

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

TATIANA DE ALMEIDA PRADO

ESTIMAÇÃO DE COMPONENTES HARMÔNICOS E  
INTER-HARMÔNICOS UTILIZANDO A TÉCNICA DE  
DECOMPOSIÇÃO ESPARSA DE SINAIS

DISSERTAÇÃO

PATO BRANCO

2019

TATIANA DE ALMEIDA PRADO

**ESTIMAÇÃO DE COMPONENTES HARMÔNICOS E  
INTER-HARMÔNICOS UTILIZANDO A TÉCNICA DE  
DECOMPOSIÇÃO ESPARSA DE SINAIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre em Engenharia Elétrica” – Área de Concentração: Processamento de Energia.

Orientador: Prof. Dr. Giovanni Alfredo Guarneri

**PATO BRANCO**

**2019**

P896e Prado, Tatiana de Almdeida.  
Estimação de componentes harmônicos e inter-harmônicos utilizando a técnica de decomposição esparsa de sinais / Tatiana de Almeida Prado. -- 2019.  
76 f. : il. ; 30 cm

Orientador: Prof. Dr. Giovanni Alfredo Guarneri  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Pato Branco, PR, 2019.

Bibliografia: f. 72 - 76.

1. Método de decomposição. 2. Algoritmos. 3. Energia - Qualidade. 4. Processamento de sinais. I. Guarneri, Giovanni Alfredo, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

CDD 22. ed. 621.3

Ficha Catalográfica elaborada por  
Suélem Belmudes Cardoso CRB9/1630  
Biblioteca da UTFPR Campus Pato Branco



---

## **TERMO DE APROVAÇÃO**

**Título da Dissertação n.º 066**

**“Estimação de Componentes Harmônicos e Inter-harmônicos Utilizando a Técnica de Decomposição Esparsa de Sinais”**

por

**Tatiana de Almeida Prado**

Dissertação apresentada às quatorze horas, do dia sete de fevereiro de dois mil e dezanove, como requisito parcial para obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA, do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Pato Branco. A candidata foi arguida pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho APROVADO.

Banca examinadora:

---

**Prof. Dr. Giovanni Alfredo Guarneri**  
(orientador) UTFPR/PB

---

**Prof. Dr. André Eugênio Lazzaretti**  
UTFPR/CT  
(Participação à Distância)

---

**Prof. Dr. Carlos Marcelo de Oliveira Stein**  
UTFPR/PB

---

**Prof. Dr. Miguel Moreto**  
UFSC/FL  
(Participação à Distância)

---

**Prof. Dr. Gustavo Weber Denardin**  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Elétrica - PPGEE/UTFPR

A versão devidamente assinada desse termo, encontra-se em arquivo no PPGEE - UTFPR – Câmpus Pato Branco.

Dedico este trabalho a todos que com suas questões, despertaram em mim o desejo de respondê-las.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pelo caminho rico que tem me permitido trilhar.

Ao meu orientador, Giovanni Alfredo Guarneri, pela sua dedicação a esta pesquisa. Meus sinceros agradecimentos e admiração.

Aos funcionários e alunos do PPGEE que de alguma forma contribuíram para a minha formação.

Aos membros da banca de qualificação e defesa, Prof. Dr. André Eugenio Lazzaretti, Prof. Dr. Carlos Marcelo de Oliveira Stein e Prof. Dr. Miguel Moreto, por suas contribuições.

Aos amigos que a vida e as mudanças trouxeram para perto de mim, e que mesmos distantes me desejaram o melhor.

À minha família, que mesmo longe, sempre estive ao meu lado.

Ao meu esposo, Moisés, por seu carinho e paciência comigo.

A sabedoria é a coisa principal; adquira, pois, a sabedoria; sim, com tudo o que possui, adquira o conhecimento. (Salomão).

## RESUMO

PRADO, Tatiana de Almeida. ESTIMAÇÃO DE COMPONENTES HARMÔNICOS E INTER-HARMÔNICOS UTILIZANDO A TÉCNICA DE DECOMPOSIÇÃO ESPARSA DE SINAIS. 76 f. Dissertação – Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2019.

Este trabalho propõe um algoritmo que utiliza a técnica de *Decomposição Esparsa de Sinais* para a estimação de componentes de frequência em sinais com distorções harmônicas e inter-harmônicas adquiridos de sistemas de energia. A aplicação dessa técnica depende de um dicionário e de um algoritmo de decomposição atômica. A construção do dicionário sobrecompleto é realizada a partir de funções-base das *Transformadas Discretas Trigonômétricas* e do  *$\ell$ -fold overcomplete system*. Essa combinação permite o ajuste de resolução de frequência no espectro da decomposição. As Transformadas Discretas Trigonômétricas do tipo II apresentam características mais adequadas para a decomposição do sinal. Algoritmos *Greedy Pursuit* e de *Relaxação Convexa* são avaliados em relação aos parâmetros de entrada, número de iterações até a convergência, a esparsidade da resposta, o erro de reconstrução e a medição dos componentes de frequência. Os ensaios realizados demonstram a aplicabilidade do algoritmo *Orthogonal Matching Pursuit*. A estimação de componentes de frequência em quatro sinais sintéticos, sob diferentes condições de ruído, resolução de frequência e tamanho de janela amostrada, mostra que o algoritmo proposto é adequado a essa finalidade. Ao contrário dos métodos baseados em *Transformada Discreta de Fourier*, o algoritmo proposto estima componentes inter-harmônicos com uma resolução de frequência de até 0,5 Hz. Quando comparado ao *Matrix Pencil Method*, o algoritmo proposto faz a estimação correta de frequência com erros menores na estimação de amplitude.

**Palavras-chave:** Decomposição Atômica, Dicionário Sobrecompleto, Qualidade de Energia, Representação Esparsa, Transformada Discreta de Seno, Transformada Discreta de Cosseno.



## ABSTRACT

PRADO, Tatiana de Almeida. HARMONICS AND INTERHARMONICS COMPONENTS ESTIMATION BASED ON SIGNAL SPARSE DECOMPOSITION. 76 f. Dissertação – Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2019.

This work presents an algorithm based on Signal Sparse Decomposition for estimation of frequency components in signals with harmonics and interharmonics distortions acquired from the power system. The use of this technique needs an overcomplete dictionary and an atomic decomposition algorithm. The overcomplete dictionary design is made based on the basis-functions of the Discrete Trigonometric Transforms and  $\ell$ -fold overcomplete system. This combination renders the frequency resolution adjustable. For this application, the Discrete Trigonometric Transforms of type II have the most suitable features for signal decomposition. Greedy pursuit and convex relaxation algorithms are evaluated for many iterations until convergence, the sparsity of results, approximation and measurement of frequency components errors. The performed tests demonstrate the applicability of the OMP algorithm. The estimation of frequency components in four synthetic signals under different noise conditions, frequency resolution, and sampling window size show that the proposed algorithm is suitable for this purpose. Unlike the methods based on the Discrete Fourier Transform, the proposed algorithm estimates inter-harmonic components with a frequency resolution of up to 0,5 Hz. When compared to the Matrix Pencil Method, the proposed algorithm does not present errors of frequency and smaller errors in the estimation of amplitude.

**Keywords:** Atomic Decomposition, Discrete Cossine Transform, Discrete Sine Transform, Overcomplete Dictionary, Power Quality, Sparse Representation.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Sinal de corrente típico de fonte CC monofásica .....	24
FIGURA 2	– Sinal de corrente típico de conversores de frequência .....	25
FIGURA 3	– Sinal de corrente característico de máquinas síncronas .....	26
FIGURA 4	– Sinal de corrente característico de <i>flicker</i> .....	28
FIGURA 5	– Representação gráfica de $\mathbf{x} = \Phi\alpha$ .....	29
FIGURA 6	– Grade de frequência do dicionário de <i>Fourier</i> .....	32
FIGURA 7	– Tipos de DTTs .....	33
FIGURA 8	– Tipos de simetria presentes nas DTTs .....	34
FIGURA 9	– Grade de frequência das DTTs pares .....	36
FIGURA 10	– Estrutura do Algoritmo HIESSD .....	45
FIGURA 11	– Grade de frequência com resolução aumentada .....	47
FIGURA 12	– Resultados da decomposição esparsa com $\Phi_I$ e $\Phi_{II}$ .....	49
FIGURA 13	– Espectros de frequência resultantes da decomposição esparsa com $\Phi_I$ e $\Phi_{II}$ .....	50
FIGURA 14	– Convergência dos algoritmos .....	54
FIGURA 15	– Erros de estimação - Fonte CC Monofásica .....	62
FIGURA 16	– Componentes de frequência estimados - Inversor Trifásico .....	64
FIGURA 17	– Comparação de espectros de frequência .....	65
FIGURA 18	– Espectro de frequência - 10 ciclos .....	67
FIGURA 19	– Espectro de frequência - 7,5 ciclos .....	68

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1	– Classificação das DTTs quanto a simetria da sequência .....	35
TABELA 2	– Características das DTTs pares .....	35
TABELA 3	– Componentes de frequência medidos utilizando DTTs pares .....	48
TABELA 4	– Parâmetros para ajuste de $\Delta_{f_{DTT}}$ .....	51
TABELA 5	– Características construtivas de $\Phi$ .....	52
TABELA 6	– Influência do $\lambda$ na esparsidade de $\hat{\alpha}^k$ .....	53
TABELA 7	– Comparação dos algoritmos quanto a esparsidade de $\hat{\alpha}^k$ .....	55
TABELA 8	– Comparação dos algoritmos quanto ao erro de reconstrução .....	56
TABELA 9	– Comparação dos algoritmos na medição de componentes de frequência .....	56
TABELA 10	– Componentes de frequência para sinal de uma Fonte CC .....	61
TABELA 11	– Influência do nível de ruído no MSE - Fonte CC .....	63
TABELA 12	– Influência do nível de ruído no MSE - Inversor Trifásico .....	64
TABELA 13	– Componentes de frequência estimados por HIESSD e MPM .....	66

## LISTA DE ALGORITMOS

ALGORITMO 1	– OMP .....	38
ALGORITMO 2	– IHT .....	38
ALGORITMO 3	– BP-ADMM .....	41
ALGORITMO 4	– LASSO-ADMM .....	41
ALGORITMO 5	– FISTA .....	42
ALGORITMO 6	– SpaRSA .....	43

## LISTA DE SIGLAS

ADMM	<i>Alternate Direction Multiplier Method</i>
BP	<i>Basis Pursuit</i>
CA	Corrente Alternada
CC	Corrente Contínua
DCT	<i>Discrete Cossine Transform</i>
DED	<i>Dispersed Energy Distribution</i>
DFT	<i>Discrete Fourier Transform</i>
DST	<i>Discrete Sine Transform</i>
DTTs	<i>Discrete Trigonometric Transforms</i>
ECG	Eletrocardiograma
EEG	Eletroencefalograma
FA	<i>Firefly Algorithm</i>
FISTA	<i>Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm</i>
GP	<i>Greedy Pursuit</i>
HISSD	<i>Harmonics and Interharmonics components Estimation based on Signal Sparse Decomposition</i>
IEC	<i>International Electro-technical Commission</i>
IEEE	<i>Institute of Electrical and Electronic Engineers</i>
IHT	<i>Iterative Hard Thresholding</i>
ISTA	<i>Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm</i>
LASSO	<i>Least Absolute Shrinkage and Selection Operator</i>
MPM	<i>Matrix Pencil Method</i>
MSE	<i>Mean Squared Error</i>
MSSM	<i>Multi-interharmonic Spectrum Separation and Measurement</i>
OHD	<i>Overcomplete Hybrid Dictionary</i>
OMP	<i>Orthogonal Matching Pursuit</i>
PLL	<i>Phase-Locked-Loop</i>
RC	Relaxação Convexa
RLS	<i>Recursive Least Square</i>
SNR	<i>Signal-to-Noise Ratio</i>
SpaRSA	<i>Sparse Reconstruction by Separable Approximation</i>
SSD	<i>Sparse Signal Decomposition</i>
VMD	<i>Variational Mode Decomposition</i>
WT	<i>Wavelet Transform</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathcal{O}$	Ordem computacional
$\mathbf{x}$	Sinal medido em tempo discreto
$\Phi$	Dicionário sobrecompleto
$\alpha$	Vetor de coeficientes esparsos
$\alpha_m$	Coefficiente de índice $m$ do vetor $\alpha$
$\phi_m$	Átomo de índice $m$ de $\Phi$
$M$	Número de átomos de $\Phi$
$N$	Número de amostras do sinal e linhas de $\Phi$
$\hat{\alpha}$	Coefficientes aproximados
$F(\alpha)$	Função objetivo
$\min_{\alpha}$	Valor mínimo
$\ \cdot\ _2$	Norma euclidiana de um vetor
$[\cdot]^T$	Tranposto de uma matriz
$[\cdot]^{-1}$	Inverso de uma matriz
$\ \cdot\ _0$	“Norma” $\ell_0$ de um vetor
$\epsilon$	Tolerância ao erro
$\omega_k$	Velocidade angular
$\Delta_{f_{DFT}}$	Resolução de frequência da DFT
$f_s$	Frequência de amostragem
$\beta$	Tipo da transformada DTT
$\varsigma$	Fatores de escala da DTTs
$\Delta_i$	Deslocamento de tempo
$\Delta_j$	Deslocamento de frequência
$\Delta_{f_{DTT}}$	Resolução de frequência das DTTs
$f_{grade}$	Frequências da grade
$\mathbf{r}$	Resíduo
$\mathcal{S}$	Suporte da solução $\hat{\alpha}$
$\gamma$	Índice de átomos
$T$	Operador <i>thresholding</i>
$S$	Esparsidade
$\ \cdot\ _1$	Norma $\ell_1$ de um vetor
$\lambda$	Parâmetro de regularização
$\mathcal{L}$	Função Lagrangiana
$\rho$	Parâmetro de penalidade do algoritmo ADMM
$\mu$	Ponto de referencia para convergência do algoritmo FISTA
$\hat{\mathbf{u}}$	Gradiente descendente
$\tau$	Nível de <i>threshold</i>
$\Delta_t$	Período de amostragem
$\mathbf{c}$	Coefficientes relacionado a matriz <b>DCT</b>
$\mathbf{s}$	Coefficientes relacionado a matriz <b>DST</b>
$\Gamma_j$	Coefficiente corrigido relacionado a DCT

$\Psi_j$	Coeficiente corrigido relacionado a DST
$A_n$	Amplitude do componente de frequência
$\theta_n$	Fase do componente de frequência

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>14</b>
1.1 OBJETIVOS	18
1.2 CONTRIBUIÇÕES	18
1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO	20
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>21</b>
2.1 DISTORÇÕES EM FORMAS DE ONDAS	22
2.1.1 Distorções Harmônicas	22
2.1.2 Distorções Inter-harmônicas	25
2.2 DECOMPOSIÇÃO ESPARSA DE SINAIS	28
2.3 DICIONÁRIOS DE BASES HARMÔNICAS	32
2.3.1 Dicionário de <i>Fourier</i>	32
2.3.2 Outras bases harmônicas	33
2.4 ALGORITMOS PARA DECOMPOSIÇÃO ATÔMICA	37
2.4.1 Algoritmos <i>Greedy Pursuit</i>	37
2.4.2 Algoritmos de Relaxação Convexa	39
2.5 ATENUAÇÃO DE RUÍDO	43
2.6 CONCLUSÕES PARCIAIS	44
<b>3 ALGORITMO PROPOSTO</b>	<b>45</b>
3.1 MONTAGEM DO DICIONÁRIO	46
3.1.1 O $\ell$ -fold overcomplete system aplicado as DTT	47
3.1.2 Análise dos dicionários harmônicos	48
3.1.3 Parâmetros do Dicionário	51
3.2 ESTIMAÇÃO DOS COMPONENTES DE FREQUÊNCIA DO SINAL	52
3.2.1 Definição do Algoritmo de Decomposição Atômica	52
3.2.2 Correção dos Coeficientes	57
3.2.3 Cálculo dos Componentes de Frequência	58
3.2.4 Aplicação do <i>Hard thresholding</i>	58
3.3 RESUMO	59
<b>4 ENSAIOS</b>	<b>60</b>
4.1 FONTE DE CORRENTE CONTÍNUA MONOFÁSICA	61
4.2 CONVERSOR DE FREQUÊNCIA TRIFÁSICO	63
4.3 MÁQUINA SÍNCRONA	65
4.4 CARGAS VARIANTES NO TEMPO	67
4.4.1 Janela de aquisição de 10 ciclos	67
4.4.2 Janela de aquisição de 7,5 ciclos	67
4.5 RESUMO	68
<b>5 CONCLUSÕES</b>	<b>70</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>72</b>



## 1 INTRODUÇÃO

Pode-se afirmar que distorções harmônicas e inter-harmônicas em sistemas elétricos aumentam a medida que novos dispositivos eletrônicos de potência são conectados à rede de distribuição (LIN, 2016). Essas distorções são geradas por cargas variantes no tempo, circuitos chaveados, conversores estáticos, inversores de frequência utilizados no ajuste de velocidade de motores, fornos a arco, e outras cargas pulsadas sem sincronia com a frequência do sistema (TESTA et al., 2007). Os componentes harmônicos são caracterizados por frequências múltiplas inteiras da frequência fundamental, enquanto que os inter-harmônicos são componentes de frequências múltiplas não inteiras da frequência fundamental (IEEE, 2014). A presença de componentes harmônicos em tensões e correntes elétricas causa vários impactos negativos, como: sobretensão, aquecimento de condutores e equipamentos elétricos, aumento de perdas por efeito *Joule*, falhas em dispositivos de proteção, interferência em sinais, perda de dados, mau funcionamento, danos, ineficiência e redução da vida útil de equipamento elétricos (TESTA et al., 2007; SINGH et al., 2016). Enquanto a presença de componentes inter-harmônicos gera efeitos como: *flicker*, saturação de transformadores de corrente, oscilações subsíncronas e flutuações de tensão (TESTA et al., 2007; LIN, 2016).

Atualmente, a metodologia para medição de harmônicos e inter-harmônicos em sistemas de potência é definida pela *International Electro-technical Commission* (IEC). A norma IEC 61000-4-7 (IEC, 2006) estabelece que os sinais de tensão e corrente do sistema elétrico sejam amostrados em janelas retangulares de aproximadamente 200 ms (12 ciclos completos em 60 Hz e 10 ciclos para 50 Hz). Normalmente, o processo de conversão analógico-digital desses sinais utiliza técnicas de amostragem *Phase-Locked-Loop* (PLL), em que a primeira amostra de cada ciclo encontra-se no mesmo ponto em onda, ainda que em sinais altamente distorcidos (IEEE, 2009). Isso assegura que o sinal amostrado tenha a quantidade exata de ciclos completos. Esses sinais geralmente são processados por Transformada Discreta de *Fourier* (*Discrete Fourier Transform*, DFT), que quantifica

a energia existente nos componentes de frequência dos sinais, possibilitando a medição de componentes harmônicos e inter-harmônicos.

A utilização de métodos baseados em DFT nas condições estabelecidas na IEC 61000-4-7, permite a análise espectral de sinais com uma resolução de frequência de 5 Hz. Portanto, somente os componentes de frequência em que a frequência for múltipla inteira de 5, pode ser estimado corretamente. Esse conjunto detectável de componentes de frequência é chamado de *grade de frequências* da DFT. A presença de componentes de frequência que não correspondem exatamente a um elemento na grade, faz com que o algoritmo DFT cause um espalhamento da energia desses componentes para as frequências adjacentes pertencentes à grade. Esse fenômeno é conhecido como *fuga espectral* (TESTA et al., 2007). Outro fenômeno chamado *picket-fence effect* ocorre quando a resolução da grade impede a detecção de componentes em certas frequências (LI et al., 2003).

Esses efeitos dificultam a identificação exata de componentes de frequência que não sejam múltiplos de 5 Hz. Todavia, os métodos de agrupamento propostos pela IEC 61000-4-7 garantem que a energia total dos componentes harmônicos e inter-harmônicos seja medida corretamente (IEC, 2006). Essa norma propõe que os componentes obtidos sejam agrupados em quatro categorias: I) grupo harmônico; II) grupo inter-harmônico; III) subgrupo harmônico; e IV) subgrupo inter-harmônico. Em cada categoria um único valor de amplitude é calculado em função das amplitudes dos componentes de frequência contidas no grupo, sendo que esse valor é associado a frequência central do grupo. A utilização desse conceito não permite a identificação individual dos componentes inter-harmônicos existentes no sinal (LIN, 2012). A estimação adequada desses componentes é importante para o dimensionamento de filtros para a compensação de componentes inter-harmônicos e mitigação de *flicker* (FEOLA et al., 2018; DURNA et al., 2017).

Diversos métodos são propostos na literatura com o objetivo de estimar individualmente componentes inter-harmônicos. Um algoritmo denominado *Dispersed Energy Distribution* (DED) (LIN, 2016) permite estimar a frequência de componentes inter-harmônicos individualmente, calculando o desvio de frequência em função da distribuição de energia no espectro. Consiste em um método algébrico que pode ser implementado utilizando algoritmos baseados em DFT. Porém, a largura de banda de cada grupo deve ser escolhida adequadamente para que não haja sobreposição de energia de componentes distintos, podendo induzir erros na análise do sinal. A identificação de frequências de componentes inter-harmônicos próximos de outros componentes

harmônicos ou inter-harmônicos é complexa, devido a resolução de frequência limitada e da fuga espectral.

O método *Multi-interharmonic Spectrum Separation and Measurement* (MSSM) (SUN et al., 2016) faz amostragem assíncrona do sinal, de modo que todos os componentes do mesmo sejam tratados como inter-harmônicos. Esse método identifica os picos de amplitudes no espectro obtido por DFT, separa o conteúdo espectral relacionado a cada pico e calcula os parâmetros de cada componente. Para esse método é necessário limitar o número de componentes a serem identificados, restringindo assim a carga computacional. Tal método mostrou-se adequado na identificação de componentes inter-harmônicos com diferença de frequência maiores que 2,6 Hz.

Achlerkar et al. (2017) propõe a utilização da técnica *Variational Mode Decomposition* (VMD), que decompõe o sinal de entrada em um número discreto de sub-sinais com características esparsas, admitindo que cada sub-sinal é compacto em torno da frequência principal (DRAGOMIRETSKIY; ZOSSO, 2014). A vantagem principal desse método é sua capacidade de detectar componentes inter-harmônicos e estimar componentes espectrais variantes no tempo. No entanto, é necessário definir parâmetros como a largura de banda e o número de componentes de frequência a serem extraídos do sinal. Ambos possuem grande influência no processo de decomposição podendo levar a resultados imprecisos.

O método apresentado por Singh et al. (2016) para a estimação de harmônicos, inter-harmônicos e cintilação em tempo real utiliza um algoritmo de otimização conhecido como *Firefly Algorithm* (FA) para obter os parâmetros iniciais aplicados ao algoritmo *Recursive Least Square* (RLS), que estima as amplitudes e fases de sinal de forma adaptativa. Apesar de apresentar resultados adequados, o algoritmo FA-RLS possui precisão limitada e a definição dos parâmetros é um desafio em caso de sinais que variam no tempo.

Recentemente foi proposto um método baseado na solução de um problema de auto-valor generalizado utilizando o *Matrix Pencil Method* (MPM) (SHESHYKANI et al., 2017). Esse método tem a capacidade de estimar com alta resolução a frequência, amplitude e fase relativa dos componentes de frequência presentes no sinal, independente de uma grade de frequência fixa. O MPM permite realizar a medição de componentes harmônicos e inter-harmônicos, calcular coeficientes de amortecimento e desníveis de tensão em sinais com Relação Sinal Ruído (*Signal to Noise Ratio*, SNR) de até 25 dB. Entretanto, esse método apresenta alta carga computacional, da ordem de  $\mathcal{O}(n^3)$ .

Na última década, a técnica de processamento de sinais *Sparse Signal Decomposition* (SSD) a partir de Dicionários Híbridos Sobrecompletos (*Overcomplete Hybrid Dictionary*, OHD) tem sido utilizada em diversas aplicações, como: detecção e classificação de sinais modulados (MOHANTY et al., 2015), análise de sinais de ultrassom (DEMIRLI; SANIIE, 2012; XIE et al., 2015), reconhecimento automático de alvo em imagens de radar (DONG et al., 2015), atenuação de ruído e análise de sinais biomédicos como Eletrocardiograma (ECG) (WANG et al., 2013; SATIJA et al., 2017) e Eletroencefalograma (EEG) (LI et al., 2014), entre outras.

Há pouco tempo, essa técnica foi utilizada no processamento de sinais elétricos para compressão, atenuação de ruído (MANIKANDAN et al., 2015a), detecção e classificação de distúrbios de qualidade de energia (MANIKANDAN et al., 2015b). Os autores utilizaram um OHD composto por Transformada Discreta de Cosseno (*Discrete Cossine Transform*, DCT) e Transformada Discreta de Seno (*Discrete Sine Transform*, DST), e impulsos. Nos testes realizados, o método apresentou desempenho adequado e robustez em relação a presença de ruído, obtendo melhor desempenho quando comparado com os métodos *Wavelet Transform* (WT) e DCT.

A SSD tem capacidade de representar sinais de morfologia complexa de forma compacta, possibilita a análise de sinais sob diferentes perspectivas e permite extrair informações ricas em detalhes (FENG et al., 2017). Ao obter uma representação esparsa, o volume de dados a ser processado e armazenado reduz (BREEN, 2009), aumentando a velocidade de processamento dos dados e reduzindo custos com armazenamento. A escolha de dicionários adequados às características específicas do sinal a ser processado, contribui para as etapas de classificação e análise.

No entanto, existem poucos trabalhos publicados que expõem o uso da SSD em aplicações dirigidas à sinais de energia. Diante desse contexto, este trabalho tem como foco a utilização da SSD a partir de dicionários sobrecompletos na estimação de componentes harmônicos e inter-harmônicos em sinais de sistemas de energia. A sua aplicação resulta em um aumento na resolução do espectro de frequência, possibilitando o diagnóstico adequado de componentes de frequência, em especial os componentes inter-harmônicos. A conversão das séries de dados temporais em componentes de frequência, considerando que os sinais de energia são naturalmente esparsos no domínio da frequência, reduz significativamente o volume de dados a ser armazenado. E, conseqüentemente, reduz a complexidade computacional e o tempo de processamento desses sinais.

## 1.1 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é propor um algoritmo para a estimação de componentes de frequência em sinais com distorções harmônicas e inter-harmônicas, utilizando a técnica de decomposição esparsa de sinais. Os objetivos específicos desta pesquisa são:

- Buscar na literatura sinais com distorção harmônica e inter-harmônica que representem condições reais de sistemas elétricos;
- Avaliar a aplicação da técnica de *decomposição esparsa de sinais* na medição de componentes harmônicos e inter-harmônicos em sinais estacionários de sistemas de energia;
- Analisar as características específicas de sinais com distorções harmônicas e inter-harmônicas, obtendo informações relevantes que possibilitem a escolha adequada de dicionários;
- Compor e avaliar dicionários com transformações analíticas que representam esparsamente esses sinais com distorções harmônicas e inter-harmônicas;
- Avaliar o desempenho de algoritmos iterativos usuais na decomposição atômica a partir de dicionários sobrecompletos, adequados à medição de componentes de frequência;
- Desenvolver um algoritmo que reúna a decomposição esparsa de sinais com dicionários sobrecompletos e o algoritmos iterativos adequados para a análise desses sinais com distorções harmônicas e inter-harmônicas;
- Implementar, testar e validar o algoritmo proposto, comparando com outros métodos de estimação de sinais com distorções harmônicas e inter-harmônicas.

## 1.2 CONTRIBUIÇÕES

Este trabalho propõe um algoritmo denominado Estimação de componentes Harmônicos e Inter-harmônicos utilizando Decomposição Esparsa de Sinais (*Harmonics and Interharmonics components Estimation based on Signal Sparse Decomposition, HIESSD*). As contribuições desse algoritmo são:

- Estima a amplitude e frequência de componentes harmônicos e inter-harmônicos individualmente (não de maneira agrupada), com uma resolução de frequência de até 0,5 Hz;
- Apresenta erros de medição menores ao da DFT no processamento do sinais contendo componentes inter-harmônicos, e ao do MPM no processamento de sinais contaminados com ruído;
- Mantém a qualidade da estimação de componentes de frequência com janelas de aquisição de até 7,5 ciclos da frequência fundamental (125 ms), janelas de amostragem menores do que as recomendadas na IEC 61000-4-7 (IEC, 2006).

A implementação do HIESSD traz as seguintes contribuições técnicas:

- Descrição das características dos diferentes tipos de DCT e DST e a aplicabilidade dessas transformadas na decomposição de sinais contendo distorções harmônicas e inter-harmônicas, justificando a escolha do par de transformadas DCT-II e DST-II (BRITANAK et al., 2007) para a construção do dicionário sobrecompleto utilizado no HIESSD;
- A utilização do  *$\ell$ -fold overcomplete system* (SHAOBING et al., 2001), que possibilita o ajuste de resolução de frequência do algoritmo proposto, obtendo resoluções maiores do que a obtida por DFT considerando os critérios de aquisição estabelecidos na IEC 61000-4-7 (IEC, 2006);
- Dedução das equações para a compensação do deslocamento temporal inerente às DTTs do tipo II. Os coeficientes obtidos da decomposição do sinal são corrigidos por essas equações para a análise do resultado no domínio da frequência;
- Implementação e avaliação de algoritmos iterativos para a decomposição atômica de sinais com distorções harmônicas.

Parte da pesquisa foi compilada em um artigo intitulado *Estudo comparativo entre algoritmos para a decomposição esparsa de sinais elétricos com distorções harmônicas* (PRADO; GUARNERI, 2018), apresentado no Congresso Brasileiro de Automática - CBA 2018, realizado em João Pessoa, PB.

### 1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

No Capítulo 2 são apresentados os conceitos de distorção harmônica e inter-harmônica, o embasamento da técnica utilizada para a decomposição e representação esparsa do sinal, a análise de diferentes bases harmônicas para a construção de dicionários, e a apresentação de algoritmos iterativos para a decomposição do sinal. No Capítulo 3 é detalhado o HIESSD, algoritmo proposto para realizar a estimação de componentes harmônicos e inter-harmônicos em sinais elétricos. O Capítulo 4 demonstra a aplicação do HIESSD em sinais sintéticos com distorções harmônicas e inter-harmônicas sob diferentes condições de ruído. Os resultados obtidos são comparados com os métodos DFT e MPM. No Capítulo 5 são expostas as conclusões e as indicações para trabalhos futuros.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Os fenômenos de qualidade de energia são variações que ocorrem na forma de onda ideal, seja em eventos de curta duração ou alterações em seu estado estacionário (BAGGINI, 2008). Esses eventos são identificados e medidos, então os dados coletados são processados para extrair as informações relevantes do sinal que permitam implementar ações de mitigação e controle (IEEE, 2003).

As distorções harmônicas e inter-harmônicas são fenômenos que ocorrem em regime permanente, caracterizados pela presença de componentes múltiplos da frequência fundamental (IEEE, 2009). Sinais com essas características podem ser representados no domínio da frequência por seus componentes individuais. Essa representação destaca as informações relevantes para a análise do sinal, além de reduzir a quantidade de dados a serem armazenados. Tais características tornam interessante a *representação esparsa* desses sinais, obtidas por *decomposição atômica* a partir de *dicionários* compostos por bases harmônicas.

O capítulo em questão apresenta a fundamentação teórica de cada passo da estratégia proposta para a estimação de componentes harmônicos e inter-harmônicos em sinais medidos em sistemas elétricos. Na Seção 2.1 são definidos os conceitos de distorção harmônica e inter-harmônica, as respectivas causas, consequências, e os parâmetros normalizados. Os sinais utilizados para testes, aplicados ao HIESSD, também são detalhados. A Seção 2.2 expõe a técnica SSD a partir de OHD que é utilizada para obter a representação esparsa com base na decomposição do sinal. A Seção 2.3 apresenta um estudo das bases adequadas para a decomposição de sinais com distorções harmônicas e que podem ser utilizadas na construção de dicionários sobrecompletos. Na Seção 2.4 são apresentados diversos algoritmos iterativos propostos na literatura para realizar a decomposição esparsa dos sinais. A Seção 2.5 traz uma breve descrição sobre os limites de *threshold* para a atenuação de ruído, e a Seção 2.6 apresenta as conclusões sobre os assuntos abordados nesse capítulo.



## 2.1 DISTORÇÕES EM FORMAS DE ONDAS

A presença de componentes harmônicos, componentes inter-harmônicos, níveis de tensão contínua, cortes e ruído são fenômenos de qualidade de energia que causam distorções na forma de onda e podem ser caracterizados principalmente por seu conteúdo espectral (IEEE, 2009). Dentre esses distúrbios, este trabalho dedica-se à estimação de componentes de frequência em sinais estacionários com distorções harmônicas e inter-harmônicas.

### 2.1.1 DISTORÇÕES HARMÔNICAS

A distorção harmônica é tipificada por tensões ou correntes senoidais com frequência múltipla inteira da frequência do sistema de alimentação. É considerada um distúrbio estacionário, caracterizada por conteúdo espectral típico entre 0 a 9 kHz e valores de amplitude típicos de 0 a 20 % da tensão fundamental (IEEE, 2014). O somatório dos sinais harmônicos com amplitude, frequência e fase variadas, geram sinais periódicos com diferentes formatos. Os níveis de distorção harmônica podem ser determinados pelo espectro harmônico completo com magnitudes e ângulos de fase de cada componente harmônico individual.

A utilização de cargas não lineares conectadas ao sistema de energia elétrica altera a característica senoidal da corrente e tensão alternada, originando um fluxo de correntes harmônicas no sistema. Essas correntes propagam-se pelo sistema e podem afetar instalações próximas. Para minimizar os efeitos da distorção harmônica, tanto para o fornecedor quanto para o usuário final, ambos devem operar dentro de valores limites. O *Institute of Electrical and Electronic Engineers* (IEEE) estabelece alguns desses limites na normativa 519 (IEEE, 2014).

A distorção harmônica é a principal causa de sobreaquecimento em equipamentos elétricos, comprometendo o isolamento e reduzindo sua vida útil. Também pode causar sobreaquecimento de equipamentos rotativos, transformadores e condutores de corrente, ruptura de fusíveis, aumento de perdas em linhas de transmissão e operação indesejada de relés de proteção (IEEE, 2009). A ressonância harmônica prejudica a operação de sistemas e causa imprecisão nas medições. Dispositivos eletrônicos de potência podem apresentar erros de operação, causando mau funcionamento de processos industriais (IEEE, 2014). Equipamentos eletrônicos são mais sensíveis aos componentes harmônicos, uma vez que são construídos para operar alimentados por fontes de tensão alternada de

formato senoidal, apresentando falhas na operação ou danos em equipamentos de controle, instrumentação, tecnologia da informação, entre outros (BAGGINI, 2008).

Equipamentos elétricos construídos com dispositivos eletrônicos consistem nas principais fontes de distorções harmônicas, pois injetam correntes harmônicas no sistema, provocando quedas de tensão não lineares nas impedâncias do sistema (IEEE, 2014). Equipamentos com núcleo magnético, como transformadores, geradores e motores elétricos também podem gerar componentes harmônicos devido a relação não-linear entre a tensão e a corrente, quando operam na região de saturação. Fornos a arco, máquinas de solda e lâmpadas de descarga em alta pressão também apresentam características não-lineares proveniente da impedância do arco. Equipamentos eletrônicos de potência como fontes chaveadas, retificadores trifásicos e compensadores estáticos de potência reativa extraem pulsos de corrente do sistema de alimentação. Essas descontinuidades contêm uma grande quantidade de componentes harmônicos (BAGGINI, 2008). Exemplos de sinais com distorção harmônica são mostrados a seguir.

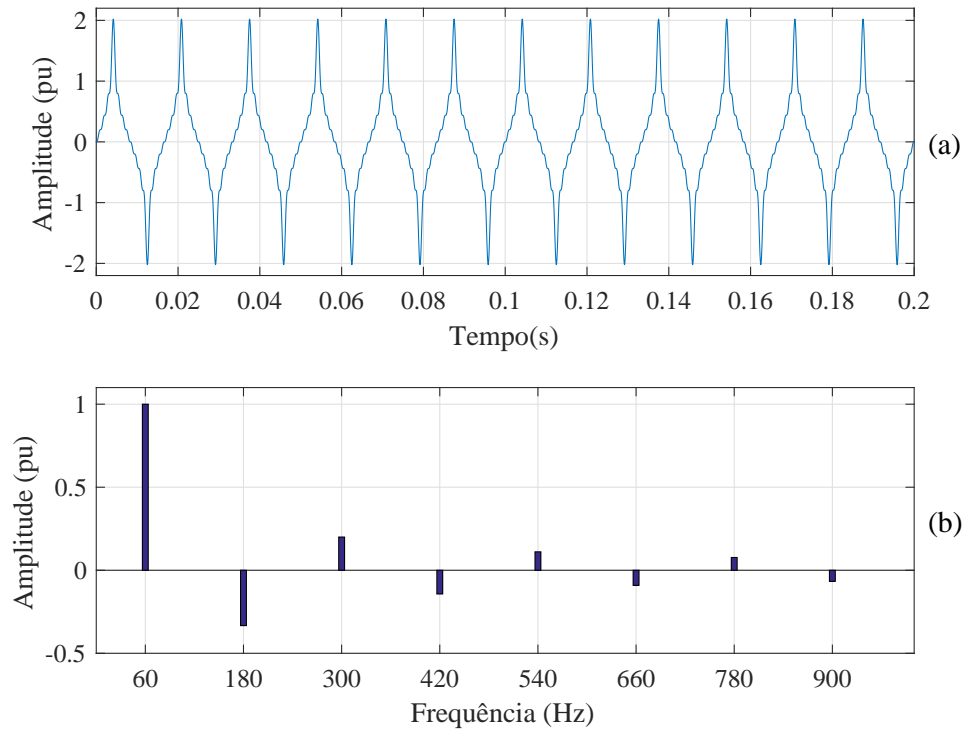
- Fonte de Corrente Contínua Monofásica

Os conversores de energia são exemplos de cargas não lineares amplamente utilizadas que produzem harmônicos. Os valores de corrente medidos na entrada de um retificador monofásico não controlado, utilizado para converter um sinal de *corrente alternada* (CA) em *corrente contínua* (CC), pode ser calculado pela Equação (1) (BOLLEN; GU, 2006). Essa corrente contém harmônicos ímpares com amplitudes inversamente proporcionais à ordem harmônica e fases alternadas,

$$\mathbf{I}_h = \begin{cases} +\frac{2\sqrt{2}}{h}I_{CC} & h = 1, 5, 9, 13, \dots \\ -\frac{2\sqrt{2}}{h}I_{CC} & h = 3, 7, 11, 15, \dots \\ 0 & h = 0, 2, 4, 6, \dots, \end{cases} \quad (1)$$

em que  $I_{CC}$  é o máximo valor da corrente na carga, adotando como  $1/(2\sqrt{2})$  para obter os valores dos componentes de frequência normalizados.

A Figura 1.a mostra o sinal com distorções gerado a partir da Equação (1). O espectro de frequência, considerando a fase de cada componente é mostrado na Figura 1.b. Esse sinal é utilizado como sinal de teste no Capítulo 4.



**Figura 1: Distorção na forma de onda característica da utilização de fonte CC monofásica: (a) Sinal com distorção harmônica; e (b) Espectro de frequência do sinal.**

**Fonte: Autoria própria.**

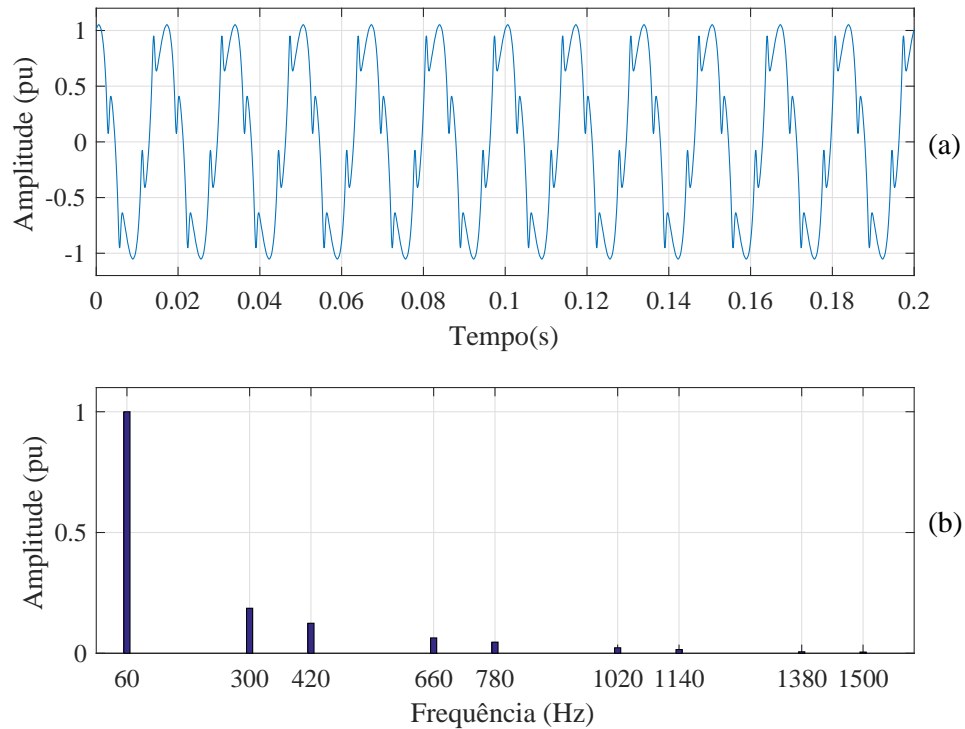
- Conversores de Frequência

Conversores trifásicos são amplamente utilizados em instalações industriais. Em geral, contém um retificador CA-CC e um inversor CC-CA acoplados por um capacitor. Considerando um capacitor infinito, o barramento CC não tem ondulações e a corrente no retificador ideal terá apenas componentes harmônicos característicos. As frequências harmônicas  $f_h$  desse sinal podem ser calculadas pela Equação (2) (TESTA et al., 2007),

$$f_h = (pn \pm 1)f, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2)$$

em que  $p$  é o número de pulsos e  $f$  a frequência fundamental.

A corrente típica em um retificador de seis pulsos com ângulo de disparo em  $10^\circ$  (RICE, 1994) foi utilizada para demonstrar essas características. Para  $f = 60 \text{ Hz}$  e  $p = 6$ , o sinal é composto pela frequência fundamental e pelos seguintes harmônicos:  $5^\circ$ ,  $7^\circ$ ,  $11^\circ$ ,  $13^\circ$ ,  $17^\circ$ ,  $19^\circ$ ,  $23^\circ$  e  $25^\circ$ . O sinal e espectro de frequência são mostrados na Figura 2.



**Figura 2:** Distorção na forma de onda característica da utilização de conversores de frequência: (a) Sinal com distorção harmônica; e (b) Espectro de frequência do sinal.

**Fonte:** Autoria própria.

### 2.1.2 DISTORÇÕES INTER-HARMÔNICAS

Componentes de frequência inter-harmônicos podem ser encontrados em redes de todas as classes de tensão. São tensões ou correntes em que a frequência não é múltipla inteira da frequência do sistema de alimentação. Eles podem surgir como frequências discretas ou como um espectro de banda larga. A distorção inter-harmônica também apresenta conteúdo espectral típico entre 0 e 9 kHz, porém com valores de amplitude típicos de 0 a 2 % da tensão fundamental (IEEE, 2009).

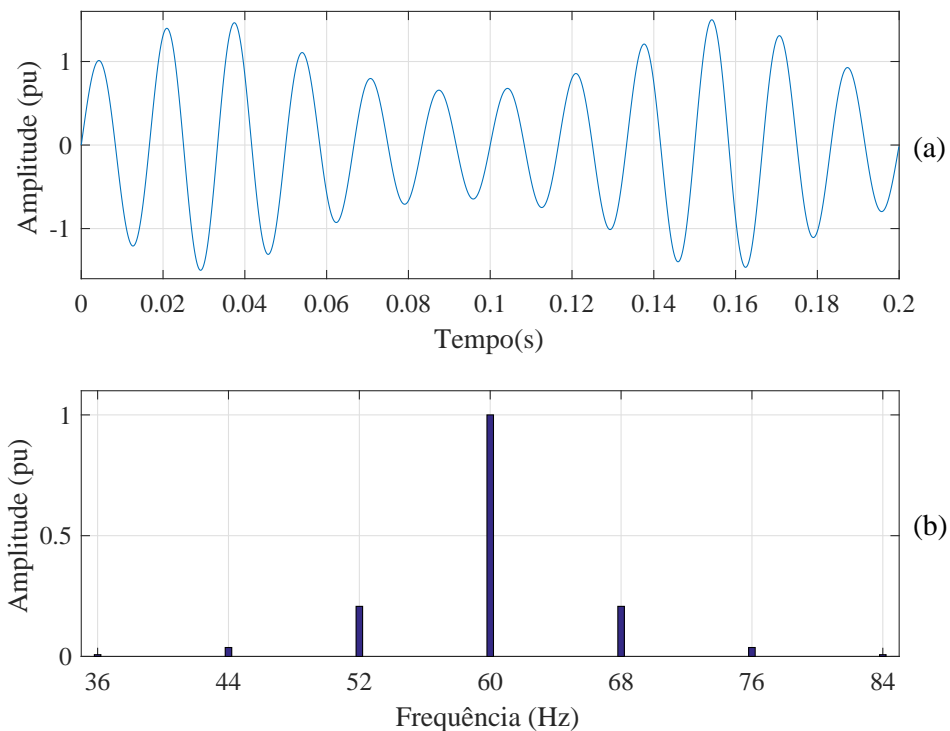
As correntes inter-harmônicas podem excitar ressonâncias severas no sistema de potência quando coincidem com as frequências naturais do sistema. Também causam interferência em sinais de dados transmitidos em linhas de alta tensão e oscilações em sistemas de iluminação e monitores (DUGAN et al., 2002). Outros efeitos observados são: ruído em amplificadores de áudio, torques adicionais em motores e geradores, perturbações em detectores de cruzamento de zero, ruído adicional em bobinas indutivas, bloqueio ou operação não intencional de receptores de controle de ondulação (IEC, 2006) e oscilações

de torção de baixa frequência em motores devido a presença de componentes de frequência subsíncronos (YACAMINI, 1995).

Esses componentes de frequência são causados principalmente por variações da amplitude ou ângulo de fase da componente fundamental ou dos componentes harmônicos e por circuitos eletrônicos de potência com frequências de comutação não sincronizadas com a frequência da alimentação (IEC, 2006). Normalmente são inseridos no sistema pelos mesmos elementos que geram harmônicos. As principais fontes de distorção inter-harmônica são conversores de frequência, ciclo-conversores, fornos de indução e dispositivos de arco (IEEE, 2009). Os sinais de corrente apresentados a seguir são exemplos de sinais com distorção inter-harmônica.

- Máquina Síncrona

Máquinas síncronas são fontes de correntes inter-harmônicas devido a variação não senoidal das indutâncias mútuas do conjunto rotor-estator e do desbalanço nos enrolamentos de fase do rotor (WALLACE et al., 1974). A Figura 3 mostra a forma de



**Figura 3:** Distorção na forma de onda gerada por indutâncias mútuas em máquinas síncronas: (a) Sinal com distorção inter-harmônica; e (b) Espectro de frequência do sinal.

Fonte: Autoria própria.

onda distorcida e o espectro de frequência do sinal com componentes inter-harmônicos de pequenas amplitudes. Esse sinal representa a corrente do estator medida e apresentada por Wallace et al. (1974). Possui dois componentes sub-harmônicos em 24 e 48 Hz, a componente fundamental em 60 Hz e cinco componentes inter-harmônicos em 96, 264, 384, 588 e 708 Hz.

- Cargas variantes no tempo

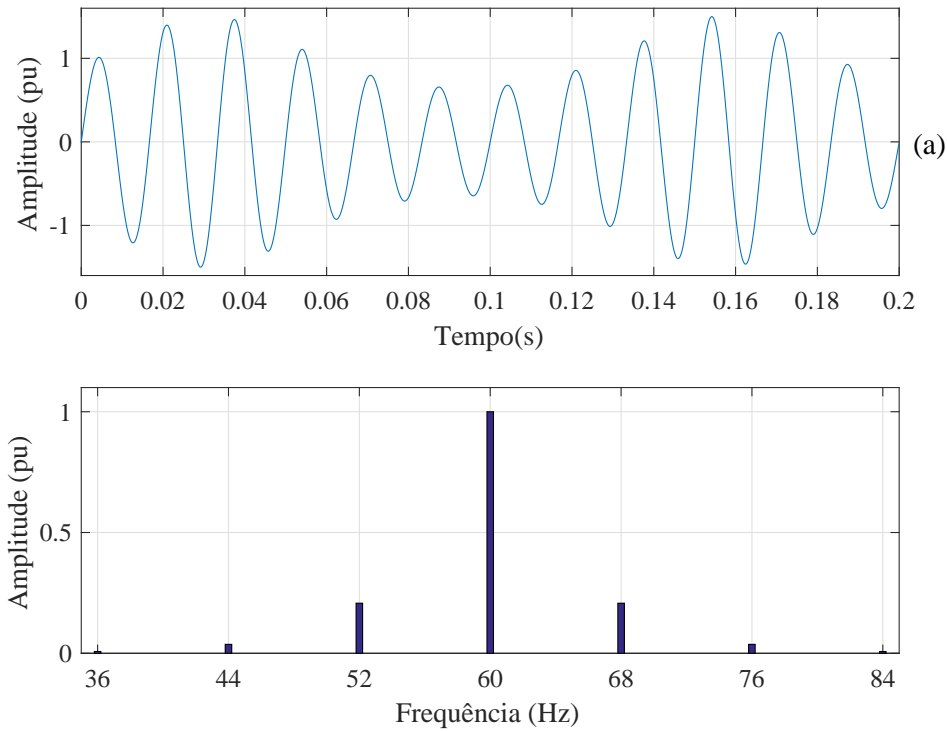
Cargas variantes no tempo também são fontes de inter-harmônicos, sejam as variações de carga regular ou irregular. Máquinas de solda e impressoras a laser são exemplos desse tipo de carga. As distorções causadas na rede são determinadas pela frequência em que a carga varia (TESTA et al., 2007).

Considerando uma carga variante no tempo em que a dinâmica pode ser representada por  $R(t) = 1 - r \sin(2\pi f_m t)$ , alimentada por uma fonte de tensão senoidal  $v(t) = \sin(2\pi f t)$ , a corrente elétrica pode ser calculada pela Equação 3, conforme apresentada em (LIN, 2016).

$$\begin{aligned}
 I_h(t) &= \frac{v(t)}{R(t)} \\
 &= \frac{\sin(2\pi f t)}{1 - r \sin(2\pi f_m t)} \\
 &= \sin(2\pi f t) \times (1 + r \sin(2\pi f_m t) + \\
 &\quad + r^2 \cos^2(2\pi f_m t) + r^3 \cos^3(2\pi f_m t) + \dots),
 \end{aligned} \tag{3}$$

em que  $r < 1$  e  $f_m$  é a frequência de modulação da carga.

O sinal mostrado na Figura 4 foi gerado com os seguintes parâmetros:  $r = 0,4$ ,  $f = 60$  Hz e  $f_m = 8$  Hz. As frequências inter-harmônicas desse sinal são definidas por  $f \pm f_m$ ,  $f \pm 2f_m$ ,  $f \pm 3f_m$ , ... Assim, os componentes de frequência resultantes são: 60 Hz, 52 Hz e 68 Hz ( $f \pm f_m$ ), 44 Hz e 76 Hz ( $f \pm 2f_m$ ), 36 Hz e 84 Hz ( $f \pm 3f_m$ ), etc.



**Figura 4: Distorção na forma de onda gerada por carga variante no tempo: (a) Sinal com distorção inter-harmônica; e (b) Espectro de frequência do sinal.**

**Fonte: Autoria própria.**

## 2.2 DECOMPOSIÇÃO ESPARSA DE SINAIS

Problemas de diversas áreas como processamento de sinais e imagens, inferência estatística, astrofísica e outras, podem ser representados por um sistema linear, conforme mostra a Equação (4) (BECK; TEBoulLE, 2009),

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}\boldsymbol{\alpha}, \quad (4)$$

em que  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  é o sinal a ser processado,  $\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{N \times M}$  é o dicionário e  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^M$  é o vetor de coeficientes esparsos (LI et al., 2014).

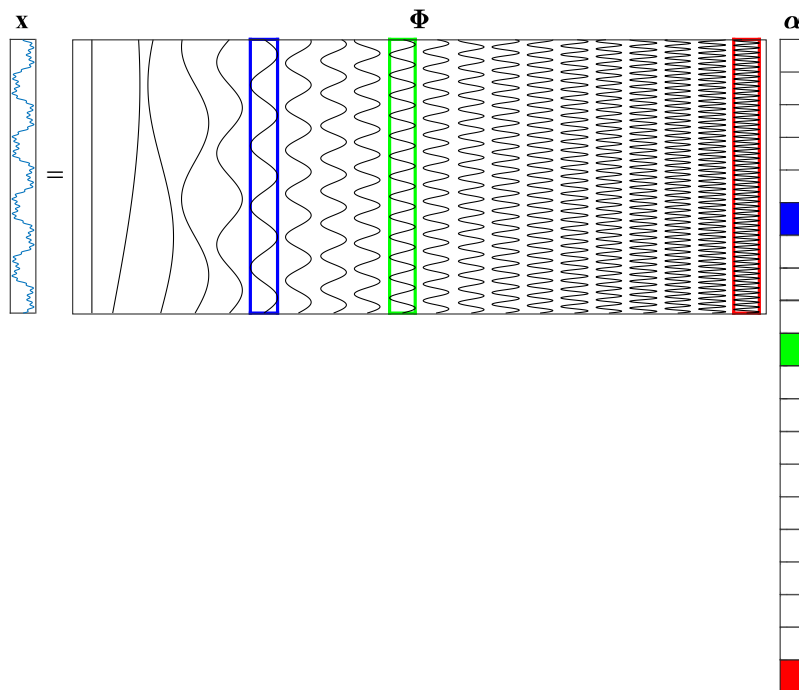
Nesse caso ocorre um *problema inverso*, pois os valores da saída  $\mathbf{x}$  e do dicionário  $\mathbf{\Phi}$  são conhecidos, enquanto os dados de entrada representado por  $\boldsymbol{\alpha}$  são desconhecidos, e devem ser estimados.

O dicionário representa um conjunto de sinais elementares dispostos em colunas, chamados *átomos*. Cada átomo contém informações representativas que podem estar contidas no sinal. Dessa forma, um sinal qualquer de tempo discreto pode ser

representado pela sobreposição de alguns átomos, ou seja, uma combinação linear de átomos selecionados adequadamente do dicionário (FENG et al., 2017), de acordo com a Equação (5)

$$\mathbf{x} = \sum_{m=1}^M \phi_m \alpha_m, \quad (5)$$

em que  $\alpha_m$  é um coeficiente do vetor  $\alpha$  e  $\phi_m$  corresponde a um átomo do dicionário. O problema pode ser ilustrado pela Figura 5, na qual as colunas em destaque são os átomos que correspondem aos coeficientes não nulos de  $\alpha$ . A somatória desses átomos ponderados pelos coeficientes de  $\alpha$ , resulta no sinal de entrada  $\mathbf{x}$ .



**Figura 5: Representação gráfica de  $\mathbf{x} = \Phi\alpha$ .**

**Fonte: Autoria própria. Baseado em (BARANIUK, 2007).**

Considerando as características de esparsidade dos sinais, um dicionário adequado pode ser construído por diferentes transformadas elementares, como senóides, cossenóides, impulsos, *Fourier*, *Wavelet* e outras. Outra forma é construí-lo a partir de um conjunto pré-definido de funções analíticas ou sinais de treinamento (AHARON et al., 2006).

Quando os átomos do dicionário são linearmente independentes, esse dicionário representa uma base de transformação em que  $M = N$ , e é dito *completo*. Nesse caso, o sinal é representado como uma combinação linear única de átomos do dicionário. Se o dicionário é completo e ortogonal, os coeficientes de  $\alpha$  podem ser calculados como produtos



internos do sinal com os átomos, porém quando não ortogonal, os coeficientes resultam do produto interno do sinal e do dicionário inverso (RUBINSTEIN et al., 2010).

Para representar sinais de morfologia complexa é necessário dispor de átomos com características distintas, adequados para analisar classes específicas de sub-sinais (FENG et al., 2017). Para isso, o dicionário pode ser redundante, com átomos linearmente dependentes e conter mais átomos que amostras do sinal,  $M > N$ . Possibilitando mais de uma representação esparsa para um mesmo sinal. Além disso, todas essas representações esparsas terão mais coeficientes que as amostras do sinal original, porém a maioria desses coeficientes terão valor nulo. Em geral, a medida em que aumenta a quantidade de formas de onda disponíveis no dicionário, aumenta também a precisão da representação do sinal (COOPER, 2009), tornando possível representar uma escala maior de fenômenos no sinal (RUBINSTEIN et al., 2010). Dicionários dessa categoria são chamados *sobrecompletos*.

A decomposição atômica de um sinal arbitrário a partir de um dicionário sobrecompleto resulta em múltiplas representações possíveis. A representação mais adequada pode ser selecionada de acordo aos objetivos da análise (FENG et al., 2017). Contudo, para obter a solução única e desejada, é necessário alguns critérios adicionais que permitem solucionar o problema apresentado na Equação (4). Isso é possível fazendo uma *regularização*, acrescentando uma *função objetivo*  $F(\boldsymbol{\alpha})$  que avalia a conveniência da solução  $\boldsymbol{\alpha}$  (ELAD, 2010). O objetivo da regularização é substituir o problema original *mal-condicionado* por um problema similar *bem-condicionado*, que encontre soluções próximas da solução requerida (BECK; TEBOULLE, 2009).

A operação para estimar os coeficientes aproximados que compõem  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$  a partir do sinal  $\mathbf{x}$  e do dicionário  $\Phi$  é chamada *decomposição atômica* e pode ser tratada como um problema de otimização representado pela Equação (6). A função objetivo  $F(\boldsymbol{\alpha})$  controla o tipo de solução a ser obtida, podendo ser representada pela norma dos vetores.

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \min_{\boldsymbol{\alpha}} F(\boldsymbol{\alpha}) \quad \text{sujeito a} \quad \mathbf{x} = \Phi\boldsymbol{\alpha}. \quad (6)$$

A minimização da norma euclidiana,  $\ell_2$ , é uma abordagem clássica para solução de problemas inversos deste tipo e busca a solução de menor energia (BARANIUK, 2007), resolvendo a Equação (7),

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \min_{\boldsymbol{\alpha}} \|\boldsymbol{\alpha}\|_2 \quad \text{sujeito a} \quad \mathbf{x} = \Phi\boldsymbol{\alpha}, \quad (7)$$

em que  $\|\cdot\|_2$  é a norma  $\ell_2$ . Esse problema tem como vantagem a solução única a partir de  $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\Phi}^T(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi}^T)^{-1}\mathbf{x}$ . A notação  $[\cdot]^T$  indica o transposto de uma matriz e  $[\cdot]^{-1}$  o inverso de uma matriz. Entretanto, a solução resulta em muitos elementos diferentes de zero.

A minimização da “norma”  $\ell_0$  conta o número de entradas não zero do vetor  $\boldsymbol{\alpha}$ . O problema de otimização é apresentado na Equação (8),

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \min_{\boldsymbol{\alpha}} \|\boldsymbol{\alpha}\|_0 \quad \text{sujeito a} \quad \mathbf{x} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\alpha}, \quad (8)$$

em que  $\|\cdot\|_0$  é a “norma”  $\ell_0$ . Esta solução é a mais esparsa, mas o problema da Equação (8) é numericamente instável e NP-hard (BARANIUK, 2007). Em sinais contaminados com ruído, o problema da Equação (8) pode ser relaxado para

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \min_{\boldsymbol{\alpha}} \|\boldsymbol{\alpha}\|_0 \quad \text{sujeito a} \quad \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\alpha}\|_2 \leq \epsilon, \quad (9)$$

em que  $\epsilon > 0$  representa uma tolerância ao erro (TROPP et al., 2010). Dessa forma, é possível encontrar a solução mais esparsa em que a energia resíduo, diferença entre o sinal original e a aproximação obtida, seja menor ou igual ao parâmetro  $\epsilon$ .

No entanto, além da precisão na representação do sinal, a busca por uma *representação esparsa* tornou-se essencial, pois com o sinal decomposto em apenas alguns elementos diferentes de zero é possível uma maior compactação e menor demanda de armazenamento de dados, além de garantir uma extração de características precisa e uma classificação mais fina nos detalhes do sinal (COOPER, 2009).

A *Decomposição Esparsa de Sinais* (do original *Sparse Signal Decomposition - SSD*), é uma técnica de decomposição atômica que busca representar sinais arbitrários com o menor número de coeficientes possível. É uma técnica inovadora e robusta, utilizada na detecção de distúrbios isolados ou combinados, em diversas aplicações, tais como, reconstrução de sinais, redução de ruído, separação, compressão e processamento de sinais (KHOKHAR et al., 2015). Essa técnica supera algumas limitação inerentes às técnicas de processamento de sinais tradicionais, permitindo obter representações convenientes para a análise de sinais complexos sem passos intermediários, reduzindo ou evitando perda de informação (FENG et al., 2017).

Embora a solução mais esparsa seja difícil de ser alcançada, a solução pode ser obtida por métodos de aproximação que refinam iterativamente a estimativa do vetor de coeficientes esparsos, modificando apenas os coeficientes que trazem melhorias significativas na aproximação do sinal (TROPP et al., 2010). Diferentes algoritmos

podem ser utilizados para a decomposição esparsa. Na Seção 2.4 são apresentados alguns algoritmos para essa finalidade.

### 2.3 DICIONÁRIOS DE BASES HARMÔNICAS

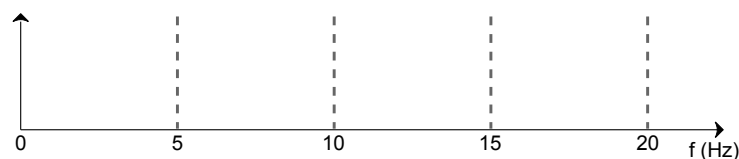
O êxito da decomposição esparsa de sinais decorre do fato de um determinado sinal ter uma representação esparsa em relação a um dicionário (DONG et al., 2015). Portanto, a construção de um dicionário adequado às características do sinal é fundamental para o desempenho da SSD (FENG et al., 2017). Assim, como a Transformada de *Fourier* representa os sinais como sobreposições de exponenciais complexas, os mesmos podem ser representados utilizando sobreposição de outros tipos de formas de ondas elementares. Para obter uma representação esparsa adequada, o dicionário deve ser construído por funções analíticas ou formas de ondas parametrizadas que contenham as mesmas características do sinal (MANIKANDAN et al., 2015a). Os sinais estacionários possuem representações esparsas adequadas se decompostos por *dicionários de frequência*, tais como o dicionário de *Fourier* e outras bases harmônicas.

#### 2.3.1 DICIONÁRIO DE *FOURIER*

O dicionário de *Fourier* é composto por átomos construídos a partir das funções cosseno ( $\phi_c$ ) e seno ( $\phi_s$ ), conforme as seguintes equações:

$$\phi_{c,k}[n] = \cos(\omega_k n) \quad \phi_{s,k}[n] = \sin(\omega_k n). \quad (10)$$

As frequências de cada um dos átomos são calculadas por  $\omega_k = 2\pi k f_s / N$  com  $k = 0, \dots, N/2$  para a função cosseno e  $k = 1, \dots, N/2 - 1$  para a função seno. O dicionário padrão de *Fourier* é completo ( $M = N$ ) e a sua resolução de frequência  $\Delta_{f_{DFT}}$  é dada pela razão entre a frequência de amostragem  $f_s$  e a quantidade de amostras do sinal ( $N$ ). Quando observados os critérios definidos em (IEC, 2006), o dicionário padrão de *Fourier* apresenta  $\Delta_{f_{DFT}} = 5$  Hz, segundo mostra a Figura 6.



**Figura 6:** Grade de frequência do dicionário de *Fourier* para medição de sinais de energia conforme recomendação da IEC 61000-4-7.

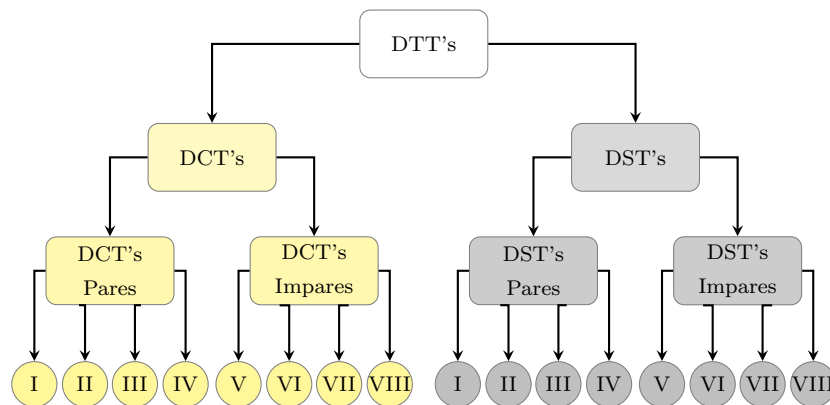
Fonte: Autoria própria.

Cada átomo do dicionário de *Fourier* é composto por ciclos completos de cossenos e senos. Permitindo decompor sinais estacionários em componentes com frequências múltiplas inteiras de  $\Delta_{f_{DFT}}$ .

A resolução de frequência pode ser refinada construindo um dicionário de *Fourier* sobrecompleto, fazendo  $\omega_k = 2\pi k f_s / (\ell N)$ , em que  $k = 0, \dots, (\ell N)/2$  para a função cosseno e  $k = 1, \dots, (\ell N)/2 - 1$  para a função seno, e  $\ell$  é um número inteiro maior que 1. Esse método é chamado  *$\ell$ -fold overcomplete system* e a nova grade tem resolução  $\Delta_{f_{DFT}} = f_s / (\ell N)$  (SHAOBING et al., 2001).

### 2.3.2 OUTRAS BASES HARMÔNICAS

A decomposição de sinais estacionários também pode ser efetuada por dicionários construídos por *Discrete Trigonometric Transforms* (DTTs) (SHAOBING et al., 2001). Esse é o nome dado ao conjunto de 16 transformadas senoidais composto por 8 Transformadas Discretas de Cosseno (DCT-I até DCT-VIII), e 8 Transformadas Discretas de Seno (DST-I até DST-VIII) (WANG; HUNT, 1985). Essa variedade de DCTs e DSTs, apresentadas na Figura 7, é resultado de diferentes combinações de das funções que formam suas bases (BRITANAK et al., 2007).

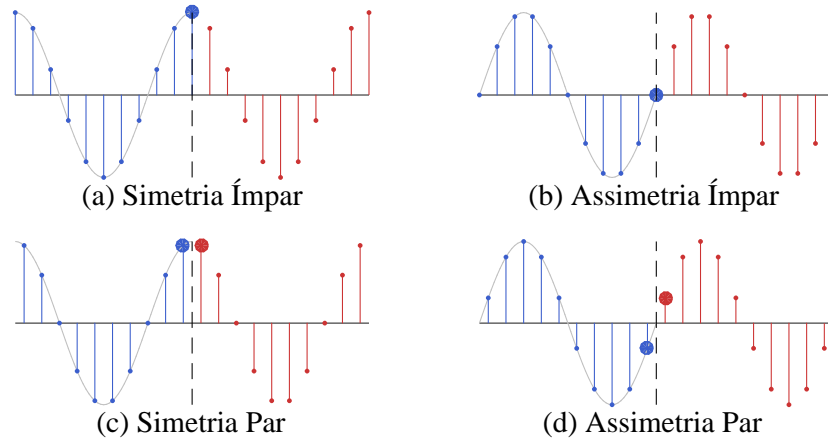


**Figura 7: Tipos de DTTs.**

**Fonte: Autoria própria.**

Os limites iniciais e finais de uma sequência de dados calculados por uma DTT são denominados *pontos de simetria*. A sequência de dados pode ser *simétrica* ou *assimétrica* nos pontos de simetria. Sendo simétrica se  $f(n) = f(-n)$  ou assimétrica se  $f(n) = -f(-n)$ . Uma outra condição está relacionada a posição da amostra em relação ao ponto de simetria, e será *par* quando o ponto de simetria estiver no ponto médio entre duas amostras

e *ímpar* se a amostra estiver exatamente sobre o ponto de simetria. Combinando as condições de simetria e de borda, tem-se: simetria ímpar (SI); assimetria ímpar (AI); simetria par (SP); e assimetria par (AP) (MARTUCCI, 1994). A Figura 8 ilustra essas quatro opções possíveis de simetria representada por uma sequência periódica e simétrica.



**Figura 8: Tipos de simetria: (a) Função simétrica com ponto de simetria sobre uma amostra; (b) Função assimétrica com ponto de simetria sobre uma amostra; (c) Função simétrica com ponto de simetria entre duas amostra; e (d) Função assimétrica com ponto de simetria entre duas amostra.**

**Fonte: Autoria própria.**

As DCTs e DSTs de I a IV são conhecidas como transformadas *pares* e são caracterizadas por ambos limites do sinal possuírem simetria/assimetria par ou simetria/assimetria ímpar. As DCTs e DSTs de V a VII são denominadas transformadas *ímpares*, com pontos de simetria distintos nos limites do sinal, combinando tipos de simetria par e ímpar em uma única sequência periódica. (MARTUCCI, 1994). As combinações dos tipos de simetria para cada tipo de DTT par são apresentadas na Tabela 1.

Para as transformadas pares o número de pontos amostrados em um período da sequência deve ser par, enquanto nas transformadas ímpares, o número de pontos amostrados em um período da sequência deve ser ímpar (BRITANAK et al., 2007). Portanto, as transformadas ímpares não são aplicáveis na análise de sinais medidos em sistemas de energia, pois esses sinais são coletados por dispositivos de monitoramento de sistemas de potência e normalmente são amostrados com 128, 256 ou 512 pontos por ciclo da frequência fundamental (IEEE, 2009). As DCTs e DSTs de I a IV são calculadas com

**Tabela 1: Classificação das DTTs quanto a simetria da sequência**

		Par			Ímpar		
		Tipo	Limite inicial	Limite final	Tipo	Limite inicial	Limite final
DCT	I	SI	SI	SI	V	SI	SP
	II	SP	SP	SP	VI	SP	SI
	III	SI	AI	AI	VII	SI	AP
	IV	SP	AP	AP	VIII	SP	AI
DST	I	AI	AI	AI	V	AI	AP
	II	AP	AP	AP	VI	AP	AI
	III	AI	SI	SI	VII	AI	SP
	IV	AP	SP	SP	VIII	AP	SI

um número par de amostras, e podem ser utilizadas para decompor sinais de sistemas de energia. São calculadas pelas Eqs. (11) e (12) (BRITANAK et al., 2007).

$$[\mathbf{DCT}_\beta]_{i \times j} = \sqrt{\frac{2}{N}} \varsigma \cos \left( \frac{(i + \Delta_i)(j + \Delta_j) \pi}{N} \right), \quad (11)$$

$$[\mathbf{DST}_\beta]_{i \times j} = \sqrt{\frac{2}{N}} \varsigma \text{sen} \left( \frac{(i + \Delta_i)(j + \Delta_j) \pi}{N} \right), \quad (12)$$

em que,  $\beta$  é o tipo da transformada (I até IV),  $\varsigma = 1$  exceto nas condições citadas na Tabela 2,  $\Delta_i$  é o deslocamento de tempo e  $\Delta_j$  o deslocamento de frequência. Essas variáveis caracterizam o tipo de transformada e os valores adotados para cada tipo de transformada são apresentados na Tabela 2.

**Tabela 2: Características das DTTs pares**

		$\beta$	$\varsigma$	$\Delta_i$	$\Delta_j$	$i, j$
DCT	I		$1/\sqrt{2}$ , se $i = 0$ ou $N$ e $j = 0$ ou $N$	0	0	$0, 1, \dots, N$
	II		$1/\sqrt{2}$ , se $j = 0$	1/2	0	$0, 1, \dots, N - 1$
	III		$1/\sqrt{2}$ , se $i = 0$	0	1/2	$0, 1, \dots, N - 1$
	IV			1/2	1/2	$0, 1, \dots, N - 1$
DST	I			0	0	$1, 2, \dots, N - 1$
	II		$1/\sqrt{2}$ , se $j = N - 1$	1/2	1	$0, 1, \dots, N - 1$
	III		$1/\sqrt{2}$ , se $i = N - 1$	1	1/2	$0, 1, \dots, N - 1$
	IV			1/2	1/2	$0, 1, \dots, N - 1$

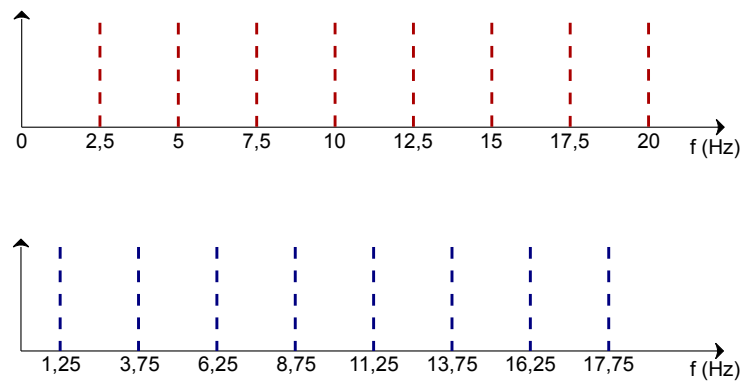
A resolução de frequência  $\Delta_{f_{DTT}}$  para todas as DTTs pares é dada por  $f_s/(2N)$ . Adotando as recomendações da IEC 61000-7-4, a resolução de frequência resultante é 2,5 Hz. Dessa forma, é possível obter o dobro da resolução apresentada pela DFT para sinais com dimensão  $N$ .

Embora a resolução de frequência seja a mesma para todas as DTTs pares, as frequências que formam a grade dependem do tipo de transformada escolhida, assim as DCTs e DSTs podem ser classificadas também em relação ao tipo de simetria do sinal transformado no domínio da frequência (WANG; HUNT, 1985). Para as DCTs e DSTs do tipo I e II, as frequências da grade são calculadas pela Equação (13); e para as transformadas do tipo III e IV, pela Equação (14).

$$f_{grade} = k\Delta_{f_{DTT}} \quad k = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (13)$$

$$f_{grade} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \Delta_{f_{DTT}} \quad k = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (14)$$

A Figura 9 ilustra a grade de frequência formada pelas Equações (13) e (14).



**Figura 9:** Grade de frequência das DTTs pares para medição de sinais de energia conforme recomendação da IEC 61000-4-7: (a) Transformadas do tipo I e II; (b) Transformadas do tipo III e IV.

**Fonte:** Autoria própria.

A grade de frequência para as transformadas do tipo I e II, mostrada na Figura 9(a), é formada por frequências múltiplas inteiras de  $\Delta_{f_{DTT}}$ . A grade de frequência definida pelas transformadas do tipo III e IV, mostrada na Figura 9(b), também é formada por frequências múltiplas inteiras de  $\Delta_{f_{DTT}}$ , porém deslocadas em  $\Delta_{f_{DTT}}/2$ .

## 2.4 ALGORITMOS PARA DECOMPOSIÇÃO ATÔMICA

O sucesso da aplicação da SSD depende, além de um dicionário adequado, de um algoritmo para realizar a decomposição dos sinais de entrada (TROPPE et al., 2010). Diversos algoritmos são propostos com o objetivo de resolver esse problema, e podem ser divididos em duas abordagens distintas (TROPPE et al., 2010): *Greedy Pursuit* (GP) e *Relaxação Convexa* (RC). Os algoritmos baseados em GP realizam a decomposição iterativamente, buscando sucessivamente o componente do dicionário que tem o maior produto interno com o resíduo do sinal. Os métodos baseados em RC tratam a decomposição esparsa como um problema de otimização convexa utilizando a norma  $\ell_1$ , podendo ser solucionado por estratégias de programação linear clássica.

Dois critérios de parada são adotados em todos os algoritmos. O primeiro critério limita a energia do resíduo  $\|\mathbf{r}^k\|_2$ , que é a energia da diferença entre o sinal de teste e o sinal reconstruído pelos coeficientes estimados, a um valor menor ou igual a um limite de tolerância  $\epsilon$ . O valor de  $\epsilon$  pode ser calculado conforme a Equação (15),

$$\epsilon = 10^{(-SNR/10)}, \quad (15)$$

relacionando o limite de tolerância ao nível de ruído existente no sinal de entrada. O segundo critério de parada estabelece o número máximo de iterações do algoritmo.

Nessa seção são apresentados os algoritmos *Orthogonal Matching Pursuit* (OMP), *Iterative Hard Thresholding* (IHT), *BP via Alternate Direction Multiplier Method* (BP-ADMM), *LASSO via Alternate Direction Multiplier Method* (LASSO-ADMM), *Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm* (FISTA) e o *Sparse Reconstruction by Separable Approximation* (SpaRSA).

### 2.4.1 ALGORITMOS GREEDY PURSUIT

Os algoritmos para SSD baseados em GP resolvem diretamente o problema apontado na Equação (9). Nesse caso, o vetor  $\mathbf{x}$  e o dicionário  $\mathbf{\Phi}$  são conhecidos. Nessa categoria foram examinados os algoritmos OMP (BRUCKSTEIN et al., 2009) e IHT (BLUMENSATH; DAVIES, 2010).

Os principais passos executados pelo OMP são apresentados no Algoritmo 1. O vetor de coeficientes estimados  $\hat{\mathbf{a}}$  é inicializado com o vetor nulo, e o resíduo  $\mathbf{r}^k$  é o próprio sinal a ser decomposto ( $\mathbf{x}$ ). O conjunto  $\mathcal{S}^k$  representa o suporte da solução  $\hat{\mathbf{a}}$ , contendo os índices das colunas de  $\mathbf{\Phi}$  que compõem o sinal  $\mathbf{x}$ . Esse conjunto é inicializado



vazio. O processo iterativo inicia com a busca do índice ( $\gamma^k$ ) que representa o átomo  $\phi_m$  que resulta no maior produto interno com o  $\mathbf{r}^k$ . A cada iteração, o valor de  $\gamma^k$  é inserido a  $\mathcal{S}^k$ , formando um conjunto com os índices dos átomos mais correlacionados com  $\mathbf{r}^k$ . Então, são calculados os coeficientes  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$  que resultam no menor erro entre o sinal de teste e a reconstrução do sinal, utilizando um dicionário reduzido com apenas as colunas pertencentes ao suporte ( $\Phi_{\mathcal{S}^{k+1}}$ ).

---

**Algoritmo 1: OMP**


---

**Dados:**  $\Phi$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\epsilon$

- 1: **Inicialize:**  $k = 1$ ,  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^k = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{r}^k = \mathbf{x}$ ,  $\mathcal{S}^k = \emptyset$
- 2: **enquanto**  $\|\mathbf{r}^k\|_2 > \epsilon$  ou  $k < N$  **faça**
- 3:      $\gamma^k = \max_m |\langle \mathbf{r}^k, \phi_m \rangle|$
- 4:      $\mathcal{S}^{k+1} = \mathcal{S}^k \cup \{\gamma^k\}$
- 5:      $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{k+1} = \min_{\boldsymbol{\alpha}} \|\mathbf{x} - \Phi_{\mathcal{S}^{k+1}} \boldsymbol{\alpha}\|_2$
- 6:      $\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{x} - \Phi \hat{\boldsymbol{\alpha}}^{k+1}$
- 7:      $k = k + 1$
- 8: **fim**

**Resultado:**  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^k$

---

O algoritmo IHT alterna entre a aplicação de um gradiente descendente e um *hard thresholding*. Com as mesmas condições iniciais para  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^k$  e  $\mathbf{r}^k$  do OMP, como mostrado no Algoritmo 2, o IHT faz a busca pelos coeficientes do vetor  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$  por meio de um processo iterativo. No primeiro passo de cada iteração são calculados os coeficientes de  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$  que reconstroem  $\mathbf{x}$  a partir do cálculo do gradiente. Na sequência, é aplicado o operador não linear de *hard thresholding*  $T_S^{hard}(\bullet)$  que zera todos os componentes do vetor  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$  calculados na etapa anterior, com exceção dos  $S$  componentes de maior valor (BLUMENSATH; DAVIES, 2010). O parâmetro  $S$ , esparsidade, define a quantidade de coeficientes da solução. As iterações encerram quando um dos critérios de parada é atingido.

---

**Algoritmo 2: IHT**


---

**Dados:**  $\Phi$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $S$ ,  $\epsilon$

- 1: **Inicialize:**  $k = 1$ ,  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^k = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{r}^k = \mathbf{x}$
- 2: **enquanto**  $\|\mathbf{r}^k\|_2 \geq \epsilon$  ou  $k < N$  **faça**
- 3:      $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{k+1} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}^k + \Phi^T(\mathbf{x} - \Phi \hat{\boldsymbol{\alpha}}^k)$
- 4:      $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{k+1} = T_S^{hard}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{k+1})$
- 5:      $\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{x} - \Phi \hat{\boldsymbol{\alpha}}^{k+1}$
- 6:      $k = k + 1$
- 7: **fim**

**Resultado:**  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^k$

---

## 2.4.2 ALGORITMOS DE RELAXAÇÃO CONVEXA

Os algoritmos de relaxação convexa propõe a troca da “norma”  $\ell_0$  no problema (9) pela norma  $\ell_1$ , sendo essa função convexa a que mais se aproxima da “norma”  $\ell_0$  em relação a esparsidade (TROPP et al., 2010). Essa troca permite que a decomposição esparsa possa ser reescrita como outros dois problemas de otimização (STEPHEN et al., 2010): o *Basis Pursuit*, apresentado na Equação (16) e o *Least Absolute Shrinkage and Selection Operator* (LASSO), conforme Equação (17).

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \min_{\boldsymbol{\alpha}} \|\boldsymbol{\alpha}\|_1 \quad \text{sujeito a} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{\Phi}\boldsymbol{\alpha}\|_2 \leq \epsilon. \quad (16)$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \min_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{\Phi}\boldsymbol{\alpha}\|_2^2 + \lambda \|\boldsymbol{\alpha}\|_1. \quad (17)$$

A norma  $\ell_1$  de um vetor é representada por  $\|\cdot\|_1$  e  $\lambda$  é conhecido como *parâmetro de regularização*. O valor de  $\lambda$  determina o grau de esparsidade da solução e pode ser determinado pela razão entre a variância do ruído  $\sigma_v^2$  e a variância do sinal  $\sigma_x^2$ , conforme a Equação (18) (KARL, 2000).

$$\lambda = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_x^2}, \quad (18)$$

O algoritmo BP-ADMM (STEPHEN et al., 2010) foi implementado para realizar a decomposição esparsa por *Basis Pursuit*. Para resolver o problema (17), foram utilizados os algoritmos LASSO-ADMM (STEPHEN et al., 2010), FISTA (BECK; TEBoulLE, 2009) e o SpaRSA (WRIGHT et al., 2009).

O ADMM é um algoritmo que resolve problemas de otimização na forma

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \min_{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{\alpha}) + g(\mathbf{z}) \quad \text{sujeito a} \quad \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{B}\mathbf{z} = \mathbf{c}, \quad (19)$$

assumindo que o sinal procurado é dividido em duas partes ( $\boldsymbol{\alpha}$  e  $\mathbf{z}$ ) e as funções  $f(\bullet)$  e  $g(\bullet)$  são convexas (STEPHEN et al., 2010).

O método consiste na minimização alternada de  $\boldsymbol{\alpha}$  e  $\mathbf{z}$  na função Lagrangiana aumentada

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\rho(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}) = & f(\boldsymbol{\alpha}) + g(\mathbf{z}) + \\ & \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{B}\mathbf{z} - \mathbf{c}) + \\ & (\rho/2) \|\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{B}\mathbf{z} - \mathbf{c}\|_2^2, \end{aligned} \quad (20)$$

calculando os seguintes passos em cada iteração

$$\boldsymbol{\alpha}^{k+1} = \min_{\boldsymbol{\alpha}} \mathcal{L}_{\rho}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{z}^k, \boldsymbol{\mu}^k) \quad (21)$$

$$\mathbf{z}^{k+1} = \min_{\mathbf{z}} \mathcal{L}_{\rho}(\boldsymbol{\alpha}^{k+1}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}^k) \quad (22)$$

$$\boldsymbol{\mu}^{k+1} = \boldsymbol{\mu}^k + \rho(\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}^{k+1} + \mathbf{B}\mathbf{z}^{k+1} - \mathbf{c}), \quad (23)$$

em que  $\rho > 0$  é o parâmetro de penalidade que pondera a restrição de igualdade da Equação (19).

Os dois primeiros passos realizam a minimização das *variáveis primais*  $\boldsymbol{\alpha}$  e  $\mathbf{z}$  e o terceiro passo atualiza a *variável dual*  $\boldsymbol{\mu}$ . Grandes valores de  $\rho$  tendem a produzir pequenos *resíduos primais* ( $\boldsymbol{\alpha}^k - \mathbf{z}^k$ ), enquanto pequenos valores de  $\rho$  tendem a reduzir os *resíduos duais*  $-\rho(\mathbf{z}^k - \mathbf{z}^{k-1})$  podendo resultar em um maior resíduo primal (STEPHEN et al., 2010). Portanto, para obter convergência é necessário escolher  $\rho$  de forma que os resíduos sejam pequenos e com amplitudes similares. Um método para calcular esse parâmetro é a partir do próprio dicionário  $\Phi$ , em que  $\rho = 0,25 \|\Phi^T \Phi\|_2$  (VALENTE, 2017).

O problema de BP da Equação (16) pode ser reescrito na forma do ADMM como

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \min_{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{\alpha}) + \|\mathbf{z}\|_1 \text{ sujeito a } \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad (24)$$

em que  $f(\boldsymbol{\alpha})$  é a função indicadora para  $\{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^M \mid \Phi\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{x}\}$  (STEPHEN et al., 2010). Nesse caso, a Equação (21) é resolvida por

$$\begin{aligned} \prod(\mathbf{z}^k - \boldsymbol{\mu}^k) &= (\mathbf{I} - \Phi^T(\Phi\Phi^T)^{-1}\Phi)(\mathbf{z}^k - \boldsymbol{\mu}^k) \\ &\quad + \Phi^T(\Phi\Phi^T)^{-1}\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (25)$$

e a Equação (22) é resolvida pelo operador de *soft thresholding*

$$T_{\tau}^{soft}(x) = \text{sign}(x) \max\{|x| - \tau, 0\}. \quad (26)$$

O algoritmo 3 mostra o pseudo-código do BP-ADMM. O valor de  $\rho$  é informado como parâmetro para o algoritmo.

O ADMM também pode ser utilizado para resolver o problema LASSO (STEPHEN et al., 2010). Escrevendo a Equação (17) na forma do ADMM tem-se

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \min_{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{\alpha}) + g(\mathbf{z}) \text{ sujeito a } \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad (27)$$

em que  $f(\boldsymbol{\alpha}) = (1/2)\|\mathbf{x} - \Phi\boldsymbol{\alpha}\|_2^2$  e  $g(\mathbf{z}) = \lambda\|\mathbf{z}\|_1$ .

---

**Algoritmo 3: BP ADMM**


---

**Dados:**  $\Phi$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\rho$ ,  $\epsilon$ 

- 1: **Inicialize:**  $k = 1$ ,  $\hat{\alpha}^k = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{r}^k = \mathbf{x}$
- 2: **enquanto**  $\|\mathbf{r}^k\|_2 > \epsilon$  ou  $k < N$  **faça**
- 3:      $\hat{\alpha}^{k+1} = \prod(\mathbf{z}^k - \boldsymbol{\mu}^k)$
- 4:      $\mathbf{z}^{k+1} = T_{1/\rho}^{soft}(\hat{\alpha}^{k+1} + \boldsymbol{\mu}^k)$
- 5:      $\boldsymbol{\mu}^{k+1} = \boldsymbol{\mu}^k + \hat{\alpha}^{k+1} - \mathbf{z}^{k+1}$
- 6:      $\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{x} - \Phi \hat{\alpha}^{k+1}$
- 7:      $k = k + 1$
- 8: **fim**

**Resultado:**  $\hat{\alpha}^k$ 


---

Assim, a Eq.(21) é resolvida por

$$\boldsymbol{\alpha}^{k+1} = (\Phi^T \Phi + \rho \mathbf{I})^{-1} (\Phi^T \mathbf{x} + \rho(\mathbf{z}^k - \boldsymbol{\mu}^k)), \quad (28)$$

e a Equação (22) também é resolvida pelo operador de *soft thresholding* da Equação (26). O pseudo-código do algoritmo LASSO-ADMM é apresentado no Algoritmo 4.

---

**Algoritmo 4: LASSO-ADMM**


---

**Dados:**  $\Phi$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\epsilon$ 

- 1: **Inicialize:**  $k = 1$ ,  $\hat{\alpha}^k = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{r}^k = \mathbf{x}$
- 2: **enquanto**  $\|\mathbf{r}^k\|_2 > \epsilon$  ou  $k < N$  **faça**
- 3:      $\boldsymbol{\alpha}^{k+1} = (\Phi^T \Phi + \rho \mathbf{I})^{-1} \times (\Phi^T \mathbf{x} + \rho(\mathbf{z}^k - \boldsymbol{\mu}^k))$
- 4:      $\mathbf{z}^{k+1} = T_{\lambda/\rho}^{soft}(\boldsymbol{\alpha}^{k+1} + \boldsymbol{\mu}^k)$
- 5:      $\boldsymbol{\mu}^{k+1} = \boldsymbol{\mu}^k + \boldsymbol{\alpha}^{k+1} - \mathbf{z}^{k+1}$
- 6:      $\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{x} - \Phi \boldsymbol{\alpha}^{k+1}$
- 7:      $k = k + 1$
- 8: **fim**

**Resultado:**  $\hat{\alpha}^k$ 


---

O algoritmo FISTA é uma variação da classe de algoritmos *Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithms* (ISTA) que apresenta uma taxa de convergência aprimorada (BECK; TEBoulLE, 2009). Os algoritmos ISTA resolvem problemas LASSO a partir de um procedimento iterativo no qual a solução procurada é calculada por

$$\boldsymbol{\alpha}^{k+1} = T_{\lambda/L}^{soft}(\boldsymbol{\alpha}^k - \frac{1}{L} \Phi^T (\mathbf{x} - \Phi \Phi \boldsymbol{\alpha}^k)), \quad (29)$$

em que  $1/L$  é uma constante que define o “tamanho do passo” (BECK; TEBoulLE, 2009).

A melhora na taxa de convergência existente no FISTA ocorre devido a uma modificação na Eq.(29). Ao invés de utilizar a estimativa do passo anterior ( $\boldsymbol{\alpha}^k$ ), é utilizado um ponto  $\boldsymbol{\mu}^k$  obtido pela combinação linear da estimativa atual e anterior ( $\boldsymbol{\alpha}^{k+1}$  e  $\boldsymbol{\alpha}^k$ ). As parcelas relevantes dessas estimativas no cálculo de  $\boldsymbol{\mu}^k$  são definidas pela constante  $t^k$ , atualizada a cada iteração. O pseudo-código do FISTA é apresentado no Algoritmo 5.

---

**Algoritmo 5: FISTA**


---

**Dados:**  $\Phi$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\lambda$ ,  $L$ ,  $\epsilon$

- 1: **Inicialize:**  $k = 1, t^k = 1, \hat{\boldsymbol{\alpha}}^k = \mathbf{0}, \mathbf{r}^k = \mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}^k = \mathbf{0}$
- 2: **enquanto**  $\|\mathbf{r}^k\|_2 > \epsilon$  ou  $k < N$  **faça**
- 3:  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{k+1} = T_{\frac{\lambda}{L}}^{soft} [\boldsymbol{\mu}^k - \frac{1}{L}\Phi^T(\mathbf{x} - \Phi\boldsymbol{\mu}^k)]$
- 4:  $t^{k+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4(t^k)^2}}{2}$
- 5:  $\boldsymbol{\mu}^{k+1} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}^{k+1} + \frac{t^k - 1}{t^{k+1}}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{k+1} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}^k)$
- 6:  $\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{x} - \Phi\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{k+1}$
- 7:  $k = k + 1$
- 8: **fim**

**Resultado:**  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^k$

---

O SpaRSA é outro algoritmo da classe ISTA para resolução de problemas LASSO. O seu princípio de funcionamento baseia-se em aproximar o termo quadrático da Equação (17) por uma expansão em série de Taylor de segunda ordem (WRIGHT et al., 2009). Com essa expansão, o problema LASSO passa a ser

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \min_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\alpha} - \hat{\mathbf{u}}\|_2^2 + \frac{\lambda}{\alpha}\|\boldsymbol{\alpha}\|_1, \quad (30)$$

em que  $\hat{\mathbf{u}}$  é o *gradiente descendente* calculado por

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\boldsymbol{\alpha}} - \frac{1}{\alpha}\Phi^T(\mathbf{x} - \Phi\hat{\boldsymbol{\alpha}}) \quad (31)$$

Assim como o FISTA, a solução da Equação (30) é obtida de forma iterativa, aplicando o operador de *soft thresholding*. A diferença aqui é que o parâmetro  $\alpha$  precisa ser atualizado a cada iteração. A estratégia adotada para o cálculo de  $\alpha$ , mostrada na Equação (32) foi a sugerida por Barzilei e Borwein (WRIGHT et al., 2009).

$$\alpha^{k+1} = \frac{\|\Phi(\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{k+1} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}^k)\|_2^2}{\|\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{k+1} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}^k\|_2^2}. \quad (32)$$

Algoritmo 6 mostra o pseudo-código utilizado na implementação do SpaRSA.

---

**Algoritmo 6:** SPARSA
 

---

**Dados:**  $\Phi$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\lambda$ ,  $\epsilon$ 

- 1: **Inicialize:**  $k = 1$ ,  $\alpha^k = 1$ ,  $\hat{\alpha}^k = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{r}^k = \mathbf{x}$
- 2: **enquanto**  $\|\mathbf{r}^k\|_2 > \epsilon$  ou  $k < N$  **faça**
- 3:      $\hat{\mathbf{u}}^k = \hat{\alpha}^k - \frac{1}{\alpha^k} \Phi^T (\mathbf{x} - \Phi \hat{\alpha}^k)$
- 4:      $\hat{\alpha}^{k+1} = S_{\frac{\lambda}{\alpha^k}}(\hat{\mathbf{u}}^k)$
- 5:      $\alpha^{k+1} = \frac{\|\Phi(\hat{\alpha}^{k+1} - \hat{\alpha}^k)\|_2^2}{\|\hat{\alpha}^{k+1} - \hat{\alpha}^k\|_2^2}$
- 6:      $\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{x} - \Phi \hat{\alpha}^{k+1}$
- 7:      $k = k + 1$
- 8: **fim**

**Resultado:**  $\hat{\alpha}^k$ 


---

## 2.5 ATENUAÇÃO DE RÚIDO

Para reduzir a influência do ruído branco gaussiano existente no sinal pode ser aplicado um *hard thresholding* aos componentes de frequência do sinal. A função *hard thresholding* consiste em manter os componentes com valores absolutos de amplitude maiores que um determinado nível de *threshold* positivo,  $\tau$ . Porém, se o valor absoluto da amplitude do componente for menor ou igual a  $\tau$ , esse componente é zerado. A função *threshold*,  $T$ , é representada pela Equação (33),

$$T_{\tau}^{hard}(A_j) = \begin{cases} A_j & \text{se } |A_j| > \tau, \\ 0 & \text{se } |A_j| \leq \tau. \end{cases} \quad (33)$$

A norma IEEE (2009) sugere que o valor *threshold* utilizado para eliminar ruídos seja aproximadamente 1 % da tensão nominal entre fase e neutro em sistemas de baixa tensão. Entretanto, os componentes inter-harmônicos são caracterizados por amplitudes de 0 a 2 % da tensão fundamental, e esse nível de *threshold* elimina componentes existentes no sinal.

O valor adotado para  $\tau$  pode ser calculado de diferentes maneiras. O teorema conhecido como *near-minimaxity* para limites superiores de risco e valores de escala conhecidos (DONOHO et al., 1995, 1997) permite calcular  $\tau$  ponderando o nível de ruído e o número de amostras do sinal. O valor de  $\tau$  é calculado pela Equação (34),

$$\tau = 2\sigma \frac{\sqrt{2 \log(N)}}{\sqrt{N}}, \quad (34)$$

em que  $\sigma$  representa o desvio padrão do ruído.

## 2.6 CONCLUSÕES PARCIAIS

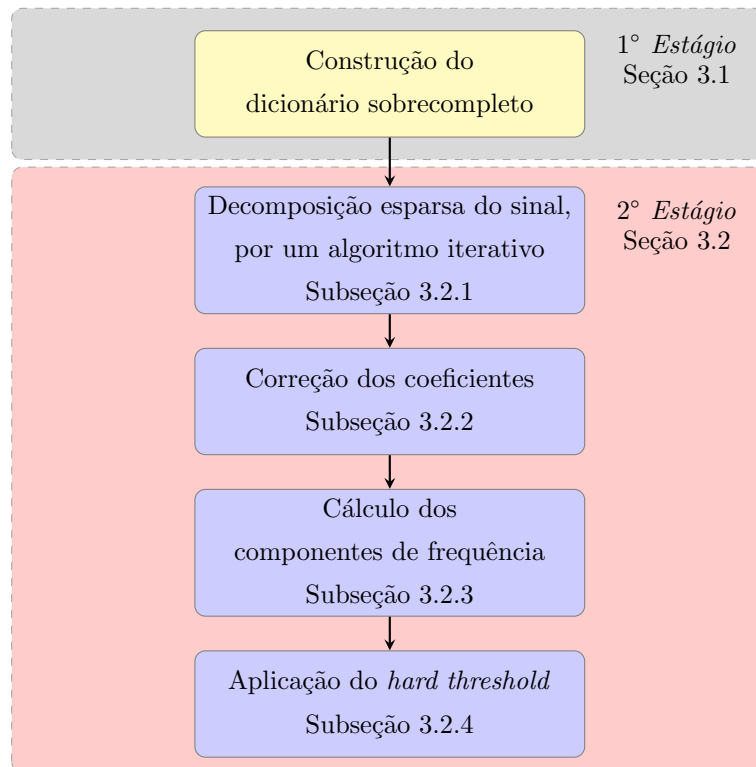
O presente capítulo teve como função apresentar a fundamentação teórica necessária a fim de elaborar um algoritmo para a estimação de componentes de frequência em sinais com distorções harmônicas e inter-harmônicas, utilizando a técnica SSD. Essas distorções são caracterizadas, e quatro sinais distintos, típicos de elementos que causam distorções harmônicas e inter-harmônicas, são apresentados.

A técnica SSD é detalhada, apresentando o problema inverso formado pelo sinal a ser decomposto e o dicionário. Sendo tratado como um problema de otimização, e a solução pode ser obtida por algoritmos iterativos. O dicionário adequado para esse tipo de sinal deve ser composto por sinais harmônicos, portanto são apresentadas a transformada de *Fourier* e as transformadas discretas de seno e cosseno, como bases possíveis para a construção do dicionário.

Foram mostrados seis algoritmos para decomposição atômica e os passos necessários para a implementação. O OMP e o IHT que são algoritmos *greedy* e o BP-ADMM, LASSO-ADMM, FISTA e o SpaRSA como algoritmos de relaxação convexa. Também é definido o *hard thresholding*, que tem como finalidade eliminar os componentes indesejados do espectro de frequência.

### 3 ALGORITMO PROPOSTO

Nesse capítulo é proposto um algoritmo que realiza a medição de componentes harmônicos e inter-harmônicos em sinais de energia, denominado *Harmonics and Interharmonics components Estimation based on Signal Sparse Decomposition* - HIESSD. A aplicação da SSD com dicionários sobrecompletos compostos por bases DCT e DST e utilização do  $\ell$ -fold *overcomplete system* permitem a medição desses componentes com diferentes níveis de resolução na grade de frequências. A Figura 10 sintetiza a estrutura do HIESSD.



**Figura 10: Estrutura do Algoritmo HIESSD**

No *primeiro estágio* do algoritmo é montado o dicionário com resolução adequada às características do sinal. O *segundo estágio* é responsável pela estimação dos componentes harmônicos e inter-harmônicos presentes no sinal. Para isso, uma sequência



de passos é realizada: (I) a decomposição do sinal para a obtenção dos coeficientes do vetor esparso; (II) a correção desses coeficientes em função das características do dicionário utilizado; (III) o cálculo dos componentes de frequência a partir dos coeficientes corrigidos; (IV) e a aplicação de um *hard threshold* para eliminar os componentes de frequência resultantes do ruído contido no sinal.

### 3.1 MONTAGEM DO DICIONÁRIO

Conforme apresentado na Seção 2.3, quando atendidos os critérios de aquisição de sinais de energia estabelecidos pela IEC 61000-7-4, o dicionário padrão de *Fourier* tem resolução de frequência de 5 Hz, enquanto as DTTs pares apresentam resolução de 2,5 Hz. Uma análise detalhada dessas transformadas será realizada para a escolha da transformada adequada.

Para representar sinais senoidais com deslocamento temporal são necessários senóides e cossenóides. Assim sendo, o dicionário deve ser construído por combinações de DCTs e DSTs. Para que as condições de simetria e grade de frequência nos dicionários sejam compatíveis, é necessário utilizar pares de DCT/DST do mesmo tipo. Dessa forma, os dicionários compostos por DTTs podem ser construídos pelas Equações (11) e (12), de acordo com Equação (35),

$$\mathbf{\Phi}_\beta = [\mathbf{DCT}_\beta | \mathbf{DST}_\beta]. \quad (35)$$

Para a estimação de componentes harmônicos é fundamental que a grade de frequência seja composta por frequências múltiplas inteiras de  $\Delta_{f_{DTT}}$ , isso é viabilizado pela utilização das transformadas do tipo I e II. Nas transformadas III e IV as frequências contidas na grade não coincidem com as frequências harmônicas do sinal, e conseqüentemente não obtém resultados satisfatórios na estimação dos componentes harmônicos.

Apesar da DCT-I e da DST-I possuírem a grade de frequência adequada para um sinal de  $N$  amostras, a DST-I tem condição de assimetria ímpar em ambas extremidades. Isso implica em amostras com valor zero nos pontos de simetria (MARTUCCI, 1994), como pode ser observado na Figura 8(b). Assim, a DST-I é adequada apenas para a análise de sinais cuja amostra inicial e final tenha valor zero, mas não é apropriada para análise de sinais em que um ou mais componentes harmônicos tenha deslocamento de fase.

Portanto, a DCT-II e a DST-II reúnem várias condições adequadas para a análise de sinais com distorções harmônicas e inter-harmônicas, tais como: (I) processa um

número par de amostras; (II) a grade de frequência dos átomos é composta por múltiplos inteiros de  $\Delta_{f_{DTT}}$ , que é a metade de  $\Delta_{f_{DTT}}$  para um mesmo sinal; e, (III) possui condições de simetria par em ambas extremidades, permitindo a análise de sinais defasados no tempo.

### 3.1.1 O $\ell$ -FOLD OVERCOMPLETE SYSTEM APLICADO AS DTT

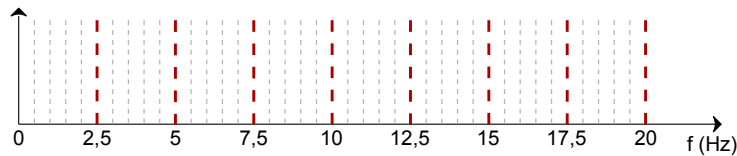
A resolução de frequência do dicionário pode ser aumentada utilizando  $\ell$ -fold overcomplete system (SHAOBING et al., 2001). Assim, os coeficientes de frequência variam até  $\ell N$ , e as Equações. (11) e (12) são calculadas fazendo o argumento da função trigonométrica igual a Equação (36),

$$\begin{aligned} & \left( \frac{(i + \Delta_i)(j + \Delta_j) \pi}{\ell N} \right), \\ & i = 0, 1, \dots, N - 1, \\ & j = 0, 1, \dots, \ell N - 1. \end{aligned} \quad (36)$$

Dessa forma, é possível reduzir o intervalo entre frequências na grade, aumentando a gama de frequências disponíveis no espectro de saída. Um número maior de componentes de frequência pode ser medidos com precisão e a nova resolução de frequência pode ser calculada pela Equação (37),

$$\Delta_{f_{DTT}} = \frac{f_s}{2\ell N}. \quad (37)$$

Para valores inteiros de  $\ell > 1$ , o valor de  $\Delta_{f_{DTT}}$  reduz, podendo ser ajustado à precisão requerida na medição. A Figura 11 mostra a resolução do dicionário  $\Phi_{II}$  com  $\ell = 5$ . Resultando em  $\Delta_{f_{DTT}} = 0,5$  Hz.



**Figura 11: Grade de frequência do dicionário  $\Phi_{II}$  com  $\ell = 5$**

**Fonte: Autoria própria.**

A quantidade de átomos do dicionário aumenta  $\ell$  vezes e a dimensão da matriz gerada por cada função será  $N \times 2\ell N$ . O número de amostras do sinal e o valor adotado para  $\ell$  influenciam na dimensão do dicionário, e conseqüentemente, na velocidade de processamento do sinal.

### 3.1.2 ANÁLISE DOS DICIONÁRIOS HARMÔNICOS

Considerando os dados apresentados anteriormente, o dicionário  $\Phi_{II}$  apresenta as características mais adequadas para análise de sinais de energia. Porém, as demais DTTs pares também podem ser utilizadas na decomposição de sinais estacionários. Portanto, nessa Seção será avaliado o desempenho dos dicionários  $\Phi_I$ ,  $\Phi_{II}$ ,  $\Phi_{III}$  e  $\Phi_{IV}$  na decomposição de sinais estacionários.

Para realização dos ensaios foi utilizado um sinal de corrente com distorção harmônica conhecida, gerado pela Equação (38),

$$\mathbf{x}[n] = \text{sen}(\omega n) - 0,18 \text{sen}(3\omega n) + 0,11 \text{sen}(5\omega n), \quad (38)$$

em que  $\omega = 120\pi\Delta_t$  para um sistema elétrico com frequência de 60 Hz,  $\Delta_t$  é o período de amostragem e  $n = 0, 1, \dots, N-1$ . Conforme requisitos estabelecidos em (IEC, 2006), o sinal amostrado deve compreender uma janela de aproximadamente 200 ms (12 ciclos completos de 60 Hz). A taxa de amostragem adotada foi de 256 pontos por ciclos, resultando em  $\Delta_t = 1/15360$  e  $N = 3072$ .

Esse sinal é característico de sistemas elétricos de distribuição em que o nível de tensão excede os valores nominais de tensão do transformador, causando um aumento na corrente de magnetização do transformador e como resultado a distorção harmônica. Um transformador com 30 % de sobreexcitação tem aproximadamente 0,18 pu de corrente referente a terceira harmônica e 0,11 pu de corrente referente a quinta harmônica (ARRILLAGA; WATSON, 2003).

Os componentes harmônicos estimados a partir da decomposição esparsa do sinal para os quatro dicionários distintos são exibidos na Tabela 3.

**Tabela 3: Componentes de frequência resultantes da decomposição do sinal  $\mathbf{x}[n]$  utilizando  $\Phi_I$ ,  $\Phi_{II}$ ,  $\Phi_{III}$  e  $\Phi_{IV}$**

$\Phi_I, \Phi_{II}$		$\Phi_{III}, \Phi_{IV}$	
Freq (Hz)	Amp (p.u.)	Freq (Hz)	Amp (p.u.)
60	1	58,75	0,569
180	0,18	61,25	0,521
300	0,11	178,75	0,074
		181,25	0,132
		298,75	0,078
		301,25	0,059

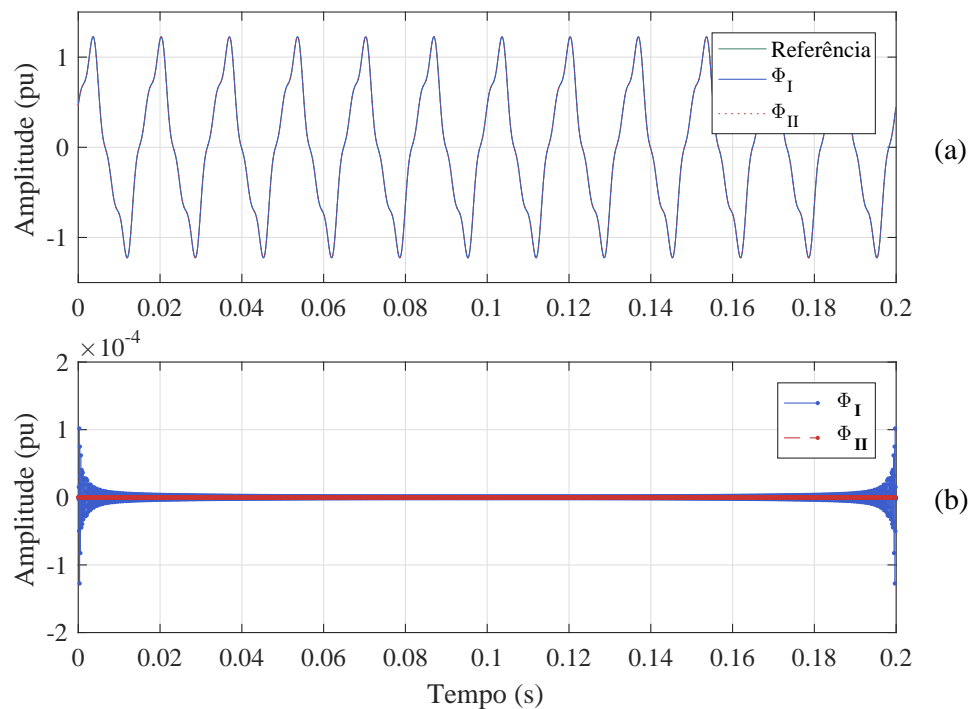
Para os dicionários  $\Phi_I$  e  $\Phi_{II}$ , a grade de frequência é formada por valores múltiplos inteiros de 2,5 Hz. Assegurando que todos os componentes de frequência existentes no

sinal estejam na grade de frequência. Assim, é possível estimar de maneira adequada os componentes de frequência do sinal.

Nos dicionários  $\Phi_{III}$  e  $\Phi_{IV}$ , a grade de frequência não coincide com as frequências contidas no sinal. Então, a energia de cada componente de frequência é distribuída para frequências adjacentes, resultando em erros de estimação. Na Tabela 3 consta apenas os seis componentes com os maiores valores de amplitude. Esses dicionários não são adequados para a decomposição de sinais harmônicos.

Para avaliar os dicionários  $\Phi_I$  e  $\Phi_{II}$  quanto às condições de simetria, foi adicionada uma defasagem de  $30^\circ$  em cada componente do sinal apresentado na Eq. (38). Nesse ensaio, foram avaliados três fatores para determinar a qualidade da decomposição por cada dicionário: (I) o resíduo, que é a diferença entre o sinal original e o sinal reconstruído; e (II) a precisão dos componentes de frequência medidos em relação aos valores dados; e (III) quantidade de coeficientes (esparsidade).

A Figura 12 compara o sinal de teste com os sinais reconstruídos pelos coeficientes obtidos a partir dos dicionários  $\Phi_I$  e  $\Phi_{II}$ , e o resíduo de ambas reconstruções. Embora as reconstruções obtidas por tais dicionários não apresentem diferenças significativas, o



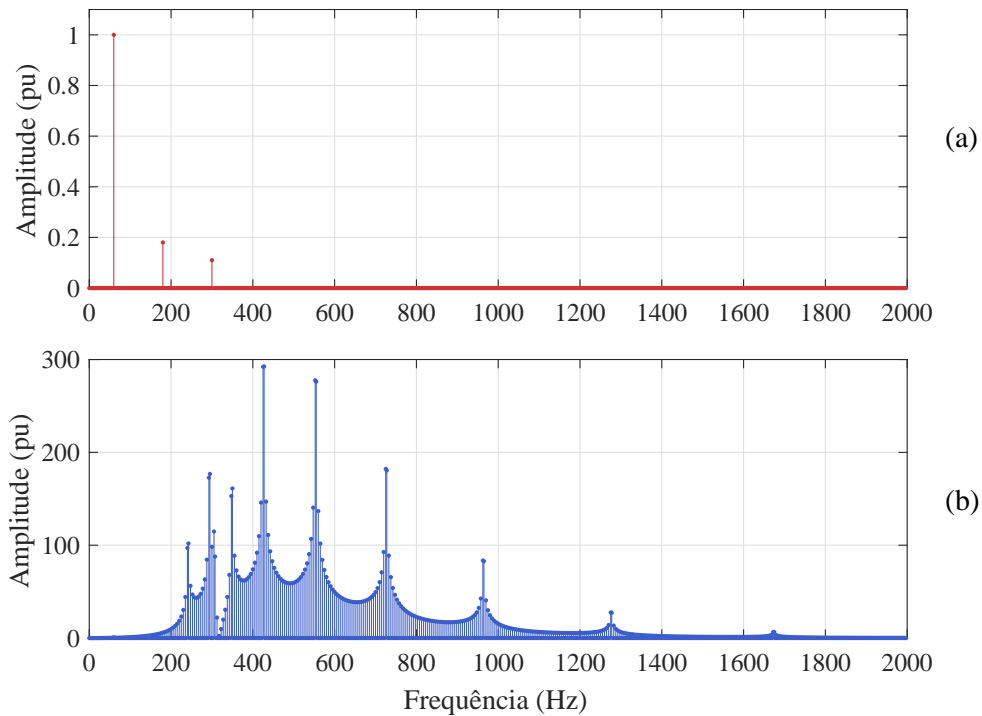
**Figura 12:** Comparativo entre os resultados obtidos a partir dos coeficientes da decomposição utilizando  $\Phi_I$  e  $\Phi_{II}$ : (a) Reconstrução do sinal; (b) Resíduo.

Fonte: Autoria própria.

resíduo resultante da reconstrução pelos coeficientes de  $\Phi_I$  são maiores nas bordas da janela de aquisição. À medida que, para o sinal reconstruído pelos coeficientes de  $\Phi_{II}$  o resíduo mantém uma amplitude constante.

Quando comparados os componentes de frequência obtidos pelos dois dicionários, os resultados ficam ainda mais evidentes. Ao passo que os três componentes de frequência do sinal são medidos corretamente utilizando o dicionário  $\Phi_{II}$ , com o dicionário  $\Phi_I$  são calculados aproximadamente 700 componentes. Isso ocorre devido a um ou mais componentes de frequência do sinal estarem defasados e as amostras iniciais e finais do sinal serem diferentes de zero, enquanto os átomos de  $\Phi_I$  calculados por DST possuem as amostras iniciais e finais obrigatoriamente iguais a zero. Observando que o sinal de teste, nesse caso, é composto por senos defasados em  $30^\circ$ , e suas amostras iniciais e finais terão valores diferentes de zero. Por essa razão, a decomposição do sinal não permite a identificação correta dos átomos de  $\Phi_I$  correspondentes as frequências contidas no sinal, e conseqüentemente precisa de mais átomos para reduzir o erro a valores aceitáveis.

A Figura 13 exhibe o espectro de frequência obtido para cada dicionário. O número elevado de componentes de frequência na decomposição do sinal compromete



**Figura 13:** Espectros de frequência resultante da decomposição do sinal: (a)  $\Phi_{II}$  - identificação correta dos componentes de frequência; e (b)  $\Phi_I$  - identificação de componentes de frequência inexistente no sinal devido as condições de simetria do dicionário.

Fonte: Autoria própria.

a esparsidade do vetor de coeficientes  $\alpha$ , e a medição incorreta de frequência e amplitude dos componentes de frequência inviabilizam a análise espectral utilizando  $\Phi_I$ . Dos quatro pares de DTTs analisadas nessa seção, as transformadas do tipo II são as mais adequadas para a análise de conteúdo harmônico em sinais de energia.

### 3.1.3 PARÂMETROS DO DICIONÁRIO

Para a montagem do dicionário é necessário definir o tipo de base DTT ( $\beta$ ), o número de amostras do sinal ( $N$ ) e o fator de aumento na resolução da grade ( $\ell$ ). O dicionário  $\Phi_{II}$  será utilizado por possuir as características mais adequadas para essa aplicação. A quantidade de amostras do sinal depende da frequência de amostragem e do número de ciclos do sinal a ser analisado. A escolha de  $N$  e  $\ell$  influenciam na resolução de frequência, e seus valores podem ser definidos de forma que  $\Delta_{f_{DTT}}$  obtenha a resolução desejada.

Existem muitas combinações possíveis entre  $f_s$ ,  $N$  e  $\ell$  para obter os resultados esperados. Nesse trabalho, a taxa de amostragem adotada é de 256 pontos por ciclo, que resulta em  $f_s = 15360$  Hz para sinais com frequência fundamental de 60 Hz. Foram adotados diferentes valores de  $N$  e  $\ell$  com o objetivo de testar o desempenho da decomposição de sinais com diferentes tamanhos e ajustar os valores  $\Delta_{f_{DTT}}$ . A Tabela 4 traz as combinações utilizadas, e os valores em destaque são consequência da aplicação dos padrões especificados na IEC 61000-4-7 (IEC, 2006).

**Tabela 4: Combinações de  $N$  e  $\ell$  utilizadas para ajuste de  $\Delta_{f_{DTT}}$**

$\Delta_{f_{DTT}}$	$N$	$\ell$
<b>2,5</b>	<b>3072</b>	<b>1</b>
2	1920	2
1	2560	3
1	1920	4
0,5	3072	5

Cada dicionário é composto por  $\ell N$  átomos de formas de ondas cossenoidais geradas pela Equação (11) e  $\ell N$  átomos de formas de ondas senoidais geradas pela Equação (12). Esses átomos contêm sinais com frequência de 0 até  $(f_s/2 - \Delta_{f_{DTT}})$  Hz com intervalo de  $\Delta_{f_{DTT}}$ . A Tabela 5 identifica a quantidade de ciclos, a dimensão e os limites de frequência para cada dicionário.

**Tabela 5: Dimensões do sinal de entrada, dimensões e limites de frequência de  $\Phi$  para cada condição apresentada na Tabela 4.**

$\Delta_{f_{DTR}}$ (Hz)	Nº de ciclos de x	Dimensão de $\Phi$ $N \times M$	Limites de frequência (Hz)
2,5	12	3072 $\times$ 6144	0 ... 7677,5
2	7,5	1920 $\times$ 7680	0 ... 7678
1	10	2560 $\times$ 15360	0 ... 7679
1	7,5	1920 $\times$ 15360	0 ... 7679
<b>0,5</b>	<b>12</b>	<b>3072 <math>\times</math> 30720</b>	<b>0 ... 7679,5</b>

Para a análise de sinais com distorções inter-harmônicas em que os componentes de frequência são desconhecidos, a utilização da maior resolução possibilita uma melhor representação do sinal.

### 3.2 ESTIMAÇÃO DOS COMPONENTES DE FREQUÊNCIA DO SINAL

O segundo estágio do algoritmo é dedicado ao processamento do sinal de entrada, com o objetivo de estimar os componentes de frequência do sinal. O primeiro passo a ser realizado é a decomposição atômica do sinal, portanto é realizada a análise dos algoritmos apresentados na Seção 2.4 e a escolha do algoritmo a ser utilizado no HIESSD. Os demais passos mostrados na Figura 10 também são detalhados nessa seção.

#### 3.2.1 DEFINIÇÃO DO ALGORITMO DE DECOMPOSIÇÃO ATÔMICA

Os algoritmos expostos na Seção 2.4 foram implementados no *software* Matlab, e os resultados obtidos foram analisados quanto: (I) a quantidade de iterações necessárias para que o critério de parada dos algoritmos seja atingido; (II) a esparsidade da solução encontrada; e (III) ao erro entre o sinal de teste e a solução obtida.

Para realizar a análise de desempenho dos algoritmos foi utilizado o sinal de teste apresentado na Seção 3.1.2. A esse sinal foi adicionado um ruído branco gaussiano com relação sinal-ruído (do original *Signal-to-Noise Ratio* - SNR) de 40 dB. O dicionário  $\Phi_{II}$  foi montado segundo as Eqs. (11), (12) e (35) com  $N = 3072$ . Os átomos de  $\Phi_{II}$  correspondem à formas de ondas senoidais com frequências de 0 Hz a 7680 Hz, com resolução de frequência de 2,5 Hz. Os critérios de parada em todos os algoritmos são:  $\|\mathbf{r}^k\|_2 \leq \epsilon$ , em que  $\epsilon = 0,3982$  calculado conforme Equação (15); e  $k = N$ , limitando o número de iterações a quantidade de amostras do sinal de entrada.

Exceto o OMP, os demais algoritmos dependem de parâmetros adicionais. Para o IHT o parâmetro  $S$  que define a esparsidade do vetor  $\hat{\alpha}$  foi definido pelo número ideal de coeficientes no sinal, nesse caso  $S = 6$ .

O parâmetro  $\rho$  utilizado nos algoritmos ADMM foi calculado conforme definido na Subseção 2.4.2. Fazendo  $\rho = 0,25 \|\Phi^T \Phi\|_2$ , o valor resultante é 0,5. Esse valor foi adotado nos algoritmos BP-ADMM e LASSO-ADMM.

Nos algoritmos LASSO-ADMM, FISTA e SpaRSA, o valor inicial calculado pela Equação (18) para o parâmetro  $\lambda$  foi  $9,88 \times 10^{-5}$ . A influência desse parâmetro na esparsidade foi avaliada repetindo os ensaios com alteração no valor de  $\lambda$ . Os resultados desses ensaios estão compilados na Tabela 6.

**Tabela 6: Influência do  $\lambda$  na esparsidade de  $\hat{\alpha}^k$**

$\lambda(\times 10^{-2})$	Coeficientes/Nº de Iterações		
	LASSO-ADMM	FISTA	SpaRSA
0,00988	3120/3072	3100/3072	3169/3072
0,0988	2825/3072	2836/820	5242/3072
0,988	732/1312	738/214	755/678
<b>9,88</b>	<b>8/136</b>	<b>10/66</b>	<b>11/73</b>
98,8	3/3072	3/3072	2812/3072

Para valores pequenos de  $\lambda$ , os algoritmos LASSO-ADMM, FISTA e SpaRSA apresentaram uma grande quantidade de coeficientes não nulos e um grande número de iterações. Com valores maiores para  $\lambda$  esses algoritmos tendem a resultados mais esparsos, identificando um número menor de coeficientes diferentes de zero. Porém, o sinal de teste não pode ser representado adequadamente com poucos coeficientes, isso implica em um maior número de iterações em busca da precisão desejada. Os algoritmos LASSO-ADMM e FISTA estimam apenas três coeficientes e não reduz  $\|\mathbf{r}^k\|_2$  ao limite estabelecido, atingindo o número máximo de iterações. O SpaRSA alcança o limite de tolerância, mas não obtém um resultado esparsos. Um resultado adequado, ponderando esparsidade e número de iterações, foi encontrado fazendo  $\lambda = 9,88 \times 10^{-2}$  para os três algoritmos.

A quantidade de iterações dos algoritmos analisados está relacionado a velocidade em que esses algoritmos estimam a solução. Todos os algoritmos apresentam complexidade computacional similar. Portanto, o número de iterações necessárias para atingir o critério de parada é um indicador de desempenho do algoritmo. A Figura 14 demonstra o comportamento do erro residual ( $\|\mathbf{r}^k\|_2$ ) ao longo das iterações.



É possível observar que todos os algoritmos alcançam o critério de parada estabelecido, alguns mais rapidamente (OMP, IHT e BP-ADMM) que outros (LASSO-ADMM, FISTA e SpaRSA). Todos os algoritmos, com exceção do SpaRSA, reduzem significativamente o erro nas três primeiras iterações. O OMP e o IHT atingem o critério de parada com 4 iterações. O BP-ADMM apresenta pequenas oscilações no valor do erro, encontrando a solução com 18 iterações. O LASSO-ADMM reduz a taxa de decaimento do erro residual ao longo das iterações, sendo necessárias 136 iterações para chegar ao critério de parada. O FISTA possui uma dinâmica similar ao LASSO-ADMM, contudo converge em 66 iterações. O SpaRSA, ao contrário dos demais algoritmos, não reduz o erro nas 6 primeiras iterações. Na 7ª iteração, o erro residual diminui para valores próximos de  $\epsilon$ , mas exibe vários picos durante as 73 iterações necessárias para reduzir  $\|\mathbf{r}^k\|_2$  ao limite desejado.

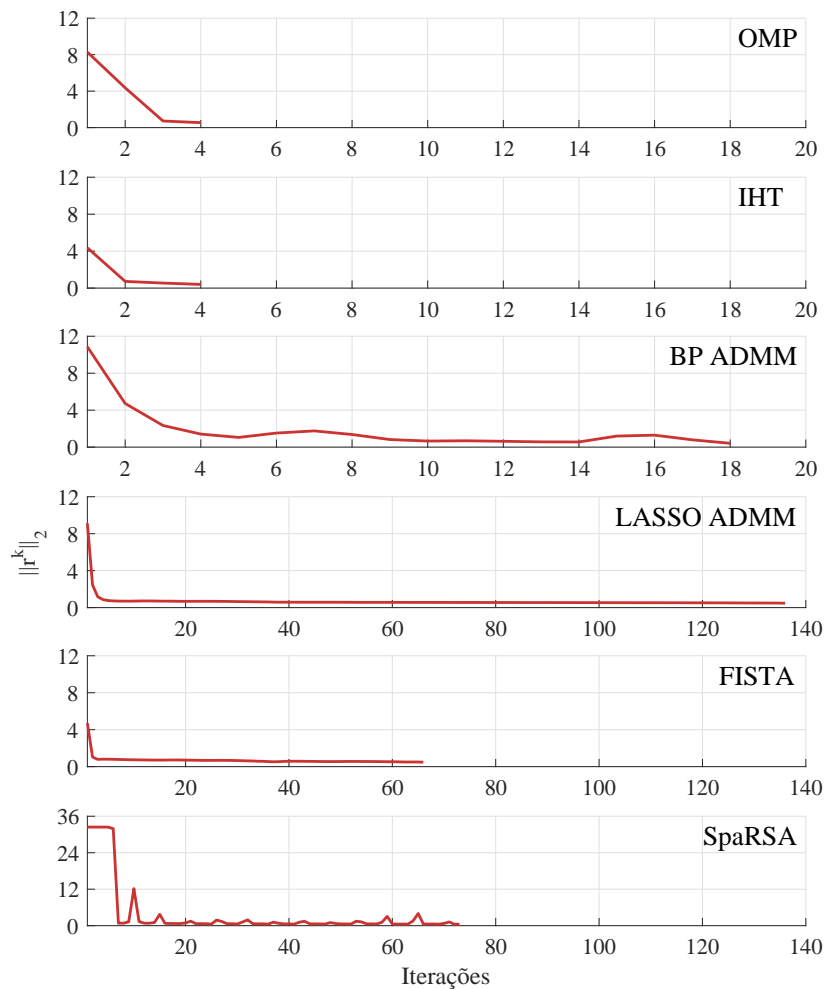


Figura 14: Análise do erro residual ( $\|\mathbf{r}^k\|_2$ ) em função das iterações

A esparsidade foi medida pela quantidade de coeficientes diferentes de zero no vetor  $\hat{\alpha}^k$  quando os algoritmos atingem a condição  $\|\mathbf{r}^k\|_2 \leq \epsilon$ . A representação pelo dicionário  $\Phi_{II}$  do sinal de teste  $\mathbf{x}$  tem esparsidade igual a 6, já que cada componente harmônico do sinal (1<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> harmônicas) é representado por um átomo em cada uma das transformadas, DCT e DST. A esparsidade do vetor  $\hat{\alpha}^k$  encontrado por cada algoritmo é mostrada na Tabela 7.

**Tabela 7: Comparação dos algoritmos quanto a esparsidade de  $\hat{\alpha}^k$**

	Esparsidade
OMP	4
IHT	6
BP-ADMM	6
LASSO-ADMM	8
FISTA	10
SpaRSA	11

O OMP teve o resultado mais esparsos, reduzindo o erro ao valor pré-definido com apenas 4 dos 6 coeficientes existentes no sinal. Nesse caso, uma tolerância ao erro mais restritiva pode alcançar resultados mais precisos. O IHT e o BP-ADMM identificaram os 6 coeficientes presentes no sinal. O LASSO-ADMM, o FISTA e o SpaRSA estimaram respectivamente 8, 10 e 11 coeficientes, deste modo, mais coeficientes que o necessário para representar o sinal. Para esses três algoritmos, a esparsidade depende da escolha do parâmetro  $\lambda$ .

A avaliação da reconstrução do sinal foi mensurada pela diferença entre o sinal de teste  $\mathbf{x}$  sem a adição de ruído e o sinal reconstruído com a multiplicação do dicionário pelos coeficientes estimados ( $\Phi\hat{\alpha}$ ). O critério de avaliação adotado foi o *erro médio quadrático* (do original *Mean Squared Error* - MSE) da reconstrução, calculado por

$$\text{MSE} = \|\mathbf{x} - \Phi\hat{\alpha}\|_2^2. \quad (39)$$

Todos os algoritmos apresentaram resultados com MSE na ordem de  $10^{-5}$  ou menores, conforme mostra a Tabela 8. O IHT resultou na melhor reconstrução do sinal, seguido pelo BP-ADMM. Enquanto o OMP teve o maior erro de reconstrução, por estimar apenas 4 dos 6 coeficientes necessários para reconstruir o sinal.

**Tabela 8: Comparação dos algoritmos quanto ao erro de reconstrução**

	MSE ( $\times 10^{-5}$ )
OMP	4,476
<b>IHT</b>	<b>0,014</b>
BP-ADMM	0,439
LASSO-ADMM	2,254
FISTA	2,436
SpaRSA	2,203

No entanto, a abordagem mais comum para a análise de conteúdo harmônico é a identificação dos componentes de frequência e suas respectivas amplitudes. O resultado obtido pelos algoritmos e os erros relativos entre os valores estimados e reais são apresentados na Tabela 9.

**Tabela 9: Comparação dos algoritmos na medição de componentes de frequência**

	Referência		
	60 Hz 1 pu	180 Hz 0,18 pu	300 Hz 0,11 pu
	Valor Medido (pu)/Erro Relativo (%)		
OMP	<b>1,0002 / 0,02</b>	0,1796 / 0,21	0,1098 / 0,21
IHT	1,0004 / 0,04	<b>0,1797 / 0,14</b>	<b>0,1100 / 0,01</b>
BP-ADMM	1,0021 / 0,21	0,1794 / 0,33	0,1099 / 0,09
LASSO-ADMM	0,9950 / 0,50	0,1772 / 1,58	0,1073 / 2,42
FISTA	0,9939 / 0,61	0,1772 / 1,57	0,1073 / 2,43
SpaRSA	0,9937 / 0,63	0,1776 / 1,34	0,1076 / 2,21

O IHT apresentou a melhor estimativa dos componentes de frequência, seguido pelos OMP e BP-ADMM. Esses três algoritmos obtiveram erros relativos menores que 0,33 %. O FISTA, o LASSO e o SpaRSA dispuseram de resultados similares entre si, com erros de até 2,45 %. Esses algoritmos identificaram pequenos componentes de frequência adjacentes a componente de frequência fundamental (60 Hz). Devido a pequena amplitude, desses componentes foram desconsiderados. Contudo a energia dispersa neles incide no erro em relação aos componentes reais.

O algoritmo que apresentou características adequadas para a decomposição esparsa de sinais de sistemas de energia foi o OMP, pois não depende de parâmetros externos, converge com poucas iterações e expôs bons resultados quanto a medição de componentes de frequência.

Para a etapa de decomposição, deve ser informado ao OMP as variáveis  $\mathbf{x}$ ,  $\Phi$ ,  $\epsilon$  e  $k$ , que são, respectivamente: o sinal a ser decomposto, o dicionário, o limite de tolerância calculado pela Equação (15) e o número máximo de iterações do algoritmo.

Após processar esses dados, o OMP retorna um vetor esparsos com valores de coeficientes. Cada coeficiente é um *peso* associado a um átomo do dicionário. Os valores contidos em  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$  devem ser devidamente tratados para obter os componentes de frequência do sinal.

### 3.2.2 CORREÇÃO DOS COEFICIENTES

O vetor  $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = [\mathbf{c} \mid \mathbf{s}]^T$  compreende os coeficientes resultantes da decomposição esparsa, sendo os vetores  $\mathbf{c} = [c_0, c_1, \dots, c_{N-1}]^T$  e  $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_N]^T$  relacionados, nessa ordem, aos átomos das matrizes  $\mathbf{DCT}_{II}$  e  $\mathbf{DST}_{II}$ . Cada componente de frequência tem uma parcela em  $c_j$  e outra em  $s_j$ . No entanto, devido ao deslocamento de tempo das transformadas do tipo II, esses valores devem ser corrigidos.

Os componentes de frequência são calculados fazendo a substituição da Equação (35) e do vetor  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$  em (4).

$$\mathbf{x} = [\mathbf{DCT}_{II} \mid \mathbf{DST}_{II}] \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Na sequência, as Equações (11) e (12) são substituídas na Equação (40). O deslocamento de frequência existente na função DST é considerado zero, isso pode ser realizado desde que o intervalo da variável  $j$  seja considerado  $1, 2, \dots, N$ . Assim,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{N}} \varsigma \cos\left(\frac{(i+1/2)j\pi}{N}\right) \\ \sqrt{\frac{2}{N}} \varsigma \sin\left(\frac{(i+1/2)j\pi}{N}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Resolvendo a Equação (41), para cada valor de  $j$  tem-se:

$$\mathbf{x} = c_j \sqrt{\frac{2}{N}} \varsigma \cos\left(\frac{ij\pi}{N} + \frac{j\pi}{2N}\right) + s_j \sqrt{\frac{2}{N}} \varsigma \sin\left(\frac{ij\pi}{N} + \frac{j\pi}{2N}\right). \quad (42)$$

Isolando os termos dependente de  $i$ , a Equação (42) é reescrita,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{N}} \varsigma \left( c_j \cos \frac{j\pi}{2N} + s_j \sin \frac{j\pi}{2N} \right) \\ \sqrt{\frac{2}{N}} \varsigma \left( s_j \cos \frac{j\pi}{2N} - c_j \sin \frac{j\pi}{2N} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{ij\pi}{N} \\ \sin \frac{ij\pi}{N} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Dessa forma, a compensação do deslocamento de tempo é desempenhada pelo cálculo dos coeficientes corrigidos, que resultam dos termos entre colchetes da Equação (43), e reestruturado nas Equações (44) e (45).

$$\Gamma_j = \sqrt{\frac{2}{N}} \mathcal{S} \left( c_j \cos \left( \frac{j\pi}{2N} \right) + s_j \operatorname{sen} \left( \frac{j\pi}{2N} \right) \right), \quad (44)$$

$$\Psi_j = \sqrt{\frac{2}{N}} \mathcal{S} \left( s_j \cos \left( \frac{j\pi}{2N} \right) - c_j \operatorname{sen} \left( \frac{j\pi}{2N} \right) \right). \quad (45)$$

Assim,  $\Gamma_j$  corresponde a um coeficiente relacionado a DCT, e  $\Psi_j$  a DST.

### 3.2.3 CÁLCULO DOS COMPONENTES DE FREQUÊNCIA

Com os coeficientes de  $\hat{\mathbf{x}}$  corrigidos, os valores de amplitude  $A_n$  e fase  $\theta_n$  são calculados por identidade trigonométrica. Cada componente espectral de  $\mathbf{x}$  é determinado pelas Equações (46) e (47).

$$A_j = \sqrt{\Gamma_j^2 + \Psi_j^2}, \quad (46)$$

$$\theta_j = \arctan \left( \frac{-\Psi_j}{\Gamma_j} \right). \quad (47)$$

Os valores de frequência estão relacionados aos índices dos átomos. Cada átomo do dicionário corresponde a um determinado valor de frequência e pode ser calculado por  $j\Delta_{fDT}$ .

### 3.2.4 APLICAÇÃO DO *HARD THRESHOLDING*

Na decomposição de sinais contaminados com ruído, além dos componentes de frequência do sinal, surgem componentes de alta frequência com baixa amplitude oriundos do ruído. Para eliminar esses componentes indesejados é aplicado um *hard thresholding* aos valores de amplitude estimados, com nível de *threshold*  $\tau$ , conforme apresentado na Seção 2.5. Todos os componentes de frequência com amplitude menor que  $\tau$  é eliminado. Esse critério é utilizado no HIESSD e nos demais métodos utilizados para comparação de desempenho do algoritmo.

### 3.3 RESUMO

Esse capítulo apresentou os passos implementados no HIESSD para realizar a estimação de componentes harmônicos e inter-harmônicos. Foram apresentados os critérios para a construção do dicionário sobrecompleto e montados quatro dicionários distintos a partir das DTTs pares. Os ensaios realizados com esses dicionários demonstraram que as transformadas adequadas para essa aplicação são do tipo II. Dessa forma,  $\Phi_{II}$  foi adotado como dicionário padrão para o HIESSD. O valor de  $\ell$  pode ser definido em função da resolução requerida na medição, a melhor resolução obtida foi de 0,5 Hz.

Dos algoritmos de decomposição atômica apresentados, o IHT obteve desempenho adequado, mas depende da informação de esparsidade do sinal. O OMP apresentou um desempenho compatível com o IHT e não necessita de parâmetros, o BP-ADMM apresentou o menor erro de reconstrução do sinal, os algoritmos LASSO-ADMM, FISTA e SpaRSA dependem do parâmetro de regularização  $\lambda$ , que influencia no grau de esparsidade do resultado e no número de iterações do algoritmo. Por não precisar de parâmetros externos e demonstrar um desempenho adequado, OMP foi utilizado como o algoritmo de decomposição atômica no HIESSD.

Da decomposição obtém os coeficientes que representam o sinal a partir do dicionário proposto. Para calcular os componentes de frequência do sinal os coeficientes são corrigidos em função do deslocamento de tempo característico das transformadas do tipo II. A frequência, amplitude e fase de cada componente de frequência é calculada com base nos valores dos coeficientes corrigidos. A última etapa é a aplicação do *hard thresholding* para eliminar os componentes indesejados.

## 4 ENSAIOS

Esse capítulo avaliará o desempenho do HIESSD na medição de componentes harmônicos e inter-harmônicos em sinais de energia. Quatro sinais distintos são processados pelos algoritmos HIESSD, DFT e MPM (ACHLERKAR et al., 2017), os resultados obtidos serão utilizados para a análise de desempenho desses algoritmos.

Para o HIESSD são dados: o vetor  $\mathbf{x}$ , o valor de  $l$ ,  $f_s$  e o SNR. Com estes dados é possível determinar o número de amostras de  $\mathbf{x}$  ( $N$ ), o valor de  $\epsilon$  (segundo a Equação (15)), e definir o valor de  $k = N$  (número de iterações). A aplicação da DFT depende apenas de  $\mathbf{x}$  e  $f_s$ . Os dados de entrada do MPM são os mesmos do HIESSD, exceto ao  $l$ , que é um parâmetro específico para a construção de  $\Phi$ . O SNR é utilizado em todos os algoritmos para o cálculo do valor de  $\tau$ , apresentado na Equação (34).

Os algoritmos retornam as informações de frequência, amplitude e fase dos componentes harmônicos e inter-harmônicos. A partir desses valores é calculado o erro relativo de cada componente medido em relação ao seu valor exato, com o objetivo de avaliar o desempenho do algoritmo proposto. Esse erro é utilizado como critério de comparação entre os métodos sob as seguintes condições: (I) sinal sem ruído; (II) sinal com ruído branco gaussiano com SNR de 40, 20 e 10 dB; (III) diferentes grades de frequência empregando o  *$\ell$ -fold overcomplete system*; e (IV) redução do tamanho da janela de amostragem do sinal, associado a aplicação do sistema sobrecompleto  *$\ell$ -fold*.

Todos os sinais foram ensaiados inicialmente conforme as recomendações da IEC 61000-4-7 (IEC, 2006), em que  $\mathbf{x}$  é amostrado em uma janela de 200 ms completando 12 ciclos da componente de frequência fundamental 60 Hz. A taxa de amostragem adotada em todos os ensaios foi de 256 pontos por ciclo, resultando em uma frequência de amostragem de 15360 Hz. Os valores de  $N$  e  $\ell$ , quando alterados para ajuste da grade de frequências, são detalhados nos respectivos ensaios.

Os sinais analisados, expostos na Seção 2.1, são característicos de diferentes instalações elétricas e com complexidade também distintas, contendo apenas distorções

harmônicas ou combinando distorções harmônicas e inter-harmônicas. Os resultados e discussões são apresentados por ordem de complexidade do sinal: (I) fonte de corrente contínua monofásica (BOLLEN; GU, 2006); (II) inversor trifásico (RICE, 1994); (III) máquina síncrona (WALLACE et al., 1974); e (IV) cargas variante no tempo (LIN, 2016).

#### 4.1 FONTE DE CORRENTE CONTÍNUA MONOFÁSICA

O sinal de teste utilizado para caracterizar as distorções geradas por uma fonte de corrente contínua foi apresentado na Subseção 2.1.1. Esse sinal, sem influência de ruído, pode ser facilmente decomposto em senos por métodos baseados em DFT, pois é composto apenas por componentes de frequências múltiplos inteiros da frequência fundamental. A decomposição desse sinal sem ruído pelos métodos DFT, MPM e pelo HIESSD obteve resultado exato.

Entretanto, os sinais amostrados de sistemas reais normalmente contém ruídos. Por esse motivo, foi adicionado ao sinal apresentado na Equação (1) um ruído branco gaussiano com SNR de 40 dB. Os resultados da decomposição desse sinal pelo HIESSD, e pelos métodos DFT e MPM são indicados na Tabela 10.

**Tabela 10: Estimação de componentes de frequência por HIESSD, MPM e DFT, para o sinal de fonte de corrente contínua com ruído branco gaussiano com SNR=40 dB.**

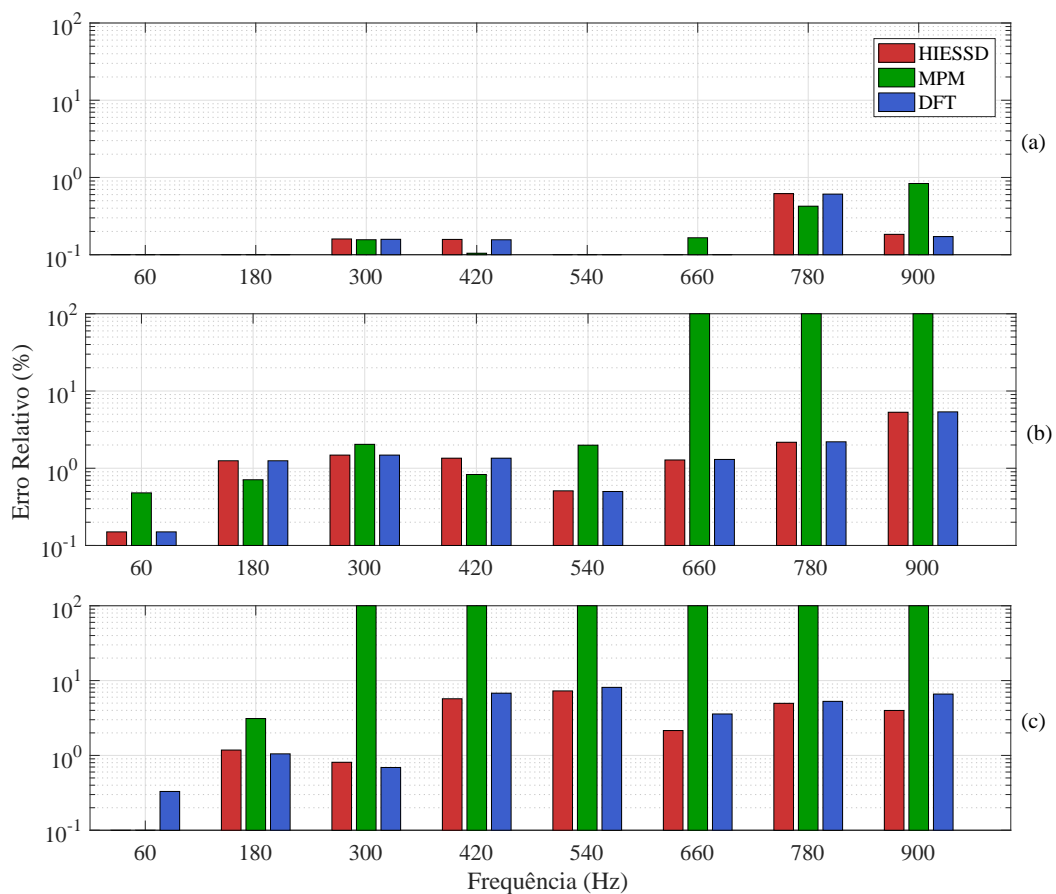
Referência			HIESSD		MPM		DFT	
			Valores medidos					
Freq (Hz)	Amp (pu)	Fase (°)	Amp (pu)	Fase (°)	Amp (pu)	Fase (°)	Amp (pu)	Fase (°)
60	1,000	-90	1,000	-90,02	0,999	-90,04	1,000	-90,02
180	0,333	90	0,333	89,99	0,333	90,08	0,333	89,99
300	0,200	-90	0,200	-90,07	0,200	-90,28	0,200	-90,07
420	0,143	90	0,143	89,99	0,143	89,77	0,143	89,97
540	0,111	-90	0,111	-89,96	0,111	-89,86	0,111	-89,95
660	0,091	90	0,091	90,13	0,091	89,97	0,091	90,13
780	0,077	-90	0,077	-90,28	0,077	-89,97	0,077	-90,28
900	0,067	90	0,067	90,29	0,066	90,95	0,067	90,29

Para o sinal com 40dB de ruído, o desempenho do HIESSD e da DFT são equivalentes, enquanto o MPM apresenta erros relativos maiores para a maioria dos componentes de frequência medidos. Porém, mesmo antes da aplicação do *hard threshold*, o MPM mediu apenas os 8 componentes de frequência do sinal. Ao passo que o HIESSD e a DFT identificam, nessa ordem, cerca de 50 e 1500 componentes, sendo necessária a aplicação do *hard threshold* para atenuar a influência do ruído, eliminando as informações desnecessárias. Após essa etapa, esses métodos também reduzem o número



de componentes medidos a 8, correspondendo a quantidade exata de componentes no sinal de entrada. O valor calculado para  $\tau$  foi 0,0011.

O desempenho dos métodos foi verificado sob diferentes condições de ruído, visto que, o aumento no nível de ruído resulta em maiores erros na estimação dos componentes. Com o sinal da Equação (1) foram gerados mais dois sinais com níveis de ruído distintos, um contaminado com SNR=20 dB e o outro com SNR=10 dB. A Figura 15 mostra o erro relativo entre os componentes reais e estimados pelos três algoritmos a partir dos sinais contaminados com 40, 20 e 10 dB de ruído.



**Figura 15: Erros de estimação dos componentes harmônicos do sinal de corrente de uma fonte CC monofásica sob diferentes condições de ruído: (a) 40 dB; (b) 20 dB; (c) 10 dB.**

Com a elevação do nível de ruído o MPM torna-se mais restritivo. Para o sinal com 40 dB todos os componentes do sinal são estimados com erro relativo máximo de 0,83 %. No sinal com 20 dB, apenas os 5 maiores componentes de frequência são estimados, e somente os componentes da frequência fundamental e terceira harmônica são estimados para o sinal com 10 dB. Para os componentes de frequências não estimados, o erro relativo é 100 %. Ainda que o erro relativo dos componentes estimados pelo MPM seja pequeno,

a representação do sinal degrada a medida que mais componentes de frequência existentes no sinal não são estimados.

A DFT e o HIESSD mediram todos os componentes de frequência do sinal com erros relativos menores que 0,62, 5,4 e 8,2 % para níveis de ruído de 40, 20 e 10 dB, respectivamente. O erro relativo para cada componente de frequência estimado pelo HIESSD equivale ao erro relativo dos coeficientes estimados por DFT.

O erro de reconstrução desses sinais é mostrado na Tabela 11. Independente do algoritmo utilizado, a tendência é um aumento no MSE ao passo que o SNR decresce, ou seja, o erro aumenta proporcional a amplitude do ruído. O MPM apresenta o maior MSE, isso ocorre em razão dos componentes de frequência do sinal que não são estimados pelo algoritmo. Os erros dos sinais reconstruídos a partir dos coeficientes estimados por DFT e pelo HIESSD são da mesma ordem de grandeza.

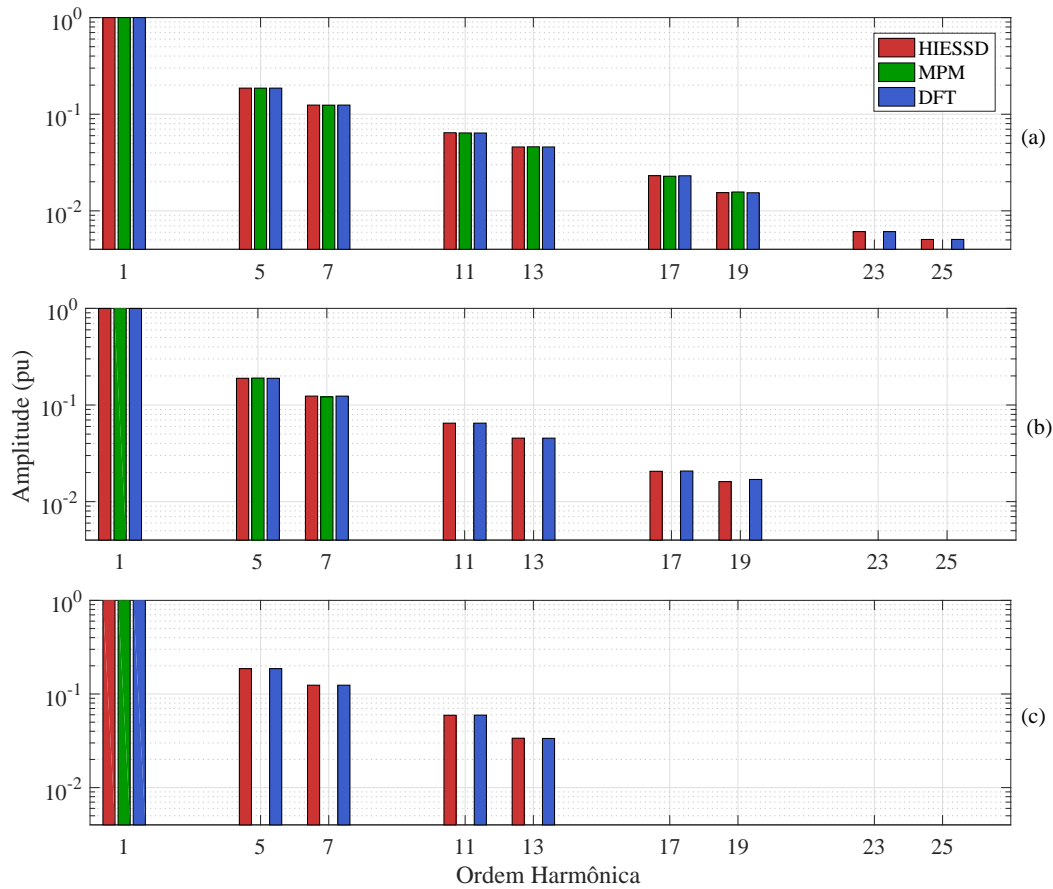
**Tabela 11: Influência do nível de ruído no MSE - Fonte CC**

SNR (dB)	MSE		
	HIESSD	MPM	DFT
40	$2,47 \times 10^{-7}$	$7,55 \times 10^{-7}$	$2,47 \times 10^{-7}$
20	$4,95 \times 10^{-5}$	$9,39 \times 10^{-3}$	$4,95 \times 10^{-5}$
10	$6,40 \times 10^{-4}$	$4,59 \times 10^{-2}$	$4,21 \times 10^{-4}$

## 4.2 CONVERSOR DE FREQUÊNCIA TRIFÁSICO

O sinal de teste utilizado para representar as características do sinal de corrente elétrica que alimenta um conversor de frequência trifásico é apresentado na Subseção 2.1.2. O espectro desse sinal mostra componentes nas seguintes frequências: 60, 300, 420, 660, 780, 1020, 1140, 1380 e 1500 Hz, com amplitude inversamente proporcional às frequências. A Figura 16 mostra a amplitude dos componentes de frequência estimados por MPM, DFT e HIESSD em escala logarítmica, com níveis de 40, 20 e 10 dB.

A presença de componentes com amplitude muito pequena no sinal de teste, menores que  $\tau$ , resulta na eliminação desses componentes pelo *hard threshold*. Considerando os valores aproximados de  $\tau = 0,0013$  para 40 dB, 0,011 para 20 dB e 0,034 para 10 dB, é possível observar que o HIESSD e a DFT são limitados pelo valor de  $\tau$ , porém o MPM não estima componentes com valores maiores que  $\tau$ . A medida em que aumenta o nível de ruído, mais componentes de frequência deixam de ser estimados. A consequência disso pode ser observada na Tabela 12, a qual traz os valores de MSE.



**Figura 16:** Componentes harmônicos estimados para o sinal de corrente típico de um inversor trifásico, sob diferentes condições de ruído: (a) 40 dB; (b) 20 dB; (c) 10 dB.

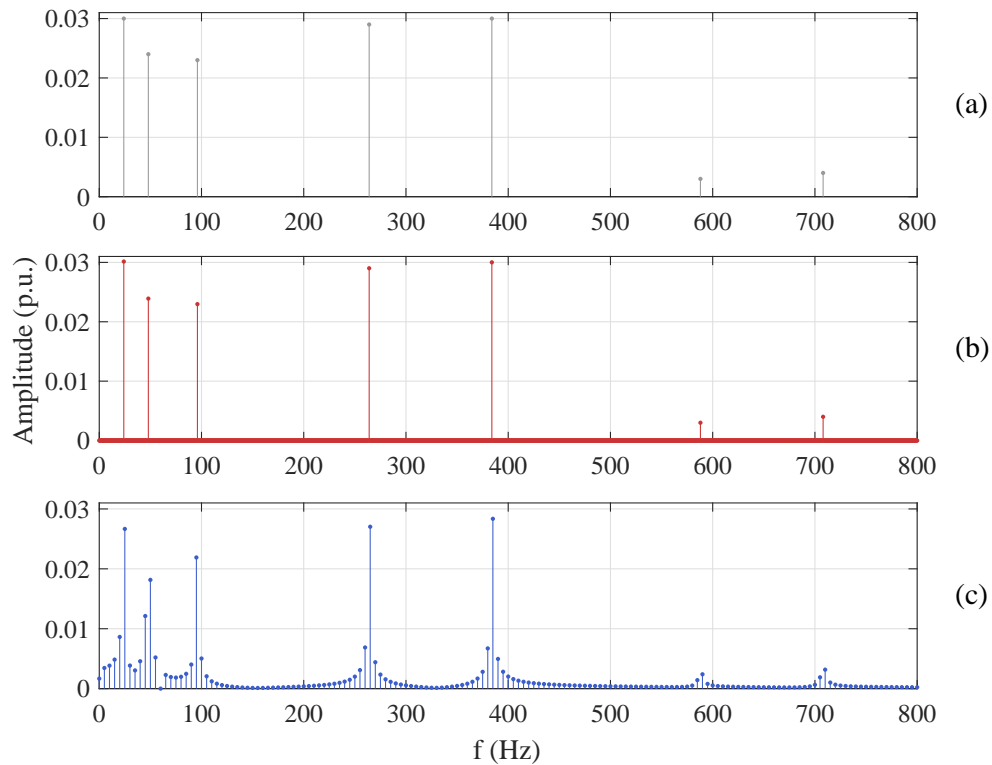
A DFT resulta no menor erro de reconstrução, seguida pelo HIESSD com valores da mesma ordem de grandeza. O MPM apresenta valores maiores de erro de reconstrução quando comparado aos demais métodos, pois apesar das medidas individuais de cada componente serem adequadas, a falta de alguns componentes afeta a representação do sinal.

**Tabela 12:** Influência do nível de ruído no MSE - Inversor Trifásico

SNR (dB)	MSE		
	HIESSD	MPM	DFT
40	$4,87 \times 10^{-7}$	$3,35 \times 10^{-5}$	$4,74 \times 10^{-7}$
20	$5,85 \times 10^{-5}$	$3,55 \times 10^{-3}$	$5,43 \times 10^{-5}$
10	$1,20 \times 10^{-3}$	$2,87 \times 10^{-2}$	$6,71 \times 10^{-4}$

### 4.3 MÁQUINA SÍNCRONA

O sinal de teste utilizado para representar a corrente estatórica de uma máquina síncrona é exposto na Subseção 2.1.2. Esse sinal é composto pela componente fundamental em 60 Hz e componentes inter-harmônicos em 24, 48, 96, 264, 384, 588 e 708 Hz. Esses valores de frequência não coincidem com os valores que compõem a grade padrão de frequências da DFT e do HIESSD. No entanto, a resolução de frequência do HIESSD pode ser aumentada para 0,5 Hz, fazendo  $\ell = 5$ . Assim, todos os componentes de frequências do sinal podem ser identificados corretamente. O resultado do ensaio é mostrado na Figura 17.



**Figura 17:** Espectro de frequência resultante da decomposição do sinal sem ruído, considerando apenas os componentes inter-harmônicos: (a) Referência; (b) HIESSD com resolução de frequência de 0,5 Hz; (c) DFT.

Os espectros foram impressos sem a componente fundamental para facilitar a visualização dos componentes inter-harmônicos. A Figura 17(a) mostra o espectro de frequência do sinal de teste, adotado como referência para a análise dos demais espectros. Os componentes medidos pelo HIESSD podem ser observados na Figura 17(b), e não apresentam erros notáveis em relação ao espectro de referência. No espectro resultante da aplicação da DFT é possível observar o *fence effect*, mostrado na Figura 17(c). O espalhamento de energia pode ser claramente percebido em todos os inter-harmônicos.

Esse efeito dificulta a identificação correta dos componentes de frequência. Portanto, nos casos contendo distorções inter-harmônicas, não foram aplicados a decomposição de sinais utilizando DFT.

A Tabela 13 mostra os componentes harmônicos e inter-harmônicos desse sinal com nível de ruído de 40 dB, estimados aplicando o HIESSD e o MPM. A resolução de frequência usada foi 0,5 Hz para o HIESSD. Nota-se que todas as frequências são identificadas corretamente e o erro absoluto nas medidas de amplitude é da ordem de  $10^{-3}$ . Nos resultados obtidos por MPM, os dois menores coeficientes não foram identificados, os demais componentes foram medidos com erros absolutos de frequência e amplitude da ordem de  $10^{-2}$  e  $10^{-3}$ , respectivamente.

**Tabela 13: Componentes de frequência estimados por HIESSD e MPM**

Referência		HIESSD		MPM	
f (Hz)	Amp (pu)	f (Hz)	Amp (pu)	f (Hz)	Amp (pu)
24	0,0300	24	0,0301	24,02	0,0296
48	0,0240	48	0,0240	48,03	0,0240
60	1,0000	60	1,0000	60,00	0,9997
96	0,0230	96	0,0230	95,98	0,0227
264	0,0290	264	0,0290	263,99	0,0289
384	0,0300	384	0,0298	383,99	0,0297
588	0,0030	588	0,0032	*	*
708	0,0040	708	0,0040	*	*

Nota:

\* Valor não estimado

Para este sinal, com o nível de ruído de 40 dB, o valor de  $\tau$  é aproximadamente 0,0011 pu. Como todos os componentes do sinal tem amplitude maior que  $\tau$ , esses componentes podem ser medidos sem interferência do ruído aplicado ao sinal.

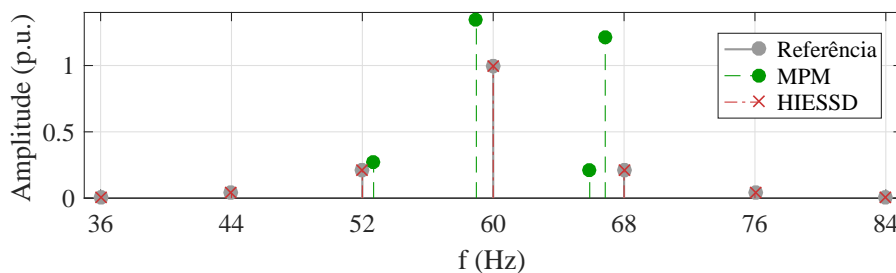
Comparando os resultados obtidos pelos dois algoritmos é possível identificar algumas vantagens do HIESSD: (I) o HIESSD mede todos os componentes de frequência do sinal, enquanto o MPM não identifica os dois menores componentes; (II) o MPM não possui grade de frequência definida, ao contrário do HIESSD, assim os valores de frequência dos componentes apresentam pequenos desvios em relação ao valor correto; e, o maior erro absoluto para o HIESSD é  $1,8 \times 10^{-4}$  ao passo que o MPM atinge erros de até  $2,8 \times 10^{-2}$ . Portanto, os componentes estimados pelo HIESSD representam melhor o sinal que os dados obtidos pelo MPM.

#### 4.4 CARGAS VARIANTES NO TEMPO

O sinal de teste foi gerado com as características apresentadas na Subseção 2.1.2. Nesse caso, a variação de carga é senoidal e regular, portanto os componentes de frequência da carga são estáticos nas seguintes frequências: 36 Hz, 44 Hz, 52 Hz, 60 Hz, 68 Hz, 76 Hz e 84 Hz. Para a realização dos ensaios, foi adicionado ao sinal um ruído branco gaussiano com SNR de 40 dB e as amplitudes foram normalizadas. Foram avaliados o desempenho do HIESSD com resolução de 1 Hz e do MPM com janela de aquisição de dados reduzida.

##### 4.4.1 JANELA DE AQUISIÇÃO DE 10 CICLOS

A Figura 18 mostra o espectro de frequência obtido com 10 ciclos do sinal de teste. Nesse caso, o HIESSD tem desempenho adequado, estimando corretamente a frequência de cada componente com erro relativo de amplitude menor que 1,37%.



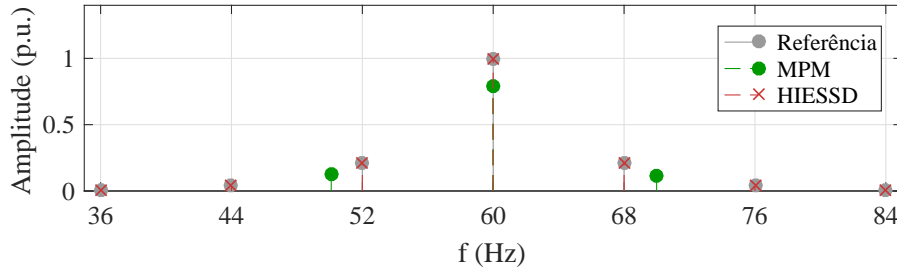
**Figura 18:** Espectro de frequência resultante da aplicação dos algoritmos HIESSD e MPM para 10 ciclos do sinal de teste de uma carga variante no tempo.

Utilizando o MPM, são estimados apenas quatro dos sete componentes de frequência do sinal. O espectro de resultante da aplicação do MPM é composto com seguintes valores de frequência e amplitude: 52,7 Hz com 0,27 pu, 58,9 Hz com 1,35 pu, 65,9 Hz com 0,21 pu e 66,8 Hz com 1,22 pu. Os componentes do sinal próximo a esses valores são 52 Hz com 0,21 pu, 60 Hz com 1,00 pu e 68 Hz com 0,21 pu. Esses valores estimados podem ser associados aos componentes de frequências existente no sinal, porém com desvios de frequência variando entre 0,7 e 2,1 Hz.

##### 4.4.2 JANELA DE AQUISIÇÃO DE 7,5 CICLOS

Nesse caso, o HIESSD também tem desempenho satisfatório, estimando corretamente as frequências de todos os componentes e com erros relativos de amplitude

menores que 5%. O seu desempenho comparado ao resultado obtido pelo MPM é mostrado na Figura 19.



**Figura 19:** Espectro de frequência resultante da aplicação dos algoritmos HIESSD e MPM para 7,5 ciclos do sinal de teste de uma carga variante no tempo.

O MPM apresentou um pequeno desvio de frequência e redução da amplitude na medição da componente fundamental, resultando em 59,98 Hz e 0,79 pu. Outros dois componentes são medidos em 50,1 e 70 Hz, com respectivamente 0,13 e 0,11 pu de amplitude. Os mesmos possuem aproximadamente 2 Hz de diferença e pouco mais da metade da amplitude dos componentes adjacentes, cujos valores reais são 52 e 68 Hz ambos com 0,21 pu de amplitude.

#### 4.5 RESUMO

Esse capítulo apresentou os resultados dos ensaios realizados para avaliar o desempenho do HIESSD. Foram utilizados como sinais de testes com distorções harmônicas as correntes típicas de fonte de alimentação CC e conversor de frequência trifásico. Esses sinais foram analisados atendendo as recomendações da IEC 61000-4-7 quanto ao tamanho da janela amostrada. Os dados obtidos pelo HIESSD com diferentes níveis de ruído, foram comparados com os dados resultantes da aplicação da DFT e do MPM para o mesmo sinal. O desempenho do HIESSD na estimação de componentes harmônicos equivale ao desempenho da DFT.

No entanto, a utilização da DFT no processamento de sinais contendo distorções inter-harmônicas, causa o espalhamento da energia dos componentes que não coincidem com a grade de frequência. Para análise do HIESSD na estimação de componentes inter-harmônicos, foram utilizados sinais de corrente de circuitos contendo máquinas síncronas e cargas variantes no tempo. Nesses casos, foi empregado o *ℓ-fold overcomplete system*. Para análise do sinal da máquina síncrona, foi usado a janela de aquisição de dados de 12 ciclos e adotado  $\ell=5$  para obter a resolução de 0,5 Hz. Para o sinal de carga variante

no tempo, o  $\ell$ -fold overcomplete system foi associado a redução do tamanho da janela amostrada, de modo que a resolução de frequência do HIESSD fosse 1 Hz. Nesses ensaios, HIESSD apresentou resultados superiores ao do MPM.



## 5 CONCLUSÕES

O presente trabalho propôs um algoritmo com o objetivo de realizar a medição de componentes harmônicos e inter-harmônicos em sinais de energia aplicando a técnica SSD. A utilização dessa técnica é recomendada porque os sinais com distorções harmônicas e inter-harmônicas possuem representação esparsa quando analisados no domínio da frequência. A SSD soluciona um problema linear inverso pela decomposição atômica do sinal a partir de dicionários, utilizando um algoritmo apropriado.

Para a escolha do dicionário foram avaliadas a transformada de *Fourier* e as 16 DTTs. Conforme observado, o dicionário de *Fourier* é similar a DFT e possui restrição quanto a resolução de frequência, o que limita a quantidade de componentes que podem ser medidos sem causar os efeitos de fuga espectral e *picket-fence*. As DTTs ímpares trabalham com número ímpar de amostras por ciclos, no entanto a norma IEEE 519 recomenda que a medição de sinais de energia seja realizada em quantidade pares. Isso exclui a utilização das DCTs e DST do tipo V a VIII. Os testes realizados com as transformadas pares demonstram que a DCT e DST do tipo II apresentam resultados mais adequados, devido a flexibilidade nos ajustes da grade de frequência e a robustez em relação as condições de borda do sinal. Assim como na DFT, o dicionário proposto possui uma grade de frequências fixas para o cálculo do espectro de frequência. Porém, esses valores podem ser modificados fazendo uso do  *$\ell$ -fold overcomplete system*, que possibilita o aumento da resolução de frequência sem alteração das condições de aquisição do sinal, permitindo a medição de componentes inter-harmônicos com precisão.

O desempenho dos algoritmos OMP, IHT, BP-ADMM, LASSO-ADMM, FISTA e SpaRSA, utilizados na decomposição atômica do sinal, foram avaliados quanto a esparsidade do resultado, o número de iterações necessárias para realizar a decomposição, o erro de reconstrução e o erro relativo entre os componentes de frequência medidos e reais. O IHT obteve os melhores resultados quanto ao número de iterações, esparsidade e erro de reconstrução e no cálculo dos componentes de frequência. No entanto, depende da informação de esparsidade, que normalmente é desconhecida em um sinal real. O

OMP apresentou a vantagem de não depender de parâmetros adicionais. Nos ensaios realizados, convergiu com o mesmo número de iterações e esparsidade do IHT, e alcançou uma medição adequada dos componentes de frequência. O algoritmo BP-ADMM obteve esparsidade ideal e o menor erro na reconstrução do sinal, mas com mais iterações que o OMP, podendo ser utilizado em aplicações direcionadas a atenuação de ruído. Os resultados obtidos por LASSO-ADMM, FISTA e SpaRSA também foram esparsos e com pequeno erro de reconstrução. Entretanto, convergiram com um número maior de iterações quando comparados com o IHT, OMP e o BP-ADMM. Além de que, esses algoritmos necessitam de um parâmetro de regularização de difícil determinação, o qual mostrou-se fundamental no desempenho desses métodos. Portanto, para esta aplicação do algoritmo OMP apresentou as características mais adequadas para a decomposição de sinais de energia com distorções harmônicas e inter-harmônicas.

No algoritmo proposto, HIESSD, o dicionário é construído a partir das funções DCT e DST do tipo II, de acordo com os parâmetros do sinal e o valor adotado para  $\ell$ . A decomposição do sinal é realizada utilizando o algoritmo OMP. Os coeficientes resultantes da decomposição apresentam erro devido ao deslocamento de tempo característico das DTTs do tipo II. A compensação desse erro é efetuada, e na sequência são calculados os componentes de frequência do sinal. Os componentes indesejados são eliminados aplicando um *hard-threshold*, com valor limite dado em função do nível de ruído existente no sinal.

Na avaliação do desempenho do HIESSD, foram implementadas outras duas técnicas distintas: DFT e MPM. O desempenho de cada método foi avaliado quanto a sua precisão em relação aos valores reais em quatro sinais distintos, contendo distorções harmônicas, inter-harmônicas e ruído. O HIESSD mostrou-se mais adequado que a DFT na medição de inter-harmônicas, devido ao ajuste da resolução de frequência. Quanto ao MPM, o HIESSD é mais robusto com relação ao nível de ruído, e apresenta resultados melhores com a janela de dados amostrados reduzida.

O HIESSD alcançou resultados satisfatórios na medição de componentes harmônicos e inter-harmônicos, e os principais pontos para a ampliação dessa pesquisa são: análise do comportamento do algoritmo mediante um desvio da frequência fundamental; a investigação de dicionários impulsivos, para que associado ao dicionário proposto, seja realizada caracterização de outros distúrbios de qualidade de energia como transitórios, *notches*, *sag*, *swell*; a obtenção de dicionários treinados a partir de uma base de sinais conhecidos; e o desenvolvimento de algoritmos para classificação dos sinais com distúrbios de qualidade de energia.

## REFERÊNCIAS

- ACHLERKAR, P. D.; SAMANTARAY, S. R.; MANIKANDAN, M. S. Variational Mode Decomposition and Decision Tree Based Detection and Classification of PowerQuality Disturbances in Grid-Connected Distributed Generation System. **IEEE Transactions on Smart Grid**, v. 3053, n. c, p. 1–1, 2017. ISSN 1949-3053. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/7740071/>>.
- AHARON, M.; ELAD, M.; BRUCKSTEIN, A. M. The {K-SVD}: An Algorithm for Designing of Overcomplete Dictionaries for Sparse Representations. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 54, n. 11, p. 4311–4322, 2006.
- ARRILLAGA, J.; WATSON, N. R. **Power System Harmonics**. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd, 2003. 1–15 p. ISBN 0470851295. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1002/0470871229>>.
- BAGGINI, A. **Handbook of Power Quality**. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd, 2008. 1–618 p. ISBN 9780470754245. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1002/9780470754245>>.
- BARANIUK, R. Compressive Sensing [Lecture Notes]. **IEEE Signal Processing Magazine**, v. 24, n. July, p. 118–121, 2007. ISSN 1053-5888.
- BECK, A.; TEBoulLE, M. A Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm. **Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Imaging Sciences**, v. 2, n. 1, p. 183–202, 2009. ISSN 1936-4954.
- BLUMENSATH, T.; DAVIES, M. Normalized Iterative Hard Thresholding: Guaranteed Stability and Performance. **IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing**, v. 4, n. 2, p. 298–309, apr 2010. ISSN 1932-4553. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/5419091/>>.
- BOLLEN, M. H. J.; GU, I. Y.-H. **Signal Processing of Power Quality Disturbances**. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2006. ISBN 9780471931317. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1002/0471931314>>.
- BREEN, P. Algorithms for sparse approximation. **Technical Report**, p. 34, 2009. ISSN 1550-2376. Disponível em: <<http://www.maths.ed.ac.uk/s0789798/sparse.pdf>>.
- BRITANAK, V.; YIP, P. C.; RAO, K. R. **Discrete Cosine and Sine Transforms**. Elsevier, 2007. 1–368 p. ISBN 9780123736246. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/B9780123736246X50000>>.
- BRUCKSTEIN, A. M.; DONOHO, D. L.; ELAD, M. From Sparse Solutions of Systems of Equations to Sparse Modeling of Signals and Images. **SIAM Review**, v. 51, n. 1, p. 34–81, 2009. ISSN 0036-1445.

COOPER, J. **Sparse Representations in Power Systems Signals Sparse Representations in Power Systems**. Tese (Doutorado) — Clemson University, 2009. Disponível em: <[http://tigerprints.clemson.edu/all\\_theses/627](http://tigerprints.clemson.edu/all_theses/627)>.

DEMIRLI, R.; SANIIE, J. Model-based estimation pursuit for sparse decomposition of ultrasonic echoes. **IET Signal Processing**, v. 6, n. 4, p. 313, 2012. ISSN 17519675.

DONG, G.; KUANG, G.; WANG, N.; ZHAO, L.; LU, J. SAR Target Recognition via Joint Sparse Representation of Monogenic Signal. **IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing**, v. 8, n. 7, p. 3316–3328, 2015. ISSN 21511535.

DONOHO, D.; JOHNSTONE, I.; KERKYACHARIAN, G.; PICARD, D. Universal Near Minimality of Wavelet Shrinkage. In: POLLARD, D.; TORGERSEN, E.; YANG, G. L. (Ed.). **Festschrift for Lucien Le ...**. New York, NY: Springer New York, 1997. p. 183–220. ISBN 978-1-4612-7323-3. Disponível em: <[http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4612-1880-7\\_12](http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4612-1880-7_12) <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4612-1880-7>>.

DONOHO, D. L.; JOHNSTONE, I. M.; KERKYACHARIAN, G.; PICARD, D. Wavelet Shrinkage : Asymptopia ? **Journal of the Royal Statistical Society**, v. 57, n. 2, p. 301–369, 1995. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2345967>>.

DRAGOMIRETSKIY, K.; ZOSSO, D. Two-Dimensional Variational Mode Decomposition. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 62, n. 3, p. 531–544, 2014. ISSN 1053587X.

DUGAN, R. C.; MCGRANAGHAN, M. F.; SANTOSO, S.; BEATY, H. W. **Electrical Power Systems Quality**. [S.l.: s.n.], 2002. ISBN 0-07-138622-X.

DURNA, E.; YILMAZ, I.; ERMIS, M. Suppression of time-varying interharmonics produced by medium-frequency induction melting furnaces by a HAPF system. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 32, n. 2, p. 1030–1043, 2017. ISSN 08858993.

ELAD, M. Sparse and redundant representations: From theory to applications in signal and image processing. **Sparse and Redundant Representations: From Theory to Applications in Signal and Image Processing**, p. 1–376, 2010. ISSN 144197010X.

FENG, Z.; ZHOU, Y.; ZUO, M. J.; CHU, F.; CHEN, X. Atomic decomposition and sparse representation for complex signal analysis in machinery fault diagnosis: A review with examples. **Measurement**, Elsevier Ltd, v. 103, p. 106–132, jun 2017. ISSN 02632241. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.measurement.2017.02.031> <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0263224117301252>>.

FEOLA, L.; LANGELLA, R.; PAPIC, I.; TESTA, A. Selective Interharmonic Compensation to Improve Statcom Performance for Light Flicker Mitigation. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 8977, n. c, 2018. ISSN 08858977.

IEC. Electromagnetic compatibility (emc)—part 4-7: Testing and measurement techniques—general guide on harmonics and interharmonics measurements and instrumentation, for power supply systems and equipment connected thereto. **IEC 61000-4-7**, 2006.

IEEE. Guide for application and specification of harmonic filters. **IEEE Std 1531-2003**, p. 01–60, 2003.

IEEE. Recommended practice for monitoring electric power quality. **IEEE Std 1159-2009 (Revision of IEEE Std 1159-1995)**, p. c1–81, June 2009.

IEEE. Recommended practice and requirements for harmonic control in electric power systems. **IEEE Std 519-2014 (Revision of IEEE Std 519-1992)**, p. 1–29, June 2014.

KARL, W. C. Regularization in image restoration and reconstruction. In: BOVIK, A. C. (Ed.). **Handbook of Image and Video Processing**. Orlando, FL, USA: Academic Press, 2000. cap. 3.6, p. 141–160.

KHOKHAR, S.; Mohd Zin, A. A. B.; MOKHTAR, A. S. B.; PESARAN, M. A comprehensive overview on signal processing and artificial intelligence techniques applications in classification of power quality disturbances. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, Elsevier, v. 51, p. 1650–1663, 2015. ISSN 18790690. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.rser.2015.07.068>>.

LI, C.; XU, W.; TAYJASANANT, T. Interharmonics: Basic concepts and techniques for their detection and measurement. **Electric Power Systems Research**, v. 66, n. 1, p. 39–48, 2003. ISSN 03787796. Disponível em: <Teoria de interharmônicos.>.

LI, Y.; YU, Z. L.; BI, N.; XU, Y.; GU, Z.; AMARI, S. I. Sparse representation for brain signal processing: A tutorial on methods and applications. **IEEE Signal Processing Magazine**, v. 31, n. 3, p. 96–106, 2014. ISSN 10535888.

LIN, H. C. Power harmonics and interharmonics measurement using recursive group-harmonic power minimizing algorithm. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 59, n. 2, p. 1184–1193, 2012. ISSN 02780046.

LIN, H. C. Identification of interharmonics using disperse energy distribution algorithm for flicker troubleshooting. **IET Science, Measurement & Technology**, v. 10, n. 7, p. 786–794, 2016. ISSN 1751-8822. Disponível em: <<http://digital-library.theiet.org/content/journals/10.1049/iet-smt.2016.0110>>.

MANIKANDAN, M. S.; KAMWA, I.; SAMANTARAY, S. R. Simultaneous denoising and compression of power system disturbances using sparse representation on overcomplete hybrid dictionaries. **IET Generation, Transmission & Distribution**, v. 9, n. 11, p. 1077–1088, 2015. ISSN 1751-8687. Disponível em: <<http://digital-library.theiet.org/content/journals/10.1049/iet-gtd.2014.0806>>.

MANIKANDAN, M. S.; SAMANTARAY, S. R.; KAMWA, I. Detection and Classification of Power Quality Disturbances Using Sparse Signal Decomposition on Hybrid Dictionaries. **IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement**, v. 64, n. 1, p. 27–38, 2015. ISSN 0018-9456. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/6846308/>>.

MARTUCCI, S. A. Symmetric Convolution and the Discrete Sine and Cosine Transforms. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 42, n. 5, p. 1038–1051, 1994. ISSN 19410476.

MOHANTY, M.; SATIJA, U.; RAMKUMAR, B. Sparse decomposition framework for maximum likelihood classification under alpha-stable noise. In: **2015 IEEE International Conference on Electronics, Computing and Communication Technologies (CONECCT)**. IEEE, 2015. p. 1–6. ISBN 978-1-4799-9985-9. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/7383931/>>.

PRADO, T. A.; GUARNERI, G. A. Estudo comparativo entre algoritmos para decomposição esparsa de sinais elétricos com distorções harmônicas. In: **XXII Congresso Brasileiro de Automática (CBA)**. João Pessoa - PB, Brasil: CBA, 2018. ISSN 2525-8311. Disponível em: <<https://ssl4799.websiteseuro.com/swge5/PROCEEDINGS/>>.

RICE, D. E. A Detailed Analysis of Six-Pulse Converter Harmonic Currents. v. 30, n. 2, p. 294–304, 1994.

RUBINSTEIN, R.; BRUCKSTEIN, A. M.; ELAD, M. Dictionaries for Sparse Representation Modeling. **Proceedings of the IEEE**, v. 98, n. 6, p. 1045–1057, jun 2010. ISSN 0018-9219. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/5452966/>>.

SATIJA, U.; RAMKUMAR, B.; MANIKANDAN, M. S. Noise-aware dictionary-learning-based sparse representation framework for detection and removal of single and combined noises from ECG signal. **Healthcare Technology Letters**, v. 4, n. 1, p. 2–12, 2017. ISSN 2053-3713. Disponível em: <<http://digital-library.theiet.org/content/journals/10.1049/htl.2016.0077>>.

SHAOBING, S.; DONOHO, D. L.; SAUNDERS, M. A.; SAUNDERS, M. A. Atomic Decomposition by Basis Pursuit Linked references are available on JSTOR for this article : Atomic Decomposition by Basis. **Society for Industrial and Applied Mathematics**, v. 43, n. 1, p. 129–159, 2001.

SHESHYEKANI, K.; FALLAHI, G.; HAMZEH, M.; KHERADMANDI, M. A General Noise-Resilient Technique Based on the Matrix Pencil Method for the Assessment of Harmonics and Interharmonics in Power Systems. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 32, n. 5, p. 2179–2188, 2017. ISSN 08858977.

SINGH, S. K.; SINHA, N.; GOSWAMI, A. K.; SINHA, N. Robust estimation of power system harmonics using a hybrid firefly based recursive least square algorithm. **International Journal of Electrical Power and Energy Systems**, Elsevier Ltd, v. 80, p. 287–296, 2016. ISSN 01420615. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijepes.2016.01.046>>.

STEPHEN, B.; PARIKH, N.; CHU, E.; PELEATO, B.; ECKSTEIN, J. Distributed Optimization and Statistical Learning via the Alternating Direction Method of Multipliers. **Foundations and Trends® in Machine Learning**, v. 3, n. 1, p. 1–122, 2010. ISSN 1935-8237. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1408.2927>> <http://www.nowpublishers.com/article/Details/MAL-016>>.

SUN, Z.; HE, Z.; ZANG, T.; LIU, Y. Multi-Interharmonic Spectrum Separation and Measurement under Asynchronous Sampling Condition. **IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement**, v. 65, n. 8, p. 1902–1912, aug 2016. ISSN 00189456. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/7493670/>>.

TESTA, A.; AKRAM, M. F.; BURCH, R.; CARPINELLI, G.; CHANG, G.; DINAHAHI, V.; HATZIADONIU, C.; GRADY, W. M.; GUNTHER, E.; HALPIN, M.; LEHN, P.; LIU, Y.; LANGELLA, R.; LOWENSTEIN, M.; MEDINA, A.; ORTMAYER, T.; RANADE, S.; RIBEIRO, P.; WATSON, N.; WIKSTON, J.; XU, W. Interharmonics: Theory and modeling. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 22, n. 4, p. 2335–2348, 2007. ISSN 08858977.

TROPP, B. J. a.; WRIGHT, S. J.; TROPP, J. a. Computational Methods for Sparse Solution of Linear Inverse Problems. **Proceedings of the IEEE**, v. 98, n. 6, p. 948–958, 2010. ISSN 0018-9219.

VALENTE, S. A. **Reconstrução de Imagens de Ultrassom usando Esparsidade - Métodos Iterativos Rápidos**. Tese (Doutorado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2017.

WALLACE, A. K.; ENG, B.; PH, D.; ENG, C.; WARD, E. S.; SC, B.; PHIL, M.; ENG, C.; WRIGHT, A.; SC, M.; PH, D. Sources of harmonic currents in slip-ring induction motors. v. 121, n. 12, p. 1495–1500, 1974.

WANG, J.; SHE, M.; NAHAVANDI, S.; KOUZANI, A. Human identification from ECG signals via sparse representation of local segments. **IEEE Signal Processing Letters**, v. 20, n. 10, p. 937–940, 2013. ISSN 10709908.

WANG, Z.; HUNT, B. R. The discrete W transform. **Applied Mathematics and Computation**, v. 16, n. 1, p. 19–48, 1985. ISSN 00963003.

WRIGHT, S. J.; NOWAK, R. D.; FIGUEIREDO, M. A. Sparse reconstruction by separable approximation. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 57, n. 7, p. 2479–2493, 2009. ISSN 1053587X.

XIE, Q.; WANG, Y.; LI, T.; BIAN, X.; ZHANG, H.; XU, Y. Application of signal sparse decomposition in the detection of partial discharge by ultrasonic array method. **IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation**, v. 22, n. 4, p. 2031–2040, 2015. ISSN 10709878.

YACAMINI, R. Power system harmonics: Part 3. problems caused by distorted supplies. **Power Engineering Journal**, v. 9, n. 5, p. 233–238, Oct 1995. ISSN 0950-3366.