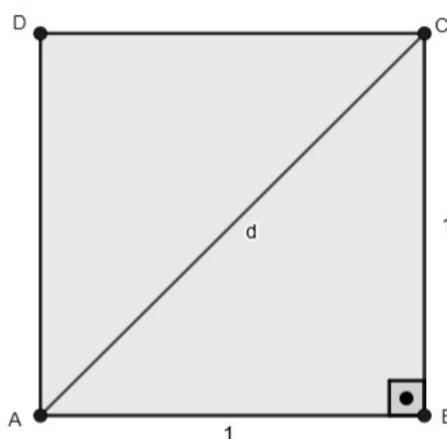
Os números irracionais, cujo conjunto é simbolizado por \mathbb{I} , são representados por meio de expressões decimais infinitas e não periódicas. Esses números também podem ser representados por meio de raízes quadradas ou outras raízes que resultam em valores não racionais, como $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$. Além disso, alguns números irracionais, como π e o número de Euler e , podem ser expressos por meio de frações contínuas ou usando notação matemática específica. Essas representações ajudam a compreender e trabalhar com esses números em diferentes contextos, especialmente na Geometria e na Análise Matemática, onde aparecem frequentemente em medidas e proporções que não podem ser expressas exatamente por números racionais.

A existência de segmentos incomensuráveis aponta para a insuficiência dos números naturais e das frações para medir qualquer segmento de reta. Como definir então o comprimento da diagonal do quadrado de lado 1? A solução encontrada pelos matemáticos foi ampliar o conceito de número e introduzir os chamados números irracionais (Broetto, 2016, p. 48-49).

Teorema 3.1. *A medida da diagonal de um quadrado unitário é um número irracional.*

Demonstração. Seja $ABCD$ um quadrado de lado 1, cujas diagonais medem d , como ilustra a Figura 3.1.

Figura 3.1 – Diagonal d do quadrado de lado 1



Fonte: Autora.

Suponhamos que d é comensurável com o lado, ou seja, $d = \frac{m}{n}$, onde $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, e que $\text{mdc}(m, n) = 1$, isto é, $\frac{m}{n}$ é irredutível.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC , obtemos que:

$$\begin{aligned}d^2 &= 1^2 + 1^2; \\d^2 &= 2.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Substituindo $d = \frac{m}{n}$ em (3.1), temos que:

$$\begin{aligned}\left(\frac{m}{n}\right)^2 &= 2; \\m^2 &= 2n^2.\end{aligned}\tag{3.2}$$

De (3.2) decorre que m^2 é par. Logo, m também é par, ou seja, $m = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Substituindo $m = 2k$ em (3.2), obtemos que $4k^2 = 2n^2$, ou equivalentemente, $n^2 = 2k^2$, do que decorre que n^2 é par e, conseqüentemente, n é par.

Sendo m e n múltiplos de 2, $d = \frac{m}{n}$ não é irredutível, o que contradiz a suposição inicial. Portanto, a diagonal d não é comensurável com o lado, ou seja, d é um número irracional.

□

3.1.1 PROPRIEDADES DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

Diferentemente do conjunto dos números racionais, no conjunto dos números irracionais as operações de adição e multiplicação não são fechadas, isto é, a soma ou produto de dois números irracionais pode não ser um número irracional. Essa propriedade evidencia a complexidade e a riqueza do conjunto dos números irracionais na Matemática.

1. **A adição não é fechada em \mathbb{I} :** a soma de dois números irracionais pode ser um número racional, como mostra o Exemplo 3.1.

Exemplo 3.1. Na soma $\sqrt{5} + (-\sqrt{5}) = 0$, $\sqrt{5}$ e $-\sqrt{5}$ são irracionais, enquanto 0 é racional.

2. **A multiplicação não é fechada em \mathbb{I} :** o produto de dois números irracionais não é sempre um número irracional, como ilustram os Exemplos 3.2 e 3.3.

Exemplo 3.2. No produto $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{8}$ são irracionais. Contudo, 4 é racional.

Exemplo 3.3. No produto $\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 1$, $\sqrt{3}$ é irracional, enquanto 1 é racional.

3. **Densidade:** o conjunto dos números irracionais \mathbb{I} é denso, ou seja, entre dois números irracionais há outro número irracional (Broetto, 2016, p. 64).

Diante de tal complexidade, surgem vários desafios voltados ao ensino dos números irracionais, pois é necessário desenvolver estratégias pedagógicas que facilitem a compreensão de conceitos abstratos e muitas vezes contraintuitivos, como a ideia de que nem todos os números podem ser representados por frações ou decimais periódicos. Além disso, é importante criar atividades que ajudem os estudantes a entenderem as propriedades desses números, suas aplicações e as diferenças em relação aos números racionais. Outro desafio é trabalhar a percepção de que operações envolvendo irracionais podem resultar em números racionais ou irracionais, o que exige uma abordagem cuidadosa e contextualizada. Assim, o ensino dos números irracionais demanda uma abordagem que combine teoria, exemplos concretos e atividades práticas, de modo a promover uma compreensão mais sólida e significativa desse tema fundamental na Matemática.

A BNCC estabelece que o ensino de números irracionais faz parte do desenvolvimento das competências matemáticas dos estudantes, especialmente na compreensão de conceitos relacionados à quantidade, às operações e às propriedades dos números. A BNCC incentiva que os alunos explorem esses números de forma contextualizada, utilizando recursos visuais, manipulação e resolução de problemas, para que possam compreender suas características e aplicações na vida cotidiana e na ciência, promovendo uma aprendizagem significativa e contextualizada.

Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los (alunos) diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais (Brasil, 2018, p. 269).

Em consonância com a BNCC, propomos a utilização de um recurso geométrico desafiador, o *puzzle Trinity Quartet*, como uma ferramenta pedagógica voltada para o trabalho com os números irracionais e o teorema de Pitágoras (Silva *et al.*, 2023). Esse recurso tem como objetivo tornar o conceito de números irracionais, especialmente a raiz quadrada de três, menos abstrato. Ao utilizar o quebra-cabeça, os estudantes podem visualizar e manipular elementos geométricos que representam essa raiz quadrada. Desta forma, promove-se uma aprendizagem mais concreta e interativa, estimulando o raciocínio espacial e a percepção de relações matemáticas, além de contribuir para a construção de um entendimento mais sólido sobre os números irracionais.

3.2 TRINITY QUARTET

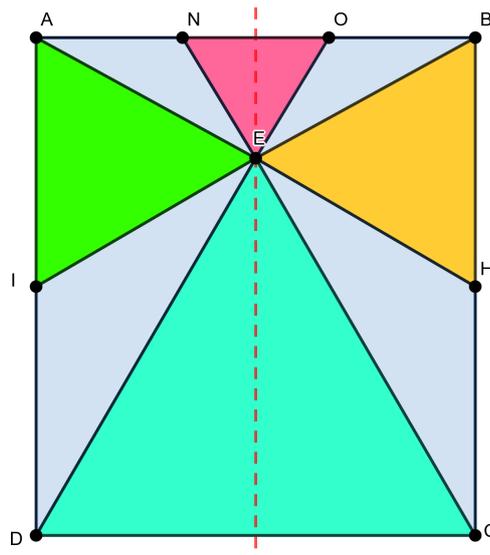
O *puzzle Trinity Quartet* (*quarteto trindade*, em tradução livre), presente na relação de setenta quebra-cabeças em Bellos (2024) e ilustrado na Figura 3.2, é formado por quatro triângulos equiláteros – CDE , HBE , IAE , FEG – e por dois pares de triângulos escalenos congruentes – AEN e BEO , IED e HEC . Estes oito triângulos compõem um retângulo $ABCD$ – Figura 3.3.

Figura 3.2 – Peças do *Trinity Quartet* em MDF

Fonte: Figueiredo (2025).

3.2.1 MEDIDA DOS LADOS DOS TRIÂNGULOS

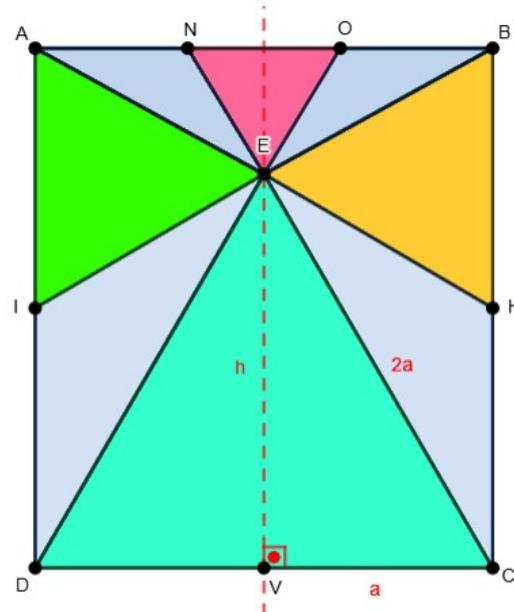
Dado um retângulo de base \overline{CD} – lado do triângulo equilátero CDE , precisamos determinar as medidas dos lados dos triângulos que compõem o *Trinity Quartet*. Essas medidas definem a altura do retângulo $ABCD$, ou seja, a medida $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$. Iniciamos traçando por E um segmento paralelo ao lado \overline{AD} . Este segmento está contido no eixo vertical de simetria do retângulo $ABCD$, ilustrado na Figura 3.3.

Figura 3.3 – *Trinity Quartet*: eixo vertical de simetria

Fonte: Autora.

Sejam V a projeção ortogonal do ponto E sobre o lado \overline{CD} de $ABCD$, $EV = h$ a altura do triângulo CDE e $CD = 2a$, $a > 0$ e $a \in \mathbb{Q}$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo CEV – Figura 3.4, obtemos que:

Figura 3.4 – *Trinity Quartet*: altura do triângulo equilátero CDE

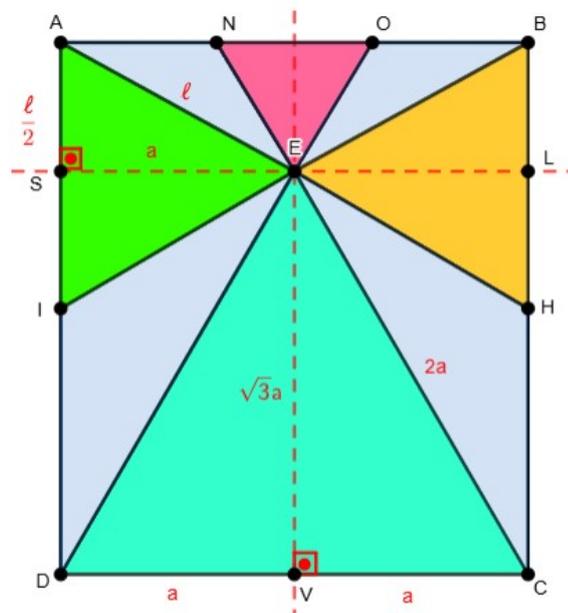


Fonte: Autora.

$$\begin{aligned}(2a)^2 &= a^2 + h^2; \\ 3a^2 &= h^2; \\ h &= \sqrt{3}a.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Consideremos agora o ponto S , projeção ortogonal do ponto E sobre o lado \overline{AI} do triângulo equilátero AIE , e $\overline{AE} \equiv \overline{EI} \equiv \overline{AI} = \ell$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AES – Figura 3.5, no qual $ES = a$ e $AS = \frac{\ell}{2}$, temos que:

Figura 3.5 – *Trinity Quartet*: altura do triângulo equilátero AIE

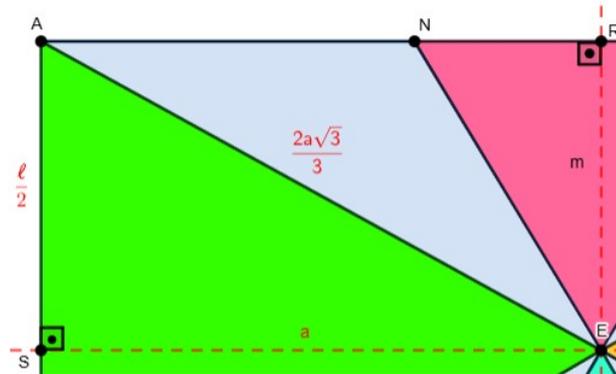


Fonte: Autora.

$$\begin{aligned}\ell^2 &= a^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2; \\ \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} &= a^2; \\ \frac{3\ell^2}{4} &= a^2; \\ 3\ell^2 &= 4a^2; \\ \ell^2 &= \frac{4a^2}{3}; \\ \ell &= \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a.\end{aligned}$$

Sejam R a projeção ortogonal do ponto E sobre o lado \overline{AB} de $ABCD$, e $ER = m$ a altura do triângulo equilátero NOE . Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ARE – Figura 3.6, obtemos que:

Figura 3.6 – *Trinity Quartet*: altura do triângulo equilátero NOE



Fonte: Autora.

$$\begin{aligned}\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2 &= a^2 + m^2; \\ \frac{12a^2}{9} &= a^2 + m^2; \\ \frac{12a^2}{9} - a^2 &= m^2; \\ m^2 &= \frac{3a^2}{9}; \\ m &= \frac{\sqrt{3}}{3}a = \frac{a}{\sqrt{3}}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Determinadas as medidas dos segmentos \overline{VE} e \overline{ER} , dadas respectivamente por (3.3) e (3.4), temos que a altura $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ do retângulo $ABCD$ é igual a

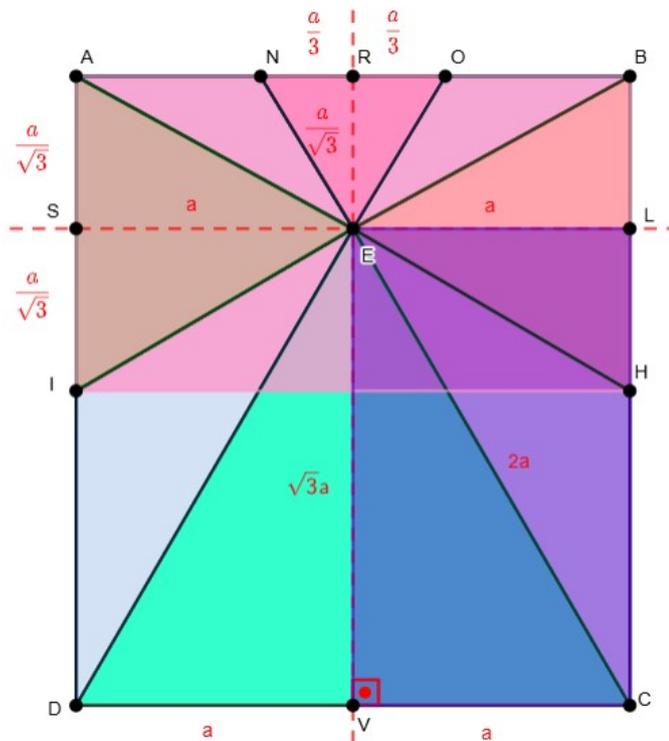
$$AD = VE + ER = h + m = \sqrt{3}a + \frac{\sqrt{3}}{3}a = \frac{4\sqrt{3}}{3}a.$$

Resta-nos ainda calcular a medida do lado do triângulo equilátero NOE . No triângulo retângulo NER , considerando o ângulo interno $E\hat{N}O = 60^\circ$, obtemos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 60^\circ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a}{NR}; \\ NR &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a}{\sqrt{3}}; \\ NR &= \frac{a}{3}. \end{aligned}$$

Desta forma, a medida do lado do triângulo equilátero NOE é igual a $NO = 2 \cdot NR = \frac{2a}{3}$. A Figura 3.7 ilustra as medidas dos lados e das alturas dos triângulos equiláteros que compõem o *Trinity Quartet*.

Figura 3.7 – *Trinity Quartet*: medida dos lados e das alturas dos triângulos equiláteros



Fonte: Autora.

Para determinar as medidas irracionais $\frac{a}{\sqrt{3}}$ e $\sqrt{3}a$ usando *origami*, efetuamos as dobraduras no triângulo equilátero e no retângulo brônzeo. Este é um retângulo que pode ser dividido em três retângulos com lados proporcionais aos lados do retângulo original (Freitas, 2016, p. 50).

Em um retângulo brônzeo, a altura h se relaciona com a base x na razão $\frac{h}{x} = \sqrt{3}$. Assim, o retângulo $VCLE$ – Figura 3.7 – é um retângulo brônzeo, pois $\frac{CL}{VC} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$.

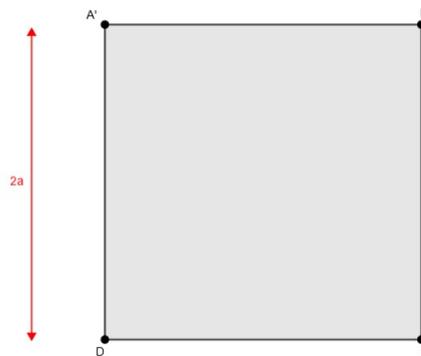
Além do retângulo brônzeo, a medida $\sqrt{3}a$ também pode ser determinada em um triângulo retângulo de catetos a e $\sqrt{2}a$.

3.3 SEGMENTO DE MEDIDA IRRACIONAL

Podemos construir o *Trinity Quartet* usando *origami*, cujas dobraduras podem ser simuladas no GeoGebra empregando-se um retângulo $ABCD$ de base $2a$ e altura $\frac{4\sqrt{3}}{3}a$. As coordenadas dos vértices dos oito triângulos são os pontos $A(0, \frac{4\sqrt{3}}{3}a)$, $B(2a, \frac{4\sqrt{3}}{3}a)$, $C(2a, 0)$, $D(0, 0)$, $E(a, \sqrt{3}a)$, $H(2a, \frac{2\sqrt{3}}{3}a)$, $I(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}a)$, $N(\frac{2}{3}a, \frac{4\sqrt{3}}{3}a)$ e $O(\frac{4}{3}a, \frac{4\sqrt{3}}{3}a)$. O passo a passo da divisão do retângulo com *origami* é descrito a seguir no GeoGebra.

1. Construimos um quadrado $A'B'CD$ de lado igual a $2a$ – Figura 3.8.

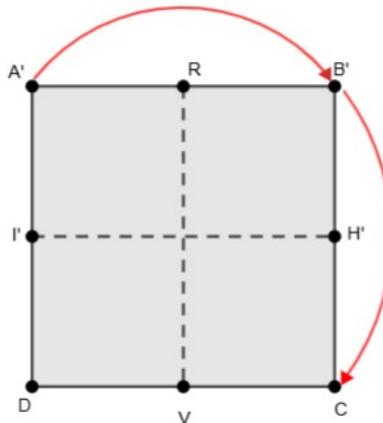
Figura 3.8 – Passo 1 da construção do *Trinity Quartet* com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

2. Determinamos duas dobras levando os pontos A' sobre B' e B' sobre C , definindo os pontos médios R , H' , V e I' dos lados $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C}$, \overline{CD} e $\overline{DA'}$, respectivamente – Figura 3.9, onde $\overline{A'R} \equiv \overline{RB'} \equiv \overline{B'H'} \equiv \overline{H'C} \equiv \overline{CV} \equiv \overline{VD} \equiv \overline{DI'} \equiv \overline{I'A'} = a$.

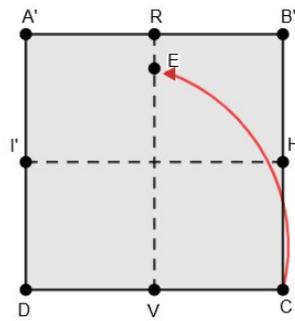
Figura 3.9 – Passo 2 da construção do *Trinity Quartet* com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

3. Efetuamos uma dobra levando o ponto C sobre o segmento \overline{RV} , estabelecendo o ponto E , com $\overline{CD} \equiv \overline{DE}$, conforme ilustra a Figura 3.10.

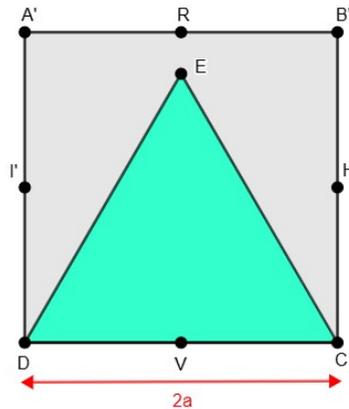
Figura 3.10 – Passo 3 da construção do *Trinity Quartet* com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

4. Ligamos os pontos C , E e D , obtendo o triângulo equilátero CDE de lado $2a$ – Figura 3.11.

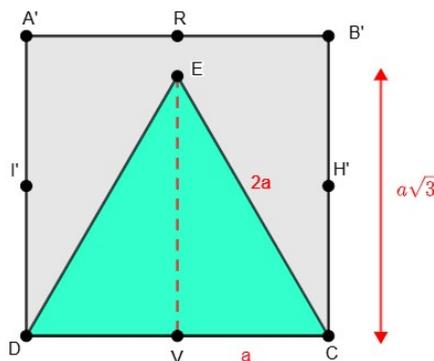
Figura 3.11 – Passo 4 da construção do *Trinity Quartet* com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

5. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo CVE – Figura 3.12, determinamos a medida do segmento $VE = \sqrt{3}a$. Essa medida equivale à altura do retângulo brônzeo, cuja construção é abordada na Subsessão 3.3.1 deste capítulo.

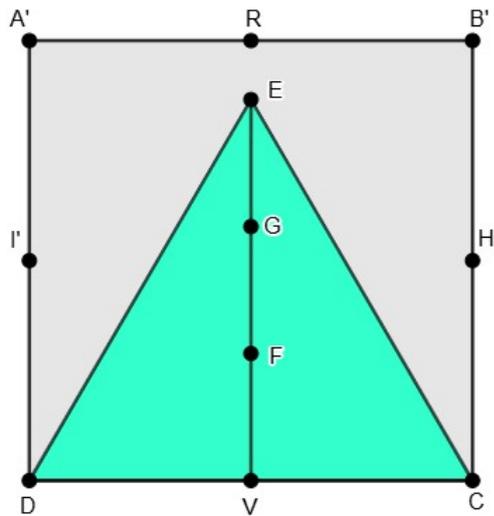
Figura 3.12 – Passo 5 da construção do *Trinity Quartet* com *origami* no GeoGebra: segmento $\sqrt{3}a$



Fonte: Autora.

6. Na sequência, precisamos determinar as posições corretas dos pontos A e B . Para tanto, devemos dividir o segmento \overline{EV} em três segmentos congruentes, o que pode ser feito pelo método descrito do segundo teorema de Haga (Fleischmann, 2019). Assim, estabelecemos os pontos F e G pertencentes ao segmento \overline{EV} , de modo que $\overline{VF} = \overline{FG} = \overline{GE}$, sendo a medida desses segmentos equivalente à um terço da altura do retângulo brônzeo – Figura 3.13.

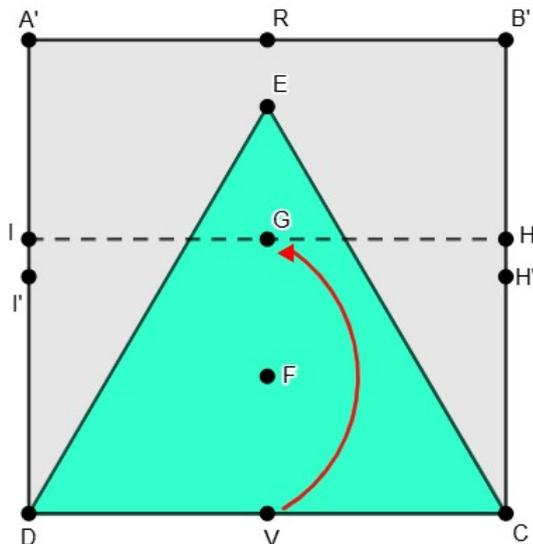
Figura 3.13 – Passo 6 da construção do *Trinity Quartet* com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

7. Construimos uma dobra levando o ponto V sobre o ponto G , definindo os pontos I e H , de modo que $I \in \overline{DA'}$ e $H \in \overline{CB'}$ – Figura 3.14.

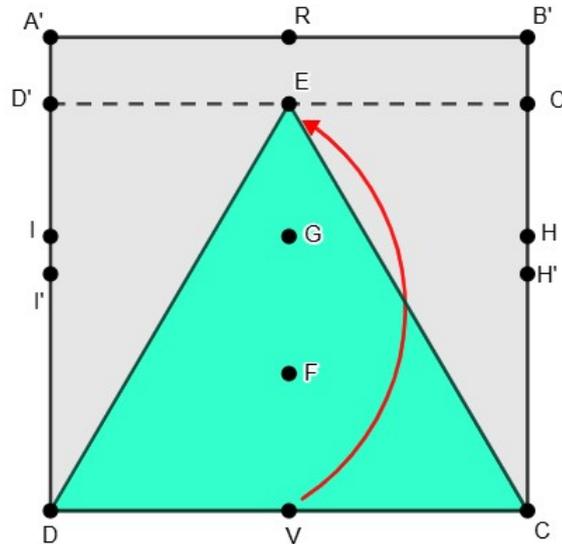
Figura 3.14 – Passo 7 da construção do *Trinity Quartet* com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

8. Determinamos uma dobra levando o ponto V sobre o ponto E , estabelecendo os pontos D' e C' , tais que $D' \in \overline{DA'}$ e $C' \in \overline{CB'}$, como ilustra a Figura 3.15.

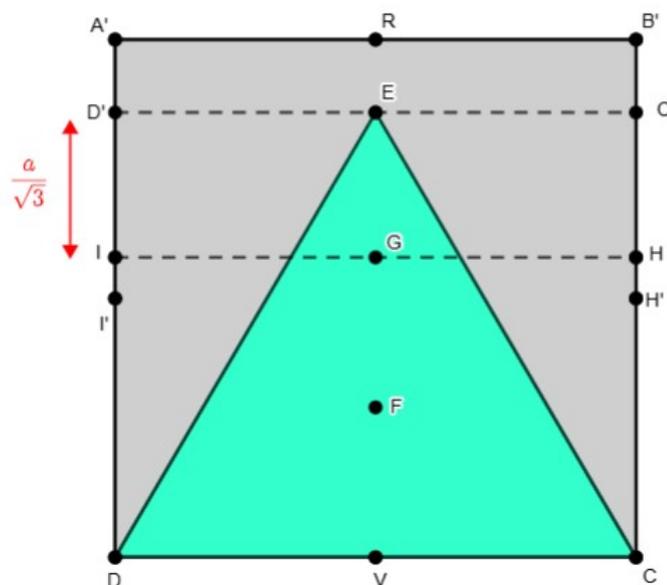
Figura 3.15 – Passo 8 da construção do *Trinity Quartet* com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

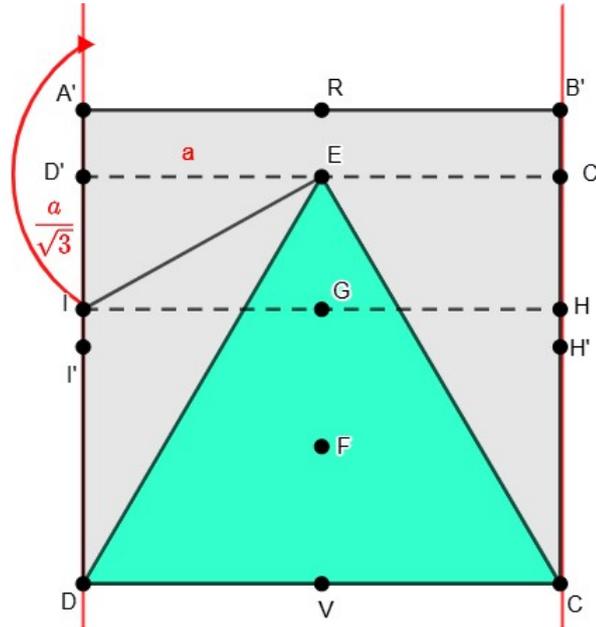
9. A medida do segmento $\overline{ID'}$ é igual a $\frac{a}{\sqrt{3}}$, pois o ponto D' na Figura 3.16 é coincidente com o ponto S na Figura 3.7.

Figura 3.16 – Passo 9 da construção do *Trinity Quartet* com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

10. Levamos o ponto I no sentido da semirreta $\overrightarrow{DA'}$, determinando o ponto A tal que $2\overline{ID'} = \overline{IA}$ – Figura 3.17. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo IED' , temos que:

Figura 3.17 – Passo 10 da construção do *Trinity Quartet* com *origami* no GeoGebra

Fonte: Autora.

$$(IE)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2;$$

$$(IE)^2 = a^2 + \frac{a^2}{3};$$

$$(IE)^2 = \frac{3a^2 + a^2}{3};$$

$$(IE)^2 = \frac{4a^2}{3};$$

$$IE = \sqrt{\frac{4a^2}{3}};$$

$$IE = \frac{2a}{\sqrt{3}},$$

que equivale à terça parte da altura do retângulo brônzeo.

Sendo o triângulo IEA equilátero, temos que $\overline{IA} \equiv \overline{AE} \equiv \overline{IE} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. E como

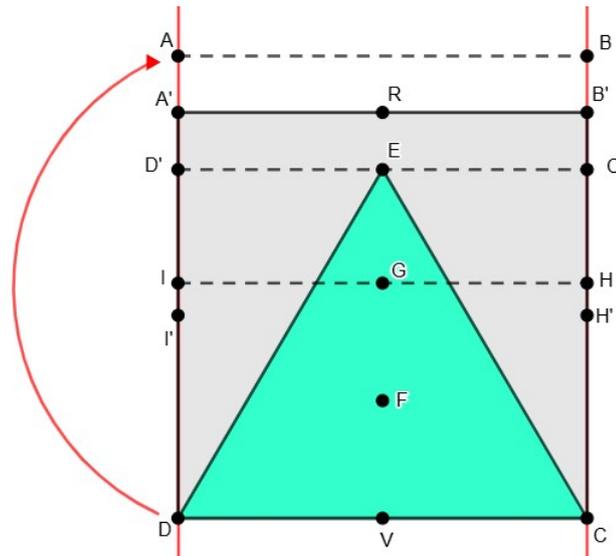
$$IA = ID' + D'A,$$

segue que

$$D'A = IA - ID' = \frac{2a}{\sqrt{3}} - \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

11. Finalmente, construindo uma dobra levando o ponto D sobre o ponto A , definimos o ponto $B \in \overrightarrow{CB'}$, conforme ilustra a Figura 3.18.

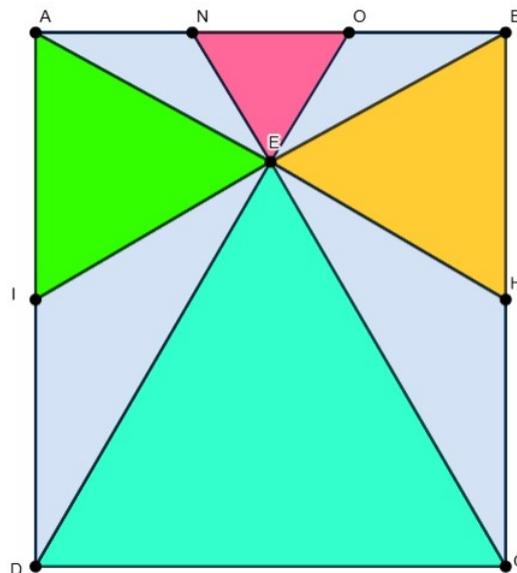
Figura 3.18 – Passo 11 da construção do *Trinity Quartet* com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

12. Para determinar as posições dos pontos N e O pertencentes ao segmento \overline{AB} , devemos aplicar os teoremas de Haga (Fleischmann, 2019). Desta forma, dividimos o segmento \overline{AB} em três partes congruentes. Concluímos assim a determinação dos pontos E, H, I, N e O , vértices, juntamente com os pontos A, B, C e D , dos oito triângulos que compõem o *Trinity Quartet* – Figura 3.19.

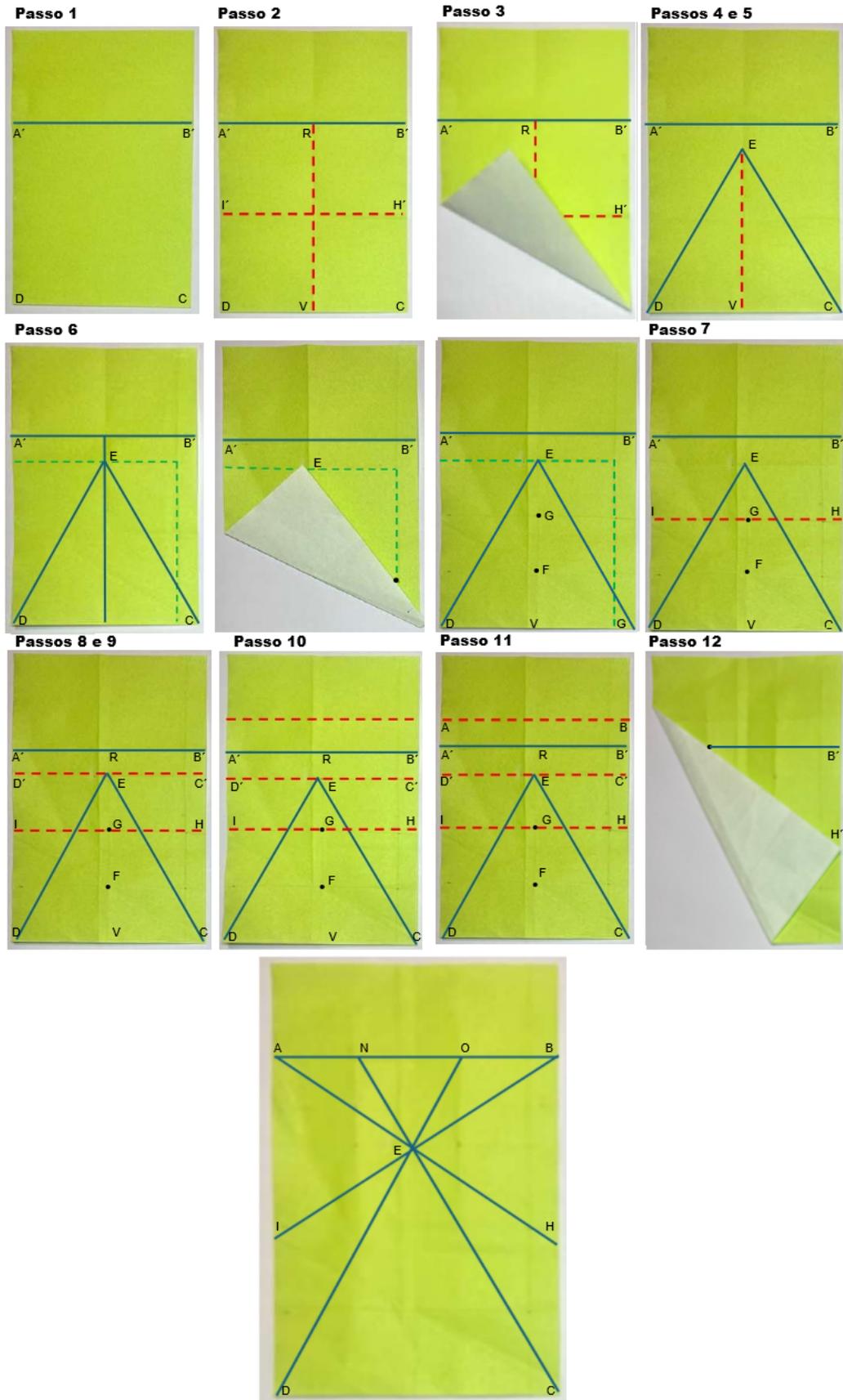
Figura 3.19 – Passo 12 da construção do *Trinity Quartet* com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

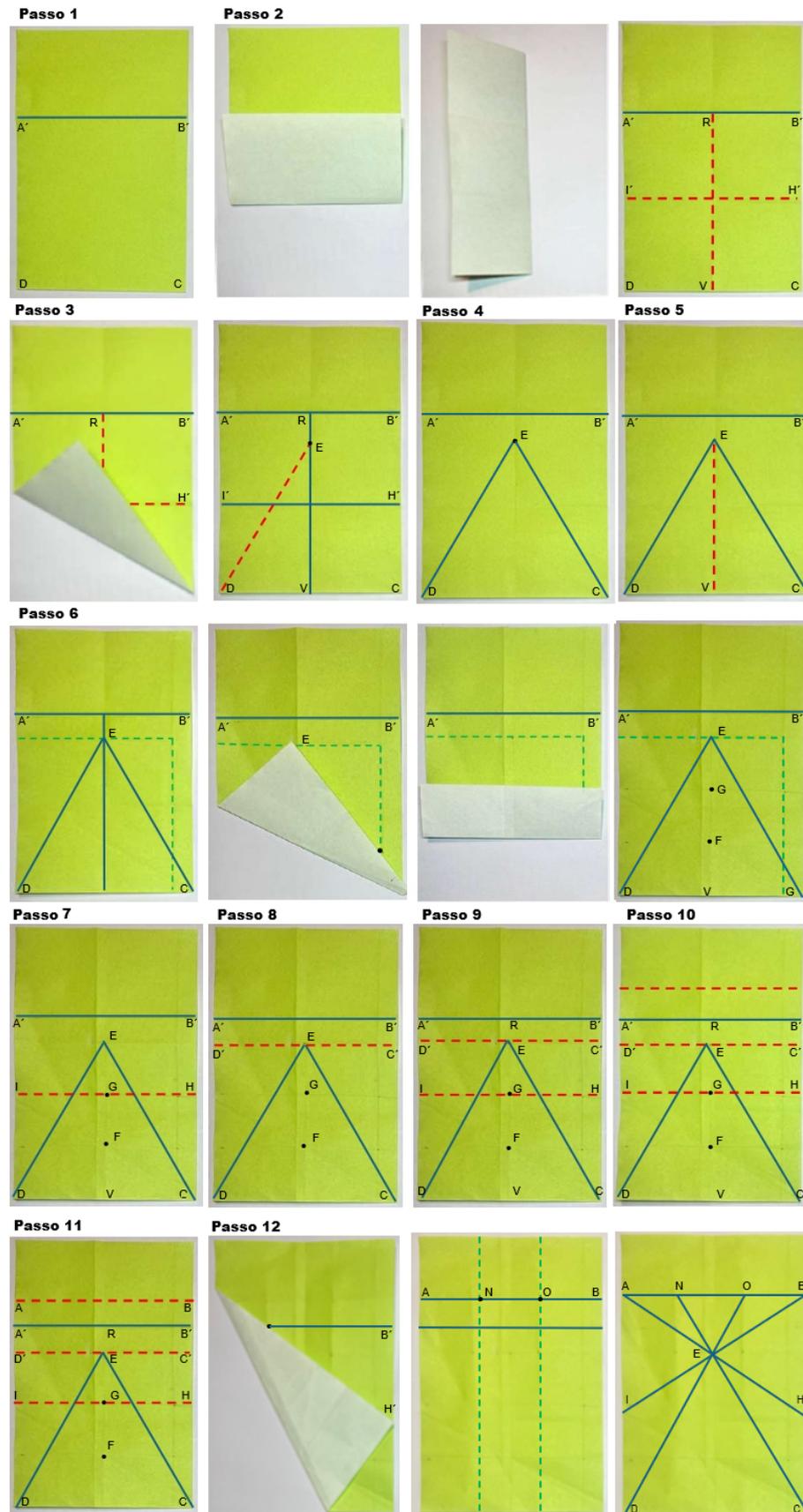
As Figuras 3.20 e 3.21 ilustram, nas versões compacta e completa, respectivamente, as dobraduras para construir o *Trinity Quartet* com *origami*.

Figura 3.20 – Construção do *Trinity Quartet* com *origami*: versão compacta



Fonte: Saito (2025a).

Figura 3.21 – Construção do *Trinity Quartet* com *origami*: versão completa

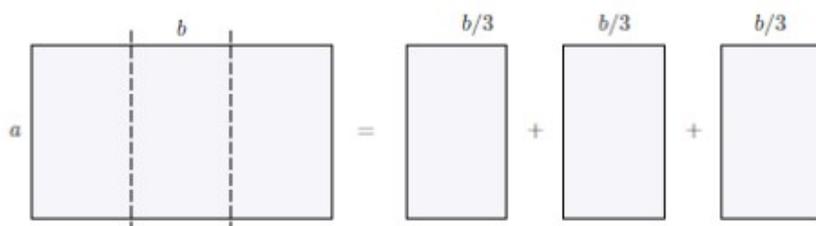


Fonte: Saito (2025a).

3.3.1 RETÂNGULO BRÔNZEIO

Um retângulo brônzeio, ou retângulo de bronze, é um retângulo que pode ser dividido em 3 retângulos com lados proporcionais aos lados do retângulo original na razão $\sqrt{3}$ – Figura 3.22.

Figura 3.22 – Retângulo brônzeio



Fonte: Lucero (2005, p. 5).

Na Figura 3.22, os retângulos menores são semelhantes ao retângulo original. Logo:

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{\frac{b}{3}}$$

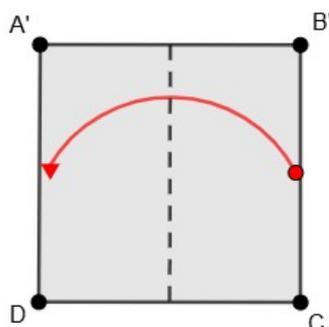
$$\frac{b^2}{a^2} = 3;$$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{3}.$$

Podemos construir o retângulo brônzeio empregando *origami*, cujas dobraduras podem ser simuladas no GeoGebra, conforme o passo a passo descrito a seguir.

1. Consideremos um quadrado $A'B'CD$, de base \overline{DC} e lado de medida ℓ .
2. Construimos a mediatriz (reta perpendicular a um segmento que passa pelo ponto médio dos extremos do segmento) dos segmentos $\overline{A'B'}$ e \overline{DC} levando os pontos B' e C sobre os pontos A' e D , respectivamente – Figura 3.23.

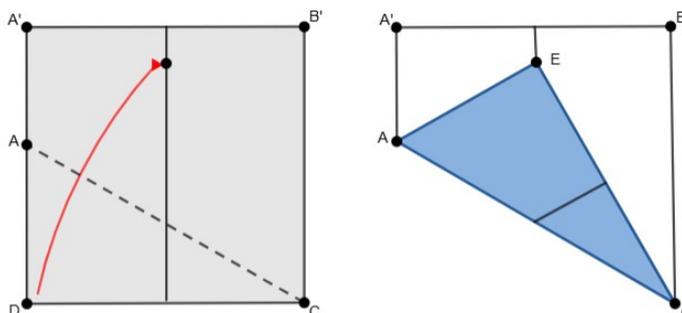
Figura 3.23 – Passos 1 e 2 da construção do retângulo brônzeio com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

3. Estabelecemos uma dobra levando o ponto D sobre a mediatriz do segmento \overline{CD} , definindo o ponto E na mediatriz e o ponto A no lado $\overline{A'D}$, conforme mostra a Figura 3.24. O vinco é a bissetriz (semirreta que divide um ângulo em dois ângulos congruentes) do ângulo $\widehat{DCE} = 60^\circ$.

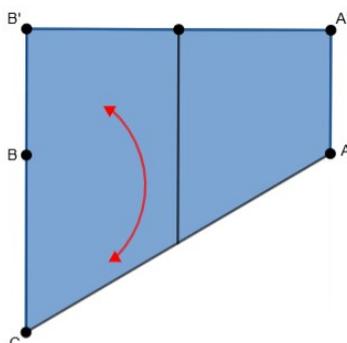
Figura 3.24 – Passo 3 da construção do retângulo brônzeo com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

4. Consideremos o verso da figura (viramos a figura). Construimos uma dobra levando o ponto C no sentido do ponto B' , de modo que o vinco da dobra seja o segmento \overline{AB} , como ilustra a Figura 3.25.

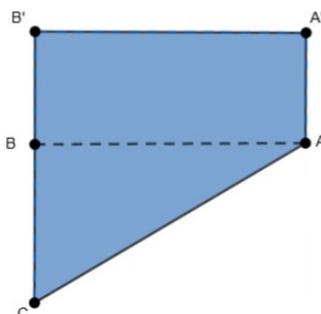
Figura 3.25 – Passo 4 da construção do retângulo brônzeo com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

5. Traçamos o segmento \overline{AB} , onde $A \in \overline{A'D}$ e $B \in \overline{B'C}$ – Figura 3.26.

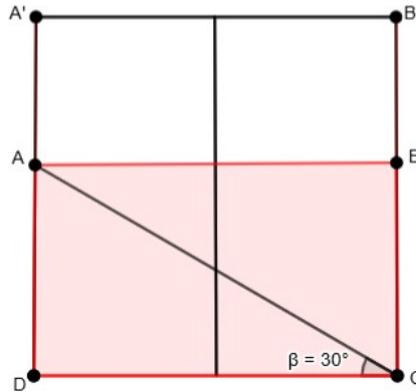
Figura 3.26 – Passo 5 da construção do retângulo brônzeo com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

6. Desfazemos as dobraduras e viramos a figura novamente – Figura 3.27.

Figura 3.27 – Passo 6 da construção do retângulo brônzeo com *origami* no GeoGebra



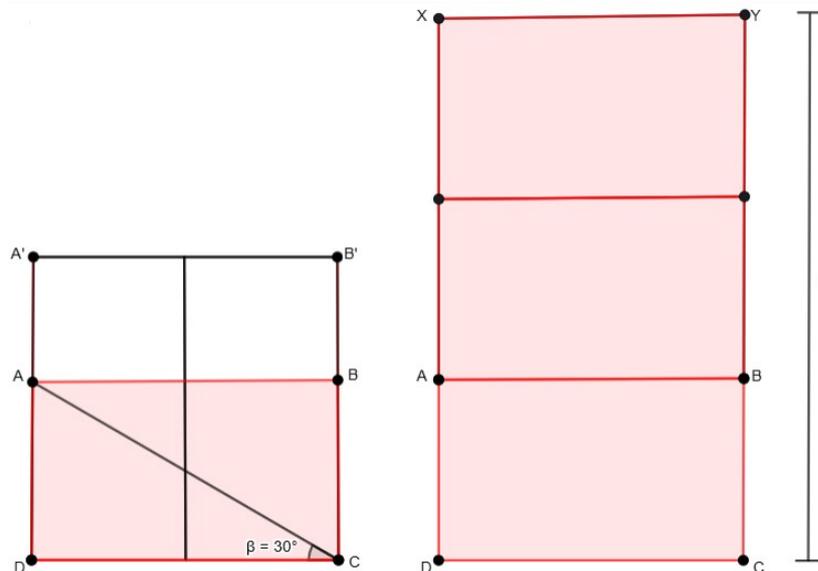
Fonte: Autora.

7. Na triângulo retângulo ADC na Figura 3.27, temos que $CD = \ell$ e $\widehat{DCA} = 30^\circ$. Logo:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 30^\circ &= \frac{AD}{\ell}; \\ AD &= \frac{\sqrt{3}}{3}\ell. \end{aligned}$$

Assim, a razão entre a altura $AD = \frac{\sqrt{3}}{3}\ell$ e a base $CD = \ell$ no retângulo $ABCD$ é igual a $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Desta forma, o retângulo $ABCD$ não é brônzeo. Contudo, construindo um retângulo de base $CD = \ell$ e altura $h = 3 \cdot AD = \sqrt{3}\ell$, teremos que $\frac{h}{CD} = \sqrt{3}$. Portanto, o retângulo $CDXY$ é brônzeo – Figura 3.28.

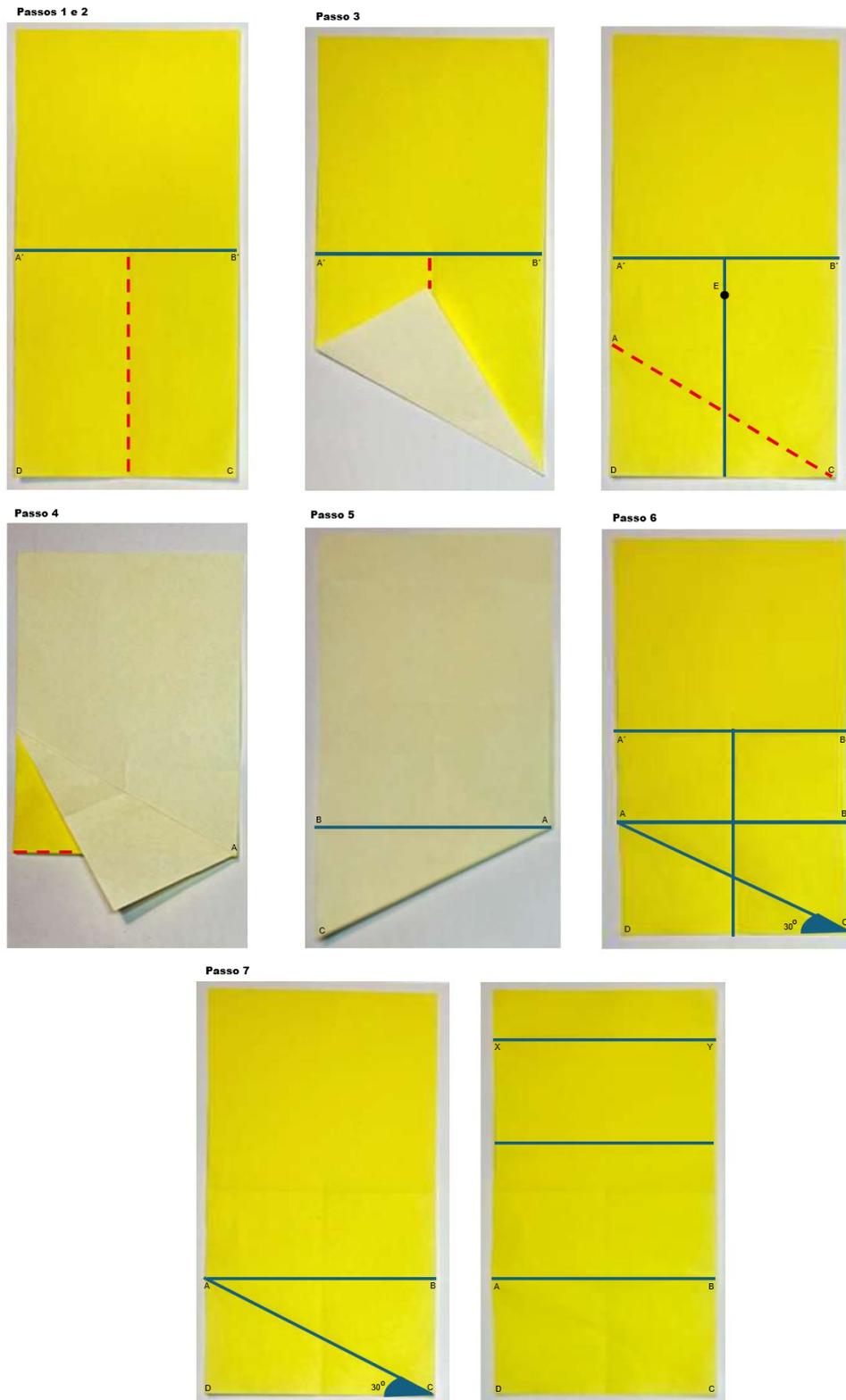
Figura 3.28 – Passo 7 da construção do retângulo brônzeo com *origami* no GeoGebra



Fonte: Autora.

A Figura 3.29 ilustra as dobraduras para construir o retângulo brônzeo com *origami*.

Figura 3.29 – Construção do retângulo brônzeo com *origami*



Fonte: Saito (2025a).

4 PUZZLES E ÁREAS

Apresentamos neste capítulo as áreas de cada uma das peças que compõem os *puzzles* Tangram, *Stomachion* de Arquimedes, *Disorientation* e *Trinity Quartet*, assim como as frações percentuais que essas áreas representam da área da peça que origina os quebra-cabeças. No cálculo da área das peças do *Trinity Quartet*, empregamos o teorema de Pick.

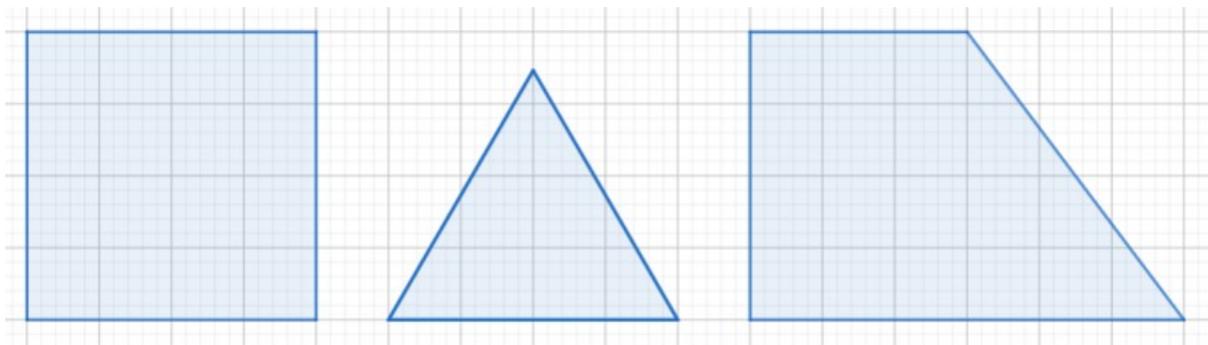
4.1 ÁREA DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS

Nos dicionários, a primeira definição apresentada para área é “a medida da extensão (isto é, do tamanho) de uma figura plana ou superfície” (Pimentel *et al.*, s. d., p. 1). A Definição 4.1 estabelece o conceito intuitivo de área (Neto, 2022, p. 188). Uma definição formal de área encontra-se em Fernandes (2018).

Definição 4.1. *A área de uma região no plano é um número positivo associado à mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado.*

Historicamente, foram os gregos que empregaram inicialmente a ideia de “quanto cabe” para calcular a área de figuras planas. Nessa estratégia, o objetivo é determinar quantos quadrados unitários (lado de medida um) são necessários para preencher o espaço ocupado por uma figura plana (Pimentel *et al.*, s. d.). A Figura 4.1 ilustra a área de figuras geométricas decompostas em quadrados de lado 1.

Figura 4.1 – Áreas de figuras decompostas em quadrados unitários: quadrado; triângulo equilátero; trapézio retângulo



Fonte: Autora.

No quadrado unitário, o lado mede uma unidade de medida, esta não especificada. “Como o metro (símbolo m) é a unidade de medida de comprimento, parece ser uma boa ideia chamar de metro quadrado a área do quadrado de lado $1 m$. Poderíamos, então, usar um símbolo do tipo m^2 para representar essa unidade de medida de área” (Pimentel *et al.*, s. d., p. 3).

A unidade padrão no Sistema Internacional de Unidades (SI) para a medida da área de uma superfície é o “metro quadrado” (m^2). Entretanto, poderíamos empregar um^2 ou ua para representar uma unidade de área, sendo esta mm^2 , cm^2 , m^2 , ou qualquer outra unidade de medida de comprimento ao quadrado.

Utilizando a decomposição em quadrados unitários e a equicomposição de polígonos (Nós; Fernandes, 2019), podemos estabelecer as relações para calcular a área de retângulos, triângulos e paralelogramos, figuras que compõem os *puzzles* empregados neste trabalho.

RETÂNGULO

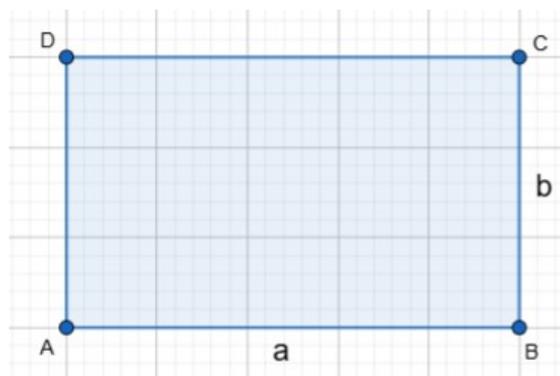
Um retângulo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos e cujos ângulos internos são retos. Todo retângulo é um paralelogramo. O Teorema 4.1 estabelece a área do retângulo.

Teorema 4.1. *A área \mathcal{A} do retângulo de dimensões a e b é*

$$\mathcal{A} = a \cdot b. \quad (4.1)$$

A demonstração formal da área do retângulo encontra-se em Dolce e Pompeo (2013b) e em Fernandes (2018). A Figura 4.2 ilustra a área de um retângulo de comprimento $a = 5$ e altura $b = 3$.

Figura 4.2 – Área do retângulo de dimensões $a = 5$ e $b = 3$



Fonte: Autora.

QUADRADO

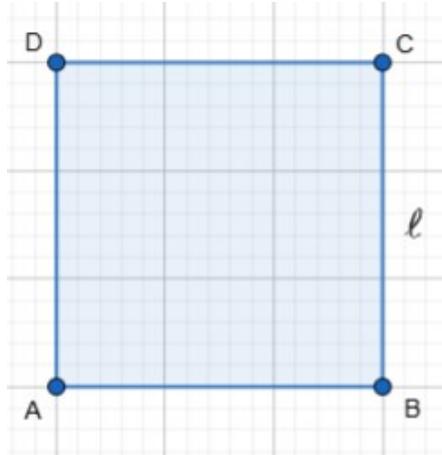
Um quadrado é um retângulo cujos lados são congruentes. Desta forma, a área do quadrado – Corolário 4.1 – é decorrente do Teorema 4.1.

Corolário 4.1. *A área \mathcal{A} do quadrado de lado ℓ é*

$$\mathcal{A} = \ell^2. \quad (4.2)$$

Todo retângulo pode ser decomposto em um quadrado de mesma área (Fernandes, 2018). A Figura 4.3 ilustra a área de um quadrado de lado $\ell = 3$.

Figura 4.3 – Área do quadrado de lado $\ell = 3$



Fonte: Autora.

TRIÂNGULO

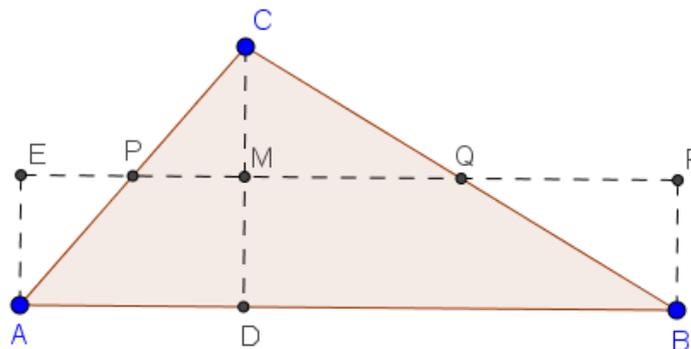
Um triângulo é um polígono de três lados e três ângulos internos. O Teorema 4.2 estabelece a área do triângulo de base b e altura h .

Teorema 4.2. *A área \mathcal{A} do triângulo de base b e altura h é*

$$\mathcal{A} = \frac{b \cdot h}{2}. \quad (4.3)$$

Podemos demonstrar o Teorema 4.2 a partir da propriedade de que todo triângulo é equicomposto a um retângulo (Fernandes, 2018). A Figura 4.4 ilustra um triângulo ABC , de base \overline{AB} e altura \overline{CD} , decomposto no retângulo $ABFE$, de comprimento \overline{AB} e altura $DM = \frac{CD}{2}$.

Figura 4.4 – Triângulo ABC equicomposto ao retângulo $ABFE$



Fonte: Fernandes (2018, p. 50).

Para o triângulo equilátero, a área é estabelecida somente em função da medida do lado ℓ – Teorema 4.3. Podemos demonstrar esse teorema empregando as razões trigonométricas no triângulo retângulo e o Teorema 4.2 (Dolce; Pompeo, 2013a).

Teorema 4.3. *A área \mathcal{A} do triângulo equilátero de lado ℓ é*

$$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2. \quad (4.4)$$

PARALELOGRAMO

Um paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos. O Teorema 4.4 estabelece a área do paralelogramo de base b e altura h .

Teorema 4.4. *A área \mathcal{A} do paralelogramo de base b e altura h é*

$$\mathcal{A} = b \cdot h. \quad (4.5)$$

Todo paralelogramo é equicomposto a um retângulo. Esta propriedade possibilita a demonstração do Teorema 4.4. A Figura 4.5 ilustra o paralelogramo $ABCD$, de comprimento \overline{CD} e altura \overline{BF} , equicomposto ao retângulo $GECD$, que tem o mesmo comprimento e altura de $ABCD$.

Figura 4.5 – Paralelogramo $ABCD$ equicomposto ao retângulo $GECD$



Fonte: Fernandes (2018, p. 66).

A equicomposição de figuras geométricas planas, isto é, a composição/decomposição de figuras que têm a mesma área (figuras equivalentes), é uma estratégia importante na Educação Básica, que impede que o ensino de áreas fique restrito à mera aplicações de fórmulas.

A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam “fazer a quadratura de uma figura”) (BNCC, 2018, p. 275).

A BNCC apresenta várias habilidades pertinentes ao cálculo da área de figuras geométricas planas (BNCC, 2018, p. 311–317):

- (EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros;
- (EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas;
- (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

Nos PCN's (Brasil, 1997, p. 52–56) também há conteúdos conceituais e procedimentais voltados para o cálculo de área de figuras planas.

- Composição e decomposição de figuras planas e identificação de que qualquer polígono pode ser composto a partir de figuras triangulares.
- Identificar características das figuras geométricas, percebendo semelhanças e diferenças entre elas, por meio de composição e decomposição, simetrias, ampliações e reduções.

Dessa forma, os documentos oficiais que orientam o ensino de Matemática na Educação Básica brasileira destacam a importância de explorar o cálculo de áreas de figuras planas de maneiras variadas e criativas. Eles sugerem que, para que os estudantes compreendam melhor esses conceitos, é fundamental utilizar metodologias diferenciadas que tornem o aprendizado mais interessante e acessível. Nesse contexto, propomos o uso de *puzzles* como estratégia metodológica. Esses quebra-cabeças podem auxiliar os estudantes a desenvolverem habilidades importantes relacionadas ao cálculo de áreas, alinhando-se às competências e habilidades delineadas na BNCC. Assim, ao incorporar esses recursos lúdicos, buscamos tornar o ensino de Matemática mais envolvente e eficaz, estimulando o raciocínio, a criatividade e a compreensão dos conceitos geométricos de forma prática e divertida.

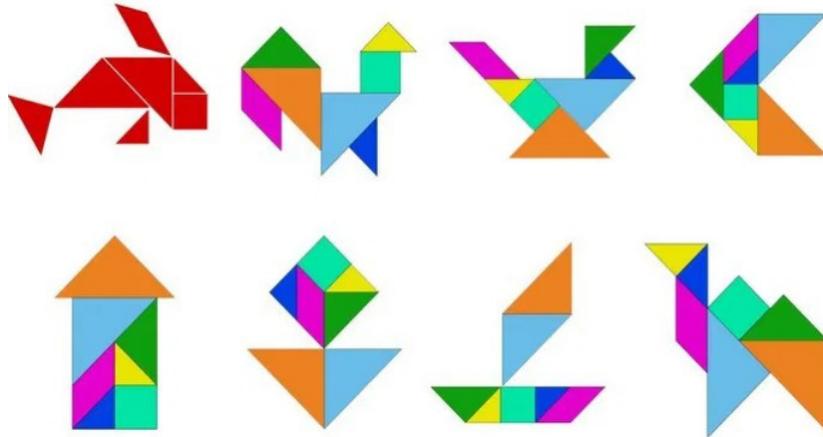
4.2 ÁREA DAS PEÇAS DO TANGRAM

As sete peças do Tangram quadrangular possibilitam a construção de diversas figuras planas equivalentes (ou figuras equicompostas, ou figuras equidecomponíveis), isto é, figuras com a mesma área, como ilustra a Figura 4.6.

Logo, o uso do Tangram permite investigar a “equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros” (BNCC, 2018, p. 310).

Ao trabalhar com o Tangram, o aluno monta e desmonta diversas figuras utilizando as sete peças. Assim o estudante percebe que não importa a posição ou a forma que cada peça se encontra nas diversas silhuetas, mas sim o conjunto, ou seja, todas as figuras são formadas pelas mesmas sete peças, logo possuem a mesma área (Berger, 2013, p. 24).

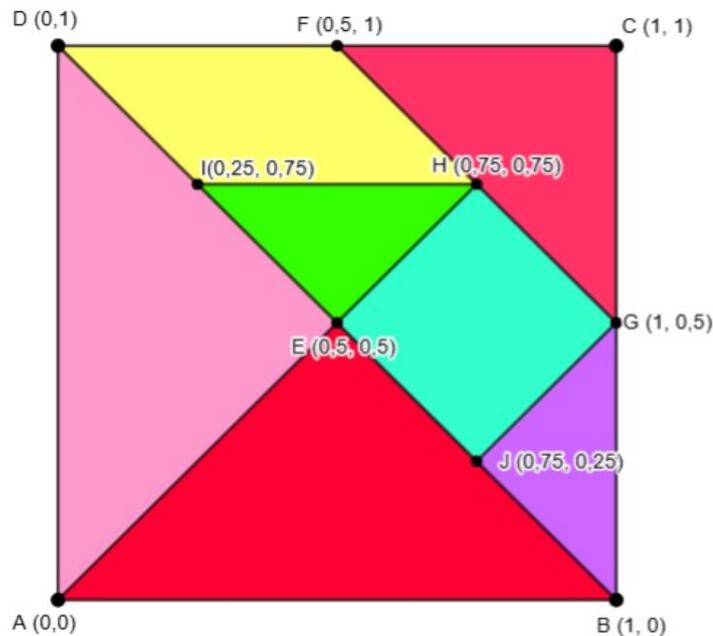
Figura 4.6 – Figuras formadas com as sete peças do Tangram quadrangular



Fonte: Adaptado de Asth (s. d.).

Para calcular a área de cada uma das peças do Tangram, precisamos inicialmente determinar as medidas dos lados das mesmas. Assim, no Tangram construído em um quadrado de lado 1 – Figura 4.7, temos as seguintes figuras geométricas planas:

Figura 4.7 – As sete peças do Tangram em um quadrado de lado 1



Fonte: Autora.

- dois triângulos isósceles congruentes ADE e ABE , de lados $AB = AD = 1$ e $AE = DE = BE = \frac{\sqrt{2}}{2}$, uma vez que $BE = DE = \frac{BD}{2}$, onde $BD = \sqrt{2}$ é a diagonal do quadrado $ABCD$ de lado 1;
- dois triângulos retângulos isósceles congruentes BGJ e EHI , de lados $BG = HI = \frac{1}{2}$,

$BJ = GJ = EH = EI = \frac{\sqrt{2}}{4}$, uma vez que $BJ = EI = \frac{BD}{4}$ e $GJ = EH = \frac{AC}{4}$, onde $BD = AC = \sqrt{2}$ é a diagonal do quadrado $ABCD$ de lado 1;

- um triângulo retângulo isósceles FCG de lados $FC = GC = \frac{1}{2}$ e $FG = \frac{\sqrt{2}}{2}$, uma vez que $FG = DE = \frac{BD}{2}$, onde $BD = \sqrt{2}$ é a diagonal do quadrado $ABCD$ de lado 1;
- um quadrado $EHGJ$ de lado $EH = HG = GJ = JE = \frac{\sqrt{2}}{4}$;
- um paralelogramo $DFHI$ de lados $DF = HI = \frac{1}{2}$ e $DI = FH = \frac{1}{4}$.

Determinadas as medidas dos lados de cada uma das sete peças do Tangram, podemos calcular a área dessas peças empregando as relações (4.2), (4.3) e (4.5).

1. Triângulos isósceles congruentes ADE e ABE :

$$\mathcal{A}(\triangle ADE) = \mathcal{A}(\triangle ABE) = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} ua. \quad (4.6)$$

2. Triângulos retângulos isósceles congruentes BGJ e EHI :

$$\mathcal{A}(\triangle BGJ) = \mathcal{A}(\triangle EHI) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}}{2} = \frac{1}{16} ua. \quad (4.7)$$

3. Triângulo retângulo isósceles FCG :

$$\mathcal{A}(\triangle FCG) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8} ua. \quad (4.8)$$

4. Quadrado $EHGJ$:

$$\mathcal{A}(EHGJ) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{1}{8} ua. \quad (4.9)$$

5. Paralelogramo $DFHI$:

$$\mathcal{A}(DFHI) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} ua. \quad (4.10)$$

Calculando a soma \mathcal{S} das áreas (4.6) a (4.10) dos sete polígonos, obtemos a área do quadrado inicial $ABCD$, igual a 1 ua :

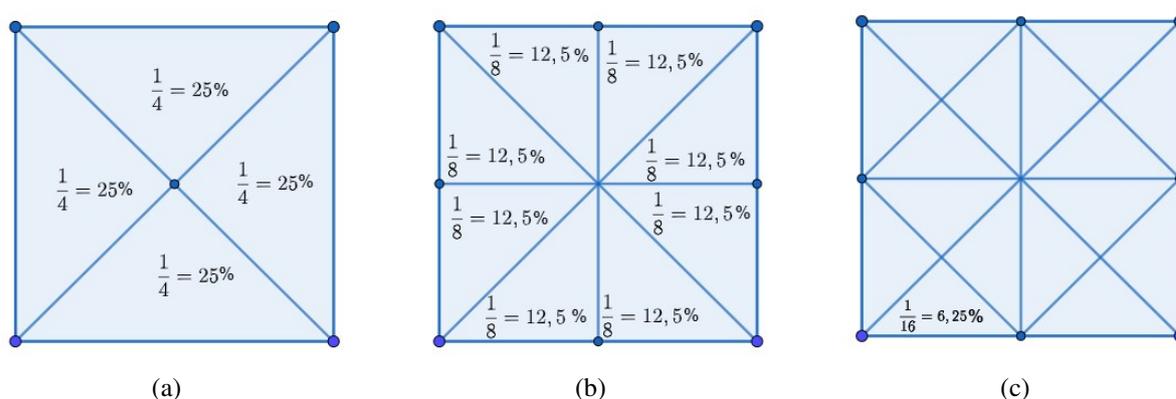
$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{16} + 3 \cdot \frac{1}{8}; \\ \mathcal{S} &= \frac{16}{16} = 1 = \mathcal{A}(ABCD). \end{aligned}$$

4.2.1 FRAÇÕES PORCENTUAIS NO TANGRAM

Calculada a área de cada uma das sete peças do Tangram quadrado, podemos agora empregá-lo para explorar conceitos relacionados à porcentagem. Quando falamos em porcentagem (ou percentagem), estamos nos referindo a uma fração cujo denominador é 100. Podemos expressar porcentagens usando frações, números inteiros ou decimais. O símbolo % indica o valor percentual. Por exemplo, a quantidade 45% equivale à fração $\frac{45}{100}$, ou equivalentemente, ao número decimal 0,45. Isso significa que, de um total de 100 partes, estamos considerando 45 partes (Teixeira, 2022, p. 223).

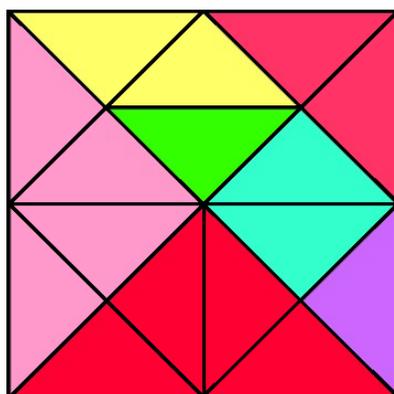
No Tangram quadrado de área 1 ua , as sete peças têm áreas de $\frac{1}{4} = 0,25\text{ ua}$ (dois triângulos isósceles congruentes), $\frac{1}{8} = 0,125\text{ ua}$ (um triângulo retângulo isósceles maior, um paralelogramo, um quadrado) e $\frac{1}{16} = 0,0625\text{ ua}$ (dois triângulos retângulos isósceles congruentes menores). A peça de menor área pode ser obtida por meio de partições sucessivas do quadrado formado pelas sete peças, como ilustra a Figura 4.8. Com a peça de menor área, podemos compor as demais peças do Tangram quadrado – Figura 4.9.

Figura 4.8 – Decomposição sucessiva do quadrado para obter a menor peça do Tangram



Fonte: Autora.

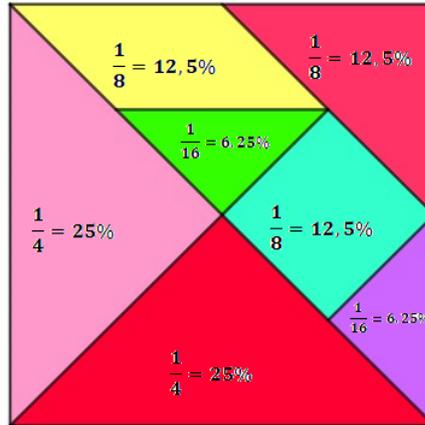
Figura 4.9 – Peças do Tangram quadrado a partir da peça de menor área



Fonte: Autora.

A Figura 4.10 ilustra as frações percentuais das sete peças do Tangram quadrado.

Figura 4.10 – Frações percentuais das peças do Tangram quadrado

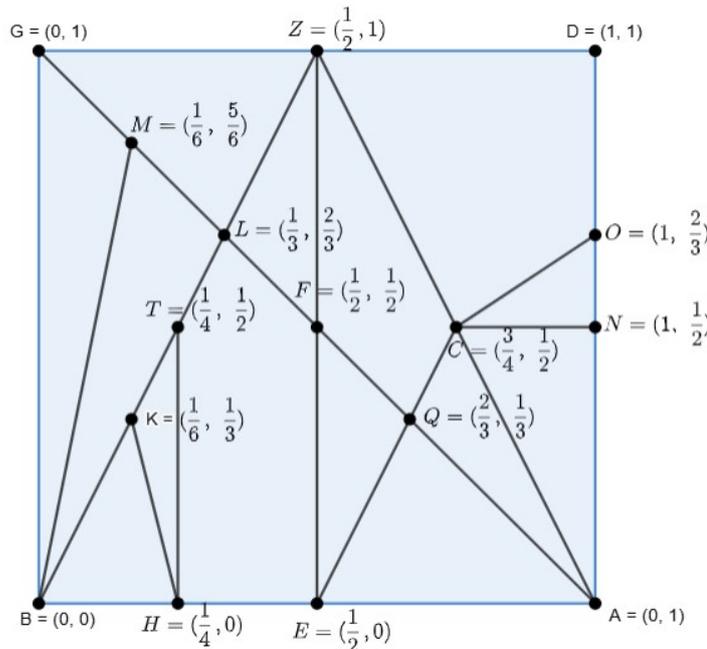


Fonte: Autora.

4.3 ÁREA DAS PEÇAS DO *STOMACHION*

O *Stomachion* é um *puzzle* composto por 14 polígonos: 11 triângulos, 2 quadriláteros e 1 pentágono, como ilustra a Figura 4.11. Podemos calcular a área das catorze peças empregando as relações (4.1) e (4.3). Contudo, para determinar a área de algumas peças, precisamos compor/decompor polígonos.

Figura 4.11 – Polígonos que compõem o *Stomachion* em um quadrado de lado 1



Fonte: Autora.

Consideremos o quadrado $ABGD$, de lado 1 e área 1ua , decomposto nos catorze polígonos representados na Figura 4.11, onde $proj_{\overline{AB}}P$ simboliza a projeção ortogonal do ponto

P sobre o segmento \overline{AB} .

1. Triângulo BGM :

$$\mathcal{A}(\triangle BGM) = \frac{1}{2} \cdot BG \cdot \text{proj}_{\overline{BG}}M = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} ua. \quad (4.11)$$

2. Triângulo BLM :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\triangle BLM) &= \mathcal{A}(\triangle BGL) - \mathcal{A}(\triangle BMG) \\ &= \frac{1}{2} \cdot BG \cdot \text{proj}_{\overline{BG}}L - \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12} ua. \end{aligned} \quad (4.12)$$

3. Triângulo BHK :

$$\mathcal{A}(\triangle BHK) = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot \text{proj}_{\overline{BH}}K = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{24} ua. \quad (4.13)$$

4. Triângulo HKT :

$$\mathcal{A}(\triangle HKT) = \frac{1}{2} \cdot HT \cdot \text{proj}_{\overline{HT}}K = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{48} ua. \quad (4.14)$$

5. Pentágono $HEFLT$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(HEFLT) &= \mathcal{A}(HEFT) + \mathcal{A}(\triangle FLT) \\ &= HE \cdot EF + \frac{1}{2} \cdot FT \cdot \text{proj}_{\overline{FT}}L \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{48} = \frac{7}{48} ua. \end{aligned} \quad (4.15)$$

6. Triângulo EFQ :

$$\mathcal{A}(\triangle EFQ) = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot \text{proj}_{\overline{EF}}Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24} ua. \quad (4.16)$$

7. Triângulo AEQ :

$$\mathcal{A}(\triangle AEQ) = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot \text{proj}_{\overline{AE}}Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} ua. \quad (4.17)$$

8. Triângulo ACQ :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\triangle ACQ) &= \mathcal{A}(\triangle ACE) - \mathcal{A}(\triangle AEQ) \\ &= \frac{1}{2} \cdot AE \cdot \text{proj}_{\overline{AE}}C - \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{1}{24} ua. \end{aligned} \quad (4.18)$$

9. Triângulo ACN :

$$\mathcal{A}(\triangle ACN) = \frac{1}{2} \cdot CN \cdot AN = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} ua. \quad (4.19)$$

10. Triângulo CNO :

$$\mathcal{A}(\triangle CNO) = \frac{1}{2} \cdot CN \cdot NO = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{48} ua. \quad (4.20)$$

11. Quadrilátero $CQFZ$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(CQFZ) &= \mathcal{A}(\triangle CFZ) + \mathcal{A}(\triangle CFQ) \\ &= \frac{1}{2} \cdot CF \cdot FZ + \frac{1}{2} \cdot CF \cdot \text{proj}_{\overline{CF}} Q \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{48} = \frac{1}{12} ua. \end{aligned} \quad (4.21)$$

12. Quadrilátero $CODZ$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(CODZ) &= \mathcal{A}(FNDZ) - \mathcal{A}(\triangle CNO) - \mathcal{A}(\triangle CFZ) \\ &= FN \cdot FZ - \frac{1}{48} - \frac{1}{2} \cdot CF \cdot FZ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{48} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{48} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{48} - \frac{1}{16} = \frac{8}{48} = \frac{1}{6} ua. \end{aligned} \quad (4.22)$$

13. Triângulo GLZ :

$$\mathcal{A}(\triangle GLZ) = \frac{1}{2} \cdot GZ \cdot \text{proj}_{\overline{GZ}} L = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{12} ua. \quad (4.23)$$

14. Triângulo FLZ :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\triangle FLZ) &= \mathcal{A}(\triangle FGZ) - \mathcal{A}(\triangle GLZ) \\ &= \frac{1}{2} \cdot GZ \cdot FZ - \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{1}{24} ua. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Calculando a soma \mathcal{S} das áreas (4.11) a (4.24), obtemos a área do quadrado inicial $ABGD$, igual a $1 ua$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + 4 \cdot \frac{1}{24} + 2 \cdot \frac{1}{48} + 1 \cdot \frac{7}{48}; \\ \mathcal{S} &= \frac{48}{48} = 1 = \mathcal{A}(ABGD). \end{aligned}$$

A composição/decomposição de polígonos é uma estratégia relativamente simples para o cálculo da área de algumas peças do *Stomachion*. Contudo, podemos empregar outras duas estratégias, ambas adequadas à Educação Básica.

4.3.1 DETERMINANTES

A fórmula da área de Gauss¹, ou fórmula do cadarço (*shoelace formula*), ou algoritmo do agrimensor - Teorema 4.5, é uma estratégia para calcular a área de um polígono conhecidas as coordenadas dos vértices. O Teorema 4.5 pode ser provado aplicando-se o teorema de Green² a um campo vetorial adequado (Stewart, 2013). A fórmula do cadarço (as multiplicações cruzadas simulam a forma como se amarra um cadarço) pode ser adotada para o cálculo da área dos polígonos que compõem o *Stomachion*.

Teorema 4.5 (fórmula do cadarço). *Se $P_1P_2 \cdots P_nP_{n+1}$ é um polígono simples, isto é, um polígono cujos lados não adjacentes não se intersectam, orientado positivamente (sentido anti-horário), de vértices $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$, com $P_1 = P_{n+1}$, então a área A do polígono $P_1P_2 \cdots P_nP_{n+1}$ é dada por*

$$2A(P_1P_2 \cdots P_nP_{n+1}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \quad (4.25)$$

ou equivalentemente por

$$A(P_1P_2 \cdots P_nP_{n+1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i (y_{i+1} - y_{i-1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i (x_{i+1} - x_{i-1}).$$

Na equação (4.25), $\begin{vmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$ indica o determinante de ordem dois, que equivale a $x_{n+1} \cdot y_1 - x_1 \cdot y_{n+1}$ (Iezzi; Hazzan, 1993). Aplicando essa relação nos dois quadriláteros e no pentágono do *Stomachion*, obtemos que:

1.

$$\begin{aligned} A(CODZ) &= \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{3} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{6} ua; \end{aligned} \quad (4.26)$$

2.

$$\begin{aligned} A(CQFZ) &= \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} ua; \end{aligned} \quad (4.27)$$

¹ Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855): matemático, astrônomo e físico alemão.

² George Green (1793–1841): matemático inglês autodidata.

3.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(HEFLT) &= \frac{1}{2} \left(\left| \begin{array}{cc} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{array} \right| \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(0 + \frac{1}{4} - 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{24} = \frac{7}{48} \text{ ua.}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

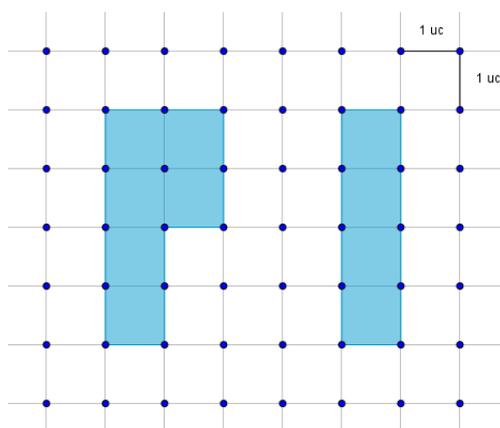
Comparando as áreas (4.22), (4.21) e (4.15), obtidas pela composição de polígonos, respectivamente com as áreas (4.26), (4.27) e (4.28), calculadas com a fórmula do cadaço, constatamos a equivalência das estratégias.

4.3.2 TEOREMA DE PICK

Outra estratégia que podemos empregar na Educação Básica para calcular a área das peças do *Stomachion* é o Teorema de Pick³ – Teorema 4.6. Este teorema, também denominado fórmula de Pick, estabelece uma relação para calcular a área de um polígono reticulado simples – Definições 4.2 e 4.3 – por meio da contagem de pontos em uma malha quadriculada. A fórmula depende da quantidade de pontos da malha que estão no bordo do polígono e no seu interior.

Definição 4.2. *Os pontos do plano cartesiano cujas coordenadas são números inteiros são denominados pontos reticulados. Um reticulado é, portanto, um conjunto de tais pontos. Um polígono reticulado é aquele cujos vértices são pontos reticulados, como ilustra a Figura 4.12.*

Figura 4.12 – Polígonos reticulados

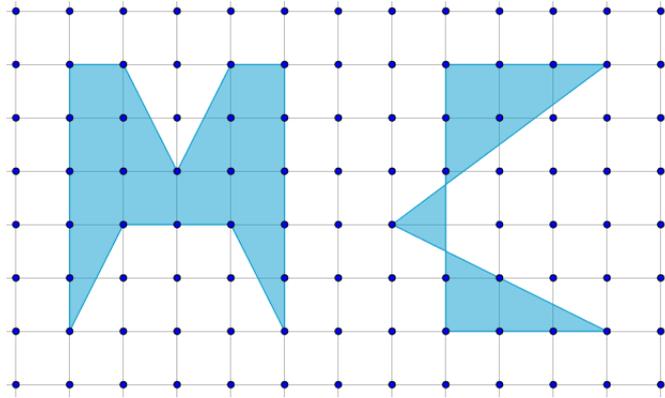


Fonte: Almeida (2016, p. 33).

Definição 4.3. *Polígonos reticulados simples são polígonos do reticulado nos quais a interseção entre lados não adjacentes é vazia, como ilustra a Figura 4.13.*

³ Georg Alexander Pick (1859–1942): matemático austríaco.

Figura 4.13 – Polígono reticulado: (a) simples; (b) não simples



Fonte: Almeida (2016, p. 34).

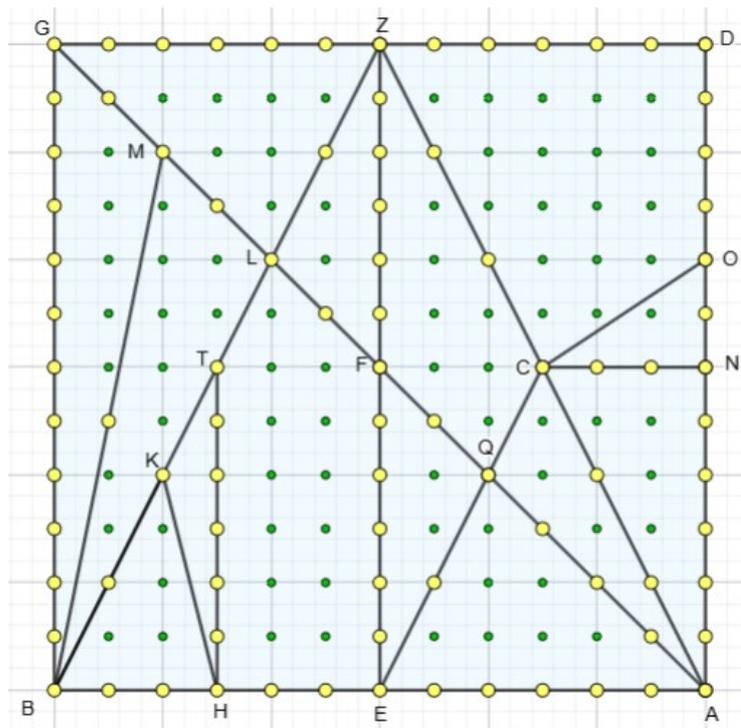
Teorema 4.6. (de Pick) Se P é um polígono reticulado simples, então a área A de P é dada por

$$A(P) = \frac{B}{2} + I - 1, \quad (4.29)$$

onde B é o número de pontos do reticulado sobre os lados de P , inclusive os vértices, e I é o número de pontos do reticulado internos ao polígono.

A demonstração do Teorema 4.6 depende da demonstração de outros teoremas (Lima, 1991; Almeida, 2016). Para ilustrar a aplicação do teorema de Pick no cálculo da área das peças do *Stomachion*, consideremos esse *puzzle* em um quadrado reticulado 12×12 , como ilustra a Figura 4.14.

Figura 4.14 – *Stomachion* em um quadrado reticulado 12×12



Fonte: Autora.

Aplicando o Teorema 4.6 nos dois quadriláteros e no pentágono do *Stomachion*, obtemos que:

1. Quadrilátero $CODZ$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(CODZ) &= \frac{B}{2} + I - 1 \\ &= \frac{14}{2} + 18 - 1 = 24 \text{ ua}; \\ \frac{\mathcal{A}(CODZ)}{\mathcal{A}(ABGD)} &= \frac{24}{144} = \frac{1}{6};\end{aligned}\tag{4.30}$$

2. Quadrilátero $CQFZ$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(CQFZ) &= \frac{B}{2} + I - 1 \\ &= \frac{12}{2} + 7 - 1 = 12 \text{ ua}; \\ \frac{\mathcal{A}(CQFZ)}{\mathcal{A}(ABGD)} &= \frac{12}{144} = \frac{1}{12};\end{aligned}\tag{4.31}$$

3. Pentágono $HEFLT$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(HEFLT) &= \frac{B}{2} + I - 1 \\ &= \frac{18}{2} + 13 - 1 = 21 \text{ ua}; \\ \frac{\mathcal{A}(HEFLT)}{\mathcal{A}(ABGD)} &= \frac{21}{144} = \frac{7}{48}.\end{aligned}\tag{4.32}$$

Comparando as razões entre as áreas (4.22), (4.21) e (4.15), obtidas pela composição de polígonos, e a área do quadrado $ABGD$, respectivamente com as razões entre áreas (4.26), (4.27) e (4.28), calculadas com a fórmula do cadarço, e a área do quadrado $ABGD$, e com as razões (4.30), (4.31) e (4.32), determinadas com o teorema de Pick, averiguamos a equivalência das estratégias.

4.3.3 FRAÇÕES PORCENTUAIS NO *STOMACHION*

A área das peças do *Stomachion* unitário variam de $\frac{1}{48}$ a $\frac{1}{6}$, sendo a menor área a do triângulo HKT . Todas as demais peças do *puzzle* podem ser obtidas a partir desse triângulo – Exemplo 4.1.

Exemplo 4.1. A área do quadrilátero $CODZ$ no *Stomachion* unitário é igual a $\frac{1}{6}$. Esse quadrilátero é a peça de maior área do *puzzle*, e equivale a seis vezes a peça de menor área, o triângulo HKT , ou seja, $\frac{1}{6} \div \frac{1}{48} = \frac{48}{6} = 6$.

Desta forma, a área de cada uma das treze peças do *Stomachion* é um múltiplo de $\frac{1}{48}$, área do triângulo *HKT*. Entretanto, não é possível compor as treze peças a partir do triângulo *HKT*. O que podemos empregar é a equicomposição de polígonos – Teoremas 4.7, 4.8 e 4.9 (Fernandes, 2018; Nós; Fernandes, 2019).

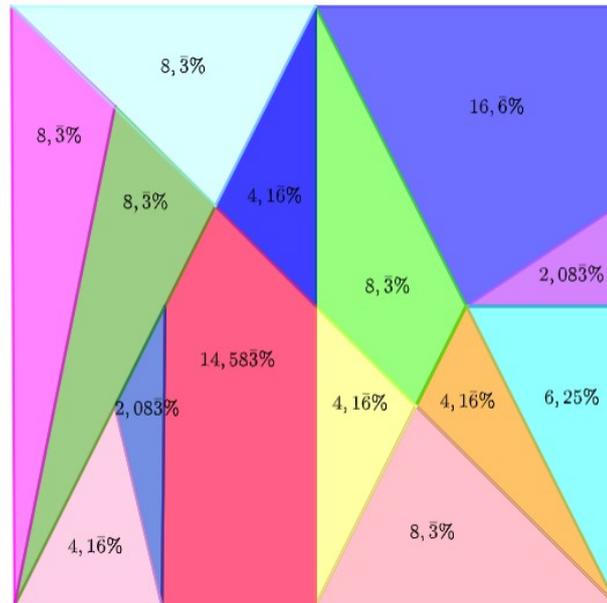
Teorema 4.7. *Todo triângulo é equicomposto a um retângulo.*

Teorema 4.8. *Todo polígono é equicomposto a um retângulo.*

Teorema 4.9. (Wallace-Bolyai-Gerwien) *Dois polígonos que têm áreas iguais são equicompostos.*

A Figura 4.15 ilustra a fração percentual das catorze peças do *Stomachion*.

Figura 4.15 – Frações percentuais das peças do *Stomachion*



Fonte: Autora.

4.4 ÁREA DAS PEÇAS DO *DISORIENTATION*

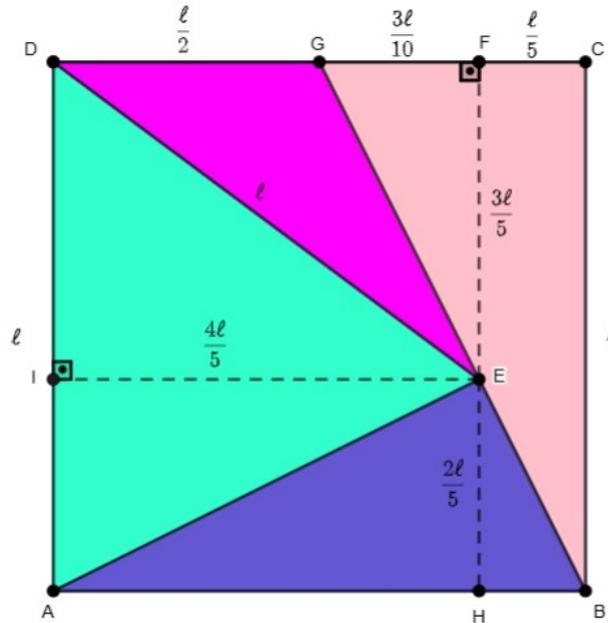
O *Disorientation* é um *puzzle* composto por 4 polígonos: 1 triângulo retângulo, 1 triângulo isósceles e 2 triângulos escalenos. Considerando um quadrado de lado ℓ , $\ell > 0$ e $\ell \in \mathbb{Q}$ – Figura 4.16, podemos calcular a área das quatro peças empregando a relação (4.3).

1. Triângulo isósceles *ADE*:

$$\mathcal{A}(\triangle ADE) = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \frac{4}{5}\ell = \frac{2}{5}\ell^2. \quad (4.33)$$

2. Triângulo escaleno *ABE*:

$$\mathcal{A}(\triangle ABE) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \frac{2}{5}\ell = \frac{1}{5}\ell^2. \quad (4.34)$$

Figura 4.16 – Triângulos que compõem o *Disorientation*

Fonte: Autora.

3. Triângulo retângulo BCG :

$$\mathcal{A}(\triangle BCG) = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CG = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \frac{1}{2}\ell = \frac{1}{4}\ell^2. \quad (4.35)$$

4. Triângulo escaleno DEG :

$$\mathcal{A}(\triangle DEG) = \frac{1}{2} \cdot DG \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\ell \cdot \frac{3}{5}\ell = \frac{3}{20}\ell^2. \quad (4.36)$$

Calculando a soma \mathcal{S} das áreas (4.33) a (4.36), obtemos a área do quadrado inicial $ABCD$, igual a ℓ^2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \frac{2}{5}\ell^2 + \frac{1}{5}\ell^2 + \frac{1}{4}\ell^2 + \frac{3}{20}\ell^2; \\ \mathcal{S} &= \frac{8 + 4 + 5 + 3}{20}\ell^2 = \ell^2 = \mathcal{A}(ABCD). \end{aligned}$$

4.4.1 FRAÇÕES PORCENTUAIS NO *DISORIENTATION*

Estabelecemos a fração porcentual de cada uma das quatro peças do *Disorientation* calculando a razão entre a área da peça e a área do quadrado que originou o *puzzle*.

1. Triângulo isósceles ADE :

$$\frac{\mathcal{A}(\triangle ADE)}{\mathcal{A}(ABCD)} = \frac{\frac{2}{5}\ell^2}{\ell^2} = \frac{2}{5} = 0,4 = 40\%.$$

2. Triângulo escaleno ABE :

$$\frac{\mathcal{A}(\triangle ABE)}{\mathcal{A}(ABCD)} = \frac{\frac{1}{5}\ell^2}{\ell^2} = \frac{1}{5} = 0,2 = 20\%.$$

3. Triângulo retângulo BCG :

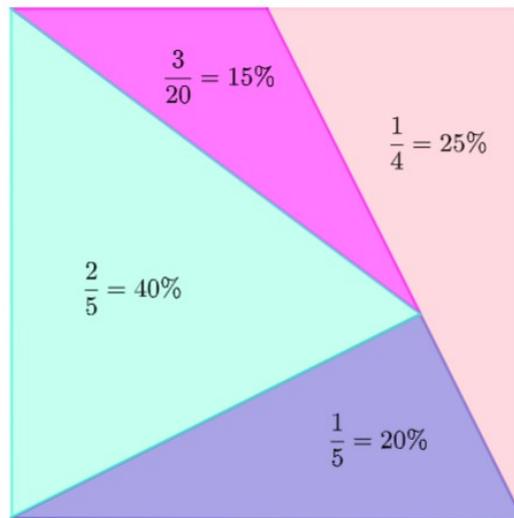
$$\frac{\mathcal{A}(\triangle BCG)}{\mathcal{A}(ABCD)} = \frac{\frac{1}{4}\ell^2}{\ell^2} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%.$$

4. Triângulo escaleno DEG :

$$\frac{\mathcal{A}(\triangle DEG)}{\mathcal{A}(ABCD)} = \frac{\frac{3}{20}\ell^2}{\ell^2} = \frac{2}{20} = 0,15 = 15\%.$$

A Figura 4.17 ilustra as frações percentuais das quatro peças do *Disorientation*.

Figura 4.17 – Frações percentuais das peças do *Disorientation*



Fonte: Autora.

4.5 ÁREA DAS PEÇAS DO *TRINITY QUARTET*

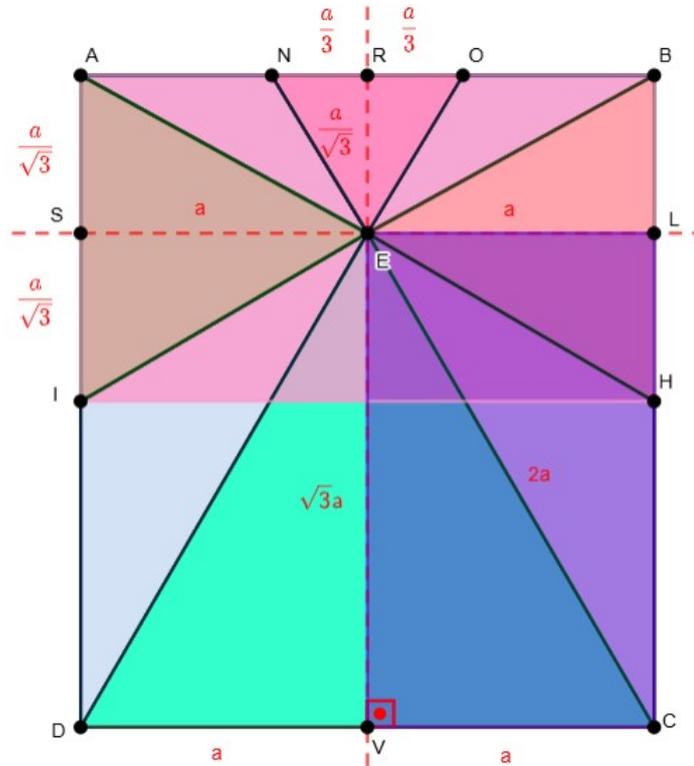
O *Trinity Quartet* é um *puzzle* composto por 8 polígonos: 4 triângulos equiláteros e 4 triângulos escalenos. Considerando um retângulo $ABCD$ de dimensões $2a$ e $\frac{4\sqrt{3}}{3}a$ e área igual a $\frac{8\sqrt{3}}{3}a^2$, $a > 0$ e $a \in \mathbb{Q}$ – Figura 4.18, podemos determinar a área das quatro peças empregando a relação (4.3).

1. Triângulos equiláteros congruentes AEI e BEH :

$$\mathcal{A}(\triangle AEI) = \mathcal{A}(\triangle BEH) = \frac{1}{2} \cdot AI \cdot ES = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}a \cdot a = \frac{1}{\sqrt{3}}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}a^2. \quad (4.37)$$

2. Triângulo equilátero CED :

$$\mathcal{A}(\triangle CED) = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot EV = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \sqrt{3}a = \sqrt{3}a^2. \quad (4.38)$$

Figura 4.18 – Triângulos que compõem o *Trinity Quartet*

Fonte: Autora.

3. Triângulo equilátero NEO :

$$\mathcal{A}(\triangle NEO) = \frac{1}{2} \cdot NO \cdot ER = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}a = \frac{1}{3\sqrt{3}}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{9}a^2. \quad (4.39)$$

4. Triângulos escalenos congruentes AEN e BEO :

$$\mathcal{A}(\triangle AEN) = \mathcal{A}(\triangle BEO) = \frac{1}{2} \cdot AN \cdot ER = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}a = \frac{1}{3\sqrt{3}}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{9}a^2. \quad (4.40)$$

5. Triângulos escalenos congruentes DEI e CEH :

$$\mathcal{A}(\triangle DEI) = \mathcal{A}(\triangle CEH) = \frac{1}{2} \cdot DI \cdot ES = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}a \cdot a = \frac{1}{\sqrt{3}}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}a^2. \quad (4.41)$$

O cálculo da área das peças do *Trinity Quartet* pode ser simplificado se constatarmos que os triângulo AEN , NEO e BEO têm bases congruentes e a mesma altura. Logo, são equivalentes, ou seja, têm a mesma área. O mesmo se aplica aos triângulos AEI , DEI , BEH e CEH . Calculando a soma \mathcal{S} das áreas (4.37) a (4.41) dos oito triângulos, obtemos a área do retângulo inicial $ABCD$, igual a $\frac{8\sqrt{3}}{3}a^2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \sqrt{3}a^2 + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}a^2 + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{9}a^2; \\ \mathcal{S} &= \frac{8\sqrt{3}}{3}a^2 = \mathcal{A}(ABCD). \end{aligned}$$

4.5.1 FRAÇÕES PORCENTUAIS NO *TRINITY QUARTET*

Determinamos a fração porcentual de cada uma das oito peças do *Trinity Quartet* calculando a razão entre a área da peça e a área do retângulo que originou o *puzzle*.

1. Triângulo *CED*:

$$\frac{\mathcal{A}(\Delta CED)}{\mathcal{A}(ABCD)} = \frac{\sqrt{3}a^2}{\frac{8\sqrt{3}}{3}a^2} = \frac{3}{8} = 0,375 = 37,5\%.$$

2. Triângulos *AEI*, *DEI*, *BEH* e *CEH*:

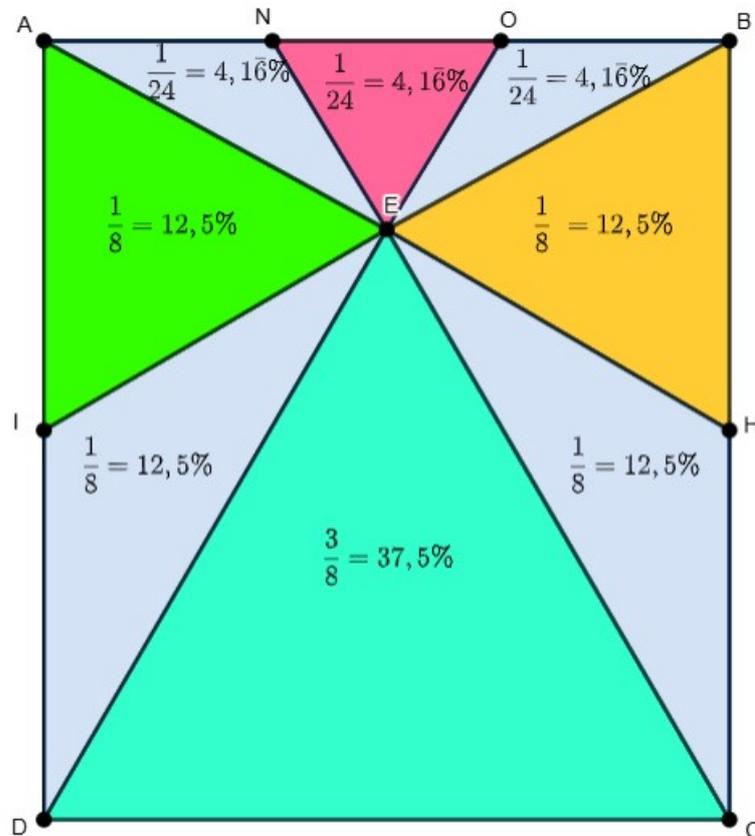
$$\frac{\mathcal{A}(\Delta AEI)}{\mathcal{A}(ABCD)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a^2}{\frac{8\sqrt{3}}{3}a^2} = \frac{1}{8} = 0,125 = 12,5\%.$$

3. Triângulos *AEN*, *NEO* e *BEO*:

$$\frac{\mathcal{A}(\Delta AEN)}{\mathcal{A}(ABCD)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{9}a^2}{\frac{8\sqrt{3}}{3}a^2} = \frac{1}{24} = 0,041\bar{6} = 4,1\bar{6}\%.$$

A Figura 4.19 ilustra as frações porcentuais das quatro peças do *Trinity Quartet*.

Figura 4.19 – Frações porcentuais das peças do *Trinity Quartet*



Fonte: Autora.

5 RECURSO EDUCACIONAL – ATIVIDADES NO LIVRO DIGITAL

Neste capítulo, apresentamos algumas das atividades que propomos como recurso educacional no livro digital *A arte dos puzzles: desafios matemáticos* (Guerber, 2025), disponível em <https://www.geogebra.org/m/ghv2ufjt>.

A Figura 5.1, criada no *Canva*, uma plataforma de design gráfico que permite aos usuários criar gráficos de mídia social, apresentações, infográficos, pôsteres e outros conteúdos visuais, ilustra a capa do livro digital. Este foi organizado visando explorar a utilização do GeoGebra (2025) no ensino de frações, porcentagem e números irracionais.

Figura 5.1 – Capa do livro *A arte dos puzzles: desafios matemáticos*



Fonte: Saito (2025b).

Cada capítulo do livro digital aborda um tema específico, relacionado os *puzzles* explorados nesta dissertação: Tangram, *Stomachion* de Arquimedes, *Disorientation* e *Trinity Quartet*. As atividades propostas objetivam desenvolver o raciocínio lógico matemático para solucionar desafios. Os capítulos que integram o livro digital são: 1. Números racionais; 2. Tangram; 3. *Stomachion* de Arquimedes; 4. *Disorientation*; 5. Números irracionais; 6. *Trinity Quartet*; 7. Você é o artista!; 8. Referências bibliográficas.

5.1 NÚMEROS RACIONAIS

No primeiro capítulo do livro, exploramos a associação de frações na representação das partes do todo, assim como o conceito de fracionar uma figura e a leitura de frações. Essas

abordagens são consonantes com as seguintes habilidades delineadas na BNCC (Brasil, 2018, p. 301):

- **(EF06MA07)** Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes;
- **(EF06MA08)** Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica;
- **(EF06MA09)** Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.

Em seguida, relacionamos frações ao cálculo de porcentagens em situações práticas, como no Exemplo 5.1, cuja análise é ilustrada na Figura 5.2.

Exemplo 5.1. *Uma pesquisa realizada na escola de José revelou que 52% dos alunos leram pelo menos um livro nos dois meses anteriores à coleta de dados. Entre esses leitores, 75% afirmaram ter lido por motivos escolares.*

Figura 5.2 – Porcentagens e frações

- $52\% = \frac{52}{100} \rightarrow$ cinquenta e dois por cento.

Então, 52 em cada 100 entrevistados leram pelo menos um livro.

- $75\% \text{ de } 52\% = \frac{75}{100} \cdot \frac{52}{100} = \frac{3900}{100} = 39\% \rightarrow$ trinta e nove por cento.

E 39 em cada 100 entrevistados leram por motivos escolares.

Fonte: Autora.

A solução de problemas envolvendo porcentagens é mencionada nas seguintes habilidades da BNCC (Brasil, 2018, p. 301 e 313):

- **(EF06MA13)** Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros;
- **(EF08MA04)** Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.

Finalizamos o capítulo com as representações geométricas de 100%, 50% e de 25%.

5.2 TANGRAM

No Capítulo 2, iniciamos sugerindo um vídeo de Sandra Gobert para contextualizar a lenda do Tangram. Posteriormente, apresentamos as sete peças do Tangram: dois triângulos retângulos isósceles grandes, um triângulo retângulo isósceles médio, dois triângulos retângulos isósceles pequenos, um quadrado e um paralelogramo, assim como exemplos de figuras que podem ser construídas com todas as peças do quebra-cabeça – Figura 5.3.

Figura 5.3 – Figuras compostas com as sete peças do Tangram quadrado



Fonte: Santos (s. d.).

Logo após, propomos atividades no GeoGebra para associar o Tangram a frações – Figuras 5.4 e 5.5 – e porcentagens – Figura 5.6 e 5.7. Nessas atividades, as peças do Tangram foram construídas no GeoGebra de maneira a permitir a rotação a partir de um vértice – Figura 5.8.

Figura 5.4 – Questões sobre frações e Tangram

Quantos triângulos grandes são necessários para preencher o quadrado original?

Escreva aqui a sua resposta ...

VERIFIQUE A SUA RESPOSTA

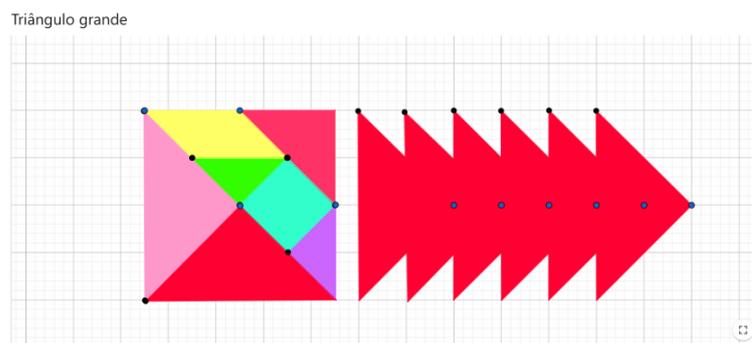
Com base na resposta anterior, responda: qual fração cada triângulo grande representa em relação ao quadrado original?

Escreva aqui a sua resposta ...

VERIFIQUE A SUA RESPOSTA

Fonte: Autora.

Figura 5.5 – Frações e Tangram no GeoGebra



Fonte: Autora.

Figura 5.6 – Questão sobre porcentagens e Tangram

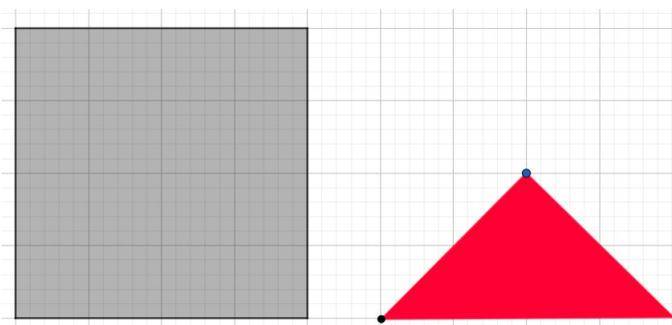
Qual é a porcentagem que cada triângulo grande representa em relação à figura original?

Aa π Escreva aqui a sua resposta ...

VERIFIQUE A SUA RESPOSTA

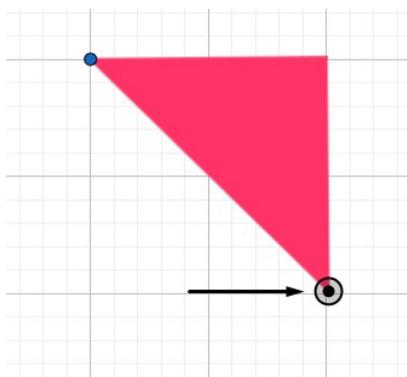
Fonte: Autora.

Figura 5.7 – Porcentagens e Tangram no GeoGebra



Fonte: Autora.

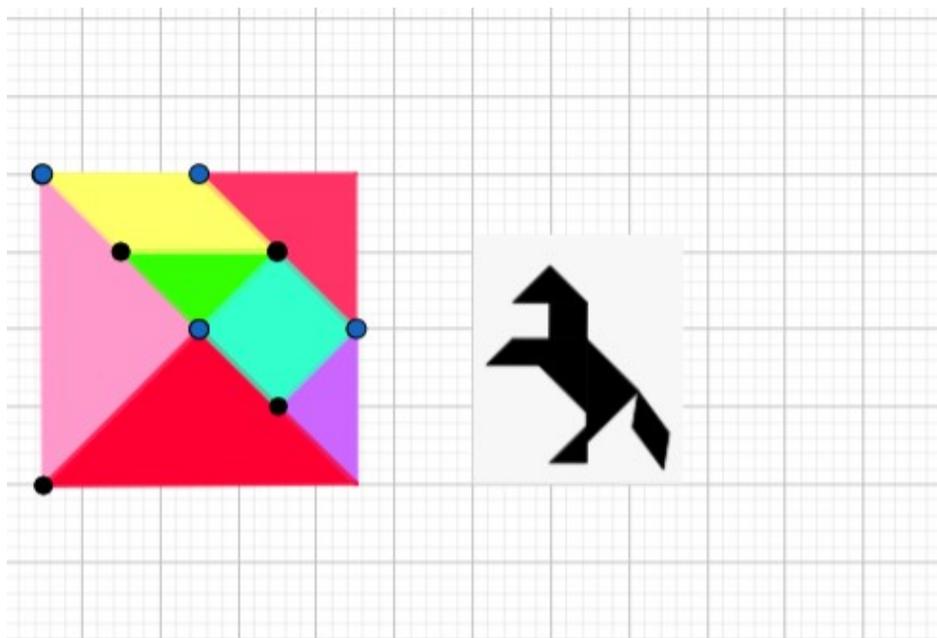
Figura 5.8 – Rotação de um polígono no GeoGebra



Fonte: Autora.

Na atividade sobre áreas e perímetros, o leitor é desafiado a reproduzir a imagem de um cavalo utilizando todas as peças do Tangram quadrado – Figura 5.9. Para tal, as peças podem ser transladadas e/ou rotacionadas. Em seguida, elencamos alguns questionamentos sobre perímetro e área – Figura 5.10.

Figura 5.9 – Construção da figura de um cavalo com as sete peças do Tangram quadrado



Fonte: Autora.

Figura 5.10 – Questões sobre perímetro e área no Tangram

Se você fosse desafiado a comparar os perímetros das duas imagens formadas com todas as peças do Tangram, diria que eles são iguais?
Observação: cada quadrado da malha quadriculada possui lados de comprimento unitário.

Assinale sua resposta aqui

A Sim.

B Não.

VERIFIQUE A MINHA RESPOSTA (3)

Justifique a resposta da questão anterior.

Aa π Escreva aqui a sua resposta ...

VERIFIQUE A SUA RESPOSTA

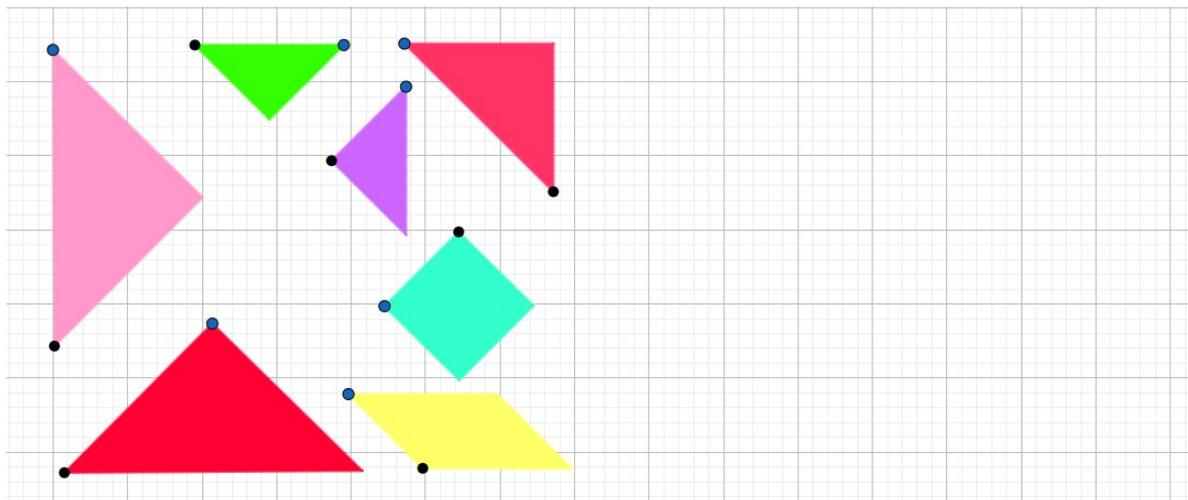
A área do quadrado formado pelas 7 peças do Tangram, em unidades de área, é igual a:

Aa π Escreva aqui a sua resposta ...

Fonte: Autora.

Finalizamos o capítulo propondo uma atividade para o leitor usar a criatividade na composição de uma obra de arte com as sete peças do Tangram quadrado – Figura 5.11.

Figura 5.11 – Composição de uma obra de arte no GeoGebra com o Tangram



Fonte: Autora.

5.3 STOMACHION DE ARQUIMEDES

No Capítulo 3, apresentamos o *Stomachion* – Figura 5.12, um quebra-cabeça geométrico antigo definido pela decomposição de um quadrado em catorze peças poligonais e atribuído a Arquimedes de Siracusa, matemático, filósofo, físico, engenheiro, inventor e astrônomo grego. Iniciamos o capítulo sugerindo o vídeo de Nayeli “10 figuras con *Stomachion* cuadrado de Arquimedes”, no qual são exibidas dez figuras que podem ser criadas com as catorze peças do quebra-cabeça.

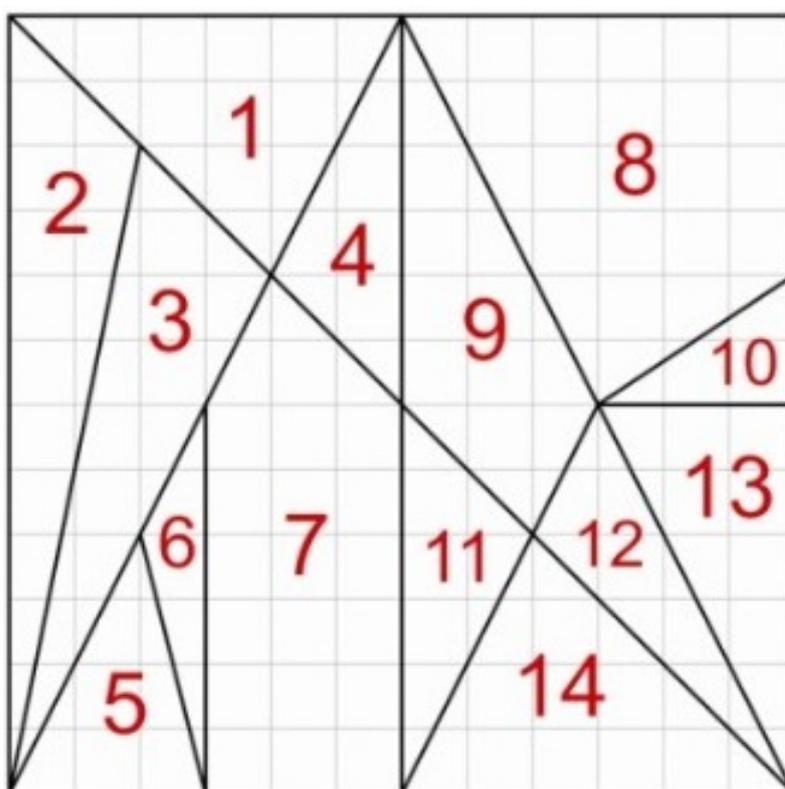
Figura 5.12 – *Stomachion* confeccionado em madeira

Fonte: Brachi (2022).

No livro digital, o leitor é estimulado a manipular as peças do quebra-cabeça para formular a resposta a um questionamento do próprio Arquimedes: De quantas maneiras é possível reorganizar as peças do *Stomachion* para compor o quadrado original? A resposta é espantosa! A professora de Matemática e Ciência da Computação estadunidense Fan Rong King Chung Graham, da Universidade da Califórnia em San Diego, juntamente com Persi Diaconis, Susan P. Holmes e Ronald Graham, pesquisou as diferentes maneiras de reorganizar as catorze peças do *Stomachion* dentro de um quadrado, descobrindo um total de 17.152 soluções. Além disso, a pesquisa de Chung Graham revelou que o conjunto de todas as configurações possíveis do *Stomachion* pode ser dividido em grupos distintos, chamados de “clusters”, conectados por um número limitado de movimentos globais (Kolata, 2003; Netz *et. al.*, 2004).

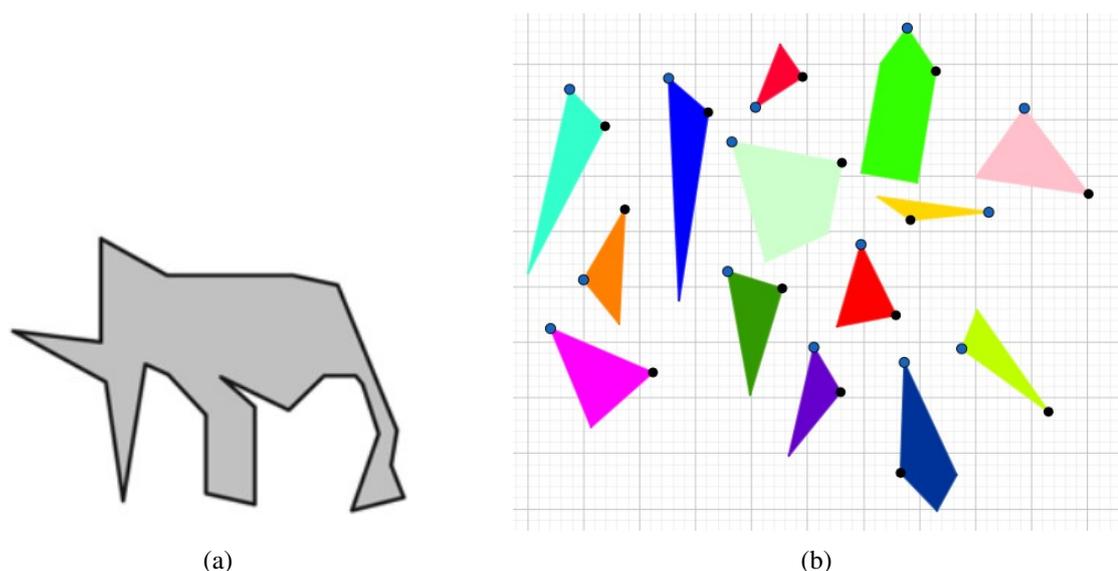
Em seguida, sugerimos quatro atividades que exploram o *Stomachion* para desenvolver conteúdos matemáticos: na primeira, o leitor é desafiado a identificar os polígonos presentes no *puzzle*; na segunda, o *Stomachion* é apresentado em uma malha quadrangular 12×12 – Figura 5.13 – para o cálculo da área de cada uma das peças; na terceira, o leitor é incentivado a reproduzir a imagem de um elefante trasladando e rotacionando as peças em uma janela do aplicativo GeoGebra – Figura 5.14, e logo após, calcular a área da imagem e justificar as estratégias utilizadas; na quarta, o leitor é encorajado a usar a imaginação para compor uma obra de arte com as catorze peças do quebra-cabeça.

Figura 5.13 – Peças numeradas do *Stomachion*



Fonte: Autora baseada em NCTM (2008).

Figura 5.14 – Construção no GeoGebra da figura de um elefante com as catorze peças do *Stomachion*

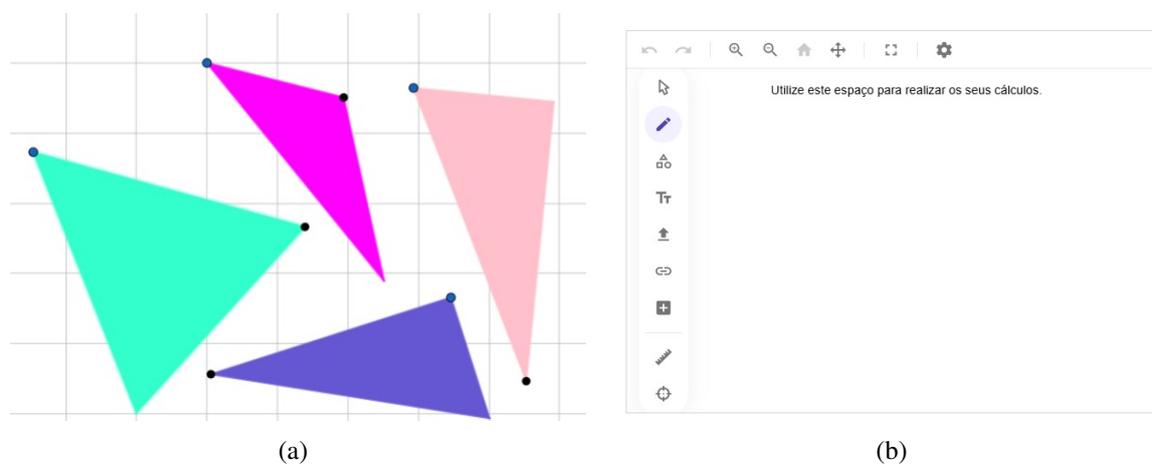


Fonte: (a) NCTM (2008); (b) Autora.

5.4 DISORIENTATION

No quarto capítulo, apresentamos o quebra-cabeça *Disorientation*, cuja origem está relacionada à professora Catriona Shearer, de Cambridge, no Reino Unido (Shearer, 2018; Orlin, 2020). Ao criar o quebra-cabeça, Catriona pergunta: qual fração da área do quadrado é coberta pelo triângulo isósceles? Começamos propondo esse desafio no GeoGebra – Figura 5.15, sendo que o leitor deve explorar as peças do *puzzle* para responder à pergunta. Além disso, há um espaço disponível para anotações e cálculos.

Figura 5.15 – *Disorientation* no GeoGebra: (a) peças; (b) espaço para cálculos



Fonte: Autora.

Na primeira atividade, o leitor é incentivado a calcular a área de cada uma das peças a partir de uma figura com as medidas dos lados dos triângulos que o formam o *Disorientation* – Figura 5.16.

Figura 5.16 – Questões sobre o *Disorientation*: (a) área dos triângulos; (b) porcentagem

Qual é a área do triângulo $\triangle AED$?

Aa π Escreva aqui a sua resposta ...

VERIFIQUE A SUA RESPOSTA

Qual é a área do triângulo $\triangle ABE$?

Aa π Escreva aqui a sua resposta ...

VERIFIQUE A SUA RESPOSTA

Qual é a área do triângulo $\triangle GBC$?

Aa π Escreva aqui a sua resposta ...

VERIFIQUE A SUA RESPOSTA

Qual é a área do triângulo $\triangle DGE$?

Aa π Escreva aqui a sua resposta ...

VERIFIQUE A SUA RESPOSTA

(a)

Com base nas respostas das questões anteriores, indique a porcentagem que cada um dos triângulos representa em relação ao quadrado.

$\triangle AED$

Assinale sua resposta aqui

- A 30%
- B 40%
- C 50%

VERIFIQUE A MINHA RESPOSTA (3)

(b)

Fonte: Autora.

Baseado nas respostas da primeira atividade, na segunda atividade o leitor é orientado a indicar a fração que cada uma das peças do *Disorientation* representa em relação ao quadrado $ABCD$ – Figura 5.17.

Figura 5.17 – Questão sobre a fração relativa às áreas dos triângulos do *Disorientation*

Qual fração do quadrado ABCD é representada pelo triângulo $\triangle AED$?

Assinale sua resposta aqui

A $\frac{1}{5}$

B $\frac{2}{5}$

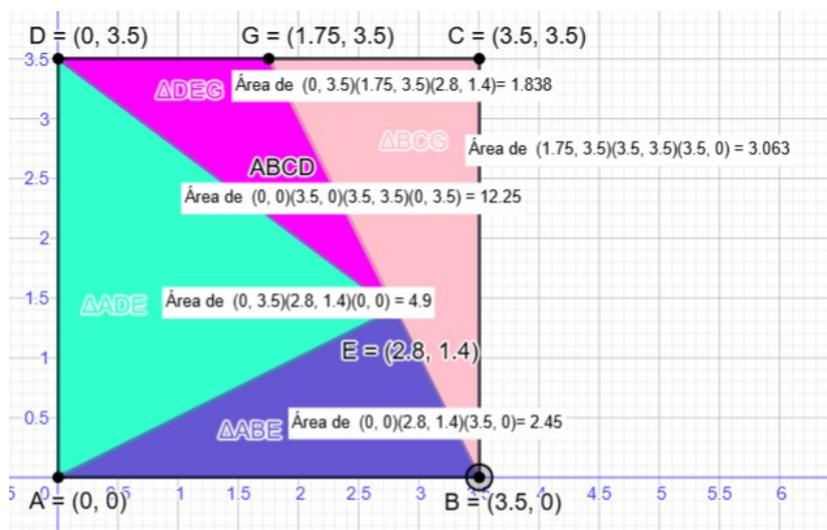
C $\frac{3}{5}$

VERIFIQUE A MINHA RESPOSTA (3)

Fonte: Autora.

Na terceira atividade, apresentamos uma experiência dinâmica construída no GeoGebra a partir das coordenadas cartesianas de cada um dos vértices que formam os triângulos que compõem o quebra-cabeça. Em cada triângulo, destacamos a medida da área. O leitor é convidado a mover os pontos A ou B , ampliando ou reduzindo a figura, e observar o que ocorre com as áreas dos triângulos que formam o *puzzle* – Figura 5.18.

Figura 5.18 – Ampliação ou redução dinâmica do *Disorientation* no GeoGebra



Fonte: Autora.

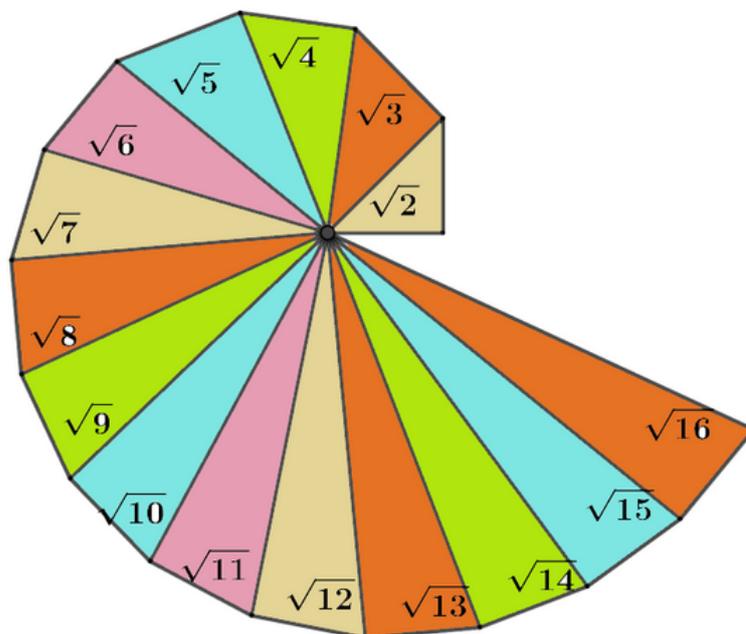
Finalizamos o capítulo com a seção “Para saber mais”, na qual disponibilizamos o link do perfil da professora Catriona Shearer no site “X”, antigo *Twitter*, caso o leitor queira maiores informações a respeito dos quebra-cabeças desenvolvidos/divulgados pela professora.

5.5 NÚMEROS IRRACIONAIS

No quinto capítulo, introduzimos o conceito de números irracionais e apresentamos alguns exemplos. Dentre eles, destacamos o cálculo da medida da diagonal de um quadrado de lado 1 (Broetto, 2016).

Além disso, empregamos a Espiral Pitagórica – Figura 5.19 – para ilustrar uma sequência de raízes quadradas sucessivas.

Figura 5.19 – Espiral Pitagórica



Fonte: BO (2021).

A Espiral Pitagórica é uma construção geométrica composta por uma sequência de triângulos retângulos. A espiral inicia com um triângulo retângulo cujos catetos têm comprimento 1. Nos próximos triângulos retângulos da espiral, um dos catetos tem sempre medida igual a 1, enquanto o outro cateto tem medida igual à hipotenusa do triângulo retângulo anterior. O processo se repete, formando uma espiral com lados crescentes segundo raízes quadradas sucessivas ($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$). Quanto à espiral, instigamos o leitor a responder alguns questionamentos, como ilustra a Figura 5.20.

Figura 5.20 – Questão sobre a Espiral Pitagórica

O que todos os triângulos da espiral têm em comum?

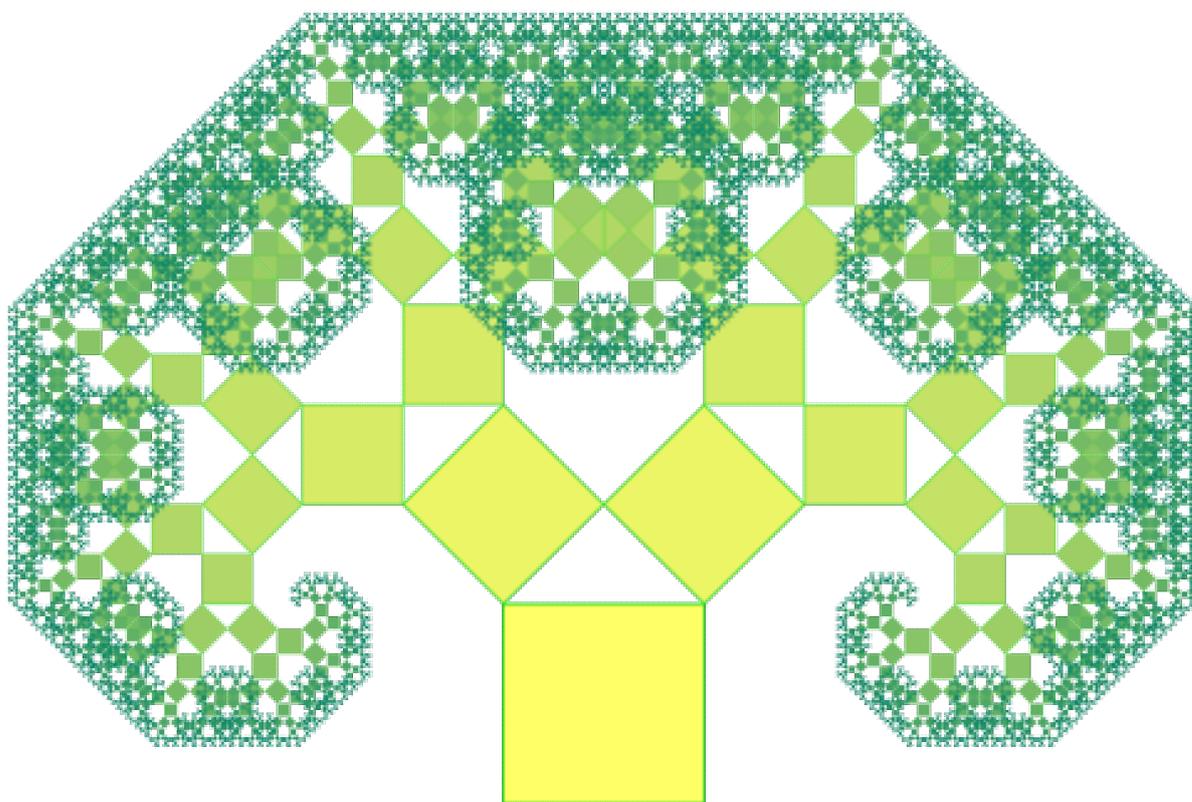
Assinale sua resposta aqui

- A Todos são triângulos retângulos.
- B A medida de um dos catetos é sempre 1.
- C A hipotenusa de cada triângulo retângulo da espiral é um dos catetos do triângulo retângulo seguinte.
- D Os triângulos são construídos sucessivamente com o novo cateto perpendicular ao anterior, formando uma espiral.
- E A razão entre os catetos e a hipotenusa varia, mas a relação pitagórica $a^2 + b^2 = c^2$ é sempre válida.

Fonte: Autora.

Neste capítulo, exploramos também a *Árvore Pitagórica*, ilustrada na Figura 5.21. Esta é uma figura fractal construída com base no teorema de Pitágoras. A árvore inicia com um quadrado e um triângulo retângulo isósceles construído sobre um dos lados do quadrado. Em seguida, são construídos quadrados sobre os catetos desse triângulo retângulo e novos triângulos retângulos isósceles sobre os lados que são opostos aos catetos do triângulo retângulo isósceles sobre cujos catetos esses quadrados foram construídos. O padrão é repetido indefinidamente. Essa repetição forma uma estrutura ramificada, semelhante a uma árvore, que ilustra visualmente a relação $a^2 + b^2 = c^2$. A *Árvore Pitagórica* combina matemática, arte e simetria, revelando padrões geométricos complexos a partir de princípios simples.

Figura 5.21 – *Árvore Pitagórica*



Fonte: Wikipédia (2024).

Do ponto de vista artístico, a *Árvore Pitagórica* se destaca pela simetria, proporcionalidade e ritmo visual. À medida que os triângulos e quadrados se multiplicam, criam padrões complexos que lembram formas naturais, como galhos, folhas ou até árvores reais, o que a torna visualmente agradável e esteticamente intrigante. Essa semelhança com elementos da natureza é característica dos fractais, figuras que combinam repetição com variação de escala.

Ainda, a *Árvore Pitagórica* já foi utilizada em projetos de arte digital, design gráfico, animações, e obras visuais interativas, justamente por sua beleza geométrica e potencial de variação infinita. No contexto educacional, ela também é explorada como ponte entre a Matemática e a

arte, ajudando estudantes a visualizar conceitos abstratos de forma concreta e criativa.

Portanto, a Árvore Pitagórica não é apenas uma construção matemática; ela também é uma expressão artística, onde a lógica rigorosa da geometria encontra a sensibilidade visual da arte.

Nesta seção do capítulo sobre números irracionais, o leitor pode interagir e visualizar as mudanças ocorridas na Árvore Pitagórica pela alteração de parâmetros em controles deslizantes. Em seguida, é convidado a responder alguns questionamentos, como ilustra a Figura 5.22.

Figura 5.22 – Exemplos de questões sobre a Árvore Pitagórica

O que acontece com a área total da árvore à medida que mais níveis são adicionados?

Assinale sua resposta aqui

A A área total permanece constante.

B A área total diminui.

C A área total cresce.

D A área total oscila.

VERIFIQUE A MINHA RESPOSTA (3)

Iniciando a árvore com um quadrado de lado 2, quanto medem os catetos do triângulo retângulo isósceles construído sobre o lado do quadrado?

Assinale sua resposta aqui

A 1.

B $\sqrt{2}$.

C 2.

D $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

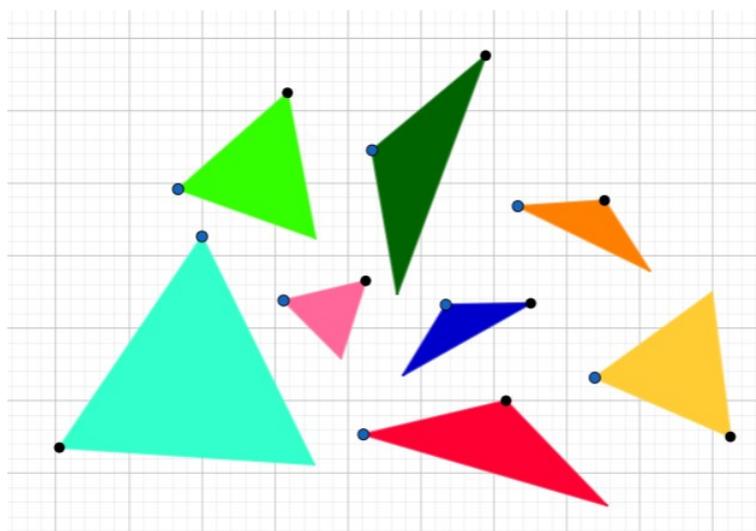
Fonte: Autora.

5.6 TRINITY QUARTET

Apresentamos no sexto capítulo do livro digital o *Trinity Quartet*, um dos *puzzles* da lista de quebra-cabeças interessantes de Catriona Shearer (Shearer, 2019; Bellos, 2024; Orlin, 2020). Começamos discorrendo sobre a origem do quebra-cabeça, ressaltado a composição por triângulos, sendo quatro triângulos equiláteros. Assim como no *Disorientation*, Catriona propõe um desafio ao leitor: “Todos os quatro triângulos são equiláteros. Que fração do retângulo eles cobrem”? Para responder a esta pergunta, motivamos o leitor a explorar as peças do *Trinity Quartet* no GeoGebra – Figura 5.23.

Na primeira atividade, propomos o cálculo das áreas dos oito triângulos que compõem o *Trinity Quartet* a partir da figura contendo as medidas dos lados – Figura 5.24.

Figura 5.23 – *Trinity Quartet* no GeoGebra: (a) peças; (b) desafio proposto por Catriona Shearer



(a)

Qual fração do retângulo é coberta pelos quatro triângulos equiláteros?

Assinale sua resposta aqui

- A $\frac{1}{3}$
- B $\frac{2}{3}$
- C $\frac{a}{3}$

VERIFIQUE A MINHA RESPOSTA (3)

(b)

Fonte: Autora.

Figura 5.24 – Questão sobre o cálculo da área das triângulos que compõem o *Trinity Quartet*

Qual é a área do triângulo $\triangle AEI$?

Assinale sua resposta aqui

- A $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$
- B $\frac{a\sqrt{3}}{3}$
- C $\frac{a^2}{3}$

VERIFIQUE A MINHA RESPOSTA (3)

Fonte: Autora.

Posteriormente, o leitor é encorajado a identificar figuras equivalentes e relacioná-las à área do retângulo $ABCD$ – Figura 5.25.

Figura 5.25 – Questão sobre triângulos equivalentes no *Trinity Quartet*

Após calcular todas as áreas dos triângulos, como podemos relacioná-las com a área do retângulo $ABCD$? Explique.

Aa π Escreva aqui a sua resposta ...

Em relação ao espaço ocupado por cada um dos triângulos que compõem o *Trinity Quartet*, responda:

Quantos triângulos congruentes ao $\triangle AEI$ são necessários para representar uma área equivalente à do triângulo $\triangle DCE$? Explique.

Aa π Escreva aqui a sua resposta ...

Quantos triângulos congruentes ao $\triangle AEN$ são necessários para representar uma área equivalente à do triângulo $\triangle AEI$? Explique.

Aa π Escreva aqui a sua resposta ...

Fonte: Autora.

Com base nas respostas da primeira atividade, na segunda atividade instigamos o leitor a relacionar a fração que cada um dos triângulos do quebra-cabeça representa em relação ao retângulo $ABCD$, identificando quais triângulos do *Trinity Quartet* são congruentes – Figura 5.26.

Figura 5.26 – Questão sobre triângulos congruentes no *Trinity Quartet*

Indique o(s) triângulo(s) congruente(s) ao triângulo $\triangle AEI$:

Assinale sua resposta aqui

- A $\triangle IED$
- B $\triangle DEC$
- C $\triangle CEH$
- D $\triangle BEH$
- E $\triangle BEO$
- F $\triangle OEN$
- G $\triangle NEA$

Fonte: Autora.

Na terceira atividade, motivamos o leitor a relacionar frações, porcentagens e polígonos equivalentes empregando as peças do *Trinity Quartet* – Figura 5.27.

Figura 5.27 – Questão sobre porcentagem no *Trinity Quartet*

O que podemos afirmar em relação à porcentagem dos triângulos $\triangle BEO$, $\triangle OEN$ e $\triangle NEA$ juntos em comparação ao triângulo $\triangle DEC$? Explique.

Aa π

Escreva aqui a sua resposta ...

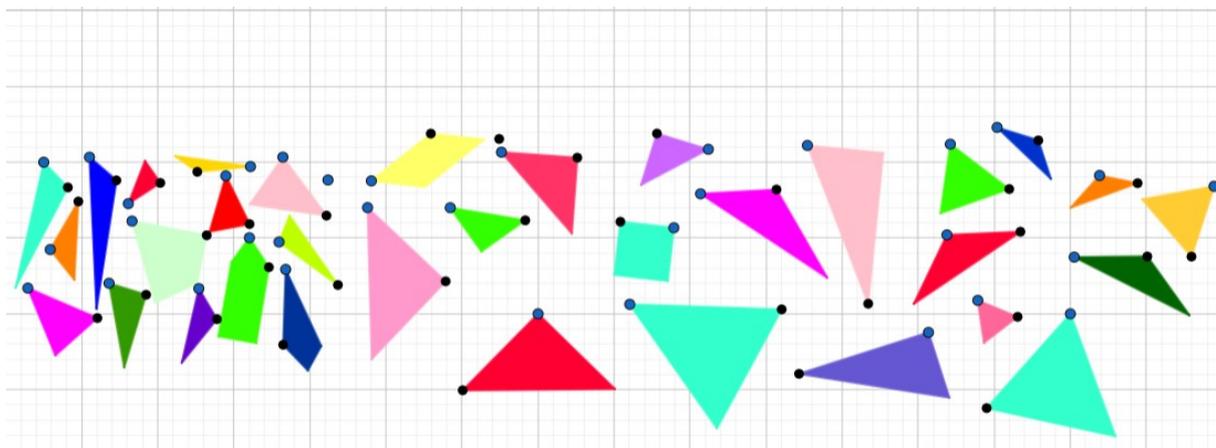
Fonte: Autora.

5.7 VOCÊ É O ARTISTA!

Finalizamos o livro digital disponibilizado no GeoGebra uma atividade que possibilita a composição de imagens a partir das 33 peças que compõem os quatro *puzzles* abordados: *Tangram* (7), *Stomachion* (14), *Disorientation* (4) e *Trinity Quartet* (8). Na composição, o leitor pode transladar e rotacionar os 33 polígonos – Figura 5.28. Esta atividade estimula a criatividade do leitor e está em consonância com as competências gerais da Educação Básica segundo a BNCC.

Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (Brasil, 2018, p. 11).

Figura 5.28 – Trinta e três peças que compõem os *puzzles* *Tangram* (4), *Stomachion* (14), *Disorientation* (4) e *Trinity Quartet* (8)



Fonte: Autora.

6 CONCLUSÃO

Ao analisar o percurso realizado na elaboração desta dissertação e na criação do recurso educacional em formato de livro digital, constatamos que tanto o objetivo geral quanto os objetivos específicos foram atingidos de forma satisfatória. A proposição de estudar a Matemática por meio de metodologias diferenciadas motiva os estudantes, promovendo sua participação ativa no processo de ensino e aprendizagem, além de incentivá-los a assumirem o papel de coautores nesse percurso.

Os *puzzles* abordados neste trabalho representam ferramentas extremamente úteis para a exploração de diversos conceitos matemáticos. O ensino de frações pode ser enriquecido por meio do uso desses recursos, promovendo, além do rigor teórico, a visualização e a manipulação de conceitos. Essa abordagem é aplicável ao ensino de frações de uma figura, frações de quantidade e frações porcentuais. Ademais, é possível explorar o cálculo do perímetro e da área de figuras geométricas planas, bem como a composição e decomposição das mesmas. Nesse contexto, também podemos trabalhar com o plano cartesiano, localizando pontos a partir de suas coordenadas.

Outro aspecto relevante refere-se ao ensino dos números irracionais, que frequentemente gera dúvidas e dificuldades entre os estudantes devido à complexidade e abstração. Muitas vezes, esses conceitos são memorizados por meio de definições e regras, sem uma compreensão de seu significado. Nesse sentido, a utilização de recursos visuais, especialmente aqueles proporcionados por tecnologias digitais, pode contribuir significativamente para o processo de aprendizagem, tornando os conceitos mais compreensíveis.

Alinhado às diretrizes da BNCC, o uso de tecnologias digitais, como o software GeoGebra, apresenta-se como uma estratégia altamente relevante. Este programa gratuito oferece diversos benefícios para o ensino e a aprendizagem da Matemática, permitindo a exploração dinâmica de conceitos por meio de representações gráficas. Sua capacidade de integrar álgebra e geometria em um único ambiente favorece uma aprendizagem mais integrada, além de possuir uma interface intuitiva que estimula a participação e o envolvimento dos estudantes.

A construção de quebra-cabeças por meio de *origami*, com o passo a passo ilustrado no GeoGebra, incentiva o raciocínio lógico-matemático, desafiando os estudantes a seguir instruções, visualizar e manipular formas geométricas. Essa prática auxilia no ensino de frações, proporções, padrões e sequências, tornando a aprendizagem mais relevante.

Concluimos que *A arte dos puzzles: desafios matemáticos* (Guerber, 2025) destaca-se como uma abordagem eficaz no processo de ensino, estimulando a participação e o engajamento dos estudantes. Por meio da construção, investigação e visualização de conceitos, a obra torna a Matemática mais acessível, visual e interativa, facilitando a assimilação dos conteúdos de

maneira lúdica e contextualizada.

Quanto aos desafios no desenvolvimento do trabalho, a autora destaca suas dificuldades com *origami*, tendo adotado preferencialmente o uso do GeoGebra. Como trabalho futuro, destacamos a inclusão de outros *puzzles* da lista de Orlin (2020).

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, T. A. S. de. **A demonstração no ensino de geometria**. 97 f. Monografia (Graduação - Licenciatura em Matemática) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2016. Disponível em: <<https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/9027>>. Acesso em: 17 jun. 2025. 91, 92
- ASTH, R. C. **Tangram**. [S. l.]: Toda Matéria, s. d. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/tangram/>>. Acesso em: 25 nov. 2024. 84
- BARBOSA, K. L. **O ensino de expressões algébricas: uma proposta de sequência didática com o uso do Tangram e jogos digitais**. 107 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2023. 23
- BELLOS, A. **Puzzle me twice: 70 simple puzzles (almost) everyone gets wrong**. New York: The Experiment, 2024. 224 p. 62, 111
- BENEDETTI, T. **Qual é a diferença entre competência e habilidade para a BNCC?** [S. l.]: TutorMundi, 2021. Disponível em: <<https://tutormundi.com/blog/competencia-e-habilidade/>>. Acesso em: 07 nov. 2024. 26
- BENEVENUTI, L. C.; SANTOS, R. C. dos. **O uso do tangram como material lúdico pedagógico na construção da aprendizagem matemática**. São Paulo: SBEM, 2016. Disponível em: <https://www.sbemrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6458_3698_ID.pdf>. Acesso em: 11 set. 2024. 34, 35
- BERGER, C. C. **Explorando o conceito de área com o tangram**. 65 f. Monografia (Graduação) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013. Disponível em: <<https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/88265/000912443.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>. Acesso em: 25 nov. 2024. 83
- BO, A. **Espiral pitagórica**. [S. l.: s. n.], 2021. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Espiral_pitag%C3%B3rica.png>. Acesso em: 31 ago. 2025. 109
- BRACHI, L. **Stomachion**. [S. l.]: Instagram, 2022. Disponível em: <https://www.instagram.com/linobrachi/p/CkvOTH8OYgr/?img_index=6>. Acesso em: 03 mar. 2025. 104
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, 1997. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>>. Acesso em: 07 nov. 2024. 19, 27, 83
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEB/CNE, 2018. Disponível em: <https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf>. Acesso em: 22 out. 2024. 17, 20, 25, 26, 32, 62, 82, 83, 100, 114
- BRASIL. **Provas e gabaritos**. Brasília: MEC/INEP, 2025. Disponível em: <<https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>>. Acesso em: 29 jan. 2025. 123, 125, 126, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141

- BROETTO, G. C. **O ensino de números irracionais para alunos ingressantes na Licenciatura em Matemática**. 588 f. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Espírito Santo, Espírito Santo, 2016. Disponível em: <<https://repositorio.ufes.br/items/95872f04-6c3b-4e51-a1bf-cd9fa2529113>>. Acesso em: 13 jan. 2025. 30, 60, 61, 108
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar: geometria plana**. v. 9. São Paulo: Atual, 2013a. 468 p. 30, 82
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar: geometria espacial**. v. 10. São Paulo: Atual, 2013b. 472 p. 80
- FERNANDES, F. M. **Polígonos e poliedros equidecomponíveis**. 116 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, 2018. Disponível em: <<https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/2972>>. Acesso em: 10 maio 2024. 35, 40, 79, 80, 81, 82, 94
- FIGUEIREDO, E. B. de. **FAB3D – Laboratório Fábrica Matemática**. Joinville: UDESC, 2025. Disponível em: <https://www.printables.com/@Fab3DUdesc_403051>. Acesso em: 10 jul. 2025. 19, 40, 54, 63
- FIorentini, D. **Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil**. Paris: Revista Zetetiké, 1995. 20
- FLEISCHMANN, S. O. **O origami e suas dobraduras no ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos**. 119 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, 2019. Disponível em: <<https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/4688>>. Acesso em: 10 maio 2024. 47, 54, 69, 72
- FREITAS, A. C. de. **Origami: o uso como instrumento alternativo no ensino da geometria**. 61 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Presidente Prudente, São Paulo, 2016. Disponível em: <<https://repositorio.unesp.br/server/api/core/bitstreams/2fe5c929-1346-4e37-ab09-d5ed9cddb130/content>>. Acesso em: 10 maio 2024. 66
- GARCÍA, J. F. M. **El stomachion de Arquímedes para la enseñanza de la resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos y la verificación de ciertas relaciones trigonométricas en el grado décimo**. 61 f. Dissertação (Mestrado) — Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia, 2011. Disponível em: <<https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/8144/TesisMSc.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>. Acesso em: 10 maio 2024. 40
- GAUCI, J. B. **The mathematics of Euclid, Archimedes and Apollonius**. [S. l.]: Times Malta, 2018. Disponível em: <<https://timesofmalta.com/article/The-mathematics-of-Euclid-Archimedes-and-Apollonius.669144>>. Acesso em: 12 set. 2024. 40
- GEOGEBRA. **Ensine e aprenda matemática de uma forma mais inteligente**. [S. l.]: GeoGebra, 2025. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/>>. Acesso em: 10 jan. 2025. 19, 99
- GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: UFRGS, 2009. 120 p. 24, 25
- GOBERT, S. **A lenda do tangram e as sete peças mágicas**. [S. l.]: Youtube, 2017. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=I-RxCw_QdV0>. Acesso em: 14 jan. 2025. 33

- GRANDO, R. C. Recursos didáticos na educação matemática: jogos e materiais manipulativos. **Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica**, v. 05, n. 02, p. 393–416, 2015. 21, 22
- GUERBER, C. W. **A arte dos puzzles: desafios matemáticos**. Paraná: GeoGebra, 2025. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/ghv2ufjt>>. Acesso em: 23 fev. 2025. 25, 28, 99, 115
- HAGA, K. **Origamics: mathematical explorations trough paper folding**. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2008. 152 p. 48
- IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar: sequências, matrizes, determinantes, sistemas**. v. 4, 6 ed. São Paulo: Atual, 1993. 232 p. 90
- KOLATA, G. **In Arquimedes' puzzle, a new eureka**. New York: The New York Times, 2003. Disponível em: <<https://www.nytimes.com/2003/12/14/us/in-archimedes-puzzle-a-new-eureka-moment.html>>. Acesso em: 20 jun. 2025. 105
- LIMA, E. L. **Meu professor de matemáticas e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM, 1991. 206 p. 92
- LIMA, E. L. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 249 p. 29, 59
- LIMA, E. L. et al. **A matemática do Ensino Médio**. v. 1. Rio de Janeiro: SBM, 1997. 247 p. 29, 59
- LIMA, W. M. de et al. **Puzzles matemáticos como estratégia facilitadora da aprendizagem**. Ponta Grossa: Atena, 2021. Disponível em: <https://www.academia.edu/78891021/Puzzles_Matem%C3%A1ticos_Como_Estrat%C3%A9gia_Facilitadora_Da_Aprendizagem>. Acesso em: 15 maio 2024. 21
- LUCERO, J. C. **Retângulos**. Brasília: Universidade de Brasília, 2005. 75
- MARQUES, Y. **O que é o tangram e quais os seus principais benefícios?** [S. l.]: Quero Bolsa, 2023. Disponível em: <<https://querobolsa.com.br/revista/o-que-e-o-tangram-e-quais-os-seus-principais-beneficios>>. Acesso em: 14 jan. 2025. 33
- MIRANDA, R. **Estudo das formas geométricas através da utilização do Tangram**. 51 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2015. 23
- MONZON, L. W. **O uso do software Google Sketchup e de material concreto para a aplicação de conceitos adquiridos nas aulas de matemática**. Rio Grande do Sul: CINTED-UFRGS, 2010. Disponível em: <<https://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/18106/10678>>. Acesso em: 07 nov. 2024. 17
- MOURA, D. A. da S.; SANTOS, A. da Silva dos; SILVA, J. J. da. **Tecnologia a favor da educação matemática: GeoGebra e suas aplicações**. Minas Gerais: Revista Digital FAPAM, 2016. Disponível em: <<https://periodicos.fapam.edu.br/index.php/synthesis/article/view/146/144>>. Acesso em: 07 nov. 2024. 27
- NASCIMENTO, I. L. do. **Jogos e quebra-cabeças didáticos no ensino da matemática: vantagens e desvantagens do uso desses recursos no Ensino Fundamental II**. 46 f. Monografia (Graduação) — Universidade Federal da Paraíba, Paraíba, 2011. 21

- NCTM. **Archimedes' puzzle**. [S. l.]: National Council of Teachers of Mathematics, 2008. Disponível em: <<https://illuminations.nctm.org/uploadedFiles/Content/Lessons/Resources/3-5/Stomachion-AS-ArchPuzzle.pdf>>. Acesso em: 03 mar. 2025. 105, 106
- NETO, A. C. M. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2022. 474 p. 79
- NETZ, R.; ACERBI, F.; WILSON, N. Towards a reconstruction of archimedes' stomachion. **SCIAMVS**, v. 5, p. 67–99, 2004. Disponível em: <https://www.sciamvs.org/files/SCIAMVS_05_067-099_Netz_Acerbi_Wilson.pdf>. Acesso em: 20 jun. 2025. 105
- NÓS, R. L.; FERNANDES, F. M. Equicomposição de polígonos e o cálculo de áreas. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 6, n. 2, p. 1–7, 2018. 35, 40
- NÓS, R. L.; FERNANDES, F. M. Ensinando áreas e volumes por equicomposição. **Educação Matemática em Revista**, v. 24, n. 63, p. 121–137, 2019. 35, 40, 80, 94
- OLIVEIRA, N. C. de; SILVA, J. N. de M. O.; BRITO, L. L. de. **Usando conceitos matemáticos para a construção do stomachion o quebra-cabeças geométrico**. Campina Grande: CONAPESC, 2018. Disponível em: <<https://www.editorarealize.com.br/artigo/visualizar/43405>>. Acesso em: 03 dez. 2024. 40
- ORLIN, B. **11 geometry puzzles that drive mathematicians to madness**. [S. l.]: Math with Bad Drawings, 2020. Disponível em: <<https://mathwithbaddrawings.com/2020/04/15/11-geometry-puzzles-that-drive-mathematicians-to-madness/>>. Acesso em: 10 maio 2024. 54, 106, 111, 116
- PARANÁ. **Currículo da rede estadual paranaense**: Crep. Paraná, 2021. Disponível em: <https://www.educacao.pr.gov.br/sites/default/arquivos_restritos/files/documento/2021-05/crep_matematica_2021_anos finais.pdf>. Acesso em: 22 out. 2024. 17
- PETERS, M. **Tangram**. [S. l.]: Escola Web, s. d. Disponível em: <<https://escolaweb.educacao.al.gov.br/odas/tangram-6>>. Acesso em: 11 set. 2024. 35
- PIMENTEL, F. et al. **Área de figuras planas**. Ceará: SISEDU, s. d. 31 p. 79
- PROFELICO. **¿Cuántos tipos de tangram hay?** [S. l.]: Diário Educacion, 2023. Disponível em: <<https://diarioeducacion.com/cuantos-tipos-de-tangram-hay/amp/>>. Acesso em: 15 jan. 2025. 34
- QUARESMA, M.; PONTE, J. P. da. Compreensão dos números racionais, comparação e ordenação: o caso de Leonor. **Revista Interações**, v. 8, n. 20, p. 37–69, 2012. Disponível em: <<https://revistas.rcaap.pt/interaccoes/article/view/485>>. Acesso em: 14 jan. 2025. 31
- RODRIGUES, P. **Desafios de geometria por Catriona Shearer**. [S. l.]: YouTube, 2020a. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=Ie2ICr1Uk9o>>. Acesso em: 10 maio 2024. 54
- RODRIGUES, P. F. G. **Stomachion: uma abordagem sobre a história da análise combinatória**. 118 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Minas Gerais, 2020b. 22
- SAITO, O. H. **Construção de puzzles geométricos com origami**. [S. l.: s. n.], 2025a. 39, 46, 49, 50, 51, 52, 58, 73, 74, 78

SAITO, O. H. **Que tipo de design você vai criar hoje?** [S. l.]: Canva, 2025b. Disponível em: <<https://www.canva.com/>>. Acesso em: 25 maio 2025. 99

SAITO, O. H.; KITANI, P. M.; FLEISCHMANN, S. O. As aproximações de fujimoto e o origami na representação de frações do tipo $1/n$. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 10, n. 1, p. 1–7, 2023. 47

SANTOS, J. A.; FRANÇA, K. V.; SANTOS, L. S. B. dos. **Dificuldades na aprendizagem de matemática**. 41 f. Monografia (Graduação) — Centro Universitário Adventista de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Monografia_Santos.pdf>. Acesso em: 14 jan. 2025. 21

SANTOS, L. **O que é: puzzles**. [S. l.]: Sempre Top Games, 2024. Disponível em: <<https://sempretopgames.com.br/glossario/o-que-e-puzzles-entenda-os-desafios-dos-jogos/>>. Acesso em: 22 jan. 2025. 32

SANTOS, M. K. S. dos. **A utilização de jogos digitais no ensino da matemática**. 44 f. Monografia (Graduação) — Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2023. Disponível em: <<https://www.repositorio.ufal.br/bitstream/123456789/13140/1/A%20utiliza%C3%A7%C3%A3o%20de%20jogos%20digitais%20no%20ensino%20da%20matem%C3%A1tica.pdf>>. Acesso em: 14 jan. 2025. 20, 22

SANTOS, T. E. dos. **Você já ouviu falar sobre o Tangram?** [S. l.]: Escola Web, s. d. Disponível em: <<https://escolaweb.educacao.al.gov.br/roteiro-de-estudo/voce-ja-ouviu-falar-sobre-o-tangram-56115>>. Acesso em: 01 mar. 2025. 101

SHEARER, C. **Catriona Shearer's puzzles**. [S. l.]: MurderousMath, 2018. Disponível em: <<http://www.murderousmaths.co.uk/teacher/CatrionasPuzzles.htm>>. Acesso em: 10 maio 2024. 106

SHEARER, C. **Geometry puzzles in felt tip: A compilation of puzzles from 2018**. [S. l.]: Independently published, 2019. 88 p. 111

SILVA, F. H. **Simetrias e grafos: uma abordagem inspirada no Stomachion de Arquimedes e nos políminós**. 72 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2017. 22, 23

SILVA, V. M. R. da; NÓS, R. L.; SANO, M. Uma visão dinâmica do teorema de Pitágoras via GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 12, n. 1, p. 62–77, 2023. 62

SODRÉ, U. **Números racionais**. Londrina: Matemática essencial: Ensino Fundamental, Médio e Superior no Brasil, 2020. Disponível em: <<https://www.uel.br/projetos/matessencial/basico/fundamental/rationais.html>>. Acesso em: 14 jan. 2025. 31

STEWART, J. **Cálculo**. v. 2. 7a ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. 520 p. 90

TEIXEIRA, L. A. **Superação matemática, 7º ano**. v. 1. São Paulo: Editora Moderna, 2022. 436 p. 86

TRICHES, F.; LIMA, H. G. G. de. **Pré-cálculo: um livro colaborativo**. Florianópolis: [s. n.], 2022. 262 p. Disponível em: <<https://www.ufrgs.br/reatmat/PreCalculo/livro/livro.pdf>>. Acesso em: 22 jan. 2025. 31

WIKIPÉDIA. **Árvore de Pitágoras**. [S. l.: s. n.], 2024. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%81rvore_de_Pit%C3%A1goras>. Acesso em: 31 ago. 2025. 110

APÊNDICE A – QUESTÕES DO ENEM

Ao realizar uma pesquisa na internet, especificamente no site Gov.br (Brasil, 2025), é possível encontrar diversas questões do ENEM, de 1999 a 2024, que abordam os conteúdos discutidos nesta dissertação. Seleccionamos algumas dessas questões, abrangendo o período de 2010 a 2023, com o objetivo de exemplificar a relevância e a aplicabilidade dos temas tratados. Para acessá-las, basta selecionar o ano desejado e explorar os cadernos de provas disponíveis no referido site. Caso necessário, as resoluções também estão disponíveis na aba Gabarito, facilitando o entendimento e a análise das questões.

As questões do ENEM podem interessar a diferentes públicos, como estudantes do Ensino Médio, especialmente aqueles que estão se preparando para a prova, bem como qualquer pessoa que deseja participar do exame. Além disso, professores e educadores podem utilizá-las como recurso para planejar aulas mais alinhadas com os conteúdos frequentemente cobrados. Pais e responsáveis também podem se beneficiar ao auxiliar seus filhos na preparação para a avaliação. Por fim, pesquisadores e especialistas em educação podem analisar essas questões para identificar tendências, dificuldades recorrentes e o impacto do exame no ensino brasileiro.

As questões que envolvem números racionais apresentam algumas características marcantes, como as elencadas a seguir.

- 1.1 **Contextualização prática:** o ENEM prioriza problemas que envolvem o uso de números racionais em situações do cotidiano, como cálculos financeiros (juros, descontos, impostos), proporções em receitas, consumo de materiais e medições.
- 1.2 **Representações diversas:** os números racionais podem aparecer na forma de frações, números decimais ou porcentagens, exigindo a conversão entre essas diferentes representações.
- 1.3 **Operações e propriedades:** as questões podem requerer operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) e o uso de propriedades, como a distributiva e a simplificação de frações.
- 1.4 **Interpretação e raciocínio lógico:** muitas questões não demandam apenas cálculos diretos, mas também a interpretação de gráficos, tabelas e enunciados, a fim de identificar corretamente qual operação deve ser realizada.
- 1.5 **Aplicação em problemas algébricos:** os números racionais podem ser utilizados em expressões algébricas, equações e funções, especialmente na resolução de problemas envolvendo razão, proporção e grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.

1.6 Atenção a arredondamentos e aproximações: algumas questões solicitam respostas aproximadas, exigindo que o candidato saiba lidar com arredondamentos e interpretação de casas decimais.

Em relação aos números irracionais, as questões do ENEM apresentam características interessantes, como as listadas a seguir.

- 2.1 Definição e distinção em relação aos números racionais:** o exame pode exigir a compreensão de que números irracionais são aqueles que não podem ser expressos na forma de fração, isto é, são decimais infinitos e não periódicos, como, por exemplo, π e $\sqrt{2}$.
- 2.2 Raízes não exatas:** muitas questões envolvem raízes não exatas, como $\sqrt{5}$ ou $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, exigindo que o candidato saiba simplificar e comparar esses números.
- 2.3 Aproximações decimais:** algumas questões demandam o uso de aproximações na solução de problemas práticos, como, por exemplo, $\pi \approx 3,14$ e $\sqrt{2} \approx 1,41$.
- 2.4 Operações:** o ENEM pode apresentar expressões algébricas envolvendo radicais ou operações com irracionais, como somas e multiplicações, explorando propriedades como a distributiva e a racionalização de denominadores.
- 2.5 Contextualização:** os números irracionais frequentemente aparecem em problemas de geometria, como no cálculo da medida da diagonal de quadrados e retângulos (por meio do teorema de Pitágoras), ou em situações reais que envolvem o cálculo de medidas com π , como o comprimento da circunferência.

As questões do ENEM que abordam o cálculo de áreas costumam apresentar características específicas, mencionadas a seguir.

- 3.1 Aplicação em contextos do cotidiano:** o ENEM prioriza questões contextualizadas, de modo que os problemas relacionados ao cálculo de áreas geralmente envolvem situações práticas, como medidas em terrenos, construções, jardins, piscinas, quadras esportivas e embalagens.
- 3.2 Diversidade de figuras geométricas:** as questões podem exigir o cálculo da área de figuras geométricas planas, como triângulos, retângulos e círculos, ou de composições de diversas dessas figuras.
- 3.3 Uso de fórmulas padrão:** embora o ENEM forneça algumas fórmulas na prova, é fundamental que o candidato saiba aplicá-las corretamente, como as fórmulas da área do círculo (πr^2), do triângulo $\left(\frac{b \cdot h}{2}\right)$ e de polígonos regulares.
- 3.4 Interpretação de figuras e textos:** muitas questões apresentam gráficos, diagramas ou descrições que requerem interpretação adequada antes da aplicação correta das fórmulas.

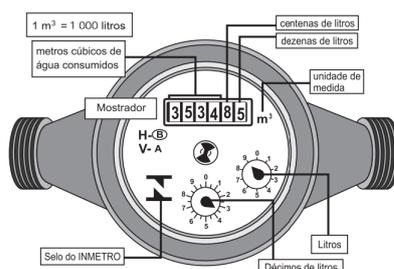
3.5 **Unidades de medida e conversões:** pode ser necessário converter unidades, como, por exemplo, de m^2 para cm^2 , ou trabalhar com escalas presentes em mapas e plantas baixas.

Ao analisar as questões do ENEM relacionadas a frações, números irracionais e cálculo de áreas, observamos que muitas são contextualizadas e abrangem diversos conteúdos. A seguir, apresentamos algumas questões, organizados por tema.

NÚMEROS RACIONAIS

- (2011) O consumo de café no Brasil atingiu o maior nível da história no ano passado: os brasileiros beberam o equivalente a 331 bilhões de xícaras. Considere que a xícara citada seja equivalente a, aproximadamente, 120 ml de café. Suponha que em 2010 os brasileiros bebam ainda mais café, aumentando o consumo em $\frac{1}{5}$ do que foi consumido no ano anterior. De acordo com essas informações, qual a previsão mais aproximada para o consumo de café em 2010?
 - 8 bilhões de litros.
 - 16 bilhões de litros.
 - 32 bilhões de litros.
 - 40 bilhões de litros.
 - 48 bilhões de litros.
- (2012) Os hidrômetros são marcadores de consumo de água em residências e estabelecimentos comerciais. Existem vários modelos de mostradores de hidrômetros, sendo que alguns deles possuem uma combinação de um mostrador e dois relógios de ponteiro. O número formado pelos quatro primeiros algarismos do mostrador fornece o consumo em m^3 , e os dois últimos algarismos representam, respectivamente, as centenas e dezenas de litros de água consumidos. Um dos relógios de ponteiros indica a quantidade em litros, e o outro em décimos de litros, conforme ilustrados na Figura A.1.

Figura A.1 – Hidrômetro



Disponível em: www.aguasdearacolaba.com.br (adaptado).

Fonte: Brasil (2025).

Considerando as informações indicadas na figura, o consumo total de água registrado nesse hidrômetro, em litros, é igual a:

- a) 3 534,85.
- b) 3 544,20.
- c) 3 534 850,00.
- d) 3 534 859,35.
- e) 3 534 850,39.

3. (2014) Um carpinteiro fabrica portas retangulares maciças, feitas de um mesmo material. Por ter recebido de seus clientes pedidos de portas mais altas, aumentou sua altura em $\frac{1}{8}$, preservando suas espessuras. A fim de manter o custo com o material de cada porta, precisou reduzir a largura. A razão entre a largura da nova porta e a largura da porta anterior é:

- a) $\frac{1}{8}$.
- b) $\frac{7}{8}$.
- c) $\frac{8}{7}$.
- d) $\frac{8}{9}$.
- e) $\frac{9}{8}$.

4. (2015) No contexto da matemática recreativa, utilizando diversos materiais didáticos para motivar seus alunos, uma professora organizou um jogo com um tipo de baralho modificado. No início do jogo, vira-se uma carta do baralho na mesa e cada jogador recebe em mãos nove cartas. Deseja-se formar pares de cartas, sendo a primeira carta a da mesa e a segunda, uma carta na mão do jogador, que tenha um valor equivalente àquele descrito na carta da mesa. O objetivo do jogo é verificar qual jogador consegue o maior número de pares. Iniciado o jogo, a carta virada na mesa e as cartas da mão de um jogador são como no esquema da Figura A.2.

Figura A.2 – Cartas



Fonte: Brasil (2025).

Segundo as regras do jogo, quantas cartas da mão desse jogador podem formar um par com a carta da mesa?

- a) 9.
- b) 7.
- c) 5.
- d) 4.
- e) 3.

5. (2016) Nas construções prediais são utilizados tubos de diferentes medidas para a instalação da rede de água. Essas medidas são conhecidas pelo seu diâmetro, muitas vezes medido em polegada. Alguns desses tubos, com medidas em polegada, são os tubos de $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{4}$. Colocando os valores dessas medidas em ordem crescente, encontramos:

- a) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{4}$.
- b) $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$ e $\frac{3}{8}$.
- c) $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{4}$.
- d) $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{4}$ e $\frac{1}{2}$.
- e) $\frac{5}{4}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{8}$.

6. (2017) Para uma temporada das corridas de Fórmula 1, a capacidade do tanque de combustível de cada carro passou a ser de 100 kg de gasolina. Uma equipe optou por utilizar uma gasolina com densidade de $750 \text{ g}/\ell$, iniciando a corrida com o tanque cheio. Na primeira parada de reabastecimento, um carro dessa equipe apresentou um registro em seu computador de bordo acusando o consumo de quatro décimos da gasolina originalmente existente no tanque. Para minimizar o peso desse carro e garantir o término da corrida, a equipe de apoio reabasteceu o carro com a terça parte do que restou no tanque na chegada ao reabastecimento. A quantidade de gasolina utilizada, em litros, no reabastecimento foi:

- a) $\frac{20}{0,075}$.
- b) $\frac{20}{0,75}$.
- c) $\frac{20}{7,5}$.
- d) $20 \cdot 0,075$.
- e) $20 \cdot 0,75$.

7. (2019) Um asteroide batizado de 2013-TV135 passou a aproximadamente $6,7 \cdot 10^6$ quilômetros da Terra. A presença do objeto espacial nas proximidades da Terra foi detectada por astrônomos ucranianos, que alertaram para uma possível volta do asteroide em 2032. O valor posicional do algarismo 7, presente na notação científica da distância, em quilômetro, entre o asteroide e a Terra, corresponde a:

- a) 7 décimos de quilômetro.
- b) 7 centenas de quilômetros.
- c) 7 dezenas de milhar de quilômetros.
- d) 7 centenas de milhar de quilômetros.
- e) 7 unidades de milhão de quilômetros.

8. (2021) Foi feita uma pesquisa sobre a escolaridade dos funcionários de uma empresa. Verificou-se que $\frac{1}{4}$ dos homens que ali trabalham têm o ensino médio completo, enquanto $\frac{2}{3}$ das mulheres que trabalham na empresa têm o ensino médio completo. Constatou-se, também, que entre todos os que têm o ensino médio completo, metade são homens. A fração que representa o número de funcionários homens em relação ao total de funcionários dessa empresa é:

- a) $\frac{1}{8}$.
- b) $\frac{3}{11}$.
- c) $\frac{11}{24}$.
- d) $\frac{2}{3}$.
- e) $\frac{8}{11}$.

9. (2023) Um reservatório que abastece uma região urbana está com uma quantidade V de água. Previsões meteorológicas indicam que a região passará por uma escassez de chuva e, por isso, as autoridades locais determinaram a realização de várias medições do volume de água nesse reservatório para efeito de monitoramento.

A primeira medição indicou que o volume de água reduziu-se à metade; a segunda indicou a retirada da terça parte do que restou; a terceira, a retirada da quarta parte do que restou; a quarta, a retirada da quinta parte do que restou e assim sucessivamente nas demais medições, mantendo o seguinte padrão de retirada: na n -ésima medição, a retirada da $(n + 1)$ -ésima parte do que restou. Considere que não houve reabastecimento de água no reservatório no período em que foram feitas as medições. Mantendo esse padrão de retirada, as quantidades de água restantes no reservatório referentes às 7ª, 8ª e 9ª medições são iguais a, respectivamente:

- a) $\frac{7}{8}V, \frac{8}{9}V$ e $\frac{9}{10}V$.
- b) $\frac{6}{7}V, \frac{7}{8}V$ e $\frac{8}{9}V$.
- c) $\frac{6}{8}V, \frac{7}{9}V$ e $\frac{8}{10}V$.
- d) $\frac{1}{7}V, \frac{1}{8}V$ e $\frac{1}{9}V$.
- e) $\frac{1}{8}V, \frac{1}{9}V$ e $\frac{1}{10}V$.

10. (2024) Uma empresa produz mochilas escolares sob encomenda. Essa empresa tem um custo total de produção, composto por um custo fixo, que não depende do número de mochilas, mais um custo variável, que é proporcional ao número de mochilas produzidas. O custo total cresce de forma linear, e a tabela apresenta esse custo para três quantidades de mochilas produzidas, conforme a Figura A.3.

Figura A.3 – Quantidade de mochilas e o custo total

Quantidade de mochilas	30	50	100
Custo total (R\$)	1 050,00	1 650,00	3 150,00

Fonte: Brasil (2025).

O custo total, em real, para a produção de 80 mochilas será:

- a) 2 400,00.
- b) 2 520,00.
- c) 2 550,00.
- d) 2 700,00.
- e) 2 800,00.
11. (2024) Uma empresa de engenharia foi contratada para realizar um serviço no valor de R\$71250,00. Os sócios da empresa decidiram que 40% desse valor seria destinado ao pagamento de três engenheiros que gerenciaram o serviço. O pagamento para cada um deles será feito de forma diretamente proporcional ao total de horas trabalhadas. O número de dias e o número de horas diárias trabalhadas pelos engenheiros foram, respectivamente:
- Engenheiro I: 4 dias, numa jornada de 5 horas e meia por dia;
 - Engenheiro II: 5 dias, numa jornada de 4 horas por dia;
 - Engenheiro III: 6 dias, numa jornada de 2 horas e meia por dia.

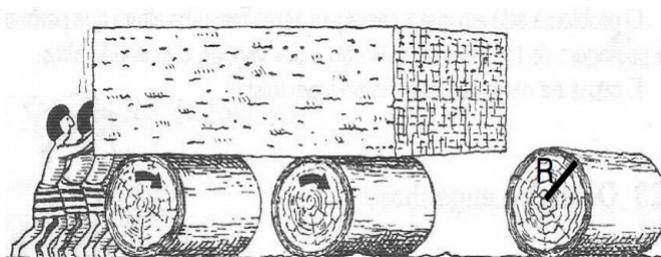
Qual a maior diferença, em real, entre os valores recebidos por esse serviço entre dois desses engenheiros?

- a) 1000.
- b) 1500.
- c) 3500.
- d) 3800.
- e) 5250.

NÚMEROS IRRACIONAIS

12. (2010) A ideia de usar rolos circulares para deslocar objetos pesados provavelmente surgiu com os antigos egípcios ao construírem as pirâmides, conforme a Figura A.4.

Figura A.4 – Rolos circulares



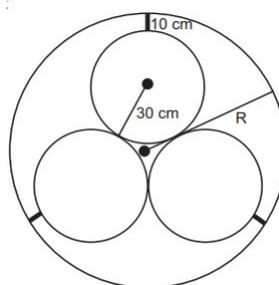
BOLT, Brian. *Atividades matemáticas*. Ed. Gradiva.

Fonte: Brasil (2025).

Representando por R o raio da base dos rolos cilíndricos, em metros, a expressão do deslocamento horizontal y do bloco de pedra em função de R , após o rolo ter dado uma volta completa sem deslizar, é:

- a) $y = R$.
 - b) $y = 2R$.
 - c) $y = \pi R$.
 - d) $y = 2\pi R$.
 - e) $y = 4\pi R$.
13. (2013) Em um sistema de dutos, três canos iguais, de raio externo 30 cm, são soldados entre si e colocados dentro de um cano de raio maior, de medida R . Para posteriormente ter fácil manutenção, é necessário haver uma distância de 10 cm entre os canos soldados e o cano de raio maior. Essa distância é garantida por um espaçador de metal, conforme a Figura A.5.

Figura A.5 – Sistema de dutos

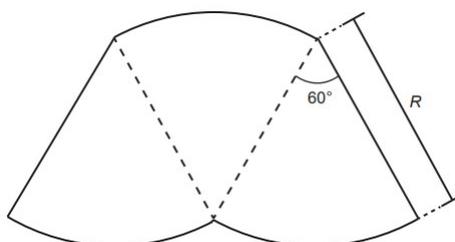


Fonte: Brasil (2025).

Utilize 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$. O valor de R, em centímetros, é igual a:

- a) 64,0.
 - b) 65,5.
 - c) 74,0.
 - d) 81,0.
 - e) 91,0.
14. (2014) Um homem, determinado a melhorar sua saúde, resolveu andar diariamente numa praça circular que há em frente à sua casa. Todos os dias ele dá exatamente 15 voltas em torno da praça, que tem 50 m de raio. Use 3 como aproximação para π . Qual é a distância percorrida por esse homem em sua caminhada diária?
- a) 0,30 km.
 - b) 0,75 km.
 - c) 1,50 km.
 - d) 2,25 km.
 - e) 4,50 km.
15. (2015) O proprietário de um parque aquático deseja construir uma piscina em suas dependências. A Figura A.6 representa a vista superior dessa piscina, que é formada por três setores circulares idênticos, com ângulo central igual a 60° . O raio R deve ser um número natural.

Figura A.6 – Vista superior: piscina

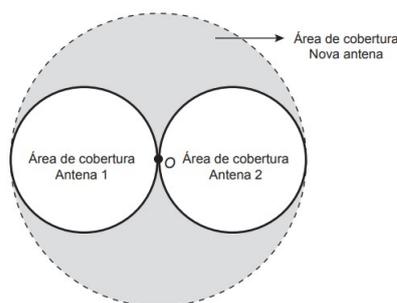


Fonte: Brasil (2025).

O parque aquático já conta com uma piscina em formato retangular com dimensões $50\text{ m} \times 24\text{ m}$. O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente. Considere 3 como aproximação para π . O maior valor possível para R , em metros, deverá ser:

- a) 16.
 - b) 28.
 - c) 29.
 - d) 31.
 - e) 49.
16. (2015) Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio 2 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto O, como mostra a Figura A.7.

Figura A.7 – Antenas



Fonte: Brasil (2025).

O ponto O indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores. Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em:

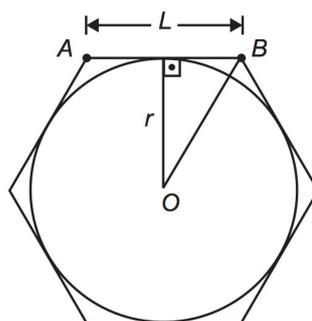
- a) 8π .
 - b) 12π .
 - c) 16π .
 - d) 32π .
 - e) 64π .
17. (2016) Tradicionalmente uma pizza média de formato circular tem diâmetro de 30 cm e é dividida em 8 fatias iguais (mesma área). Uma família, ao se reunir para o jantar, fará uma pizza de formato circular e pretende dividi-la em 10 fatias também iguais. Entretanto,

eles desejam que cada fatia dessa pizza tenha o mesmo tamanho (mesma área) de cada fatia da pizza média quando dividida em 8 fatias iguais. Qual o valor mais próximo do raio com que deve ser feita a pizza, em centímetro, para que eles consigam dividi-la da forma pretendida? Use 2,2 como aproximação para $\sqrt{5}$.

- a) 15,00.
- b) 16,50.
- c) 18,75.
- d) 33,00.
- e) 37,50.

18. (2018) Um brinquedo chamado pula-pula, quando visto de cima na Figura A.8, consiste de uma cama elástica com contorno em formato de um hexágono regular.

Figura A.8 – Pula-pula



Fonte: Brasil (2025).

Se a área do círculo inscrito no hexágono é $3\pi \text{ m}^2$, então a área do hexágono, em metros quadrados, é:

- a) 9.
 - b) $6\sqrt{3}$.
 - c) $9\sqrt{2}$.
 - d) 12.
 - e) $12\sqrt{3}$.
19. (2019) Uma administração municipal encomendou a pintura de dez placas de sinalização para colocar em seu pátio de estacionamento. O profissional contratado para o serviço inicial pintará o fundo de dez placas e cobrará um valor de acordo com a área total dessas placas. O formato de cada placa é um círculo de diâmetro $d = 40 \text{ cm}$, que tangencia lados de um retângulo, sendo que o comprimento total da placa é $h = 60 \text{ cm}$, conforme ilustrado na Figura A.9. Use 3,14 como aproximação para π .

Figura A.9 – Placa

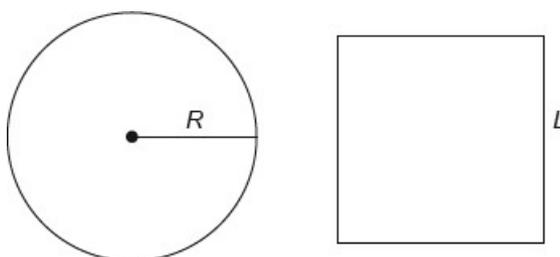


Fonte: Brasil (2025).

Qual é a soma das medidas das áreas, em centímetros quadrados, das dez placas?

- a) 16 628.
 - b) 22 280.
 - c) 28 560.
 - d) 41 120.
 - e) 66 240.
20. (2021) Um vidraceiro precisa construir tampos de vidro com formatos diferentes, porém com medidas de áreas iguais. Para isso, pede a um amigo que o ajude a determinar uma fórmula para o cálculo do raio R de um tampo de vidro circular com área equivalente à de um tampo de vidro quadrado de lado L , conforme a Figura A.10.

Figura A.10 – Tampos de vidro



Fonte: Brasil (2025).

A fórmula correta é:

- a) $R = \frac{L}{\sqrt{\pi}}$.
- b) $R = \frac{L}{2\sqrt{\pi}}$.
- c) $R = \frac{L^2}{2\pi}$.

$$d) R = \frac{\sqrt{2L}}{\pi}.$$

$$e) R = \frac{L}{\sqrt{\pi}}.$$

$$f) R = 2\sqrt{\frac{L}{\pi}}.$$

21. (2021) Projetado pelo arquiteto Oscar Niemeyer, o Museu de Arte Contemporânea (MAC) tornou-se um dos cartões-postais da cidade de Niterói, Figura A.11.

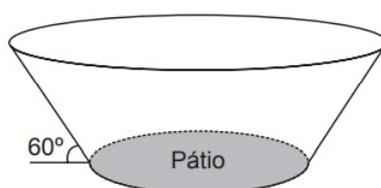
Figura A.11 – Museu de Arte Contemporânea (MAC)



Fonte: Brasil (2025).

Considere que a forma da cúpula do MAC seja a de um tronco de cone circular reto (Figura A.12), cujo diâmetro da base maior mede 50 m e 12 m é a distância entre as duas bases. A administração do museu deseja fazer uma reforma revitalizando o piso de seu pátio e, para isso, precisa estimar a sua área. (Utilize 1,7 como valor aproximado para $\sqrt{3}$ e 3 para π).

Figura A.12 – Tronco de um cone circular reto



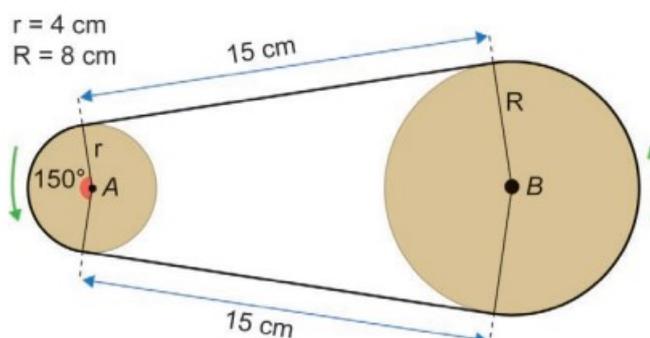
Fonte: Brasil (2025).

A medida da área do pátio do museu a ser revitalizada, em metros quadrados, está no intervalo:

- a) [100, 200].
- b) [300, 400].
- c) [600, 700].
- d) [900, 1.000].
- e) [1.000, 1.100].

22. (2024) Um sistema de polias circulares e correias é um dos mecanismos responsáveis pela transmissão de movimento em máquinas rotativas. O manual de um motor traz uma figura representando um sistema composto por duas polias e uma correia de transmissão, tensionada e perfeitamente ajustada sobre as polias, de modo a não apresentar folgas nos contatos com as polias. Considere que as partes dessa correia que não ficam em contato com as polias são representadas por segmentos de reta tangentes às polias, conforme a Figura A.13.

Figura A.13 – Polias

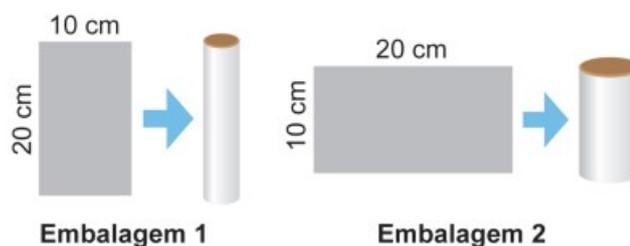


Fonte: Brasil (2025).

Para substituição dessa correia, é necessária a especificação de seu comprimento. Considere 3 como valor aproximado para π . A medida do comprimento dessa correia, em centímetro, é:

- a) 54.
 - b) 60.
 - c) 66.
 - d) 68.
 - e) 72.
23. (2024) Uma indústria faz uma parceria com uma distribuidora de sucos para lançar no mercado dois tipos de embalagens. Para a fabricação dessas embalagens, a indústria dispõe de folhas de alumínio retangulares, de dimensões 10 cm por 20 cm. Cada uma dessas folhas é utilizada para formar a superfície lateral da embalagem, em formato de cilindro circular reto, que posteriormente recebe fundo e tampa circulares. A Figura A.14 ilustra, dependendo de qual das duas extensões será utilizada como altura, as duas opções para formar a possível embalagem.

Figura A.14 – Embalagens



Fonte: Brasil (2025).

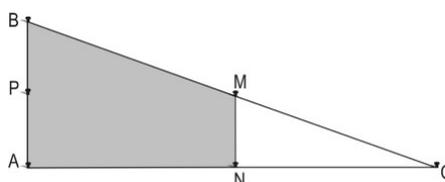
Dentre essas duas embalagens, a de maior capacidade apresentará volume, em centímetros cúbicos, igual a:

- a) 4000π .
- b) 2000π .
- c) $\frac{4000}{\pi}$.
- d) $\frac{1000}{\pi}$.
- e) $\frac{500}{\pi}$.

ÁREAS

24. (2010) Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na Figura A.15, em que as estacas foram indicadas por letras.

Figura A.15 – Triângulo ABC



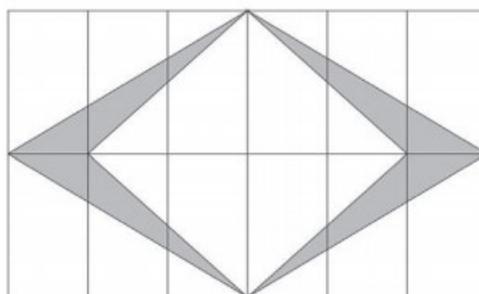
Fonte: Brasil (2025).

A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto. Nessas condições, a área a ser calçada corresponde:

- a) à mesma área do triângulo AMC.

- b) à mesma área do triângulo BNC.
- c) à metade da área formada pelo triângulo ABC.
- d) ao dobro da área do triângulo MNC.
- e) ao triplo da área do triângulo MNC.
25. (2011) Em uma cidade, a cada inauguração de prédios, a orientação da prefeitura, por meio de uma lei de incentivo à cultura, é a construção de uma obra de arte na entrada ou no hall desse prédio. Em contrapartida, a prefeitura oferece abatimento em impostos. No edifício das Acácias, o artista contratado resolveu fazer um quadro composto de 12 mosaicos, de dimensões de 12 cm por 6 cm cada um, conforme a Figura A.16.

Figura A.16 – Quadro



Fonte: Brasil (2025).

A área da figura sombreada do quadro é de:

- a) 36 cm^2 .
- b) 72 cm^2 .
- c) 144 cm^2 .
- d) 288 cm^2 .
- e) 432 cm^2 .
26. (2012) Vítor deseja revestir uma sala retangular de dimensões $3 \text{ m} \times 4 \text{ m}$, usando um tipo de peça de cerâmica. Em uma pesquisa inicial, ele selecionou cinco tipos de peças disponíveis, nos seguintes formatos e dimensões:
- Tipo I: quadrados, com $0,5 \text{ m}$ de lado.
 - Tipo II: triângulos equiláteros, com $0,5 \text{ m}$ de lado.
 - Tipo III: retângulos, com dimensões $0,5 \text{ m} \times 0,6 \text{ m}$.
 - Tipo IV: triângulos retângulos isósceles, cujos catetos medem $0,5 \text{ m}$.
 - Tipo V: quadrados, com $0,6 \text{ m}$ de lado.

Analisando a pesquisa, o mestre de obras recomendou que Vítor escolhesse um tipo de piso que possibilitasse a utilização do menor número de peças e não acarretasse sobreposições ou cortes nas cerâmicas.

Qual o tipo de piso o mestre de obras recomendou que fosse comprado?

- a) Tipo I.
 - b) Tipo II.
 - c) Tipo III.
 - d) Tipo IV.
 - e) Tipo V.
27. (2017) A Figura A.17 traz o esboço da planta baixa de uma residência. Algumas medidas internas dos cômodos estão indicadas. A espessura de cada parede externa da casa é 0,20 m e das paredes internas, 0,10 m.

Figura A.17 – Planta baixa



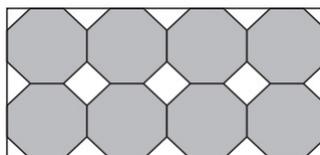
Fonte: Brasil (2025).

Sabe-se que, na localidade onde se encontra esse imóvel, o Imposto Predial Territorial Urbano (IPTU) é calculado conforme a área construída da residência. Nesse cálculo, são cobrados R\$ 4,00 por cada metro quadrado de área construída. O valor do IPTU desse imóvel, em real, é:

- a) R\$ 250,00.
- b) R\$ 250,80.
- c) R\$ 258,64.
- d) R\$ 276,48.
- e) R\$ 286,00.

28. (2020) Azulejo designa peça de cerâmica vitrificada e/ou esmaltada usada, sobretudo, no revestimento de paredes. A origem das técnicas de fabricação de azulejos é oriental, mas sua expansão pela Europa traz consigo uma diversificação de estilos, padrões e usos, que podem ser decorativos, utilitários e arquitetônicos. Azulejos no formato de octógonos regulares serão utilizados para cobrir um painel retangular conforme ilustrado na Figura A.18.

Figura A.18 – Azulejos



Fonte: Brasil (2025).

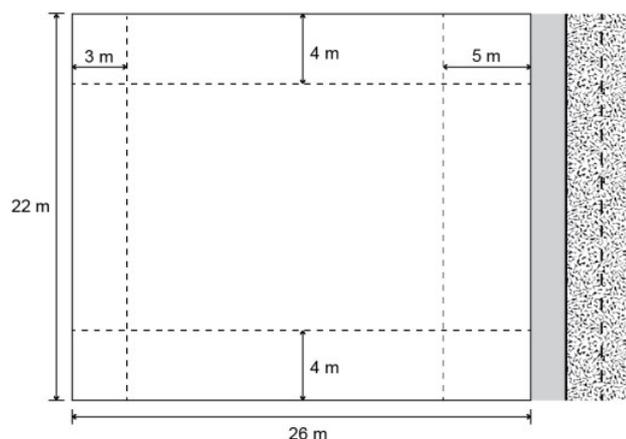
Entre os octógonos e na borda lateral dessa área, será necessária a colocação de 15 azulejos de outros formatos para preencher os 15 espaços em branco do painel. Uma loja oferece azulejos nos seguintes formatos:

- Triângulo retângulo isósceles;
- Triângulo equilátero;
- Quadrado.

Os azulejos necessários para o devido preenchimento das áreas em branco desse painel são os de formato:

- a) 1.
 - b) 3.
 - c) 1 e 2.
 - d) 1 e 3.
 - e) 2 e 3.
29. (2021) Uma empresa deseja construir um edifício residencial de 12 pavimentos, num lote retangular de lados medindo 22 e 26 m. Em 3 dos lados do lote serão construídos muros. A frente do prédio será sobre o lado do lote de menor comprimento. Sabe-se que em cada pavimento 32 m^2 serão destinados à área comum (hall de entrada, elevadores e escada), e o restante da área será destinado às unidades habitacionais. A legislação vigente exige que prédios sejam construídos mantendo distâncias mínimas dos limites dos lotes onde se encontram. Em obediência à legislação, o prédio ficará 5 m afastado da rua onde terá sua entrada, 3 m de distância do muro no fundo do lote e 4 m de distância dos muros nas laterais do lote, como mostra a Figura A.19.

Figura A.19 – Edifício residencial



Fonte: Brasil (2025).

A área total, em metros quadrados, destinada às unidades habitacionais desse edifício será de:

- a) 2 640.
 - b) 3 024.
 - c) 3 840.
 - d) 6 480.
 - e) 6 864.
30. (2021) Para identificar visualmente uma loja de *pet shop*, um empresário criou uma logomarca que se assemelha a uma marca deixada pela pegada de um gato, como na Figura A.20. O maior círculo tem medida de raio igual a 6 cm. O empresário pretende reproduzir o desenho em uma das paredes retangulares da loja. Para isso, fará a ampliação da logomarca utilizando a escala de 1:25.

Figura A.20 – Logomarca



Fonte: Brasil (2025).

A área mínima, em metros quadrados, que a parede deverá ter para que a logomarca seja aplicada é:

- a) 2,25.
- b) 6,00.

- c) 7,06.
- d) 9,00.
- e) 36,00.

31. **(2023)** Um clube está sendo reformado e deve ter algumas paredes e partes do teto repintadas. São, no total, 560 m^2 de parede e 260 m^2 de teto. Segundo orientações técnicas, um entre três tipos diferentes de tinta deve ser usado para pintar as paredes (tipos I, II e III), e um entre outros dois tipos pode ser utilizado na pintura do teto (tipos X e Y). As características dos diferentes produtos são apresentadas a seguir:

- tipo I: vendido em embalagem com 10 L, por R\$ 180,00 cada. O conteúdo permite pintar uma área de 220 m^2 ;
- tipo II: vendido em embalagem com 20 L, por R\$ 350,00 cada. O conteúdo permite pintar uma área de 450 m^2 ;
- tipo III: vendido em embalagem com 25 L, por R\$ 650,00 cada. O conteúdo permite pintar uma área de 550 m^2 ;
- tipo X: vendido em embalagem com 4 L, por R\$ 70,00 cada. O conteúdo permite pintar uma área de 80 m^2 ;
- tipo Y: vendido em embalagem com 5 L, por R\$ 85,00 cada. O conteúdo permite pintar uma área de 90 m^2 .

Pretende-se gastar a menor quantia possível, em real, com essa pintura. As tintas que devem ser escolhidas para uso nas paredes e teto do clube, respectivamente, são as de tipos:

- a) I e X.
- b) I e Y.
- c) II e X.
- d) II e Y.
- e) III e Y.

32. **(2024)** Um jardineiro dispõe de k metros lineares de cerca baixa para fazer um jardim ornamental. O jardim, delimitado por essa cerca, deve ter a forma de um triângulo equilátero, um quadrado ou um hexágono regular. A escolha será pela forma que resulte na maior área. O jardineiro escolherá a forma de:

- a) hexágono regular, pois a área do jardim, em metro quadrado, será $\frac{k^2\sqrt{3}}{24}$.
- b) hexágono regular, pois a área do jardim, em metro quadrado, será $\frac{3k^2\sqrt{3}}{2}$.

- c) quadrado, pois a área do jardim, em metro quadrado, será $\frac{k^2}{16}$.
- d) triângulo equilátero, pois a área do jardim, em metro quadrado, será $\frac{k^2\sqrt{3}}{36}$.
- e) triângulo equilátero, pois a área do jardim, em metro quadrado, será $\frac{k^2\sqrt{3}}{4}$.
33. (2024) O estádio do Maracanã passou por algumas modificações estruturais para a realização da Copa do Mundo de 2014, como, por exemplo, as dimensões do campo retangular. Para se adaptar aos padrões da Fifa, as dimensões do campo foram reduzidas de $110\text{ m} \times 75\text{ m}$ para $105\text{ m} \times 68\text{ m}$. Em quantos metros quadrados a área do campo do Maracanã foi reduzida?
- a) 24.
- b) 35.
- c) 555.
- d) 1110.
- e) 1145.

ÍNDICE

- Área
- conceito, 79
 - Disorientation, 94
 - Stomachion
 - determinantes, 90
 - teorema de Pick, 91
 - Tangram, 83
 - Trinity Quartet, 96
- Aproximação de Fujimoto, 47
- Bissetriz, 76
- ENEM
- números irracionais, 130
 - números racionais, 125
 - áreas, 137
- Matemáticos
- Arquimedes, 40, 104
 - Gauss, 90
 - Ghung Graham, 105
 - Green, 90
 - Pick, 91
- Mediatriz, 75
- Número irracional
- atividades no livro digital, 108
 - conceito, 60
 - propriedades, 61
 - segmentos incomensuráveis, 59
- Número racional
- atividades no livro digital, 99
 - conceito, 30
 - dízima periódica, 31
 - fração irredutível, 31
 - propriedades, 31
 - segmentos comensuráveis, 29
- Porcentagem
- Disorientation, 95
 - Stomachion, 93
 - Tangram, 86
 - Trinity Quartet, 98
- Puzzles
- Disorientation, 54
 - atividades no livro digital, 106
 - construção no GeoGebra, 56
 - origami, 58
 - Stomachion, 40
 - atividades no livro digital, 104
 - construção no GeoGebra, 40
 - origami, 45
 - Tangram, 33
 - atividades no livro digital, 101
 - construção no GeoGebra, 36
 - origami, 38
 - Trinity Quartet, 62
 - atividades no livro digital, 111
 - construção no GeoGebra, 67
 - origami, 72
- Retângulo brônzeo, 66
- conceito, 75
 - construção no GeoGebra, 75
 - origami, 78
- Teorema
- de Green, 90
 - de Haga, 48
 - de Pick, 92
 - fórmula do cadarço, 90
 - Wallace-Bolyai-Gerwien, 94