UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS - GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

JULIAN DA SILVA EUZÉBIO

PROPOSTA DE ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA UTILIZANDO O DESMOS

DISSERTAÇÃO – MESTRADO

PATO BRANCO
2018

JULIAN DA SILVA EUZÉBIO

PROPOSTA DE ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA UTILIZANDO O DESMOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, PROFMAT, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, Campus Pato Branco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Santos Richard Wieller Sanguino Bejarano

Coorientador: Prof. Dr. João Biesdorf

PATO BRANCO

2018

E91p Euzébio, Julian da Silva.
Proposta de ensino de geometria analítica utilizando o Desmos / Julian da Silva Euzébio. -- 2018.
120 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Santos Richard Wieller Sanguino Bejarano
Coorientador: Prof. Dr. João Biesdorf
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Pato Branco, PR, 2018.
Bibliografia: f. 103 - 105.

1. Matemática - Ensino e estudo. 2. Geometria analítica. 3. Ensino auxiliado por computador. 4. Tecnologia educacional. I. Bejarano, Santos Wieller Sanguino, orient. II. Biesdorf, João, coorient. III. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. IV. Título.

CDD (22. ed.) 510

Ficha Catalográfica elaborada por
Suélem Belmudes Cardoso CRB9/1630
Biblioteca da UTFPR Campus Pato Branco

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Câmpus Pato Branco

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Título da Dissertação Nº 34

"PROPOSTA DE ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA UTILIZANDO O DESMOS"

por

Julian da Silva Euzébio

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Santos Richard Wieller Sanguino Bejarano, pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Pato Branco, às 10:30hs do dia 21 de novembro de 2018. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. Santos Richard Wieller Sanguino Bejarano, Dr.
(Presidente – UTFPR/Pato Branco)

Prof. Vitor José Petry, Dr.
(UFFS/Chapecó)

Prof. Ivan Italo Gonzales Gargate, Dr.
(UTFPR/Pato Branco)

Prof. João Biesdorf, Dr.
(UTFPR/Pato Branco)

Prof. Adilson da Silveira, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Programa

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Santos Richard Wieller Sanguino Bejarano, pela imensa sabedoria com que me guiou nesta trajetória.

Ao meu Coorientador Prof. Dr. João Biesdorf, por ter aceitado humildemente a supervisão do trabalho e pela enorme contribuição em todo o trabalho de pesquisa.

Aos meus colegas de turma que de alguma forma contribuíram com a condução desta pesquisa.

A Secretaria do Curso, pela cooperação.

Gostaria de deixar registrado também, o meu reconhecimento à minha família, pois acredito que sem o apoio deles seria muito difícil vencer esse desafio.

Enfim, a todos os que por algum motivo contribuíram para a realização desta pesquisa.

Se quiser buscar realmente a verdade, é preciso que pelo menos uma vez em sua vida você duvide, ao máximo que puder, de todas as coisas – René Decartes, 1637.

RESUMO

EUZÉBIO, Julian da Silva. **Proposta de ensino de geometria analítica utilizando o Desmos**. 2018. 111 f. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, PR, 2018.

Na presente dissertação de mestrado investigamos a possibilidade de ensino e aprendizagem de alguns conteúdos de Geometria Analítica com o uso do *software* Desmos. O Desmos é uma página da internet em formato de calculadora gráfica disponível gratuitamente para todos os interessados, idealizado por Eli Luberoff, em 2007. No intuito de conhecer melhor as possibilidades de melhoria do processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos de matemática com o software Desmos, criamos uma sequência de atividades interativas abrangendo vários tópicos de Geometria Analítica para o ensino médio. As atividades apresentadas nesta dissertação estão dispostas em forma sequencial, com a finalidade de que outros interessados não tenham dificuldades em executá-las. A pesquisa também mostra os resultados positivos do uso desse tipo de recurso e da análise de uma experiência aplicada de um conteúdo em uma escola do ensino médio do município de Dois Vizinhos, Paraná.

Palavras-chave: Ensino. Tecnologia. Geometria Analítica. Computador. Desmos.

ABSTRACT

EUZÉBIO, Julian da Silva. **Proposal of teaching of analytical geometry using Desmos**. 2018. 112 f. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, PR, 2018.

In this dissertation we investigated the possibility of teaching and learning some contents of Analytical Geometry with the use of Desmos software. Desmos is a graphical calculator available free of charge to all interested parties, designed by Eli Luberoff, in 2007. In order to better understand the possibilities of improving the teaching and learning process of mathematics contents with Desmos software, we created a sequence of interactive activities covering various topics of Analytical Geometry for high school. The activities presented in this dissertation are arranged sequentially, so that other stakeholders have no difficulties in executing them. The research also shows the positive results of the use of this type of resource and the analysis of an applied experience of a content in a high school of the municipality of Dois Vizinhos, Paraná.

Keywords: Teaching. Technology. Analytical Geometry. Computer. Desmos.

LISTA DE IMAGENS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A presente dissertação trata do tema tecnologias no ensino básico, em especial o uso do *software* Desmos e suas possibilidades de melhoria do processo de ensino e aprendizagem.

O interesse pelo tema urge da preferência por inovar com tecnologias diferenciadas, e o querer pôr em prática o aprendizado recebido. Além disso, traz a possibilidade de auxiliar outros professores a lidarem com as novas tecnologias, pois muitos professores têm uma visão equivocada sobre o uso das tecnologias em sala de aula e esperam encontrar uma receita certa para ensinar matemática.

As tecnologias estão adquirindo muito espaço em sala de aula. Além de um meio de aprendizagem, podem ser utilizadas também como forma de interação entre professores e estudantes. Apesar dos vários benefícios oferecidos, devemos também verificar a maneira que as tecnologias são introduzidas na escola, as possibilidades de melhoria, e os limites das mesmas que devem ser considerados.

Por isso, como forma de contribuir ao processo de ensino e aprendizagem elaboramos uma sequência didática, com o uso do *software* Desmos para conteúdo de Geometria Analítica no Ensino Médio.

Para tanto, estruturamos o texto da dissertação em sete capítulos: 1) Esta introdução, contendo a justificativa, objetivos e a metodologia de pesquisa; 2) O uso das TICs no ensino de Matemática, onde buscamos autores que justificam o uso de tecnologias em sala de aula; 3) *Software* Desmos, onde especificamos várias questão pertinentes ao *software*; 4) Planejamento das atividade, onde é detalhado quais são as atividades foram desenvolvidas para o projeto; 5)Aplicação das atividades, em que mostramos um relato de experiência com uma turma do ensino médio noturno; 6) Análise dos resultados, na qual mostramos um resultado satisfatório da aplicação do projeto em sala de aula; 7) Considerações finais, mostrando possibilidades de contribuição acadêmica e profissional.

1.1 JUSTIFICATIVA

Na história do desenvolvimento humano, o homem, desenvolveu e continua a desenvolver tecnologias, técnicas, processos, métodos, instrumentos e meios para aprimorar os ofícios da atividade humana. A matemática, como síntese do conhecimento humano, se faz presente em diversos ofícios da atividade humana. Os vestígios do conhecimento matemático, remota, tempos pré-históricos (BOYER, 1974). Na idade média, esse conhecimento passou a integrar o rol de disciplinas escolares, nas primeiras escolas europeias. No entanto, sem preocupação com seu ensino (ROSA, 2012).

Atualmente, tem-se um olhar preocupado com o ensino de matemática e suas implicações no desenvolvimento da sociedade. Agora, o homem presencia o desenvolvimento, e uso cada vez mais frequente, das tecnologias computacionais.

O primeiro contato que eu tive com as tecnologias da informação direcionadas ao ensino de matemática se deu na disciplina de Informática Aplicada ao Ensino de Matemática, no curso de graduação na Universidade do Extremo Sul Catarinense – UNESC, em Criciúma no estado de Santa Catarina. Nessa disciplina, foram apresentados como instrumentos para o ensino de matemática *softwares* como o Maple, Graph, GeoGebra e Cabri Geometre. *Softwares*, estes, desenvolvidos para o estudo e desenvolvimento de vários conceitos matemáticos, como funções, gráficos, conceitos geométricos e outros.

Fazendo um levantamento das dissertações desenvolvidas no Brasil sobre o uso de tecnologias no ensino de matemática. Nota-se uma referência muito significativa ao *software* GeoGebra, e ao Cabri Geometre. Ambos com fortes recursos para o ensino de geometria. Conforme o estudo de Santos (2016) sobre o estado da arte das pesquisas realizadas no Brasil de 1991 até 2014 que ensinam Geometria Analítica, aponta que os *softwares* mais utilizados são: GeoGebra, Cabri Geometre II e 3D, Plataforma Moodle, Régua e compasso, GrafEq, Planilhas Eletrônicas o Excel e VetorRa.

Apesar da importante contribuição dos *softwares* mencionados para o desenvolvimento de conceitos matemáticos, como apontam as pesquisas, e a infinidade de conceitos que eles abrangem, definimos como instrumento para a presente pesquisa o *software* Desmos, o qual foi publicado na internet em 2007. Em função disso, seu potencial não foi explorado em pesquisas anteriores. Também se destaca aqui a facilidade de utilização do *Software* Desmos para professores e estudantes.

Definimos também como foco da pesquisa o ensino dos conceitos acerca da Geometria Analítica com o auxílio do software Desmos. Assim, guiamos a pesquisa com a seguinte pergunta: quais são as possibilidades do ensino de Geometria Analítica, em escolas públicas, com o uso do *software* Desmos?

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo geral

- Analisar a possibilidade de melhorar o processo de ensino e aprendizagem de conteúdos da Geometria Analítica com o uso do *software* Desmos.

1.2.2 Objetivos específicos

- Conhecer, usar e manipular as configurações e recursos disponíveis no *software* Desmos.

- Elaborar uma sugestão de sequência didática sobre os conteúdos de Geometria Analítica, para aplicação em sala com uso do *software* Desmos.
- Implementar uma sequência de ensino e aprendizagem na escola básica para um dos conteúdos de Geometria Analítica.
- Ampliar a discussão sobre o uso de tecnologias em sala de aula.
- Analisar a sequência de ensino aplicada em sala de aula.

1.3 METODOLOGIA DE PESQUISA

Nesta seção apresentamos os aspectos metodológicos da pesquisa, bem como, os recursos utilizados, a classificação da pesquisa, os instrumentos de coleta de dados e os sujeitos da pesquisa.

Caracterizamos esta pesquisa por sua natureza qualitativa e exploratória. Os procedimentos metodológicos utilizados foram a pesquisa bibliográfica, por meio da análise da literatura e publicações anteriores e, o estudo de campo com a utilização do *software* Desmos, em sala de aula com estudantes do Ensino Médio.

A seguir apresentamos as características de cada procedimento metodológico e como o trabalho foi estruturado nesse contexto.

1.3.1 A pesquisa bibliográfica

A pesquisa, segundo Gil (2007), é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Em um primeiro estudo buscamos fontes no banco de dissertações do PROFMAT e artigos do ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática) para verificar as produções atuais sobre o tema de estudo.

Conforme Oliveira (2007) a pesquisa bibliográfica é uma estratégia de estudo e análise de documentos científicos, tais como livros, periódicos, enciclopédias, dicionários e artigos científicos e não possui a necessidade de recorrer diretamente aos fatos e fenômenos da realidade empírica.

Contudo, para Marconi e Lakatos (2010) a pesquisa bibliográfica abrange a bibliografia já tornada pública em relação ao tema de estudo. Não é apenas a mera reprodução do que já se tem escrito sobre determinado tema, mas sim propicia o exame de um tema sob novo enfoque, chegando até mesmo em conclusões inovadoras.

1.3.2 A pesquisa de campo

Caracterizamos esta pesquisa como um estudo de campo, pois conforme Gil (2007), “o estudo de campo focaliza uma comunidade, que não é necessariamente geográfica, já que pode ser uma comunidade de trabalho, de estudo, de lazer ou voltada para qualquer outra atividade humana” (p. 53). Essencialmente, a investigação é feita por meio da observação direta das atividades de determinado grupo estudado e de entrevistas com participantes afim de entender seu conhecimento, explicações e interpretações do que ocorre no grupo (GIL, 2007). Para esta pesquisa foram criadas atividades especiais com a utilização do *software* Desmos bem como um pré-teste e um pós-teste. Segundo Gil (2007) “esses procedimentos são geralmente conjugados com muitos outros, tais como análise de documentos, filmagens e fotografias” (p. 53).

O estudo de campo, é caracterizado pelo pesquisador realizar grande parte do trabalho ele mesmo, pois destaca-se a importância de o pesquisador ter tido uma experiência pessoal direta com objeto de estudo. Exige-se também que o pesquisador conheça a realidade em que ele está se inserindo. Pois, conforme aponta Gil (2007), somente com a imersão na realidade é que se podem compreender a logística, os costumes e as convenções que conduzem o grupo estudado.

Gil (2007), ainda apresenta determinados benefícios ao se fazer um estudo de campo. Visto que o estudo de campo é realizado no próprio local em que acontecem os fenômenos, nesse caso a sala de aula, seus resultados e conclusões tendem a ser mais fidedignos. Não necessita de instrumentos especiais para coletar dados, por isso, vem a ser bem mais econômico. E ainda o pesquisador destaca-se pelo seu maior nível de participação, tona-se maior a possibilidade de os participantes oferecerem respostas com mais confiança (GIL, 2007).

Também com relação aos procedimentos podemos classificar esta pesquisa como pesquisa participante, esta “caracteriza-se pela interação entre pesquisadores e membros das situações investigadas” (GIL, 2007, p. 55). A pesquisa participante envolve a distinção entre ciência popular e ciência dominante. Visto sua forma de ação planejada, de caráter social e educacional.

Além disso, a pesquisa participante mostra-se bastante comprometida com a minimização da relação entre pesquisador/professor e alunos e por esta razão caracterizamos a pesquisa desse modo.

Para a criação das atividades de ensino, buscamos investigar possíveis abordagem atualmente disponíveis e como são realizadas na escola, também procuramos atividades de ensino que possam ser desenvolvidas com os alunos sobre conteúdos de Geometria Analítica, verificamos livros teóricos e didáticos tais como: Eves (2004), Barbosa (1995), Sousa (2016), Chavante (2016), Moderna (2016), e minha experiencia como professor em sala de aula para fazer adaptações de atividades em meio digital.

Para aplicação das atividades criadas aos alunos do ensino médio, procuramos uma escola no Sudoeste do Paraná com laboratório de informática devidamente estruturada e equipada para a realização da pesquisa. Então, escolhemos o Colégio Estadual Dois Vizinhos, localizado no município de Dois Vizinhos, Paraná. O colégio conta com um laboratório equipado e adequado para aplicação da sequência. A amostra é composta por estudantes do 3º ano do ensino médio desse colégio que participaram da experiência, realizando a sequência didática.

O colégio atende a um meio social bastante diversificado com estudantes oriundos de comunidades rurais, bairros urbanos do centro e da periferia. A comunidade escolar é composta por descendentes de: Alemães, Italianos, Polonês, Ucranianos e mestiços oriundos praticamente dos estados do Rio Grande do Sul e de Santa Catarina que estão presentes desde a fundação da cidade.

Com base nos dados do ensino médio do Projeto Político Pedagógico da escola em 2016, a renda mensal das famílias que compõe a comunidade escolar estima-se que: 15% recebem até 1 salário mínimo, 33% recebem entre 1 salário até 3 salários mínimo; 32% recebem entre 3 salários até 4 salários mínimos; e 20% recebem acima de 5 salários mínimos. Observamos que essa diversidade social e econômica não influencia na pesquisa, pois amostra possui acesso a tecnologia.

Buscamos desenvolver uma sequência de atividades sobre conteúdos de Geometria Analítica a serem resolvidas junto aos estudantes de 3º ano do ensino médio, no Colégio Dois Vizinhos com o uso do Desmos. Vamos explorar os conceitos fundamentais desta disciplina de forma simples, realizando construções e conjecturas com o uso do *software*, previamente conhecendo seus comandos e ferramentas, afim de estimular confiança e facilidade de manipulação para uso constante em atividades de matemática.

A hipótese, neste momento, é que o *software* Desmos auxilia no entendimento das definições matemáticas, via construção, e, na compreensão de vários cálculos, pela iteratividade e planejamento de questões e problemas. Através de sua utilização os estudantes podem sempre relacionar conceitos matemáticos, principalmente entre a Álgebra e a Geometria que é uma relação fundamental da Geometria Analítica.

Finalmente vamos analisar o material produzido e seu uso em sala de aula, com testes aplicados em situação de ensino, apontando possíveis melhorias e contribuições para o ensino de Matemática.

2 O USO DAS TIC NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Por volta dos anos de 1990, segundo Fiorentini (2009), aparece a nomenclatura em pesquisas educacionais conhecido por Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs), que surgem da junção das tecnologias computacionais, até então chamada de informática, e as tecnologias da comunicação, que eram conhecidas como telecomunicações e mídias eletrônicas.

Segundo Kenski (2012), as tecnologias são fundamentais para a educação e o ensino, e podem ser vistas como a socialização da inovação. No caso do uso do computador, segundo ele, não basta ter a máquina, é preciso saber utilizá-la adequadamente, e encontrar as melhores maneiras de obter do computador a ajuda necessária.

Conforme Santos (2016), é preciso mais do que oferecer as mídias educativas aos educandos tais como *software* de ensino, uso do computador e projetores de multimídia, “pois apenas o uso por sí só não garante que o aluno irá construir seu conhecimento” (p. 77). Por isso, Santos (2016), defende que o professor poderia aproveitar o uso das TICs, com objetivos organizados e que apresentem “situações didáticas que englobem os conteúdos matemáticos de forma que o aluno desenvolva seu raciocínio lógico-dedutivo e consiga resolver problemas” (p. 77).

Segundo Masseto (2000), não satisfaz somente fazer uma aula expositiva com aparelhos multimídias, tais como projetores de multimídia, de costume recorrente, com o intuito só de trocar a lousa e o giz, sem a verdadeira participação dos estudantes em sala de aula.

> Como o processo de aprendizagem abrange o desenvolvimento intelectual, afetivo, o desenvolvimento de competências e atitudes, pode-se deduzir que a tecnologia a ser usada deverá ser variada e adequada a esses objetivos. Não podemos ter esperança de que uma ou duas técnicas, repetidas à exaustão, deem conta de incentivar e encaminhar toda a aprendizagem esperada (MASSETO, 2000, p. 143).

Por isso, consideramos que o uso da tecnologia deve beneficiar o desenvolvimento do pensamento matemático nos estudantes para a aprendizagem de Geometria Analítica, desde que o professor tenha o conhecimento e planejamento de ensino em um meio informatizado.

No Ensino Médio os conceitos da Geometria Analítica, conforme Silva (2013), Oliveira (2014) e Santos (2016), na maior parte dos componentes curriculares do ensino público e do ensino privado são trabalhados no último ano desta faixa de estudo, 3º ano. Afirmam ainda que vem constituindo-se um grande desafio para professores de matemática, pois ainda que os estudantes estejam no final do Ensino Médio, muitos deles alegam dificuldades simples como, uma elementar resolução de expressões numéricas, algoritmos ou fórmulas, e isso não permite o desenvolvimento aprofundado de certos conceitos da Geometria Analítica como é o caso do estudo da circunferência.

A forma comum como os conteúdos são abortados se torna pouco atrativo aos estudantes. Porém, podem melhorar, se ficassem envolvidos em ambiente propício a aprendizagem. Para isso, o uso de *softwares* pode trazer uma nova dinâmica eficaz ao processo de ensino de Geometria Analítica, pois, como sabemos, a interação com o objeto de estudo é importante na aprendizagem e ainda, o quanto as redes virtuais são importantes para essa nova geração.

Em geral, a grande parte dos problemas da Geometria Analítica são solucionados aproveitando somente a ideia de coordenadas dos pontos. A Geometria Analítica tem origem em uma ideia muito simples, introduzida por Descartes no século XVIII, mas extremamente original: a criação de um sistema de pares ordenados que identifica um ponto P do plano com um par de números reais (x, y) (EVES, 2004).

Segundo Santos (2016), a essência real da Geometria Analítica reside na associação entre uma representação geométrica para uma representação algébrica, porém, para que ela desempenhasse plenamente esse papel, foi necessário esperar o desenvolvimento do simbolismo e dos processos algébricos.

O desenvolvimento dos conceitos de Geometria Analítica, que se apresenta no Ensino Médio, revela as relações dos conceitos geométricos e algébricos. Para que esse envolvimento tenha significado aos estudantes, o docente tem dois caminhos a desenvolver: a compreensão das figuras geométricas, por meio de equações, e a compreensão de equações, por meio dos conceitos geométricos.

Conforme indicam as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM), BRASIL (2006), não é necessário que o educando memorize fórmulas como, por exemplo, a da distância entre dois pontos, pois quando precisa, os cálculos podem ser realizados apenas com conhecimentos básicos de geometria. Segundo o OCEM, BRASIL (2006), temos de:

> usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para resolução de questões da Matemática e de outras disciplinas. Como parte integrante deste tema, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas (p. 123).

Em conformidade com as orientações dos OCEM, uma vez que definido o sistema de coordenadas cartesiano, é importante trabalhar com os alunos o significado de uma equação. O entendimento do significado de uma equação e de seu conjunto de soluções, não é imediato para o aluno. Esta dificuldade é natural, pois o significado da equação e de suas soluções não é explícito quando simplesmente se escreve uma equação.

Entendido o significado de ponto, sistema de coordenadas e de distância entre dois pontos, devemos iniciar o estudo das equações da reta e do círculo. Estas equações, em alguns casos, necessitam ser deduzidas ou construídas e não simplesmente apresentada aos alunos. Por isso, propomos o uso de *softwares* que ajudem nessas construções, como também simular e resolver problemas em sala de aula. Acreditamos que essas ferramentas possam acelerar algumas atividades de ensino e aprendizagem importantes para desenvolvimento estudantil.

Borba e Penteado (1999) afirmam que o uso de tecnologias no ensino, especificadamente sobre à utilização de *softwares*, permite explorar o conceito estudado de modo diferenciado, o que proporciona ao estudante o máximo de interação com o objeto estudado, ato que influencia a elaboração de novas conjecturas.

Para Dreyfus (1991) o uso de computadores serve como ferramenta heurística para estudantes de matemática, da mesma forma com que o microscópio serve aos biólogos. Usando uma sala de aula com recursos computacionais, muitas relações que normalmente estariam implícitas entre as representações diferentes para o mesmo conceito tornam-se explícitas

Dreyfus (1991) aponta que uma sala de aula com recursos computacionais tem sido usada com sucesso para alcançar tal estratégia no ensino da Matemática. Concorda-se com Dreyfus (1991) ao afirmar que os computadores podem auxiliar o desenvolvimento dos processos de visualização, representação, generalização e abstração dos conceitos matemáticos.

Assim, seguimos as OCEM, em que afirmam que os usos de *software* auxiliam na criação de imagens adjuntas das propriedades geométricas e destaca que: os recursos neles disponibilizados facilitam a exploração algébrica e gráfica e isso ajuda o aluno a entender os conceitos matemáticos (BRASIL, 2006).

Oliveira (2014) afirma que o uso de ferramentas dinâmicas ainda é um tabu a ser quebrado por muitos professores, talvez por puro comodismo no sistema tradicional ou pela deficiência dos cursos de formação de professores em relação ainda a estas ferramentas. No entanto, isso não justifica deixar o uso de tecnologias de lado, pois, cada vez mais, chega na escola uma geração mais conectada as mídias sociais e novas tecnologias.

A utilização desse instrumento na escola pode ser como um gatilho para o estímulo à participação ativa do estudante nos processos de ensino e aprendizagem. O uso desta metodologia de ensino, com o uso do *software* Desmos, é vista como uma alternativa de propor alguma ferramenta para o ensino e aprendizagem de Geometria Analítica.

2.1 ESCOLHA DO SOFTWARE

Os critérios que seguimos para a escolha do *software* educacional envolvem vários aspectos. Consideramos primordial observar os sistemas de representação que estão disponíveis a partir de sua utilização. Estes registros devem ser entendidos como: a línguagem natural, gráficos, linguagem algébrica, figuras geométricas, dentre outras.

Para à apreciação do *software*, Valente (1999) afirma ser necessário analisar aspectos como: Interface, interação entre o aluno e o computador, aspecto visual do *software*, “esforço mental” requerido para a utilização e tipo de resposta do sistema.

Qualquer análise intrínseca a este processo é a análise própria do *software* quanto sua facilidade de utilização e de realização de testes pelo educando. Essas análises são importantes para a efetivação das atividades e que os alunos tenham liberdade de analisar e construir seus objetos em qualquer momento.

Notamos em uma primeira utilização que, o *software* Desmos, possui menor variedades de recursos do que o famoso GeoGebra, mas trata-se de uma ferramenta online de acesso gratuito e fixa em um endereço da internet que oferece uma interface amigável e recursos simples de se utilizar. Isso garante que não ocorra atualizações de versões diferentes de um mesmo *software*. No capítulo seguinte levantamos os aspectos relevantes ao uso do *software* Desmos e os motivos que levaram a usar nesta pesquisa.

3 *SOFTWARE* DESMOS

3.1 CONHECENDO O DESMOS

Desmos é uma página da internet em formato de calculadora gráfica disponível gratuitamente para todos os interessados. Idealizado por Eli Luberoff, fundador do site em 2007, é uma calculadora gráfica com acesso em qualquer navegador ou ainda pode-se fazer o download do *software* de forma gratuita para iOS e Android[1]. Para acessá-la, basta digitar em qualquer navegador o endereço www.desmos.com/calculator e a calculadora abrirá instantaneamente. Isso permite trabalhar em qualquer plataforma com os mesmos recursos e a mesma interface. Além de possuir um sistema de computação em nuvem onde é possível salvar vários arquivos online e distribuir em forma de links como bem entender na rede.

Antes de toda a manipulação é aconselhável que os estudantes façam o login nos sistemas do Desmos para não perder o material criado. Com isso é possível armazenar um número imenso de gráficos. Para isso, basta digitar o nome, endereço de e-mail e fazer uma senha própria de cada usuário.

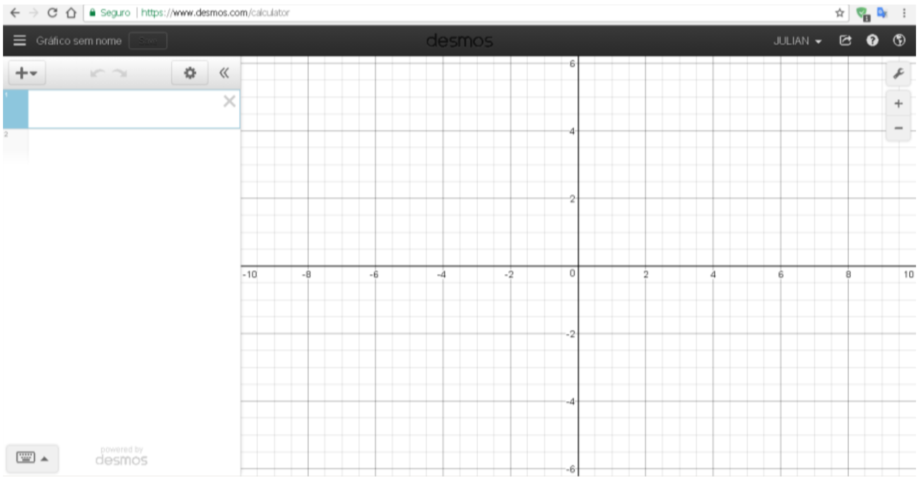


Imagem 1: Tela inicial Desmos
Fonte: www.desmos.com/calculator

[1] O iOS, sistema operacional da Apple, é responsável por fazer o iPhone e o iPad funcionarem e dominou o mercado por um longo tempo. O Android, sistema operacional criado pelo Google, é utilizado por marcas como Motorola e Samsung e já conquistou usuários de smartphones.

Segundo os idealizadores, em sua página oficial, dizem que, a Desmos quer ajudar os alunos do mundo inteiro a aprender matemática. A calculadora gráfica foi construída e aprimorada em HTML5[2], que milhões de estudantes usam diariamente em todo mundo de graça. A equipe da Desmos verifica as avaliações dos usuários para melhorar cada vez mais seu aplicativo. Criaram também algumas atividades como exemplo para essa calculadora, ajudando os alunos a usar de forma efetiva. Atualmente o software está disponível em mais de 30 idiomas.

Uma grande vantagem na interação navegador (página na web) ou aplicativo (Instalado em Android e IOS), é o fato de todos os recursos disponíveis serem representados na mesma forma, sem diferenças entre o navegador e a aplicação.

Para utilizá-lo, basta escrever cada expressão algébrica, ainda que em inglês, e ao mesmo tempo os efeitos são apresentados graficamente na tela ao lado. Podemos colocar um número não definido de fórmulas matemáticas. Quando digitamos alguma expressão algébrica ao lado esquerdo no editor, sejam elas equações, inequações ou funções, a respectiva representação geométrica é instantaneamente visualizada à direita, na malha quadriculada.

Toda a sua estrutura e interface interativa torna o Desmos muito simples de usar, ajuda-nos em situações em que necessitamos representar alguns gráficos mais elaborados. Se comparado com o *software* educacional como o GeoGebra, vê-se que oferece menor número de recursos, no entanto, isso torna o Desmos muito mais simples de usar o que facilita na hora de criar uma atividade. Um exemplo disso, para utilizar o número irracional π, basta digitar no editor, ao lado esquerdo o seu nome “pi” que o símbolo aparecerá instantaneamente.

Pode-se colocar um bom número de cores em cada equação e uma variedade de propriedades que fazem com que os gráficos se tornem desenhos complexos e realistas. O visual do Desmos é bastante intuitivo, isso faz com que sua interface apresente maior facilidade quando colocamos o trabalho em ação. Quando indicarmos uma cor em cada expressão, conseguimos distinguir com

[2] HTML5 (Hypertext Markup Language, versão 5) é uma linguagem para estruturação e apresentação de conteúdo para a World Wide Web e é uma tecnologia chave da Internet originalmente proposto por Opera Software.

facilidade as diferentes curvas desenhadas. É possível, também, imprimir, salvar como imagens e compartilhar os gráficos em redes sociais a partir da tela principal, tais como o Facebook, twitter e Google plus.

Dentre os fatores que nos levaram a optar por utilizar esse *software* na realização desta pesquisa, se destacam: é um *software* que não requer pagamento por sua licença; é fácil utilização; também está disponível em português (exceto os símbolos de digitação e atalhos); não necessita de instalação; roda em qualquer plataforma; possibilita a construção de gráficos de equações, dados a serem plotados, avaliar equações, explorar transformações.

Além desses fatores pode-se destacar, também a possibilidade de inclusão de pessoas com deficiência visual. Foram introduzidas melhorias na calculadora, como exemplo efeitos sonoros, para garantir que deficientes visuais tenham as mesmas oportunidades que os colegas para aprender matemática.

3.2 QUESITO ACESSIBILIDADE

O *software* foi configurado para que seja compatível com as configurações de acessibilidade WCAG 2.0 (*Web Content Accessibility Guidelines*)[3]. As melhorias na calculadora incluem: a) respeitando as configurações de tamanho de fonte de usuários de baixa visão; b) garantindo que as cores do aplicativo tenham contraste suficiente; e c) tornando os gráficos acessíveis para estudantes completamente cegos.

Foi redesenhada a lista de expressões da calculadora ao atualizar o MathQuill[4], o componente que alimenta o editor de equações. Assim o MathQuill agora se comunica com os leitores de tela, permitindo que eles falem equações de uma maneira verbalmente intuitiva; por exemplo, o texto “cos (x)” é falando como “cosseno aberto parênteses x fechado parênteses” e “stddevx” é lido em voz alta como “desvio padrão de x”. O leitor de tela expressa pistas adicionais

[3] Tradução livre: Diretrizes de Acessibilidade para Conteúdo WEB (WCAG 2.0).
[4] MathQuill é um editor de fórmulas web projetado para tornar a digitação de fórmulas matemáticas melhor e compreensível.

para indicar a localização de um estudante cego dentro de uma expressão (Numerado ou denominador, sobrescrito ou subscrito, linha de base, etc.). Existe também a síntese de áudios ao componente gráfico, permitindo que os usuários ouçam representações audíveis de gráficos, explorem seus pontos de interesse e muito mais.

Embora o quesito acessibilidade do leitor seja de grande ajuda e uma melhoria significativa para estudante com baixa visão. Ainda assim é possível apontar melhorias, tirar dúvidas e fazer comentários nos feedbacks. Entretanto, visto que a acessibilidade não é o foco da presente pesquisa, deixa-se aqui possibilidades para pesquisas futuras.

3.3 SÍMBOLOS DE DIGITAÇÃO

A calculadora inclui métodos para inserir tipos especiais de símbolos e expressões. Por exemplo, inclui alguns dos símbolos mais comuns como os da imagem abaixo:

Função	**Atalho**		
		∛ (ou superior!)	"Nthroot"
Sobrescrito	Shift + ^	Σ	"sum "
Subscrito	Shift + -	∫	"Int"
Prime	'	Π	"Prod"
√	"Sqrt"	π	"Pi"
		Θ	"Theta"

Imagem 2: Tabela de atalhos digitáveis
Fonte: www.desmos.com/accessibility

Além disso, o Desmos conta com um teclado virtual próprio, para os casos de telas *touch screen*, ou mesmo seja necessário procurar algum elemento matemático ou recursos para utilizar. Pode-se também iserir as equações pelo próprio teclado da tela do *software* Desmos. Como mostra a imagem 3 a seguir, temos ainda uma variedade de funções trigonométricas, de estatística e de expreções adicionais.

Imagem 3: Teclado virtual em Desmos.
Fonte: www.desmos.com/calculator.

O Desmos se beneficia do MathQuill que é um editor de fórmulas de código aberto para internet produzido e mantido por Han Seoul-Oh e por Mary Stuffebeam. *Software* desenvolvido pela necessidade de se comunicar com matemática. Os desenvolvedores usaram a LateX[5] para projetos em conjunto. A ideia original era uma ferramenta para escrever e ler matemática sem recorrer a textos ou a códigos mais sofisticados. O MathQuill tornou-se amplamente útil, é usado também por outros *softwares* educacionais. Assim, o Desmos pode escrever expressões com uma sintaxe mais elaborada como $x' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, por exemplo, sem prejuízo ao modelo conceitual em sala de aula. Sem essa ferramenta teríamos que escrever o código em LaTeX do tipo: x=\frac{-b\pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.

Seu repertório de funções está organizado em funções trigonométricas, estatísticas e diversas. Entre as funções trigonométricas temos as funções: seno (sin), cosseno (cos), tangente (tan), secante (sec), cossecante (csc) e cotangente (cot). Também temos suas respectivas inversas como arco seno (sin^{-1}), arco cosseno (cos^{-1}), arco tangente (tan^{-1}), arco secante (sec^{-1}), arco cossecante (csc^{-1}) e arco cotangente (cot^{-1}). Além disso, contem as funções trigonométricas hiperbólicas. Apresentando o seno hiperbólico (sinh), o cosseno hiperbólico (cosh), tangente hiperbólica (tanh), secante hiperbólica (sech), cossecante hiperbólica (csch) e cotangente hiperbólica (coth) como destacado na imagem 4 a seguir.

---

[5] LaTeX é um conjunto de macros para o programa de diagramação de textos TeX, utilizado amplamente na produção de textos matemáticos e científicos, devido a sua alta qualidade tipográfica.

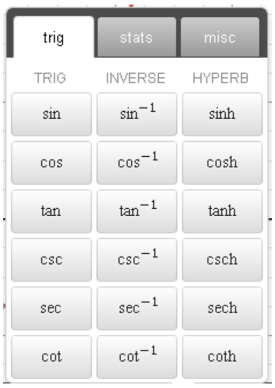


Imagem 4: Funções trigonométricas em Desmos.
Fonte: www.desmos.com/calculator.

Já nas ferramentas estatísticas, podem-se destacar média (mean), mediana (median), mínimo (min), máximo (max) e desvio padrão (stdev). Além de possuir outras ferramentas como: Total (total), que retorna a soma de todos os elementos de uma lista; Comprimento (length), que retorna o número de elementos de uma lista; Quantil (quantile) frequência distribuída acumulada; Desvio médio absoluto (mad); Desvio padrão da população (stdevp); Variancia (var); Covariância (cov); Coeficiente de correlação de Pearson de duas listas (Corr). Número de combinações (NCr); Número de permutações NPr e Fatorial (n!); como podemos ver na imagem 5.

Imagem 5: Ferramentas de estatísticas.
Fonte: www.desmos.com/calculator.

Também temos uma aba para outras ferramentas (misc), como o mínimo múltiplo comum (lcm); máximo divisor comum (gcd); resto da divisão ou modular (mod (a, b)); Inteiro maior que um número (ceil); Inteiro menor que um número (floor); Arredondar para o inteiro mais próximo (round); Valor absoluto (abs) que também pode ser representado por |x|; Função Sinal (sign); Porcentagem %; A função exponencial com a sigla (exp) que também pode ser expressa por e^x; logaritmo natural (ln); Raiz de índice n (nthroot); logaritmo na base 10 (log);

logaritmos em qualquer base ($\log_a b$); Derivada ($\frac{d}{dx}$) ou ; Integral(int); Somatório (sum) e Produtório, como visto no teclado virtual, imagem 6, seguinte.

Imagem 6: Ferramentas diversas.
Fonte: www.desmos.com/calculator.

Cada um desses recursos pode ser digitado diretamente no editor de equações e expressões matemática que o resultado aparecerá ao lado. Sem a necessidade de acesso ao teclado virtual. O que faz com que a ferramenta seja muito fácil de usar e muito rápida. Um exemplo disso é o fato de digitar o símbolo π para isso basta digitar “pi” e o símbolo aparece instantaneamente. Outros casos são os símbolos α, β, θ e φ em que bastas digitar, respectivamente, alpha, beta, theta e phi. O que torna a experiência muito mais agradável.

3.4 ALGUMAS COMPARAÇÕES ENTRE DESMOS E GEOGEBRA

Nesta seção não queremos estabelecer uma relação de qual é o melhor. Temos conhecimento das inúmeras pesquisas utilizando o software GeoGebra, e suas contribuições para o ensino. Apresentamos, a seguir, uma alternativa ao GeoGebra que, no Brasil, é mais popular entre os educadores.

Durante a popularização das tecnologias da informação na educação, surge um *software* de geometria dinâmica denominado de GeoGebra. O GeoGebra foi criado por Markus Hohenwarter em 2001. O objetivo inicial do GeoGebra era proporcionar ao usuário ferramentas para o ensino e aprendizagem da Geometria e da Álgebra. Possui ferramentas tradicionais de um *software* de geometria dinâmica como, ponto, reta e seções cônicas, ou seja conceitos de Geometria Euclidiana, além de recursos que permitem resoluções de equações e gráficos de funções.

O *software* GeoGebra permite ao mesmo tempo, duas ou mais representações de um mesmo objeto que interagem entre si, uma representação geométrica e outra algébrica. Existem várias versões do GeoGebra que permitem o estudo de estatística, probabilidade, cálculo diferencial e integral e etc.

O GeoGebra, assim como o Desmos, também conta com sua versão *online* desde 2014 para rodar em qualquer navegador. Pode-se notar uma enorme quantidade de recursos, além de várias fermentas de geometria dinâmica. Em síntese, o GeoGebra se mostra um *software* bem completo para vários recursos Matemáticos.

No entanto, devido a tantos recursos, notamos, em primeiro acesso, que o *software* GeoGebra leva de em média 15 segundos para carregar todas as configurações, enquanto o Desmos apenas 5 segundos. Isso em testes simples com mesma situação de processamento e velocidade de internet, com o navegador Google Chrome, em computadores da escola.

No decorrer da pesquisa o GeoGebra mudou a versão do *software*, agora com duas versões disponíveis. A versão classic bastante semelhante aos *softwares* de versões anteriores, disponível em: www.geogebra.orb/classic. E a versão calculadora gráfica, graphing, com visual mais moderno, com maior semelhança ao *software* Desmos, só que com os recursos de geometria dinâmica. Ambas as versões contar com a mesma variedade de recursos, como ferramentas estatísticas, vetores, matrizes e outros. Podemos, também, escrever qualquer comando em português, desde que disponível. A imagem 7 mostra com o visual da versão classic à esquerda e o visual da calculadora gráfica à direita.

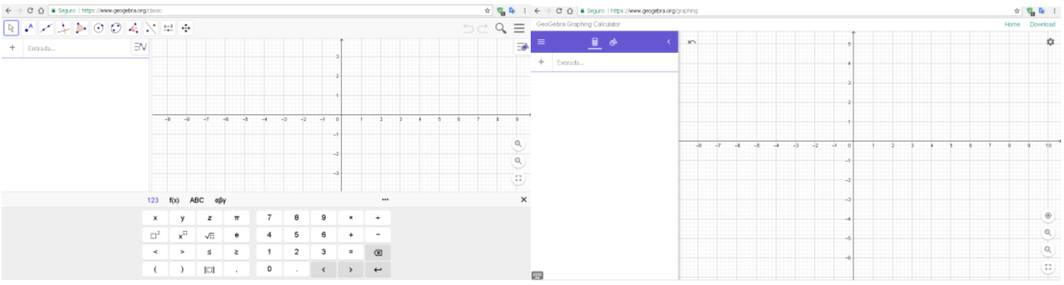


Imagem 7: Versão Classic a esquerda e Calculadora gráfica a direita do GeoGebra.
Fonte: www.geogebra.org/classic.

A diferença principal entre as duas versões do *software* GeoGebra é que “escondem” as ferramentas de geometria dinâmica na versão nova. Antes disponíveis na barra superior da tela e agora disponíveis no botão ao lado do ícone da calculadora representado por um círculo e um triângulo, conforme mostra na imagem 8.

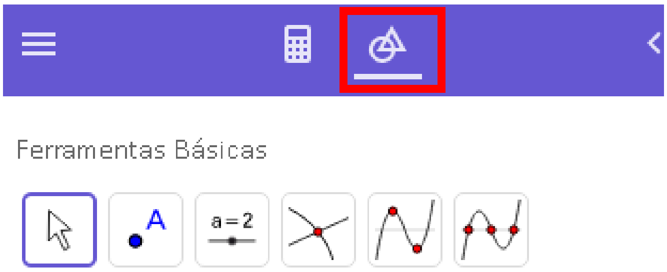


Imagem 8: Ferramentas de geometria dinâmica em GeoGebra.
Fonte: www.geogebra.org/graphing.

O fato dos desenvolvedores do GeoGebra esconderem os recursos de geometria dinâmica tem uma razão aparente. É o fato do estudante não precisar saber matemática para construir qualquer objeto matemática com o *software*. Por exemplo, para traçar uma reta que passa pelos pontos $A(1,2)$ e $B(5,4)$ o estudante que já conhece o *software* pode, muito bem, apenas escrever os pontos A e B e em seguida digitar o comando *reta(A, B)* que a reta aparece, o que faz sentido pois é um axioma da Geometria Euclidiana. Isso é ótimo do ponto de vista do conteúdo de Geometria Euclidiana, mas não do ponto de vista do ensino dos conteúdos de Geometria Analítica, pois como afirma Dreyfus (1991), o estudante não fez nenhum processo mental (construção) para atingir o resultado apenas digitou o comando. O que não acontece com o *software* Desmos, visto que não possui tais recursos. Esta situação nos indica para que conteúdos de matemática cada software está direcionado, esta percepção nos orienta a escolher o *software* Desmos para aplicar conteúdos de Geometria Analítica. Assim, por exemplo, para passar uma reta pelos pontos A e B o estudante deverá encontrar a equação da reta que passa pelos pontos indicados, sendo $x - 2y + 3 = 0$, para daí sim digitar no Desmos e desenhar a reta na tela.

Além disso, o *software* GeoGebra apresenta algumas falhas ao escrever uma equação. Quando queremos inserir controles deslizantes é necessário clicar em “criar controles deslizantes” sempre que preciso, o que torna a digitação desagradável. E quando criar uma função definida como, por exemplo, $y = x + 1$, devemos tomar cuidado ao tocar no gráfico da função com o mouse, pois podemos movimentá-lo e modificar a função definida. Na figura abaixo, o *software* indicou erro ao digitar a expressão $ax^2 + bx + c$, quando simplesmente queria-se criar um controle deslizante que faram o papel das constantes em Matemática.

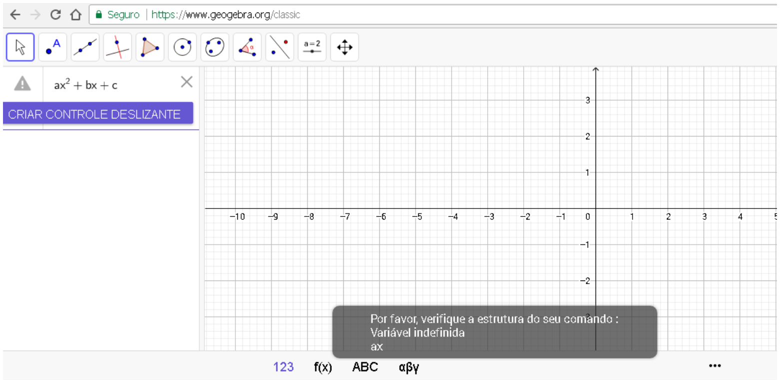


Imagem 9: Erro ao criar controles deslizantes.
Fonte: www.geogebra.org/classic. Acesso em: 12/03/2018

Em outra situação, na imagem 10, vemos 3 circunferências diferentes com apenas duas equações. Esse erro acontece ao digitarmos uma inequação e trocamos a desigualdade por uma igualdade. Nesse caso, quando digitamos a inequação do tipo $x^2 + y^2 \leq 4$ aparece o círculo todo preenchido, mas ao modificar essa inequação para uma equação de circunferência do tipo $x^2 + y^2 = 4$ a figura permanece a mesma. Isso acontece por um erro de memória, pois ainda mostra figura do círculo anterior. Além disso, apesar de definido a equação do círculo, podemos movê-lo sem preocupação com o centro do círculo quando tocamos o seu gráfico.

Isso ocorre, pois, o software salva a imagem anterior e não modifica posteriormente a mudança da equação. Isso acontece nas duas versões do software GeoGebra acima citados.

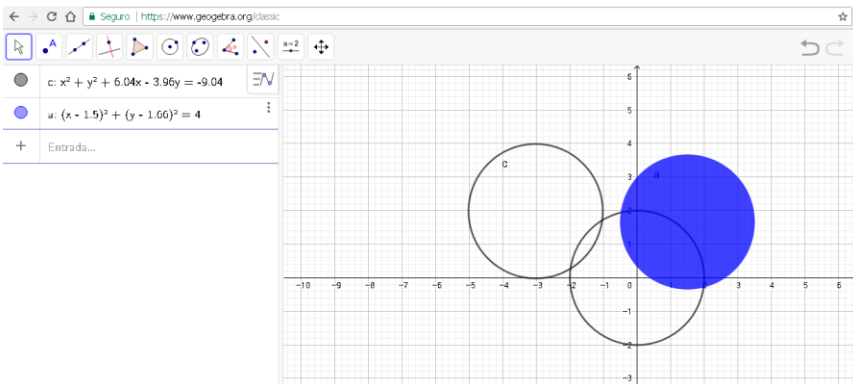


Imagem 10: Erro, 3 objetos para duas equações
Fonte: www.geogebra.org/classic. Acesso em 12/03/2018.

Isso requer um cuidado a mais do usuário e requer que o professor identifique e corrija esses erros para o estudante. Pois pode levar a crer que significa o mesmo objeto.

Também se nota que ao digitar um expoente, no GeoGebra, é sempre necessário apertar a tecla ‘seta direita’ do teclado, para que o cursor volte para o local apropriado. Isso é desnecessário com o Desmos, pois entende que expoentes mais elaborados não são tão comuns em ambiente escolar. Por exemplo, quando lemos e explicamos uma equação do tipo $x^2 + y^2 = 4$ falamos: ”*x elevado ao quadrado mais y elevado ao quadrado igual a 4*”. Essa fala não precisa ser interrompida ao digitarmos a equação em Desmos, porém ao digitarmos com essa fala no GeoGebra temos a equação $x^{2+y^{2=4}}$, que não faz nenhum sentido. Mostra que a experiência de digitação em *software* Desmos é mais confortável.

Uma das dificuldades em fazer esse tipo de comparação entre os dois *softwares* são as atualizações que podem ser realizadas, principalmente no *software* GeoGebra. Desde o início da pesquisa o *software* Desmos não teve nenhuma alteração, enquanto o *software* GeoGebra passa por mudanças. Isso proporciona uma instabilidade ao *software* GeoGebra bem como pequenos erros no processamento. Enquanto isso, a equipe da Desmos lançou seu *software* de geometria dinâmica separado da calculadora gráfica, disponível online em: www.desmos.com/geometry.

Finalizamos esta comparação na segunda-feira, 28 de outubro de 2018. Sabendo que provavelmente os *softwares* já possam estar atualizados e melhorados para versões diferentes até a defesa da pesquisa e publicação de resultados.

4 PLANEJAMENTO DAS ATIVIDADE

4.1 PLANO CARTESIANO: LOCALIZAÇÕES

Os objetivos desta seção são: apresentar o plano cartesiano; introduzir a métrica usual do plano cartesiano; introduzir a noção de lugar geométrico no plano cartesiano; utilizar a fórmula distância entre dois pontos como modo de traduzir algebricamente uma propriedade geométrica; apresentar o *software* Desmos para a sequência dos estudos.

O conceito do plano cartesiano foi introduzido por volta do século XVII, pelo trabalho dos matemáticos franceses René Descartes e Pierre de Fermat para representar graficamente pares ordenados (x, y) de números reais (BEZERRA, 2010).

A ideia fundamental do plano cartesiano, que consiste em um sistema de referência, é que identifica a cada ponto de um plano com suas duas coordenadas ordenadas. O plano cartesiano consiste de duas retas orientadas perpendiculares entre si, uma na vertical e outra na horizontal, chamadas de eixos coordenadas. O ponto de interseção desses dois eixos é chamado de origem do sistema. O eixo horizontal é dito eixo das abscissas e o eixo vertical, eixo das ordenadas. Em cada eixo se associa os lugares geométricos de seus pontos com os números reais como é feito na Reta Real. Feito isto, a identificação de cada ponto P do plano cartesiano com suas coordenadas é feita como sendo a primeira coordenada o valor real x resultante da projeção ortogonal do ponto P sobre o primeiro eixo e a segunda coordenada o valor y resultante da projeção ortogonal de ponto P sobre o segundo eixo, denotado por $P(x, y)$.

Ao iniciar o *software* Desmos nos deparamos diretamente com um plano cartesiano, com uma coluna à esquerda para inserir objetos matemáticos. Ao clicar no ícone ferramentas, chave inglesa, canto superior direito, podemos configurar o plano cartesiano conforme preferência. O *software* apresenta, também, a possibilidade para utilização, conforme a imagem 11, de grades cartesianas ou polares, aparecer ou não os números, linhas de grade menores (*Minor Grinlines*), colocar ou retirar setas dos eixos, aparecer ou não os eixos x ou y, nomear os eixos e determinar a sequência de números que irá aparecer nos eixos, de 1 em 1, 2 em 2, e etc.

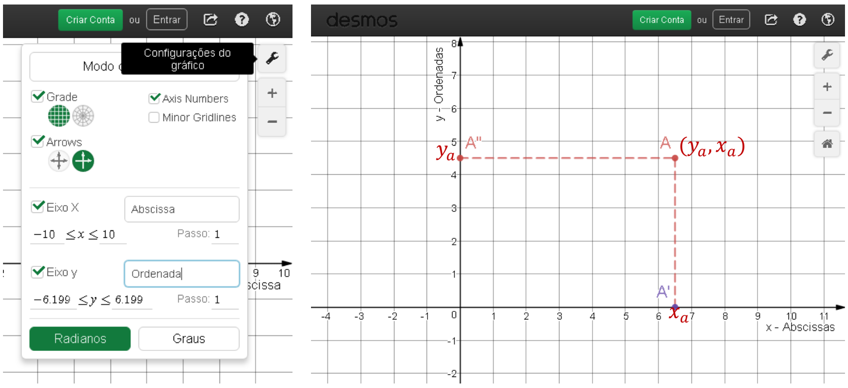


Imagem 11: Configurações do gráfico
Fonte: www.desmos.com/calculator.

A localização desse ponto no plano, far-se-á conduzindo por A retas paralelas aos eixos, sendo que uma delas intercepta o eixo x no ponto A' de abscissa x_a e a outra intercepta o eixo y no ponto A'' de ordenada y_a. Em Desmos, podemos inserir as equações $x = x_a$, depois $y = y_a$, onde x_a e y_a são constantes fixadas em um momento, e criar controles deslizantes para x_a e y_a, o Desmos construirá estas equações como retas uma vertical e outra horizontal aos eixos ordenados, e por fim identificar o ponto $A(x_a, y_a)$.

O plano cartesiano fica, assim, dividido em quatro regiões, que são denominados quadrantes, imagem 12: o primeiro fica acima do eixo das abscissas e à direita do eixo das ordenadas; o segundo, acima do eixo das abscissas e à esquerda das ordenadas; o terceiro, abaixo do eixo das abscissas e à esquerda das ordenadas; e, o quarto, abaixo do eixo das abcissas e à direita do eixo das ordenadas. O sinal de x e o sinal de y dependem do quadrante em que o ponto está situado. A origem do sistema possui ambas as coordenadas nulas.

Na continuação apresentaremos as atividades que faram parte da sequência didática.

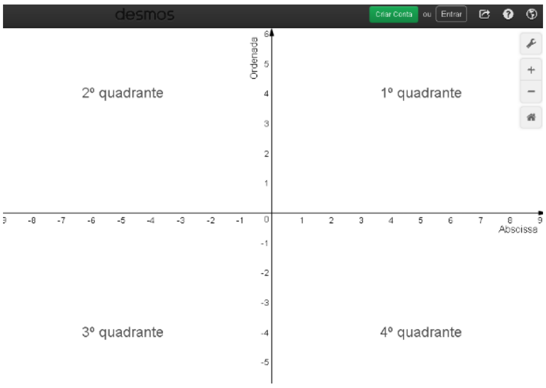


Imagem 12: Conceitos de quadrante, abscissa e ordenada
Fonte: www.desmos.com/calculator/lx7iykpyfy.

Atividade 1.01 – Para esta atividade temos por objetivo motivar os alunos ao estudo de pontos no plano. Para isso, com o uso do computador via internet incentivamos o estudante a procurar o mapa da cidade onde moram, encontrando a imagem para colocar no Desmos e realizar o estudo dos pontos principais da cidade. A seguir sugerimos a atividade:

1. Pesquise o mapa da cidade no Google (Pode-se disponibilizar uma imagem padrão para todo o grupo). Para isso sugerimos a utilização de imagem real 3D vista de cima e sua representação em 2D, com a visão das ruas apenas. Como mostra a imagem a seguir.

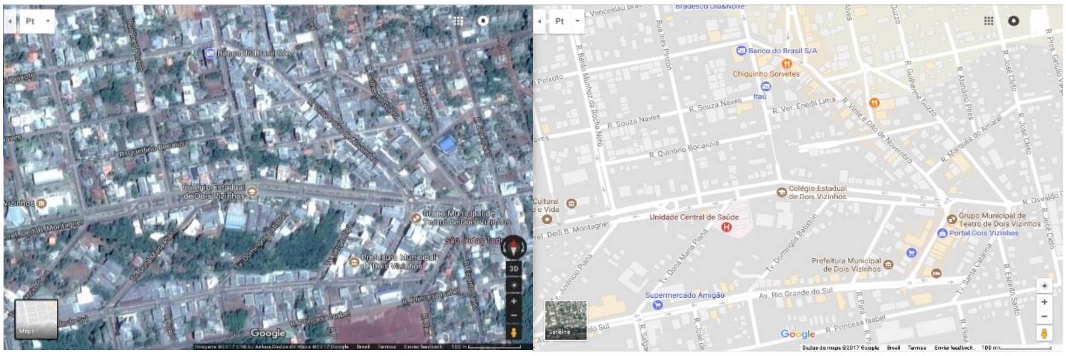


Imagem 13: Mapa da cidade de Dois Vizinhos
Fonte: www.google.com/maps.

2. Inserir o mapa no editor do Desmos (Basta arrastar a imagem para o Desmos).

3. Ajuste o tamanho e a posição da imagem. Conforme indica no próprio editor do Desmos, imagem 16. Neste caso, colocamos o centro da imagem na origem (0, 0) com as dimensões: altura 14 e largura 20.

Imagem 14: Posição e dimensões da imagem em Desmos.
Fonte. www.desmos.com/calculator.

4. Localizar no mapa, utilizando o sistema de coordenada do Desmos, quais as coordenadas dos pontos de referência da cidade (como as coordenadas de onde está a escola, do banco, da praça, do teatro, prefeitura e etc.). A imagem 15 a seguir ilustra como ficou a situação da atividade:

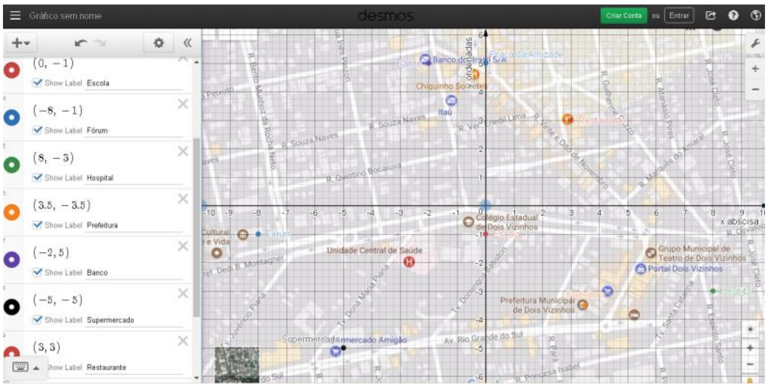


Imagem 15: Tela final da atividade.
Fonte: www.desmos.com/calculator/mvjcsgljwf.

Atividade 1.02 - Nesta atividade objetivamos além dos conceitos vistos sobre pontos no plano cartesiano, coordenadas, localizações dos quadrantes, mas também os de bissetrizes dos quadrantes ímpares e pares com o Desmos.

Localizar no plano cartesiano, os pontos descritos abaixo, identificando a que quadrante cada um pertence, se pertence ao eixo das abscissas, das ordenadas, a bissetriz dos quadrantes ímpares ou a bissetriz dos quadrantes pares. Pontos: $A(3,3)$,$B(-5,1)$, $C(-1,-6)$, $D(2,-3)$, $E(0,4)$, $F(3,0\ )$, $G(-4,0)$ e $H(0,2)$, I(5, 4.99) .

1. Na coluna esquerda do Desmos insira cada ponto e veja sua localização;
2. Digitar as equações $y = x$ e $y = -x$ que são retas e chamaremos de bissetrizes dos quadrantes ímpares e pares, respectivamente.
3. Com os pontos já localizados determine se o ponto pertence a um quadrante, a um eixo ou a uma bissetriz.

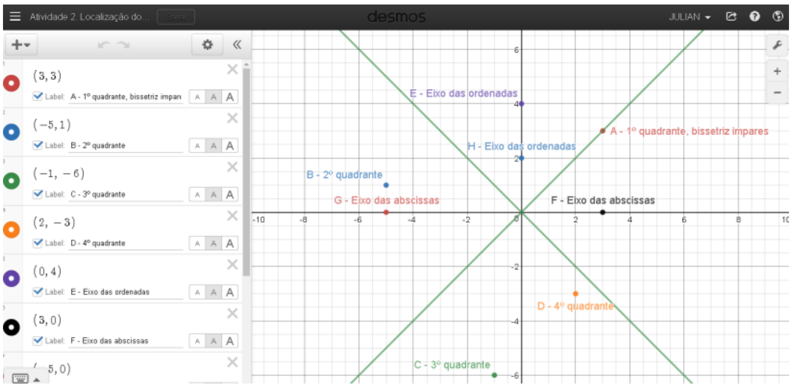


Imagem 16: Final da atividade onde pertencem os pontos.
Fonte: www.desmos.com/calculator/w69nya2chg.

A critério do leitor: use o Desmos construa as bissetrizes dos quadrantes do plano e conclua que eles têm por equação $y = x$ e $y = -x$ respectivamente. Podemos ver uma proposta disso na seção de aplicação das atividades.

Atividade 1.03 - Ponto móvel. Nosso objetivo com esta atividade é entender o significado de constantes em matemática e que podem assumir outros valores em instantes diferentes, desta forma vamos entender os controles deslizantes como constantes no meio digital.

1. Insira um ponto do tipo (a, b).
2. Crie controles deslizantes para $\boldsymbol{a}$ e para $\boldsymbol{b}$ (Só apertar a tecla enter).
3. Descrever como é movimento desse ponto (Aluno).

4.1.1 Distância entre dois pontos

Primeiramente veremos a definição de distância entre dois pontos que estão sobre uma reta paralela ao eixo x. Após a definição é estendida a pontos que estão sobre uma reta paralela ao eixo y. E por fim, quando os pontos não estão dispostos em retas paralelas aos eixos ordenados.

Sejam $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ pontos sobre uma reta paralela ao eixo x, das abscissas, lembrando que $x = x_a$ é uma reta paralela ao eixo y e $y = y_b$ é uma reta paralela ao eixo x, então temos, nesse caso, que $y_1 = y_2$. Assim podemos ver que a distância entre os pontos é a diferença entre x_1 e x_2. É indicado por $d_{AB} = |x_2 - x_1|$. A imagem 17 a seguir ilustra a situação, com $y_1 = y_2 = 1.6$.

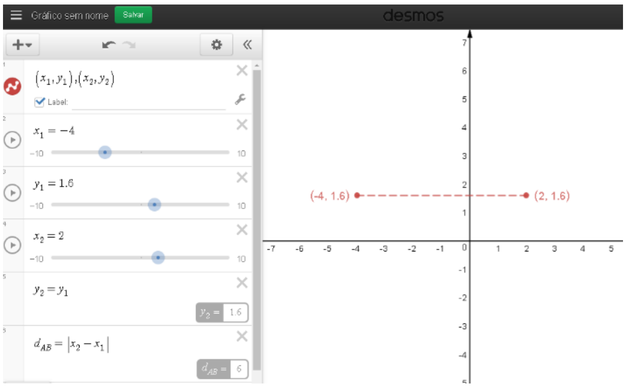


Imagem 17: Distância entre pontos
Fonte: https://www.desmos.com/calculator/yfdicppqhm.

Para o caso de os pontos estiverem sobre uma reta paralela ao eixo y, sejam eles $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, teremos então que $x_1 = x_2$. Sendo assim, podemos calcular a distância apenas com: $d_{AB} = |y_2 - y_1|$. Como indicado na imagem 18 abaixo, com $x_1 = x_2 = -4$ fixado.

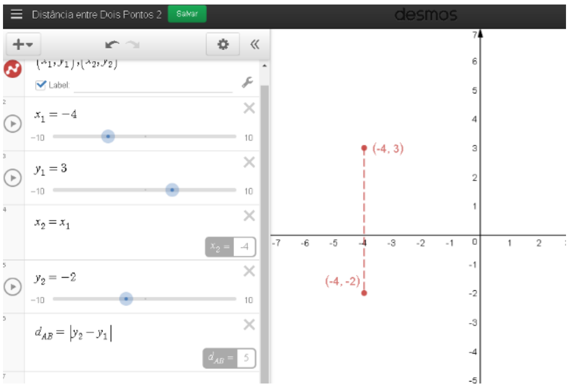


Imagem 18: Distância entre dois pontos
Fonte: https://www.desmos.com/calculator/ymwmkxxnvr.

Atividade 1.04 - Nesta atividade visamos construir a noção de distância entre dois pontos e será resumida em uma fórmula. Para isso utilizaremos o mapa anterior da cidade onde os alunos moram como motivação para o estudo de distância entre pontos. Queremos saber a distância da Escola, de coordenadas $A(0, -1)$, em linha reta até o Restaurante, no ponto $B(3, 3)$.

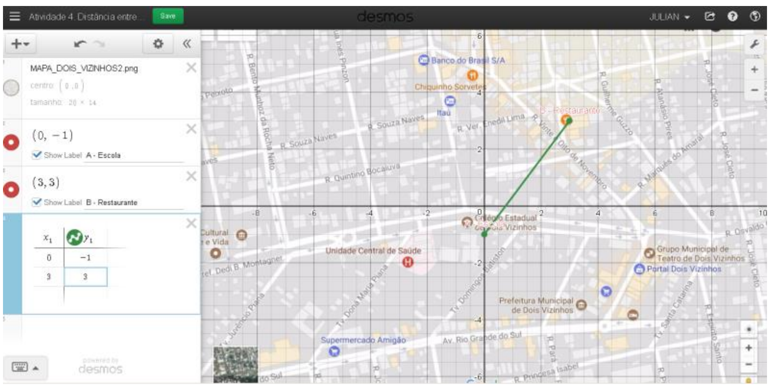


Imagem 19: Mapa da cidade em Desmos.
Fonte: www.desmos.com/calculator/pqzofuazqy.

Para isso queremos calcular a distância entre os pontos $A(0,-1)$ e $B(3,3)$. Para entender isso, aconselhamos a:

1. Insira uma tabela no editor do Desmos. Para isso, vá no símbolo de [+] e selecione a opção tabela, como indicado na Imagem 20 a seguir.

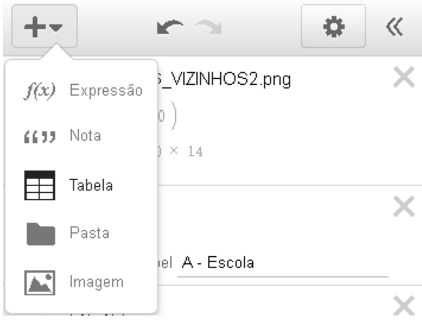
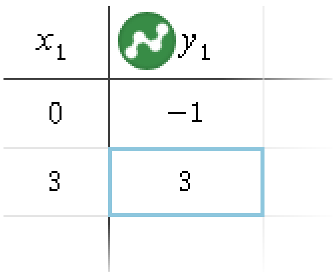


Imagem 20: Inserir tabela em Desmos.
Fonte: www.desmos.com/calculator.

2. Digite os pontos *A* e *B* na tabela inserida, imagem 21.



x_1	y_1
0	−1
3	3

Imagem 21: Tabela em Desmos.
Fonte: www.desmos.com/calculator.

3. Ligue os pontos *A* e *B* com um segmento (para isso vá no cabeçalho da tabela e mude o estilo entre pontos, imagem 22).

Imagem 22: Estilo da representação dos pontos na tabela.
Fonte: www.desmos.com/calculator.

4. Trace uma reta horizontal pelo ponto A (para isso digite $y = -1$).

5. Trace uma reta vertical pelo ponto B (para isso digite $x = 3$).

6. Localize o ponto $C(-1,3)$ do triângulo retângulo, ponto de interseção entre as retas $x = -1$ e $y = 3$.

7. Determinar a medida dos catetos como visto na página 36. E, em seguida, com a aplicação do teorema de Pitágoras, em que o “*quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma da medida dos quadrados dos catetos*” ou $c^2 = b^2 + a^2$ (EVES, 2004).

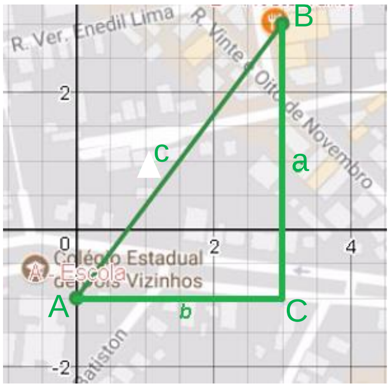


Imagem 23: Triângulo retângulo
Fonte: www.desmos.com/calculator.

8. Por fim, determine a distância entre os pontos do plano. O resultado esperado nesta atividade é igual 5 unidades de comprimento. Esta atividade pode ser acessada em: www.desmos.com/calculator/pqzofuazqy.

Atividade 1.05 - Nesta atividade visamos seguir a construção desenvolvida no item anterior, individualmente pelo aluno para ele internalizar a sequência, por isso queremos que ele calcule a distância entre dois pontos, desta forma o aluno compreenda a demonstração da fórmula.

Calcule a distância entre os pontos $A(-2, -3)$ e $B(4, 5)$.

1. Insira uma tabela no editor do Desmos.
2. Digite os pontos A e B na tabela inserida.
3. Ligue os pontos A e B com um segmento (para isso vá no cabeçalho da tabela e mude o estilo entre pontos).
4. Trace uma reta horizontal pelo ponto A (para isso digite $y = -3$).
5. Trace uma reta vertical pelo ponto B (para isso digite $x = 4$).
6. Localize o ponto $C(4, 2)$ do triângulo retângulo, ponto de interseção entre as retas $x = 4$ e $y = -3$. Desenhe esse triângulo *ABC*.
7. Determine a medida dos catetos do triângulo *ABC*.
8. Com a aplicação do teorema de Pitágoras determine a distância entre os pontos A e B. Atividade disponível em: www.desmos.com/calculator/jtwnxkvrim.

Atividade 1.06 - A fórmula da distância. Nesta atividade visamos abstrair a construção anterior, concluindo a fórmula da distância entre dois pontos quaisquer do plano.

De forma geral, determine a distância entre os pontos $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$.

1. Insira uma tabela no editor do Desmos.
2. Digite os pontos A e B na tabela inserida (crie controles deslizantes para x_a, y_a, x_b e y_b).
3. Ligue os pontos A e B com um segmento (para isso vá no cabeçalho da tabela e mude o estilo entre pontos).
4. Trace uma reta horizontal pelo ponto A (para isso digite $y = y_a$).
5. Trace uma reta vertical pelo ponto B (para isso digite $x = x_b$).
6. Localize o ponto $C(x_b, y_a)$ do triângulo retângulo, ponto de interseção entre as retas $x = y_a$ e $y = x_b$. Desenhe o triângulo *ABC*.
7. Discuta como pode ser calculado cada cateto.
8. Com a aplicação do teorema de Pitágoras, no triângulo *ABC*, conclua que a fórmula geral da distância entre os pontos A e B é dada por:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Que pode ser digitada diretamente no Desmos. A atividade pode ser consultada em: www.desmos.com/calculator/vuxzvbhuma. Pode também ser usada para exercícios de fixação como por exemplo calcular a distância entre os pontos $A(1, 2)$ e $B(3, -1)$.

4.1.2 Ponto Médio

Atividade 1.07 – Nesta atividade vamos construir a fórmula do ponto médio de um segmento. Segundo Barbosa (1995), chama-se "*ponto médio de um segmento AB a um ponto C deste segmento tal que* $\overline{AC} = \overline{BC}$" (p. 10). Para ter uma noção do ponto médio de um segmento visualizaremos primeiro no eixo x, das abscissas.

Sejam $A(a,0)$ e $B(b,0)$ pontos diferentes, $a \neq b$, sobre o eixo x, com ordenada $y = 0$ em ambos os pontos, significa que o segmento *AB* está sobre o eixo *x*.

Encontrar o ponto médio $C(c,0)$ do segmento *AB*. Para tal atividade, sugerimos utilizar apenas o eixo x, assim podemos ir em configurações e desabilitar o eixo y conforme indica a imagem seguinte.

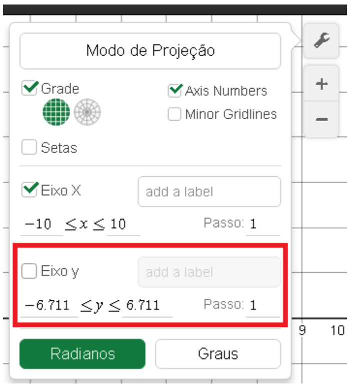


Imagem 24: Sem usar o eixo y
Fonte: www.desmos.com/calculator.

1. Inserir os pontos $A(a,0)$ e $B(b,0)$, criando os controles deslizantes para a e b.
2. Mover os pontos pelo eixo x, como melhor lhe convir.

Para determinar as coordenadas de C discutiremos que a distância do ponto A até C deverá ser igual a distância do ponto C até B.

3. Inserindo dois pontos um com coordenada $C'(a-k,0)$ e outro com coordenada $C"(b+k,0)$, bem como um controle deslizante para k, variando entre a e b.
4. Notar que ao mover o deslizante k, existe um lugar geométrico onde os pontos acima coincidem. Esse lugar é o ponto médio e $(a-k,0) = (b+k,0)$.
5. Algebricamente teremos que o ponto médio é quando ocorre $a - k = b + k$, isso nos gera $k = \frac{a-b}{2}$. Substituindo nas coordenadas de C' e C'' temos $C'\left(a - \frac{a-b}{2}, 0\right)$ e $C"\left(b + \frac{a-b}{2}, 0\right)$, logo $C'\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$ e $C"\left(\frac{b+a}{2}, 0\right)$ segue que $C' = C"$ vemos que o ponto médio é único e que a coordenada de C é $\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$.

A mesma situação é válida para o caso $A(0, a)$ e $B(0, b)$ pontos sobre o eixo y, encontramos o ponto médio $C(0, c)$ onde $c = \frac{a+b}{2}$, seguindo o mesmo raciocínio. Deixamos a cargo do leitor.

Mostraremos que para quaisquer pares de pontos do plano do tipo $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ teremos o ponto médio do segmento *AB* que não é paralelo ao eixo x, nem ao eixo y é dado por $C\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$. Para fixar essa ideia sugerimos a seguinte atividade:

Atividade 1.08 – Construção do ponto médio de um segmento. Sejam os pontos $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$ diferentes, determine o ponto médio $M(x_m, y_m)$ do segmento *AB*.

1. Insira os pontos $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$.
2. Crie controles deslizantes para x_a, y_a, x_b e y_b.
3. Seguir as construções realizadas anteriormente e concluir que as equações $x_m = \frac{x_a+x_b}{2}$ e $y_m = \frac{y_a+y_b}{2}$ determinam as coordenadas do ponto médio, que é o mesmo que inserir diretamente.
4. Inserir o ponto $M(x_m, y_m)$.

A atividade 1.08 pode ser consultada no seguinte link disponível em: www.desmos.com/calculator/fwbwvazyer.

Observe que variando o ponto A ou B teremos que M também varia, desta forma podemos determinar todos os pontos do segmento *AB*. Como a reta determinado por AB contém o segmento $\overline{AB}$, nos induz a pensar que podemos determinar todos os pontos dessa reta fora do segmento $\overline{AB}$. Fica a critério do leitor determinar todos os pontos dessa reta usando o conceito de ponto médio.

Atividade 1.09 - No plano cartesiano, os pontos $A(-2, 5)$ e $B(6, 1)$ representam duas casas de uma propriedade rural. Deseja-se perfurar um poço equidistante às casas, de maneira que essa distância seja a menor possível. Quais devem ser as coordenadas do ponto *M* onde o poço deve ser construído.

1. Selecione a imagem de duas casinhas simples e do poço, pode-se usar qualquer imagem disponível na internet.
2. Posicione as casas em suas respectivas coordenadas, nesse caso $A(-2, 5)$ e $B(6, 1)$.

3. Questione aos alunos como é possível saber o local exato para inserir o poço. Qual o significado de equidistante? Para chegar à conclusão que é o ponto médio.

4. Insira o poço nas coordenadas médias dos pontos. Fazendo os cálculos $M\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{5+1}{2}\right)$. As coordenadas do poço podem ser inseridas do seguinte modo, imagem 27:

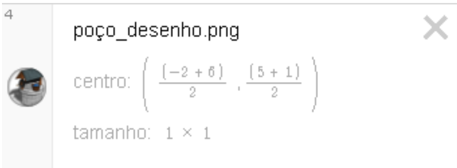


Imagem 25: Posição do centro do poço
Fonte: www.desmos.com/calculator/o3txe7jork.

5. Por fim, as coordenadas do ponto médio são, $M(2, 3)$. Ao final a atividade, na imagem 28, fica do seguinte modo:

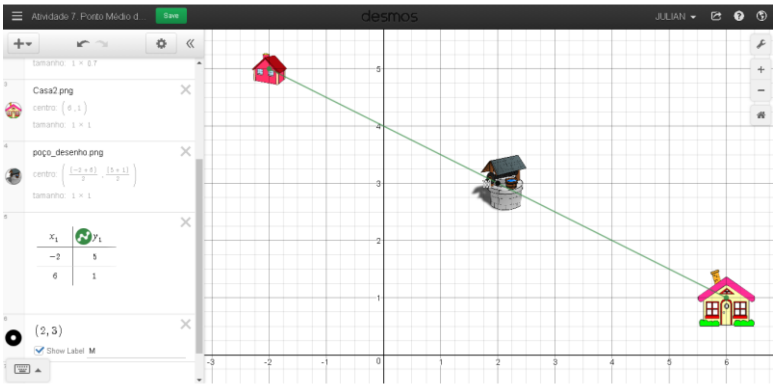


Imagem 26: Localização do poço
Fonte: www.desmos.com/calculator/o3txe7jork.

4.2 RETAS

Vimos, anteriormente, que um ponto é caracterizado, no plano cartesiano, por um par ordenado de números reais, onde conseguimos caracterizar todos os pontos de um segmento e fora dele. Aqui, queremos caracterizar a reta como "*um conjunto de pares ordenados que satisfazem uma equação de primeiro grau*" do tipo $ax + by + c = 0$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ (BEZERRA, 2010, p. 21). E que, caso $a = 0$ ou $b = 0$ teremos retas paralelas aos eixos x e y, respectivamente.

Para justificar isso, por exemplo, com o uso do Desmos podemos construir retas perpendicular ao eixo x, para isso, podemos inserir vários pontos de coordenadas $(a,-3)$, $(a,-2)$, $(a,-1)$, $(a,0)$, $(a,1)$, $(a,2)$, $(a,3)$,...etc. Assim, vemos uma reta como um conjunto de pontos e para representar o conjunto de todos esses pontos, basta digitar $x = a$, em que a é um número real qualquer. Na imagem abaixo, vemos uma reta construída para $x = 1.5$.

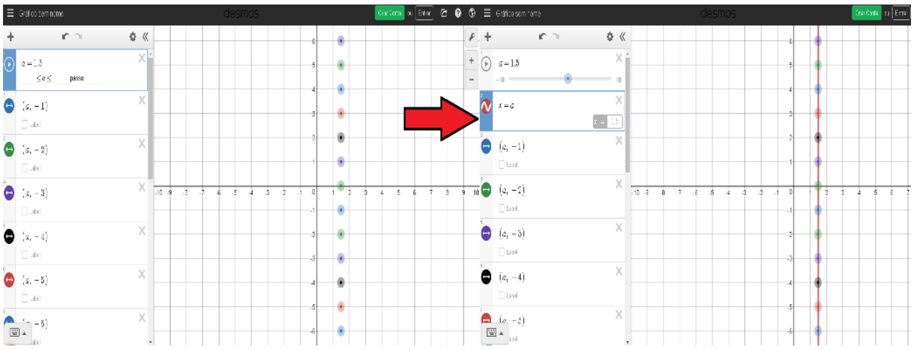


Imagem 27: Reta perpendicular a x
Fonte: www.desmos.om/calculator

O mesmo ocorre com retas perpendiculares ao eixo y. Para construir uma reta perpendicular ao eixo y, fazemos análogo para os pontos $(-3,b)$, $(-2,b)$, $(-1,b)$, $(0,b)$, $(1,b)$, $(2,b)$, $(3,b)$, ...etc. Para representar o conjunto de todos os pontos, basta digitar $y = b$, em que b é um número real e ver sua construção.

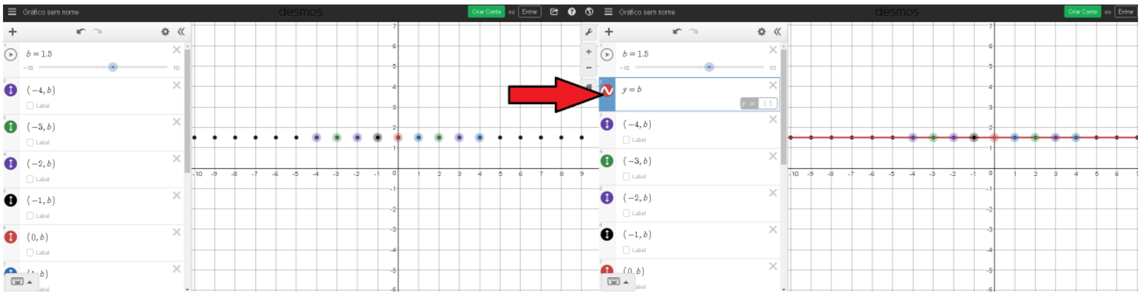


Imagem 28: Reta perpendicular a y
Fonte: www.desmos.com/calculator.

Podemos construir uma reta com base em seu coeficiente angular, no caso da reta não ser vertical ou horizontal. Consideremos dois pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ sobre uma reta r. A equação geral da reta será: $ax + by + c = 0$. Para verificar isso, seja C um ponto genérico alinhado aos pontos A e B como mostra na imagem.

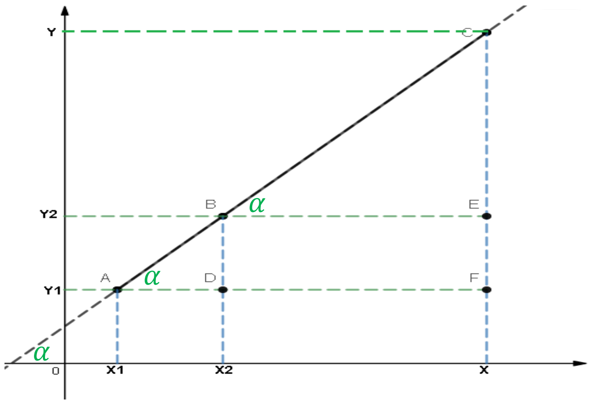


Imagem 29: Inclinação da reta
Fonte: www.desmos.com/calculator

O coeficiente angular da reta, que pode ser entendido como inclinação ou declinação, comumente representado pela letra m. Tal coeficiente angular da reta determinada pelos pontos A e B será calculado por $m_{AB} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, sempre que $x_1 \neq x_2$. Observação: essa definição é a mesma para a tangente do ângulo, onde $\tan\alpha = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, logo $\tan\alpha = m$. Assim, com qualquer outro ponto genérico $C(x, y)$, temos $M_{AC} = \frac{y-y_1}{x-x_1}$, como $m_{AC} = mAB = m$. Podemos, também, formar a equação geral da reta com uma expressão do tipo $y - y_1 = m(x - x_1)$. Para representar isso, sugerimos a seguinte atividade.

Atividade 2.01 - Para entendermos o significado da caracterização da reta é necessário verificar que uma reta é um conjunto de pontos que satisfazem a equação $ax + by + c = 0$, ou do tipo $y = mx + n$. Por isso sugerimos que:

1. Inserir pontos do tipo $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ diferentes. Também os respectivos controles deslizantes, porém fixos no momento.
2. Queremos traçar uma reta que passe pelos pontos A e B. Por isso inserimos um ponto $C(x_3, y_3)$. Com os deslizantes de x_3 e y_3. Fazer a discussão que o ponto C devem estar alinhados aos demais pontos. Por isso, devemos calcular o coeficiente angular dos pontos A e B. Inserindo $m_{AB} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.
3. Assim, a discussão volta-se para o ponto $C(x_3, y_3)$, onde determinamos o valor de y_3, pois este, junto com o ponto A ou B, deve corresponder a mesma inclinação dos pontos A e B, ou seja $m_{AB} = m_{BC}$.

4. Por isso, considerando os pontos B e C, teremos $m_{BC} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$, como os pontos A, B e C estão alinhados temos $m_{AC} = m_{BC}$ que resulta em $y_3 = m_{AB}(x_3 - x_2) + y_2$, variando x_3 neste caso.
5. Assim, para cada valor de x_3 teremos um y_3, logo o ponto $C(x_3, y_3)$ está alinhado aos dos pontos A e B. Verificar movimentando x_3.
6. Podemos também criar uma tabela inserindo vários valores. Conforme e imagem seguinte:

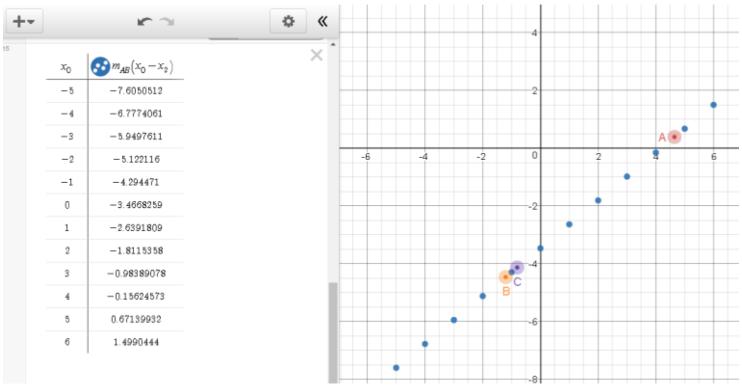


Imagem 30: Pontos na tabela
Fonte: www.desmos.com/calculator/kmgqtmj0ls.

7. Pode-se também com a tabela criar uma linha de pontos. Colocando a noção de que a reta é um conjunto de pontos que satisfazem a equação $y_3 = m_{AB}(x_3 - x_2) + y_2$. No cabeçalho da tabela, conforme a imagem abaixo:

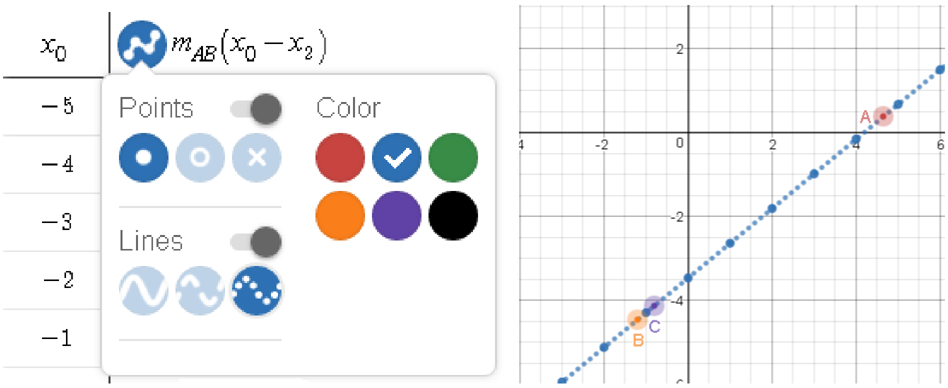


Imagem 31: Linha entre pontos na tabela
Fonte: www.desmos.com/calculator/kmgqtmj0ls.

Atividade 2.02 – Construção da reta. Sejam os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ diferentes, determine a equação da reta que passa pelos pontos *A* e *B*. Indicamos os seguintes passos:

1. Inserir um ponto (x_1, y_1) com controles deslizantes para x_1 e y_1.
2. Inserir um ponto (x_2, y_2) com controles deslizantes para x_2 e y_2.

3. Inserir a equação $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ para calcular o coeficiente angular.
4. Inserir a equação do tipo $y - y_1 = m(x - x_1)$.
5. Verificar o resultado para quaisquer posições dos pontos *A* e *B*.

Tal atividade o leitor encontra disponível no endereço indicado pelo link: www.desmos.com/calculator/z167neko4w.

A equação da reta que passa pelos pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ é sempre associada a equação geral do tipo $ax + by + c = 0$ ou uma equação reduzida do tipo $y = mx + n$. Com a equação da reta anterior, visto no item (4) da atividade 2.02, podemos montar tanto a equação reduzida da reta como também a equação geral. Para montar a equação reduzida precisamos apenas escrever a equação $y = mx - mx_1 + y_1$, assim temos o coeficiente angular $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e o coeficiente linear $n = -mx_1 + y_1$, para representar a equação reduzida do tipo $y = mx + n$.

Atividade 2.03 – equação reduzida. Sejam os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, verifique a equação da reta na forma $y = mx + n$.

1. Inserir um ponto (x_1, y_1) com controles deslizantes para x_1 e y_1.
2. Inserir um ponto (x_2, y_2) com controles deslizantes para x_2 e y_2.
3. Afastar os pontos para não ficar um sobre o outro.
4. Insira o coeficiente angular $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
5. Inserir o coeficiente linear $n = -mx_1 + y_1$.
6. Inserir a equação do tipo $y = mx + n$.
7. Verificar o resultado. Esta atividade encontra-se disponível no seguinte link: www.desmos.com/calculator/lklmhiz8yq.

Atividade 2.04 – Equação da reta. Seja os pontos $A(2, 3)$ e $B(3, 7)$ determine a equação reduzida que passa pelos pontos *A* e *B*. Para isso:

1. Insira os pontos $(2, 3)$ e $(3, 7)$ em Desmos.
2. Verifique o coeficiente angular $m = 4$.
3. Verifique o coeficiente linear $n = -5$.
4. Escreva a equação da reta $y = mx + n$ ou a equação $y = 4x - 5$.
5. Verifique o resultado.

Para representar a equação geral podemos colocando o coeficiente angular na equação. Assim, tem-se uma expressão do tipo:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \text{com } x_1 \neq x_2$$

Que em resumo apresenta a seguinte expressão geral:

$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + x_1y_2 - x_2y_1 = 0$$

Assim, teremos: $y_1 - y_2 = a$, $x_2 - x_1 = b$, e $x_1y_2 - x_2y_1 = c$ na equação anterior obtemos: $ax + by + c = 0$ onde a, b e $c \in R$ com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Atividade 2.05 - Equação geral da reta. Sejam os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ traçar uma reta que passa pelos pontos indicados.

1. Inserir os pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ no editor do Desmos.
2. Insira controles deslizantes para x_1, y_1, x_2 e y_2.
3. Insira os valores de $a = y_1 - y_2$.
4. Insira os valores de $b = x_2 - x_1$.
5. Insira os valores de $c = x_1y_2 - x_2y_1$.
6. Inserir a equações geral da reta $ax + by + c = 0$. A atividade pode ser consultada em: www.desmos.com/calculator/mden9oix2w.

Atividade 2.06 - Nesta atividade, vamos construir o esboço da lateral uma casa cujos pontos do teto são $A(0,2)$, $B(3,3)$, $C(6,2)$ e da parede são $D(1,0)$, $E(1,2)$, $F(5,0)$ e $G(5,2)$. O objetivo aqui é verificar a construção de retas paralelas aos eixos x e y.

1. Para isso, coloque todos os pontos mencionados no Desmos.
2. Determine a equação que passa pelos AB, BC, AC.
3. Insira todas as equações no editor do Desmos. O resultado inicial é um conjunto de retas como a figura a seguir.

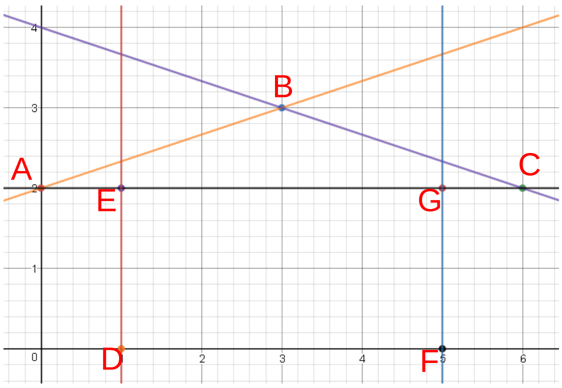


Imagem 32: Construção lateral da casa
Fonte: www.desmos.com/calculator/3dampirwp0.

4. Para deixar somente a casa desenhada é necessário definir os intervalos que precisamos mostrar. Por exemplo, na reta AB queremos mostrar

apenas o intervalo em que $0 \leq x \leq 3$. Para isso, basta digitar o intervalo entre chaves ao lado da equação $\{0 \leq x \leq 3\}$.

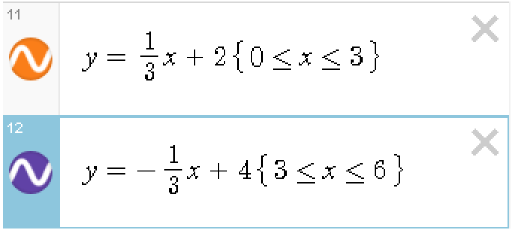
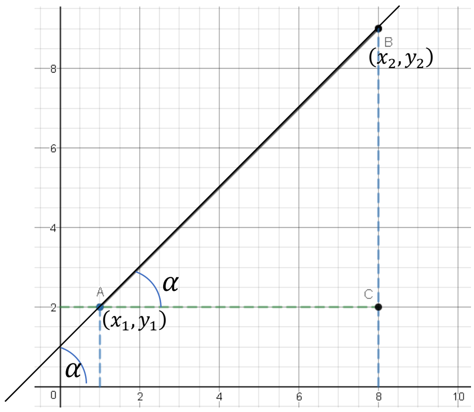


Imagem 33: Intervalos que aparecem as retas.
Fonte: www.desmos.com/calculator/3dampirwp0.

5. Para as retas $x = 1$, $x = 5$ e $y = 2$ definir os intervalos $0 \leq y \leq 2$ e $0 \leq x \leq 6$, respectivamente. Pode-se fazer também uma reta $y = 0$ definiida no intervalo de $1 \leq x \leq 5$. A atividade pode ser encontrada no link: www.desmos.com/calculator/3dampirwp0.

Podemos ainda saber o ângulo de inclinação da reta com os eixos ordenados. Seja α a medida do ângulo que a reta *r* forma com o eixo *x*. Esta medida α é denominada inclinação da reta *r*, considerada a partir do eixo *x* para a reta r o ângulo agudo.

Seja r a reta determinada por $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$. O coeficiente angular ou a inclinação desta reta r é o número real $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ que expressa a tangente trigonométrica de sua inclinação α, como visto na imagem 35.



$$\tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Imagem 34: Inclinação da reta
Fonte: www.desmos.com/calculator.

Assim, podemos concluir que a equação da reta é $y - y_1 = m(x - x_1)$ e que o ângulo α da reta com o eixo x é dado por $m = \tan \alpha \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1} m$.

Atividade 2.07 - Inclinação da reta. Verifique variando o coeficiente angular m o comportamento de uma reta que passa por $A(3, 4)$.

1. Insira o ponto (3, 4) no editor do Desmos.
2. Insira a equação $y - 4 = m(x - 3)$.

3. Crie um deslizante para o coeficiente m. A atividade pode ser encontrada em: www.desmos.com/calculator/ceoinq2ecq.

Atividade 2.08 – Ângulos e retas. Verifica a inclinação da reta $y = mx + 3$ onde $m = \tan\alpha$ para os ângulos de 30º, 60º, 75º e 120º. Nesta atividade, pretende-se verificar o coeficiente angular $m = \tan\alpha$ na equação reduzida da reta. Para isso teremos que:

1. Insira a letra α ‘alpha’ no editor do Desmos (para isso apenas digite “alpha”).
2. Mudar a medida angular do aplicativo. Para isso, ir na ferramenta e clicar em graus como mostra a figura.

Imagem 35: Utilização de graus
Fonte: www.desmos.com/calculator

3. Inserir o coeficiente angular $m = \tan\alpha$.
4. Inserir a equação da reta $y = mx + 3$.
5. Verificar os resultados de inclinação. A mesma atividade pode ser realizada com o conceito de radianos. Tal atividade pode ser encontrada em: www.desmos.com/calculator/afhqh0oet6.

4.2.1 Posições relativas entre duas retas

Dadas duas retas no plano cartesiano, vamos estudar nesta seção como se relacionam.

Atividade 2.09 - Retas concorrentes. *Duas retas* r *e* s *são ditas concorrentes se existe um único ponto* P *tal que* $P \in r$ *e* $P \in s$*, ou seja,* $r \cap s = \{P\}$. Sejam as retas $r: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ concorrentes em um ponto $P(x_1, y_1)$, conforme a imagem 37. Nesta atividade pretendemos elucidar essa definição, portanto, sugerimos os seguintes passos:

1. Inserir a reta *r* de equação $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, com controles deslizantes para a_1, b_1 e c_1.
2. Inserir a reta *s* de equação $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, com controles deslizantes para a_2, b_2 e c_2.
3. Inicialmente só com os passos acima, vemos duas retas **coincidentes**, pois $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$ e $c_1 = kc_2$, para todo $k \in \mathbb{R}$. (Pode-se criar um deslizante para k na equação $ka_1x + kb_1y + kc_1 = 0$, mostrando que a reta não muda).
4. Movendo, apenas, c_1 ou c_2 vemos retas **paralelas**.
5. E por fim, movendo qualquer um dos $a_1, a_2, b_1 \text{ou } b_2$, vemos, assim, retas **concorrentes**.

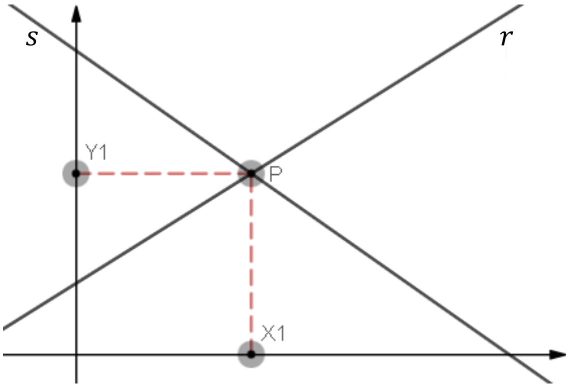


Imagem 36: Retas concorrentes
Fonte: www.desmos.com/calculator.

Assim, como P satisfaz $r: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e também satisfaz $s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ então, as coordenadas de $P(x_1, y_1)$ são soluções do sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Para resolver este sistema, de forma geral, podemos multiplicar r por b_2 e, também, multiplicar s por $-b_1$, obtendo o sistema

$$\begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y + b_2c_1 = 0 \\ -a_2b_1x - b_1b_2y - b_1c_2 = 0 \end{cases}$$

Ao realizar a adição das equações, eliminamos *y*, ficamos com $x = \frac{c_2b_1 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ quando $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Eliminamos a variável *x* nas equações, multiplicando a equação da reta r por a_2 e da reta s por $-a_1$, obtendo o sistema

$$\begin{cases} a_1a_2x + a_2b_1y + a_2c_1 = 0 \\ -a_1a_2x - a_1b_2y - a_1c_2 = 0 \end{cases}$$

Ao realizar a adição de ambas as equações, eliminamos x, ficamos com $y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$ quando $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

O ponto de interseção das retas r e s pode ser escrito como $x_1 = \frac{c_2b_1 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ e $y_1 = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$, então $P(x_1, y_1)$ sempre que $a_1b_2 \neq a_2b_1$. Podemos dizer também, que duas retas são concorrentes quando o coeficiente angular m das retas forem diferentes.

Atividade 2.10 – Determinar o ponto de interseção das retas, esta atividade objetiva a retomada de conceitos algébricos e verificar sua resposta com o Desmos:

a) $r: x + y + 1 = 0$ e $s: x - 2y + 1 = 0$.
b) $r: x = 2$ e $s: 2x - 1 = y$.
c) $r: 2y - x = 0$ e $s: y = \frac{-x+5}{3}$.
d) $r: -6x + 3y - 4 = 0$ e $s: 6x + 6y - 1 = 0$.

1. Resolva algebricamente cada sistema de equações.
2. Escreva cada equação corretamente no editor do Desmos.
3. Verifique cada solução encontrada.

4.2.2 Ângulo entre duas retas

Nesta seção estudaremos o ângulo determinado entre duas retas do plano cartesiano.

Atividade 2.11 – Transferidor. Esta atividade visa a criação de um transferidor virtual para entender a noção de ângulos. Para isso faremos o seguinte:

1. Inserir a letra α que determina um ângulo com controle deslizante (basta digitar ‘alpha’) em Desmos.
2. Configurar o intervalo de variação do deslizante α para o intervalo $0 \leq \alpha \leq 180$ previamente modificar para graus no *software*.
3. Inserir a equação $m = \tan \alpha$.

4. Queremos que o vértice desse transferidor seja no ponto (a, b), assim inserimos esse ponto bem como os deslizantes de a e b.
5. Inserir uma equação do tipo $y = m(x - a) + b$ definida no intervalo $y > b$.
6. Para que fique com um arco podemos inserir uma equação do tipo $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1$ definido com o intervalo $\cos \alpha \leq x - a \leq 1$ e ainda $y - b \geq 0$.
7. E uma reta para a base do transferidor $y = b$ definida no intervalo $x \geq a$.
8. É possível armazenar as equações deste transferidor em uma pasta própria do Desmos. Para que seja possível utilizá-lo em outras atividades sobre ângulo entre retas. Disponibilizamos este transferidor em: www.desmos.com/calculator/ovtxxrsmar.

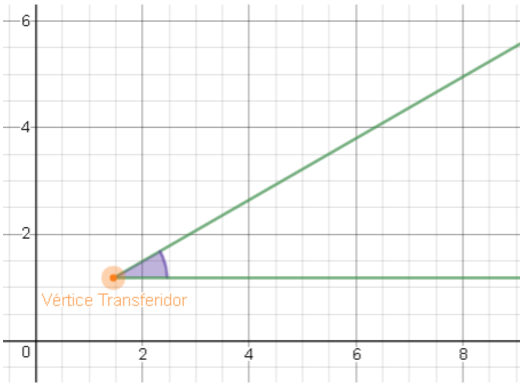


Imagem 37: Transferidor Virtual
Fonte: www.desmos.com/calculator/ovtxxrsmar

No link do transferidor podemos realizar várias outras atividades, como exemplo: queremos verificar o ângulo entre as retas $r: x - y - 3 = 0$ e $s: x - \sqrt{3}y - 1 = 0$. Para isso, teremos que:

1. Acessar o transferidor em: www.desmos.com/calculator/ovtxxrsmar.
2. Inserir a equação da reta $r: x - y - 3 = 0$.
3. Inserir a equação da reta $s: x - \sqrt{3}y - 1 = 0$.
4. Ao colocar o vértice do transferidor no ponto (1, 0) verifica-se que o ângulo que a reta s forma com o eixo x é de 30°.
5. Ao colocar o vértice do transferidor no ponto (3, 0) verifica-se que o ângulo que a reta r forma com o eixo x é de 45°.
6. Ao colocar o vértice do transferidor no ponto de interseção das duas retas, verifica-se, com facilidade, que o ângulo agudo entre essas duas retas é a diferença entre os ângulos, ou seja, 15°.

Pode-se, também, definir uma fórmula para calcular o ângulo entre duas retas. Para isso, seja α o ângulo formado por duas retas concorrentes r e s, não perpendiculares ao eixo das abscissas e α_r e α_s os ângulos que as mesmas formam, respectivamente, como sentido positivo do eixo das abscissas.

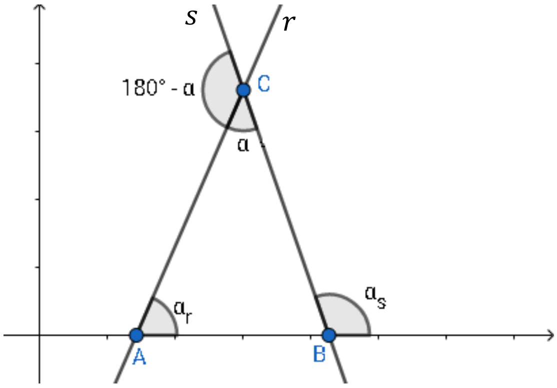


Imagem 38: Relação entre ângulos
Fonte: www.desmos.com/calculator.

No triângulo ABC, o ângulo α_s é externo, portanto, igual à soma dos ângulos internos não adjacentes: $\alpha_s = \alpha_r + \alpha \Leftrightarrow \alpha = \alpha_s - \alpha_r$. Se $\alpha = \alpha_s - \alpha_r$, então $\tan\alpha = \tan(\alpha_s - \alpha_r) = \frac{\tan\alpha_s - \tan\alpha_r}{1+\tan\alpha_s \cdot \tan\alpha_r}$. Como $\tan\alpha_s = m_s$ e $\tan\alpha_r = m_r$ teremos:

$$\tan\alpha = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}$$

Observações:

(1) $\tan\alpha > 0$ então α é um ângulo agudo.

(2) $\tan\alpha < 0$ então α é um ângulo obtuso.

Logo, $\tan\alpha = \left|\frac{m_s - m_r}{1+m_s \cdot m_r}\right|$, o ângulo calculado sempre será agudo, uma vez que $\tan\alpha = -\tan(180° - \alpha)$.

Atividade 2.12 – O aplicativo Desmos não verifica o ângulo entre as retas. No entanto, decidimos aqui criar uma maneira de calcular. Portanto, devemos calcular o ângulo entre as retas $r: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e a reta $s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

1. Inserir as retas $r: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$.
2. Criar controles deslizantes para $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$.
3. Calcular os coeficientes de r e s $m_r = -\frac{a_1}{b_1}$ e $m_s = -\frac{a_2}{b_2}$.
4. Inserir a fórmula $m = \left|\frac{m_s - m_r}{1+m_r \cdot m_s}\right|$.

5. Inserir a inversa da tangente $\alpha = \tan^{-1} m$. O link para a atividade é www.desmos.com/calculator/iqep9oo85b.

Atividade 2.12 – parte 2. Determine o ângulo formado pelas retas $r: 3x + y - 5 = 0$ e $s: 2x - y + 1 = 0$.

Solução:

Como $m = -\frac{a}{b}$, temos $m_r = -\frac{3}{1} \Rightarrow m_r = -3$ e $m_s = \frac{-2}{-1} \Rightarrow m_s = 2$.

Logo: $\tan\alpha = \left|\frac{-3-2}{1+(-3)\cdot 2}\right| = \left|-\frac{5}{-5}\right| = |1| = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$.

Como temos construído na atividade anterior uma fórmula junto ao Desmos para calcular isso, podemos apenas inserir os valores para $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ e verificar o resultado.

Observação: Se uma das retas *r* ou *s* for perpendicular ao eixo das abcissas, então essa reta não terá coeficiente angular. Neste caso, teremos:

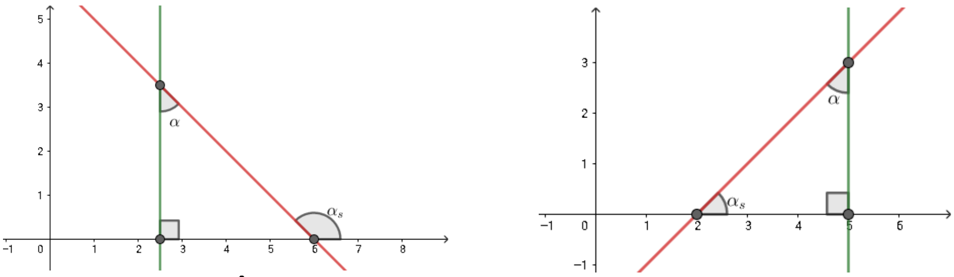


Imagem 39: Ângulo entre retas com uma perpendicular a abscissa
Fonte: www.desmos.com/calculator.

Caso 1: Declinação

$$\alpha = \alpha_s - 90°$$
$$\tan\alpha = \tan(\alpha - 90°)$$
$$\tan\alpha = -\cot\alpha_s = -\frac{1}{\tan\alpha_s} = -\frac{1}{m_s}$$

Caso 2: Inclinação

$$\alpha = 90° - \alpha_s$$
$$\tan\alpha = \tan(90° - \alpha_s)$$
$$\tan\alpha = \cot\alpha_s = \frac{1}{\tan\alpha_s} = \frac{1}{m_s}$$

As formulas acima podem ser resumidas em:

$$\tan\alpha = \left|\frac{1}{m_s}\right|$$

4.2.3 Retas paralelas

Duas retas coplanares *r* e *s* com suas inclinações definidas são paralelas entre si, se, e somente se, seus coeficientes angulares forem iguais. Como visto na atividade 2.09. Então, $r \parallel s \Rightarrow m_r = m_s$.

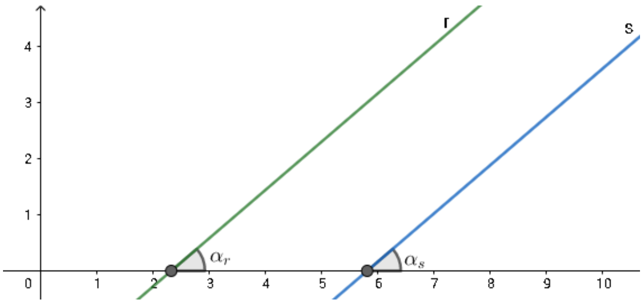


Imagem 40: Retas paralelas
Fonte: www.desmos.com/calculator

Observação: para retas perpendiculares ao eixo das abscissas, as equações serão, respectivamente, $x = x_r$ e $x = x_s$, e são paralelas neste caso o coeficiente angular é nulo, conforme a imagem:

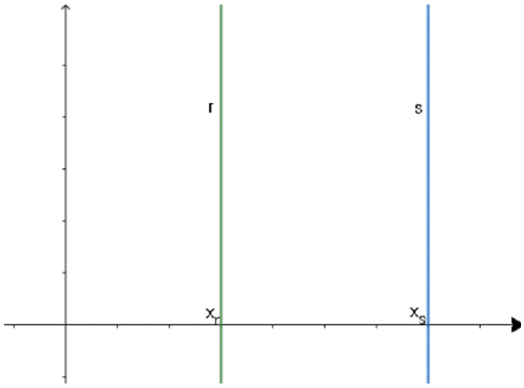


Imagem 41:Retas verticais paralelas
Fonte: www.desmos.com/calculator.

Atividade 2.13 – Verifique em Desmos que as retas $r: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ são paralelas se, somente se, $a_1 = ka_2$ e $b_1 = kb_2$, para todo $k \in \mathbb{R}$.

1. Inserir as retas $r: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$.
2. Inserir os controles deslizantes de $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$.
3. No controle deslizante de a_1 e b_1 colocar $a_1 = ka_2$ e $b_1 = kb_2$.
4. Inserir um controle deslizante para k.
5. Verificar todas as possibilidades. www.desmos.com/calculator/i3kfpkxtmt.

Atividade 2.14 – Obtenha a equação geral da reta *r* que passa pelo ponto $A(3, 2)$ e é paralela a reta $s: 6x - 2y - 1 = 0$.

1. Inserir a reta $s: 6x - 2y - 1 = 0$.
2. Inserir o ponto (3, 2).
3. Inserir a reta $r:\ 6x - 2y + c = 0$. Coloque um controle deslizante para c.
4. Encontrar o valor de c desejado algebricamente. Verifique o resultado modificando o deslizante c. www.desmos.com/calculator/bk7fh97sdl.

4.2.4 Retas perpendiculares

Sabemos que *duas retas r e s são perpendiculares entre si se, e somente se, o produto de seus coeficientes angulares for igual a* -1*.*

$$r \perp s \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1 \Leftrightarrow m_r = -\frac{1}{m_s}, m_s \neq 0$$

Para inserir essa noção de perpendicularismo podemos montar um "*esquadro virtual*", o qual será construído usando a perpendicularidade dos eixos ordenados, visto que já são definidos como perpendiculares. Para isso exploraremos todas as ideias de retas que já estudamos.

1. Com o Desmos em sua tela inicial, inserir uma reta do tipo $r: y = mx$ com o controle deslizante para m.
2. O deslizante de m deve ser zerado para que essa reta r coincida com o eixo x.
3. Queremos agora uma reta s que coincida com o eixo y e seja sempre perpendicular a r. Por isso escreveremos, $s: x = -my$, a reta escrita nessa forma evita que haja divisão por zero.
4. Dessa forma temos duas retas r e s que são sempre perpendiculares, em função de m, mas que estão fixas no ponto $(0,0)$. Queremos agora mover as duas retas para qualquer ponto do plano, para verificar a perpendicularidade.
5. Assim, inserimos um ponto (a, b), já com os deslizantes de a e b, tomando valores reais.
6. Modificar as equações anteriores em (1) e (3) para $r: y - b = m(x - a)$.
7. E a outra equação para $s: x - a = -m(y - b)$. Assim esse esquadro se movimenta, por translação, em qualquer ponto do plano. Este *esquadro virtual* está disponível no seguinte link: www.desmos.com/calculator/pkwx4n5kwh.

O “*esquadro*” podo ser utilizado em qualquer atividade, como exemplo: queremos verificar se as retas $t\colon y = 2x + 1$ e $u\colon y = -2x + 1$ são perpendiculares ou não. Para isso, basta que:

1. No link do” *esquadro*”: www.desmos.com/calculator/pkwx4n5kwh.
2. Inserir as equações das retas t e u.
3. Colocar o ‘esquadro’ no ponto de interseção das retas t e u, $(0, 1)$.
4. Verificar que as retas não se encaixam no *“esquadro”*.
5. Aritmeticamente teremos que $m_r = 2$ e $m_s = -2$ e logo $m_r \cdot m_s = -4$ o que mostra que não são perpendiculares.

Outra atividade que podemos usar essa ideia é verificar se as retas $r\colon y = x + 1$ e $s\colon y = -x + 2$ são perpendiculares. Assim, faremos:

1. No link do ‘esquadro’: www.desmos.com/calculator/pkwx4n5kwh.
2. Inserir as equações das retas r e s.
3. Colocar o “*esquadro*” no ponto de interseção das retas r e s, $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.
4. Verificar que as retas se encaixam perfeitamente no “*esquadro*”.
5. Aritmeticamente teremos que $m_r = 1$ e $m_s = -1$. Logo, $m_r \cdot m_s = -1$ que satisfaz a condição de perpendicularismo.

Atividade 2.15 – Verifique em Desmos a condição de perpendicularismo para as retas $y = m_1x + 1$ e $y = m_2x + 1$.

1. Inserir as retas $y = m_1x + 1$ e $y = m_2x + 1$.
2. Crias controles deslizantes para m_1 e m_2.
3. No controle deslizante de m_2 colocar a condição de perpendicularismo $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.
4. Verificar alterando os valores em m_1.

Atividade 2.16 – Verifique em Desmos se as retas $ax + by + c = 0$ e $bx - ay + c = 0$ são perpendiculares.

1. Inserir as retas $ax + by + c = 0$ e $bx - ay + c = 0$.
2. Criar os controles deslizantes para a, b e c.
3. Verificar o que acontece ao modificar os valores de a, b e c no Desmos.

Atividade 2.17 – Obtenha a equação geral da reta r que passa por $A(3, -2)$ e é perpendicular a reta $t\colon 6x - 2y - 1 = 0$.

1. Inserir o ponto (3, 2) no Desmos.

2. Inserir no Desmos a equação da reta $6x - 2y - 1 = 0$
3. Inserir uma reta da forma $2x + 6y + c = 0$. Criar um deslizante para c para procurar o valor para a equação.
4. Encontrar o valor de c algebricamente. Inserir o valor encontrado no deslizante c, que conclui o problema.

4.2.5 Distância entre ponto e reta

Sejam a reta r e o ponto P não pertencente a r. A distância do ponto P à reta r, representado por $d_{P,r}$, *é a distância entre o ponto P considerado e a sua projeção ortogonal P' sobre a reta r.* Considerando a situação no plano cartesiano, temos:

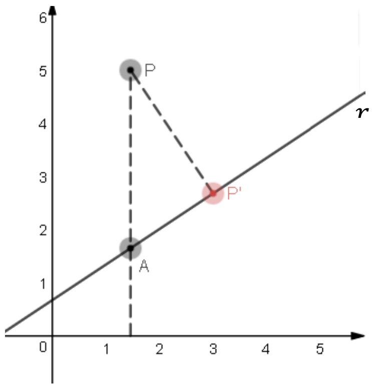


Imagem 42: Distância entre ponto e reta
Fonte: www.desmos.com/calculator.

Para esta proposição podemos encontrar a reta perpendicular à reta r dada que passa pelo ponto P em questão. Em seguida, encontrar o ponto de interseção entre as retas, e, naturalmente calcular a distância entre dois pontos. Por isso, sugerimos a seguinte atividade.

Atividade 2.18 – Calcular a distância do ponto $P(x_1, y_1)$ a reta $r: ax + by + c = 0$. Para isso, a sugestão é que:

1. Inserir o ponto $P(x_1, y_1)$ no Desmos, bem como os controles deslizantes de x_1 e y_1.
2. Inserir duas equações da reta uma na forma $r: ax + by + c = 0$ e outra na forma $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ para organizarmos os dados.

3. Queremos que a reta $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ seja perpendicular a outra reta. Portanto, devemos por nos controles deslizantes $a_1 = b$, $b_1 = -a$, verificado na atividade 2.16.
4. Para que esta reta $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ passe pelo ponto P devemos ter $c_1 = ay_1 - bx_1$.
5. Para encontrar o ponto de interseção das duas retas podemos usar a expressão: $x_2 = \frac{cb_1 - bc_1}{a_1b - ab_1}$ e $y_2 = \frac{ac_1 - a_1c}{a_{1b} - ab_1}$ com o ponto (x_2, y_2).
6. Feito isso, basta inserir a fórmula da distância entre dois pontos $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ para obter o resultado. Esta atividade encontra-se disponível em: https://www.desmos.com/calculator/u6fe72vapv.

Não obstante, podemos observar que não é necessário o uso de fórmulas para resolver esse problema, basta usar os conhecimentos pré-estabelecido. Contudo, queremos aqui deduzir a fórmula exclusiva para esse cálculo, procederemos como segue: substituir os pontos x_2 e y_2 do passo 5 e 6 chegamos na fórmula indicada abaixo.

Seja um ponto $P(x_1, y_1)$ e uma reta $s: ax + by + c = 0$, a distância entre o ponto P e a reta r é dada por:

$$d_{P,r} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Convenhamos que a demonstração algébrica desta fórmula é, na visão dos alunos, um tanto exaustiva no Ensino Médio e foge ao objetivo desse texto. O anexo D deixa claro esta demonstração algébrica. Contudo, vemos o quão útil é esta fórmula ao calcular distâncias entre pontos e retas. Por exemplo, podemos inserir a fórmula acima na atividade anterior e verificar os resultados.

Calcular a distância do ponto $A(-2, 5)$ à reta $r: 3x - 4y - 24 = 0$. Para isto, basta colocar a fórmula no Desmos:

$$d_{A,r} = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot (-2) - 4 \cdot (5) - 24|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-50|}{\sqrt{25}} = |-10| = 10$$

O resultado pode ser verificado em Desmos.

4.3 CIRCUNFERÊNCIA

A circunferência, historicamente, foi considerada durante muitos anos, uma figura geométrica perfeita. Na antiguidade foi estudada por diversos povos, os quais sabiam dividi-la em partes congruentes, entre as quais em sessenta partes, surgindo assim o sistema sexagesimal de contagem, caso da medição de ângulos e de tempo (EVES, 2004).

Para a definição de circunferência temos que *é o lugar geométrico de todos os pontos de um plano α, cuja distância a um ponto C, desse plano, é uma constante positiva* r. O ponto C é denominado centro e a constante r denominado raio da circunferência (BARBOSA, 1995).

4.3.1 Equação da Circunferência

Consideremos, no plano cartesiano, um ponto genérico $P(x, y)$ da circunferência de centro $C(x_c, y_c)$ e raio r, $r > 0$.

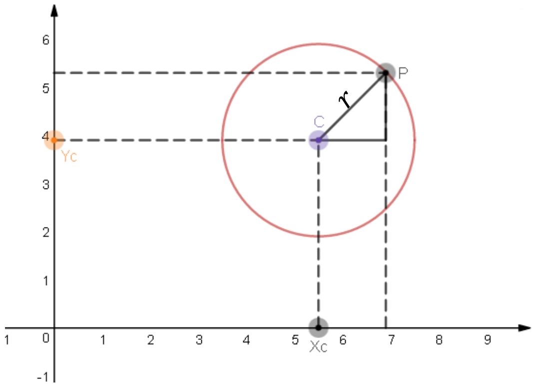


Imagem 43: Definição Circunferência
Fonte: www.desmos.com/calculator/tvtklg5ouk.

Todo ponto da circunferência tem sua distância ao centro igual ao raio, portanto, pela fórmula da distância entre dois pontos P e C é $d_{PC} = r$, obtemos a equação:

$$\sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} = r$$

Ou podemos escrever

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

Pois ambos os lados da primeira da mesma são números positivos.

Para fixar esta ideia no Desmos, seja $C(1,1)$ e $r = 1$ dados, seguir a sequência de passos:

1. Inserir a equação de uma reta que passe pelo ponto $C(1,1)$, ou seja equação $y - 1 = m(x - 1)$.
2. Criar um deslizante para m.
3. Inserir no deslizante $m = \tan \alpha$, bem como criar um deslizante α variando entre $0 \leq \alpha \leq 360$.
4. Modificar as configurações do *software* para graus.
5. Discutir como podemos mostrar essa reta para apenas os valores que distam 1 do centro.
6. A solução é inserir um conjunto na equação do tipo $\{(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$. Por que assim vamos mostrar todos os pontos da reta que estão entre o centro a uma unidade de distância. Quando modificamos os valores de α vemos que a reta gira em torno do ponto a 1 unidade de distância.
7. Por fim, inserir a equação da circunferência $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1^2$. Mostrar aos alunos a diferença entre a equação $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1^2$ e a inequação $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1^2$.

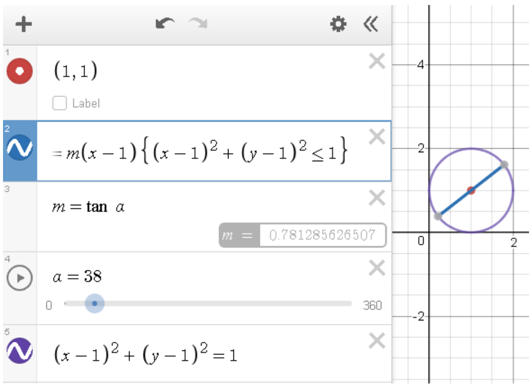


Imagem 44: Definição do círculo
Fonte: www.desmos.com/calculator/ks6q30xbep.

Atividade 3.01 – Para esta atividade queremos mostrar como usar a equação da circunferência. No pátio da escola existe um roteador wireless que emite sinal de internet Wi-Fi numa região circular com um alcance de 5 metros, estando localizado no ponto $A(2,5)$ de um plano cartesiano (pátio da escola). Como faria para saber marcar a região que atinge o sinal Wi-Fi na escola? Para resolver esta atividade temos que ter noção da equação da circunferência. Primeiro, logo ela será a fronteira até onde chega o sinal, e a região será interna ao círculo, a imagem seguinte mostra o nosso problema a região dada pela inequação $(x-2)^2+(y-5)^2 \leq 5^2$.

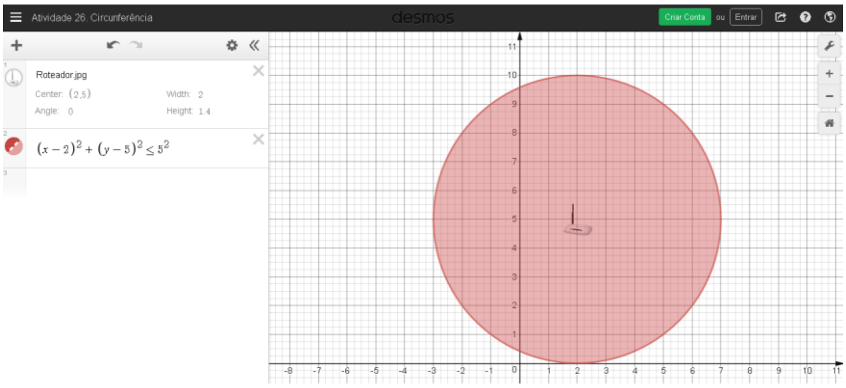


Imagem 45: Problema do roteador
Fonte: www.desmos.com/calculator/ry0bzplbav.

A equação da circunferência dada por $(x-2)^2+(y-5)^2=5^2$ é conhecida como forma reduzida. Para chegarmos a forma geral, basta desenvolver, a equação anterior, e chegar na forma $x^2+y^2-4x-10y+4=0$ e digitar esta equação no *software*. A questão agora é se toda equação geral de duas variáveis de segundo grau é uma circunferência. Para isso, sabendo que *a circunferência é o conjunto de pontos que equidistam de um ponto central*, para saber se todos esses pontos que satisfazem a forma geral pertencem a circunferência, temos que aplicar a fórmula da distância no ponto dado e verificar no aplicativo Desmos. Então vamos completar quadrados na equação geral $x^2+y^2-4x-10y+4=0$ para chegar em $(x-2)^2+(y-5)^2=5^2$ extraindo a raiz quadrada chegamos a definição de circunferência. Assim temos o seguinte resultado para a equação da circunferência: Seja $C(a,b)$ o centro da circunferência e r o raio da circunferência temos, $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ na forma reduzida é equivalente a equação geral na forma:

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

Ou ainda,

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0, com\ A=B\neq 0, C=0, D^2+E^2-4AF>0$$

Atividade 3.02 – Determine a equação da Circunferência de centro em $O(1,2)$ que passa pelo ponto $P(4,-2)$.

Os alunos serão estimulados a calcular a distância dos pontos O e P. E em seguida, montar a equação reduzida e geral da circunferência sempre com o auxílio do Desmos. Como temos na imagem.

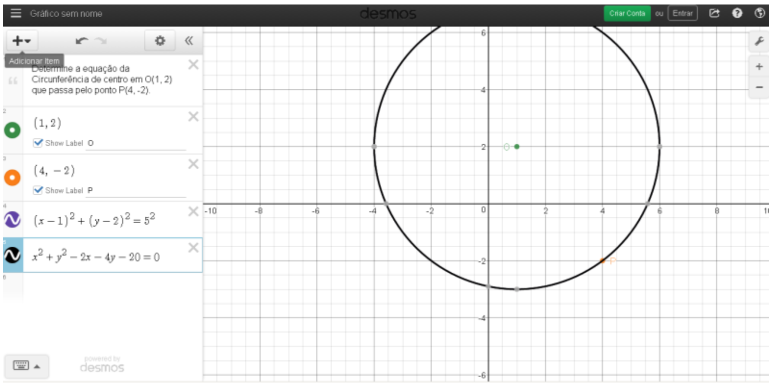


Imagem 46: Equação geral e reduzida da circunferência
Fonte:www.desmos.com/calculator.

Atividade 3.03 – Sejam os pontos do plano cartesiano $A(3,2)$ e $B(1,1)$, e a circunferência que passa por A e B cujo centro é o ponto médio do segmento AB.

1. Para realizar esta tarefa, basta calcular o ponto médio do segmento AB. Em seguida a distância do ponto médio até um dos pontos.
2. Podemos inserir as coordenadas dos pontos $A(3,2)$ e $B(1,1)$ e já colocar o ponto médio $M\left(\frac{3+1}{2},\frac{2+1}{2}\right) = M\left(2,\frac{3}{2}\right)$.
3. Para calcular a distância do segmento AB, podemos pôr a fórmula em Desmos $d = \sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2} = \sqrt{5}$. Como o raio é a metade do diâmetro temos que a distância entre AM é $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
4. Por fim, escrever a equação da circunferência $(x-2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$. O link para atividade é: www.desmos.com/calculator/g4o5heuvqt.

Atividade 3.04 – Insira no Desmos a equação $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$, crie controles deslizantes para a, b e r. Verifique o que acontece para cada valor de a, b e r.

O estudante deve verificar que quando alterar os valores em a a circunferência se move na horizontal. E, ao modificar os valores em b a circunferência move-se na vertical. E ao modificar os valores de r mudamos o tamanho da circunferência.

Atividade 3.05 – Verifique se os pontos $A(2,-1)$, $B(3,4)$ e $C(0,1)$ pertencem a circunferência $(x-2)^2+(y-1)^2 = 4$.

É necessário colocar todos os pontos no editor do Desmos, e verificar quais pontos pertençam a circunferência. Visualmente vemos que os pontos A e C pertencem a circunferência. Não obstante, devemos verificar, aritmeticamente, se os pontos satisfazem as igualdades para o ponto $A: (2-2)^2 + (-1-1)^2 = 4$; para o ponto $B: (3-2)^2 + (4-1)^2 \neq 4$; e para o ponto $C: (0-2)^2 + (1-1)^2 = 4$, ocorridas na equação da circunferência acima. Logo, os pontos A e C pertencem a circunferência e o ponto B não.

Atividade 3.06 - Os pontos $A(-1, 5)$ e $B(7, -3)$ são os extremos do diâmetro de uma circunferência. Determine a equação desta circunferência.

1. Para realizar esta tarefa, basta calcular o ponto médio do segmento AB. Em seguida a distância do ponto médio até um dos pontos.
2. Podemos inserir as coordenadas dos pontos $A(-1, 5)$ e $B(7, -3)$ e já colocar o ponto médio $M\left(\frac{-1+7}{2}, \frac{5+(-3)}{2}\right) = M(3,1)$.
3. Para calcular a distância do segmento AB, podemos pôr a fórmula em Desmos $d_{AB} = \sqrt{(-1-7)^2 + (5-(-3))^2} = 8\sqrt{2}$. Como o raio é a metade do diâmetro temos que a distância entre AM é $4\sqrt{2}$.
4. Por fim, escrever a equação da circunferência $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 32$. O link para atividade é: https://www.desmos.com/calculator/zs0u23rgsh.

Atividade 3.07 – Determine a equação da circunferência que passa pelos pontos $A(4, -2)$, $B(2, 0)$ de raio $\sqrt{10}$. Verifique geometricamente em Desmos. Vamos esboçar uma maneira de resolver:

1. Colocar os pontos A e B em Desmos.
2. Escrever a equação de centro em A e raio $\sqrt{10}$, $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 10$.
3. Escrever uma equação de centro em B e raio $\sqrt{10}$, $(x-2)^2 + y^2 = 10$.
4. Os pontos de interseção das duas circunferências são os centros das circunferências de raio $\sqrt{10}$ que passam pelos pontos A e B.
5. Portanto, teremos duas circunferências que passam pelos pontos A e B de raio $\sqrt{10}$. Uma com centro em $(1, -3)$ e outra com centro em $(5, 1)$.
6. Assim, as equações da circunferência ficam $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 10$ e ainda $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 10$. Esta atividade pode ser consultada em: www.desmos.com/calculator/fdhze3esxf.

Atividade 3.08 – Passe a equação $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ para a forma reduzida.

1. Esta atividade exige que o estudante compreenda o método de completar quadrados, portanto devemos lembrar do quadrado da diferença $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
2. Assim, devemos escrever cada variável com seu quadrado da diferença na forma: $x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2 + y^2 - 2 \cdot 2 \cdot y + 2^2 = 4 + 1 + 4$.
3. Daí surge a equação na forma reduzida $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$. Que é facilmente verificada em Demos.

4.3.2 Ponto e circunferência

Entre uma circunferência de centro $C(x_c, y_c)$ de raio r e um ponto $A(x_A, y_A)$, podemos estabelecer as seguintes relações: o ponto A pertence a C ($A \in C$); O ponto A é interior à circunferência do centro C ($d_{AC} < r$); O ponto A é exterior à circunferência de cento C ($d_{AC} > r$).

- O ponto A pertence à circunferência de centro C e raio r; se, e somente se, a distância do ponto A ao centro C é igual ao raio r. Logo, $d_{AC} = r$.
- O ponto A é interior à circunferência do centro C e raio r, se, e somente se, a distância do ponto A ao centro C, é menor do que o raio r. Logo, $d_{AC} < r$.
- O ponto A é exterior à circunferência de centro C e raio r, se, e somente se, a distância do ponto A ao centro C é maior do que o raio r. Logo, $d_{AC} > r$.

Atividade 3.09 – Verificar as posições relativas entre ponto e circunferência. Para isso faremos:

1. Inserir as coordenadas do centro $C(x_c, y_c)$ no editor do Desmos. Colocar controles deslizantes para x_c, y_c.
2. Inserir as coordenadas do centro $A(x_a, y_a)$ no editor do Desmos. Colocar controles deslizantes para x_a, y_a.
3. Inserir a equação reduzida da circunferência de centro C e raio r. $(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = r^2$ e um controle deslizante para o raio r.
4. Inserir a fórmula da distância $d_{AC} = \sqrt{(x_a - x_c)^2 + (y_a - y_c)^2}$.
5. Mover os pontos e comparar os resultados da distância com o raio.

Atividade 3.10 – Determine a posição dos pontos $A(3,2)$, $B(4,1)$ e $C(-1,3)$ em relação à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$.

1. Para esta atividade é necessário identificar o centro e o raio da circunferência, pelo método de completar quadrados.
2. Calcular a distância entre cada ponto e o centro.
3. Verificar os resultados em Desmos.

Atividade 3.11 – Determine os valores de $\boldsymbol{m}$ para os quais o ponto $A(2,-3)$ é exterior a circunferência $x^2 + y^2 - 4x + 2y + m = 0$.

1. Para esta atividade incentivamos os educandos a identificar o centro e o raio da circunferência pelo método de completar quadrados. Verificar que o centro é $(2,-1)$ e o raio é $r = \sqrt{5 - m}$. Aqui vemos que m já deve ser menor que 5, pois caso contrário não existe circunferência, pois se $m = 5$ a circunferência tem raio nulo e se menor que 5 possui raio negativo.
2. É necessário que se calcule a distância entre o ponto $A(2,-3)$ e o centro $(2,-1)$, que é igual a 2.
3. Assim, queremos os valores de m para que o raio r seja menor que 2. Dessa forma, $\sqrt{5 - m} < 2$ implica que $m > 1$ e $m < 5$, ou seja, $m \in R$ tal que $1 < m < 5$. O resultado pode ser verificado em Desmos apenas criando um deslizante para m.

4.3.3 Reta e circunferência

Uma reta $s: ax + by + c = 0$ pode assumir as seguintes posições em relação a uma circunferência de centro $C(x_c, y_c)$ e raio r: A reta s é secante a circunferência; s é externa a circunferência; s é tangente a circunferência.

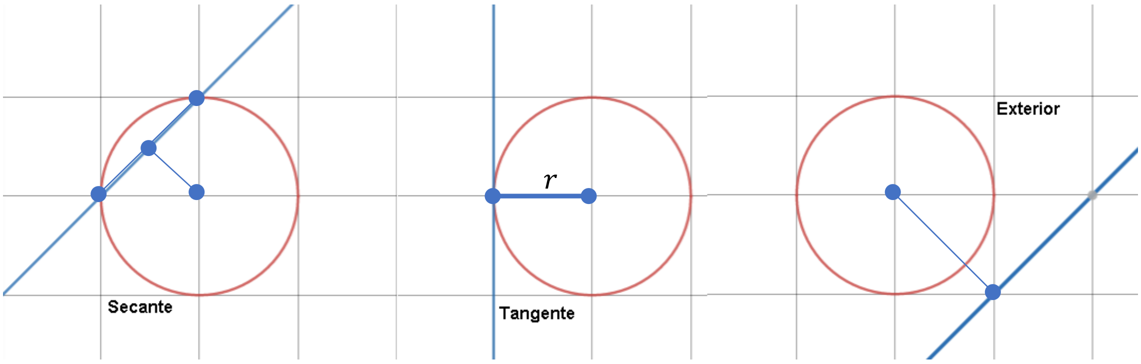


Imagem 47: Posições relativas reta e circunferência
Fonte: www.desmos.com/calculator.

- A reta é secante à circunferência se, e somente se, a distância do centro da circunferência à reta é menor que o raio. Logo, $d_{C,s} < r$. O sistema de equações formado por elas admite duas soluções reais:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2 \end{cases}$$

- A reta é externa à circunferência se, e somente se, a distância do centro da circunferência à reta é maior que o raio. Logo, $d_{C,s} > r$. O sistema de equações formado por elas não admite soluções reais:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2 \end{cases}$$

- A reta é tangente à circunferência se, e somente se, a distância do centro da circunferência à reta é igual ao raio. Logo, $d_{C,s} = r$. O sistema de equações formado por elas admite uma única solução real:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2 \end{cases}$$

Atividade 3.12 – Para ilustrar essas ideias sugerimos os seguintes passos:

1. Criar de uma circunferência de centro $C(x_c, y_c)$ e raio r.
2. Inserir os controles deslizantes de x_c, y_c e r.
3. Inserir o ponto do centro (x_c, y_c), apenas para movimentar a circunferência.
4. Inserir a reta s de equação $ax + by + c = 0$, bem como os deslizantes para a, b e c.
5. Para ilustrar construiremos uma reta que passa pelo ponto C e é perpendicular a reta r.

6. O ponto de interseção das duas retas será dado na forma $A\left(\frac{b(bx_c-ay_c)-ac}{a^2+b^2}, \frac{a(ay_c-bx_c)-bc}{a^2+b^2}\right)$.
7. Calcularemos a distância do ponto de interseção A até o centro com a fórmula $d_{AC} = \frac{|ax_c+by_c+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
8. Por fim, basta verificar a posição relativa da circunferência e da reta ao movimentar os deslizantes do raio, o centro e da reta s. O link está disponível em: www.desmos.com/calculator/y0leev778r.

Atividade 3.13 – Verifique a posição relativa entre a reta $x + y - 5 = 0$ e a circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ e determine os pontos de interseção, caso existam. Verifique a situação no Desmos.

1. É necessário encontrar o centro e o raio da circunferência pelo método de completar quadrados. Centro $C(1,2)$ e raio 2.
2. Calcular a distância entre o centro e a reta através da fórmula da distância entre reta e ponto.
3. Verificar se a distância é maior, menor ou igual ao raio.

Atividade 3.14 – Verifique a posição relativa entre a reta $y - 4 = 0$ e a circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$, determine os pontos de interseção, caso existam. Verifique a situação no Desmos.

1. Neste caso, teremos uma reta que é paralela ao eixo x, que passa por $y = 4$.
2. A equação da circunferência é a mesma do exercício anterior de centro $(1,2)$ e raio 2.
3. Basta verificar que a distância da reta até o centro é igual a 2. E concluirá que a reta é tangente a circunferência.

Atividade 3.15 – Verifique a posição relativa entre a reta $3x + y - 16 = 0$ e a circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$, determine os pontos de interseção, caso existam. Verifique a situação no Desmos.

1. A equação da circunferência é a mesma do exercício anterior de centro $(1,2)$ e raio 2.
2. Calcular a distância entre o centro e a reta através da fórmula da distância entre ponto e reta.
3. Basta verificar que a distância da reta até o centro é maior a 2. E concluirá que a reta é externa a circunferência.

4.3.4 Interseção de circunferências

Dadas as circunferências $c_1: (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2$ e $c_2: (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2$, sua interseção é o conjunto de todos os pontos que pertencem simultaneamente, a ambas. Se um ponto $P(x, y)$ pertence às circunferências, então as coordenadas deste ponto pertencem ao conjunto solução do sistema não linear:

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2 \end{cases}$$

1. Podemos construir em Desmos duas circunferências de centros e raios distintos.
2. Para isso, escreveremos $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$ para representar uma circunferência de centro (a, b) e raio c.
3. E outra, do tipo $(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = c_1^2$ para representar uma equação de centro (a_1, b_1) e raio c_1.
4. Podemos modificar o tamanho das circunferências e o local do centro como bem entender.
5. Verificar que existem circunferências que são: secantes (dois pontos comuns); tangentes exteriores e tangentes interiores (um ponto comum); exteriores ou interiores (nenhum ponto comum); e concêntricas (sem pontos comuns ou todos os pontos de ambas as circunferências em comum).

Atividade 3.16 – Obtenha a interseção das circunferências de equações:

a) $x^2 + y^2 + x - 3y = 0$ e $3x^2 + 3y^2 - x - 2y = 0$

Algebricamente, aplicamos o método da adição para resolver o sistema chegamos na equação $-4x + 7y = 0$ que implica em $y = \frac{4}{7}x$. Substituindo y em uma das equações, sugerimos neste caso a primeira, surge a equação quadrática $65x^2 - 35x = 0$, que tem como solução $x_1 = 0$ ou $x_2 = \frac{7}{13}$. Para o caso de $x_1 = 0$ temos que na primeira equação $y_1 = 0$ ou $y_1 = 3$, na segunda equação temos $y_1 = 0$ ou $y_1 = \frac{2}{3}$. Como $y_1 = 0$ é comum nas duas equações concluímos que o ponto comum é $x = 0$ e $y = 0$, (0, 0). Para $x_2 = \frac{7}{13}$ temos que na primeira equação $y_2 = \frac{35}{13}$ ou $y_2 = \frac{4}{13}$ e na segunda equação teremos $y_2 = \frac{14}{39}$ e $y_2 = \frac{4}{13}$. Logo, concluímos que para $x = \frac{7}{13}$ teremos $y = \frac{4}{13}$ comum. Com o auxílio do *software* Desmos, vemos que as soluções do sistema são $(0, 0)$ ou $\left(\frac{7}{13}, \frac{4}{13}\right)$. Caso o estudante pegue apenas o número arredondado, mostrado pelo Desmos, como neste caso (0.5385, 0.30769), é possível mostrar a imprecisão desse número colocando um zoom no local do ponto.

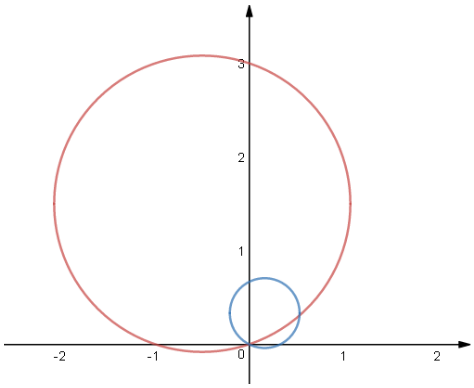


Imagem 48: Secantes
https://www.desmos.com/calculator/fmvuwv7r82

b) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$ e $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$

Aplicando o método da adição temos diretamente que $x = -1$ apenas. Ao substituirmos na primeira equação temos $y = 2$. Na segunda equação temos também $y = 2$. Logo, o ponto comum as duas circunferências é apenas $(-1, 2)$. Com o auxilio do *software* Desmos verificamos a solução do sistema.

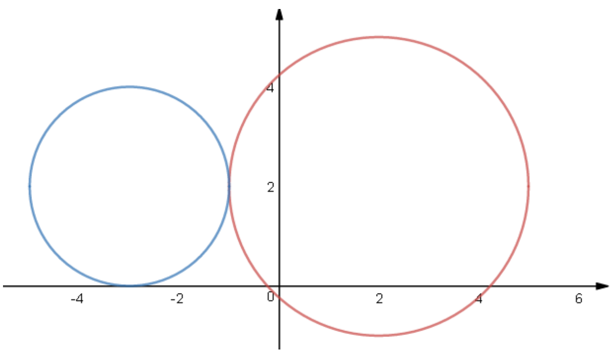


Imagem 49: Tangente exteriores
https://www.desmos.com/calculator/2teogpkvw1

Lembrando que quando duas circunferências têm somente um único ponto comum, denominam-se tangentes, interiores ou exteriores.

c) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$ e $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$

Pelo método da adição obtemos a equação $8x - 6y + 1 = 0$ que implica que $y = \frac{8x+1}{6}$. Substituindo em qualquer uma das duas equações temos uma equação quadrática sem solução. Verificando que a distância entre os centros, é maior que a soma dos raios, concluímos que são exteriores uma da outra. No *software* Desmos vemos um sistema que não tem solução real, logo as duas circunferências não admitem ponto comum.

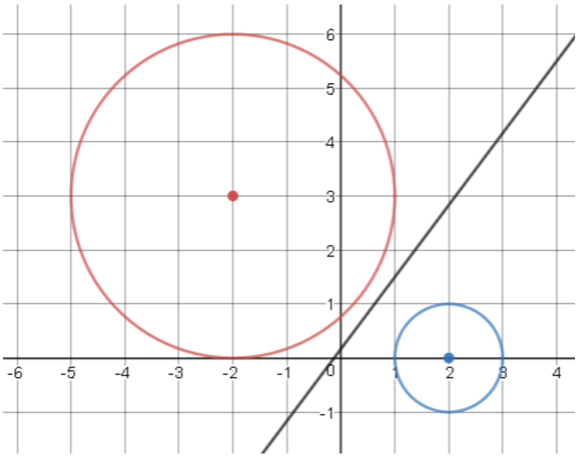


Imagem 50: Exteriores
https://www.desmos.com/calculator/esw1ugph8q

Lembrando que quando duas circunferências não têm pontos comuns, elas podem ser exteriores ou interiores.

4.4 CÔNICAS

Foi o grego Apolônio de Perga em seu tratado “As Cônicas” quem introduziu os nomes elipse, hipérbole e parábola às secções planas no cone. A circunferência foi estudada muito antes sem ser considerada como cônica (EVES, 2004).

Mais tarde as cônicas são adotadas como modelo matemático para as órbitas dos planetas por Copérnico, e depois, a partir de observações apuradas de Tycho Bahmer que Johanes Kepler consegue demonstra que tais orbitas eram realmente elípticas (EVES, 2004).

A elipse, a hipérbole e a parábola são chamadas genericamente secções cônicas, pois são obtidas através da intersecção de uma superfície cônica por um plano, conforme a figura:

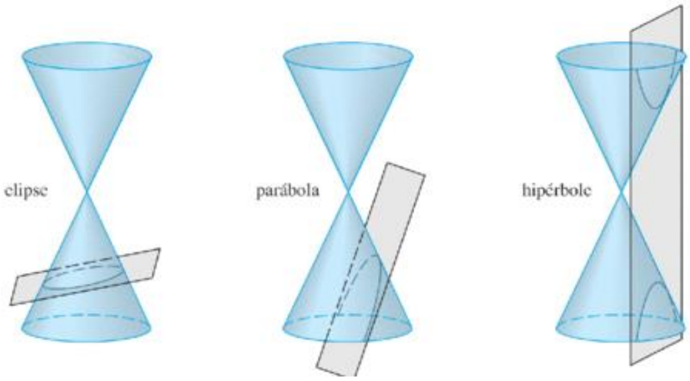


Imagem 51: Seções cônicas.
Fonte: steemit.com/mathematics/@mes/conic-sections-hyperbola-definition-and-formula.

Queremos aqui apresentar as cônicas como um conjunto de lugares geométricos que são descritos por uma equação de segundo grau, envolvendo as coordenadas dos seus pontos. A finalidade desta seção é identificar as cônicas a partir dos coeficientes de sua equação de segundo grau.

4.4.1 Parábola

Optamos por iniciar com o conceito de parábola, pois, como sabemos, os estudantes do ensino médio estudaram este conceito vinculado a ideia de função quadrática. No entanto, no estudo da Geometria Analítica se distingue, pois insere novos elementos e outros significados a noção de parábola.

Consideremos no plano cartesiano, uma reta d e um ponto F a ela não pertencente. Chama-se parábola o lugar geométrico dos pontos $P(x\,,y)$ desse plano equidistantes de F e d. Os elementos principais da Parábola são: foco F; reta diretriz d; vértice V; parâmetro p (distância entre o foco e a diretriz); eixo de simetria e; observação $\overline{VF} = \frac{p}{e}$.

Atividade 4.01 – Para uma parábola com eixo de simetria contido no eixo das abscissas, temos dois casos a considerar: voltado para a "direita" e para a "esquerda". Ou quando sua concavidade for voltada para a "direita" temos: Determinar a equação da parábola de Vértice $V(0{,}0)$, foco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, diretriz de equação: $x = -\frac{p}{2}$ e $P(x, y)$ um ponto genérico, conforme imagem:

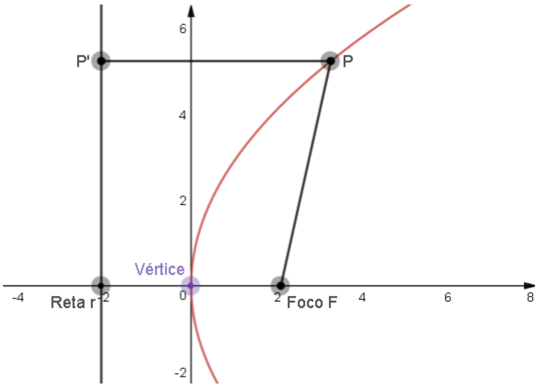


Imagem 52: Parábola concavidade a direita
Fonte: www.desmos.com/calculator

1. Inserir as coordenadas do vértice $(0, 0)$.
2. Inserir a coordenada do foco $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Criar controle deslizante para p.
3. Criar a reta diretriz de equação $x = -\frac{p}{2}$.
4. Inserir um ponto genérico de coordenada (x_1, y_1). Crias os controles deslizante para x_1 e y_1.
5. Pode-se verificar que o ponto (x_1, y_1) está livre pela tela.
6. Devemos calcular a distância entre o ponto e a reta e depois entre o ponto e o foco.
7. Podemos inserir uma lista de pontos do tipo: $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, (x_1, y_1), $\left(-\frac{p}{2}, y_1\right)$. Assim, podemos criar segmentos entre os pontos e calcular a distância entre eles.

8. Inserindo a fórmula da distância entre o ponto e a reta temos: $d_{pr} = \sqrt{\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)^2 + (y_1 - y_1)^2}$.
9. Inserindo a fórmula para calcular a distância entre o ponto e o foco temos: $d_{PF} = \sqrt{\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + y_1^2}$.
10. Ao movimentar o ponto (x_1, y_1) conseguimos alguns pontos tal que $d_{Pr} = d_{PF}$, isso nos induz a pensar que existem infinitos pontos que satisfazem a igualdade. Assim, concluímos que a equação da parábola por definição é $d_{Pr} = d_{PF}$, ou seja $\overline{PF} = \overline{PP'}$, assim temos:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2}$$

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$x^2 - px + p^2 + y^2 = x^2 + px + p^2$$

$$y^2 = 2px$$

Que é a equação reduzida da parábola. Para finalizar a atividade basta escrever x_1 em função de y_1 da seguinte forma: $x_1 = \frac{y_1^2}{2p}$. Assim o ponto sempre pertencerá a parábola.

Caso a parábola tenha concavidade voltada para a "esquerda" aplicamos o mesmo raciocínio teremos a equação $y^2 = -2px$ como equação reduzida da parábola, quando a diretriz $x = \frac{p}{2}$.

Para a equação da parábola com eixo de simetria contido no eixo das ordenadas. Temos dois casos a considerar. Quando a parábola está voltada para cima ou quando ela está voltada para baixo. Caso a parábola esteja voltada para "cima" temos: Seja a parábola de vértice $V(0,0)$, foco $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$, diretriz de equação $y = -\frac{p}{2}$ e $P(x, y)$ um ponto genérico, conforme figura:

Aplicando a definição e desenvolvendo de modo análogo aos casos anteriores, obteremos: $x^2 = 2py$. Caso a concavidade da parábola seja voltada para "baixo" Aplicando a definição e desenvolvendo de modo conveniente, teremos: $x^2 = -2py$.

Caso as parábolas não tenham vértices na origem procedemos do seguinte modo: Seja $\overline{OXY}$ o sistema de eixos ortogonais obtidos transladando o sistema OXY para a nova origem $\bar{O}$. Caso o eixo de simetria seja paralelo ao eixo das abscissas. Como $\bar{O} = (x_0, y_0)$ é o centro, temos que um ponto $P = (x, y) = (\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0)$ pertence a parábola se, e somente se, $\bar{y}^2 = 2p\bar{x}^2 \Leftrightarrow (y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$. Pode-se provar de forma análoga para parábolas com a reta focal paralela ao eixo OY: $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$.

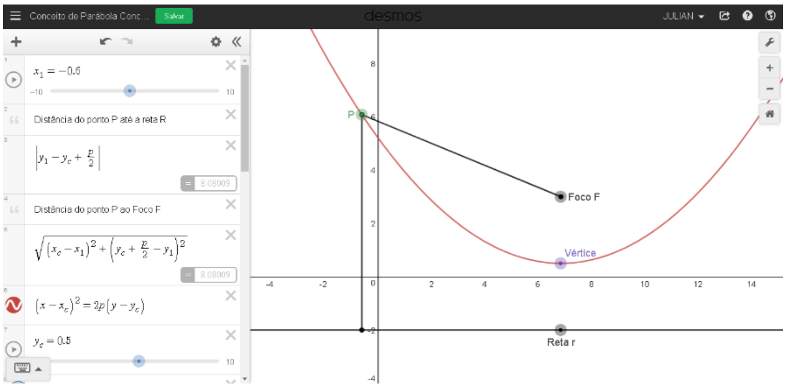


Imagem 53: Parábola com centro fora da origem.
Fonte: www.desmos.com/calculator/hc9fwkt7r0.

Atividade 4.02 – Dada a parábola de equação: $(y - 5)^2 = 16(x - 2)$, determine: a) O parâmetro; b) O vértice; c) O foco; d) A equação da diretriz;

1. Para determinar o parâmetro basta dividir o 16 por 2 e obter o parâmetro igual a 8.
2. Para identificar o vértice devemos apenas escrever (2, 5).
3. Como é uma parábola com vértice em (2, 5) com concavidade voltada para a direita devemos somar a metade do parâmetro em x. Logo, o foco é (6, 5).
4. A equação diretriz devemos subtrair da abscissa do vértice metade do parâmetro e escrever $x = -2$ ou $x + 2 = 0$.

Atividade 4.03 – Dada a parábola de equação $(x - 2)^2 = 8(y - 3)$, determine: a) O parâmetro; b) O vértice; c) O foco; d) A equação da diretriz;

1. Para determinar o parâmetro basta dividir 8 por 2 que é 4.
2. O vértice da parábola é $(2{,}3)$.
3. Como o vértice é (2, 3) e a parábola tem concavidade voltada para cima, então devemos somar a metade do parâmetro na coordenada y do vértice. Logo, o foco é (2, 5).

4. Para escrevermos a equação diretriz devemos subtrair metade do parâmetro da ordenada do vértice. Logo, a equação da diretriz é $y = 1$ ou $y - 1 = 0$.

4.4.2 Elipse

Consideremos num plano α dois pontos distintos F_1 e F_2, denominados focos, e dois números reais $2a$ e $3c$, com $2a > 2c > 0$, sendo $\overline{F_1F_2} = 2c$ a distância focal. Chama-se elipse o *lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ desse plano α cuja a soma das distâncias a F_1 e F_2 é sempre constante e igual a $2a$.*

Os principais elementos da elipse são: focos: F_1 e F_2; centro: (ponto médio de F_1 e F_2); eixo maior: $\overline{A_1A_2}$; eixo menor: $\overline{B_1B_2}$; medida do eixo maior $2a$; medida do eixo menor $2b$; distância focal: 2c.

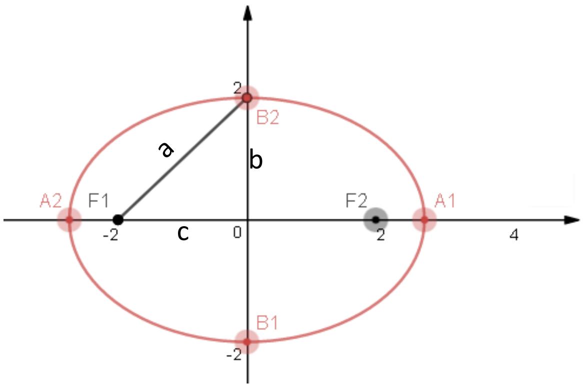


Imagem 54: Elipse.
Fonte: www.desmos.com/calculator.

No triângulo retângulo B_2OF_1, da imagem anterior, temos a relação:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Esta relação é denominada de relação notável. Excentricidade da elipse é o número real e definido por: $e = \frac{c}{a}$. Observação: Por definição $c < a$, portanto $0 < e < 1$.

Atividade 4.04 – Caso o eixo maior da elipse coincide com o eixo das abscissas, teremos a seguinte situação: seja a elipse com centro $O(0, 0)$, focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ e seja $P(x, y)$ um ponto genérico, conforme imagem 54, para isso basta:

1. Inserir as coordenadas dos pontos $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$.

2. Inserir as coordenadas dos pontos $B_1(0, b)$ e $B_2(0, -b)$.
3. Para o caso de $a > b$ teremos que $c_1 = \sqrt{a^2 - b^2}$.
4. Inserir os pontos $F_1(-c_1, 0)$ e $F_2(c_1, 0)$. Assim, o centro é sempre o ponto médio dos focos, caso $a > b$.
5. Para o caso de $a < b$ teremos que $c_2 = \sqrt{b^2 - a^2}$.
6. Inserir os pontos $F_1(0, c_2)$ e $F_2(0, -c_2)$. Assim, o centro é sempre o ponto médio dos focos, caso $a < b$.
7. Como a soma das distâncias do ponto P até os focos é igual a constante $2a$, teremos: $PF_1 + PF_2 = 2a$ que implica na equação $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$ omitimos aqui os passos dessa demonstração e deixamos a exercício do leitor para concluir que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

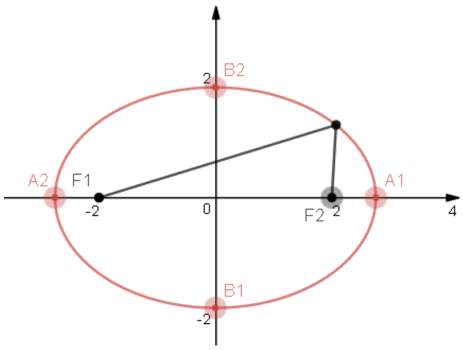


Imagem 55: Definição de Elipse
Fonte: www.desmos.com/calculator/0zg4ynnzk0.

8. Afim de garantir o entendimento desta equação, mostramos que dado um ponto $P(x_1, y_1)$, com x_1 livre então y_1 deve ser no formato, $y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_1^2}$. Verificar que o ponto P move-se na elipse.

Caso o eixo maior da elipse coincida com o eixo das ordenadas. Demonstra-se que a equação reduzida desta elipse é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a < b$. Pode ser visto no link www.desmos.com/calculator/xjzzd7nujm.

Atividade 4.05 – Dada a equação da elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$, determine:

a) A equação reduzida;

Basta dividir a equação por 225 e depois simplificar as frações para chegar na equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Em seguida verificar em Desmos o resultado.

b) A medida do eixo maior e do eixo menor;

Como a equação pode ser escrita na forma $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$, temos que $a=5$ e $b=3$. Assim, a medida do eixo maior é $2a=10$ e a do eixo menor é $2b=6$.

c) A distância focal;

Para calcular a distância focal deve-se utilizar a fórmula $c=\sqrt{25-9}=4$. Logo a distância focal é 8.

d) Os focos;

Como o valor de c é 4 logo os focos são $F_1(-4,0)$ e $F_2(4,0)$.

e) A excentricidade;

A excentricidade é calculada por $e=\frac{c}{a}$. Logo, temos que $e=\frac{4}{5}=0{,}8$.

Caso a elipse não tenha centro na origem e cujos eixos são paralelos aos eixos coordenados. Por uma translação dos eixos coordenados vamos obter a equação de uma elipse cuja reta focal é horizontal ou vertical.

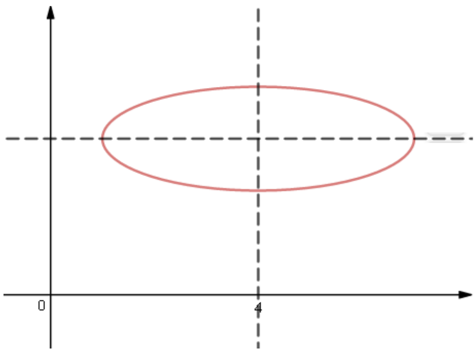


Imagem 56: Elipse com centro em $(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})$.
Fonte:www.desmos.com/calculator.

Seja $\overline{OXY}$ o sistema de eixos ortogonais obtidos transladando o sistema OXY para a nova origem $\bar{O}$. Caso a reta focal paralela ao eixo das abscissas. Como $\bar{O}=(x_0,y_0)$ é o centro, temos que um ponto $P=(x,y)=(\bar{x}+x_0,\bar{y}+y_0)$ pertence a elipse se, e somente se, $\frac{\bar{x}^2}{a^2}+\frac{\bar{y}^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$. Pode-se provar de forma análoga para elipses com a reta focal paralela ao eixo OY.

Atividade 4.06 – Dada a elipse $20x^2+25(y-2)^2=100$, determine:

a) A equação reduzida;

Basta dividir a equação por 100 e depois simplificar as frações até chegar na equação $\frac{x^2}{5}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$.

b) O centro;

Basta observar, na equação, que nenhum número acompanha x, portanto $x = 0$. Já o número 2 acompanha y, portanto $y = 2$. Logo o centro é em $(0, 2)$.

c) A medida do eixo maior e do eixo menor;

A distância do eixo maior ao centro é igual a $\sqrt{5}$, logo a medida do eixo maior é $2\sqrt{5}$. A distância do eixo menor até o centro é 2 logo a medida do eixo maior é 4.

d) A distância focal;

Para calcular a distância do foco ao centro basta aplicar o teorema de Pitágoras $c = \sqrt{5-4} = 1$. Portanto, a distância focal é 2.

e) Os focos;

Como a distância dos focos ao centro é 1, e, lembrando que o centro é em $(0, 2)$. Então os focos estão em $(-1, 2)$ e $(1, 2)$.

f) A excentricidade.

Para calcular a excentricidade basta fazer $e = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

4.4.3 Hipérbole

Chama-se hipérbole o *lugar geométrico dos pontos* $P(x, y)$ *do plano cujas diferença das distâncias a* F_1 *e* F_2 *é sempre constante e igual a* $2a$*.*

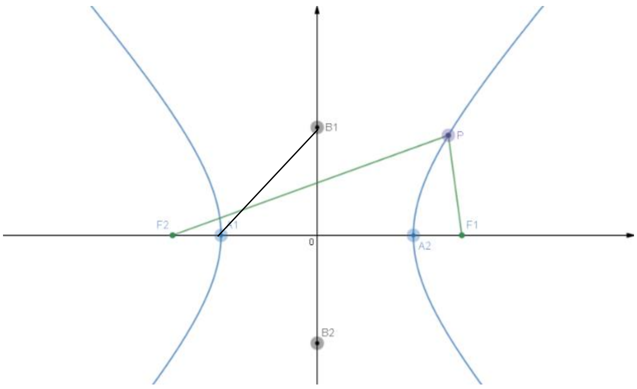


Imagem 57: Definição Hipérbole
Fonte:www.desmos.com/calculator.

Elementos da hipérbole: focos F_1, F_2, centro (pontos médios de F_1 e F_2), eixo real ou transverso (A_1A_2), eixo conjugado ou imaginário (B_1B_2), medida do eixo real ($2a$), medida do eixo conjugado ($2b$), distância focal($2c$), vértice da hipérbole (A_1 e A_2). No triângulo B_1OA_1, da imagem anterior, temos a relação $a^2 + b^2 = c^2$. A excentricidade da hipérbole é o número real definido por: $e = \frac{c}{a}$. Como $c > a > 0$, então temos:$e > 1$.

Atividade 4.07 – Caso o eixo real esteja contido no eixo das abscissas então teremos: Seja a hipérbole com centro $O(0,0)$, focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ e seja $P(x, y)$ um ponto genérico, conforme a imagem, para isso faremos:

1. Inserir as coordenadas dos vértices $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$, com deslizante a.
2. Inserir as coordenadas do eixo imaginário $B_1(0, b)$ e $B_2(0, -b)$, com deslizante em b.
3. Inserir o valor a distância do foco ao centro $c_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$.
4. Inserir as coordenadas do foco $F_1(-c_1, 0)$ e $F\_2(c_1, 0)$.
5. Como a hipérbole é a diferença das distâncias de uma ponto $P(x, y)$ até os focos é igual a $2a$, temos pela definição que $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$. Como uma demonstração bem similar a da elipse chegamos a conclusão que: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ é a equação da hipérbole.

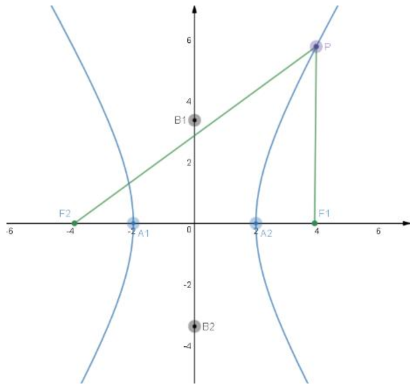


Imagem 58: Definição hipérbole.
Fonte: www.desmos.com/calculator/ja8wtp7g6s.

6. Para garantir o entendimento da hipérbole, mostramos que dado um ponto $P(x_1, y_1)$, com x_1 livre então y_1 deve ser no formato, $y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{x_1^2 - a^2}$. Verificar que o ponto P move-se na hipérbole.

Caso o eixo real esteja contido no eixo das ordenadas aplicando a definição e desenvolvendo de modo análogo ao 1º caso, obtemos $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

Esta atividade com o conceito de hipérbole pode ser consultada em: www.desmos.com/calculator/gdekxb2jyn.

Atividade 4.08 – Dada a equação da hipérbole $15x^2 - 10y^2 = 60$, determine:

a) A equação reduzida;

Para isso, basta dividir a equação por 60 e simplificar as frações para chegar em $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$.

b) A medida do eixo real e do eixo conjugado;

Como vemos, na equação acima, o eixo real é o eixo y. Assim, a medida do eixo real é $2\sqrt{6}$. O eixo conjugado é o eixo x e a medida é 4.

c) A distância focal;

Para calcular a distância do centro até o foco temos $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4+6} = \sqrt{10}$, logo a distância focal é $2\sqrt{10}$.

d) Os focos;

As coordenadas do foco são, lembrando que os focos estão no eixo x $F_1\left(\sqrt{10}, 0\right)$ e $F_2\left(\sqrt{10}, 0\right)$.

e) A excentricidade;

Para calcular a excentricidade basta fazer $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$.

f) A equação das assíntotas;

As equações das assíntotas são $ay - bx = 0$ e $ay + bx = 0$, logo teremos $2y - \sqrt{6}x = 0$ e $2y + \sqrt{6}x = 0$.

Caso a hipérbole não tenha centro na origem e cujos eixos são paralelos aos eixos coordenados. Por uma translação dos eixos coordenados vamos obter a equação de uma hipérbole cuja reta focal é horizontal ou vertical.

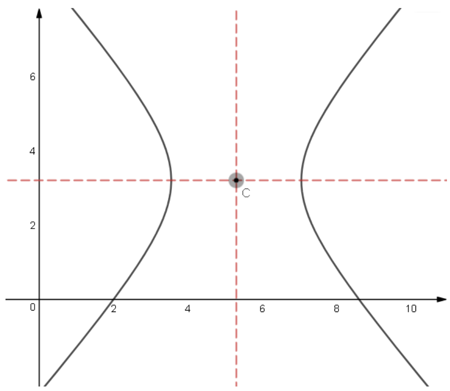


Imagem 59: Hipérbole com centro em $\boldsymbol{C(x_0, y_0)}$
Fonte:www.desmos.com/calculator.

Seja $\overline{OXY}$ o sistema de eixos ortogonais obtidos transladando o sistema OXY para a nova origem $\bar{O}$. Caso o eixo real seja paralelo ao eixo das abscissas. Como $\bar{O} = (x_0, y_0)$ é o centro, temos que um ponto $P = (x, y) = (\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0)$ pertence a hipérbole se, e somente se, $\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1 \leftrightarrow \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$. Pode-se provar de forma análoga para hipérboles com o eixo real paralelo ao eixo OY.

Atividade 4.09 – Dada a hipérbole de equação $\frac{(x+3)^2}{20} - \frac{(y-2)^2}{12} = 1$, determine:

a) O centro;

A coordenada do centro são é (-3, 2).

b) A medida do eixo real e do eixo conjugado;

A distância do vértice ao centro é $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, logo o eixo real é $4\sqrt{5}$. Para o eixo conjugado temos $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, logo a distância do eixo conjugado é $4\sqrt{3}$.

c) A distância focal;

Para calcular a distância focal usamos $c = \sqrt{20 + 12} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, logo a distância focal é $8\sqrt{2}$.

d) Os focos;

Como o centra da hipérbole é $(-3, 2)$ e a hipérbole está sobre o eixo x, teremos as coordenadas $F_1(-3 + 8\sqrt{2}, 2)$ e $F_2(-3 - 8\sqrt{2}, 2)$.

e) A excentricidade;

Para calcular a excentricidade basta fazer $e = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = 2\sqrt{10}$.

5 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

A aplicação das atividades foi realizada com uma turma do terceiro ano do Ensino Médio, no período noturno do Colégio Dois Vizinhos. Escolhemos essa turma pelo desafio que ela representa, segundo uma conversa com a professora titular dos estudantes do período noturno, apresentam maiores dificuldades em relação aos demais alunos, pois, segundo ela, os estudantes chegam cansados em sala de aula pois trabalham durante o dia. Além disso, possuem um número maior de faltas nas aulas por diversos motivos. Também, por conta disso, não é costume cobrar atividades extraclasse para os estudantes do período noturno. Nessa conversa, a professora fala para aplicarmos a ideia de pontos em Geometria Analítica.

A seguir apresentamos um relato de como foi a interação com os alunos, bem como o resultado dos testes aplicados durante a pesquisa.

5.1 PRIMEIRO DIA: PRÉVIA COM OS ESTUDANTES

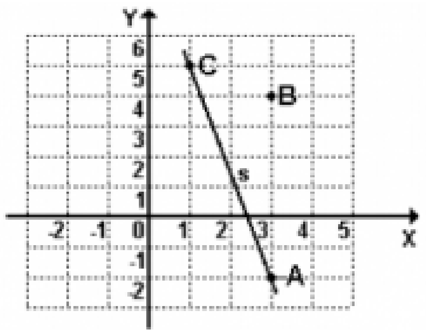
No primeiro dia, buscamos investigar alguns aspectos relevantes ao trabalho antes de ser aplicado com os estudantes, porque tínhamos dúvidas sobre o conhecimento prévio dos alunos em Geometria Analítica. Buscamos também averiguar, com os estudantes, o uso de ferramentas computacionais, caso que poderia existir alguma resistência, ou dificuldades, ao uso de computadores. Outro ponto importante foi a apresentação do *Software* para os estudantes e seus principais recursos. A investigação foi feita na forma de questionário aplicado na turma, além disso, é composta por algumas observações do pesquisador.

No questionário 1, disponível no anexo A, colocamos perguntas do tipo: Qual o significado de pontos em Geometria? Qual a distância entre os pontos? A que quadrante pertence os pontos? E outras com o intuito de identificar o conhecimento dos estudantes. Além disso, no primeiro dia foi feita perguntas aos participantes se todos possuíam endereço de e-mail, ou se algum estudante teria dificuldades em usar um computador.

No questionário, o estudante foi orientado a não expor seu nome, colocando apenas o número da chamada para ordenar. No primeiro encontro participaram treze estudantes. As respostas são analisadas de modo geral, sem nos ater a detalhes de cada estudante, ou a estudo estatístico aprofundado. Revelamos, assim, algumas respostas interessantes ou inusitadas relevantes para o tema.

Pergunta 1: qual o significado de ponto em geometria? Em relação ao significado de ponto em geometria, alguns estudantes colocaram que "é usado para se referir a uma localização geográfica". Outros colocaram que "determina uma posição no espaço". Para outros "é usado para calcular distâncias".

Pergunta 2: Considere a reta s e os pontos A, B e C representados na figura a seguir.



a) Quais as coordenadas cartesianas dos pontos A, B e C?

$A = (\quad , \quad);$ $\qquad B = (\quad , \quad);$ $\qquad C = (\quad , \quad);$

b) Qual a distância entre o ponto A e o ponto C? E a distância entre o ponto A e o ponto B?

A questão 2 é para determinar se os alunos têm conhecimento de Geometria Analítica, sobre retas e pontos que pertencem ou não, pois é um conteúdo visto em anos anteriores. No item a) sobre as coordenadas dos pontos dados, é possível identificar que os estudantes conhecem um pouco, mas vários de estudantes trocam a ordem dos eixos, ou erra ao contar a posição, ou não identifica o número negativo.

No item b) sobre a distância entre os pontos, alguns estudantes colocaram: "de -1 a 5" sem se preocupar com o valor ou de qual eixo está falando. Outros conseguiram calcular a distância de A até B, visto que estão numa reta paralela ao eixo y. O que não aconteceu com a distância de A até C, pois estes não estava sobre uma reta paralela a um dos eixos. Uma observação interessante é que um estudante chegou a pesquisar na internet a fórmula da distância entre pontos em Geometria Analítica, mas ainda não conseguiu resolver, o que reforça que sem orientação e um planejamento o aluno não consegui lidar com tecnologias para a aprendizagem de matemática.

Pergunta 3: Os pontos $A(-4,-2)$ e $B(-2,2)$ pertencem respectivamente aos quadrantes: a) 1º e 2º; b) 2º e 3º; c) 3º e 2º; d) 4º e 2º; e) 3º e 4º.

Pergunta 4: O ponto $A = (m+3, n-1)$ pertence ao 3º quadrante, para os possíveis valores de m e n: a) $m > 3$ e $n < 1$; b) $m < 3$ e $n > 1$; c) $m < -3$ e $n > 1$; d) $m < -3$ e $n < -1$; e) $m < -3$ e $n < 1$

Pergunta 5: Num triângulo ABC, sendo $A = (4,3)$, $B = (0,3)$ e C um ponto pertencente ao eixo Ox com $AC = BC$. O ponto C tem como coordenadas: a) $(2,0)$; b) $(-2,0)$; c) $(0,2)$; d) $(0,-2)$; e) $(2,-2)$.

Nas questões de 3 a 5 relacionadas a que quadrante estão os pontos, ou quais os possíveis valores de m e n para o ponto pertencer ao 3º quadrante, e ainda, qual a coordenada do ponto C no triangulo. Por mais que sejam perguntas com alternativas, de múltipla escolha, nenhum estudante conseguiu, de fato, responder, o que nos induz a pensar que os conhecimentos sobre sistemas de coordenadas e pares ordenadas ou pontos, são ainda inadequados.

Quando perguntados sobre o uso de computadores nenhum estudante manifestou desinteresse pelo tema, mas pelo contrário mostraram curiosidade sobre tal. Outra dúvida pertinente a pesquisa era se os estudantes usavam algum e-mail, e quando perguntados todos, sem exceção, possuíam um endereço de e-mail. Portanto, não teríamos problemas em realizar a pesquisa. Finalizamos o primeiro dia com a apresentação do software a ser utilizado.

5.2 SEGUNDO DIA: INÍCIO DAS ATIVIDADES

No segundo dia de aplicação, estavam presentes no laboratório 17 estudantes para duas aulas. No início da primeira atividade discutimos sobre o uso do software Desmos. Descrevemos as atividades aplicadas apenas comentando no modo geral, pois são semelhantes ao que foi proposto no capítulo 4 desta dissertação.

Na primeira atividade, todos os estudantes são convidados a ter o contato inicial com o *Software* Desmos. Aqui definimos os eixos do plano cartesiano, os eixos x e y, como sendo, respectivamente, abscissa e ordenada.

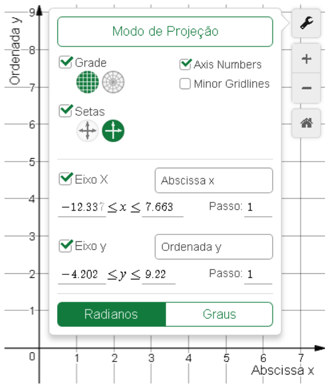


Imagem 60: configurações em Desmos
Fonte: www.desmos.com/calcutator.

Também nesta atividade, definimos os quadrantes do plano cartesiano. Para isso, escolhemos o ponto (6, 4) para representar o primeiro quadrante. Os demais quadrantes foram utilizados o mesmo número, alterando o sinal para cada caso. Aqui os próprios alunos falaram quais são as coordenadas para os demais quadrantes.

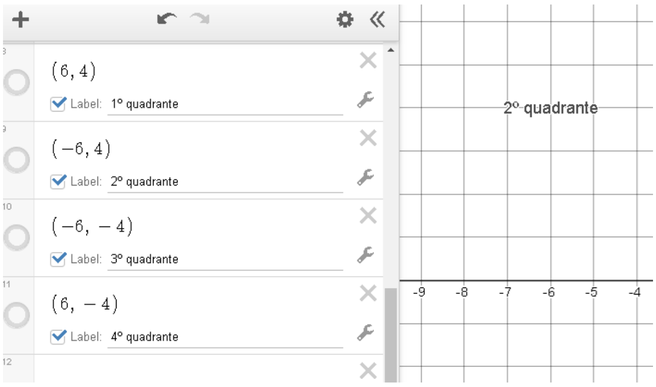


Imagem 61: Pontos nomeando os quadrantes
Fonte: www.desmos.com/calculator/ ogk6thtvzb.

A segunda atividade consistia em encontrar alguns pontos de referência principais da cidade a partir do referencial dado. Para isso, foi enviado por e-mail a cada aluno um mapa da cidade para que fosse colocado no Desmos conforme a orientação.

Para essa atividade tivemos respostas diferentes, no sentido de exatidão das coordenadas geográficas, portanto foi comentado sobre como arredondar valores e sobre o ponto exato do local. Portanto, os estudantes escolheram se queriam arredondar o valor para números inteiros ou tentar aproximar ao máximo do local exato. Neste caso, a maioria dos estudantes optou por arredondar para números inteiros. Cada localização foi definida a partir do referencial escolhido.

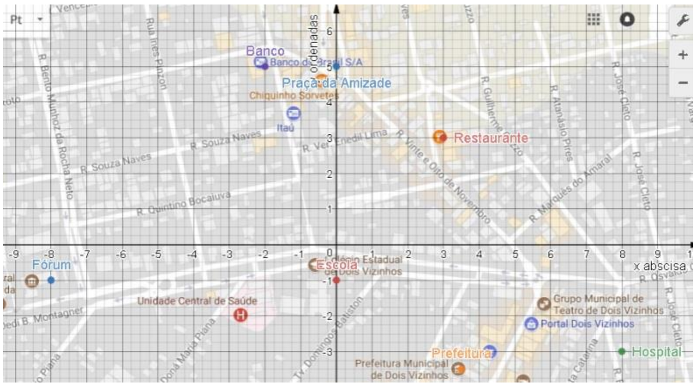


Imagem 62: atividade com mapa da cidade.
Fonte: www.desmos.com/calculator/w3jytlolxc.

A terceira atividade consistia em determinar em que região cada ponto da lista pertencia. Os pontos são: $A(3,3)$,$B(-5,1)$, $C(-1,-6)$, $D(2,-3)$, $E(0{,}4)$, $F(3,0\ )$, $G(-4,0)$ e $H(0,2)$, I(5, 4.99). Nesta atividade queremos saber onde os pontos estão no plano. Em qual quadrante estão? Se estão no eixo das abscissas ou ordenadas? Ou se pertencem a bissetriz dos quadrantes ímpares ou pares?

Todos os estudantes colocaram os pontos e seus quadrantes corretamente. A dúvida persistiu quando o ponto pertencia aos eixos ordenados, onde foi explicado que não pertencem a um quadrante ou a outro e sim ao eixo das abscissas ou das ordenadas.

Também, alguns alunos questionaram o ponto $I(5, 4.99)$, pois, visualmente, pela tela inicial, parece que o ponto pertence a bissetriz dos quadrantes ímpares. Ainda assim, a maioria dos estudantes afirmavam que pertence a bissetriz dos quadrantes ímpares. Porém, com o recurso de aproximar a visão do ponto viram que o ponto não pertence a bissetriz dos quadrantes ímpares. Assim, é visto que para que um ponto pertença a bissetriz dos quadrantes ímpares deve-se ter a coordenada x igual a y.

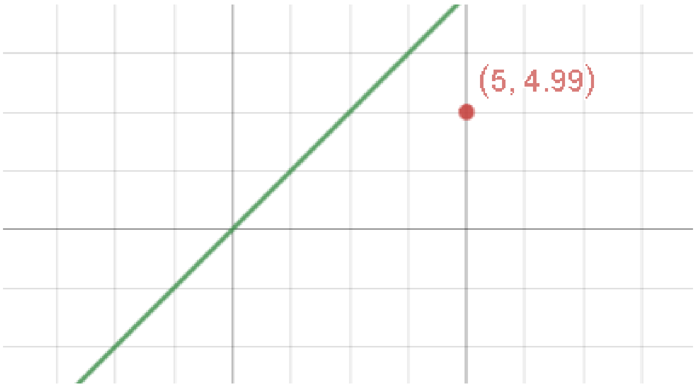


Imagem 63: Ponto não pertence a reta.
Fonte: www.desmos.com/calculator/vwhqw98as3.

Na quarta atividade inserimos a noção de controle deslizante. Primeiro é dito aos estudantes que eles devem fazer um ponto se mexer na tela do computador. Por um momento eles se perguntam como iam fazer isso. Alguns suponham que seria uma tarefa muito difícil. Para isso, com o *Software* em estágio inicial inserimos um ponto com coordenadas (a, b), criando assim, controles deslizantes para a e para b.

Após criado o ponto (a, b), bem como os deslizantes de a e b, os alunos são instruídos a clicar em cima do ponto de movê-lo pela tela por onde bem desejar. Isso causa comentários, entre eles, do tipo: “nossa, que legal”, “oh que massa”, “agora eu gostei”, entre outros.

Após isso é aconselhado a modificar os valores no deslizante de a, afim de verificar que o ponto se move apenas na horizontal, ou seja, no eixo x. Depois, modificamos os valores no deslizante b, para verificar que o ponto se move na vertical, ou seja, no eixo y.

Em seguida é mostrado o recurso para o ponto se mover sozinho. Nele os valores de a e b se modificam sozinhos para que o ponto se mova pela tela do computador. É possível também modificar a velocidade em que se altera os valores, para que o ponto faça caminhos diferentes.

No final desta atividade, sugerimos que os estudantes escolhessem uma imagem da internet para que possam colocar no software e fazer a imagem se mover igual ao ponto criado.

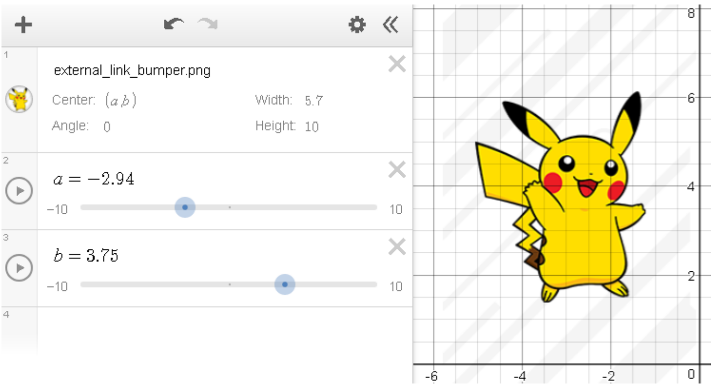


Imagem 64: Atividade com ponto móvel.
Fonte:deathbattle.wikia.com/wiki/File:Pikachu_(Pok%C3%A9mon_Dream_World).png.

Uma das dificuldades desta atividade foi que os alunos não sabiam onde estavam salvando a imagem. Pois não estavam habituados a usar o software Linux Educacional dos computadores escolares. Mas ainda assim, ficou disponível no ícone de *download* no navegador.

5.3 TERCEIRO DIA: EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Nesse dia estavam presentes 22 estudantes para uma aula. Conforme orientação da professora, estes estudantes não estão habituados a fazerem atividades ou exercícios extraclasses. Por isso, para esse terceiro encontro de apenas uma aula propusemos alguns exercícios adicionais. Os exercícios foram extraídos do livro de Sousa (2016). No primeiro exercício temos um plano cartesiano com seis pontos espalhados pelos quadrantes. Era necessário olhar para um gráfico com pontos dados e dizer as coordenadas. Também foi pedido para que os estudantes identificassem quais quadrante estavam colocados cada ponto. Nenhuma dificuldade foi encontrada nesta atividade.

No segundo exercício temos um sistema de mapeamento da Terra, fazendo analogia ao sistema cartesiano. Nele se pergunta as coordenadas geográfica dos navios situados nos pontos A, B, C, D e E. Alguns alunos tiveram dificuldade de notar que os números estavam do lado do mapa, mas é esclarecido com a orientação do professor, outros causavam confusão com os termos longitude e latitude.

O terceiro exercício é uma questão da OBMEP, que relaciona com as coordenadas do plano quatro pontos sobre área e perímetro de quatro figuras planas. Nenhum estudante teve dúvidas com relação a esse exercício.

O quarto exercício os estudantes deveriam construir um plano cartesiano no caderno sem utilizar o Desmos para isso. Alguns estudantes utilizaram o Desmos para tirar suas dúvidas. Os pontos que deviam ilustrar eram $A(3,-1)$, $B(0,4)$, $C(-3,2)$, $D(3,4)$, $E(-2,-4)$ e $F(-1,0)$.

Por fim, no último exercício temos pontos sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares e a bissetriz dos quadrantes pares. É dado um gráfico mostrando os pontos A, B, C, D, E, F, é necessário identificar com as respectivas coordenadas: $(-2,-2)$, $(1,1)$, $(3,3)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(2,-2)$. Este exercício visa garantir que o estudante compreenda que o ponto na bissetriz dos quadrantes pares possui uma coordenada positiva e outra negativa, e quando pertencer a bissetriz dos quadrantes ímpares as coordenadas são iguais. Por isso, pergunta-se os valores de x e y para que os pontos $(7,y)$ e $(x,9)$ pertençam respectivamente a bissetriz dos quadrantes ímpares e a bissetriz dos quadrantes pares.

5.4 QUARTO DIA: DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Nesse dia estavam presentes no laboratório 25 estudantes para duas aulas. Para esse dia o objetivo era definir a fórmula da distância entre dois pontos. Optamos em desenvolver na primeira aula a noção intuitiva de distância entre dois pontos sobre retas paralelas aos eixos ordenados, e, posteriormente, na segunda aula, pontos em qualquer localização.

Para a primeira atividade sugerimos a criação de um ponto móvel no plano de coordenada $A(a,b)$, com controles deslizantes em a e b. Questionou-se aos participantes como era possível escrever outro ponto móvel, mas que esteja sempre na mesma coordenada y de A. Logo, é explicado que para que outro ponto tenha a mesma coordenada y de A é necessário que a ordenada tenha o mesmo valor de b. Assim, explica-se que devemos criar outro ponto de coordenada $B(c, b)$, com mais um controle deslizante para c. Ao movimentar o ponto A é visto que o ponto B sempre está a mesma coordenada y.

Ainda nessa atividade modificamos o controle deslizante de c e colocamos $c = a + 5$. Assim, o ponto A dista 5 unidades de B. Modificamos o ponto A para as coordenadas $(0, 0)$ é visto que o ponto B está a 5 unidades de distância de A, pois está com coordenada $(5, 0)$ neste momento. Nesse caso, os alunos não conseguem associar nenhuma operação as coordenadas para identificar a distância. Num segundo momento, o ponto A é ponto nas coordenadas $(0, 3)$, fazendo com que o ponto B fique em $(5, 3)$. Nesse caso, os estudantes só conseguem identificar que a distância é 5 pois contam, num duplo sentido, com a ajuda da malha quadriculada do plano e as unidades de medida indicadas.

Somente quando o ponto A é deslocado para $(2, 3)$ e vemos o ponto B em $(7, 3)$ é que conseguimos fazer uma análise das operações nas coordenadas. Pois neste caso, para encontrar a distância 5 demos fazer a operação $7 - 2 = 5$. Posteriormente colocamos o ponto A na coordenada $(-6, 3)$, fazendo com que B fique em $(-1, 3)$. A dúvida entre os estudantes ficou mais evidente, pois estávamos com números negativos agora. A conta que devemos fazer é $-6 - (-1)$, mas o resultado dessa operação ainda é negativo. Por isso, agora colocamos o módulo em todas as contas, para calcular a medida entre os dois pontos, usamos $d = |x_2 - x_1|$.

Por fim, buscamos colocar o ponto A na coordenada (-2, 3) e o ponto B em (3, 3). Daí viu-se que sempre devemos fazer a diferença entre as coordenadas em módulo. Podendo fazer a operação $|-2-3|$ ou ainda $|3 - (-2)|$ para chegar a distância entre esses dois pontos. No final da atividade, deixamos o deslizante c livre e inserimos a fórmula $d = |a - c|$, para calcular a distância de A até B.

A mesma generalização foi feita para pontos sobre retas paralelas ao eixo y. Nesse instante, também, foram feitos exercícios de fixação com pontos do mesmo tipo. Quando foram misturados pares de pontos em que alguns estavam sobre retas paralelas ao eixo x e outros estavam sobre retas paralelas ao eixo y, alguns alunos não perceberam quais coordenadas deveriam usar. Alguns colocaram que a distância entre os dois pontos era zero, sem perceber que a outra coordenada era diferente, mas isso é revisto com a explicação do professor/pesquisador.

Outros, por sua vez, tinham muitas dúvidas com relação as regras de sinais. Mas, com o Desmos, os estudantes puderam fazer a experimentação e verificar cada resultado.

Na segunda aula definimos como objetivo determinar a distância entre dois pontos quaisquer. Para isso, e para motivar os estudantes sobre o tema, decidimos utilizar o mapa da cidade já visto anteriormente. Posteriormente, queríamos calcular a distância entre a escola, localizada no ponto $A(0,-1)$ e um restaurante localizado no ponto $B(3,3)$. Colocamos o mapa e os pontos no Desmos. Depois disso, desejamos construir uma reta na horizontal sobre o ponto $(0,-1)$ para isso basta criar a reta $y=-1$. Depois construímos uma reta na vertical passando pelo ponto $(3,3)$, para isso digitamos $x=3$.

Depois disso, alguns alunos já comentaram se íamos “usar Pitágoras”. Antes precisamos identificar o ponto de interseção das retas com coordenadas $C(3,-1)$. Agora sim, calculamos a distância de A até C como visto na primeira aula $|3-0|=3$ e a distância de B até C igual $|-1-3|=4$. Finalmente aplicando o teorema de Pitágoras temos $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$. Que resulta em $d=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=5$.

Depois a segunda atividade definimos os pontos $A(x_1,y_1)$ e $B(x_2,y_2)$, com deslizantes em x_1,x_2,y_1 e y_2, e desejamos calcular a distância entre os pontos A e B. Ao colocar os pontos é necessário que se mova qualquer um deles para que não fique um em cima do outro para melhor visualização.

Feito isso, construímos ainda uma reta na horizontal passando por A colocando a equação $y=y_1$. Na sequência, construímos uma reta na vertical passando por B com a equação $x=x_2$. Depois identificamos o terceiro ponto C de coordenada (x_2,y_1). É explicado que a distância de A até C é $|x_2-x_1|$ e a distância de B até C é $|y_2-y_1|$ e, que aplicando o teorema de Pitágoras temos a fórmula $d_{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. Assim, inserindo esta fórmula em Desmos Podemos calcular a distância de quaisquer pontos no plano.

Foram feitos alguns exercícios sobre a distância entre dois pontos. Foram colocados pares de pontos ordenados, onde os estudantes deveriam calcular a distância entre cada pares de pontos. Ao final de cada exercício o estudante podia verificar se o resultado estava certo ao modificar as coordenadas da atividade anterior criada em Desmos.

5.5 QUINTO DIA: PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO

Neste dia, estavam presentes no laboratório 26 estudantes para uma aula de Matemática. Neste dia a finalidade da aula foi de construir a fórmula para calcular as coordenadas de um ponto médio de um segmento de reta, ou ponto médio entre dois pontos dados.

Na primeira atividade usamos a noção de ponto médio apenas no eixo x. Por isso, sugerimos nesta atividade que desmarque a opção de utilizar o eixo y em Desmos, como planejado na imagem 26. Depois disso, é discutida a definição de ponto médio onde os estudantes afirmam que "*é o ponto que fica bem no meio dos dois*". Assim, é explicado que o ponto médio de um segmento *é um ponto que pertence a esse segmento, e, ainda, é equidistante dos extremos.*

Então pela nossa definição, e como queremos trabalhar apenas com o eixo x, criamos os pontos $A(a, 0)$ e $B(b, 0)$ para serem os extremos de um segmento de reta. Assim, queremos encontrar um ponto $C(c, 0)$ que é o ponto médio do segmento AB.

Para auxiliar o entendimento do ponto médio criamos mais dois pontos, um de coordenada $C'(a + k, 0)$ e outro de coordenada $C"(b - k, 0)$. Feito isso, ao modificar os valores do deslizante k vemos que os pontos se aproximam ou se afastam. E ainda, podemos notar que o ponto médio acontece visualmente quando os pontos coincidem e daí temos $a + k = b - k$. Desta equação resulta que $k = \frac{b-a}{2}$. Ao substituir k em uma das expressões temos que o valor do ponto médio $c = a + k = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$. Portanto, no deslizante do ponto C inserimos a expressão $c = \frac{a+b}{2}$. Aqui informamos que podemos proceder de forma análoga no eixo y, foi deixado como exercício.

Na segunda atividade queremos esboçar a fórmula do ponto médio entre dois pontos. Para isso, criamos dois pontos genéricos do tipo $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ para determinar o ponto médio entre estes. Nesta atividade os estudantes criaram os pontos em Desmos e, em seguida, um ponto médio M de coordenadas (x_m, y_m). No entanto, ao criar os deslizantes de x_m e y_m colocaram as fórmulas $x_m = \frac{x_1+x_2}{2}$ e $y_m = \frac{y_1+y_2}{2}$. Assim, ao movimentarem os pontos no plano verificam visualmente que sempre M era o ponto médio do segmento AB, para confirmar foi orientado que determinem as distâncias.

Por fim, para última atividade da noite tínhamos o problema do poço entre as casas. Para isso, sugeri que os estudantes selecionassem duas imagens de casinhas pela internet e uma imagem de um poço. As casas foram colocadas nos pontos $(-2, 5)$ e $(6, 1)$. Enquanto, os alunos calcularam as coordenadas do ponto médio para colocar o centro do poço. Desse modo, colocaram o poço no ponto $(2, 3)$. Notou-se em alguns alunos uma dificuldade em operações com números negativos. Isso foi resolvido com a explicação do professor no dia.

5.6 SEXTO DIA: AVALIAÇÃO

No dia da avaliação estavam presentes 25 estudantes. Na avaliação os alunos foram orientados a identificarem apenas pelo número da chamada e para não deixar questões em branco. Também neste dia, responderam um questionário sobre a utilização do software Desmos. Diferente das aulas em laboratório a avaliação foi feita em sala de aula para que cada aluno relatasse o que aprendeu ou não. Além disso, o aluno não tinha acesso a qualquer material de consulta.

Para esta avaliação temos uma média geral das notas, em uma escala de 0 a 10, de 7,94. Apenas 3 alunos foram com notas inferior 6. Sendo que uma aluna tinha sido transferida recentemente para a turma, somente, na última semana de aplicação, ou seja, participou somente do 5º e 6º dia. O gráfico a seguir mostra a distribuição das notas pelos alunos.

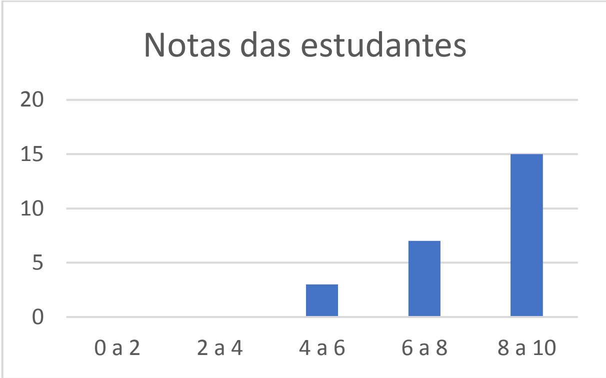


Imagem 65: Notas dos alunos
Fonte: Amostra do pesquisador

As questões são bastantes similares ao aplicado no questionário 1, porém além de valores alterados, nenhuma das questões tinham alternativas. Mesmo assim, tivemos um resultado acima do esperado.

Na questão 1 perguntamos: O que você entende sobre pontos em geometria? Embora seja uma pergunta aberta e com várias possíveis respostas, 4 alunos zeraram a questão. Os demais alunos responderam de várias formas como por exemplo: “determinam uma posição no espaço”, “é um objeto de dimensão zero”, “são coordenadas de um plano cartesiano”, “um modo de marcar um lugar”, “indicam a localização de um objeto”.

A questão 2 apresentamos do seguinte modo: Considere os pontos A, B e C representados na imagem a seguir.

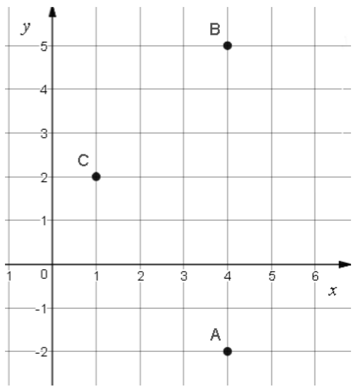


Imagem 66: Questão 2 do teste
Fonte: Anexo B

a) Quais as coordenadas cartesianas dos pontos A, B e C?

$$A = (\quad , \quad); \qquad B = (\quad , \quad);\ C = (\quad , \quad);$$

b) Qual a distância entre o ponto A e o ponto C? e do ponto A até o B?

Para o item (a) da questão todo responderam, embora tivemos 3 alunos que trocaram as coordenadas x por y. Já no item (b) tivemos 4 alunos que não responderam ou não conseguiram atingir a resposta correta. No item (b) também alguns alunos não precisaram responder com o uso da fórmula, mas sim usando a ideia de triângulos retângulos como na demonstração das aulas. Outros utilizaram a fórmula em sua resolução.

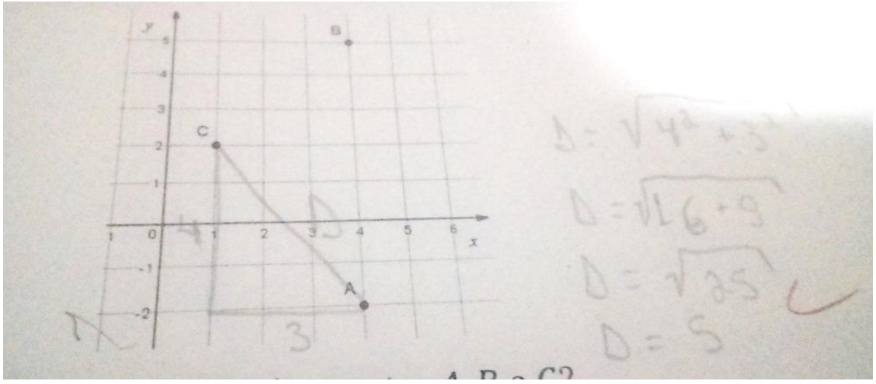


Imagem 67: Distância entre dois pontos resolvido por estudante.
Fonte: Amostra do pesquisador.

Na questão 3 temos: Os pontos $M(-5,-2)$ e $N(-3,4)$ pertencem respectivamente a quais quadrantes? Para esta questão temos somente um estudante que errou ao colocar que o ponto M pertence ao 1º quadrante. Os demais estudantes todos acertaram a questão.

Na questão 4 perguntamos: Para que valores de m e n, o ponto $A = (m+3, n-1)$ pertença ao 3º quadrante? Para esta questão tivemos 4 alunos que deixaram em branco ou não souberam responder. Além disso, outros 3 alunos erraram ela por se confundirem com as inequações, sem saber se usariam o maior ou o menor.

Questão 5: Num triângulo ABC, sendo $A = (4,3), B = (0,3)$ e C um ponto pertencente ao eixo Ox com $AC = BC$. Qual a coordenada do ponto C? Para esta questão temos 5 alunos que não tiveram ideia de como resolver. Embora exista um raciocínio algébrico para resolver esta questão, todos os estudantes optaram por fazer o desenho e retornar as coordenadas do ponto do ponto C. Ainda assim, 11 estudantes apresentaram uma resposta incompleta, apresentando somente o desenho, ou ainda, inverteram o valor das coordenadas. Os demais apresentaram respostas semelhante a seguinte.

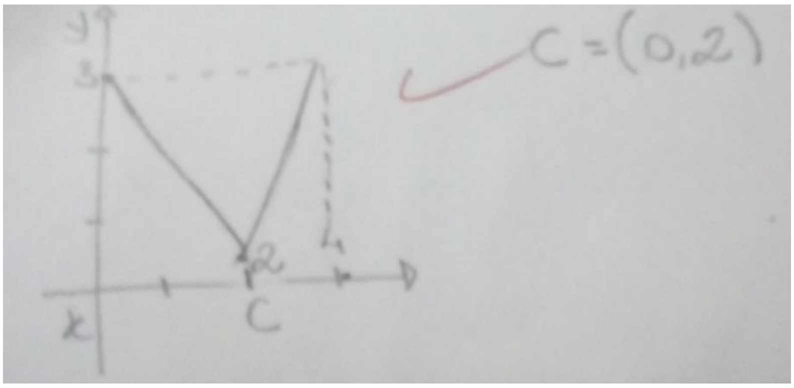


Imagem 68: Resposta do estudante a questão 5
Fonte: Amostra do pesquisador.

Além da avaliação teórica sobre os conteúdos ensinados os estudantes responderam um questionário sobre as aulas com o software Desmos. Neste questionário responderam perguntas de múltipla escolha sobre a utilização do software.

Com relação a primeira pergunta: você conseguiu realizar as tarefas de ensino? Nesta pergunta, de um total de 25 estudantes, 48% responderam quase todas, 28% sim todas, 20% nem todas e 4% nenhum. Embora, talvez, os que não tenham conseguido realizar todas as tarefas não tenham participado de todas as aulas.

Na segunda pergunta questionamos: qual o seu grau de satisfação utilizando o software Desmos? Para esta pergunta 18 estudantes responderam muito bom, 6 estudantes responderam apenas bom, nenhum estudante respondeu ruim, enquanto um estudante respondeu péssimo.

Na terceira pergunta verificamos: Você está satisfeito com sua aprendizagem em Matemática? Dentre os 25 alunos, 56% responderam muito satisfeito, 32% pouco satisfeito, 4% pouco insatisfeito e 8% muito insatisfeito.

Na quarta pergunta tínhamos: Como você avalia a qualidade do ensino com a utilização do software Desmos? Nessa questão temos uma avaliação positiva, em que dentre os 25 alunos, 76% avaliaram como muito bom, 24% apenas bom e nenhum marcou ruim ou péssimo.

Para a quinta pergunta queríamos saber sobre a facilidade de utilização do software Desmos. Portanto, questionamos: Você acredita que um aluno pode aprender a usar o Desmos sem o auxílio do professor? Para esta pergunta 60%, o equivalente a 15 estudantes, respondeu que sim, enquanto 40% responderam que não.

Para a sexta pergunta buscou-se a reflexão sobre a aprendizagem de cada aluno. Por isso, questionamos: Você aprendeu os conteúdos Matemática ensinados usando o Desmos? Para esta pergunta 21 alunos responderam que sim, enquanto 4 responderam que não.

A última pergunta: Quais as chances, em uma escala de 0 a 10, de você recomendar o software Desmos para algum amigo estudar matemática? Para esta pergunta sete estudantes responderam nota 10, três estudantes registraram a nota 9, outros nove estudantes anotaram nota 8, quatro estudantes marcaram nota 7 e dois assinalaram 6 e 5. Não teve nenhuma nota inferior a 5 nesta amostra.

Além disso, nesse questionário ainda continha uma questão aberta para que os estudantes escrevessem sua opinião sobre as aulas de matemática. Perguntamos: o que é possível melhorar para as aulas de matemática? A grande maioria colocou nada, outros colocaram “explicar mais devagar”, outros ainda “fazer mais atividades”, “usar mais o software” e alguns elogios.

6 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Esta pesquisa possui o objetivo de investigar a possibilidade de melhoria do ensino e aprendizagem de conteúdos de Geometria Analítica na escola básica com o uso do *software* Desmos. Por isso, criamos atividades para alguns dos conteúdos de Geometria Analítica no Ensino Médio, afim de averiguar essa possibilidade de melhoria da escola. Consideremos que cada atividade criada para esta pesquisa seja uma possibilidade de melhoria para o ensino na escola.

Durante a pesquisa mostramos o que é o *software* Desmos, suas configurações, seu funcionamento, peculiaridades e potencialidades que o *software* pode oferecer com a finalidade de conhecer melhor o recurso e melhorar o planejamento das atividades de ensino. Além disso, todas as atividades aqui propostas podem ser revistas e melhoradas, pois na realização das atividades de ensino pelos alunos, podemos observar que pode ser modificado, desta forma várias atividades propostas tem construções que são uma primeira solução à medida que seja aplicado podem ser corrigidas deixando em aberto novas possibilidades.

Logo no começo da aplicação, foi percebido o interesse dos estudantes pela forma como seria as aulas de matemática. Nesse período, os alunos mostraram motivação em participar das atividades, pois não conheciam o *software* antes e nenhuma experiência anterior, nas aulas de Matemática, em laboratório de informática.

O pré-teste feito com os alunos no começo da aplicação mostra que os alunos não possuíam o conhecimento sobre o conteúdo, de plano cartesiano e pontos, apesar de que parte desse conteúdo ser visto em anos anteriores. Também outra dificuldade do ensino básico foi amenizada ao realizar operações com números inteiros, pois era notável a dificuldade que os estudantes tinham em realizar operações com números negativos e regras de sinais.

No pós-teste temos um resultado bem satisfatório com uma boa média das notas dos alunos, também pela variedade de respostas, na questão aberta, que os estudantes mostraram. Dado o perfil dos alunos como descrito na seção 5 na conversa prévia com a professora da turma. A preocupação inicial da professora era que as atividades estivessem no mesmo nível de aprendizagem dos alunos.

Podemos ver o interesse dos estudantes ao realizar as atividades pelas falas que os estudantes produziam. Além disso, se tornou fácil acompanhar as atividades que realizavam, pois sempre que preciso chamavam a carteira para ver se a atividade estava correta. O erro, em geral, representa uma conotação ruim para o aluno, pois é entendido como uma falha ou engano. Essa concepção é transferida para o campo educativo e foi, por longo período, usado para caracterizar o que falta no estudante ou o que ele não fez em relação ao que é considerado correto ao desenvolver alguma atividade. Por isso, os estudantes estavam ansiosos para ver se sua atividade estava correta.

Alguns procedimentos feitos de maneira errada dão indicativos de como o estudante pensa sobre determinado conteúdo em comparação aos que são realizados de forma completamente correta. Nesta pesquisa procuramos compreender o caráter dos erros cometidos pelos alunos e suas causas. Por isso, propomos atividades diferenciadas como estratégia para a correção de tais erros.

No questionário de utilização do Desmos temos uma avaliação positiva por parte dos estudantes. No questionário é visto que a maioria dos alunos teve facilidade em usar o *software* e mesmo quando perguntados se aprenderam o conteúdo usando o *software* a maioria respondeu que sim. A professora da turma também relata sobre a facilidade de utilização e se interessa em levar as atividades com o *software* Desmos para outras turmas da escola.

Desse modo, podemos constatar que o objetivo deste trabalho, de fato, conforme o nosso ponto de vista, está alcançado devido ao resultado satisfatório que tivemos. Consideramos o resultado positivo tanto por parte dos estudantes como para o professor/pesquisador dada a facilidade do uso do *software* Desmos e pela criação de atividades diferenciadas em situação de ensino e aprendizagem.

Ao final, podemos notar que o trabalho foi aproveitado, tanto no sentindo motivacional, quanto no sentido da aprendizagem dos estudantes, pois incentivamos cada estudante a conhecer cada vez mais a Matemática. Ainda assim, os professores podem aproveitar o Desmos como mais uma possibilidade de ferramenta de ensino e aprendizagem para a uso na escola.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em primeiro momento devo constatar que este trabalho me fez repensar muito a minha prática docente, colaborando para o planejamento de minhas aulas e ainda sobre o uso de novas tecnologias. Os resultados desta pesquisa foram muito proveitosos, pois podemos constatar na avaliação final feita. Além disso, a maior satisfação desta pesquisa, foi o fato de compartilhar com cada estudante um conhecimento novo e ver que estavam compreendendo a necessidade de estudar tópicos de Geometria Analítica. Claro que este resultado está atrelado a toda a formação acadêmica obtida no decorrer do PROFMAT, além da orientação correta para esta finalidade.

Compreendemos as muitas adversidades de implementação de atividades que envolvam tecnologias na escola, mas não podemos fazer disso uma barreira para levar a tecnologia à escola. Desse modo, compartilhamos a proposta, entre outras razões, para incentivar o professor a fazer o uso de tecnologias diferenciadas na sala de aula.

Não se trata de defender o uso de um *software* ou outro no quesito educacional, e sim, de um planejamento cuidadoso e bem articulado. Afinal, a tecnologia hoje disponível, amanhã pode estar obsoleta. Também ao planejar as atividades notamos que o software poderia ter mais recursos, como um botão para: ligar dois pontos por um segmento de reta; ou ainda, deixar o rastro de um ponto em movimento. Porém, isso talvez não seja a proposta do *software* inicial.

A utilização dessa tecnologia em sala de aula fez com que os estudantes tivessem maior envolvimento em relação às aulas, pois eles se viam engajados na aprendizagem e na exploração de novos objetos. Conforme o comentário da professora titular da turma a utilização do software propiciou aos alunos novos desafios na resolução de problemas que envolvem a Geometria Analítica.

Defendemos o uso de tecnologias para que os estudantes possam investigar a matemática. Esta investigação deve ser um caminho que o educando possa ver a matemática com um novo olhar. A ponto de construir teorias, levantar hipóteses, conjecturar, testá-las e comprovar hipóteses que se tornem argumentação decisiva na construção do saber.

Além disso, apenas a primeira seção das atividades planejadas foi aplicada nesta pesquisa. Assim, um prosseguimento interessante desse trabalho seria a implementação das demais atividades em sala de aula que pode ser feito por qualquer outro professor de Matemática. As aplicações são importantes e, além do mais, com a finalidade de tornar mais clara e compreensível a linguagem formal matemática.

Espera-se ainda, que esta sequência de atividades, possa contribuir com a formação de um cidadão consciente, crítico em relação ao uso de tecnologias e ao mundo que o circunda. E que o professor possa se inspirar para criar atividades novas para motivar seus alunos.

Ressalta-se, ainda aqui, a importância do programa de pós-graduação Metrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, em especial a disciplina de Geometria Analítica, pois deu o aporte teórico necessário para esta pesquisa.

Por fim, o desenvolvimento deste estudo possibilitou uma análise de como um *software* pode contribuir para os estudos em matemática. A utilização de recursos digitais permitiu que estudantes realizem o estudo de forma mais detalhada. Além disso, permitiu a criação de várias atividades que podem servir de base para professores e estudantes de matemática.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. M. L. **Geometria euclidiana plana.** Coleção do professor de Matemática. Sociedade brasileira de Matemática. Fortaleza. 1995. 140p.

BEZERRA, L. H. **Geometria Analítica.** Licio Hernanes Bezerra, Ivan Pontual Costa e Silva. – 2º ed. – Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2010. 170 p.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. **Informática e Educação Matemática.** São Paulo: Autêntica. 1999.

BOYER, B. C. **História da Matemática.** Revisão de UtaC. Merzbach; tradução Elza F. Gomide 1ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRASIL, Ministério da Educação e da Cultura. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM).** v. 2: Matemática. Brasília, 2006.

CHAVANTE, E. **Quadrante matemática, 3º ano**: ensino médio. 1 ed. São Paulo. Edições SM, 2016.

COLÉGIO ESTADUAL DOIS VIZINHOS. **Projeto Político Pedagógico do Colégio Dois Vizinhos (PPP)**. Dois Vizinhos, 70 p. 2016.

DREYFUS, T. AdvancedMathematicalThinking Processes. In Tall, David. **Advanced Mathematical Thinking.** Kluwer Academic Publischer: Dordrecht – Holanda, 1991, p. 25-41.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**, tracução: Hygino H. Domingues. 2ª reimpressão. Campinas, SP: UNICAMP, 2004.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação e educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3. Ed. Ver. Campinas, SP: Autores Associados, 2009 – (Coleção formação de professores).

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. Ed. São Paulo: Atlas, 2007.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias**: o novo ritmo da informação, 8ª ed., Campinas, SP: Papirus, 2012. (Coleção Papirus Educação)

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica.** 7. Ed. São Paulo: Atlas, 2010.

MASSETO, M. T. Mediação Pedagógica e Tecnológias de informação e Comunicação. In: **Novas tecnologias e mediação pedagógica.** 13ª ed. (org) MORAN, J. M; MASSETO, M. T; M.; A. B., Campinas – SP: Papirus, 2000. (Coleção Papirus Educação) p. 141-170.

MODERNA. **Conexões com a matemática.** Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. Editor responsável Fabio Martins de Leonardo. 3 eds. São Paulo, 2016.

OLIVEIRA NETTO, A. A. de. **Metodologia da pesquisa científica:** guia prático para a apresentação de trabalhos acadêmicos. 3. ed. rev. e atual. Florianópolis: Visual Books, 2008.

OLIVEIRA, D. P. R. **Planejamento Estratégico:** conceitos, metodologia e práticas. 23. Ed. São Paulo: Atlas, 2007.

OLIVEIRA, Francisco Diego Moreira. **O software GeoGebra como ferramenta para o ensino da Geometria Analítica.** Dissertação de mestrado. Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Pró-Reitoria de Pós-Graduação. Mossoró, 2014. 61 f,: il.

ROSA, J. E. **Proposições de Davydov para o ensino de matemática no primeiro ano escolar**: inter-relações dos sistemas de significações numéricas. Tese (doutorado). Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Humanas. Curitiba. 2012.

SANTOS, A. T. C. **O Estado da Arte das Pesquisas brasileiras sobre Geometria Analítica no período de 1991 a 2014**.Tese (doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP. São Paulo. 2016.

SILVA, Wellington Manoel Santos da. **Uma abordagem dinámica e inovadora para o ensino de geometría analítica no ensino médio**. 2013. 156 f. : il. + 1 DVD. Dissertação – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2013. Bibliografia: f. 132-134. Apêndices: 135-156.

SOUSA, J. R. #**Contato matemática: 3º ano**. 1. Ed. – São Paulo. FTD, 2016.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ. Sistema de Bibliotecas. **Normas para elaboração de trabalhos acadêmicos.** Curitiba: UTFPR, 2009.

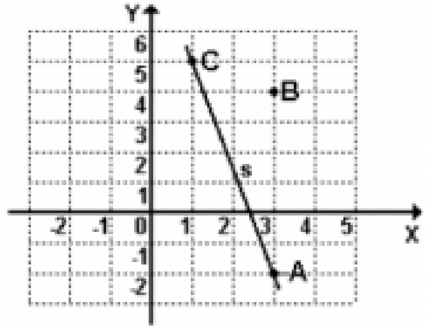
VALENTE, J. A. Análise dos diferentes tipos de software. In: **O computador na sociedade do conhecimento.** Campinas: UNICAMP. 1999.

ANEXO A – Questionário de prévio da pesquisa

Questionário 1 – Pré-teste

1. Qual o significado de ponto em geometria?

2. Considere a reta s e os pontos A, B e C representados na figura a seguir.



c) Quais as coordenadas cartesianas dos pontos *A, B* e *C*?

$A = (\quad , \quad);$ $B = (\quad , \quad);$ $C = (\quad , \quad);$

d) Qual a distância entre o ponto *A* e o ponto *C*? E a distância entre o ponto A e o ponto B?

3. Os pontos A(-4, -2) e B(-2, 2) pertencem respectivamente aos quadrantes:

a) 1º e 2º
b) 2º e 3º
c) 3º e 2º
d) 4º e 2º
e) 3º e 4º

4. O ponto $A(m+3, n-1)$ pertence ao 3º quadrante, para os possíveis valores de m e n:

a) $m > 3$ e $n < 1$
b) $m < 3$ e $n > 1$
c) $m < -3$ e $n > 1$
d) $m < -3$ e $n < -1$
e) $m < -3$ e $n < 1$

5. Num triângulo *ABC*, sendo $A(4,3)$, $B(0,3)$ e C um ponto pertencente ao eixo Ox com AC=BC. O ponto C tem como coordenadas:

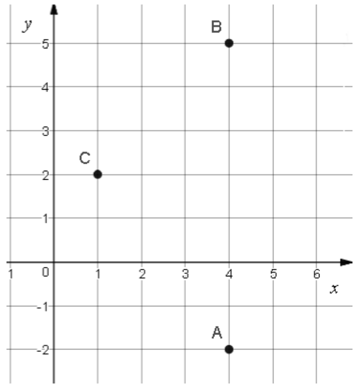
a) $(2,0)$
b) $(-2,0)$
c) $(0,2)$
d) $(0,-2)$
e) $(2,-2)$

ANEXO B – Questionário pós pesquisa

Questionário 2 – pós-teste

1. O que você entende sobre pontos em geometria?

2. Considere os pontos A, B e C representados na figura a seguir.



e) Quais as coordenadas cartesianas dos pontos A, B e C?

$$A = (\quad ,\quad); \qquad B = (\quad ,\quad); \; C = (\quad ,\quad);$$

f) Qual a distância entre o ponto A e o ponto C? e do ponto A até o B?

3. Os pontos $M(-5,-2)$ e $N(-3,4)$ pertencem respectivamente a quais quadrantes?

4. Para que valores, o ponto $A = (m+3, n-1)$ pertença ao 3º quadrante?

5. Num triângulo ABC, sendo $A = (4,3), B = (0,3)$ e C um ponto pertencente ao eixo Ox com $AC = BC$. Qual a coordenada do ponto C?

ANEXO C – Questionário de utilização do Desmos

Questionário Desmos.

1. Você conseguiu realizar as tarefas de ensino?

( ) Sim todos.

( ) Quase todos.

( ) Nem todos.

( ) Nenhum.

2. Qual o seu grau de satisfação com as aulas de matemática utilizando o software Desmos?

( ) Muito bom.

( ) Apenas bom.

( ) Ruim.

( ) Péssimo.

3. Você está satisfeito com a sua aprendizagem em Matemática?

( ) Muito satisfeito.

( ) Pouco satisfeito.

( ) Pouco insatisfeito.

( ) Muito Insatisfeito.

4. De modo geral, como você avalia a qualidade do ensino com a utilização do software Desmos?

( ) Muito bom.

( ) Apenas bom.

( ) Ruim.

( ) Péssimo.

5. Você acredita que um aluno pode aprender usar o Desmos sem o auxílio do professor?

( ) Sim. ( ) Não.

6. Você aprendeu os conteúdos de matemática ensinados usando o Desmos?

( ) Sim. ( ) Não.

7. Quais as chances, em uma escala de 0 a 10, de você recomendar o software Desmos para algum amigo estudar matemática?

   ( )0, ( )1, ( )2, ( )3, ( )4, ( )5, ( )6, ( )7, ( )8, ( )9, ( )10.

DEPOIMENTO: O que é possível melhorar para as aulas de matemática? Críticas, sugestões e elogios.

ANEXO D – Demonstração Fórmula da Distância entre Ponto e reta.

Fórmula da distância entre ponto e reta

Para essa demonstração foi utilizada a ideia de reta perpendicular, pontos de interseção e distância entre dois pontos. Seja o ponto $P(x_1, y_1)$ e a reta $r: ax + by + c = 0$, então a distância entre P e r é dada por $d_{P,r} = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Seja a reta $r: ax + by + c = 0$ e s uma reta paralela a reta r, então s é da forma $bx - ay + k = 0$, como s deve passar por $P(x_1, y_1)$, então $k = ay_1 - bx_1$. Assim, s é da forma $bx - ay + ay_1 - bx_1 = 0$.

Portanto, devemos resolver o sistema linear do tipo:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ bx - ay + ay_1 - bx_1 = 0 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por a e a segunda equação por b, em seguida somando os resultados obtemos:

$$b^2x + a^2x + aby_1 - b^2x_1 + ac = 0$$

Colocando x em evidência e em seguida isolando-o, encontramos o seguinte valor para x.

$$x = \frac{b^2x_1 - aby_1 - ac}{a^2 + b^2}$$

Substituindo o x da equação $ax + by + c = 0$ obteremos o seguinte:

$$a\left(\frac{b^2x_1 - aby_1 - ac}{a^2 + b^2}\right) + by + c = 0$$

Isolando y temos:

$$y = \frac{a^2by_1 - ab^2x_1 + a^2c}{(a^2 + b^2)b} - \frac{c}{b}$$

Tirando o mínimo múltiplo comum e ajustando o resultado obtemos:

$$y = \frac{a^2by_1 - abx_1 + a^2c - a^2c - b^2c}{(a^2 + b^2)b}$$

Logo, teremos:

$$y = \frac{a^2by_1 - abx_1 - b^2c}{(a^2 + b^2)}$$

Podemos afirmar que o ponto de interseção das duas retas é da forma

$$(x, y) = \left(\frac{b^2x_1 - aby_1 - ac}{a^2 + b^2}, \frac{a^2by_1 - abx_1 - b^2c}{(a^2 + b^2)}\right)$$

Queremos a distância entre o ponto de esse ponto e o ponto $P(x_1, y_1)$. Utilizando a fórmula $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Primeiro faremos a diferença $x_1 - x_2$ da seguinte forma:

$$x_1 - \frac{b^2x_1 - aby_1 - ac}{a^2 + b^2}$$

Após o mínimo múltiplo comum e ajustando o resultado obtemos:

$$\frac{a^2x_1 + b^2x_1 - \ b^2x_1 + aby_1 + ac}{a^2 + b^2}$$

Colocando a em evidência temos:

$$\frac{a(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2} \ (*)$$

Fazendo o mesmo com $y_1 - y_2$, obteremos:

$$y_1 - \frac{a^2by_1 - abx_1 - b^2c}{(a^2 + b^2)}$$

$$\frac{a^2y_1 + b^2y_1 - \ a^2by_1 + abx_1 + b^2c}{(a^2 + b^2)}$$

Ao final teremos:

$$\frac{b(ax_1 + by1 + c)}{a^2 + b^2} \ (**)$$

Substituindo (*) e (**) na fórmula da distância obtemos:

$$d = \sqrt{\left[\frac{a(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}\right]^2 + \left[\frac{b(ax_1 + by1 + c)}{a^2 + b^2}\right]^2}$$

Distribuindo os quadrados internos termos

$$d = \sqrt{\frac{a^2(ax_1 + by_1 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{b^2(ax_1 + by1 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2}}$$

Colocando o termo$\frac{(ax_1+by_1+c)^2}{(a^2+b^2)^2}$ em evidência se obtém:

$$d = \sqrt{(a^2 + b^2)\frac{(ax_1 + by_1 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2}}$$

Que indica que $d = \sqrt{\frac{(ax_1+by_1+c)^2}{a^2+b^2}}$, logo podemos concluir que:

$$d_{P,r} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Sabe-se que existem demonstrações mais simples, mas deixamos essa aqui por usar apenas os conceitos mostrados até o momento.

Apêndice A

DECLARAÇÃO DE AUTORIA

Autor[1]: Julian da Silva Euzébio

CPF[1]: 08658952959_ Código de matrícula[1]: 1652788

Telefone[1]: (48) 9 9927 6000 e-mail[1]: julian@unesc.net

Curso/Programa de Pós-graduação: Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Orientador: Santos Richard Wieller Sanguino Bejarano

Co-orientador: João Biesdorf

Data da defesa: 21/11/2018

Título/subtítulo: Proposta de ensino de geometria analítica utilizando o Desmos

Tipo de produção intelectual: ( ) TCC[2] ( ) TCCE[3] (X) Dissertação ( ) Tese

Declaro, para os devidos fins, que o presente trabalho é de minha autoria e que estou ciente:

- dos Artigos 297 a 299 do Código Penal, Decreto-Lei nº 2.848 de 7 de dezembro de 1940;
- da Lei nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998, sobre os Direitos Autorais,
- do Regulamento Disciplinar do Corpo Discente da UTFPR; e
- que plágio consiste na reprodução de obra alheia e submissão da mesma como trabalho próprio ou na inclusão, em trabalho próprio, de ideias, textos, tabelas ou ilustrações (quadros, figuras, gráficos, fotografias, retratos, lâminas, desenhos, organogramas, fluxogramas, plantas, mapas e outros) transcritos de obras de terceiros sem a devida e correta citação da referência.

______________________________ ______________________________

Assinatura do Autor[1] Local e Data

[1] Para os trabalhos realizados por mais de um aluno, devem ser apresentados os dados e as assinaturas de todos os alunos.
[2] TCC – monografia de Curso de Graduação.
[3] TCCE – monografia de Curso de Especialização.

Apêndice B

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA PUBLICAÇÃO DE TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO DE GRADUAÇÃO E ESPECIALIZAÇÃO, DISSERTAÇÕES E TESES NO PORTAL DE INFORMAÇÃO E NOS CATÁLOGOS ELETRÔNICOS DO SISTEMA DE BIBLIOTECAS DA UTFPR

Na qualidade de titular dos direitos de autor da publicação, autorizo a UTFPR a veicular, através do Portal de Informação (PIA) e dos Catálogos das Bibliotecas desta Instituição, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9.610/98, o texto da obra abaixo citada, observando as condições de disponibilização no item 4, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, visando a divulgação da produção científica brasileira.

1. Tipo de produção intelectual: ( ) TCC[1] ( ) TCCE[2] (X) Dissertação ( ) Tese
2. Identificação da obra:
Autor[3]: Julian da Silva Euzébio
RG[3]: 143339459-pr____ CPF[3]: 08658952959 ___________ Telefone[3]: (48) 9 9927 6000
e-mail[3]: julian@unesc.net
Curso/Programa de Pós-graduação: Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Orientador: Santos Richard Wieller Sanguino Bejarano
Co-orientador: João Biesdorf
Data da defesa: 21/11/2018
Título/subtítulo (português): Proposta de ensino de geometria analítica utilizando o Desmos
Título/subtítulo em outro idioma: Proposal of teaching of analytical geometry using Desmos
Área de conhecimento do CNPq: Ensino de Matemática
Palavras-chave: Ensino. Tecnologia. Geometria Analítica. Computador. Desmos.
Palavras-chave em outro idioma: Teaching. Technology. Analytical Geometry. Computer. Desmos.
3. Agência de fomento (quando existir): Bolsa Capes
4. Informações de disponibilização do documento:
Restrição para publicação: ( ) Total[4] ( ) Parcial[4] (X) Não Restringir
Em caso de restrição total, especifique o por que da restrição:
Em caso de restrição parcial, especifique capítulo(s) restrito(s):

____
Local e Data

_______________________________ _______________________________
Assinatura do Autor[3] Assinatura do Orientador

[1] TCC – monografia de Curso de Graduação.
[2] TCCE – monografia de Curso de Especialização.
[3] Para os trabalhos realizados por mais de um aluno, devem ser apresentados os dados e as assinaturas de todos os alunos.
[4] A restrição parcial ou total para publicação com informações de empresas será mantida pelo período especificado no Termo de Autorização para Divulgação de Informações de Empresas. A restrição total para publicação de trabalhos que forem base para a geração de patente ou registro será mantida até que seja feito o protocolo do registro ou depósito de PI junto ao INPI pela Agência de Inovação da UTFPR. A íntegra do resumo e os métodos ficarão sempre disponibilizados.