

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA –
PPGMAT

RAFAEL MACHADO DA SILVA

**ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA COM ESTUDANTES EM
VULNERABILIDADE SOCIAL: UMA ANÁLISE À LUZ DA EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA CRÍTICA**

LONDRINA
2019

RAFAEL MACHADO DA SILVA

**ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA COM ESTUDANTES EM
VULNERABILIDADE SOCIAL: UMA ANÁLISE À LUZ DA EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA CRÍTICA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Karina Alessandra Pessoa da Silva.

LONDRINA
2019

TERMO DE LICENCIAMENTO

Esta Dissertação e o seu respectivo Produto Educacional estão licenciados sob uma Licença Creative Commons *atribuição uso não-comercial/compartilhamento sob a mesma licença 4.0 Brasil*. Para ver uma cópia desta licença, visite o endereço <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/> ou envie uma carta para Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, Califórnia 94105, USA.



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca UTFPR - Câmpus Londrina

S586a Silva, Rafael Machado da
Atividades de modelagem matemática com estudantes em vulnerabilidade social: uma análise à luz da educação matemática crítica / Rafael Machado da Silva. - Londrina : [s.n.], 2019.
116 f. : il. ; 30 cm.

Orientadora: Prof^a Dr^a Karina Alessandra Pessoa da Silva
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2019.
Bibliografia: f. 109-115.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Modelos matemáticos. 3. Estudantes - Aspectos sociais. 4. Diálogos. 5. Pensamento crítico. 6. Reflexão (Filosofia).
I. Silva, Karina Alessandra Pessoa da, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. III. Programa de Pós- Graduação em Ensino de Matemática. IV. Título.

CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada por Cristina Benedeti Guilhem - CRB: 9/911



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de
Matemática
Campus Londrina/Cornélio Procopio



TERMO DE APROVAÇÃO

ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA COM ESTUDANTES EM
VULNERABILIDADE SOCIAL: UMA ANÁLISE À LUZ DA EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA CRÍTICA

por

RAFAEL MACHADO DA SILVA

Esta Dissertação foi apresentada em 08 de março de 2019 como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática. O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

Prof^a. Dr^a. Karina Alessandra Pessoa da Silva
Orientadora

Prof^a. Dr^a. Pamela Emanuelli Alves Ferreira
Membro titular

Prof. Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan
Membro titular

- O Termo de Aprovação assinado encontra-se na Coordenação do Curso -

Agradecimentos

À Deus, por mais essa conquista.

À minha orientadora professora Karina, pela confiança, paciência e sabedoria imensa na orientação dessa pesquisa.

Aos professores Pamela e Rodolfo, pelas contribuições valiosas na construção desse trabalho.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, em especial a professora Línlya Sachs, pelas palavras que me fizeram tomar, com toda certeza, a melhor decisão.

À Escola de Desenvolvimento Humano Casa do Caminho (EDHUCCA), pela oportunidade de realização dessa pesquisa.

Aos meus alunos que se dedicaram junto comigo para que tudo desse certo, vocês vão ficar para sempre no meu coração.

Aos amigos Grupo de Estudo e Pesquisa em Modelagem Matemática, Investigação Matemática e Tecnologias (GEPMIT), professoras Adriana e Elaine que honra compartilhar tanto conhecimento, aos alunos pela companhia e pelas grandes alegrias compartilhadas (até quando eu quase caí), sem contar por sempre pensarem em mim na hora de escolher os lanches, vocês são show!

Àqueles amigos especiais, Milene sempre pronta para ajudar, parceria de sucesso. Joice, mais uma irmã que a vida me deu, quantas histórias nesses dois anos e meio heim... E a Carla Melissa, parceira desde a primeira seleção, não estaria aqui se você não estivesse embarcado comigo nessa saga, lá no início.

E é claro à minha família, onde sempre encontro abrigo seguro nos momentos de fortes tempestades. Obrigado por me acolher, por perguntar como estava o mestrado, por dizer que vai dar tudo certo, pelo apoio tecnológico indispensável, né Vinícius, por TODOS vocês serem a melhor família que eu poderia ter!

Enfim, todos que até sem perceber contribuíram para que a construção desse trabalho e para que caminhada rumo a mais esta conquista fosse possível.

Viver é acalentar sonhos e esperanças fazendo da fé
a nossa inspiração maior. É buscar nas pequenas
coisas, um grande motivo para ser feliz!

Mário Quintana

SILVA, Rafael Machado da. Atividades de Modelagem Matemática com estudantes em Vulnerabilidade Social: uma análise à luz da Educação Matemática Crítica. 2019 116p. Dissertação Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2019.

RESUMO

Em nossa pesquisa buscamos evidenciar que características da Educação Matemática Crítica são reveladas nos diálogos dos alunos quando desenvolvem atividades de Modelagem Matemática. Para tanto, à luz da Educação Matemática Crítica, desenvolvemos três atividades de Modelagem Matemática, com alunos em vulnerabilidade social de um projeto de uma ONG. Para o planejamento das atividades, além do aporte teórico da Modelagem Matemática na Educação Matemática e da Educação Matemática Crítica, fizemos uma revisão de literatura de pesquisas que tratam de Modelagem Matemática com Educação Matemática Crítica, e assim pudemos também caracterizar nossas atividades como pertencentes a perspectiva sociocrítica da Modelagem Matemática. Dos diálogos dos alunos emergiram aspectos concernentes às características da Educação Matemática Crítica que foram sistematizados por meio de Árvores de Associação de Ideias. Por meio de tal metodologia de pesquisa qualitativa as ideias dos alunos se entrelaçam, e possibilitam encontrar evidências das características da Educação Matemática Crítica. Dentre os resultados, apresentamos nas Árvores de Associação de Ideias de cada atividade, três aspectos emergiram dos diálogos: Impacto Social, Reflexão sobre o Futuro e Reflexão sobre os Hábitos.

Palavras-chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Educação Matemática Crítica. Diálogos. Vulnerabilidade Social.

SILVA, Rafael Machado da. Mathematical Modeling activities with students in Social Vulnerability: An Analysis in the light of Critical Mathematics Education. 2019 116p. Dissertation Program of After-Degree in Mathematics Teaching - Federal Technological University of Parana. Londrina, 2019.

Abstract

In our research we seek to evidence characteristics of Critical Mathematical Education are revealed in the dialogues of the students when they develop activities of Mathematical Modeling. Therefore, in the light of Critical Mathematical Education, we developed three Mathematical Modeling activities, with students in social vulnerability of a project developed by an ONG. For the planning of activities, in addition to the theoretical contribution of Mathematical Modeling in Mathematical Education and Critical Mathematics Education, we did a review of research literature dealing with Mathematical Modeling with Critical Mathematical Education, and thus we could also characterize our activities as belonging to a sociocritical perspective of Mathematical Modeling. From the dialogues of the students emerged aspects concerning the characteristics of Critical Mathematical Education that were systematized through Trees of Association of Ideas. Through such a methodology of qualitative research the students' ideas are intertwined, and make it possible to find evidence about the aspects concerning the characteristics of Critical Mathematical Education. Among the results, three aspects emerged from the dialogues: Social Impact, Reflection on the Future and Reflection on Habits.

Keywords: Mathematical Education. Mathematical Modeling. Critical Mathematics Education. Dialogues. Social Vulnerability

Lista de Quadros

| | |
|--|----|
| Quadro 1 – Alunos por turma que frequentavam a EDHUCCA em 2017 | 47 |
| Quadro 2 – Atividades de modelagem matemática desenvolvidas | 47 |
| Quadro 3 – Divisão dos grupos turma 2 | 47 |
| Quadro 4 – Descrição das aulas | 48 |
| Quadro 5 – Valor da Tarifa de Energia Elétrica | 90 |

Lista de Figuras

| | |
|---|----|
| Figura 1 – Ciclo de Modelagem Matemática | 22 |
| Figura 2 – Ciclo de Modelagem Matemática Sociocrítico | 23 |
| Figura 3 – Modelo Preço da Passagem | 41 |
| Figura 4 – Situação-Problema da atividade 1 – Mudança Tarifária da água .. | 52 |
| Figura 5 – Esboço do modelo considerando equivocadamente os intervalos atividade 1 – grupo 1 | 56 |
| Figura 6 – Modelo matemático Grupo 1 – Atividade Mudança Tarifária..... | 57 |
| Figura 7 – Ciclo de Modelagem Atividade Mudança Tarifária – Grupo 1 | 58 |
| Figura 8 – Modelo Matemático Atividade Mudança Tarifária – Grupo 2 | 64 |
| Figura 9 – Ciclo de Modelagem Atividade Mudança Tarifária – Grupo 2 | 65 |
| Figura 10 – Modelo Matemático do Professor para a atividade 1 | 66 |
| Figura 11 – Árvore de Associação de Ideias atividade 1 Grupo 1 | 67 |
| Figura 12 – Árvore de Associação de Ideias atividade 1 Grupo 2 | 68 |
| Figura 13 – Árvore de Associação de Ideias da Atividade 1 | 70 |
| Figura 14 – Coleta de dados para o desenvolvimento da atividade 2 | 72 |
| Figura 15 – Dados coletados pelos alunos para a atividade 2 – Desperdício de Comida..... | 73 |
| Figura 16 – Quantidade suposta de massa de comida de um prato..... | 75 |
| Figura 17 – Massa de comida em cada prato da nova coleta | 76 |
| Figura 18 – Cálculo da média de massa em cada prato Grupo 1 | 77 |
| Figura 19 – Resposta ao problema da Atividade 2 – Grupo 1 | 77 |
| Figura 20 – Ciclo de Modelagem Atividade 2 Desperdício de Comida – Grupo 1 | 78 |

| | |
|--|-----|
| Figura 21. Cálculo da porcentagem de comida desperdiçada | 82 |
| Figura 22. – Matemática Atividade 2 Grupo 2 | 83 |
| Figura 23. – Média de massa de cada prato Grupo 2 | 83 |
| Figura 24. – Percentual de desperdício de comida em cada dia | 83 |
| Figura 25. – Ciclo de Modelagem – Grupo 2 | 84 |
| Figura 26. – Árvore de Associação Atividade Desperdício de Comida - Grupo 1 | 85 |
| Figura 27. – Árvore de Associação Atividade Desperdício de Comida - Grupo 2 | 86 |
| Figura 28. – Árvore de Associação da Atividade Desperdício de Comida | 87 |
| Figura 29. – De onde vem a eletricidade | 88 |
| Figura 30. – Modelo Cálculo de Energia | 88 |
| Figura 31. – Horário de Maior Consumo em casa | 89 |
| Figura 32. – Modelo Matemático Atividade 3 – Tarifa Branca | 92 |
| Figura 33. – Ciclo de Modelagem Atividade 3 – Tarifa Branca | 94 |
| Figura 34. – Árvore de Associação Atividade 3 – Tarifa Branca | 95 |
| Figura 35 – Árvore de Associação Atividade 3 –Tarifa Branca com aspectos | .96 |
| Figura 36 – Árvore de Associação de Ideias da Pesquisa | 100 |

SUMÁRIO

| | |
|--|-----|
| INTRODUÇÃO..... | 12 |
| CAPÍTULO 1 – Quadro Teórico | 17 |
| 1.1 - Modelagem Matemática na Educação Matemática..... | 17 |
| 1.2 - Educação Matemática Crítica..... | 26 |
| 1.3 - Modelagem Matemática e Educação Matemática Crítica: pesquisas desenvolvidas | 31 |
| CAPÍTULO 2 – Contexto da Pesquisa e Aspectos Metodológicos..... | 46 |
| 2.1 – Contexto da Pesquisa..... | 46 |
| 2.2 – Aspectos Metodológicos..... | 49 |
| CAPÍTULO 3 – Análise das atividades desenvolvidas..... | 52 |
| 3.1 – Descrição e análise da atividade 1 – Mudança tarifária da água..... | 52 |
| 3.1.1 – Árvores de Associação de Ideias do desenvolvimento da Atividade 1..... | 66 |
| 3.2 – Descrição e análise da atividade 2 – Desperdício de Comida..... | 70 |
| 3.2.1 – Árvores de Associação de Ideias do desenvolvimento da Atividade 2..... | 84 |
| 3.3 – Descrição e análise da atividade 3 – Tarifa Branca | 88 |
| 3.3.1 – Árvores de Associação de Ideias do desenvolvimento da Atividade 3..... | 95 |
| 3.4 – Reflexões | 96 |
| CAPÍTULO 4 – Considerações..... | 101 |
| CAPÍTULO 5 – Produto educacional | 107 |
| REFERÊNCIAS..... | 109 |
| ANEXOS..... | 116 |

INTRODUÇÃO

Ao longo da minha vida busquei estabelecer relações entre diferentes temas, para entender os acontecimentos ao meu redor e, como professor, isso não foi diferente. Nessa caminhada como professor me deparei com a Modelagem Matemática, que abriu novas oportunidades para aprimorar minha prática docente.

Evidenciando os caminhos que a Modelagem Matemática poderia trazer para minhas aulas de Matemática, tive a felicidade de, entre as possibilidades, desenvolver minha pesquisa de Mestrado em uma das escolas que trabalhava, uma entidade sem fins lucrativos que desenvolve projetos com adolescentes em vulnerabilidade social.

Vulnerabilidade social de acordo com a Política Nacional de Assistência Social refere-se a:

famílias e famílias de indivíduos com perda ou fragilidade de vínculos de afetividade, pertencimento e sociabilidade; ciclos de vida; identidades estigmatizadas em termos étnico, cultural e sexual; desvantagem pessoal resultante de deficiências; exclusão pela pobreza e, ou, no acesso às demais políticas públicas; uso de substâncias psicoativas; diferentes formas de violência advinda do núcleo familiar, grupos e indivíduos; inserção precária ou não inserção no mercado de trabalho formal e informal; estratégias e alternativas diferenciadas de sobrevivência que podem representar risco pessoal e social (BRASIL, 2005, p. 33).

A vulnerabilidade social é um processo decorrente da desigualdade social, que vem da disparidade de recursos entre um indivíduo e outro. Uma das formas de combater essas diferenças são as políticas de desenvolvimento social, fomentadas em âmbito global pelos Objetivos de Desenvolvimento do Milênio (ONU, 2000, 2015) e, no Brasil, pela Política Nacional de Assistência Social (PNAS).

A Organização das Nações Unidas (ONU) é uma organização internacional formada por países que se uniram voluntariamente para trabalhar pela paz e pelo desenvolvimento mundial. Em 2000, a ONU propôs 8 metas que contribuíssem para atingir seu objetivo de trabalhar pela paz e pelo desenvolvimento mundial chamadas de Objetivos de Desenvolvimento do Milênio (ODM) que são:

Acabar com a fome e miséria; Educação Básica e de qualidade para todos; Igualdade entre sexo e valorização da mulher; Reduzir a mortalidade infantil; Melhorar a saúde das gestantes; Combater a AIDS, a Malária e Outras Doenças; Qualidade de vida e respeito ao meio ambiente; Todo mundo trabalhando pelo desenvolvimento (ONU, 2000).

Em 2015 os Objetivos do Milênio foram reformulados dando origem aos Objetivos de Desenvolvimento Social (ODS) que são:

Erradicação da pobreza; Fome zero e agricultura sustentável; Saúde e bem-estar; Educação de qualidade; Igualdade de gênero; Água potável e saneamento; Energia limpa e acessível; Trabalho decente e crescimento econômico; Indústria, inovação e infraestrutura; Redução das desigualdades; Cidade e comunidades sustentáveis; Consumo e produção responsáveis; Ação contra mudança global do clima; Vida na água; Vida terrestre; Paz, justiça e instituições eficazes; Parceria e meios de implementação (ONU, 2015).

Nota-se que após a reformulação dos ODM para os ODS, a educação continua presente de maneira que, objetiva-se:

Até 2030, eliminar as disparidades de gênero na educação e garantir a igualdade de acesso a todos os níveis de educação e formação profissional para os mais vulneráveis, incluindo as pessoas com deficiência, povos indígenas e as crianças em situação de vulnerabilidade (ONU, 2015, informação do site).

Garantir educação de qualidade é um objetivo global como está evidente nas ODS da ONU. No Brasil, a Política Nacional de Assistência Social (PNAS), estabelece critérios objetivando o desenvolvimento social, tal como

fundamentalmente inserir-se na articulação intersetorial com outras políticas sociais, particularmente, as públicas de Saúde, Educação, Cultura, Esporte, Emprego, Habitação, entre outras, para que as ações não sejam fragmentadas e se mantenha o acesso e a qualidade dos serviços para todas as famílias e indivíduos (BRASIL, 2005, p. 42).

Assim, tanto os ODS quanto as PNAS, colocam o acesso à educação como objetivos, dada a importância da Educação para a construção de uma sociedade melhor, e dentre as componentes de uma educação, está a educação escolar e nela a matemática, ou seja, uma educação de qualidade precisa de um ensino de matemática de qualidade.

Entendemos que ensinar Matemática para pessoas em vulnerabilidade social pode contribuir para seu desenvolvimento e, conseqüentemente, trazer benefícios à sociedade.

Ao se pensar em Ensino de Matemática, com um olhar voltado para a sociedade, nos remetemos à Educação Matemática Crítica, movimento advindo das ideias da educação crítica e que ganhou corpus substancial a partir de 1994 com a publicação do livro de Ole Skovsmose, *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*. Nesta publicação, o autor tece considerações sobre o papel da matemática no âmbito social, e como o ensino de matemática interfere na sociedade e vice-versa.

A Educação Matemática Crítica compactua com os ideais de promoção social e de uma leitura mais profunda do cotidiano dos estudantes, o que pode se aproximar do que propõem os ODS e as PNAS, no que trata da qualidade da educação. A Educação Matemática Crítica também está fundamentada em questões como “de que forma a aprendizagem de Matemática pode apoiar o desenvolvimento da cidadania” e “como o indivíduo pode ser *empowered*¹ através da Matemática” (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 19).

Levando em consideração as características apregoados pela Educação Matemática Crítica e o contexto dos estudantes em vulnerabilidade social, desenvolvemos atividades de Modelagem Matemática, com o apoio nas assertivas de Almeida, Silva e Vertuan (2012) que a caracterizam como uma alternativa pedagógica na qual se faz uma abordagem por meio da Matemática, de uma situação-problema não essencialmente matemática. Para Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 17), o encaminhamento da situação-problema inicial para uma situação final é permeado por “um conjunto de procedimentos mediante o qual se definem estratégias de ação do sujeito em relação a um problema”.

As atividades de Modelagem Matemática que nos pautamos objetivam ensinar matemática e fomentar discussões de caráter social. Alrø e Skovsmose (2010) defendem que discussões que atendam as características²: realizar uma investigação, correr riscos e promover a igualdade, podem ser tratadas como

¹ No sentido de Empoderar.

² Essas características estão detalhadas no tópico 1.2.

diálogos e ainda apontam, “um diálogo como uma conversação que visa a aprendizagem” (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 119). Em nossa pesquisa buscamos nas discussões empreendidas no desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática as características de diálogos.

Existem pesquisas que defendem que atividades de modelagem matemática desenvolvidas em sala de aula possibilitam a emergência de diálogos entre professor e alunos e alunos e alunos, contribuindo para a aprendizagem em Matemática (FERRUZZI; ALMEIDA, 2015; SOARES; VIER, 2017; COSTA, 2018).

Para evidenciarmos características da Educação Matemática Crítica e entender como se apresentariam as atividades matemáticas que tratam de Modelagem Matemática e Educação Matemática Crítica, fizemos uma revisão de literatura³ em periódicos e eventos da área. A partir das atividades relatadas nas pesquisas, buscamos temas ligadas à realidade dos alunos, sujeitos de nossa investigação, e planejamos os encaminhamentos com vista a evidenciar tais características.

Atividades de modelagem matemática que possuem entrelaçamentos com a Educação Matemática Crítica são abordadas como pertencentes ao que Kaiser e Sriraman (2006) caracterizam como perspectiva sociocrítica de Modelagem Matemática, pois possibilitam discutir questões sócio-político-econômicas.

Nessa perspectiva, entendemos a relevância e as possibilidade de se trabalhar com a atividade de Modelagem Matemática no contexto de alunos em vulnerabilidade social. Com isso, nos debruçamos em lançar reflexões sobre a questão de pesquisa: *que características da Educação Matemática Crítica são reveladas nos diálogos dos alunos quando desenvolvem atividades de Modelagem Matemática?*

Diante da questão de pesquisa, a dissertação está estruturada em quatro capítulos além da introdução e referências. No capítulo 1, tratamos do referencial teórico, apresentando nosso entendimento sobre a Modelagem Matemática para o ensino de matemática, como se configuram a Educação Matemática Crítica e

³ Descrita em detalhes no tópico 1.3

os diálogos terminando com uma revisão de literatura das pesquisas que articulam Modelagem Matemática e Educação Matemática Crítica.

No capítulo 2 trazemos o contexto da pesquisa, os sujeitos, a quantidade de aulas e a Árvore de Associação de Ideias (SPINK, 2010, 2013), metodologia de pesquisa qualitativa que utilizamos para analisar os dados e poder inferir sobre nossa questão de pesquisa.

No capítulo 3, descrevemos detalhadamente as atividades desenvolvidas, juntamente com as análises dos diálogos provenientes das mesmas, buscando evidenciar, por meio das Árvores de Associação de Ideias que construímos para cada atividade, características da Educação Matemática Crítica que se revelaram no diálogos dos alunos quando desenvolvem atividades de modelagem matemática.

Ao final, no capítulo 4, apresentamos nossas considerações, no capítulo 5 a descrição do produto educacional que elaboramos baseado em nossa pesquisa e em seguida as referências bibliográficas.

1. Fundamentação Teórica

Neste capítulo apresentamos o aporte teórico da pesquisa: Modelagem Matemática na Educação Matemática, Educação Matemática Crítica, Diálogos e uma revisão de literatura sobre as pesquisas desenvolvidas que tratam do entrelaçamento entre Modelagem Matemática e Educação Matemática Crítica, com a finalidade de subsidiar o encaminhamento dado às atividades desenvolvidas.

1.1 Modelagem Matemática na Educação Matemática

A Modelagem Matemática é uma tendência da Educação Matemática que se encontra em processo de consolidação, visto o número de pesquisadores que dão fomento aos eventos que discutem e apresentam pesquisas nacional e internacionalmente.

O ICTMA (*International Conference on Teaching Mathematical Modelling and Applications*), maior evento da área, teve sua primeira edição em 1983 e em 2018 teve sua 18ª edição, com confirmação da 19ª em 2019; a CNMEM (Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática), que celebrou sua 10ª edição em 2017 e tem a 11ª confirmada para 2019 e o EPMEM (Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática), em sua 8ª edição, com sede definida para sua 9ª edição em 2020, são exemplos de eventos de divulgação de pesquisas que tratam da Modelagem Matemática na Educação Matemática.

Neste contexto, é que se constituem diferentes maneiras de se conceber o desenvolvimento de uma atividade em sala de aula. Klüber e Burak (2008) apresentam quatro concepções de Modelagem Matemática no Brasil com base em autores de grande atuação na área e participantes ativos da CNMEM: Dionísio Burak, Maria Salett Biembengut, Ademir Donizete Caldeira e Jonei Cerqueira Barbosa.

De acordo com Klüber e Burak (2008, p. 19), a concepção de Dionísio Burak para a Modelagem Matemática consiste em um “conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e a tomar decisões”.

A concepção de Maria Salett Biembengut é de que a Modelagem Matemática é um “processo que envolve a obtenção de modelo”, e a de Ademir Donizete Caldeira “um sistema de aprendizagem” (KLÜBER; BURAK, 2008, p. 31).

Klüber e Burak (2008) também destacam a concepção de Jonei Cerqueira Barbosa em que a “Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade” (KLÜBER; BURAK, 2008, p. 29).

Como resultado de sua pesquisa, Klüber e Burak (2008) atribuem a elucidação das concepções de Modelagem Matemática no âmbito educacional, o que permite uma maior abertura para discussões teóricas em relação a Modelagem Matemática, e que a continuidade e o aprofundamento desses estudos possibilitam um lócus próprio da Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática.

Outra concepção brasileira que não é destacada no trabalho de Klüber e Burak (2008), mas é considerada referência na área é a de Bassanezi (2002, p. 16), para o qual “a Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”.

Para a estruturação e desenvolvimento das atividades aqui analisadas adotamos a concepção de Modelagem Matemática apoiada nas assertivas de Almeida, Silva e Vertuan (2012) que a caracterizam como uma alternativa pedagógica na qual se faz uma abordagem por meio da Matemática, de uma situação-problema não essencialmente Matemática. Para Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 17), o encaminhamento da situação-problema inicial para uma situação final é permeado por “um conjunto de procedimentos mediante o qual se definem estratégias de ação do sujeito em relação a um problema”. Além disso, nos inspiramos na perspectiva sociocrítica (KAISER; SRIRAMAN, 2006) para tratar e orientar o desenvolvimento das atividades.

A perspectiva sociocrítica faz parte de uma caracterização internacional realizada por Kaiser e Sriraman (2006). Esses pesquisadores analisaram

trabalhos presentes no ICTMA (*International Conference on Teaching Mathematical Modelling and Applications*) e no ICMI (*International Commission on Mathematical Instruction*), e caracterizaram o encaminhamento de uma atividade em seis perspectivas de Modelagem Matemática: realística, epistemológica, contextual, educacional, cognitiva e sociocrítica. Sobre cada perspectiva os autores fazem uma descrição:

- realística - trata da aplicabilidade da Modelagem Matemática, objetivando a solução de problemas do mundo real, promovendo as competências de modelagem e o entendimento do mundo real;
- epistemológica - os objetivos estão no desenvolvimento teórico;
- contextual - aborda a solução de problemas levando em consideração questões psicológicas;
- educacional - os assuntos estão relacionados à estrutura do processo de modelagem, a didática, ou a introdução e desenvolvimento de conceitos.
- cognitiva - descrita como um tipo de meta perspectiva e tem objetivos de pesquisa e psicológicos. No que tange à pesquisa, busca entender os processos cognitivos no processo de modelagem, quanto aos objetivos psicológicos objetiva a promoção do pensamento matemático por meio do uso de modelos mentais ou imagens físicas enfatizando os processos de abstração ou generalização;
- sociocrítica - relacionada a uma compreensão crítica do mundo, em um contexto político social, tratando também do papel e da natureza dos modelos matemáticos⁴, características essas que estão de acordo com aquelas tecidas na Educação Matemática Crítica.

Ainda de acordo com Kaiser e Sriraman (2006), a perspectiva sociocrítica, tem como objetivo proporcionar o pensamento crítico do aluno que consiste no foco central do ensino. As discussões reflexivas dos alunos são vistas como parte fundamental do processo de Modelagem, assim como essas discussões e reflexões são indispensáveis para o desenvolvimento do pensamento crítico.

⁴ Adotamos aqui a definição de Almeida, Silva e Vertuan (2012), descrita com detalhes no decorrer da dissertação.

O trabalho que Kaiser e Sriraman (2006) caracteriza como pertencendo à perspectiva sociocrítica é o do brasileiro Jonei Cerqueira Barbosa. Em seu trabalho, Barbosa (2006) desenvolveu uma atividade com alunos do 7º ano de um colégio rural de Feira de Santana, interior do estado da Bahia. A partir de uma notícia de jornal sobre um programa do governo para a distribuição de sementes de feijão e milho, desencadeou a discussão sobre o assunto questionando os alunos sobre o critério de distribuição das sementes para cada família.

Araújo (2009) destaca que no Brasil, diferentemente do restante do mundo, a perspectiva sociocrítica tem grande impacto na comunidade de Modelagem Matemática, característica que Kaiser e Sriraman (2006), atribuem também à influência das ideias de Ubiratan D'Ambrosio com a Etnomatemática.

Almeida e Vertuan (2010) tratam da perspectiva educacional e cognitivista em uma atividade de modelagem matemática desenvolvida com alunos do Ensino Superior, se valendo dos registros de representação semiótica de Duval. Nesse estudo, os autores concluem que a perspectiva educacional se fez presente na atividade desenvolvida, nas discussões dos conceitos de continuidade e diferenciabilidade de uma função de uma variável real e a perspectiva cognitiva foi abarcada na intenção do professor em fazer com que os alunos utilizassem diferentes registros de um mesmo conceito matemático na busca da solução do problema e, ainda:

Conhecer as diferentes perspectivas e refletir sobre os aspectos relevantes em cada uma delas é potencializar a prática de Modelagem em sala de aula, uma vez que os professores podem trabalhar com estas atividades de modo a contemplar diferentes perspectivas e, conseqüentemente, os diferentes aspectos inerentes às atividades de Modelagem (ALMEIDA; VERTUAN, 2010, p. 31).

Blum (2015) conceitua as perspectivas tratadas por Kaiser e Sriraman (2006) de uma maneira mais formal como um par (objetivo / exemplo adequado) e uma terminologia diferente. O autor considera:

- pragmático / autêntica: modelagem aplicada;
- formativo / cognitivamente cheia: modelagem educacional;
- cultural com intenção emancipatória / autêntica: modelagem sociocrítica;

- cultural relativa a matemática / epistemologicamente cheia: modelagem epistemológica;
- psicológico com intenção de marketing / motivação: modelagem pedagógica;
- psicológico / matematicamente cheio: modelagem conceitual.

Segundo Blum (2015), cada perspectiva influencia um modo de encaminhar as atividades, e o modo de encaminhar as atividades, por sua vez, caracterizam as perspectivas.

De acordo com Jacobini e Wodewotzki (2006), por meio da Modelagem Matemática, é possível enfatizar ações político-sociais o que pode despertar novos olhares tanto sobre a Matemática, quanto sobre a realidade social ao redor do estudante.

Araújo (2009) defende que a Modelagem Matemática deve se preocupar com a formação política do estudante, fazendo com que atue criticamente na sociedade, levando o que se discute nas atividades para a vida em sociedade. Assim, é possível que os estudantes possam mudar sua própria visão e influenciar a visão de outros em relação a assuntos de natureza social e que podem ser melhor compreendidos por meio da Matemática.

As características inerentes à perspectiva sociocrítica, foram sintetizadas por Silva e Kato (2012) em quatro categorias: (1) participação ativa do aluno na construção do modelo, (2) participação ativa do aluno na sociedade, (3) problema não-matemático da realidade, (4) atuação do professor como mediador, como apresentaremos em nossa revisão de literatura⁵, sendo tratada como um dos norteadores para o planejamento das nossas atividades.

Independentemente da perspectiva adotada, uma atividade de modelagem matemática apresenta uma situação-problema inicial, parte da interação com uma situação real que pode ser no âmbito da matemática ou não. Por se tratar de situações que, de forma geral partem da realidade, a modelagem matemática, aproxima os conteúdos matemáticos trabalhados na escola ao cotidiano dos alunos.

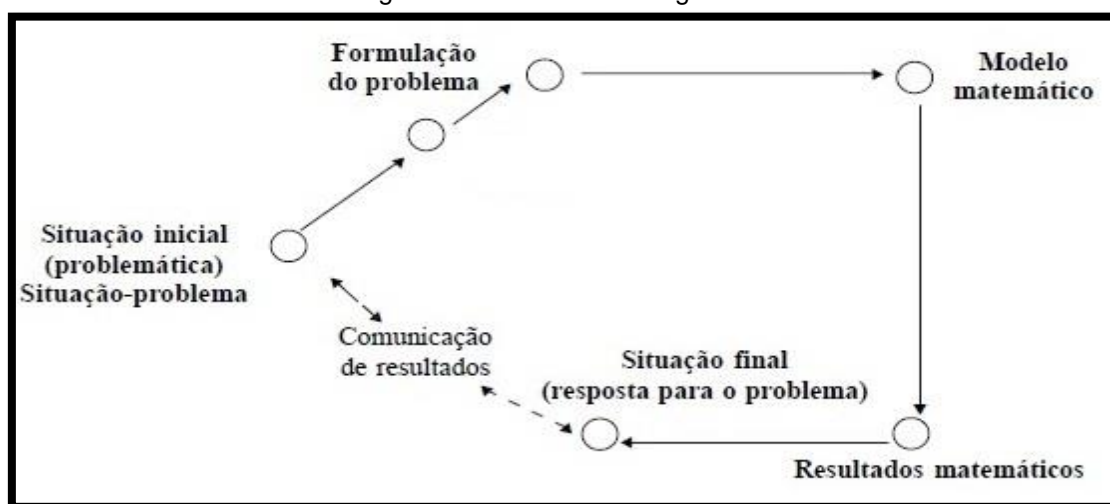
⁵ Apresentada no tópico 1.3

Da situação advinda da interação com a situação inicial, define-se um problema a ser investigado para, na sequência, formular-se hipóteses e definir-se variáveis. Por meio de conceitos matemáticos, investiga-se o problema e, posteriormente, se chega a um modelo matemático. Conforme salientam Almeida, Silva e Vertuan (2012):

Um modelo é um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, podendo mesmo permitir a realização de previsões sobre este outro sistema (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 13).

A partir do modelo matemático construído, por meio de resultados e tratamentos matemáticos se obtém uma solução para o problema, uma resposta. Tal resposta é considerada a situação final da atividade de modelagem matemática que deve ser interpretada no contexto da situação inicial. A interpretação precisa ser comunicada aos pares que a validam. Se a validação não acontecer, continua-se a investigação, revisitando todas as decisões e encaminhamentos já realizados. O encaminhamento de uma atividade de modelagem pode ser descrito e representado por meio de um ciclo como apresentado na Figura 1.

Figura 1 – Ciclo de Modelagem Matemática



Fonte: Almeida e Silva (2012) adaptado.

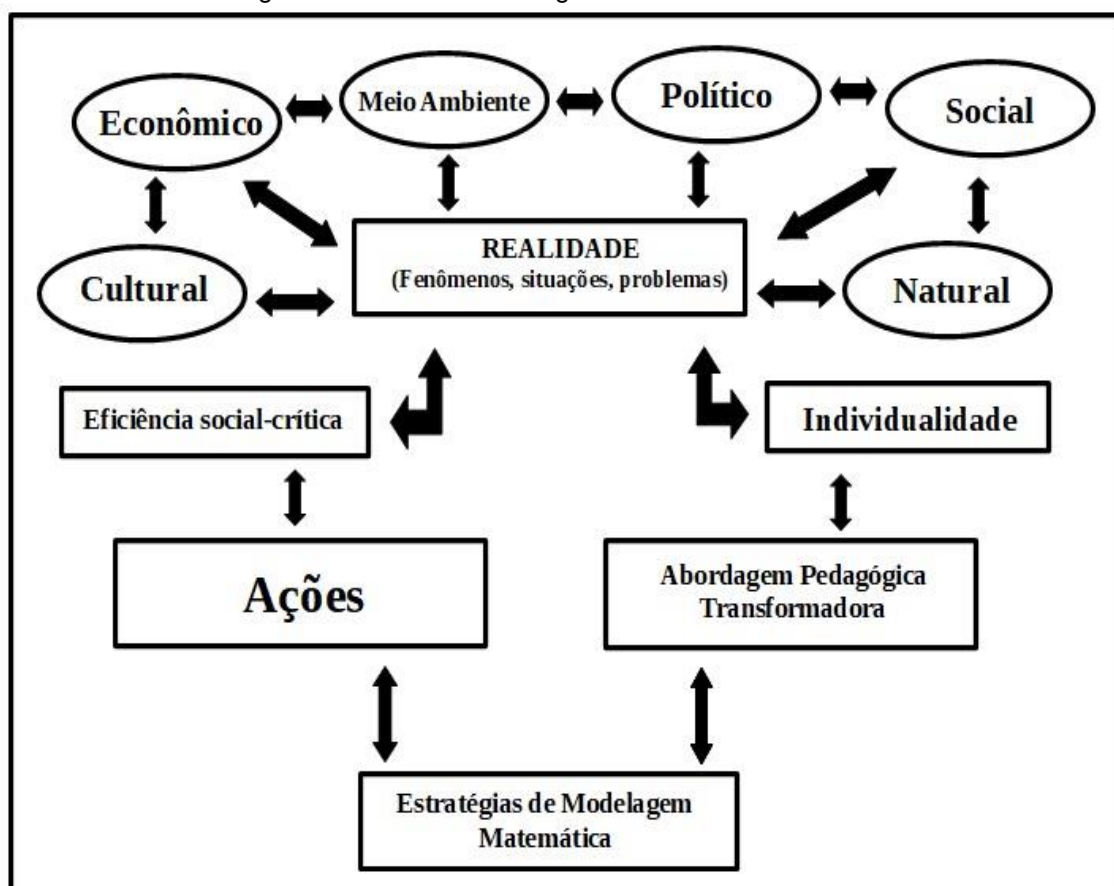
Embora seja apresentado enquanto um ciclo, o desenvolvimento de uma atividade de modelagem não ocorre de forma linear em que as ações são apresentadas em sequência. Idas e vindas entre uma ação e outra podem estar

presentes com vistas a uma melhor análise ou até mesmo uma nova leitura do problema inicial. Almeida, Silva e Vertuan (2012), salientam:

Ainda que as fases⁶ constituam procedimentos necessários para a realização de uma atividade de modelagem matemática, elas podem não decorrer de forma linear, e constantes movimentos de “ida e vinda” entre essas fases caracterizam a dinamicidade da atividade (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 16).

A perspectiva de Modelagem Matemática que adotamos neste trabalho está de acordo com a perspectiva sociocrítica. Nesse contexto trazemos o Ciclo de Modelagem na Perspectiva Sociocrítica de Rosa e Orey (2015), apresentado na Figura 2. A constituição do ciclo acontece partindo da integração entre as condições sociais, políticas, culturais e econômicas do aprendiz e como ele as interpreta tem interferência na solução do problema a ser estudado.

Figura 2 – Ciclo de Modelagem Matemática Sociocrítico



Fonte: Rosa e Orey (2015, tradução nossa).

⁶ Conjunto de procedimentos necessários para configuração, estruturação e resolução de uma situação problema, caracterizadas como: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 15).

Os fenômenos, situações e problemas que fazem parte da realidade, influenciam e sofrem influência das variáveis cultural, política, econômica, ambiental e social, desdobrando-se para a individualidade do aluno, ou para a eficiência social-crítica.

O desdobramento das variáveis para a individualidade repercute em uma estratégia pedagógica transformadora, que devolve para o aluno uma nova visão que irá influenciar a realidade de onde partiu a atividade de modelagem matemática. Já o desdobramento para a eficiência social-crítica está ligado às ações, que também advém dos encaminhamentos dados à atividade de modelagem matemática, pois, “a eficiência social-crítica tem como característica fundamental a ênfase na análise crítica dos alunos sobre as estruturas de poder da sociedade” (ROSA; OREY, 2007, p. 198).

Os ciclos orientam o desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática, estruturando ações e encaminhamentos de forma idiossincrática. Na dedução do modelo matemático, diferentes representações se fazem presentes. A maneira com que tal modelo é deduzido é decorrente de fatores como o conhecimento matemático dos alunos, ou mesmo da familiaridade em trabalhar com atividades dessa natureza.

Ao se tratar da familiaridade dos alunos com as atividades de Modelagem Matemática, autores como Almeida e Dias (2004) sugerem que a implementação de atividades de modelagem em sala de aula, ocorra de forma gradativa. Esse procedimento é caracterizado pelas autoras como familiarização dos alunos e é configurado em três momentos:

Em um primeiro momento, são abordadas, com todos os alunos, situações em que estão em estudo a dedução, a análise e a utilização de um modelo matemático, a partir de uma situação problema já estabelecida e apresentada pelo professor; neste momento, a formulação de hipóteses e a investigação do problema, que resulta na dedução do modelo, são realizadas em conjunto com todos os alunos e o professor;

Posteriormente, uma situação problema já reconhecida, juntamente com um conjunto de informações, pode ser sugerida pelo professor à classe, e os alunos, divididos em grupos, realizam a formulação das hipóteses simplificadoras e a dedução do modelo durante a investigação e, a seguir, validam o modelo encontrado;

Finalmente, os alunos, distribuídos em grupos, são incentivados a conduzirem um processo de Modelagem, a partir de um

problema escolhido por eles, devidamente assessorados pelo professor (ALMEIDA; DIAS, 2004, p. 7).

As atividades de Modelagem Matemática demandam autonomia por parte dos estudantes. Assim, os momentos de familiarização possibilitam aos alunos independência frente à situação-problema a ser investigada por meio da Matemática e coloca o professor como um mediador e orientador no desenvolvimento da atividade.

As atividades de Modelagem Matemática têm por característica o trabalho em equipe, como pontuam Almeida e Dias (2004). Em sala de aula, atividades de modelagem podem ser vistas como essencialmente cooperativas, em que a cooperação e a interação entre os alunos e entre professor e aluno têm papel importante na construção do conhecimento e, conseqüentemente, da aprendizagem.

Da interação entre professor/alunos e alunos/alunos existe a possibilidade de emergirem diálogos que podem ser ponto de partida para o desencadeamento da construção de conhecimentos, bem como reflexões sobre o conteúdo matemático envolvido na situação, além de subsidiar questões mais amplas que emergem a partir da defesa de pontos de vista entre os alunos e entre os alunos e o professor. Conforme salientam Ferruzzi e Almeida (2015),

as ações dos alunos não são exclusivas de atividades interativas, porém, a diferença reside no fato que, em interação, estas ações são, muitas vezes explicitadas para o outro, atuando como auxiliadoras e, ao mesmo tempo atuando como reorganizadoras do pensamento, promovendo a estruturação e novas aprendizagens (FERRUZZI; ALMEIDA, 2015, p. 392).

As interações entre professor/alunos e alunos/alunos, são caracterizadas por Alrø e Skovsmose (2010), como diálogos. Para os autores o diálogo é “uma conversação que visa a aprendizagem” (ALRØ; SKOVSMOSE 2010, p. 119). Existem pesquisas, que partindo dos conceitos de diálogo de Alrø e Skovsmose (2010), realizam articulação com a Modelagem Matemática (FERRUZZI; ALMEIDA, 2015; SOARES; VIER, 2017; COSTA, 2018).

Do nosso entendimento sobre Modelagem Matemática e corroborando com os apontamentos realizados por Ferruzzi e Almeida (2015) de que em

atividades de modelagem matemática emergem diálogos, nos pautamos na perspectiva sociocrítica. Nesse contexto, no próximo tópico apresentamos os pressupostos da Educação Matemática Crítica.

1.2 Educação Matemática Crítica

A educação tem como uma de suas características fazer com que as pessoas estejam preparadas para contribuir com o desenvolvimento social. Porém, de que maneira a educação nos moldes atuais está contribuindo com o desenvolvimento social? E qual o papel da Matemática nesse processo?

Para tentar entender essas questões, tratamos nesse capítulo sobre a Educação Matemática Crítica, que traz reflexões sobre o papel da Matemática na educação e, conseqüentemente, de como ela impacta na sociedade. Skovsmose (2007) salienta:

que a educação matemática serve para uma função social de estratificação que pode deixar marcas nos estudantes. Essa estratificação separa aqueles que conseguiram acesso ao poder e prestígio daqueles que não conseguiram (SKOVSMOSE, 2007, p. 25).

Nesse contexto, é necessário pensar a Matemática como um agente que possa romper com esse panorama social, que separa as pessoas em categorias, gerando exclusão e marginalização. Skovsmose (2017) ainda pontua que

a Matemática pode ser efetivamente usada para ensinar e aprender sobre injustiça social, auxiliando os estudantes, e também estudantes em posições confortáveis⁷, a desenvolver uma consciência crítica que os apoie em aprofundar o conhecimento e a compreensão dos contextos sociopolíticos de suas vidas (SKOVSMOSE, 2017, p. 22).

Barbosa (2003) destaca que, para construir uma sociedade democrática, na qual as pessoas possam participar de sua condução e exercerem sua cidadania, entendida aqui como inclusão nas discussões públicas, é preciso reconhecer a necessidade de as mesmas se sentirem capazes de intervir em debates baseados em Matemática.

A Educação Matemática Crítica preocupa-se também com questões como “de que forma a aprendizagem de Matemática pode apoiar o desenvolvimento

⁷ Que desfrutem de todas as vantagens que o sistema educacional pode oferecer (SKOVSMOSE, 2017).

da cidadania” e “como o indivíduo pode ser *empowered* através da matemática” (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 18). Com isso, entendemos que se coloca um olhar diferenciado sobre o ensino e sobre o papel da Matemática, que vai além de resolver algoritmos, e busca contribuir para entender como utilizar os algoritmos para compreender o que está à sua volta e como saber matemática pode colaborar para essa compreensão.

Uma Educação Matemática Crítica deve possibilitar uma visão mais ampla sobre os conceitos que versam a realidade social. Skovsmose (2001) entende que:

os estudantes têm que desenvolver não apenas conhecimento pragmático sobre como usar a matemática e como construir modelos (simples), mas também, primariamente, conhecimento sobre como usar a construção do modelo, e esse conhecimento deve ser voltado para o entendimento das funções sociais e aplicações “adultas” de modelos matemáticos (SKOVSMOSE, 2001, p. 52).

De certa forma Skovsmose (2001, p. 19), destaca que a Educação Matemática Crítica volta o olhar para características relacionadas à:

- 1) A aplicabilidade do assunto: quem usa? Onde é usado?
- 2) Os interesses por detrás do assunto: que interesses formadores de conhecimento estão conectados a esse assunto?
- 3) Os pressupostos por detrás do assunto: que sugestões e que problemas geraram os conceitos e os resultados na matemática? Que contextos tem promovido e controlado o desenvolvimento?
- 4) As funções do assunto: que possíveis funções sociais poderiam ter o assunto?
- 5) As limitações do assunto: em quais áreas e em relação a que questões esse assunto não tem qualquer relevância?

Características orientadas pelas questões que as acompanham proporcionam que o estudante tenha uma visão diferente da que está acostumado a lidar no dia a dia, faz uma nova leitura do que é a Matemática e como ela se encontra disseminada na sociedade. Essas características perpassam por temas como currículo e papel do professor, que são componentes importantes na implementação das ideias da Educação Matemática Crítica no cotidiano dos alunos. Desse modo:

Se queremos desenvolver uma atitude democrática por meio da educação, a educação como relação social não deve conter aspectos fundamentalmente não democráticos. É inaceitável

que o professor (apenas) tenha um papel decisivo e prescritivo. Em vez disso o processo educacional deve ser entendido como um diálogo (SKOVSMOSE, 2001, p. 18).

O professor, ao ensinar, tem que exercer seu papel de mediador, porém, é necessário que traga para o ambiente de sala de aula assuntos que possibilitem aos alunos relacionar seus conhecimentos com os conteúdos de sala de aula e a relação dos conteúdos com os acontecimentos sócio-político-sociais que permeiam sua realidade.

E quando tratamos de conteúdo, atrelamos o currículo, que pode ser uma forma de contribuir para que discussões que tangem características relacionados à Educação Matemática Crítica. Skovsmose (2001), tece mais considerações sobre o currículo,

1) os conteúdos do currículo são determinados, não primariamente por causas reais que tenham a ver com a estrutura lógica do currículo, mas com forças econômicas e políticas ligadas a relações de poder na sociedade; e 2) o currículo pode funcionar como uma extensão das relações sociais existentes (SKOVSMOSE, 2001, p. 30).

Fundamentados nas ideias disseminadas na Educação Matemática Crítica, Sachs e Elias (2017) trazem reflexões sobre como a abordagem de assuntos ligados à política e à sociedade, em uma disciplina de um curso de licenciatura em matemática, pode ser estopim para que esse professor em formação leve esses conceitos para sua sala de aula. Sachs e Elias (2017) ainda ponderam que:

promover essa tomada de consciência do currículo como um campo político e de relações de poder é, em nosso entendimento, papel fundamental dos cursos de formação inicial de professores, na medida em que devem propiciar um ambiente que favoreça o debate acerca dessas questões (SACHS; ELIAS, 2017, p. 2).

As características citadas contribuem para “derrubar” a Ideologia da Certeza em Educação Matemática (BORBA; SKOSMOSE, 2001), e como a Matemática é trabalhada em sala de aula, o que Borba e Skovsmose (2001) denominam de Paradigma do Exercício. A base da Ideologia da Certeza pode ser resumida de acordo com os autores como:

1) A matemática é perfeita, pura e geral, no sentido de que a verdade de uma declaração matemática não se fia em

nenhuma investigação empírica. A verdade matemática não pode ser influenciada por nenhum interesse social, político ou ideológico.

- 2) A matemática é relevante e confiável, porque pode ser aplicada a todos os tipos de problemas reais. A aplicação da matemática não tem limite, já que é sempre possível matematizar o problema (BORBA; SKOSMOSE, 2001, p. 130-131).

Quanto ao paradigma do exercício, Skovsmose (2000), diz que este está atrelado ao modelo de aula onde o professor apresenta algumas ideias e técnicas matemáticas e os alunos trabalham exercícios selecionados. A premissa central desse paradigma é que existe uma, e somente uma, resposta correta.

Ir contra a Ideologia da Certeza e contra o Paradigma do Exercício, contribui para que não se formem Guetos, ou seja, “certos grupos de pessoas que permanecem fora da sociedade onde vivem” (SKOVSMOSE, 2007, p. 62). O processo de formação dos guetos acontece a partir da globalização que favorece a exclusão social.

O ensino de Matemática perpassa todos os níveis escolares e locais. Nesse sentido, a Educação Matemática Crítica se preocupa em como a Matemática pode contribuir para o desenvolvimento social e, conseqüentemente, com a ruptura dos guetos (SKOVSMOSE, 2017). Porém, Skovsmose (2017) coloca que a Educação Matemática Crítica vai além, pois, trata de como a Matemática tem influência na vida de estudantes em posições confortáveis, para os surdos e cegos, para os idosos, para os estudantes universitários.

Assim, a Educação Matemática Crítica quando tratada em um ambiente “confortável” deve proporcionar reflexões que levem estudantes a não perpetuarem estereótipos de discriminação de classes menos favorecidas, ela deve combater o deficiencialismo, e aos estudantes universitários levá-los a desenvolver um “profissionalismo duplo: um profissionalismo em fazer, e um profissionalismo sobre fazer” (SKOVSMOSE, 2017, p. 33).

Com essa visão, Skovsmose (2017) amplia o conceito do que é, e qual o papel da Educação Matemática Crítica, pois, mostra que é possível tratar a Educação Matemática de uma forma Crítica, contribuindo para o

desenvolvimento do *empowerment* em todos os campos em que a Matemática se faz presente.

Fazer com que aulas de Matemáticas contribuam para que os estudantes desenvolvam uma visão mais ampla do mundo ao seu redor é o que Skovsmose et al. (2012, p. 235) define como *foreground*, “interpretações das oportunidades de vida em relação ao que parece ser aceitável e estar disponível no contexto sócio-político dado”, e ainda salienta que “o significado dado à aprendizagem está ligado às condições sociais, políticas, culturais e econômicas do aprendiz e como ele as interpreta”.

A desconstrução da Ideologia da Certeza e do Paradigma do Exercício, bem como o desenvolvimento do *empowerment*, tem relação com o ambiente em que os alunos entram em contato com a Matemática, assim Alrø e Skovsmose (2010, p. 58), definem como Cenários para a Investigação o ambiente que possibilite aos alunos “participarem ativamente de seu processo de aprendizagem”. Os autores ponderam que nesse contexto, “os padrões de comunicação podem mudar e abrir-se para novos tipos de cooperação e para novas formas de aprendizagem” (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 58).

Para Alrø e Skovsmose (2010), uma dessas novas formas de aprendizagem provém dos diálogos, que eles tratam como sendo uma conversa que visa a aprendizagem. A configuração de diálogo defendida por Alrø e Skovsmose (2010), apresenta três características: realizar uma investigação, correr riscos e promover a igualdade. Realizar uma investigação é abandonar a comodidade da certeza e deixar levar pela curiosidade; correr riscos significa acreditar que algo imprevisto possa acontecer; promover a igualdade coloca os alunos em uma mesma posição, pois, em um diálogo um participante não pode estar acima do outro.

Assim, Alrø e Skovsmose (2010), por meio desses três características, atribuem as qualidades de um diálogo, que são: estabelecer contato, com a intenção de fazer junto; perceber, tomar consciência do que ainda não se sabia; reconhecer, saber que algoritmo usar; posicionar-se, ao dizer aquilo que se pensa; pensar alto, expor em voz alta o que se está pensando; reformular, fazer novamente algo que se pensava estar correto; desafiar, mudar uma perspectiva já estabelecida e avaliar, novo exame da situação.

Os diálogos surgem da interação entre professor/alunos e alunos/alunos, e quando os diálogos possuem as características de qualidade descrita, se obtém o que Alrø e Skovsmose (2010), chamam de Modelo de Cooperação Investigativa (Modelo – CI). Assim:

os atos de comunicação inclusos no Modelo – CI trazem os alunos e suas perspectivas para o centro do palco do processo educativo. Novos instrumentos de aprendizagem passam a estar disponíveis, e novas qualidades de aprendizagem se tornam possíveis (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 72).

No próximo tópico trazemos uma revisão de literatura de pesquisas que tratam do entrelaçamento entre Modelagem Matemática e Educação Matemática Crítica.

1.3 Modelagem Matemática e Educação Matemática Crítica: pesquisas desenvolvidas

Neste tópico fazemos uma revisão de literatura de trabalhos que versam sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática Crítica, situando nossa pesquisa.

Os trabalhos são fruto de uma busca no Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), anais de eventos da área de Modelagem Matemática: VI e VII Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática (EPMEM), IX e X Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM), do 16º e 17º *International Community of Teacher of Mathematical Modelling and Application* (ICTMA); e de teses e dissertações. As publicações estão compreendidas entre os anos de 2012 a 2017⁸.

No BOLEMA, utilizando as palavras-chave *social*, *crítica* e *socioeducação*, foram encontrados dois artigos que articulam Modelagem Matemática e Educação Matemática Crítica: Silva e Kato (2012) e Araújo (2012).

Em Silva e Kato (2012), as autoras tratam de elementos que caracterizam uma atividade de Modelagem Matemática na perspectiva sociocrítica e fazem um estudo sobre os relatos de experiência apresentados na VI CNMEM que se enquadram nesta perspectiva.

⁸ Últimos seis anos.

Por meio da Análise Textual Discursiva, as autoras constroem quatro categorias que caracterizam uma atividade de Modelagem Matemática na perspectiva sociocrítica: (1) participação ativa do aluno na construção do modelo, (2) participação ativa do aluno na sociedade, (3) problema não-matemático da realidade, (4) atuação do professor como mediador. Ainda, segundo as autoras, muitas das quatro características aqui indicadas não são exclusivas da perspectiva sociocrítica, e a opção por esta abordagem não implica na exclusão dos propósitos característicos de outras perspectivas da Modelagem Matemática. Consideram também que atividades de modelagem se enquadram nessa perspectiva apenas se desenvolver um conjunto de ações que atenda todas as quatro categorias construídas.

Araújo (2012), embasada em Ole Skovsmose e Paulo Freire, tece uma análise sobre como ser crítico em projetos de Modelagem. Após conceituar o que é criticidade, a autora contextualiza o desenvolvimento de sua pesquisa, que aconteceu na construção de um projeto de Modelagem Matemática na Perspectiva Crítica, em uma turma de graduação em Geografia da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Neste cenário, a autora discutiu com os alunos o que é Modelagem Matemática na perspectiva Crítica e os dividiu em grupos para elaborar um plano de trabalho.

Em sua análise, Araújo (2012) utilizou o trabalho dos alunos do grupo que escolheu estudar o tema aspectos socioeconômicos do projeto de construção da Linha Verde em Belo Horizonte e o objetivo era identificar a interpretação crítica que eles tiveram. O estudo matemático dessa situação foi um elo entre a discussão sobre os impactos socioeconômicos na região (Belo Horizonte) e os argumentos e dados utilizados pelo governo para justificar a obra. Essa comparação levou os integrantes do grupo a concluir que não houve preocupação do governo com o impacto que a obra teria sobre a vida das pessoas. Para Araújo (2012), esse posicionamento crítico do grupo diante da realidade pode ser interpretado como receptividade para o desenvolvimento de projetos de Modelagem Matemática na perspectiva crítica.

Com relação aos trabalhos publicados em anais de eventos, nos pautamos nos VI e VII Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática (EPMEM, 2014, 2016), na XIX e X Conferência Nacional sobre

Modelagem na Educação Matemática (CNMEM, 2015, 2017), e na 16° e 17° *International Conference on Teaching Mathematical Modelling and Applications* (ICTMA, 2015, 2017).

Nos anais do VI EPMEM (2014), encontramos três trabalhos que abordam atividades de Modelagem Matemática com um viés social, sendo apenas um diretamente ligado à Educação Matemática Crítica.

Barros e Kato (2014) desenvolveram uma atividade com alunos de engenharia voltando a atividade para a conscientização ambiental, contribuindo para promover o que as autoras destacam como Educação Ambiental Crítica.

Simonetti et al. (2014) usam a Modelagem Matemática para ajudar a prever e tomar decisões sociais, ao investigar o número de homicídios no município de Toledo no estado do Paraná.

Mello (2014), em um curso de costura de um programa do governo federal, desenvolveu três atividades de Modelagem Matemática com mulheres em situação de vulnerabilidade. Essas atividades à luz da Educação Matemática Crítica estavam voltadas para o ensino de medidas e para a educação financeira.

Na primeira atividade em contato com tabela fornecida pela professora, com os tipos de tecido e suas respectivas larguras e preços, as alunas deviam calcular a quantidade de tecido e qual o custo para a confecção de uma cortina. A segunda atividade partiu de uma lista com diversos itens de higiene pessoal, e as alunas deveriam fazer a melhor compra, não necessariamente a mais barata, mas a que fosse melhor para elas. A autora destaca nesta atividade que as alunas relataram que quando iam ao mercado não se preocupavam com a quantidade de papel higiênico nos rolos, apenas com a quantidade de rolos no pacote, e por meio da atividade se deram conta da diferença que isso pode fazer em uma compra. Na terceira atividade, Mello (2014) pediu que, utilizando propagandas de lojas, as alunas escolhessem três produtos e destacassem qual a melhor opção de compra, a vista ou à prazo, e com a intervenção da professora calcularam a taxa de juros e ficaram impressionadas como os juros eram altos.

Finalizando, a autora coloca que as atividades foram planejadas no desafio apresentado por Skovsmose (2001), que se refere a explorar em que medida é possível, por meio da Educação Matemática, fazer a diferença para

algumas situações, e dessa forma tentar realizar uma Educação Matemática para a justiça social. Apesar de não ser possível destacar em que medida a Educação Matemática fez diferença na vida das mulheres, pelos relatos e pelo desenvolvimento das atividades, Mello (2014) entende que algum movimento foi realizado.

Nos anais do VII EPMEM (2016), identificamos duas publicações que trazem um olhar sobre sociedade e criticidade, ambas atrelam Modelagem Matemática e Educação Matemática Crítica. Littig e Alves (2016) refletem sobre a influência do *empowerment* no desenvolvimento do conhecimento reflexivo em uma atividade com alunos do 2º ano do Ensino Médio, que partiu de uma situação-problema trazida pelos alunos, sobre a falta de água para irrigar o jardim da escola.

Littig e Alves (2016) observam que o envolvimento em discussões reflexivas está associado quando os alunos trazem questões que os inquietam. Além disso, abordam que quando a autonomia dos sujeitos está relacionada ao seu posicionamento na atividade, questões subjetivas da formação social se fazem presentes e isso está associado à construção do *empowerment*, como colocado por Skovsmose (2001).

Os autores, ainda ponderam sobre a importância do contexto social no desenvolvimento do conhecimento reflexivo, por este ser um espaço de formação dos indivíduos, e que desenvolver a capacidade reflexiva propicia a ampliação de visão do mundo como preconiza a Educação Matemática Crítica.

A partir das falas dos alunos, Littig e Alves (2016) concluem que esse cenário propiciou a autonomia dos mesmos e promoveu principalmente a reflexão sobre a relação da Matemática com o contexto social.

Kistemann Jr e Canedo Jr (2016) em uma turma de 6º do Ensino Fundamental desenvolvem uma atividade de Modelagem Matemática associada ao construto seres-humanos-com-mídias⁹ à luz da Educação Matemática Crítica, antes de apresentarem a análise dos dados, tecem uma relação entre as referências da Educação Matemática Crítica e seres-humanos-com-mídias, em

⁹ Borba e Villareal (2005) conceituam que o conhecimento se constrói com a interação entre os seres humanos e as diferentes tecnologia e caracterizam como constructo seres-humanos-com-mídias.

que apontam claramente o paradigma do exercício (SKOVSMOSE, 2000), como um entrave para o desenvolvimento de condições favoráveis, para que os alunos desenvolvam reflexões a respeito da Matemática em uma sociedade altamente tecnológica que vivemos. Se as aulas de Matemática não conseguem se libertar desse paradigma, as mídias acabam por não cumprir o papel proposto pelo construto seres-humanos-com-mídias, pois tem apenas um papel substitutivo de apresentação de informações na sala de aula.

Para o desenvolvimento da atividade, Kistemann Jr e Canedo Jr (2016), propuseram aos alunos que escolhessem um tema para ser estudado na aula. Um grupo de alunos escolheu o tema viagem e, a princípio, usaram somente a fala para tratar o que sabiam. Em um segundo momento, o professor apresenta aos alunos uma lista de preços obtida na internet com passagens aéreas e rodoviárias. Nesse segundo momento, os autores perceberam como a mídia¹⁰ interferiu no diálogo dos alunos, pois com a lista eles deixaram de lado a oralidade livre do primeiro momento para falas condicionadas ao que estava na tabela, ou seja, as mídias têm influência perceptível. Os autores evidenciaram que apesar das listas sugerirem a unicidade da resposta, algo que remete ao paradigma do exercício, a maneira que a atividade foi encaminhada e o tratamento dos dados se distancia da tradição dos exercícios rotineiros.

Para finalizar, Kistemann Jr e Canedo Jr (2016) destacam que a presença da Modelagem Matemática favorece a construção da autonomia dos estudantes necessária para transitar no novo paradigma dos cenários para investigação.

Os anais da 9ª Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM, 2015) trazem o trabalho de Pagung, Rezende e Lorenzoni (2015) que, embasados na Educação Matemática Crítica, levaram os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental em uma associação de catadores de resíduos e desenvolveram atividades de Modelagem Matemática relacionadas ao conceito de função.

A proposta dos autores foi estruturada em 19 aulas, em que foram exibidos documentários sobre consumo e reciclagem, debates e pesquisas para investigar a partir de que década o índice de resíduos sólidos começou a crescer

¹⁰ Conjunto de diferentes meios com o objetivo de transmitir informação e conteúdos variados.

no Brasil e no mundo, bem como reflexões a respeito dos atuais valores sociais em relação ao consumo.

Na sequência Pagung, Rezende e Lorenzoni (2015), a partir de um questionário que aplicaram aos alunos no final das atividades, categorizaram a atividade em quatro grupos: envolvimento com a atividade, sociabilização, aprendizagem e compreensão da realidade. Em especial, na categoria *compreensão da realidade*, os autores concluem que o objetivo de levar os estudantes a refletir sobre a inteiração da Matemática com a realidade e com a sociedade foi alcançado, visto que, obtiveram alto percentual de resposta, “concordo totalmente”, para as afirmações: “Estudar função a partir de uma situação real ajuda a entender que a Matemática pode estar presente na vida” e “a atividade me levou a conhecer melhor a realidade de outras pessoas e entender que a Matemática também se preocupa com os problemas sociais”

Pagung, Rezende e Lorenzoni (2015) destacam em suas considerações finais que a atividade propiciou participação ativa e comprometimento dos alunos, discussão acerca do cotidiano e conscientização dos estudantes quanto a seu papel na sociedade, características essas que contemplam pressupostos da Educação Matemática Crítica.

Nos anais da X CNMEM (2017), há dois trabalhos que tratam de Modelagem Matemática e Educação Matemática Crítica, de Booni, Lorenzone e Rezende (2017), que analisaram o processo de *empowerment* dos alunos no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática e de Martins e Araújo (2017) que relatam o planejamento de uma atividade de modelagem matemática orientada pelas características¹¹ da Educação Matemática Crítica.

Booni, Lorenzone e Rezende (2017) destacam o desenvolvimento do *empowerment* em uma atividade de Modelagem Matemática. Assim, a partir de atividades desenvolvidas que versam sobre o crescimento urbano da cidade onde se situa a pesquisa (Colatina - ES), os autores analisaram o processo de *empowerment* de um aluno de 7º ano do Ensino Fundamental.

Para iniciar as atividades Booni, Lorenzone e Rezende (2017), aplicaram um questionário para explorar o que os estudantes pensam a respeito do bairro

¹¹ Que foram abordadas no tópico 1.2

onde moram. Para Booni, Lorenzone e Rezende (2017, p. 9) isso proporcionou, “verificar o nível de consciência do estudante e propor uma ação pedagógica coerente com a necessidade de conhecer a importância da infraestrutura urbana e dos serviços básicos que toda comunidade precisa”.

Na sequência, por meio de uma pesquisa e uma palestra, os alunos tiveram informações sobre o processo de loteamento de terrenos, o que “evidencia a aproximação e a compreensão dos estudantes com relação ao crescimento urbano e suas implicações” (BOONI; LORENZONE; REZENDE, 2017, p. 11).

Em uma terceira etapa foi realizada a visita a um dos novos loteamentos do município. Durante a visita, alguns terrenos foram medidos. Dessa forma, Booni, Lorenzone e Rezende (2017, p. 12), destacam, que “os dados obtidos durante a palestra instigam a curiosidade e os dados obtidos com as medições durante a visita permitem a construção dos modelos matemáticos”.

Para concluir, a partir do questionamento de como era possível melhorar o bairro em que se mora e solicitar essas melhorias, Booni, Lorenzone e Rezende (2017), colocam que é:

possível constatar mudanças que aconteceram após o desenvolvimento da prática pedagógica. Os estudos realizados na turma interferiram na forma como este estudante compreendia as condições de vida ao seu redor e possivelmente compreende suas possibilidades de futuro de forma diferente daquela que tinha no questionamento inicial (BOONI; LORENZONE; REZENDE, 2017, p. 14).

O trabalho de Martins e Araújo (2017) aborda o planejamento de uma atividade orientada pelo referencial teórico da Educação Matemática Crítica. As autoras relatam que o desencadear da proposta veio da oportunidade de desenvolver uma atividade de Modelagem Matemática como uma oficina durante o movimento de ocupações das escolas e universidades brasileiras no ano de 2016. Como a ocupação se dava por motivos políticos, o planejamento da atividade considerou discussões do valor do salário mínimo no dia do desenvolvimento da atividade, caso a PEC55¹² fosse aprovada.

¹² Proposta de Emenda Constitucional número 55 que trata da limitação dos gastos públicos por 20 anos.

Nesse contexto, o Grupo de Discussões sobre Modelagem na Educação Matemática (GDMEM), ao qual as autoras fazem parte, de forma colaborativa, iniciou discussões por meio da troca de e-mails, delimitando o que cada participante faria na oficina. As autoras destacam:

Durante o planejamento da oficina foram trocados 38 e-mails entre os participantes do GDMEM, sendo que durante a busca por uma solução do problema, em um período de dois dias (09/11 a 10/11), foram 15 e-mails trocados.[...] Isso reforça a ideia de colaboração e determinação no planejamento da atividade (MARTINS; ARAÚJO, 2017, p. 10).

Em suas reflexões, Martins e Araújo (2017, p. 13) afirmam: “tínhamos como objetivo, por meio da oficina, focar na importância de os estudantes conhecerem as teorias matemáticas e, ao mesmo tempo, saberem como interpretar os resultados quando essas teorias são aplicadas em situações cotidianas”.

No 16° ICTMA (2015), três trabalhos fazem menção à Educação Matemática Crítica: Araújo e Campos (2015b), Rosa e Orey (2015) e Villarreal, Esteley e Smith (2015).

Araújo e Campos (2015b) tratam de uma atividade de Modelagem Matemática que tem como objetivo constituir um espaço de negociação com a perspectiva da Educação Matemática Crítica. As autoras analisam as atividades de um grupo sobre o orçamento do Sistema Único de Saúde (SUS) no estado de Minas Gerais.

Para o desenvolvimento do que as autoras chamam de Projeto de Modelagem, o grupo partiu do confronto entre a divulgação dos gastos com saúde, publicado pelo governo do estado, com o do Sistema de Informação Orçamentária de Saúde Pública (SIOPS). Com a ajuda da professora em um processo de negociação, o grupo se dedica a investigar a diferença entre os gastos em cada ano e fazer uma projeção para os próximos, ao invés de, apenas transformar as informações da tabela em informações gráficas que era a proposta inicial do grupo antes da intervenção da professora.

Com base nessa negociação, Araújo e Campos (2015b) acreditam que se configurou um espaço de negociação e um modelo de cooperação investigativa (CI) semelhante ao proposto por Alrø e Skovsmose (2000). Além disso, no

diálogo entre a professora e o grupo, foi possível evidenciar um combate à presença da Ideologia da Certeza em Educação Matemática (BORBA; SKOVSMOSE, 2001), no fato de, a princípio, o grupo olhar para os dados como algo inquestionável e posteriormente a professora ajudá-los a ver além dos dados coletados.

O trabalho de Rosa e Orey (2015), respaldado em diversos autores incluindo Skovsmose, trata da importância de uma dimensão social crítica na Modelagem Matemática, essa união ajuda os alunos a desenvolverem sua eficiência social-crítica.

Os autores colocam que, para que os alunos desenvolvam sua eficiência social-crítica, é preciso que sejam realizadas propostas pedagógicas. Para tanto, constroem um ciclo de Modelagem, o qual denominam de Ciclo de Modelagem Matemática SocioCrítico, que mostra como se configuram os atributos sociais nesse processo (Figura 2, p. 22).

Rosa e Orey (2015) ainda apontam que a dimensão social-crítica, facilita as competências e habilidades necessárias para que professores e estudantes desempenhem um papel transformador na sociedade.

Villarreal, Esteley e Smith (2015), professores da Universidade de Córdoba na Argentina, relatam a utilização da Educação Matemática Crítica em projetos de Modelagem Matemática com licenciandos em Matemática no estágio.

Os autores analisam parte do trabalho de um dos 11 grupos de alunos que desenvolveram o estágio. Todos os trabalhos desenvolvidos tinham que ter relação com problemas sociais. O grupo analisado optou por estudar a coleta de recicláveis. A escolha do tema se deu pelo fato de Córdoba ter problemas quanto à coleta de lixo reciclável. Durante o processo de modelagem, os estudantes relatam que seu projeto pode ajudar na conscientização das pessoas sobre o tema, o que mostrou a preocupação social nesse processo.

Villarreal, Esteley e Smith (2015) concluem, ressaltando que tanto os licenciandos do estudo, quanto os demais, poderão construir futuramente projetos de Modelagem Matemática com uma perspectiva sociocrítica. E ainda,

o projeto proporcionou reflexões sobre a própria Matemática, sobre criação de modelos e seu papel na sociedade.

No 17º ICTMA (2017), dois trabalhos fazem relação entre a Modelagem Matemática e a Educação Matemática Crítica: Doerr et al. (2017) e Orey e Rosa (2017).

Doer et al. (2017) enfatizam a importância que os modelos matemáticos têm em todos os níveis sociais e por isso a Modelagem Matemática se faz um importante tópico em Educação Matemática. Os autores destacam que as representações sobre a Modelagem Matemática estão frequentemente atreladas aos ciclos de modelagem e, dessa forma, defendem que dada a influência da Matemática na sociedade o ciclo deve contemplar atributos que tratem dessas influências. Para tanto se apoiam na abordagem sociocrítica de Barbosa (2001) e corroboram com o ciclo apresentado por Rosa e Orey (2015) (Figura 2, p. 22).

Em suas considerações finais, Doer et al. (2017), articulam sobre a necessidade de múltiplas representações dos ciclos para que o processo de Modelagem Matemática extrapole a construção e validação de modelos e levem os estudantes a uma relevante compreensão da atuação dos modelos matemáticos na sociedade.

Em sua pesquisa, Orey e Rosa (2017) relatam a utilização da Modelagem Matemática em um curso à distância, com foco no desenvolvimento crítico e reflexivo, quando os estudantes estão envolvidos na construção de soluções de significado social. O contexto da pesquisa é a disciplina de Seminários de Modelagem Matemática, oferecida à distância pela Universidade Federal de Ouro Preto. Para atingir o objetivo de desenvolver o senso crítico e reflexivo desses alunos, Orey e Rosa (2017) se valem do que apregoa a perspectiva sociocrítica da Modelagem Matemática, pois, de acordo com os autores, é possível que “os estudantes desenvolvam habilidades que os ajudem no processo de informação e definição essencial de estratégias e para agir objetivando a transformação da realidade” (OREY; ROSA, 2017, p. 580. tradução nossa).

Aproveitando o desencadear de protestos sobre o aumento do preço da passagem do transporte público em 2013 no Brasil, Orey e Rosa (2017),

propuseram para os alunos de 8 dos 31 pólos que, por cinco semanas, acompanhassem os passos do protesto. Os alunos, neste período, discutiram nos fóruns e durante duas semanas mantiveram contato com os tutores sobre o que estavam trabalhando.

Os autores descrevem no trabalho o problema investigado por um grupo de 5 estudantes que propuseram: *Qual seria o preço justo da passagem de ônibus, considerando a renda per capita de cada cidade?* O grupo utilizou para identificar que o preço justo com o gasto com transporte é em torno de 7% da renda, construindo o modelo matemático apresentado na Figura 3.

Figura 3 – Modelo Preço da Passagem

$$\begin{array}{l} \text{TP} = \frac{\text{PCI} \times 0.07}{48} \\ \text{TP} = \text{Passagem} \\ \text{PCI} = \text{Renda per capita} \end{array}$$

Fonte: Orey e Rosa (2017).

Orey e Rosa (2017) destacam que a distância não impossibilitou as discussões. Nesse contexto virtual, as discussões sobre o problema emergiram de forma satisfatória levando um entendimento da situação que vai além do modelo matemático.

Além do BOLEMA e dos anais de eventos, buscamos teses e dissertações que tratam de Modelagem Matemática e Educação Matemática Crítica, compreendidas entre os anos de 2012 e 2017, utilizando como palavras-chave: social, crítica e educação matemática crítica. Neste levantamento foram encontradas 3 teses e 11 dissertações que continham essas palavras. Desse conjunto, as teses de Freitas (2013) e Campos (2018), fazem uso da Modelagem Matemática e da Educação Matemática Crítica no desenvolvimento de seus trabalhos.

Freitas (2013), em sua tese, defende que, “para além de utilizar a modelagem como uma estratégia de ensino, a modelagem, na concepção da Educação Matemática Crítica, assume a preocupação de desenvolver junto aos alunos, o poder de análise da realidade sociocultural dos mesmos” (FREITAS, 2013, p. 20).

Com o entendimento supracitado e com o intuito de investigar como se dão os processos de matematização em projetos de Modelagem, Freitas (2013), realizou sua pesquisa com alunos do terceiro ano do Ensino Médio integrado do Instituto Federal de Minas Gerais (IFMG) - Campus de Congonhas.

O projeto de Modelagem contou com 13 encontros em contraturno escolar, cujo tema abordado era a importância da mineração para o desenvolvimento do Alto Paraopeba. No desenvolvimento do projeto foram abordados, os royalties, os impostos e a implicação destes nas receitas das cidades da região, e nesse contexto abordaram as questões ambientais e de aplicação de recursos públicos.

Após a construção de um modelo logístico, amparado pela utilização de mídia, um debate entre os participantes do projeto e a comunidade, fez com que se atingisse uma das características da Educação Matemática Crítica. Nas palavras de Freitas (2013, p. 209), “aproximar as pessoas de uma atuação mais sistemática em processos de decisórios de relevância sociopolítica carrega a ideologia que alimenta o processo educativo vislumbrado pela mesma”.

Campos (2018), seguindo as características da Educação Matemática Crítica, desenvolveu atividades de Modelagem Matemática com alunos do 3º ano do Ensino Médio Integrado do IFMG Campus de Governador Valadares, em que, por meio da Teoria da Atividade analisa a divisão do trabalho nesse contexto.

A autora, orientada pelo caso 3¹³ de Barbosa (2001), em que todas as etapas do processo de Modelagem são feitas em comum acordo entre professor e aluno, desenvolveu atividades que versavam sobre o tema de meio ambiente. Campos (2018, p. 89) ressalta que, “buscava estabelecer relações com outras disciplinas do curso e com o conhecimento específico da área técnica”.

O ambiente de aprendizagem de Modelagem proposto por Campos (2018), teve cinco encontros com duração de 50 minutos, e se realizaram em

¹³ Barbosa (2001) caracteriza 3 casos para o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, e em cada caso a autonomia dos alunos aumenta no que diz respeito às etapas do processo de Modelagem Matemática. O caso 3 consiste naquele em que professor e alunos trabalham em conjunto na formulação da situação-problema, na simplificação, na coleta de dados qualitativos e quantitativos e na resolução da situação-problema, ou seja, em todas as etapas do processo de Modelagem Matemática.

sala de aula e no laboratório de informática. Os 25 alunos da sala foram divididos em 4 grupos, cujos temas escolhidos foram: recuperação da áreas degradadas presentes nas dependências do IFMG - Campus Governador Valadares; aproveitamento da água da chuva no IFMG - Campus Governador Valadares; quantidade de resíduos sólidos produzidos no IFMG - Campus Governador Valadares: o volume de lixo enviado ao aterro sanitário e a reciclagem; cálculo do tempo de retorno monetário do investimento inicial para implantação do sistema fotovoltaico no IFMG - Campus Governador Valadares.

Na análise dos dados, utilizando a Teoria da Atividade, Campos (2018) buscou identificar como se dava a divisão do trabalho e, com isso, evidencia que:

Diante da forte tradição da Educação (Matemática) escolar, houve oscilações nas ações desses sujeitos que favoreceriam ou não romper com essa tradição, propiciando aproximações ou distanciamentos com o que propõe a EMC¹⁴. Além disso, essas oscilações estavam presentes nas ações da professora e da pesquisadora (CAMPOS, 2018, p. 225).

Essa revisão de literatura nos orientou para que fosse possível construir atividades que se enquadrassem na perspectiva sociocrítica a qual estávamos interessados em trabalhar, ou seja, atividade com elementos sócio-político-econômicos.

A revisão de literatura nos inspirou no planejamento das atividades a serem desenvolvidas. Assim como Martins e Araújo (2017) que discutiram o planejamento de uma atividade sobre a PEC55 e Orey e Rosa (2017) que elaboraram uma atividade baseada nos protestos sobre a passagem de ônibus, procuramos desenvolver atividades que têm um impacto social semelhantes, às atividades desenvolvidas por esses autores.

Os trabalhos de Mello (2014), Litting e Alves (2016) e Booni, Lorenzone e Rezende (2017), nos trouxeram a importância de também desenvolver uma atividade que se aproximasse da realidade dos alunos, sujeitos de nossa pesquisa.

Os demais trabalhos nos nortearam acerca de como manter a referência quanto às características que são inerentes a atividades que tratem de

¹⁴ Educação Matemática Crítica.

Modelagem Matemática, subsidiadas pela Educação Matemática Crítica e que se enquadram na Perspectiva Sociocrítica de Modelagem Matemática.

Recentemente, em 2017, foi lançada uma edição especial sobre Educação Matemática Crítica, na Revista Paranaense de Educação Matemática. No prefácio, os organizadores destacam que a proposta desse volume temático partiu de uma discussão no I Colóquio de Pesquisa em Educação Matemática Crítica em 2016, resultando em uma edição que conta com uma diversidade de 16 artigos científicos e 2 relatos de experiência, advindos de diferentes estados brasileiros e de outros três países (Áustria, Colômbia e Dinamarca). O que mostra a importância das pesquisas que abordam Educação Matemática Crítica, nas mais diversas perspectivas da Educação Matemática.

Desse conjunto de trabalhos, dois tratam de Modelagem Matemática: Mesquita e Ceolim (2017) e Araújo e Martins (2017).

Mesquita e Ceolim (2017) fazem um levantamento teórico dos trabalhos que abordam a Educação Matemática Crítica e Modelagem Matemática nos anais da VIII e IX CNMEM. Os autores utilizaram a análise textual discursiva para analisar concepções atribuídas à Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática Crítica. Da análise emergiram três categorias:

- i) compreensão de situações da realidade com motivação para aprendizagem por meio da Modelagem Matemática; ii) interatividade e democracia por meio da Modelagem Matemática; iii) desenvolvimento de competência crítica e autonomia a partir do conhecimento reflexivo possibilitado pela Modelagem Matemática (MESQUITA; CEOLIM, 2017, p. 295).

Mesquita e Ceolim (2017) concluem que as diferentes concepções convergem para a questão da democracia como se apresentam as ideias abordadas nas obras de Ole Skovsmose, em que a interação professor/alunos e alunos/alunos são fundamentais.

Araújo e Martins (2017) descrevem o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática em uma oficina durante o movimento de ocupações das escolas e universidades brasileiras no ano de 2016.

Como a ocupação se dava por motivos políticos, discutir isso por meio da Modelagem Matemática com o respaldo da Educação Matemática Crítica é a efetivação da Matemática em Ação (SKOVSMOSE, 2001). O planejamento e a

atividade desenvolvida tiveram como norteador qual seria o valor do salário mínimo na data da realização da atividade, caso a PEC55 que tratava dos gastos públicos fosse aprovada.

Nossa pesquisa se situa em um contexto propício para o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática respaldados pela Educação Matemática Crítica, visto que, os sujeitos da pesquisa estão inseridos em ambiente físico que tem como objetivo promovê-los socialmente. Nesse sentido, as atividades da aula de Matemática também precisam estar em consonância com esse objetivo, contribuindo para um desenvolvimento que leve os estudantes a compreenderem os acontecimentos à sua volta.

Assim como nos trabalhos citados, nossa pesquisa alia Modelagem Matemática e Educação Matemática Crítica. No capítulo a seguir tratamos com detalhes como se deu o desenvolvimento da pesquisa e como tratamos a análise e a coleta de dados.

2. Metodologia e contexto da pesquisa

Neste capítulo apresentamos o contexto de nossa pesquisa bem como a descrição de quantas aulas foram utilizadas para o desenvolvimento das atividades, como se deu a coleta de dados e a metodologia de pesquisa empregada.

2.1 Contexto da pesquisa

Para desenvolver atividades de modelagem matemática subsidiadas pela Educação Matemática Crítica, o ambiente escolhido foi a Escola de Desenvolvimento Humano Casa do Caminho (EDHUCCA), situada em Apucarana/Paraná. Trata-se de uma entidade sem fins lucrativos que oferece qualificação profissional, através de cursos gratuitos, para jovens e adultos e um projeto de socialização infantil, em contraturno escolar para crianças e adolescentes, em vulnerabilidade social, que conta com oficinas de teatro, dança, música, esporte e reforço escolar.

A Escola de Desenvolvimento Humano Casa do Caminho (EDHUCCA), foi fundada em 24 de julho de 2001 para substituir a entidade filantrópica antes denominada Albergue Noturno Casa do Caminho, criado em 1957. O fluxo de usuários diminuiu drasticamente com o desenvolvimento regional e a estruturação dos municípios vizinhos, sendo assim, para utilizar as instalações já existentes de maneira mais útil surgiu a EDHUCCA.

A EDHUCCA tem como seus principais mantenedores o Grupo Espírita Mensageiros da Paz, e repasses de financeiros advindos de parcerias com o poder público em suas três esferas – municipal, estadual e federal – além de bazares e promoções diversas para arrecadar fundos e poder acolher da melhor maneira possível seus alunos.

No projeto de socialização infantil, além dos professores de Língua Portuguesa, Matemática, Teatro, Dança, Música e Esporte, até o ano de 2017, diversos voluntários participavam de outras atividades com alunos com a finalidade ajudar na formação cidadã dos alunos participantes do projeto.

No reforço escolar, a aula de matemática, durante o ano de 2017, foi realizada semanalmente às terças-feira, com 1 aula de 50 minutos. Os alunos

que frequentavam as aulas tinham idade entre 12 e 17 anos e estavam divididos em duas turmas conforme o Quadro 1.

Quadro 1 – Alunos por turma que frequentavam a EDHUCCA em 2017

| Turma | Quantidade de alunos | | | | | Total |
|-------|----------------------|--------|--------|-----------|----------|-------|
| | 7º ano | 8º ano | 9º ano | 1º ano EM | 2ºano EM | |
| 1 | 1 | 1 | 5 | 4 | | 10 |
| 2 | | | | 10 | 3 | 13 |

Fonte: Os autores.

A coleta de dados se iniciou no segundo semestre de 2017, totalizando 13 aulas de 50 minutos. Nesse período foram desenvolvidas 3 atividades, conforme descrito no Quadro 2. E entre uma atividade e outra tivemos aulas de reforço específicas para cada ano de acordo com os conteúdos abordados na escola.

Quadro 2 – Atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas

| Atividade | | Turma | Número de Aulas |
|-----------|---------------------------|-------|-----------------|
| 1 | Mudança tarifária da água | 2 | 4 |
| 2 | Desperdício de Comida | 1 | 5 |
| | | 2 | |
| 3 | Tarifa Branca | 1 | 4 |
| | | 2 | |

Fonte: Os autores.

Em nossa pesquisa analisamos os dados referentes à turma 2 formada por 13 alunos, com idades entre 15 e 17 anos. O Quadro 3, mostra a divisão dos grupos que desenvolveram cada atividade e seus respectivos participantes (nomes fictícios). Na atividade Tarifa Branca, alguns alunos haviam saído do projeto e para não comprometer os grupos, a atividade foi desenvolvida com todos os alunos juntos.

Quadro 3 – Divisão dos grupos da turma 2

| Atividade | Grupo que desenvolveu | |
|---------------------------|--|--|
| Mudança tarifária da água | Grupo 1 Fábio, Laura, Marcos, Rosane, Taís e Vitor | Grupo 2 Ana, Beatriz, Francisco, Felipe, Heloísa, Renata e Vinícius |
| Desperdício de Comida | Grupo 1 Fábio, Laura, Marcos, Rosane, Taís e Vitor | Grupo 2 Ana, Beatriz, Francisco, Felipe, Heloísa, Renata e Vinícius |

| | |
|---------------|--|
| Tarifa Branca | Turma toda Laura, Marcos, Beatriz, Francisco, Heloísa, Renata e Vinícius. |
|---------------|--|

Fonte: Os autores.

Para a análise, utilizamos a produção escrita dos alunos, a gravação do áudio dos grupos, utilizando gravadores, e as anotações feitas pelo professor ao final de cada aula. Para tanto, destacamos a devida autorização da escola (Anexo 1), para o uso dos registros escritos, imagens e áudio dos estudantes, e para preservarmos a identidade dos alunos utilizamos nomes fictícios ao longo do texto. O foco das análises está nos diálogos que emergiram no desenvolvimento das atividades, pois compartilhamos do entendimento de que atividades de modelagem matemática possibilitam a emersão de diálogos e de que estes contribuem para a aprendizagem (ALRØ; SKOVSMOSE, 2001; FERRUZZI; ALMEIDA, 2015; SOARES; VIER, 2017; COSTA, 2018).

Nas análises também apresentamos os ciclos de Modelagem Matemática, baseados nos Ciclo de Modelagem Matemática de Almeida e Silva (2012) e Rosa e Orey (2015), as etapas e as variáveis que constituem os ciclos de Modelagem Matemática, orientam os encaminhamentos das nossas atividades. Assim para cada atividade construímos um ciclo que identifica as etapas e variáveis, afim de melhor compreender como as atividades de modelagem podem contribuir para o desenvolvimento social dos alunos envolvidos.

A descrição detalhada de cada aula que compõe a nossa pesquisa está apresentada no Quadro 4.

Quadro 4 – Descrição das aulas

| Aula | Data | Encaminhamento da aula | Alunos presentes |
|------|------------|--|------------------|
| 1 | 15/08/2017 | <ul style="list-style-type: none"> • Divisão em dois grupos. • Início do desenvolvimento da atividade 1. • Entrega da reportagem com a tabelas tarifárias de água. • Discussão de como a Matemática estava inserida na situação, bem como utiliza a Matemática para compreendê-la. | 13 |
| 2 | 22/08/2017 | <ul style="list-style-type: none"> • Mais discussões sobre as mudanças na tarifa de água. • Definição do problema a ser estudado. | 11 |
| 3 | 29/08/2017 | <ul style="list-style-type: none"> • Construção de um modelo que descreve e responde o problema definido na aula anterior. | 7 |
| 4 | 05/09/2017 | <ul style="list-style-type: none"> • Apresentação de cada grupo sobre o problema investigado. | 10 |

| | | | |
|----|------------|---|----|
| | | <ul style="list-style-type: none"> • Discussão final sobre a atividade. • Finalização da atividade 1. • Decisão sobre o próximo tema a ser investigado, emergindo: desperdício de comida e energia elétrica. | |
| 5 | 19/09/2017 | <ul style="list-style-type: none"> • Início do desenvolvimento da atividade 2. • Planejamento para a coleta de dados sobre o desperdício de comida na instituição. | 10 |
| 6 | 26/09/2017 | <ul style="list-style-type: none"> • Apresentação de vídeos sobre o desperdício¹⁵. • Primeira coleta de dados empíricos. • Reflexão sobre consumo consciente. | 10 |
| 7 | 03/10/2017 | <ul style="list-style-type: none"> • Definição do problema a ser investigado referente à atividade 2. | 7 |
| 8 | 10/10/2017 | <ul style="list-style-type: none"> • Etapa de matematização. • Necessidade de uma nova coleta de dados empíricos. | 8 |
| 9 | 17/07/2017 | <ul style="list-style-type: none"> • Nova coleta de dados com massa de todos os pratos. • Apresentação dos resultados de cada grupo. | 10 |
| 10 | 24/10/2017 | <ul style="list-style-type: none"> • Início da atividade 3 sobre energia elétrica. • Pesquisa no laboratório de informática sobre produção e transmissão de energia. | 8 |
| 11 | 31/10/2017 | <ul style="list-style-type: none"> • O que é a tarifa branca. • Descrição sobre os horários que cada um mais usa a energia elétrica. • Investigar o consumo de energia elétrica durante o banho. | 6 |
| 12 | 07/11/2017 | <ul style="list-style-type: none"> • Cálculo do consumo de cada pessoa da família durante o banho. | 7 |
| 13 | 14/07/2017 | <ul style="list-style-type: none"> • Reflexão sobre a decisão de aderir a tarifa branca. • Apresentação e discussão dos resultados. | 7 |

Fonte: Os autores.

As atividades desenvolvidas objetivavam apresentar reflexões à questão de pesquisa: *que características da Educação Matemática Crítica são reveladas nos diálogos dos alunos quando desenvolvem atividades de Modelagem Matemática?* Bem como na elaboração do produto educacional, cuja descrição apresentamos no capítulo 5

Na sequência trazemos a metodologia de pesquisa.

2.2 Aspectos Metodológicos

Levando em consideração os aportes teóricos da pesquisa qualitativa e o contexto de nossa pesquisa, optamos pela metodologia de análise Árvore de Associação de Ideias (SPINK, 2010; 2013). Para a autora, “a construção das Árvores de Associação visa dar visibilidade ao encadeamento de repertórios nos

¹⁵ <https://www.youtube.com/watch?v=eLq3GzSDnZc>
<https://www.youtube.com/watch?v=reOBks5UR3Q>
Acessados em 29/09/2017.

trechos que nos parecerem ser mais ilustrativos dos fenômenos em estudo” (SPINK, 2010, p. 41).

As ideias são construídas a partir das interações feitas entre as pessoas as quais demandam do uso de uma linguagem. Spink (2010) conceitua a linguagem em uso como práticas discursivas, e para a autora “o interesse maior é no papel da linguagem na interação social” (SPINK, 2016, p. 26).

Nas bases da metodologia, Spink (2010) coloca as práticas discursivas, onde o foco está na linguagem, assim, a produção de sentido:

é uma prática social, dialógica, que implica a linguagem em uso. A produção de sentido é tomada, portanto, como um fenômeno sociolinguístico – uma vez que o uso da linguagem sustenta as práticas sociais geradoras de sentido - e busca entender tanto as práticas discursivas que atravessam o cotidiano (narrativas, argumentações e conversas, por exemplo), como os repertórios utilizados nessas produções discursivas (SPINK, 2013, p. 3).

Nesse contexto, Spink (2010, p. 39), ainda destaca que os diálogos são “uma atividade bastante complexa que envolve uma série de estratégias de fala” e as Árvores de Associação de Ideias “constituem um recurso para entender como determinado argumento é construído no afã de produzir sentido num contexto dialógico” (SPINK, 2013, p. 70).

Para Spink (2013) é preciso fazer o encadeamento das associações de ideias de maneira que se trabalhe a dialogia da produção de sentido, e no desenvolver da pesquisa os seguintes passos:

Como é comum em pesquisas que buscam entender o sentido dos fenômenos sociais, a análise inicia-se com uma imersão no conjunto de informações coletadas, procurando deixar aflorar os sentidos, sem encapsular os dados em categorias, classificações ou tematizações definidas *a priori*. Não que essas categorias, classificações e tematizações apriorísticas não façam parte do processo de análise; contudo, na perspectiva conversacional de análise, tais processos de categorização não são impositivos. Há um confronto possível entre sentidos construídos no processo de pesquisa e de interpretação e aqueles decorrentes da familiarização prévia com nosso campo de estudo (nossa revisão bibliográfica) e de nossas teorias de base (SPINK, 2013, p. 62).

Sendo assim, Spink, (2013, p. 70) pontua que as Árvores de Associação de Ideias trazem a possibilidade de “entender as singularidades da produção de sentido, presas tanto à história de cada pessoa quanto à dialogia intrínseca do processo”. Portanto, essa metodologia permite dar visibilidade ao processo de interpretação.

No que tange ao processo de interpretação, Spink (2013) afirma que durante o tempo todo percurso da pesquisa estamos imersos no processo de interpretação, a interpretação emerge como elemento do processo de pesquisa.

As Árvores que construímos para cada grupo em cada atividade, tem como “raízes”, a Matemática, a Educação Matemática Crítica e a Modelagem Matemática, as ideias dos alunos se configuram como os galhos da árvore que se entrelaçam e delineiam os características que emergiram da atividade.

A seguir apresentamos a descrição e análise das atividades desenvolvidas.

3. Descrição e análise das atividades desenvolvidas

Com a finalidade de evidenciar que características da Educação Matemática Crítica são reveladas nos diálogos dos alunos quando desenvolvem atividades de Modelagem Matemática realizamos a análise dos diálogos que emergiram no desenvolvimento de três atividades de modelagem matemática desenvolvidas.

3.1. Descrição e análise da atividade 1 - Mudança tarifária da água

A atividade 1 teve início no dia 15/08/2017 e foi finalizada em 05/09/2017. A situação-problema escolhida pelo professor foi sobre a mudança na forma de cobrança da tarifa de água no estado do Paraná. Com os 13 alunos divididos em dois grupos um com 7 e outro com 6 participantes, o professor entregou uma manchete e as tabelas como apresentado na Figura 4.

Figura 4 – Situação-Problema da Atividade 1: Mudança Tarifária da Água

Sanepar inaugura um novo método de composição tarifária para os consumidores que pagam o valor mínimo. A partir de agora, todos os usuários da empresa têm que pagar um valor mínimo de 5 metros cúbicos. (Tribuna Paraná, 24/05/2017).

Tabela 1. Tarifa antes da mudança

| TARIFA NORMAL | | | |
|--|-----------------------|--|---|
| RESIDENCIAL | Até 10 m ³ | Excedente a 10m ³ | Excedente a 30m ³ |
| ÁGUA Todas as Localidades Operadas | 33,74 | 5,06/m ³ | 8,63/m ³ |
| Curitiba ESGOTO – 85% ÁGUA E ESGOTO | 28,68 62,42 | 4,30/m ³ 9,36/m ³ | 7,34/m ³ 15,97/m ³ |
| Demais Localidades ESGOTO – 80% ÁGUA E ESGOTO | 26,99 60,73 | 4,05/m ³ 9,11/m ³ | 6,90/m ³ 15,63/m ³ |

Tabela 2. Tarifa após a mudança

| TARIFA RESIDENCIAL NORMAL | | | | | | |
|------------------------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| | Até 5 m ³ | 6 a 10 | 11 a 15 | 16 a 20 | 21 a 30 | > 30 |
| ÁGUA Todas as Localidades Operadas | 32,90 | 1,02 /m ³ | 5,67 /m ³ | 5,70 /m ³ | 5,75 /m ³ | 9,72 /m ³ |
| Curitiba ESGOTO | 27,97 | 0,97 /m ³ | 4,82 /m ³ | 4,85 /m ³ | 4,89 /m ³ | 8,26 /m ³ |
| Curitiba ÁGUA E ESGOTO | 60,67 | 1,89 /m ³ | 10,49 /m ³ | 10,65 /m ³ | 10,64 /m ³ | 17,98 /m ³ |
| Demais Localidades ESGOTO | 26,32 | 0,92 /m ³ | 4,54 /m ³ | 4,56 /m ³ | 4,60 /m ³ | 7,78 /m ³ |
| Demais Localidades ÁGUA E ESGOTO | 59,22 | 1,84 /m ³ | 10,21 /m ³ | 10,26 /m ³ | 10,35 /m ³ | 17,50 /m ³ |

Fonte: Dos autores (Adaptado de Tribuna do Paraná e Sanepar).

A partir dessas informações, o professor pediu aos alunos que, em grupo, discutissem como a Matemática está presente nessa situação.

Na sequência excertos de discussões dos alunos do Grupo 1, com 6 alunos, Fábio, Laura, Marcos, Rosane, Taís e Vitor, são transcritos.

Prof: *Então pessoal, como nós podemos usar a matemática para fazer uma leitura dessa situação?*

Laura: *Dá pra tirar a diferença, quanto que mudou lá, dá pra sei lá, matemática faz tanta coisa, né?*

Fábio: *Dá pra tirar a porcentagem do tanto de água que eles estão usando.*

Prof: *Então, vamos tentar fazer isso?*

Laura: *A minha ideia é mais fácil que a sua [risos].*

Fábio: *Qual é a sua?*

Laura: *Ver a diferença, tipo...*

Fábio: *Dá pra fazer a comparação disso aqui? [apontando para as colunas das tabelas]*

Laura: *É, mas no primeiro só tem três quadros, no outro tem seis.*

Essas discussões têm características de diálogos, estabelecer contato, perceber, reconhecer, posicionar-se, pensar alto, reformular, desafiar e avaliar, como caracterizado por Alrø e Skovsmose (2010).

Ao usar a frase na primeira pessoa do plural, o professor sugere aos alunos que vai ajudá-los na resolução da atividade, estabelecendo contato com a equipe, que é a primeira característica do diálogo. As respostas dos alunos na sequência mostram que o convite a trabalhar com a atividade foi aceito. Para Ferruzzi e Almeida (2015, p. 381), “este estabelecimento pode ser observado por meio de: apoio, questões investigativas acompanhadas de retorno, confirmações recíprocas, preocupações com o entendimento do outro, etc”.

Quando Laura afirma: “*minha ideia é mais fácil*”, está se **posicionando**, defendendo sua ideia sem descartar a ideia de Fábio, “*dá pra tirar a porcentagem*”. A ideia de Fábio também é válida, e os dois continuam a conversação, afim de fazer uma leitura Matemática da situação, mantendo o diálogo. Segundo Ferruzzi e Almeida (2015, p. 382), “**posicionar-se** [...] não significa tentar convencer o outro de sua posição (até porque um *diálogo* é permeado de respeito), e sim, estar aberto às outras perspectivas e à reavaliação de seu ponto de vista”.

Os alunos mostram seu posicionamento após concluírem as diferenças como vemos no diálogo transcrito a seguir:

Laura: *Mas tipo aqui, ele tá gastando menos e tá pagando praticamente o mesmo valor.*

Prof: *E com isso podemos concluir algo?*

Marcos: *Que agora tá mais caro?*

Fábio: *Não, tá mais barato.*

Marcos: *Não, porque antes eram dez metros cúbicos.*

Laura: *Não porque agora, ele só tipo aumentaram os negócios só, porque aqui era só três, agora é mais.*

Marcos: *Aqui era dez agora é cinco, aqui ele pagou trinta e três reais aqui e ele pagou trinta e dois.*

Laura: *Então, foi pra seis a onze?*

Marcos: *Antigamente a pessoa gastava dez metros cúbicos e pagava trinta e três [reais] e hoje em dia gasta cinco metros cúbicos e paga trinta e dois [reais].*

Rosane: *Em casa a gente pagava sessenta e três reais, certinho, e veio cem reais. Minha avó quase me estrangulou!*

Fábio: *Tá praticamente o mesmo valor, só que é pela metade. É sim. Olha aqui oh [apontando para as informações na folha de papel], o primeiro por dez metros cúbicos que eles gastavam, eles pagavam trinta e três e setenta e quatro, e no segundo ele tá pagando praticamente o mesmo valor só que tá gastando pela metade, ficou mais caro.*

Nesse diálogo percebemos que o posicionamento dos colegas à ideia contrária apresentada por Fábio o levou a outra característica que é a de **reformular**. Fábio escuta os argumentos dos colegas e faz uma reflexão sobre os dados encontrados o que, posteriormente, o leva também a concluir que para aquela ocasião a conta de água ficou maior. Ferruzzi e Almeida (2015, p. 382), destacam que “para o bom andamento de um diálogo e tentativa de construir uma perspectiva comum, é essencial compartilhar o que se sabe, e, neste sentido, ideias devem ser ouvidas e argumentos analisados”.

Em outro diálogo, cuja transcrição apresentamos a seguir, evidenciamos que a atividade levou os estudantes a refletirem sobre outras coisas, enquanto se posicionavam quanto à mudança na forma de cobrança da tarifa de água:

Rosane: *No outro dia passou um tiozinho no jornal da rádio que eu escuto, aí o tiozinho estava reclamando assim, que eles cortaram a metade, mas não cobravam a metade, então o valor da água devia ser a metade. Agora eu entendi o que o tiozinho estava querendo dizer, porque ele estava maior revoltado.*

Marcos: *Mas antigamente a pessoa pagava trinta e três reais em dez metros cúbicos e hoje ela paga quase o mesmo valor em cinco metros cúbicos. Tipo se ela fosse gastar dez metros cúbicos ela ia pagar setenta reais quase. Ia ser pior ela ia tá perdendo.*

Fábio: *Nossa "véio", dobraram o preço, imagina se fizessem isso com a gente de verdade.*

Rosane: *Mas já tá valendo.*

Laura: *É já tá em vigor isso aí.*
Rosane: *Desde o mês passado.*
Fábio: *Mas não sou eu quem pago.*
Rosane: *É a sua mãe, com o dinheiro que ela paga a mais ela podia te dar alguma coisa.*
Laura: *Ela podia comprar uma bolacha.*
Marcos: *Um quilo de carne, um macarrão.*
Rosane: *Um refri, uma coxinha.*

Na fala de Rosane, sobre o que ela escutou na emissora de rádio, fica evidente de como a atividade contribuiu para que ela compreendesse uma situação a qual a ela em primeiro momento não fazia sentido, o que corrobora com Barbosa (2003). Para o pesquisador, para a construção de uma sociedade democrática, é necessário que as pessoas sejam capazes de participar de debates públicos com decisões pautadas/ratificadas pela Matemática, características defendidas pela Educação Matemática Crítica.

E como se trata de uma atividade de modelagem matemática, por meio dos diálogos também foram evidenciadas partes do ciclo de modelagem, conforme apresentado nas Figura 1 e Figura 2. Isso fica claro no diálogo transcrito a seguir.

Fábio: *A gente que tem que criar o que a gente quer saber.*
Laura: *Mas o que a gente quer saber?*
Marcos: *Dá para descobrir quanto eles gastam em metros cúbicos.*
Fábio: *Ou se seria bom ou ruim pra a população, essa mudança.*
Laura: *Mas pra descobrir o que é bom ou ruim é só olhar, não precisa nem de conta.*
Fábio: *Mas é bom fazer a conta para expressar para as pessoas.*
Marcos: *Falar tipo assim, antigamente, a pessoa pagava tanto em um metro cúbico e agora paga tanto. Dá, pra fazer isso, a gente descobre quanto ela pagava aqui em um metro cúbico e aqui também [apontando para as duas tabelas apresentadas nas informações que receberam].*
Laura: *Com a mudança, ele paga mais, gastando menos.*
Marcos: *E descobre quanto que se paga a mais.*
Fábio: *A tabela não é clara!*
Prof: *Mas do jeito que vocês escreveram aqui, vocês tão fazendo o quê?*
Laura: *Especificando o que esses números querem dizer!*
Marcos: *Em vez de vir marcado assim, podia fazer o valor em reais, tipo de treze metros cúbico, dá quanto em reais?*

Neste diálogo evidenciamos que a partir de uma situação-problema, os alunos se inteiram da mesma com o intuito de formular um problema a ser investigado, quando eles decidem que devem fazer algo para mostrar para a população como ficou a mudança. Com essa intenção, argumentam que as tabelas apresentadas pelo serviço de água e esgoto do Paraná não são claras e optam por especificar o valor a ser pago para cada metro cúbico. Em um primeiro momento, constroem um quadro considerando intervalos de água utilizada, como mostra a Figura 5. Todavia, parecem também não compreender que o valor adicionado é por metro cúbico gasto a mais dentro do intervalo. Para expressar o valor do intervalo entre 6 e 10, adicionam apenas R\$ 1,02, para o intervalo de 11 a 15, adicionam R\$ 5,67, e R\$ 5,75 para o intervalo de 16 a 20. Neste caso os alunos estavam tomando como base os 5 primeiros metros cúbicos e adicionando o valor a cada metro cúbico dos intervalos seguintes como um só.

Figura 5 – Esboço do modelo considerando equivocadamente os intervalos atividade 1 – grupo 1

| | | 5 | 6 a 10 | 11 a 15 | 16 a 20 |
|-------------------------------------|-----------------|-------|--------|---------|---------|
| Água, todas as localidades operadas | | 32,90 | 33,92 | 38,57 | 39,60 |
| Árbitria | Esgoto | 27,97 | 28,84 | 32,79 | 32,82 |
| | Água e Esgoto | 60,87 | 62,76 | 71,36 | 71,42 |
| Demais localidades | Esgoto | 26,32 | 27,14 | 30,86 | 30,88 |
| | Água e Esgoto | 59,22 | 61,06 | 69,43 | 69,48 |
| | Esgoto → | | | 38,15 | 42,62 |
| | Água e Esgoto → | | | 32,86 | 36,22 |
| | Esgoto → | | | 74,51 | 78,85 |
| | Água e Esgoto → | | | 30,92 | 34,10 |
| | | | | 69,57 | 76,72 |

Fonte: Relatório dos alunos.

Sob a orientação do professor, os alunos realizam cálculos e constroem um quadro com os valores em reais para cada metro cúbico gasto, a cada metro cúbico após os 5 m³ utilizados, o valor anterior mais o excedente. Com isso constroem um modelo matemático (Figura 6) que descreve a situação investigada. A partir dessa representação, os alunos ficam satisfeitos com a clareza dos dados que estavam presentes na tabela da SANEPAR (Figura 4) e consideram que tal problema fica solucionado.

Figura 6 – Modelo matemático Grupo 1 – Atividade Mudança Tarifária

| | | | | | | | | | | | |
|------------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Água usada | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| | 32,30 | 33,92 | 34,94 | 35,96 | 36,98 | 38,00 | 38,52 | 44,24 | 49,96 | 55,68 | 61,29 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | |
| | 67,30 | 72,80 | 78,50 | 84,20 | 89,90 | 96,15 | 101,90 | 107,65 | 113,40 | 119,15 | 124,90 |
| | 27 | 28 | 29 | 30 | | | | | | | |
| | 130,65 | 136,40 | 142,15 | 147,90 | | | | | | | |

Fonte: Relatório dos alunos.

Ao construírem o modelo matemático expresso na Figura 6, os alunos realizam a comunicação dos resultados para toda a turma

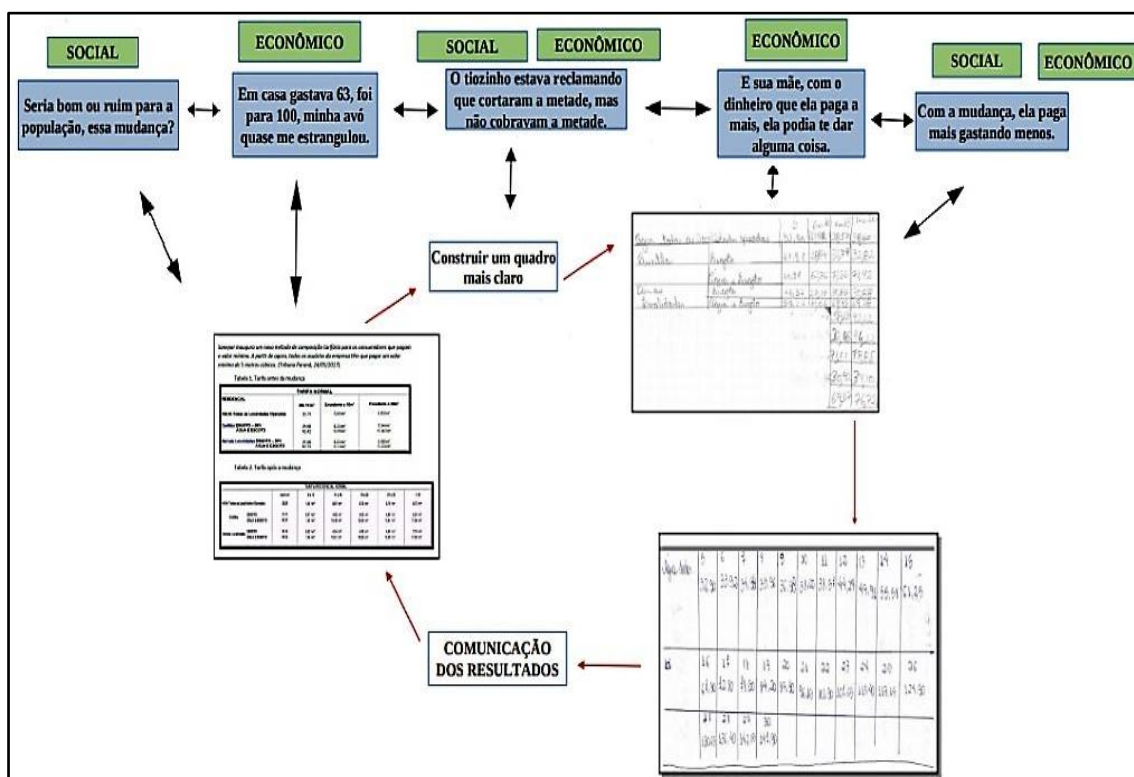
O que podemos inferir é que o encaminhamento da atividade seguiu o ciclo de Modelagem Matemática como caracterizado por Almeida e Silva (2012) e que apresentamos na Figura 1. Podemos ponderar também que os diálogos que emergiram no desenvolvimento da atividade apresentam elementos sociocríticos que se aproximam daqueles apresentados no ciclo de Modelagem proposto por Rosa e Orey (2015) e foi apresentado na Figura 2.

Levando em consideração os ciclos de Modelagem supracitados, elaboramos um ciclo para o Grupo 1 apresentado na Figura 7. Para tanto, tomamos como pano de fundo o ciclo de Modelagem Matemática de Almeida e Silva (2012), destacado com as setas em vermelho. A situação inicial corresponde à mudança tarifária e está representada pela reportagem de jornal e pelas tabelas de antes e depois das mudanças; o problema formulado pelos alunos é clareza das informações contidas nas tabelas da situação inicial; o modelo matemático deduzido corresponde a um quadro com os valores em reais de cada metro cúbico de água utilizado. Na dedução do modelo matemático, os alunos, primeiro construíram um quadro que não considerava os valores anteriores como descrito na Figura 5, o que se deram conta ao confrontarem se os resultados respondiam ao problema inicial, dessa maneira retornaram à dedução do modelo para que o mesmo respondesse à situação inicial.

O ciclo de Modelagem Matemática sociocrítico de Rosa e Orey (2015), Figura 2, integra ao processo de Modelagem Matemática variáveis sociais, políticas, culturais e econômicas que estão presentes na vida dos alunos. Essas

variáveis se apresentam nos retângulos em azul e são exemplificadas por meio de recortes dos diálogos dos alunos.

Figura 7 – Ciclo de Modelagem Atividade Mudança Tarifária – Grupo 1



Fonte: Os autores.

O Grupo 2 com 7 alunos – Ana, Beatriz, Francisco, Felipe, Heloísa, Renata e Vinícius – também partindo das informações da Figura 4, desenvolveram a atividade. A seguir excertos dos diálogos no desenvolvimento da atividade:

Prof: *A partir dessas tabelas e da reportagem como nós podemos usar a matemática, para fazer uma leitura disso?*
 Francisco: *Que essa aqui é pior, porque vai gastar mais.*
 Heloísa: *Nessa aumentou tudo*
 Francisco: *Sei lá, não tô entendendo as tabelas, tipo... Porque a 10m³ vai pagar? Mas professor, não tô entendendo onde a gente pode chegar?*
 Prof: *Com essas informações, o que podemos pensar utilizando matemática?*
 Francisco: *Que é inversamente proporcional.*
 Prof: *Quem é inversamente proporcional?*
 Francisco: *A conta, quanto mais a gente gasta, mais a gente paga.*

Nesse excerto o professor inicia o diálogo fazendo uma pergunta de modo que expresse que ele também irá ajudar no desenvolvimento da atividade “A

partir dessas tabelas e da reportagem como nós podemos usar a matemática, para fazer uma leitura disso”?, deixando evidente uma característica do diálogo que é **promover a igualdade**. Ferruzzi e Almeida (2015, p. 381), pontuam que “promover a igualdade, refere-se a relacionamento interpessoal”, ou seja, os alunos sabem que podem contar com o professor e isso se mostra na sequência quando os alunos continuam utilizando as frases, inclusive as interrogativas na primeira pessoa do plural, o que também configura a qualidade de diálogo **estabelecer contato**.

Na continuação do diálogo, o professor esclarece o que são grandezas inversas e diretamente proporcionais, e continua auxiliando os alunos a problematizarem sobre a situação:

Prof: Mas quando as duas coisas estão aumentando, então são diretamente proporcionais, inversamente é quando uma aumenta e outra diminui, quanto mais gasta, mais paga, então quem depende de que por exemplo? As duas coisas são independentes?

Francisco: Não

Prof: Quem depende de quem?

Francisco: O valor que vai pagar depende do valor que você gasta.

Prof: Nós temos uma notícia aqui, é algo que está acontecendo na nossa vida, essa tabela eu peguei do site da SANEPAR ,e isso pode influenciar a nossa vida? Francisco, por que você falou que estava com dificuldade de entender como funcionava a tabela?

Francisco: tá errado, tem que fazer certinho. Tinha que fazer uma tabela direitinho.

Prof: Então bora fazer essa tabela.

Francisco: Então tá bom, vou mostrar pra essa SANEPAR que o bagulho aqui é doido.

Heloísa: Mas como?

Francisco: Tem as diferenças aqui.

Heloísa: Hum..

Francisco: Tem a nova e a velha, vamos fazer dessa aqui. [Indicando para a nova].

Nesta parte dos diálogos evidencia-se a qualidade de diálogo de **reconhecer**. Segundo Ferruzzi e Almeida (2015, p. 382), “o professor, como participante do diálogo, pode auxiliar com questões do tipo ‘por quê’, conduzindo-o a delinear suas ideias matemáticas”. Quando o professor pergunta: “*Francisco, por que você falou que estava com dificuldade de entender como funcionava a*

tabela?”, a resposta de Francisco já dá indícios de como ele irá proceder para resolver o problema: da dificuldade de entender, ou seja, dizendo que irá construir uma tabela “*direitinho*”.

Na busca por encontrar uma maneira mais clara de compreender os dados da tabela os alunos continuam o diálogo, como segue:

Francisco: *Professor, aqui é tipo olha aqui. Eu ia fazer a multiplicação pra saber quanto que é, só 5 e daí em vez de por isso aqui eu pôr o valor que eu vou pagar, excedendo a 10.*

Prof: *Por exemplo, 12m³ paga tanto, 15m³ paga tanto?*

Francisco: *É, mas nossa, mas água é cara heim! Tem um monte de rio aí.*

Prof: *É cara a água?*

Francisco: *É ué.*

Heloísa: *É caro e a luz é mais caro ainda.*

Vinícius: *É caro tem um monte de gente que deixa cortar a água.*

Francisco: *É que eu não faço ideia de 10m³, é bastante. Quanto gasta uma casa?*

Heloísa: *A hora que eu tô no banho, eu tô sentindo culpada quando fico lá meia hora.*

Francisco: *10m³ vai dá 1000, tipo 10*10*10.*

Prof: *Como assim?*

Francisco: *m³ não é assim, tipo uma caixinha?*

Prof: *É.*

Francisco: *Então é bastante, imagina uma caixa assim de 10m, de comprimento de largura, quadrada assim, uma caixa.*

Prof: *Então o que essa informação está fazendo a gente pensar?*

Francisco: *Que vai gastar bastante água.*

Heloísa: *Água é caro. E a gente desperdiça.*

Francisco: *Aí mano. Nós tínhamos que saber mais ou menos quanto gasta na sua casa, na dela e na dela e na minha, aí tirava uma média.*

Vinícius: *Mas como a gente vai saber?*

Francisco: *Depende das pessoas que moram na casa, na sua casa tem quantas pessoas?*

O diálogo anterior suscita questões que são concernentes à perspectiva sociocrítica (KAISER; SRIRAMAN, 2006), pois, apresenta o que Silva e Kato (2012) caracterizam como participação ativa do aluno na sociedade. Segundo as autoras, tal participação aparece quando os alunos “evidenciam mudanças de atitudes em relação à determinada situação, ou ainda, uma nova maneira de

se posicionar na sociedade” (SILVA; KATO, 2012, p. 830). Isso fica evidente quando os alunos dizem, “*mas nossa, mas é caro água heim!*”, “*É caro tem um monte de gente que deixa cortar a água*”, “*Água é caro. E a gente desperdiça*”, “*A hora que eu tô no banho, eu tô sentindo culpada quando fico lá meia hora*”.

Essas mesmas expressões dos alunos colocam em evidência a qualidade de diálogo, **pensar alto**. Para Alrø e Skovsmose (2010, p. 113), “**pensar alto** significa expressar pensamentos, ideias e sentimentos” e ainda, “algumas questões hipotéticas costumam surgir no **pensar alto** e estimulam a investigação”, essas questões hipotéticas surgem quando Francisco sugere, “*Nós tínhamos que saber mais ou menos quanto gasta na sua casa, na dela e na dela e na minha, aí tirava uma média.*”

Na sequência do diálogo, quando Vinícius diz, “*Mas como a gente vai saber?*”, apresenta-se a qualidade **desafiar**, querendo saber mais como investigar a situação.

Cabe destacar, ainda nesse diálogo, a fala de Francisco sobre os 10m^3 , “ *10m^3 vai dá 1000, tipo $10*10*10$.*”, isso sugere uma caixa de $10\text{m} \times 10\text{m} \times 10\text{m}$, enquanto na verdade estamos tratando de 10 caixas de $1\text{m} \times 1\text{m} \times 1\text{m}$.

E o diálogo segue no desenvolvimento da atividade:

Francisco: *Faz de conta se você gastasse 10, eu gastasse 5 e ela gastasse 5 e ela gastasse 10 a nossa média ia ser 30, 30 dividido por 4.*

Heloísa: *Num dá exato.*

Francisco: *A nossa média vai ser 7,5 mais ou menos.*

Prof: *Então como está aqui?*

Heloísa: *A gente tá discutindo quanto que gasta em casa.*

Francisco: *Sabe o quanto uma casa com 3 pessoas gasta, uma casa com 5, um a casa com 10. Aí vamos perguntar em casa quanto que gasta de água, e ela na dela.*

Francisco: *Pegar a conta em casa e fazer a média, é assim que faz média né, se tem 5 pessoas e gasta 5 cada uma gasta 1. Porque a tabela tá errada.*

Prof: *A tabela tá errada?*

Francisco: *Tá confusa. Vamos fazer uma tabela mais clara. Professor se eu gastei 3m^3 vou pagar 33, se eu gastei 11 eu vou pagar... é isso que tá errado, aqui devia ter o valor e não o m^3 .*

Prof: *Então agora a gente tem um problema, para resolvermos usando a matemática.*

Francisco: *Esse aqui é o valor.*

Renata: *Esse aqui é o valor de 10m, 5,06 não é medida é valor.*

Francisco: *Agora tudo faz sentido! Então vai assim até 30, depois muda.*

O diálogo apresenta a ligação que os alunos estão fazendo entre a atividade e sua vida cotidiana, pois querem usar as informações de quanto gastam de água em suas casas para conseguir verificar como a mudança influenciou suas vidas. Fica claro também que para Francisco a tabela não está correta, pois, diz: *“Tá confusa. Vamos fazer uma tabela mais clara. [...] é isso que tá errado, aqui devia ter o valor e não o m³.”* O que, com a intervenção do professor, os conduz ao problema que pode ser matematizado, dando sequência ao desenvolvimento da atividade que, de certa forma, segue o Ciclo de Modelagem Matemática (Figuras 1 e 2).

A exclamação de Francisco, *“Agora tudo faz sentido!”*, após Renata mostrar um determinado valor na tabela, corrobora com Almeida e Dias (2004), que afirmam que, em sala de aula, atividades de modelagem podem ser vistas como essencialmente cooperativas, em que a cooperação e a interação entre os alunos e entre professor e aluno têm papel importante na construção do conhecimento. O que se mostra em consonância com Ferruzzi e Almeida (2015) que colocam que:

as ações dos alunos não são exclusivas de atividades interativas, porém, a diferença reside no fato que, em interação, estas ações são, muitas vezes explicitadas para o outro, atuando como auxiliadoras e, ao mesmo tempo atuando como reorganizadoras do pensamento, promovendo a estruturação e novas aprendizagens (FERRUZZI; ALMEIDA, 2015, p. 392).

A seguir o recorte do diálogo mostra outras inquietações que emergiram no decorrer do processo de análise da nova tabela tarifária:

Prof: *Mas isso é aqui na primeira, como cobrava antes e agora, na nova?*

Leticia: *Foi pra 5 metros. [m³]*

Francisco: *Ficou mais suave pra quem gasta menos de 5 ficou pior, mas pra quem gasta mais ficou melhor porque só vai aumentar 1.*

Prof: *Então vamos pensar, em um número entre dois intervalos. O que é um intervalo?*

Renata: *É o da escola de 10 a 10h:20.*

Francisco: *O que tá no meio.*

Prof: *Como estão os intervalos aqui na tabela.*
 Renata: *Na primeira tem 3*
 Heloísa: *Na outra tem 6*
 Prof: *E essa mudança de intervalo, muda alguma coisa?*
 Francisco: *6 vai pagar 33*
 Prof: *33,92*
 Francisco: *Exatamente, quem gastou 7, 34. Porque de 6 a 10 só vai aumentar 1, ser adulto é tenso, morar sozinho e pagar conta de água, como você vai, e se ninguém nunca te ensinou isso aqui como você vai entender uma coisa dessas. Quando você vai lá na SANEPAR eles te ensinam.*
 Prof: *Esses dados estão disponíveis no site, não sei se for lá alguém vai ensinar.*
 Ana: *De luz é mais fácil?*
 Prof: *Podemos ver depois.*

Quando Francisco compreende como a mudança ocorreu ele diz que, “*ser adulto é tenso, morar sozinho e pagar conta de água, como você vai, e se ninguém nunca te ensinou isso aqui como você vai entender uma coisa dessas*”. Esta frase está diretamente ligada ao conceito de *Foreground*, definido por Skovsmose et al. (2012, p. 235), que consiste em considerar que “o envolvimento dos estudantes na aprendizagem está baseado fortemente no significado que eles atribuem à aprendizagem com respeito a sua vida futura”. A pergunta de Ana, sobre a tarifa de luz (*De luz é mais fácil?*), demonstra que a atividade abriu precedentes para novas investigações, fato que a terceira atividade desta dissertação retoma como veremos.

O próximo excerto mostra o desfecho do diálogo e da atividade de modelagem com a construção do modelo matemático (Figura 8).

Francisco: *A cada m^3 aumenta 1,2, é igual a matéria que tava estudando do táxi lá na escola.*
 Prof: *Então o que você relacionava nesse problema?*
 Francisco: *O que tem, mais o que aumenta.*
 Prof: *Mas isso vai ser até o fim?*
 Francisco: *Não, até aqui [nos 5 m^3], depois muda. Todo mundo que usa a água da SANEPAR vai pagar 32,90, todo mundo, não interessa quanto você gastar, tipo se você gasta até 5 você vai pagar só 32,90, se você gastar 6 você vai pagar 1,02 a mais por m^3 que vai gastar.*
 Heloísa: *Por que você excedeu o limite?*
 Francisco: *É, até 10, passou de 10 você vai fazer a mesma coisa com o outro valor.*
 Renata: *Era só isso?*

Francisco: *É, eu liguei a torneira já gastei 32.*

Renata: *Ok*

Francisco: *Daí tipo eu gastei até 5 vou continuar gastando 32, só que daí eu gastei 6 e a cada 1 a mais que eu gastar.*

Renata: *Ah, daí é só acrescentar mais isso, isso mais isso.*

Francisco: *Um desse, se eu gastar 2 é 2 desses, se eu gastar 3 até 10.*

Renata: *É só somar.*

Para a construção do modelo matemático que para os alunos facilitaria o entendimento de quanto pagar de água, Francisco associou a situação a um problema que havia estudado na escola, “*é igual a matéria que tava estudando do táxi lá na escola*”, o que traz à tona a qualidade de diálogo **reconhecer**. **Reconhecer** para Alrø e Skovsmose (2010, p. 110) “é necessário para que se dê sentido às atividades e aos cálculos subsequentes”.

A Figura 8, mostra o modelo matemático feito pelo Grupo 2, em que inseriram para cada intervalo da tabela, uma expressão que representa o valor a pagar e a quantidade de metros cúbicos de água é representada pelo símbolo asterisco (*).

Figura 8 – Modelo Matemático Atividade 1 Mudança Tarifária – Grupo 2

| | |
|---|---|
| $6 \text{ a } 10 = 32,90 + 1,00 \cdot *$ | $5 \text{ m}^3 = 32,90$ |
| $11 \text{ a } 15 = 32,90 + 5,67 \cdot *$ | $6 \text{ a } 10 = 32,90 + 1,02 \cdot *$ |
| $16 \text{ a } 20 = 32,90 + 5,70 \cdot *$ | $11 \text{ a } 15 = 32,90 + 5,67 \cdot *$ |
| $21 \text{ a } 30 = 32,90 + 5,75 \cdot *$ | $16 \text{ a } 20 = 32,90 + 5,70 \cdot *$ |
| $30 + = 32,90 + 9,72 \cdot *$ | |

Fonte: Relatório dos Alunos.

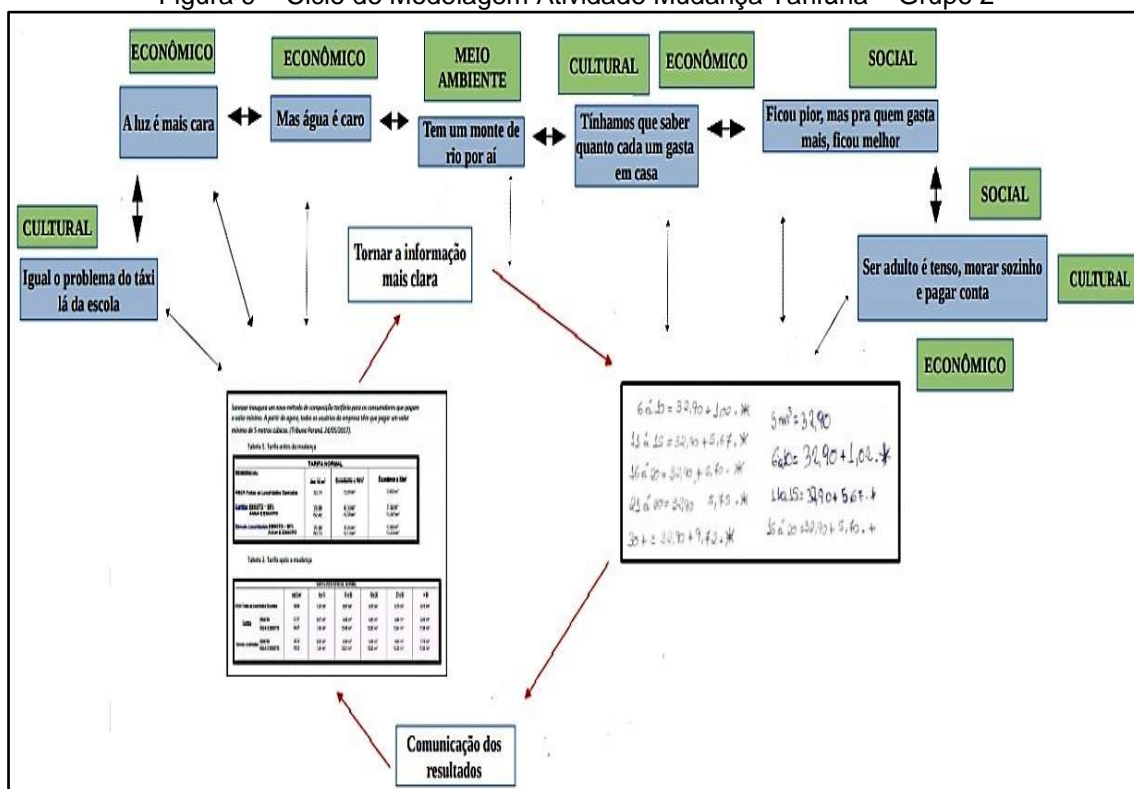
Assim como no grupo 1, após a dedução do modelo matemático, os alunos comunicaram os resultados. A Figura 9, apresenta o ciclo de modelagem do Grupo 2.

No ciclo de Modelagem da Atividade Mudança Tarifária do Grupo 2, as etapas de Almeida e Silva (2012), também estão indicadas pelas setas em vermelho. A situação inicial continua sendo a mudança tarifária que está representada pela reportagem de jornal e pelas tabelas de antes e depois da

mudança. Os alunos do Grupo 2, entenderam ser complexas as informações apresentadas e se debruçaram em encontrar uma maneira de torná-las mais claras, para isso, constroem um modelo matemático por meio de expressões que mostram diretamente o valor a pagar de cada metro cúbico.

As variáveis apresentadas por Rosa e Orey (2015), estão representadas pelos retângulos azuis e trazem os recortes dos diálogos dos alunos. No ciclo do Grupo 2, observamos que existe uma influência da variável econômica, visto que, usam as palavras “caro” e “pagar” nos diálogos.

Figura 9 – Ciclo de Modelagem Atividade Mudança Tarifária – Grupo 2



Fonte: Os autores.

O grupo 1, na fase de matematização, utilizou cálculos de multiplicação e soma para construir uma tabela que julgavam como sendo a maneira mais adequada de tornar as informações mais claras. O grupo 2 também com o intuito de tornar as informações mais fáceis de serem interpretadas, utilizou expressões matemáticas para representar cada intervalo da tabela.

Depois dos dois Grupos compartilharem o que fizeram, o professor mostrou uma resolução em que fez o uso da expressão algébrica como mostra a Figura 10. Nesta resolução, o professor explicou que para cada intervalo usou

uma expressão, e que o valor da anterior era acrescido à próxima para compor o valor a pagar para cada m³ de água.

A Figura 10 representa uma função definida por mais de uma sentença¹⁶, conteúdo abordado no 1º ano do Ensino Médio, sendo f a função antes da mudança e g após a mudança, em ambas x representa a quantidade de metros cúbicos e $f(x)$ e $g(x)$ os valores a pagar.

Figura 10 – Modelo Matemático do Professor para a Atividade 1

$$f(x) = \begin{cases} 33,74, & 0 < x \leq 10 \\ (x - 10)5,06 + 33,74, & 10 < x \leq 30 \\ (x - 30)8,63 + 134,94 & x > 30 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 32,9, & 0 < x \leq 5 \\ (x - 5)1,02 + 32,9, & 5 < x \leq 10 \\ (x - 10)5,67 + 38 & 10 < x \leq 15 \\ (x - 15)5,7 + 66,35 & 15 < x \leq 20 \\ (x - 20)5,75 + 94,85 & 20 < x \leq 30 \\ (x - 30)9,72 + 152,35 & x > 30 \end{cases}$$

Fonte: Os autores.

3.1.1. Árvore de Associação de Ideias do desenvolvimento da Atividade 1

Para sistematizar o que emergiu no desenvolvimento da atividade utilizamos a Árvore de Associação de Ideias (SPINK, 2013), primeiramente uma Árvore para cada grupo e depois uma Árvore para toda a atividade.

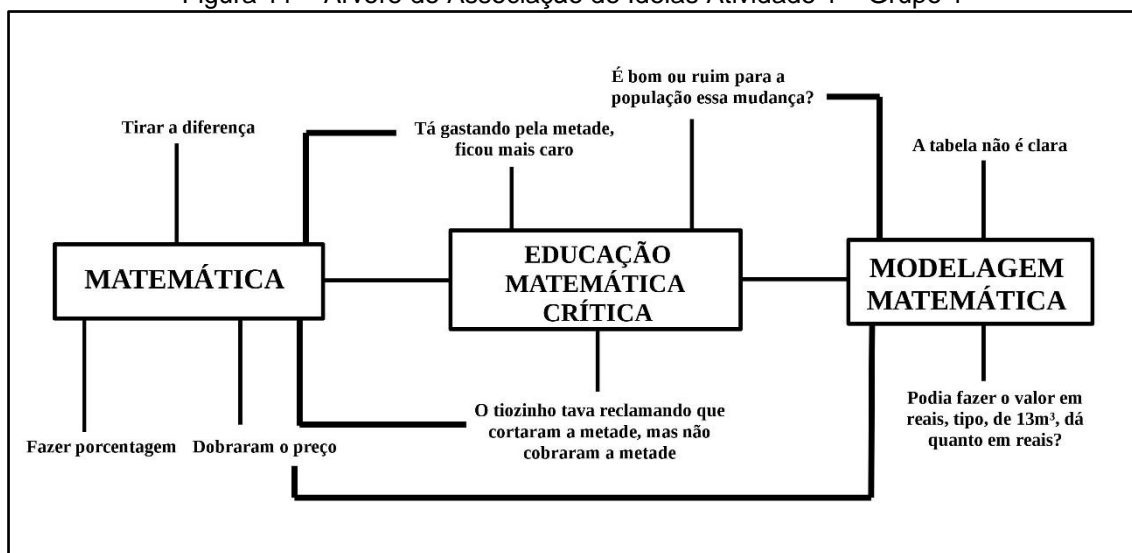
Spink (2013, p. 70) ressalta que as Árvores de Associação de Ideias trazem a possibilidade de “entender as singularidades da produção de sentido, presas tanto a história de cada pessoa quanto à dialogia intrínseca do processo”. Assim, as Árvores de Associação proporcionam visibilidade ao processo, sistematizando as ideias que emergiram no desenvolvimento da atividade.

Decorrente do que emergiu dos diálogos no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, construímos uma Árvore de Associação de Ideias

¹⁶ Uma função definida por mais de uma sentença ocorre quando: “cada uma das sentenças está associada à um subdomínio D1, D2, D3,...Dn e a união destes n-subconjuntos forma do domínio D da função original, ou seja, cada domínio Di é um subconjunto de D”(MANHOLI, 2010, p. 2).

da Atividade da Mudança Tarifária do grupo 1 (Figura 11). Na Árvore de Associação de Associação de Ideias, Matemática, Educação Matemática Crítica e Modelagem Matemática estão conectadas, como raízes que sustentam os ganhos nas quais as ideias evidenciadas nos diálogos se fazem presentes. Essa conexão entre Matemática, Educação Matemática Crítica e Modelagem Matemática, se deve ao fato de que o objetivo é ensinar Matemática e para tanto escolhemos a Modelagem Matemática e nessa interface entre Matemática e Modelagem Matemática, temos a Educação Matemática Crítica, sendo assim temos ideias que pertencem apenas a uma das áreas, e outras que se conectam pois remetem ideias das duas ou mais áreas.

Figura 11 – Árvore de Associação de Ideias Atividade 1 – Grupo 1



Fonte: Os autores.

No início da atividade os alunos estavam preocupados com o que deveriam fazer, perguntando um ao outro e para o professor o que era para ser feito. As indagações desencadearam duas ideias do que poderia ser feito: *tirar a diferença* e *fazer a porcentagem* entre os valores das tarifas. No desenvolvimento da atividade surgiu a ideia, *dobram o preço*, o conceito de dobro é matemático, entretanto ele se mostra uma ideia que emergiu após algumas fases da Modelagem Matemática (formulação do problema e matematização), por isso está associado às duas.

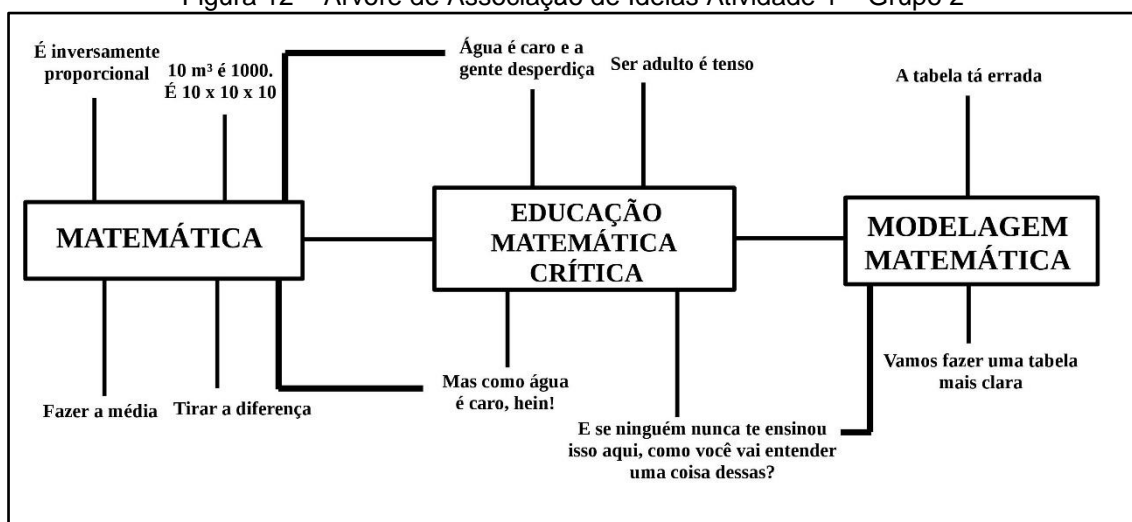
No decorrer da atividade gerou-se uma discussão sobre como as alterações teriam impacto na sociedade. A partir dessa discussão, os alunos entraram em um consenso de que a *tabela não era clara* o suficiente para que

eles pudessem concluir se as mudanças eram benéficas ou não à sociedade, o que os levou à próxima ideia que a tabela devia especificar os valores pagos por cada metro cúbico gasto, *podia fazer o valor em reais, tipo de 13m³ da quanto em reais?* Tais ideias emergiram da fase de formulação do problema, sendo assim foram associadas como pertencentes apenas à Modelagem Matemática.

Em meio ao desenvolvimento da atividade emergiram as ideias: “*tá gastando pela metade, ficou mais caro*”, é “*bom ou ruim para a população essa mudança?*”, “*o tiozinho tava reclamando que cortaram pela metade, mas não cobraram a metade*”. Tais ideias carregam as características da Educação Matemática Crítica, e elas além de estarem associadas à Educação Matemática Crítica se conectam com a Modelagem Matemática ou com a Matemática.

Para o grupo 2 também construímos uma Árvore de Associação de Ideias (Figura 12) em que se apresenta os diálogos dos alunos no desenvolvimento da atividade. A Árvore de Associação de Ideias mantém as mesmas atributos, ou seja, a conexão entre Matemática, Educação Matemática Crítica e Modelagem Matemática, com as ideias pertencentes a cada área evidenciadas e estabelecendo conexões em determinadas circunstâncias.

Figura 12 – Árvore de Associação de Ideias Atividade 1 – Grupo 2



Fonte: Os autores.

A primeira ideia que os alunos tiveram após a leitura dos dados foi sobre *proporcionalidade*, provavelmente pelo fato de quanto mais se gasta água, mais se paga. Esse diálogo sobre proporcionalidade levou os alunos a concluir que a tabela não estava correta e que era necessário *fazer uma tabela mais clara*. Porém, apresentaram-se duas maneiras de torná-la mais clara, ou por meio da

média ou por meio da *diferença* entre os valores, bem como se $10m^3$ é 1000, $10 \times 10 \times 10$, ideias que representam conceito matemáticos.

No desenvolvimento da atividade ideias associadas a Educação Matemática Crítica foram emergindo dos diálogos, a preocupação em ser adulto, o valor da água e a necessidade de se aprender sobre uma situação como essa, as ideias, “*água é caro*” e a “*gente desperdiça*”, e “*mas como água é caro, heim!*”, demonstram reflexões sobre a atividade, e refletir sobre papel da Matemática é característica da Educação Matemática Crítica, e também estão conectadas a Matemática pelo fato de estarem associadas ao conceito de quantificar, dar valor, já a ideia, *e se ninguém te ensinou isso aqui, como você vai entender uma coisa dessas?*, carrega a reflexão proposta pela Educação Matemática Crítica e se associa ao ensino, por isso esta conectada a Modelagem Matemática, quanto a ideia, *ser adulto é tenso*, essa é puramente reflexiva por isso não estabelece conexões com a Matemática ou Modelagem Matemática.

Os alunos levantaram questões econômicas que estavam envolvidas na situação e como isso poderia influenciar no dia a dia das pessoas e até mesmo na vida futura deles. Assim, essas ideias levaram os estudantes a pensar na importância de se compreender a situação, ideias que sustentam a construção do modelo matemático.

A Árvore de Associação Ideias (Figura 13), contempla a atividade como um todo, assim reunimos as ideias dos dois grupos como apresentamos nas Figuras 11 e 12, porém aqui evidenciamos três aspectos que emergiram no desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática: Impacto Social, Reflexão Sobre os Hábitos e Reflexão Sobre o Futuro. Tais aspectos são concernentes a Educação Matemática Crítica.

Ao entenderem que a mudança na cobrança da tarifa de água pode ou não ter sido benéfica, e que água é um recurso caro e por isso existem pessoas que têm sua água cortada, mostra que uma mudança como essa tem *Impacto Social*, e em outros momentos da vida, em que houver mudanças, os alunos podem se lembrar que mudanças possuem influência direta sobre suas vidas e das demais pessoas à sua volta.

Reflexão Sobre o Futuro, faz com que os alunos desenvolvam o costume de se planejar sobre o que pode acontecer com as decisões tomadas no presente, o que pode levá-los a valorizar o que estão aprendendo agora, pois veem que isso tem influência no seu futuro, o que se mostra presente que se remetem à vida adulta e a necessidade de aprender coisas agora para entenderem acontecimentos futuros.

Quanto ao aspecto *Reflexão Sobre os Hábitos*, esse se mostra importante, porque pode gerar uma atuação imediata nas ações dos estudantes frente atividade desenvolvida, quando os alunos chegam à conclusão que, *água é cara e a gente desperdiça*, vemos que a atividade traz reflexões que mudam o seu presente, e podem impactar de imediato em suas próprias vidas e na sociedade como um todo.

Figura 13 – Árvore de Associação de Ideias da Atividade 1



Fonte: Os autores.

3.2. Descrição e análise da atividade 2 – Desperdício de comida

A atividade 2, teve início no dia 19/09/2017 e foi finalizada em 17/10/2017. A situação-problema já havia sido escolhida pelos alunos após a conclusão da atividade Mudança tarifária, em que decidiram que iriam investigar o desperdício de comida no almoço, oferecido pela EDHUCCA aos estudantes participantes do projeto, na terça-feira, sexta-feira e no sábado. Assim na aula de 19/09/2017 (terça-feira) a turma juntamente como professor, delineou os procedimentos a

serem adotados para a coleta de dados empíricos, decidindo quem ficaria responsável por cada função em cada dia.

Prof: Pessoal, nós vamos fazer a coleta de dados na terça que vem (26/09), na sexta (29/09) e no sábado com as crianças, como nós podemos nos organizar para fazer isso? Do que precisamos?

Fábio: Tem que colocar um balde do lado do lixo e alguém tem que ficar cuidando.

Laura: Tem que saber quantas pessoas vão comer, também

Vinícius: Então tem que ter alguém pra ficar contando quem entra no refeitório.

Rosane: Não precisa, é só contar os pratos antes de começar a servir e ver o que sobra no final.

Nesse recorte do diálogo podemos observar que os estudantes estão dispostos a **realizar uma investigação**. Realizar uma investigação é uma característica de diálogo para Alro e Skovsmose (2010, p. 124), pois, “inclui coletividade e colaboração”, o que percebemos quando cada aluno complementa a ideia do outro sobre como proceder na coleta de dados.

Na aula seguinte (26/09/2017), realizamos a primeira coleta de dados empíricos em que os 13 alunos da turma 2, foram até a cozinha para utilizarem a balança e medir a massa de comida que havia sido jogada como mostra a Figura 14. Durante esse processo surgiu o diálogo a seguir:

Marcos: Gente, mas e esses ossos aqui vai pesar também?

Fábio: Mas osso não dá pra comer.

Rosane: Então não é desperdício!

Laura: Mas é que hoje era frango.

Vinícius: E tem dia que tem linguiça, porco, boi.

Heloísa: Osso pesa mais.

Francisco: Quem jogou uma batata inteira fora?

Heloísa: Não sei porque pega se não vai comer!

Francisco: Vamos separar o osso.

Marcos: Mas vai pesar o osso em outra sacola?

Francisco: Vai aí dá errado, só tirar e usar o que sobrou.

(Figura 14)

No diálogo fica evidente como toda turma está engajada no desenvolvimento da atividade, a qualidade de diálogo **estabelecer contato** está presente, pois de acordo com Soares e Vier (2017, p. 6), “**estabelecer contato** ser identificado nas questões investigativas, no apoio mútuo, nas questões de confirmação e também no bom humor”.

Figura 14 – Coleta de dados para o desenvolvimento da Atividade 2



Fonte: Os autores.

Após essa coleta de dados, os alunos retornaram à sala e formaram os grupos que já haviam trabalhado na atividade anterior e assistiram dois vídeos sobre o desperdício de alimentos¹⁷ com a finalidade de que fizéssemos uma discussão sobre esse tema. A seguir excertos dos diálogos do Grupo 1 – Fábio, Laura, Marcos, Rosane, Taís e Vitor – sobre os vídeos e a sequência do desenvolvimento da atividade:

Prof: *Então, a partir dos vídeos de outras coisas que a gente conhece, o que a gente pode pensar em fazer na nossa casa, na escola, aqui na EDHUCCA, pra ter menos desperdício de alimentos?*

Laura: *Ah, dentro da nossa vida, mostrou no vídeo, né, olhar a data de validade, para não desperdiçar o produto, acabar jogando fora, é, aquele negócio também de comprar dos produtores que fornecem mais perto da sua casa, para não passar tanto tempo na estrada, que desperdiça...*

Marcos: *Comer coisas da época.*

Laura: *Ir para o mercado de barriga cheia. Eu já percebi que a minha mãe, quando a gente vai no mercado, que a gente quer comer alguma coisa, a gente compra o mercado inteiro, sendo que não precisava.*

Fábio: *Na casa, nos restaurantes também.*

Rosane: *Escolas, em todo lugar.*

Laura: *Mas nos restaurantes não é tanto assim.*

Rosane: *É que tem restaurante que dá sobras para os mendigos. Tipo, onde minha mãe trabalha, quando sobra comida, ao invés deles jogarem fora, eles abrem em certo*

¹⁷ <https://www.youtube.com/watch?v=eLq3GzSDnZc>
<https://www.youtube.com/watch?v=reOBks5UR3Q>

*Acessados em 29/09/2017.

tempo para os mendigos virem comprar a um real, a dois reais, eles reaproveitam.

No recorte de diálogo supracitado, evidenciamos o quanto os alunos conseguem perceber no seu cotidiano uma ligação direta entre o tema discutido, mostrando uma característica do Modelo – CI, pois, “os atos de comunicação inclusos no Modelo – CI trazem os alunos e suas perspectivas para o centro do palco do processo educativo” (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 72). Quando Laura e Rosane citam a vivência com suas mães, “*minha mãe, quando a gente vai no mercado, que a gente quer comer alguma coisa, a gente compra o mercado inteiro*” e “*onde minha mãe trabalha*”, é possível perceber a variável cultural e na fala “*tem restaurante que dá sobras para os mendigos*”, a variável social, como apresentada por Rosa e Orey (2015) no Ciclo de Modelagem Matemática Sociocrítico (Figura 2), como parte integrante do processo de Modelagem Matemática.

Na aula seguinte (03/10/2017), com os dados coletados, como mostra a Figura 15 os alunos continuaram a discutir sobre o desperdício e com a mediação do professor chegaram a um problema a ser investigado.

Figura 15 – Dados coletados pelos alunos para a Atividade 2 – Desperdícios de Comida

| | | |
|--|--|--|
| 26/09 20 pessoas almoçaram 674 gramas no lixo 474 gramas sem lixo Cordãozinho = frango | 29/09 29 pessoas almoçaram 1,924 gramas com lixo 1,002 gramas sem lixo Cordãozinho = feijão com linguiça | 30/09 58 pessoas almoçaram 0,948 gramas com lixo sem lixo Cordãozinho = linguiça |
|--|--|--|

Fonte: Relatório dos alunos.

No diálogo a seguir podemos evidenciar sobre o que os alunos se propuseram a investigar:

Marcos: Aqui na EDHUCCA e na escola a gente às vezes fica conversando e deixa a comida esfriar e joga fora.

Fábio: As pessoas estão acostumadas a encher o prato.

Laura: E pra não sobrar tanto a gente podia tirar a própria comida aqui.

Rosane: Às vezes a gente pede pra ela colocar só mais um pouquinho e ela coloca só um grãozinho.

Fábio: *Ou às vezes a gente fala que tá pouco, coloca mais um pouco, e ela vai e coloca uma colher inteira, aí você não vai comer tudo.*

Prof: *Um ponto importante que podemos considerar, e nas próximas aulas vemos como nós faríamos. Alguma outra coisa?*

Laura: *O que sobra ir pro lixo orgânico.*

Prof: *Certo, mas então, quanto sobra?*

Laura: *Bastante.*

Prof: *E esse bastante é quanto?*

Rosane: *Tem uma porcentagem, e aí entra a matemática.*

Prof: *Ótimo, mas então temos que pensar em mais coisas.*

Laura: *Mas aí como a gente vai chegar nessa porcentagem?*

Prof: *Isso aí, como?*

Fábio: *Nós vamos ter que ver quantas pessoas tem primeiro e o quanto a maioria deixa, não é?*

Laura: *Eu acho que se a gente tivesse vendo o tanto que a gente tá desperdiçando a gente começaria a criar essa consciência, por exemplo: se a gente fizesse o trabalho de ver o quanto a gente desperdiça, levantar em números e deixar ali no refeitório para as pessoas verem que o pouquinho que elas deixam, com o pouco do outro, deixa um monte.*

Rosane: *Assim podem construir uma consciência.*

Laura: *Aí podemos ver o tanto de comida que sobrou e ver quantos pratos aquela comida encheria.*

O diálogo transcrito mostra uma característica do desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática na concepção da Educação Matemática Crítica, em que existe “a preocupação de desenvolver junto aos alunos, o poder de análise da realidade sociocultural dos mesmos” (FREITAS, 2015, p. 20). Os alunos relatam os motivos que contribuem para que deixem comida no prato, e entendem que é necessário dar visibilidade ao desperdício como forma de criar “consciência” do problema e como corrigi-lo.

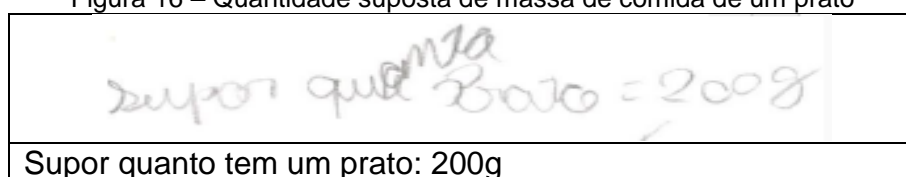
Na aula de 10/10/2017, com o problema definido (Quantos pratos o desperdício encheria?), os alunos seguiram para o processo de matematização com o objetivo de determinar quantos pratos a comida desperdiçada encheria, conforme diálogo transcrito a seguir:

Laura: *A gente tem aqui a quantidade de comida que foi jogada fora nos 3 dias, agora é somar e ver quantos pratos que dá.*

Marcos: *Mas qual o tamanho do prato?*

Rosane: *Professor, qual peso do prato?*
 Prof: *Ninguém anotou quanto era pra gente por a tara na balança?*
 Rosane: *Não professor, pra gente saber quantos pratos encheria tem que saber quanto foi posto no prato.*
 Prof: *Assim, é isso nós não fizemos, e agora?*
 Marcos: *Pode supor um valor, tipo 200g. (Figura 16)*
 Prof: *Poder pode, e o que mais podemos fazer?*
 Marcos: *Pesar um prato cheio.*
 Prof: *Um só?*
 Laura: *De quem almoçar.*
 Prof: *Sim, vamos ter que pesar de todos em um outro almoço. Mas pensem como seria como o Marcos falou.*

Figura 16 – Quantidade suposta de massa de comida de um prato



Fonte: Relatório dos alunos.

Nesse trecho de diálogo, os alunos percebem que os dados que tinham em mãos eram insuficientes para responder ao problema proposto, e perguntam ao professor como proceder e se podiam usar uma suposição de valor. O professor sabe que a ideia de Marcos é válida, porém sugere uma nova coleta de dados, o que irá retornar a uma etapa já percorrida do Ciclo de Modelagem Matemática.

A Figura 17 mostra, a nova coleta de dados empíricos, com os valores das massas de comida colocada em cada prato no almoço de 17/10/2017, dados que ambos os grupos utilizaram para responder suas respectivas problemáticas.

Figura 17 – Massa de comida em cada prato da nova coleta

Pratos pesados

| | | | |
|-----|-----|-----|-----|
| 558 | 458 | 300 | 326 |
| 818 | 284 | 220 | 342 |
| 280 | 476 | 512 | 518 |
| 346 | 394 | 384 | 212 |
| 428 | 510 | 264 | 600 |
| 406 | 294 | 304 | 256 |
| 524 | 252 | 382 | 323 |
| 556 | 432 | 314 | |
| 270 | 388 | | |

Fonte: Relatório dos alunos.

Com os dados em mãos os alunos retomaram o problema:

Laura: *Agora é só fazer a média.*

Prof: *Tranquilo de como faz a média?*

Laura: *É só somar e dividir.*

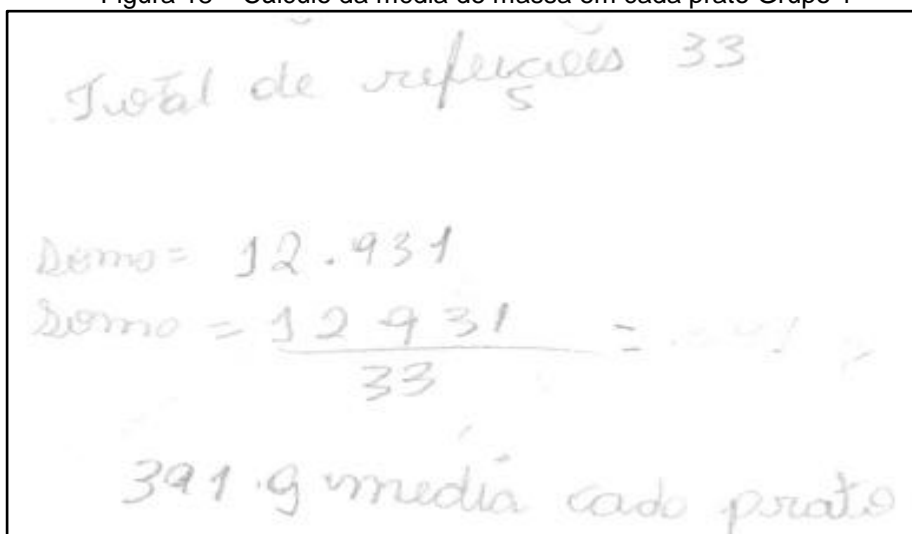
Prof: *Ok, então, vamos lá.*

Os alunos reconhecem que a média é uma maneira de simplificar o conjunto de dados para que seja possível responder ao problema, donde obtêm que a média dos pratos é 391 g como mostra a Figura 18. Nesse diálogo também evidenciamos a qualidade de diálogo **reconhecer**, pois, os alunos sabem qual algoritmo utilizar. Para Alrø e Skovsmose (2010, p. 110), **reconhecer** “é necessário para que se dê sentido às atividades e aos cálculos subsequentes.”

O fato de ter retornado à fase de coleta de dados não prejudicou o desenvolvimento da atividade, o que mostra a não linearidade do Ciclo de Modelagem Matemática, como defendido por Almeida, Silva e Vertuan (2012):

Ainda que as fases constituam procedimentos necessários para a realização de uma atividade de modelagem matemática, elas podem não decorrer de forma linear, e constantes movimentos de “ida e vinda” entre essas fases caracterizam a dinamicidade da atividade (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 16).

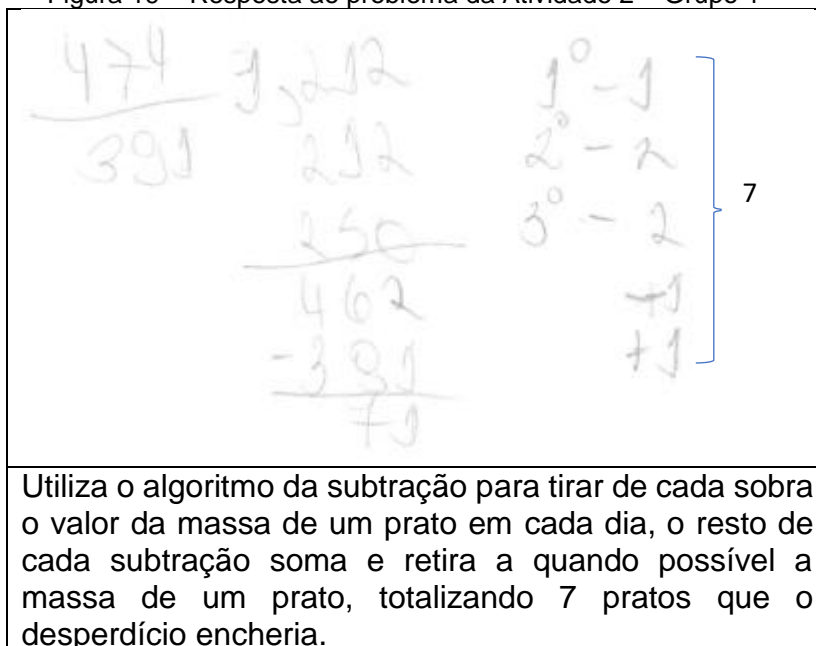
Figura 18 – Cálculo da média de massa em cada prato Grupo 1



Fonte: Relatório dos alunos.

Com a média de massa de comida de cada prato os alunos responderam ao problema de quantos pratos o desperdício encheria, como mostra a Figura 19. Para tanto, os alunos utilizaram a quantidade de desperdício de cada e subtraíram o valor da média, a sobra o aluno acrescentou ao final do terceiro dia, chegando como resultado que toda comida desperdiçada encheria sete pratos de 391 g.

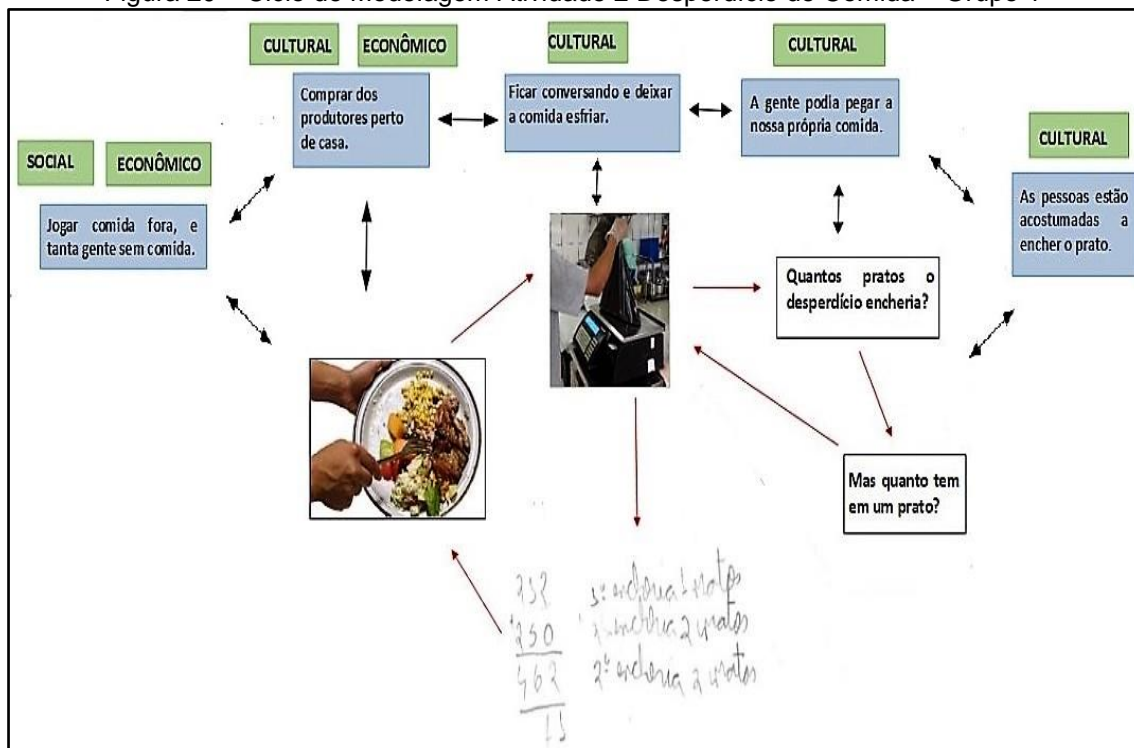
Figura 19 – Resposta ao problema da Atividade 2 – Grupo 1



Fonte: Relatório dos Alunos.

A figura 20 apresenta o Ciclo de Modelagem do Grupo 1 para a Atividade 2 – Desperdício de Comida, as setas em vermelho representam as fases de acordo com o Ciclo de Almeida e Silva (2012) (Figura 1) e retângulos em azul com recortes das falas dos alunos são as variáveis elencadas por Rosa e Orey (2015) no Ciclo de Modelagem Matemático Sociocrítico (Figura 2).

Figura 20 – Ciclo de Modelagem Atividade 2 Desperdício de Comida – Grupo 1



Fonte: Os autores.

O Grupo 2 – Ana, Beatriz, Francisco, Felipe, Heloísa, Renata e Vinícius – após a primeira coleta de dados empíricos assistiram aos vídeos e iniciaram uma discussão sobre o desperdício como mostra o excerto de diálogo transcrito a seguir:

Prof: *Agora com tudo isso que nós vimos, vamos pensar no que fizemos hoje, qual foi a atividade principal?*

Heloísa: *Pesar a comida.*

Prof: *Peso? O que nós fizemos foi medir a massa de comida. Vocês se lembram se o professor de física já falou disso com vocês? Que peso e massa são coisas diferentes?*

Felipe: *Peso é que puxa pra baixo né?*

Prof: *Mais ou menos isso, que o Felipe falou, o peso é uma força e está ligado a aceleração da gravidade, por isso é uma força que tem direção para baixo, já a massa é o que a gente chama de grandeza escalar, ela não tem outra componente que faz variar, é aquele valor sempre. Então*

hoje nós fizemos a primeira medição da quantidade de massa de comida desperdiçada, e na sexta e no sábado vamos fazer de novo, para completar a nossa coleta de dados. Outra coisa importante é a unidade de medida de massa, alguém sabe qual é?

Vinícius: Quilo.

Prof: Na verdade não.

Renata: Ué, mas tipo um pacote de arroz a gente fala 5 quilos!

Prof: Certo, mas vamos pensar em algo menor então, esse lápis, ele tem um quilo?

Felipe: Não.

Prof: Mas ele tem massa?

Felipe: Tem.

Prof: Então usando o exemplo da Renata do pacote de arroz, já olharam no pacote e viram que está escrito, 5 KG, o k é o quilo, que é equivalente a 1000 unidades, e o g é de gramas, que a unidade de medida de massa, como nós que geralmente abreviamos. Então é por isso que temos o km, k 1000 e o m metros, o metro é que é a unidade de medida, assim como no kg é o grama, ok?

Nesse excerto transcrito acima é possível evidenciar que nem todos os alunos reconhecem a diferença entre peso e massa, e também o desconhecimento do grama como unidade de medida de massa. Podemos inferir que estão presentes duas características de uma atividade de modelagem matemática na perspectiva sociocrítica como elencadas por Silva e Kato (2012), problema não matemático da realidade e atuação do professor como mediador, ou seja, o professor mediou a situação da qual os alunos estavam habituados a tratar de maneira equivocada para esclarecer duas coisas que são significativas no desenvolvimento não apenas dessa atividade, mas também de outras áreas do conhecimento como por exemplo na Física.

Ainda nessa aula o professor segue levantando questões que juntamente com os alunos de modo que reflitam sobre o desperdício de comida, como vemos no recorte de diálogo transcrito a seguir.

Prof: Esclarecido já essa questão de peso, massa e unidade de medida, que mais podemos falar sobre o desperdício de comida?

Renata: Lá em casa a minha vó me ensinou que a gente não pode pegar o que não sabe se vai comer e é melhor pegar pouco e depois pegar mais do que pegar e jogar fora.

Mas na casa do meu pai já é diferente lá coloca tudo de monte, aí sobra e joga fora. Então isso é educação.

Ana: Também dá pensar no tanto que vai cozinhar.

Heloísa: E tem o olho grande também, igual no vídeo no prato grande colocava até encher, quando diminuiu também encheu o prato mas comeu tudo.

Beatriz: É verdade, ninguém enche o prato pra sair transbordando, mas sempre enche, quanto maior o prato mais comida.

Prof: Certo, e o prato aqui na EDHUCCA alguém sabe o tamanho? Todos são do mesmo tamanho?

Francisco: Tem uns menores, marrom, mas nunca usa.

Felipe: E tem aquele que a gente toma café.

Prof: Legal isso que vocês falaram, mas o que podemos fazer pra que essa mudança aconteça?

Heloísa: Informando.

Vinícius: Colocar no refeitório a porcentagem de alimentos que está sendo desperdiçado.

Heloísa: A gente pode conscientizar que tem mendigo na rua que não come e aqui a gente joga fora.

Nesse excerto de diálogo os alunos se expressam livremente e na sequência deixando suas opiniões fluírem sem medo, mostrando que continuam empenhados em **“realizar uma investigação”**. Para Soares e Vier (2017, p. 6), na característica de diálogo realizar uma investigação, “é importante que os participantes do diálogo estejam abertos para escutar uns ao outros, permitindo que se possa falar tudo o que se pensa e buscando compreender as diferentes perspectivas apresentadas”, isso se evidencia na complementaridade das falas que compõem o diálogo que mesmo se tratando de coisas diversas tratam de maneiras de se evitar o desperdício: Renata trata da vivência com sua avó, Ana da quantidade que se deve cozinhar, Heloísa da gula, Beatriz do tamanho do prato.

Juntamente com a característica de diálogo, **realizar uma investigação**, o excerto nos possibilita evidenciar como a atividade faz relação com o cotidiano dos alunos, quando a aluna Renata faz a comparação entre como é tratado o desperdício na casa da avó e na casa do pai, ressaltando o que ela chama de **“educação”**, o que mostra que a atividade desenvolve nos alunos o que Freitas (2013, p. 20), coloca como **“o poder de análise da realidade sociocultural”**.

Os alunos também começam a apresentar soluções para diminuir o desperdício fazendo relação entre o tamanho do prato e a quantidade de comida,

para ao final irem moldando o problema a se investigar nessa atividade. Diante do questionamento do professor, “*o que podemos fazer pra que essa mudança aconteça?*”, a aluna Heloísa imediatamente afirma: “*informando*” e Vinícius complementa: “*Colocar no refeitório a porcentagem de alimentos que está sendo desperdiçado*”. A discussão finaliza com Heloísa dizendo que: “*A gente pode conscientizar que tem mendigo na rua que não come e aqui a gente joga fora*”. Essas ações dos alunos no desenvolvimento da atividade, mostra reflexão quanto a seu papel de agentes de mudança em torno da realidade a qual pertencem. Essa característica de atividade na perspectiva sociocrítica mostra que é possível desenvolver nos alunos ações que objetivem a transformação da realidade como apontado por Orey e Rosa (2017, p. 580).

Na aula de 03/10/2017, já com os dados dos três dias de medição, os alunos começaram a matematizar o problema (Qual a porcentagem de comida desperdiçada?) como segue abaixo:

Beatriz: *Mas como a gente vai fazer a porcentagem?*

Francisco: *A quantidade de comida é o 100%, depois o desperdício é x, daí faz cruzado.*

Renata: *E quanto que é de comida?*

Francisco: *Pior quanto que é de comida? Professor, olha a gente fez aqui pra achar a porcentagem, mas e a quantidade de comida?*

Prof: *Como assim a quantidade de comida?*

Francisco: *A comida que foi feita.*

Prof: *Entendi, tinha que perguntar lá na cozinha, mas acho que ela não mede isso. Não podemos pensar outra coisa?*

Renata: *Dá pra pedir quando for fazer outra vez.*

Prof: *Acho que isso fica meio complicado, é correria pra fazer o almoço, não sei se eles iam fazer e não pode ficar um de nós lá dentro, e agora?*

Francisco: *Mas a gente vai ter que pensar senão não tem como fazer.*

Renata: *Então faz depois.*

Beatriz: *Pode fazer igual restaurante.*

Ana: *É mesmo, fica mais fácil.*

Francisco: *Nem tem como acabar agora então, vai ter que ver outro dia pra fazer isso.*

Pelo diálogo é possível evidenciar a qualidade **estabelecer contato**, pois Francisco responde prontamente para Beatriz a maneira de se encontrar a porcentagem, “*A quantidade de comida é o 100%, depois o desperdício é x, daí faz cruzado*”, o que também mostra que Francisco reconhece o algoritmo que

deve ser utilizado (Figura 21). Na sequência do diálogo, quando os alunos se deparam com a falta da quantidade total de comida para seguirem com os cálculos, a interação com o professor também configura a qualidade de diálogo **reconhecer**, “*Como assim a quantidade de comida?*”. Segundo Ferruzzi e Almeida (2015, p. 383), “a busca do professor na tentativa de **reconhecer** o princípio ou procedimento que o aluno pretende utilizar conduz o estudante a justificar seu raciocínio ou procedimento, guiando-o em seu reconhecimento”. Quando o professor diz, “*Não podemos pensar outra coisa?*”, ele continua estabelecendo contato com os alunos, uma outra característica de diálogo, que sugere que o professor está junto com os alunos na resolução do problema e vai ajudá-los, quando necessário.

Para encontrar o percentual de comida desperdiçada os alunos chamaram de Q_t a quantidade total de comida, que corresponderia ao todo de comida, ou seja, 100%, e Q_d a quantidade de comida desperdiçada que seria um percentual a ser encontrado, usando como incógnita x (Figura 21).

Figura 21 – Cálculo da porcentagem de comida desperdiçada



The image shows a handwritten note with two equations. The first equation is $Q_t = 100\%$. Below it, there is a horizontal line. The second equation is $Q_d = x\%$.

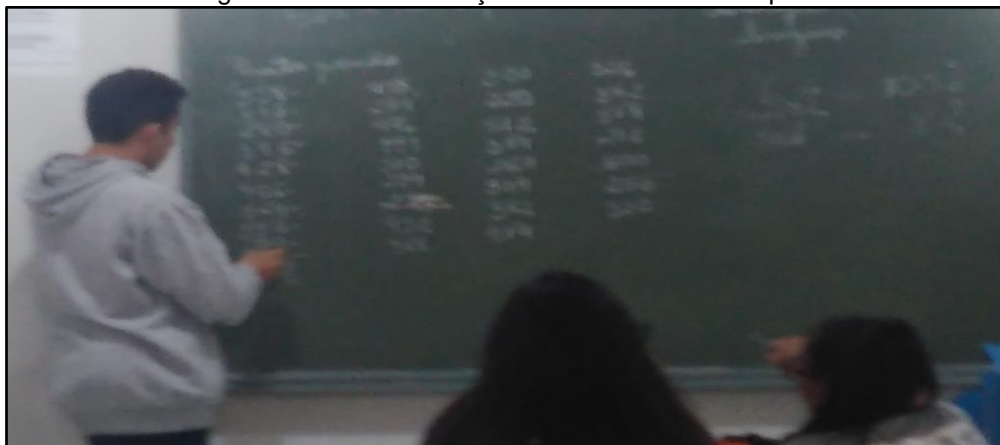
Fonte: Relatório dos Alunos

O registro dos alunos não apresenta a linguagem formal para a regra de três, mas fica implícito que o aluno entende como o algoritmo funciona.

Nos diálogos também é possível evidenciar a qualidade **desafiar**, pois os alunos se dão conta que é necessária uma nova estratégia para poderem chegar a resolução do problema, “*Mas a gente vai ter que pensar senão não tem como fazer*”. Ferruzzi e Almeida (2015, p. 383), ressaltam que **desafiar** conduz “os participantes à reanálise de propostas já estabelecidas e ao exame de novas possibilidades”.

Com os dados da quantidade de comida que cada pessoa colocou no prato no dia da nova coleta de dados empíricos (17/10/2017) os alunos retomaram à fase de matematização como mostra a Figura 22.

Figura 22 – Matemática da Atividade 2 – Grupo 2



Fonte: Os autores.

Os alunos distribuíram todos os valores de massa de cada prato na lousa e, com isso, utilizaram a média como mostra a Figura 23. Com isso, encontraram um valor (391 g) que representasse a quantidade de massa de comida em um prato, para então multiplicar por cada pessoa que almoçou nos dias das três primeiras coletas de dados, para então chegarem ao percentual de desperdício de cada dia conforme a Figura 24.

Figura 23 – Média de massa de cada prato Grupo 2

$$\frac{12.931}{33} = \text{Medida p/pessoa } 391 \text{ g}$$

Fonte: Relatório dos alunos.

Figura 24 – Percentual de desperdício de comida em cada dia

Desperdício 26/09

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times 391 \\ \hline 7820 \text{ (at)} \end{array} \quad \begin{array}{r} = \frac{7820}{474} = \frac{100\%}{x} \\ \times \end{array}$$

$$7820 \cdot x = 47400$$

$$x = \frac{47400}{7820}$$

$$x = 6,06\%$$

Desperdício 29/09

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times 391 \\ \hline 11339 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{(at)} = \frac{11339}{1002} = \frac{100\%}{x} \\ \text{(ca)} \end{array}$$

$$11339 \cdot x = 100200$$

$$x = \frac{100200}{11339}$$

$$x = 8,83\%$$

Desperdício 30/09

$$\begin{array}{r} 58 \\ \times 391 \\ \hline 22678 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{(at)} = \frac{22678}{948} = \frac{100\%}{x} \\ \text{(ca)} \end{array}$$

$$22678 \cdot x = 94800$$

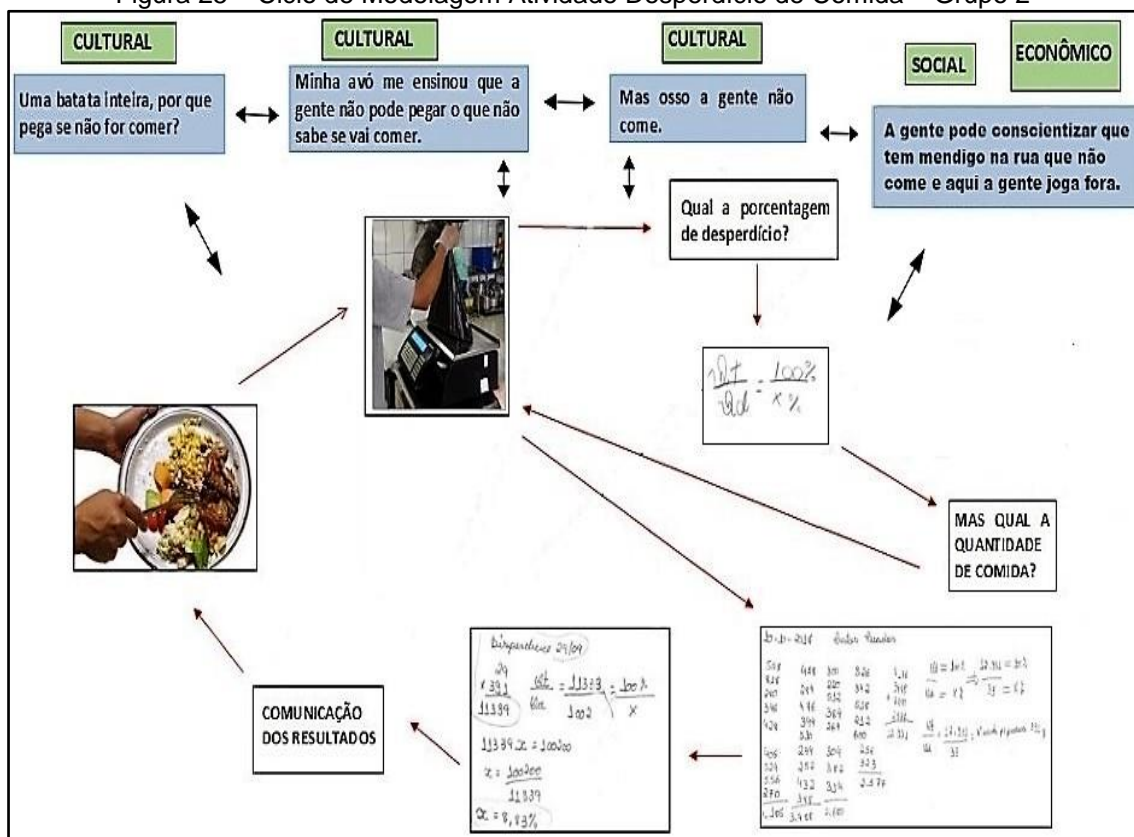
$$x = \frac{94800}{22678}$$

$$x = 4,18\%$$

Fonte: Relatório dos alunos.

A Figura 25 apresenta o Ciclo de Modelagem do Grupo 2 para a Atividade Desperdício de Comida, as setas em vermelho representam as fases de acordo com o Ciclo de Almeida e Silva (2012) (Figura 1), e retângulos em azul com recortes das falas dos alunos são as variáveis elencadas por Rosa e Orey (2015) no Ciclo de Modelagem Matemático Sociocrítico (Figura 2).

Figura 25 – Ciclo de Modelagem Atividade Desperdício de Comida – Grupo 2



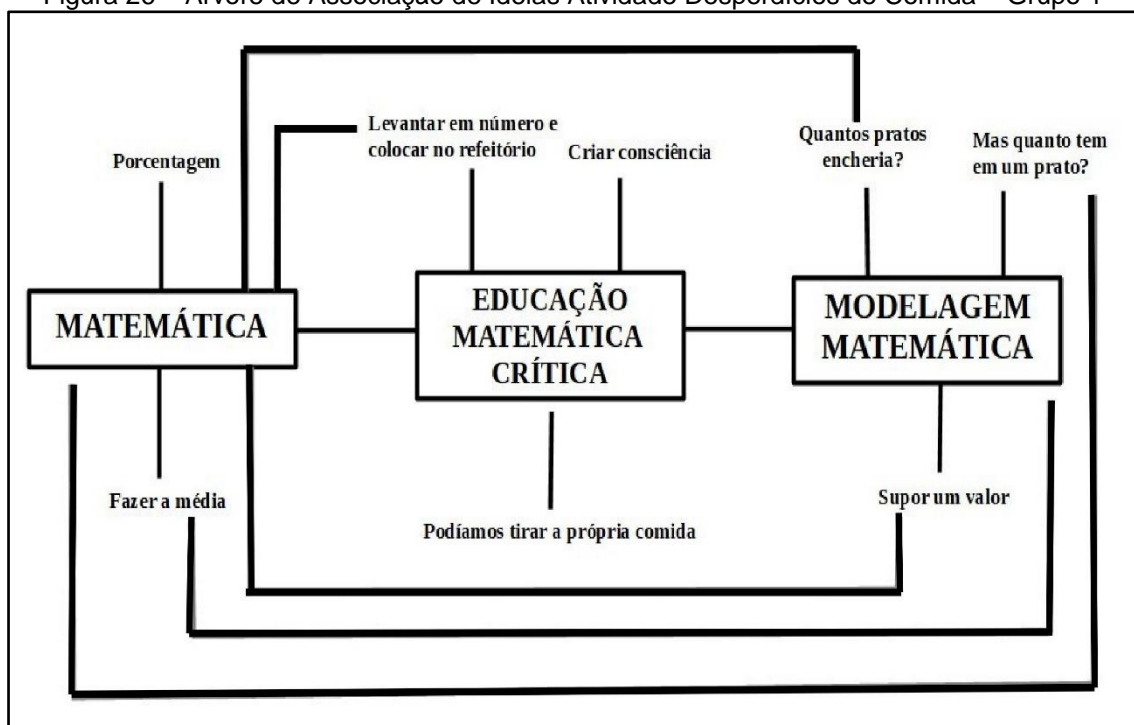
Fonte: Os autores.

3.2.1. Árvore de Associação de Ideias do desenvolvimento da Atividade 2 – Desperdício de comida.

Na Figura 26 apresentamos a Árvore de Associação de Ideias construída para o grupo 1. A partir da Matemática, da Educação Matemática Crítica e da Modelagem Matemática, o que podemos inferir a partir da Árvore de Associação de Ideias é que as ideias que emergiram dos diálogos no desenvolvimento da atividade se interligam, o que mostra que no desenvolvimento da atividade a Matemática, a Educação Matemática Crítica e a Modelagem Matemática, coexistem fazendo com que os alunos trabalhem conceitos matemáticos.

No desenvolvimento da atividade a ideia de *porcentagem* emergiu no início e ficou pertencendo apenas a Matemática, já *fazer a média*, é um conceito matemático que surgiu no desenvolvimento da atividade, por isso está conectado a Modelagem Matemática, as ideias de *quantos pratos encheria* e *supor um valor*, emergiram na fase formulação do problema e resolução, sendo assim associamos a Modelagem Matemática, *supor* e *quantos* tem relações com conceitos matemáticos, devido a isso conectamos à Matemática, a ideia de *quanto tem em um prato*, emergiu na fase de resolução e foi o fator desencadeador de uma nova coleta de dados empíricos. Na Educação Matemática Crítica, as ideias de *criar consciência* e *podíamos tirar a própria comida*, carregam as características da Educação Matemática Crítica no que tange a atitude que se gera a partir da matemática, ou seja, a Matemática em Ação (SKOVSMOSE, 2001), a ideia *levantar em números e colocar no refeitório* também faz parte da Matemática em Ação, porém o conceito de número está fortemente presente na ideia, sendo assim estabelece forte conexão com a Matemática.

Figura 26 – Árvore de Associação de Ideias Atividade Desperdícios de Comida – Grupo 1



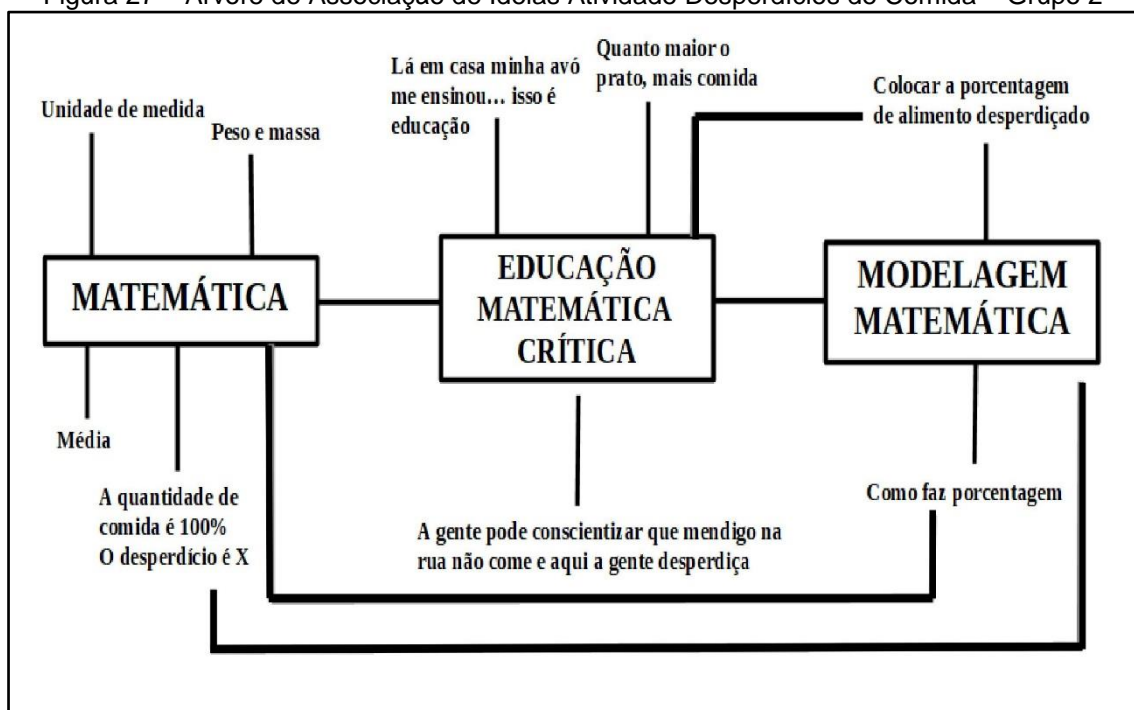
Fonte: Os autores.

A Figura 27, traz uma Árvore de Associação de Ideias do Grupo 2, que assim como nas demais tem como objetivo evidenciar os que características da

Educação Matemática Crítica são reveladas nos diálogos dos alunos quando desenvolvem atividades de Modelagem Matemática. Nessa Árvore podemos observar que no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, outros conceitos matemáticos foram discutidos e que as ideias continuam se conectando a mais de uma área.

As ideias *unidade de medida, peso, massa e média*, associamos apenas a Matemática, e a ideia *quantidade de comida é 100% e o desperdício é x*, apesar de ser um conceito de regra de três, portanto puramente matemático, emergiu para que fosse possível encontrar uma solução à problemática, por isso se conecta a Modelagem Matemática, e ainda, essa ideia surgiu a partir da ideia *como faz porcentagem*, necessidade que surgiu na fase de matematização. A ideia de *colocar a porcentagem de alimento desperdiçado*, está associado a comunicação dos resultados, uma etapa do Ciclo de Modelagem (Figura 1). Porém, é uma ação concreta oriunda da atividade de modelagem matemática, então, conectamos à Educação Matemática Crítica. As demais ideias que estão associadas a Educação Matemática Crítica, apresentam reflexões críticas sobre o desperdício de comida, trazendo um entendimento sobre as funções sociais, característica da Educação Matemática Crítica.

Figura 27 – Árvore de Associação de Ideias Atividade Desperdícios de Comida – Grupo 2

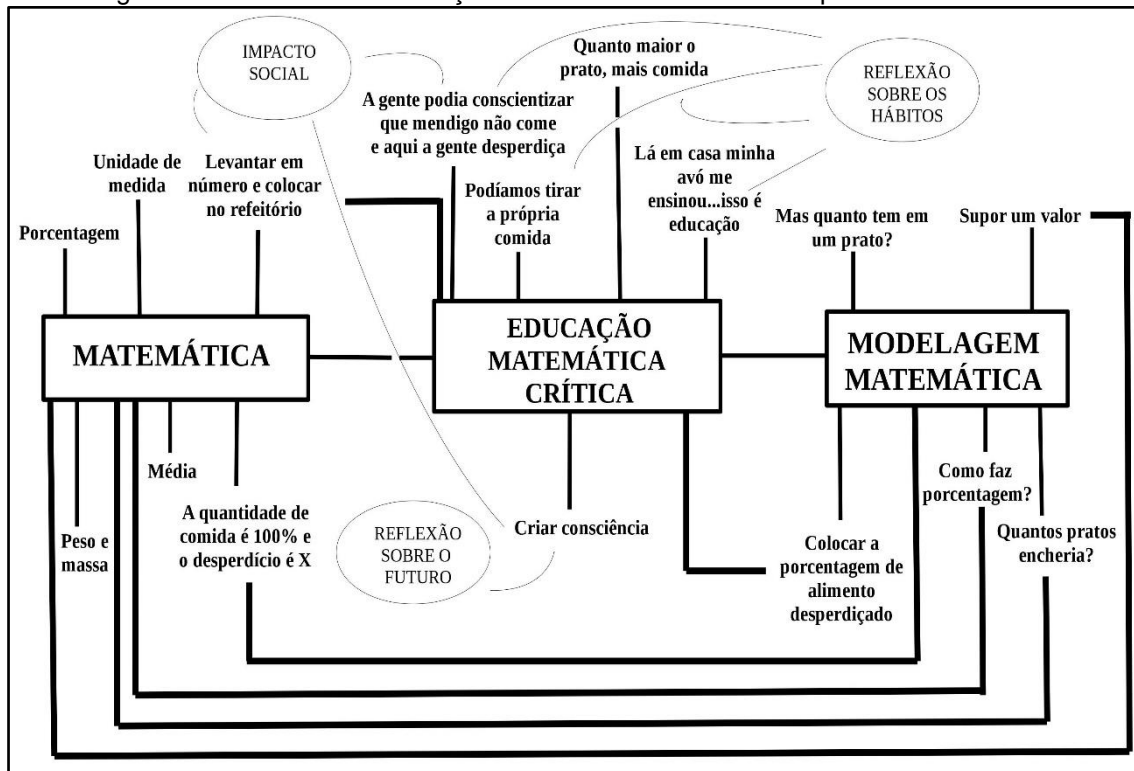


Fonte: Os autores.

As características de diálogo e suas qualidades conforme definidos por Alrø e Skovsmose (2010), subsidiam a construção das Árvores e nos ajudam a evidenciar, *que características da Educação Matemática Crítica são reveladas nos diálogos dos alunos quando desenvolvem atividades de Modelagem Matemática*. Evidenciamos os aspectos, Impacto Social, Reflexão Sobre os Hábitos e Reflexão sobre o Futuro, na Figura 28, que é a Árvore de Associação de Ideias construída para toda a atividade Desperdício de Comida, em que os recortes dos diálogos que emergiram da atividade estão ligados, aos três aspectos descritos.

No desenvolvimento da atividade os alunos, por meio dos diálogos expressaram ideias que envolvem o aspecto *Impacto Social*, levantar em número e colocar no refeitório é um movimento de expandir a informação sobre o desperdício para a comunidade, tentando fazer o que os alunos chamaram de criar consciência, e um desses atos de tomar consciência era mostrar que enquanto há pessoas que passam fome, existem pessoas jogando comida fora. A ideia de estabelecer uma relação entre jogar comida fora e alimentar quem tem fome, não é apenas um aspecto de *Impacto Social*, essa ideia traz também uma *Reflexão sobre os Hábitos*, pois existe um costume de se jogar comida fora, ou porque estamos acostumados a encher o prato, ou porque não temos o costume de tirar a própria comida, ou ainda porque em nossos lares ninguém nos ensinou sobre a importância de não se desperdiçar comida. E essa consciência que os alunos gostariam que se criasse, é um aspecto de *Reflexão sobre o Futuro*, quando se tem consciência sobre um ato presente é possível muda-lo no futuro.

Figura 28 – Árvore de Associação de Ideias da Atividade Desperdício de Comida



Fonte: Os autores.

3.3. Descrição e análise da atividade 3 – Tarifa Branca

A situação-problema investigada refere-se à mudança tarifária da energia elétrica e foi escolhida em conversas entre o professor e os alunos, em que decidiram que se possível poderíamos investigar sobre energia elétrica, pois já havíamos trabalhado com água e comida. Sobre energia elétrica também poderíamos discutir sobre desperdício e uso consciente.

Essa atividade teve início em 24/10/2017 e alguns alunos haviam deixado de frequentar o projeto. Para evitar que algum dos grupos ficasse prejudicado, o professor encaminhou a atividade com os alunos como um único grupo. Diante da situação-problema escolhida, os alunos foram ao laboratório de informática buscar informações sobre produção e transmissão de energia elétrica. Em buscas realizadas no site da Companhia Paranaense de Energia, os alunos encontraram as fontes de energia elétrica, a forma de produção, bem como é feita as diversas cobranças ao longo do ano, como mostra a Figura 29.

Figura 29 – De onde vem a eletricidade

| | |
|---|--|
| <p>Energia elétrica vem das forças do vento, dos raios solares, da queima do gás natural e do óleo, e da força da água</p> | <p>Tipo Produção / fonte = por cabos</p> <p>R\$ Copel = Bandeiras { Verde, Amarela, Vermelho } Acréscimo na bandeira</p> <p>ANEEL</p> |
| <p>Energia elétrica vem das forças do vento dos raios solares, da queima do gás natural e o óleo, e da força da água.</p> | |
| <p>Tipo produção / fonte: por cabos R\$ Copel = Bandeiras (Verde, Amarela, Vermelho) Acréscimo na bandeira. ANAEEEL</p> | |

Fonte: Relatório dos alunos.

Nas pesquisas, os alunos entraram em contato com a forma como o consumo é calculado de acordo com a potência do equipamento elétrico, conforme mostra a Figura 30.

Figura 30 – Modelo Cálculo de Energia

| |
|--|
| <p>Para calcular este consumo basta sabermos a potência do aparelho e o tempo de utilização dele.</p> $E = POT \cdot \Delta T$ |
|--|

Fonte: Relatório dos alunos.

Com as informações apresentadas nas Figuras 29 e 30, o professor conversou com os alunos sobre a tarifa branca que seria uma nova opção para o consumidor a partir de janeiro de 2018. Na tarifa branca, a cobrança pelo consumo de energia elétrica fora do horário de pico¹⁸ é menor quando comparado com os outros horários. Assim, o professor pediu para que os alunos escrevessem os momentos que acreditavam ser de maior consumo de energia elétrica na casa de cada integrante, como destacado na Figura 31.

¹⁸ Horário de pico das 18h às 21h – Intermediário das 17h às 18h e das 21h às 22h – Fora do pico das 22h às 17h.

Figura 31 – Horário de Maior Consumo em casa

| | |
|-----------|----------------|
| Vinícius | 16:00 às 22:00 |
| Marcos | 20:30 às 3:30 |
| Francisco | 16:30 às 02:00 |
| Laura | 12:00 às 00:00 |

Fonte: Relatório dos alunos

Nos diálogos ocorridos no desenvolvimento da atividade, os alunos falavam sobre como seus pais pediam sempre para que não demorassem no banho. Nesse contexto, o professor interagiu com os alunos fazendo questionamentos, conforma transcrição a seguir:

Prof: *Por que os pais sempre pedem para que a gente tome banho rápido?*

Vinícius: *Porque o chuveiro gasta mais.*

Prof: *Será que conseguimos saber o quanto o chuveiro gasta?*

Francisco: *Não é só usar aquela fórmula lá que a gente pesquisou?*

Vinícius: *Mas como vou saber do chuveiro lá de casa?*

Prof: *É, cada um tem um chuveiro diferente em casa, mas podemos fazer o que o Francisco disse, e como podemos fazer isso aqui?*

Vinícius: *Só pesquisar um chuveiro aqui na internet.*

Laura: *E esse triângulo t é o que mesmo?*

Francisco: *O tempo que fica ligado.*

Nesse diálogo é possível evidenciar o aspecto **reconhecer**, quando Francisco diz, “*Não é só usar aquela fórmula lá que a gente pesquisou?*”. Para Alrø e Skovsmose (2010, p. 110), **reconhecer** “é necessário para que se dê sentido às atividades e aos cálculos subsequentes”.

O chuveiro que os alunos pesquisaram possuía 5500 W de potência. Com esse dado, o professor pediu para que os alunos verificassem e trouxessem para a próxima aula, 07/11/2017, quanto tempo eles e seus familiares ficavam com o chuveiro ligado durante o banho. Na data marcada, o professor entregou o quadro 5 com informações sobre os valores de tarifas de energia elétrica.

Quadro 5 – Valor da Tarifa de Energia Elétrica

| | |
|---|-------------|
| Tarifa Convencional | 0,28478 kwh |
| Tarifa Branca Fora do Pico (22h às 17h) | 0,22419 kwh |
| Tarifa Branca Intermediária (17h às 18h e 21h às 22h) | 0,32629 kwh |
| Tarifa Branca Pico (18h às 21h) | 0,51792 kwh |

Fonte: Adaptado de ANEEL (<http://www.aneel.gov.br> acessado em 20/10/2017).

Com o objetivo de que os alunos usassem as informações para subsidiar a decisão de aderir ou não a tarifa branca, o professor iniciou um diálogo conforme transcrição a seguir:

Prof: Pessoal agora com essas informações pensem se na casa de vocês vão aderir.

Francisco: Lá em casa minha mãe faz eu e meus irmãos tomar banho na hora que ela chega, tipo sete horas, e ela toma banho depois da janta.

Marcos: Lá em casa cada dia é um jeito, tem dia que eu tomo banho antes, tem dia que só de madrugada. (risos).

Vinícius: Mas vamos ter que ver quanto fica cada um pra saber, com todo mundo da casa.

Francisco: A gente fez com o banho de cada pessoa em casa, quanto que dava, a minha mãe briga com a gente mais fica bem mais tempo com o chuveiro ligado, ela e meu irmão mais velho são os que mais demoram, eu fiquei oito minutos.

Após a exposição dos hábitos que os alunos têm em casa, a fala de Vinícius, ao dizer o que deve ser feito, indica a qualidade de **posicionamento**. Para Alrø e Skovsmose (2010), o **posicionamento** trata de dizer aquilo que se pensa, de maneira que se respeite a opinião dos demais. O diálogo continua com Francisco, complementando o que foi exposto por Vinícius – *Vinícius: Mas vamos ter que ver quanto fica cada um pra saber, com todo mundo da casa., Francisco: A gente fez com o banho de cada pessoa em casa, quanto que dava, a minha mãe briga com a gente mais fica bem mais tempo com o chuveiro ligado, ela e meu irmão mais velho são os que mais demoram, eu fiquei oito minutos.*

Além da qualidade de **posicionar-se**, evidenciamos o delineamento do conjunto de procedimentos que vão responder ao problema inicial, uma das fases da atividade de Modelagem Matemática, pontuada por Almeida, Silva e Vertuan (2012). Tal fase continua se desenvolvendo como mostra o diálogo transcrito a seguir.

Francisco: O quanto vai pagar?

Prof: Essa quantidade de energia, essa tabela que eu entreguei é que tem as tarifas, igual aquela da água que nós fizemos.

Laura: E o que é esse kwh?

Prof: K é o quilo que é 1000 lembra? O w é watts e o h de hora. Laura: Então, assim, a cada 1000 de energia em uma hora é essa tarifa?

Laura: Mas de onde vem essa hora?

Prof: *Gente hora é unidade de medida de quê?*
 Vinícius: *De tempo.*
 Prof: *E onde que tem tempo aí?*
 Laura: *Aqui na fórmula.*
 Prof: *É.*
 Francisco: *Mas aí não são os minutos?*
 Prof: *É mas e em horas quanto que dá? Pensem aí.*
 Vinícius: *Só dividir por 60.*
 Laura: *Mas vai dar quebrado, olha.*
 Laura: *Professor, tá certo assim?*
 Francisco: *Vamos juntar tudo e fazer vezes o valor dessa tabela pra ver.*
 Laura: *Fazer todos né?*
 Francisco: *Depende da hora que toma banho, vê aí qual é o de pico aí.*

Aqui podemos evidenciar o uso do algoritmo, $E = POT \cdot \Delta T$, apresentado na Figura 30, para determinar o quanto se gastava de energia, e da interação entre os alunos com sucessivas perguntas. A qualidade de **estabelecer contato** se mostra presente. Alrø e Skovsmose (2010, p. 106), afirmam que essa qualidade “pode ser vista, especialmente nas permanentes questões investigativas”, e ainda afirmam que **estabelecer contato** torna os alunos abertos à investigação, uma característica do diálogo.

Quando Francisco diz, “*Vamos juntar tudo e fazer vezes o valor dessa tabela pra ver*”, indica como irá responder a problemática inicial, ou seja, o como pretende construir o modelo matemático (Figura 32) para isso cada aluno usou a equação $E = POT \cdot \Delta T$, para encontrar o quanto de energia cada pessoa em sua casa consumia durante o banho, somando todos ao final para saber quantos quilowatt (kW) eram consumidos por toda a família.

Figura. 32 – Modelo Matemático da Atividade 3 – Tarifa Branca

The image shows a handwritten mathematical model for calculating energy consumption. It lists the energy consumption of each family member and then calculates the total energy consumption in kilowatt-hours (kWh) and kilowatts (kW).

| Person | Time (h) | Power (W) | Energy (Wh) | Energy (kWh) |
|--------|----------|-----------|-------------|--------------|
| Eu | 8 | 500 | 4000 | 4000 |
| mãe | 17 | 500 | 8500 | 8500 |
| Pai | 14 | 500 | 7000 | 7000 |
| Carla | 11 | 500 | 5500 | 5500 |
| Pai | 9 | 500 | 4500 | 4500 |
| Lucas | 8 | 500 | 4000 | 4000 |

$E = 4000 + 7000 + 4500 + 8500 + 5500 + 4000$
 $E = 33,5 \times 0,28478 = 9,54$
 $E = 33,5 \times 0,51792 = 17,35$

Fonte: Relatório dos alunos.

Com os cálculos realizados, os alunos, com a mediação do professor, começaram a utilizar os resultados para verificar se compensaria aderir à Tarifa Branca, como transcrito a seguir:

Laura: *Professor, mas vai ficar mais caro pra mim nem compensa, olha o valor aqui é mais alto.* [Falando do resultado do consumo]

Prof: *É esse valor é do horário de pico, mas não tem como compensar nunca?*

Laura: *Só se for nos outros.*

Prof: *Então, o que vocês podem concluir disso?*

Francisco: *Tomar banho antes ou depois dessa hora.* [Fora do horário de pico].

Vinícius: *Mas o mais barato é esse fora do pico, que é de depois das 22 e antes das 17, minha mãe me mata se eu tomar banho depois das 10.*

Francisco: *Lá em casa acho que ia ser de boa, meus dois irmãos chegam da escola e minha irmã já manda eles pro banheiro, isso umas quatro e pouco, meu pai já toma antes de ir trabalhar e eu e minha irmã é antes de dormir, igual minha mãe.*

Marcos: *Eu acho que em casa também, só meu pai que não ia dar mas, a gente* [referindo-se a ele e aos irmãos] *minha mãe nem liga.*

Vinícius: *Em casa não sei, antes é muito cedo e minha mãe não deixa a gente ficar enrolando depois que ela chega.*

Laura: *Ah prof, vai ter que mudar a hora que toma banho, aí compensa.*

Prof: *É tem que mudar os nossos costumes. E isso é fácil?*

Vinícius: *Fácil não é, mas a gente leu que às vezes pode ficar sem energia porque as pessoas usam sem necessidade ou em hora errada, e se dá pra mudar o horário compensa, é mais barato, e também até pode usar mais também sem pagar mais caro.*

Francisco: *E se pagar menos dá pra gastar com outra coisa.*

Vinícius: *E ainda tem a água igual a gente viu com as tabelas da SANEPAR, lembra?*

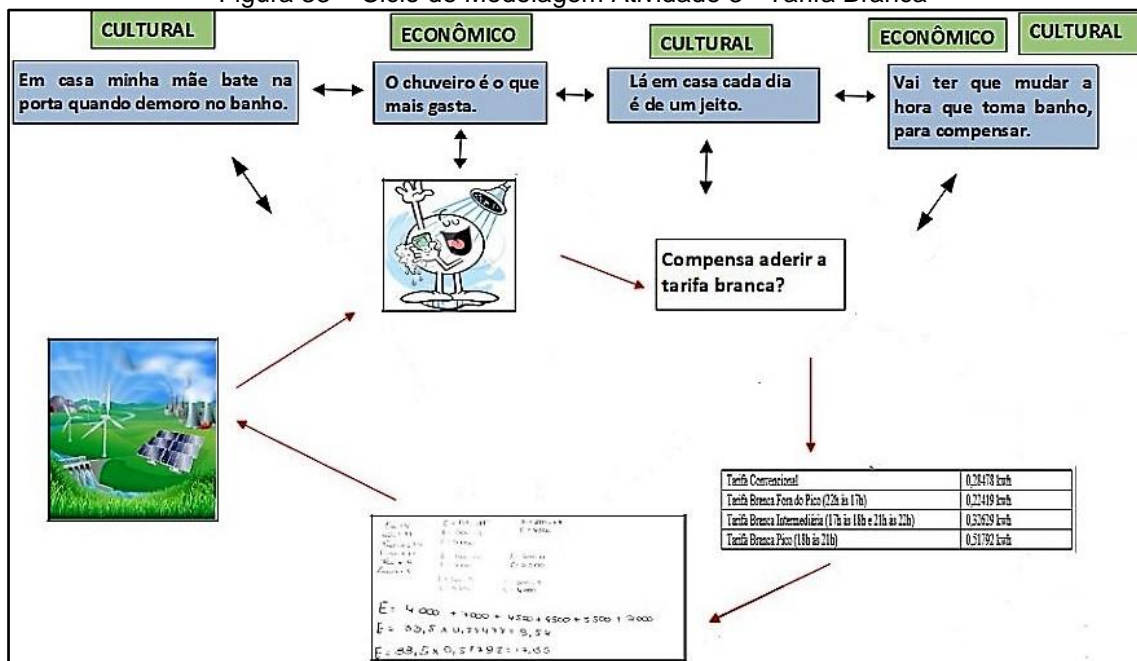
Neste diálogo percebemos que a atividade de Modelagem Matemática transpôs a utilização de um algoritmo para responder a um problema. Os alunos perceberam como a Matemática pode auxiliar a tomar uma decisão. Ao afirmar, “*vai ficar mais caro pra mim, não compensa*”, Laura está usando o resultado para dar respaldo à sua decisão de que não compensa, o que nos leva a inferir ser uma “aplicação adulta” como pontuado por Skovsmose (2001).

Ainda, percebemos que os estudantes se remetem ao dia a dia em suas casas, e como os hábitos estão fortemente arraigados às decisões que tomamos. Laura, após ser indagada pelo professor se realmente nunca ia compensar, faz uma afirmação, “Ah prof, vai ter que mudar a hora que toma banho, aí compensa”, em que se evidencia a rejeição a novos hábitos. Isso mostra que a cultura se faz presente no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, como descrito por Rosa e Orey (2015).

Ao final, a relação estabelecida por Vinícius, “E ainda tem a água igual a gente viu com as tabelas da SANEPAR, lembra?”, entre as pesquisas que fizeram no início com o fato de ter que mudar hábitos, é possível inferir que a atividade os levou a fazer relações e compreender que as mudanças podem ser benéficas.

Assim, apresentamos na Figura 33 o Ciclo de Modelagem da Atividade da Atividade 3 – Tarifa Branca, em que as setas em vermelho representam as fases de acordo com o Ciclo de Almeida e Silva (2012) (Figura 1) e retângulos em azul com recortes das falas dos alunos são as variáveis elencadas por Rosa e Orey (2015) no Ciclo de Modelagem Matemático Sociocrítico (Figura 2

Figura 33 – Ciclo de Modelagem Atividade 3 - Tarifa Branca



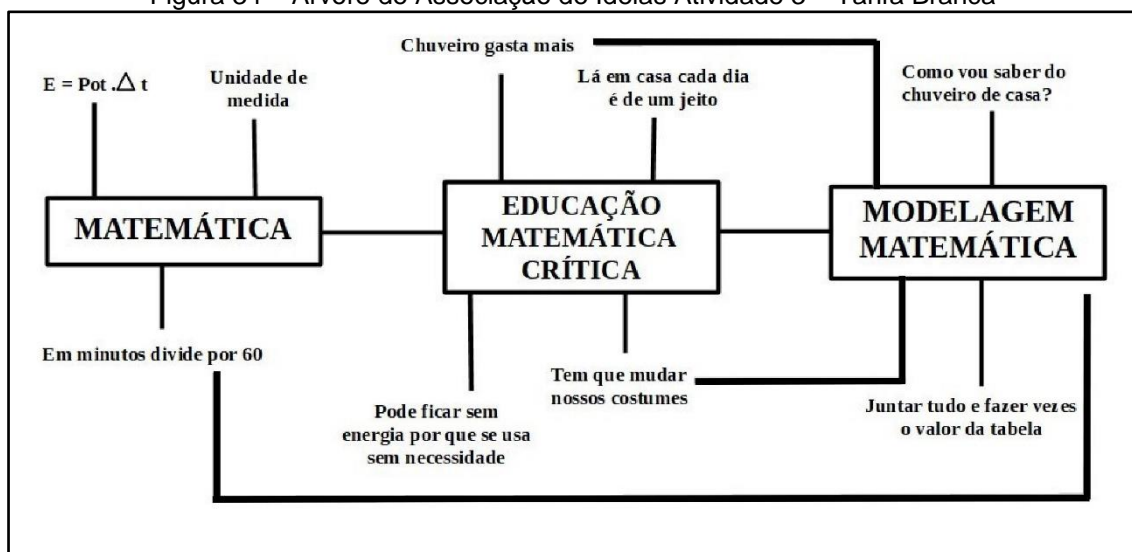
Fonte: Os autores

3.3.1. Árvore de Associação de Ideias do desenvolvimento da Atividade Tarifa Branca.

Na Figura 34 construímos a Árvore de Associação de Ideias da atividade 3 – Tarifa Branca, para evidenciarmos como as ideias dos alunos emergem, dos diálogos, pertencem à Matemática, à Educação Matemática Crítica e à Modelagem Matemática, essa três sendo as “raízes”, que sustentam os “galhos” compostos pelos recortes de diálogos dos alunos.

Associadas apenas à Matemática estão as ideias de utilizar o algoritmo $E = Pot. \Delta t$ e unidade de medida, que apareceram nas pesquisas sobre, de onde vem e como se transmite energia elétrica. A conversão de tempo (*em minuto divide por 60*) é um conceito matemático que foi necessário para encontrar uma solução para o problema, sendo assim, tem conexão com a Modelagem Matemática. As ideias de *como saber do chuveiro lá em casa e juntar tudo e fazer vezes o valor da tabela*, surgiram nas fases de matematização e resolução, respectivamente. No desenvolvimento da atividade as ideias que remetem a reflexão e ação concreta estão associadas a Educação Matemática Crítica e a ideia, *tem que mudar os nossos costumes*, se conecta com Modelagem Matemática porque o costume de tomar banho em um determinado horário implica diretamente na adesão ou não a Tarifa Branca, que era a problemática da atividade.

Figura 34 – Árvore de Associação de Ideias Atividade 3 – Tarifa Branca

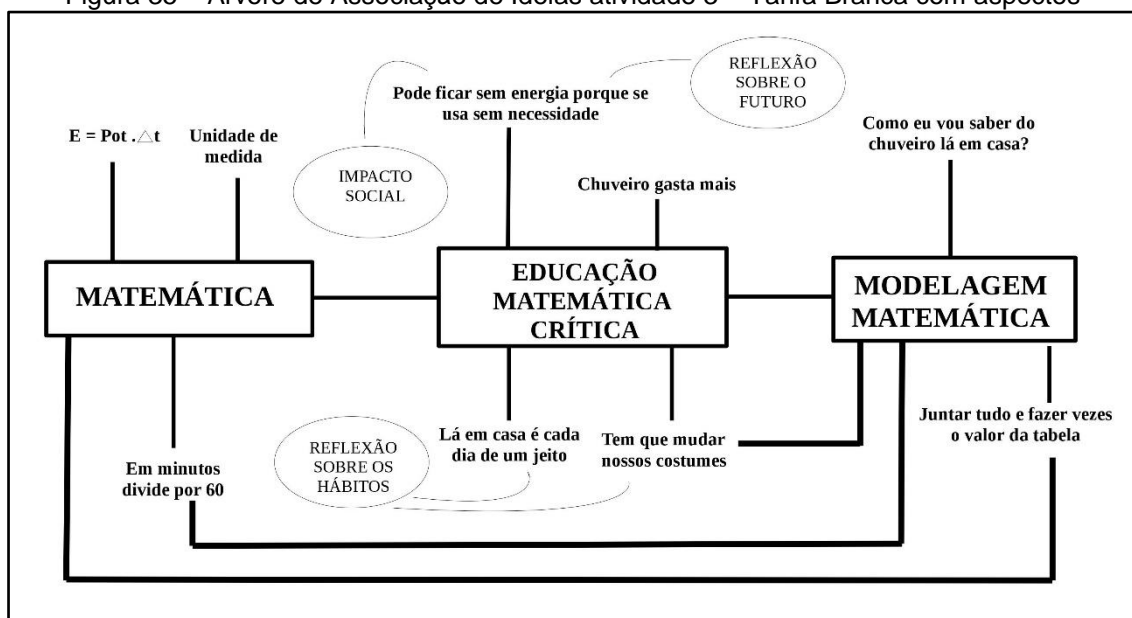


Fonte: Os autores.

Na Figura 35 evidenciamos *características da Educação Matemática Crítica se revelaram nos diálogos dos alunos quando desenvolvem atividades de Modelagem Matemática*, na Árvore os recortes de diálogos que remetem à características da Educação Matemática Crítica foram ligados a três aspectos que inferimos estarem ligados a essas características.

Na atividade, os alunos analisaram se compensaria aderir a Tarifa Branca da Energia Elétrica. No desenvolvimento da atividade refletiram sobre a necessidade do uso da energia elétrica, e viram que se a energia for usada de forma descontrolada pode vir a faltar, e a falta de energia tem *Impacto Social*, pois, fábricas, hospitais e transportes podem ter seu trabalho interrompido pela falta de energia elétrica. Essa falta de energia pode ser imediata ou futura, pois as ações presentes repercutem no futuro, sendo assim tem evidenciamos o aspecto *Reflexão sobre o Futuro*. Para que seja possível além de optar pela Tarifa Branca, também consumir energia de maneira consciente é necessário *Reflexão sobre os Hábitos*, o que se observa quanto os alunos percebem que em suas casas não existe uma rotina e também que já há um costume da família quanto a maneira que consomem a energia elétrica.

Figura 35 – Árvore de Associação de Ideias atividade 3 – Tarifa Branca com aspectos



Fonte: Os autores.

No próximo tópico apresentamos nossas reflexões sobre as três atividades desenvolvidas

3.4. Reflexões

As atividades planejadas e desenvolvidas tiveram como objetivo apresentar reflexões para a nossa questão de pesquisa: *que características da Educação Matemática Crítica são reveladas nos diálogos dos alunos quando desenvolvem atividades de Modelagem Matemática?*

Para que as atividades proporcionassem que se evidenciassem tais características e responder nossa questão de pesquisa, nos debruçamos sobre o referencial teórico da Modelagem Matemática e da Educação Matemática Crítica, e nesse contexto buscamos adequar nossa pesquisa à perspectiva sociocrítica da Modelagem Matemática como definida por Kaiser e Sriraman (2006). Essa perspectiva tem como foco proporcionar o pensamento crítico dos alunos.

A perspectiva sociocrítica corrobora com as características da Educação Matemática Crítica (SKOVSMOSE, 2007, 2017), que traz reflexões sobre o papel da Matemática na educação e como ela pode ser usada para possibilitar a compreensão dos contextos sociais. Sendo assim, nossas atividades em certa medida precisariam estar de acordo com a perspectiva sociocrítica, e com a Educação Matemática Crítica. Para isso, a nossa revisão de literatura, que reúne pesquisas que tratam do entrelaçamento entre Modelagem Matemática e Educação Matemática Crítica, nos inspirou para que o planejamento e o desenvolvimento das atividades estivessem alinhados a nosso referencial teórico.

No desenvolvimento das atividades planejadas com o respaldo teórico supracitado, nos pautamos nas definições de diálogo de Alrø e Skovsmose (2010, p. 119), que o consideram “como uma conversação que visa a aprendizagem”. Os autores ainda pontuam que para essa conversação ser um diálogo deve possuir as características: realizar uma investigação, correr riscos e promover a igualdade. A essas características ainda se acrescentam as qualidades de um diálogo: estabelecer contato, perceber, reconhecer, posicionar-se, pensar alto, reformular, desafiar e avaliar. Também nos apoiamos em pesquisas que realizam articulação entre Modelagem Matemática e as

definições de diálogo de Alrø e Skovsmose (2010), dentre elas Ferruzzi e Almeida (2015), Soares e Vier (2017).

Por meio dos diálogos que emergiram no desenvolvimento das três atividades desenvolvidas com os alunos em vulnerabilidade social, buscamos evidenciar aspectos que revelassem características da Educação Matemática Crítica quando os alunos desenvolvem atividades de Modelagem Matemática. Sendo assim, dos diálogos dos alunos, evidenciamos a emergência de três aspectos: 1. Impacto Social, 2. Reflexão Sobre os Hábitos, 3. Reflexão Sobre o Futuro.

Considerando que o desenvolvimento social visa além da melhoria de capital econômico, os valores, a cultura e capacidade de agir em sociedade (RIGHI; PASCHE AKERMAM, 2006), podemos inferir que os aspectos que evidenciamos nas atividades de modelagem matemática refletem a perspectiva sociocrítica como descrito na pesquisa de Silva e Kato (2012). As pesquisadoras apresentam evidências do que é necessário para que uma atividade de modelagem matemática esteja de acordo com tal perspectiva e que se alinham a Educação Matemática Crítica, e ainda apresentam semelhanças às atividades de nossa revisão de literatura.

Na atividade Mudança Tarifária, podemos destacar a semelhança com as pesquisas de Araújo (2012), Martins e Araújo (2017), Orey e Rosa (2017), pois remetem a uma preocupação com o *Impacto Social* que a problemática em discussão pode ocasionar. Em nossa atividade, observamos a preocupação dos alunos quanto ao fato da mudança em questão ser boa ou ruim para a sociedade, e que a forma com que os dados estavam dispostos dificultava o entendimento dessa mudança, o que os levou a utilizar a Matemática para dar mais clareza e compreensão aos dados apresentados. Nesse caminho até encontrar uma solução para o problema, utilizaram o conhecimento matemático que já possuíam, para construir novos conhecimentos, e empreenderam discussões que os levaram a pensar no seu próprio futuro e na sociedade ao seu redor, ou seja, tivemos um movimento voltado para a melhoria de valor, cultura e ação na sociedade.

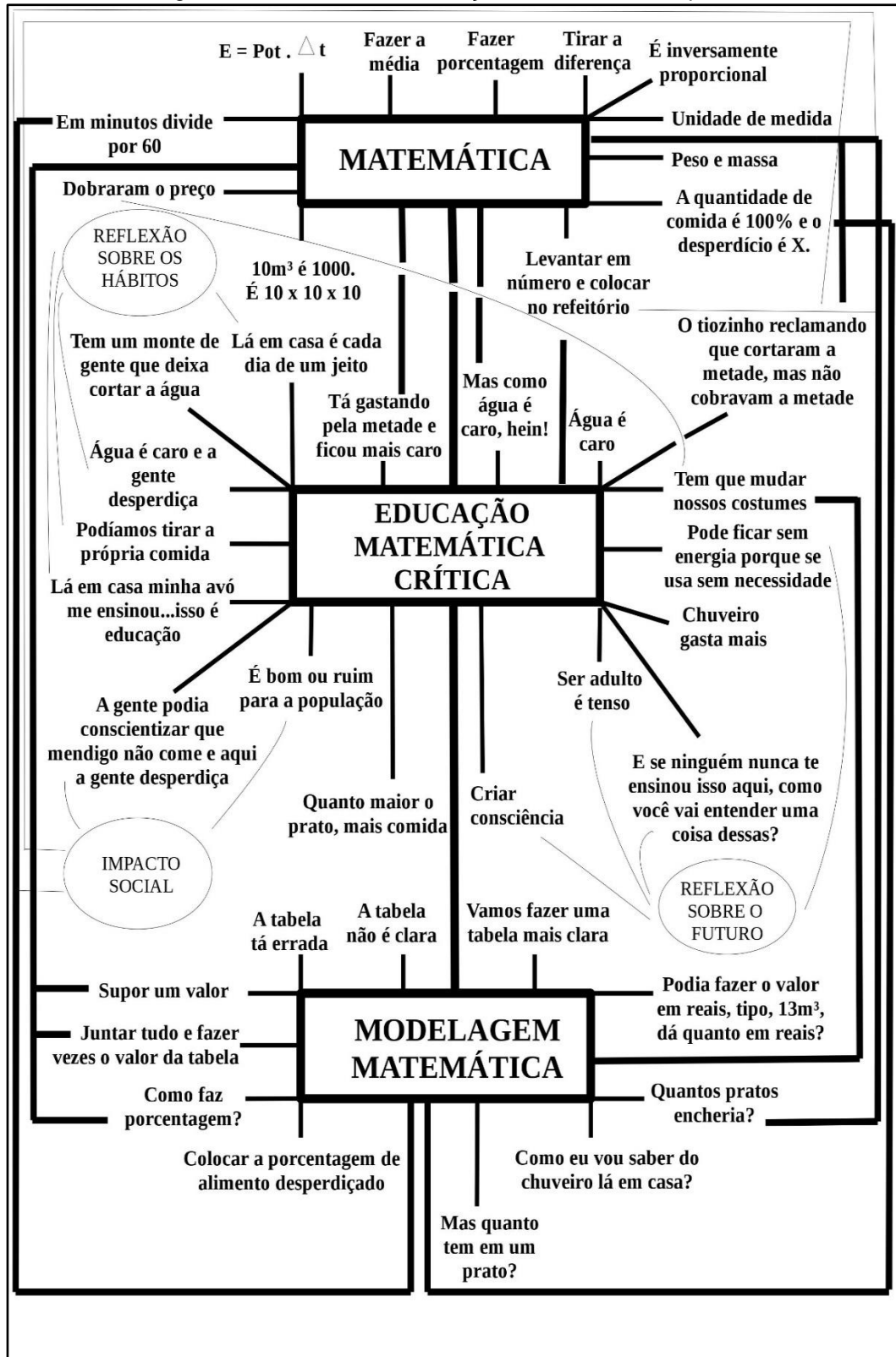
A atividade Desperdício de Comida, fazia parte do cotidiano dos alunos, o que podemos observar nas pesquisas de Mello (2014), Litting e Alves (2016) e

Booni, Lorenzone e Rezende (2017). Os diálogos apresentam evidências de como a proximidade com o tema da atividade fez com que os alunos refletissem sobre seu dia-a-dia (*Reflexão sobre os Hábitos*) principalmente na escola e em casa. As discussões desprenderam reflexões matemáticas importantes como o sistema de medidas, grandeza escalar e vetorial, proporcionalidade, além disso, os alunos se questionaram sobre a necessidade de uma nova coleta de dados para o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. As discussões dos alunos permeavam o impacto do desperdício de comida na sociedade, fazendo com que sua preocupação maior fosse mostrar como esse desperdício se configura, relacionando aos pratos que o desperdício encheria, e qual a porcentagem de comida desperdiçada. Os dois problemas visavam conscientizar que o que estava indo para o lixo poderia alimentar outras pessoas. Sendo assim, pode contribuir para o desenvolvimento social, pois produziu uma sinergia voltada para a sociedade (RIGHI; PASCHE AKERMAM, 2006).

A atividade Tarifa Branca, colocou os alunos a refletir sobre o cotidiano de seus lares, e como contemplam uma nova configuração de cobrança tarifária. Podemos inferir que essa atividade mescla as semelhanças que encontramos na revisão de literatura tanto no que tange ao *Impacto Social*, quanto com a aproximação à realidade dos alunos. A atividade levou os alunos a refletir sobre como a utilização da energia elétrica é importante, como tomar uma decisão (*Reflexão sobre o Futuro*) e como a mudança nos próprios hábitos e de seus familiares não é simples, mas que é possível proporcionar impactos financeiros relevantes apenas alterando os horários dos banhos. As reflexões dessa atividade estão intimamente relacionadas à cultura dos alunos, e de acordo Righi, Pasche e Akermam (2006), à cultura está ligada ao desenvolvimento social.

Assim todas essas reflexões que emergiram dos diálogos das três atividades estão presentes na Figura 36, na qual estão presentes os aspectos que evidenciamos serem concernente às características da Educação Matemática Crítica. A Árvore de Associação de Ideias que construímos com os resultados da pesquisa (Figura 36) tem a Matemática, a Educação Matemática Crítica e a Modelagem Matemática conectadas, como “raízes” que sustentam os “ganhos” que são as ideias evidenciadas nos diálogos.

Figura 36 – Árvores de Associação de Ideias da Pesquisa



Fonte: Os autores.

4. Considerações

Desenvolver atividades de Modelagem Matemática à luz da Educação Matemática Crítica, leva a reflexões de como a Educação Matemática aborda o papel da Matemática na sociedade. Desse modo, trazemos à tona os questionamentos de Skovsmose (2001, p. 19) para nossa investigação.

- 1) A aplicabilidade do assunto: quem usa? Onde é usado?
- 2) Os interesses por detrás do assunto: que interesses formadores de conhecimento estão conectados a esse assunto?
- 3) Os pressupostos por detrás do assunto: que sugestões e que problemas geraram os conceitos e os resultados na matemática? Que contextos tem promovido e controlado o desenvolvimento?
- 4) As funções do assunto: que possíveis funções sociais poderiam ter o assunto?
- 5) As limitações do assunto: em quais áreas e em relação a que questões esse assunto não tem qualquer relevância?

Quanto à aplicabilidade do assunto e seus usuários: as atividades Mudança Tarifária e Tarifa Branca remetem a consumo de água e energia elétrica, recurso que as pessoas usam, e esse consumo é importante para o planejamento familiar; a aplicabilidade da atividade Desperdício de Comida, está ligada ao fato de que em locais de grande consumo de alimentos prontos, como escolas e restaurantes, há elevada quantidade jogada no lixo, o que remete ao consumo consciente de alimento, recurso ao qual algumas pessoas se quer tem acesso todos os dias.

Estávamos interessados em mostrar na atividade Mudança Tarifária, além do consumo consciente da água, como uma mudança aparentemente pequena pode ter grande influência no todo. Para a atividade Desperdício de Comida nosso interesse era que os alunos se conscientizassem sobre o desperdício de um recurso valioso, e ainda utilizassem as unidades de medida. Na atividade Tarifa branca, além de conhecer de onde vem a energia elétrica e como saber o quanto se consome, proporcionar reflexões que o consumo racional parte de pequenas mudanças nos hábitos no dia a dia

O não entendimento dos dados dispostos na tabela de preços da atividade Mudança Tarifária fez com que os alunos utilizassem a Matemática para a construção de uma tabela que julgavam ser mais clara e explicativa; na atividade

Desperdício de comida, a falta de consciência das pessoas quanto ao hábito de jogar comida fora, fez com os alunos se propusessem a usar a Matemática para quantificar o desperdício e utilizar essa informação a fim de promover a conscientização; a atividade Tarifa Branca desencadeia a interdisciplinaridade por tratar de questões de geração e transmissão de energia elétrica, e ainda faz com que uma ação diária (banho) promova reflexões sobre os comportamento dos alunos.

O intuito das atividades foi promover a função social e a conscientização sobre o consumo de recursos. E por isso, entendemos que as atividades se mostram abrangentes e permitem estabelecer relações que extrapolam os conceitos matemáticos, possibilitando a abordagem nos mais diferentes contextos, pois água se utiliza em todos os locais, energia elétrica é primordial para o funcionamento da sociedade atual e comida é um recurso essencial à vida. Por isso, esses assuntos são de relevância em qualquer área, é possível abordá-los desde ambientes que apresentem escassez dos mesmos, até ambientes em que haja fartura e abundância desses recursos, pois tanto na escassez quanto na abundância é importante refletir sobre o consumo consciente.

Essa tentativa de resposta aos questionamentos de Skovsmose (2001), nos remete a alguns dos Objetivos do Desenvolvimento Social (ONU, 2015), como: fome zero, água potável, energia limpa e acessível, consumo responsável. Assim, inferimos que as atividades de modelagem matemática que planejamos e desenvolvemos como os alunos se mostram relevantes frente aos pensamentos globais de desenvolvimento.

Sobre os questionamos no início do tópico 1.2 – *de que maneira a educação nos moldes atuais está contribuindo com o desenvolvimento social? E qual o papel da Matemática nesse processo?* – nos atentamos a refletir levando em consideração a pesquisa realizada.

A primeira pergunta talvez caiba a uma nova investigação responder, porém os argumentos supracitados nos permitem inferir que as atividades desenvolvidas em nossa pesquisa têm possibilidade de contribuir para o desenvolvimento social e o papel da Matemática se mostrou evidente pois

subsidiou as respostas dos alunos perante a problemáticas que levantaram no desenvolvimento de cada atividade.

As atividades de modelagem matemática desenvolvidas envolveram a participação ativa dos alunos na construção dos modelos matemáticos, que foram construídos objetivando responder às problemática por eles mesmos criadas. Nesse encaminhamento trataram de questões que envolveram sua participação ativa na sociedade, pois refletiram sobre seu papel como cidadãos. Com isso, as situações partiram de um problema não matemático da realidade e o professor atuou como mediador, orientando os alunos na condução da formulação dos problemas a serem investigados bem como na construção dos modelos matemáticos com vistas a dar solução aos problemas, fazendo com que os alunos utilizassem os conceitos matemáticos que já conheciam, aprimorassem outros e também aprendessem novos.

Levando em consideração o contexto, inferimos que nossas atividades se enquadram na perspectiva sociocrítica da modelagem matemática, pois, possui as características elencadas por Silva e Kato (2012), além de podermos observar características semelhantes às atividades que mostramos em nossa revisão de literatura, na qual as pesquisas apresentadas tratavam de atividades que continham impacto social e se aproximavam da realidade dos alunos.

Os ciclos de modelagem construídos para cada grupo em cada atividade, nos mostra como ocorreram as fases da Modelagem Matemática conforme Almeida e Silva (2012) (Figura 1) e quais as variáveis que influenciaram esse processo de acordo com Rosa e Orey (2015) (Figura 2).

Destacamos que as Árvores de Associação de Ideias, que mostram o entrelaçamento entre a Matemática, a Educação Matemática Crítica e a Modelagem Matemática, evidenciam as ideias que convergem para os aspectos que são concernentes a características da Educação Matemática Crítica – Impacto Social, Reflexão sobre o Futuro e Reflexão sobre os Hábitos.

Mesquita e Ceolim (2017) em sua pesquisa, por meio da análise textual discursiva, encontraram três categorias que emergiram de uma atividade de modelagem matemática na perspectiva sociocrítica:

i) compreensão de situações da realidade com motivação para aprendizagem por meio da Modelagem Matemática; ii) interatividade e democracia por meio da Modelagem Matemática; iii) desenvolvimento de competência crítica e autonomia a partir do conhecimento reflexivo possibilitado pela Modelagem Matemática (MESQUITA; CEOLIM, 2017, p. 295).

Quanto a primeira categoria podemos inferir que as atividades de nossa pesquisa motivaram os alunos para a aprendizagem, pois mesmo com nossas aulas sendo semanais e de cinquenta minutos conseguimos finalizar todas as atividades. No desenvolvimento das atividades, podemos observar pelos ciclos de modelagem que construímos para cada atividade e pelas Árvores de Associação de Ideias, que as categorias ii e iii de Mesquita e Ceolim (2017), foram contempladas em nossas atividades.

No que diz respeito à configuração das aulas pautadas na Modelagem Matemática como alternativa pedagógica, é pertinente ressaltar que desenvolver essas atividades ao longo do semestre foi um desafio recompensador, e de que apesar do encontros serem semanais e de cinquenta minutos, o comprometimento dos alunos com as atividades se mostrou de suma importância para que a cada semana fosse possível dar continuidade no trabalho da semana anterior. O fato de serem apenas dois grupos também contribuiu significativamente para que as atividades se desenvolvessem com fluidez pois o professor estava sempre muito próximo de todos para fazer as devidas orientações. Também destacamos como fator de sucesso no desenvolvimento das atividades o tempo de trabalho do professor nessa configuração de aula, visto que, era o terceiro ano que trabalhava com aulas semanais na escola, e o desenvolvimento de atividades que demandavam várias aulas para serem concluídas já era uma realidade dos anos anteriores.

Os sujeitos de nossa pesquisa eram alunos em vulnerabilidade social, ou seja, pertencentes a:

famílias e famílias de indivíduos com perda ou fragilidade de vínculos de afetividade, pertencimento e sociabilidade; ciclos de vida; identidades estigmatizadas em termos étnico, cultural e sexual; desvantagem pessoal resultante de deficiências; exclusão pela pobreza e, ou, no acesso às demais políticas públicas; uso de substâncias psicoativas; diferentes formas de violência advinda do núcleo familiar, grupos e indivíduos; inserção precária ou não inserção no mercado de trabalho formal e informal; estratégias e alternativas

diferenciadas de sobrevivência que podem representar risco pessoal e social (BRASIL, 2005, p. 33).

Portanto o aspecto *Impacto Social* que evidenciamos nas atividades de modelagem matemática pode contribuir para os alunos em vulnerabilidade social, quando coloca os alunos a refletirem sobre as políticas públicas já existentes ou que deveriam existir para que fosse possível diminuir a vulnerabilidade social. A Tarifa Branca é um tipo de política pública que trouxemos para a sala de aula de Matemática, nessa atividade os alunos puderam pensar sobre as vantagens de se aderir a mesma e o que seria necessário para que isso ocorresse. A falta de acesso a políticas públicas gera vulnerabilidade social.

O aspecto *Reflexão sobre os Hábitos*, emergiu dos diálogos dos alunos que em geral faziam alusão a suas casas ou lugares que frequentavam. Nesse movimento de se remeter às suas próprias relações sociais em espaços de sua intimidade estão reforçando vínculos e laços com sua própria cultura, sua individualidade e os laços afetivos com seus familiares e outras pessoas próximas. Um ser humano que se enxerga como um indivíduo único, é totalmente empoderado e plenamente capaz de quebrar estigmas, sejam estes quanto ao seu gênero, raça, religião ou qualquer outro.

Evidenciar o aspecto *Reflexão sobre o Futuro*, é perceber que a atividade de modelagem matemática pode produzir efeitos para além de aprender sobre conceitos matemáticos. A vulnerabilidade social está atrelada a pobreza, a qual podemos associar a falta de trabalho. Quando um aluno nessas condições é capaz de perceber que aprender sobre algo pode fazer diferença no futuro, esse já se vê como um adulto, alguém que tem contas a pagar, e que necessita para isso de um emprego, o faz querer ser diferente do que é hoje, que é possível ir além do estigma da exclusão, que é possível pensar no hoje para ser melhor amanhã, na família, no emprego, em sua vida em sociedade, exercer sua plena cidadania independente de seu passado.

Talvez de outras atividades de modelagem matemática, outros aspectos se evidenciassem e pudessem contribuir para revelar características da Educação Matemática Crítica, e acreditamos que os aspectos que evidenciamos são capazes de fazer um movimento de alavancagem na vida desses alunos e,

de certa maneira, romper com estigmas e preconceitos trazendo oportunidades para que esses alunos possam usufruir das coisas boas que a vida têm para lhes oferecer.

Por fim, podemos pensar que nosso trabalho se limitou a pesquisar estudantes em um contexto específico, no qual estavam inseridos em um ambiente estruturado para proporcionar empoderamento e também nos limitamos a verificar a realidade no contexto da EDHUCCA, pois na atividade Desperdício de Comida os alunos sugeriram investigar o desperdício de restaurantes e outros ambientes para além da EDHUCCA.

Considerações para uma análise em outros contextos com outras atividades ou até mesmo com as aqui apresentadas, pode ser desencadeadoras de novas pesquisas e podem ajudar a fortalecer as áreas de Modelagem Matemática na Educação Matemática e da Educação Matemática Crítica.

5. Produto educacional

Com o intuito de colaborar com a prática docente, a partir das três atividades de desenvolvidas, propomos como produto educacional um material curricular educativo. Para Aguiar e Oliveira (2014, p. 581), “materiais curriculares educativos têm como objetivo estabelecer uma comunicação com professores por meio de representações criadas para desenvolver, por exemplo, um determinado conteúdo matemático”.

O material curricular presente no Produto Educacional traz a proposta inicial desenvolvida com sujeitos da pesquisa, e como e quais conteúdos matemáticos emergiram no desenvolvimento da atividade, e também sugestões de outros encaminhamentos para propiciar aos professores um número maior de possibilidades no desenvolvimento dessas atividades de modelagem matemática. Para tanto, concordamos com Aguiar e Oliveira (2014, p. 581), que pontuam que materiais curriculares “sinalizam ao professor diversos aspectos, tais como: planejamento da aula, interação entre professores e estudantes, organização da sala de aula e organização dos estudantes nas aulas, possíveis respostas para a tarefa proposta, etc.”

Nosso material curricular tem a intenção tanto de apoiar a aprendizagem dos alunos quanto a de professores, portanto, ele se caracteriza como um material curricular educativo. Stein e Kim (2009), apud (PALANCH, 2016, p.1062) colocam dois elementos principais que constituem um material curricular educativo, a antecipação e a transparência. A antecipação se refere a antecipar possíveis respostas dos alunos ou aquilo que eles podem pensar no desenvolvimento da atividade proposta, já a transparência é a comunicação direta aos professores sobre as ideias pedagógicas e matemáticas contidas na atividade.

Assim, como antecipação trazemos a experiência vivenciada no desenvolvimento da pesquisa, apresentando como o professor interagiu com os alunos, e quais caminhos os alunos percorreram. Como transparência apontamos outras possibilidades que pensamos ser possíveis de se desencadear e/ou explorar, para além daquelas que se evidenciaram em nossa pesquisa.

Com isso, a estrutura do produto educacional se apresenta como:

1. Falando sobre Modelagem Matemática

Neste item apresentamos uma breve caracterização de nosso entendimento sobre Modelagem Matemática, modelo matemático, diferentes perspectivas de modelagem matemática e possíveis encaminhamentos para a implementação na sala de aula.

2. Possibilidade de uso da Modelagem Matemática na sala de aula

Para esse item são descritas as atividades de modelagem matemática como se encaminharam na sala de aula, destacamos seu planejamento, interação que emergiu entre professor e alunos, organização da sala de aula, bem como os conteúdos matemáticos que emergiram. Além disso, apresentamos outras possibilidades de abordagem matemática que suscitou após nossas reflexões a partir dos dados coletados na pesquisa.

REFERÊNCIAS

- AGUIAR, W. R.; OLIVEIRA, A. M. P. A transformação dos textos dos materiais curriculares educativos por professores de matemática: uma análise dos princípios presentes na prática pedagógica. **Boletim de educação matemática**, Rio Claro, v. 28, n. 49, p. 580-600. 2014.
- ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Boletim de educação matemática**, Rio Claro, v. 17, n. 22, p. 19-36, 2004.
- ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de Modelagem Matemática: um olhar sobre os modos de inferência. **Ciência & Educação**, v. 18, n. 3, p. 623-642, 2012.
- ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. ed. 1 São Paulo: Contexto 2012.
- ALMEIDA, L. W.; VERTUAN, R. E. Perspectiva educacional e perspectiva Cognitivista para a Modelagem Matemática: um estudo mediado por Representações semióticas. **Revista de Modelagem na Educação Matemática**, v. 1, n. 1, 28-42, 2010
- ALRØ, H., SKOVSMOSE, O. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática**. ed. 1 Belo Horizonte: Autêntica, 2010.
- ARAÚJO, J. L. Uma abordagem sócio-crítica da modelagem matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. **Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 55-68, 2009.
- ARAÚJO, J. L.; MARTINS, D. A. A oficina de modelagem #OcupalCEx: Empoderamento por meio da matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v.6, n.12, p.109-129, 2017.
- ARAÚJO, J. L.; CAMPOS, I. S. Negotiating the Use of Mathematics in a Mathematical Modelling Project. In: STILLMAN, G. A; BLUM, W; KAISER, G **International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling**. Springer. 2015.

ARAÚJO, J. L. Ser Crítico em Projetos de Modelagem em uma Perspectiva Crítica de Educação Matemática. **Boletim de educação matemática**, Rio Claro, v.26, n.43, p. 839-859. 2012.

BARBOSA, J.C. Modelagem Matemática e Perspectiva sócio-crítica. **SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, Santos, v.9, p 1-13, 2003.

BARBOSA, J. C. Mathematical Modelling in classroom: a critical and discursive perspective. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik – ZDM– The International Journal on Mathematics Education**, v. 38, n. 3, p. 293-301, 2006.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática: concepções e experiências de futuros professores**. 2001. 253 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

BARROS, M. C.; KATO, L. A. A Modelagem matemática e a Educação Ambiental Crítica: Um estudo sobre a dinâmica populacional de Campo Mourão. In. VI Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática. **Anais**. Curitiba- PR. 2014.

BLUM, W. Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do?. In: Cho, S. **The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education**. Springer 2015

BOONE, M. K. S.; LORENZONI, L. L.; REZENDE, O. L. T. O desenvolvimento do empowerment via atividade de modelagem matemática: reflexões acerca do crescimento urbano do município de Colatina. In X Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática. **Anais**. Maringá. 2017.

BORBA, M. C.; SKOVSMOSE, O. A ideologia da certeza em educação matemática. In: SKOVSMOSE, O. **Educação matemática crítica: a questão da democracia**. Campinas, SP: Papyrus, 2001. p. 127-148

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization**. v. 39, New York: Springer, 2005.

BRASIL, Ministério do Desenvolvimento Social e Combate a Fome. **Política Nacional de Assistência Social**. Brasília. 2005.

CAMPOS, I. S. **A divisão do trabalho no ambiente de aprendizagem de modelagem matemática segundo a Educação Matemática Crítica**. 2018. 253 p. Tese (Doutorado em Educação: Conhecimento e Inclusão Social), Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2018.

COSTA, J. A. A. **Diálogo em sala de aula: interações mediadas pela investigação matemática**. 2018. 90 p. Dissertação Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2018.

DOERR, H. M; et al. **Representations of Modelling in Mathematics Education**. In. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Springer. 2017.

FERRUZZI, E. C. **Interações discursivas e aprendizagem em Modelagem Matemática**. 2011. 228 p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2011.

FERRUZZI, E. C.; ALMEIDA, M. L. W. Diálogos em modelagem matemática. **Ciência & Educação**, v. 21, n. 2, p. 377-394, 2015.

FREITAS, W. S. **A matematização crítica em projetos de modelagem**. 2013. 260 p. Tese (Doutorado em Educação: Conhecimento e Inclusão Social), Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2013.

GARNICA, A. V. M. História Oral e educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

JACOBINI, O. R. **A modelagem matemática como instrumento de ação política na sala de aula**. 2004. 225 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2004.

JACOBINI, O. R.; WODEWOTZKI, M. L. L. Uma Reflexão sobre a Modelagem Matemática no Contexto da Educação Matemática Crítica. **Boletim de educação matemática**, v.19, n. 25, p. 71-88, 2006.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **The International Journal on Mathematics Education**, v. 38, n. 3, p.302-310, 2006.

KISTEMANN JR, M. A.; CANEDO JR, N. R. A participação das mídias no fazer Modelagem de alunos do Ensino Fundamental a partir de uma perspectiva crítica. In. VII Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática. **Anais**. Londrina. 2016

KLÜBER, T. E.; BURAK, D. Concepções de modelagem Matemática: contribuições teóricas. **Educação matemática pesquisa: revista do programa de estudos pós-graduados em educação matemática**, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 17 – 34, 2008.

LITTING, J.; ALVES, L. C. A Modelagem Matemática sob a Perspectiva Sociocrítica: O Empowerment no Desenvolvimento do Conhecimento Reflexivo. In. VII Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática. **Anais**. Londrina- . 2016.

MANHOLI, P. A. **Curso de pré-cálculo I**. Campinas: Unicamp 2010.

MARTINS, D. A.; ARAÚJO, J. L. O planejamento da oficina #OCUPAICEX: práticas colaborativas de um grupo de modelagem. In X Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática. **Anais**. Maringá. 2017.

MELLO, J. A. Reflexões obre a Educação Matemática Crítica a partir de Atividades de Modelagem Matemática. In. VI Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática. **Anais**. Curitiba. 2014.

MESQUITA, M. N.; CEOLIM, A. J. Modelagem Matemática: Abordagens na Educação Básica na perspectiva da Educação Matemática Crítica. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v.6, n.12, p.281-305, 2017.

ONU. **Os Objetivos do Desenvolvimento do Milênio**. 2000 Disponível em <<http://www.odmbrasil.gov.br/os-objetivos-de-desenvolvimento-do-milenio>> Acesso em: outubro.2018.

ONU. **Objetivos do Desenvolvimento Social**. 2015. Disponível em <<https://nacoesunidas.org/pos2015/agenda2030/>> Acesso em: outubro.2018.

OREY, D.I C.; ROSA, M. Mathematical Modelling in a Long-Distance Teacher Education in Brazil: Democratizing Mathematics. In: STILLMAN, G. A; BLUM, W; KAISER, G **International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling**. Springer. 2015.

PAGUNG, C. M. D.; REZENDE, O. L. T., LORENZONI, L. L. Contribuições da Modelagem Matemática na construção do conceito de função a partir da geração de renda em uma associação de catadores de resíduos sólidos. In. 9ª Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática. **Anais**. São Carlos, 2015.

PALANCH, W. B. L. Professores que ensinam matemática e suas relações com materiais curriculares e materiais curriculares educativos. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 9, n. 21, 2016.

RIGHI, L. B; PASCHE, D. F.; AKERMAN, M. Saúde e desenvolvimento: interconexões, reorientação dos serviços de saúde e desenvolvimento regional. Santo André, 2006.

ROSA, M.; OREY, D. C. Social-critical Dimension of Mathematical Modelling. In: STILLMAN, G. A; BLUM, W; KAISER, G **International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling**. Springer. 2015.

ROSA, M.; OREY, D. C. A dimensão crítica da modelagem matemática: ensinando para a eficiência sócio-crítica. **Revista Horizontes**, v.25, n.2, p.197-206, 2007.

SACHS, L.; ELIAS, H. R. A educação matemática crítica proporcionando uma discussão sobre currículo na formação inicial de professores. **Revista Paranaense de Educação Matemática**. Campo Mourão. v.6, n.12, p.397-420, 2017.

SIMONETTI, D.; et al. Modelagem Matemática: uma possível contribuição social. In. VI Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática. **Anais**. Curitiba. 2014.

SILVA, L. A.; OLIVEIRA, A. M. P. Quando a escolha do tema em atividades de modelagem matemática provém do professor: o que está em jogo? **Acta Scientiae**, Canoas, v.17, n.1, p.40-56. 2014

SILVA, C; KATO, L. A. Quais Elementos Caracterizam uma Atividade de Modelagem Matemática na Perspectiva Sociocrítica? **Boletim de educação Matemática**, Rio Claro, n.43, p. 817-838. 2012

SILVA, C. L. A.; GODOY, E. V.. Tendências em educação matemática que privilegiam as dimensões sociais, cultural e política da matemática escolar. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v.7, n.4, p. 128-148, 2016.

SKOVSMOSE, O.; et. al. A aprendizagem em uma posição de fronteira: *foregrounds* e intencionalidade de estudantes de uma favela brasileira. **Boletim de educação Matemática**, Rio Claro, v. 26, n 42A, p. 231-260, 2012.

SKOVSMOSE, O. Cenários para Investigação. **Boletim de educação Matemática**, Rio Claro, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

SKOVSMOSE, O. O que poderia significar a educação matemática crítica para diferentes grupos de estudantes? **Revista Paranaense de Educação Matemática**. Campo Mourão, v.6, n.12, p.18-37, 2017.

SKOVSMOSE, O. **Educação matemática crítica: a questão da democracia**. ed. 1 Campinas: Papirus, 2001

SKOVSMOSE, O. **Educação crítica: incerteza, matemática, responsabilidade**. Ed. 1 São Paulo: Cortez, 2007.

SOARES, D. S.; VIER, G. Os diálogos em um ambiente de análise de modelos e tecnologias: queda de um objeto com resistência do ar. **Educere Et Educare**, v.12, n.24, 2017.

SOUZA, J. F.; MENDONÇA, L. O.; AMARAL, L. H. Desenvolvendo competências para lidar com as finanças pessoais: Contribuições de um ambiente de modelagem matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v.6, n.2, p. 37-53, 2015.

SPINK, M. J. **Práticas discursivas e produção de sentidos no cotidiano**. Rio de Janeiro: Ed Virtual, 2013.

SPINK, MJ. **Linguagem e produção de sentidos no cotidiano**. Rio de Janeiro: Centro Edelstein de Pesquisas Sociais, 2010.

VILLARREAL, M. E.; ESTELEY, C. B.; SMITH, S.. Pre-service Mathematics Teachers' Experiences in Modelling Projects from a Socio-critical Modelling Perspective. In. STILLMAN, G. A; BLUM, W; KAISER, G **International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling**. Springer. 2015.

ANEXO 1 – Termo de autorização

Tendo em vista a pesquisa de mestrado de Rafael Machado da Silva, professor dessa instituição, declaro que a Escola de Desenvolvimento Humano Casa do Caminho (EDHUCCA), autoriza que o mesmo possa utilizar os registros escritos e audiovisuais dos estudantes de nossa escola nas aulas do ano de 2017, podendo ser esses registros utilizados para publicações em congressos e eventos da área, desde que os nomes dos alunos sejam mantidos em sigilo, garantindo o anonimato.

Escola de Desenvolvimento Humano Casa do Caminho (EDHUCCA)