

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA E DE
MATERIAIS**

DANIEL CORADINI SCHWARZ

**ANÁLISE DE ESTIMATIVA DE ERRO APLICADA A PROBLEMAS DE
INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA, COM FORMULAÇÃO
TOTALMENTE EULERIANA, VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS
FINITOS**

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2018

DANIEL CORADINI SCHWARZ

**ANÁLISE DE ESTIMATIVA DE ERRO APLICADA A PROBLEMAS DE
INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA, COM FORMULAÇÃO
TOTALMENTE EULERIANA, VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS
FINITOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para a obtenção do título de "Mestre em Engenharia" - Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos.

Orientador: Prof. Dr. Hilbeth Parente Azikri de Deus

CURITIBA
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

S411a Schwarz, Daniel Coradini

Análise de estimativa de erro aplicada a problemas de interação fluido-estrutura, com formulação totalmente euleriana, via método dos elementos finitos / Daniel Coradini Schwarz.— 2018.

95 p.: il.

Disponível via World Wide Web.

Texto em português com resumo em inglês.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais. Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos, Curitiba, 2018.

Bibliografia: p. 83-85.

1. Engenharia mecânica - Dissertações. 2. Interação fluido-estrutura. 3. Método dos elementos finitos. 4. Análise numérica. 5. Dinâmica dos fluidos. 6. Teoria da estimativa. 7. Análise de erros (Matemática). 8. Euler, Equações de. 9. Geração numérica de malhas (Análise numérica). 10. Métodos de simulação. I. Deus, Hilbeth Parente Azikri de, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais. III. Título.

CDD: Ed. 23 -- 620.1

TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº 344

A Dissertação de Mestrado intitulada: **Análise de estimativa de erro aplicada a problemas de Interação Fluido-Estrutura, com formulação totalmente euleriana, via Método dos Elementos Finitos**, defendida em sessão pública pelo Candidato **Daniel Coradini Schwarz**, no dia 13 de dezembro de 2018, foi julgada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia, área de concentração: Mecânica dos Sólidos, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais – PPGEM.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Hilbeth Parente Azikri de Deus - Presidente - UTFPR

Prof. Dr. Marco Antônio Luersen - UTFPR

Prof. Dr. Juliano de Bem Francisco - UFSC

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Curitiba, ____ de _____ de 20__.

Carimbo e assinatura do Coordenador do Programa

RESUMO

SCHWARZ, Daniel Coradini. **Análise de estimativa de erro aplicada a problemas de Interação Fluido-Estrutura, com formulação totalmente euleriana, via Método dos Elementos Finitos**. 90 p. Dissertação - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

Análises de Interação Fluido-Estrutura (FSI) constituem um tópico de grande relevância em diversas áreas, como engenharia e ciências biomédicas. Estimadores de erro são conceitos de grande importância em simulações numéricas, tendo por função avaliar a precisão e qualidade das soluções aproximadas. Estes estimadores também são essenciais para a aplicação de malhas adaptativas, que são por sua vez ferramentas atualmente indispensáveis para o desenvolvimento de algoritmos eficientes. O presente trabalho apresenta, neste contexto, um método para resolução de problemas FSI pelo método dos elementos finitos. Emprega-se uma abordagem totalmente euleriana com malha conforme, o sólido é neo-hookeano e fluido é newtoniano, ambos incompressíveis. Realiza-se uma análise de estimativa de erro, os resultados são então utilizados para geração de uma malha adaptativa. A geração desta malha é feita por refinamento do tipo h-adaptativo. O código computacional é desenvolvido em FreeFem++. Dois problemas são propostos, os resultados obtidos são bastante próximos aos disponíveis na literatura. O refinamento adaptativo proposto é comparado ao refinamento uniforme. Observa-se que o primeiro é mais eficiente, ou seja, resulta em menores erros para um mesmo número de elementos de malha.

Palavras-chave: Interação Fluido-Estrutura. Estimativa de erro. Formulação totalmente euleriana.

ABSTRACT

SCHWARZ, Daniel Coradini. **Error estimate analysis applied to Fluid-Structure Interaction problems, with fully Eulerian formulation, via Finite Element Method.** 90 p. MSc Dissertation - Posgraduate Program in Mechanical and Materials Engineering, Federal University of Technology - Paraná. Curitiba, 2018.

Fluid-Structure Interaction (FSI) is a subject of great importance in many domains, as engineering and biomedical sciences. Error estimates are of great relevance in numerical simulations, as they allow us to evaluate the accuracy and quality of the approximate solutions. These estimates are also essential for the application of adaptive meshes, which are currently indispensable tools for the development of efficient algorithms. This study presents a finite element method, with a fully Eulerian approach and a conforming mesh, for the analysis of FSI problems. The solid domain is modelled as neo-Hookean and the fluid is considered Newtonian, both incompressible. Error estimates for the FSI formulation are derived and employed in the implementation of an adaptive mesh. This mesh is generated through an h-adaptive refinement. The computational code is developed on FreeFem++. Two FSI problems are proposed, the results correlate well with those available in the literature. The adaptive mesh is compared with a uniform refinement. It's shown that the former is more efficient, resulting in smaller errors for an equally sized mesh.

Keywords: Fluid-Structure Interaction. Error estimate. Fully Eulerian formulation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Conformidade da malha - Fonte: (HOU; WANG; LAYTON, 2012) . . .	18
Figura 2 – Mapeamento entre configurações material e espacial	19
Figura 3 – Domínio de referência, ALE e espacial e mapeamentos	20
Figura 4 – Diagrama comutativo - Espaços de funções	55
Figura 5 – Refinamento VVA	59
Figura 6 – Malha original com um elemento em M_{ref} (triângulo em cinza)	60
Figura 7 – Vértices adicionados na etapa A (círculos brancos)	60
Figura 8 – Vértice adicionado na etapa B (círculo branco)	60
Figura 9 – Malha refinada	60
Figura 10 – Geometria do problema 1	62
Figura 11 – Malha inicial do problema 1	63
Figura 12 – Problema 1 - $\log(\varepsilon_{local})$	63
Figura 13 – Problema 1 - Malha adaptativa final	64
Figura 14 – Problema 1 - Campo de velocidades	64
Figura 15 – Problema 2.1 - Erro global	64
Figura 16 – Problema 2.1 - Resíduo	65
Figura 17 – Problema 2.1 - Tempo de simulação por iteração	65
Figura 18 – Problema 2 - Geometria da cavidade	66
Figura 19 – Problema 2 - Geometria da placa	67
Figura 20 – Problema 2.1 - Malha inicial	68
Figura 21 – Problema 2.1 - $\log(\varepsilon_{local})$	68
Figura 22 – Problema 2.1 - Malha adaptativa final	68
Figura 23 – Problema 2.1 - Campo de velocidades	68
Figura 24 – Problema 2.1 - Erro global	69
Figura 25 – Problema 2.1 - Resíduo	69
Figura 26 – Problema 2.1 - Tempo de simulação por iteração	70
Figura 27 – Problema 2.2 - Malha inicial	71
Figura 28 – Problema 2.2 - $\log(\varepsilon_{local})$	71
Figura 29 – Problema 2.2 - Malha Final	71
Figura 30 – Problema 2.2 - Deslocamento em t=6.2	71
Figura 31 – Problema 2.2 - Erro global	71
Figura 32 – Problema 2.1 - Resíduo	72
Figura 33 – Problema 2.1 - Tempo de simulação por iteração	72
Figura 34 – Problema 2.2 - Deslocamento na extremidade da placa	73
Figura 35 – Problema 2.1 - Malha inicial	73
Figura 36 – Problema 2.1 - $\log(\varepsilon_{local})$	74
Figura 37 – Problema 2.3 - Malha adaptativa final	74

Figura 38 – Problema 2.3 - Campo de velocidades em $t=5$	74
Figura 39 – Problema 2.3 - Erro global	75
Figura 40 – Problema 2.1 - Resíduo	75
Figura 41 – Problema 2.1 - Tempo de simulação por iteração	76
Figura 42 – Problema 2.3 - Deslocamento da extremidade da placa	76

LISTA DE SIGLAS

FSI	Interação Fluido-Estrutura
ALE	Euleriana-Lagrangiana Arbitrária
T-ALE	ALE Total
U-ALE	ALE atualizado
M-ALE	ALE monolítico
S-ALE	ALE fracionado
FEM	Método dos Elementos Finitos
IBM	<i>Immersed Boundary Method</i> (do inglês)
DWR	Método dos Resíduos Duais Ponderados
CFD	Dinâmica de Fluidos Computacional
CSM	Mecânica dos Sólidos Computacional
VVA	Refinamento "Vermelho-Verde-Azul"

LISTA DE SÍMBOLOS

$\underline{()}$	Vetor
$\hat{\underline{()}}$	Versor, vetor unitário
$\underline{()} \cdot \underline{()}$	Produto interno
$\underline{\underline{()}}$	Matriz
$\underline{\underline{()}}^T$	Matriz Transposta
$\underline{\underline{()}}^{-1}$	Matriz Inversa
$\nabla \underline{()}$	Operador gradiente
$\nabla \cdot \underline{()}$	Operador divergente
$D \underline{()}$	Operador equivalente a $[\nabla \underline{()}_i + \nabla \underline{()}_i^T]$
$\underline{()} : \underline{()}$	Produto interno duplo
$\ \cdot\ _X$	Norma X de um vetor
$\partial_t \underline{()}$	Derivada parcial no tempo
$D_t \underline{()}$	Derivada lagrangiana total no tempo
$\overline{()}$	Fecho de um conjunto
\emptyset	Conjunto vazio
\underline{x}	Coordenada espacial na configuração atual (euleriana)
\underline{X}	Coordenada espacial na configuração de referência (lagrangiana)
\underline{u}	Campo de deslocamentos
\underline{v}	Campo de velocidades
\underline{v}^*	Extensão do campo de velocidades no domínio fluido
p	Campo de pressões
ρ	Densidade
Ω	Domínio
Γ_D	Fronteira de Dirichlet
Γ_N	Fronteira de Neumann
Γ_i	Fronteira entre sólido e fluido
$\psi \underline{()}$	Função teste (formulação fraca)

ψ	Energia livre de Helmholtz
\mathbf{I}	Matriz identidade
\mathbf{F}	Tensor gradiente de deformação
\mathbf{B}	Tensor de deformação de Cauchy-Green a esquerda
\mathbf{T}	Tensor de tensão de Cauchy
$s_1 \mathbf{e} \dots \mathbf{e} s_{-1}$	Parâmetros constitutivos sólido
$\lambda \mathbf{e} \mu$	Coefficientes de viscosidade fluido newtoniano

Índices Subscritos e Superescritos

$(\)_s$	Referente ao domínio sólido
$(\)_f$	Referente ao domínio fluido
$(\)^n$	Iteração atual
$(\)^{n+1}$	Iteração futura
$(\)_h$	Referente ao espaço discretizado

Espaços de Funções

\mathcal{V}'	Espaço dual de \mathcal{V}
$\mathcal{C}(X)$	Espaço de funções contínuas
$\mathcal{C}(X)^n$	Espaço de funções com n derivadas contínuas
$\mathcal{C}(X; \mathbb{R}^n)$	Espaço de funções contínuas com imagem no \mathbb{R}^n
$\mathcal{P}_n(X)$	Espaço de funções polinomiais de grau n
$L^2(X)$	Espaço de funções quadrado integráveis
$H^1(X; \mathbb{R}^n)$	Espaço de Sobolev
\mathcal{X}_h	Espaço de funções polinomiais por partes, aproximação de \mathcal{X}

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA	13
1.2	ESTIMATIVA DE ERRO	14
1.3	OBJETIVOS DO TRABALHO	15
1.4	ESTRUTURA DO TRABALHO	15
2	INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA	17
2.1	MODELOS E FUNDAMENTAÇÕES CORRELATAS A PROBLEMAS FSI	17
2.1.1	Métodos ALE	19
2.1.2	Métodos Totalmente Eulerianos	21
2.2	LEIS DE BALANÇO	22
2.3	PROPRIEDADES CONSTITUTIVAS	22
2.4	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA FSI	24
2.4.1	Formulação Forte	24
2.4.2	Formulação Fraca	28
2.4.3	Discretização Temporal	30
2.4.4	Discretização Espacial	33
2.4.5	Atualização da Malha	34
2.5	SUMÁRIO DO CAPÍTULO	36
3	ESTIMATIVA DE ERRO	37
3.1	CONCEITOS BÁSICOS DE ESTIMATIVA DE ERRO	37
3.1.1	Estimativa de Erro <i>a priori</i>	37
3.1.2	Estimativa de Erro <i>a posteriori</i>	38
3.1.3	Normas para Estimativas de Erro	39
3.1.4	Estimadores de Erro para Formas Lineares	40
3.2	ESTIMATIVA DE ERRO EM PROBLEMAS FSI	41
3.2.1	Derivadas Direcionais	41
3.2.2	Estimativa de Erro DWR	45
3.2.3	Domínio Fluido	54
3.2.4	Domínio Sólido	56
3.2.5	Estimativa de Erro para Problemas FSI	57
3.3	ADAPTATIVIDADE DE MALHA	57
3.3.1	Refinamento Vermelho-Verde-Azul	59
3.4	SUMÁRIO DO CAPÍTULO	61
4	RESULTADOS	62
4.1	PROBLEMA 1 - CAVIDADE COM FUNDO ELÁSTICO	62
4.2	PROBLEMA 2 - ESCOAMENTO EM TORNO DE CILINDRO COM PLACA	66
4.2.1	Problema 2.1 - Simulação CFD	67
4.2.2	Problema 2.2 - Simulação CSM	70
4.2.3	Problema 2.3 - Simulação FSI	73
5	CONCLUSÃO	77
	REFERÊNCIAS	79
	APÊNDICE A TEOREMAS E PROPRIEDADES	82
A.1	Espaços das Funções	82
A.2	Teorema da Divergência	84

A.3	Desigualdade de Schwarz	84
A.4	Ortogonalidade de Galerkin	85
A.5	Coercividade	85
APÊNDICE B DETALHAMENTO DE CÁLCULOS		86
B.1	Formulação Fraca - Equação 2.45	86
APÊNDICE C ALGORITMO REFINAMENTO VVA		87

1 INTRODUÇÃO

O presente capítulo contém uma breve introdução aos tópicos a serem abordados neste estudo. Definem-se os objetivos, principal e secundários, e a estrutura do trabalho.

1.1 INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

Análises de Interação Fluido-Estrutura (FSI, do inglês *Fluid-Structure Interaction*) formam um grupo de problemas complexos. Isto porque são não lineares e têm natureza multidisciplinar. Em geral, não se consegue obter uma forma explícita da solução exata do problema e análises experimentais costumam ser limitadas e onerosas, assim a análise numérica pode muitas vezes ser empregada como a melhor opção (CHAKRABARTI, 2005).

Muitas das aplicações vêm das áreas da engenharia e tecnologia. Na engenharia, um exemplo é a simulação de estruturas sujeitas a fluxos de ar, como no caso de pontes e prédios altos. As cargas de vento devem ser consideradas durante o dimensionamento e seu efeito pode ser melhor previsto quando se leva em conta o comportamento do sólido e do fluido de maneira integrada. Outro caso de interesse são reservatórios de líquidos que têm por função amortecer vibrações ocasionadas por terremotos, onde inicialmente empregavam-se modelos matemáticos simples de sistemas massa-mola com amortecimento, atualmente este tipo de problema pode ser claramente melhor avaliado via FSI. Demais exemplos de aplicações de análises FSI são: abertura de paraquedas, funcionamento de *air-bags*, deflexão de pás de turbinas eólicas e asas de aeronaves (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013; FÖRSTER, 2007).

As áreas biológicas e biomédicas também têm vários problemas que necessitam de análises FSI. No sistema respiratório, o fluxo de ar interaje com o tecido flexível dos pulmões (FÖRSTER, 2007). Uma aplicação de grande importância é a simulação do fluxo de sangue por artérias, além de câmaras e válvulas do coração. Os esforços cisalhantes resultantes nesses tecidos são importantes para a compreensão de problemas no sistema cardiovascular (RAZZAQ, 2011).

Existem diversos métodos para análise de problemas FSI, os quais podem ser divididos em duas abordagens: particionada e monolítica. A abordagem particionada soluciona os problemas no sólido e no fluido separadamente, sendo o acoplamento entre eles feito explicitamente (DEGROOTE; BATHE; VIERENDEELS, 2009). Esta abor-

dagem apresenta como vantagens ser facilmente formulada e ser computacionalmente rápida. A abordagem monolítica soluciona os problemas de ambos os domínios, sólido e fluido, em um único equacionamento, de modo que o acoplamento é ímplicito à formulação (HOU; WANG; LAYTON, 2012). Esta abordagem tem por vantagens ser estável e potencialmente mais precisa quando comparada à particionada.

Dentre as abordagens monolíticas algumas das mais utilizadas são: formulação Euleriana-Lagrangiana Arbitrária ou ALE (do inglês *Arbitrary Lagrangian-Eulerian*)(BONITO; KYZA; NOCHETTO, 2013; GASTALDI, 2001), formulação totalmente Euleriana (PIRONNEAU, 2016) (RICHTER, 2013), método de Lattice Boltzmann (BLAIR, 2012). Há um crescente interesse na formulação totalmente euleriana, devido à sua robustez e versatilidade, e por isso foi escolhida para este trabalho.

1.2 ESTIMATIVA DE ERRO

O Método dos Elementos Finitos (FEM, do inglês *Finite Element Method*) é atualmente uma ferramenta de grande importância em simulações computacionais e é tópico de diversas publicações científicas. Um estimador de erro preciso e robusto é um dos principais parâmetros para se avaliar a qualidade de um método ou de um código computacional. Os vários procedimentos de refinamento de malha disponíveis são vitais para a eficácia de um abordagem via FEM (BABUŠKA; GUO, 1992).

As soluções de equações diferenciais podem variar muito abruptamente em regiões pequenas do domínio analisado, nestes casos em especial pode-se aplicar refinamento adaptativo com efetividade. As diferenças entre a qualidade das soluções obtidas por uma malha uniforme e uma adaptada às condições de um problema específico são muitas vezes bastante significativas (BRENNER; SCOTT, 2008). O conceito de refinamento adaptativo é fortemente relacionado com o de estimativa de erro, para que se possa determinar em quais regiões do domínio a malha deve ser refinada é necessário conseguir estimar previamente os erros da aproximação numérica em cada local.

As estimativas de erro podem ser divididas em dois grupos: *a priori* e *a posteriori*. As estimativas *a priori* podem ser obtidas antes de qualquer solução aproximada porém são expressas em função da solução exata, o que limita a sua aplicação. As estimativas *a posteriori* são calculados em função de uma solução aproximada conhecida e são empregadas na geração de malhas adaptativas (GUERMOND; ERN, 2004).

Os métodos de adaptatividade de malha são divididos em: h-adaptativo, p-adaptativo, hp-adaptativo. O refino h-adaptativo ajusta o tamanho dos elementos da malha; o refino p-adaptativo ajusta o grau dos polinômios de interpolação; o hp-adaptativo

usa as duas estratégias no mesmo algoritmo. No presente trabalho implementou-se o refino h-adaptativo, que é amplamente difundido na literatura especializada (BABUŠKA; GUO, 1992).

1.3 OBJETIVOS DO TRABALHO

No contexto apresentado, o objetivo principal do trabalho é realizar análises de estimativa de erro em problemas de Interação Fluido-Estrutura.

São também traçados objetivos secundários:

- Desenvolvimento de modelo para análise FSI via FEM, com abordagem totalmente euleriana.
- Implementação e validação do código computacional FSI elaborado.
- Derivação de uma estimativa de erro, aplicada a problemas FSI.
- Aplicação dos estimadores elaborados para refinamento de malha h-adaptativo.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

O capítulo 2 apresenta a metodologia empregada para análise FSI, assim como as hipóteses consideradas. Inicia-se pela revisão dos principais métodos hoje existentes para este tipo de análise. Em seguida são observadas as equações e modelos necessários para a descrição do problema a ser resolvido (leis de balanço, propriedades constitutivas, etc). Uma vez obtida a forma forte do problema FSI, a forma fraca é derivada e então são feitas as discretizações, no tempo e no espaço, necessárias para uma solução numérica via FEM. Assim, a formulação final para a simulação FSI é obtida.

O capítulo 3 se destina à análise de erro. Uma revisão dos conceitos centrais é feita e são também apresentadas as principais formas de estimativas empregadas em FEM. Apresenta-se a estimativa de erro obtida juntamente com as considerações necessárias para sua obtenção. Faz-se no final deste capítulo uma breve introdução à adaptatividade de malha e se apresenta o método empregado neste estudo.

O capítulo 4 apresenta dois problemas escolhidos para verificação da validade do método de análise FSI proposto e para avaliação da eficácia do método de adaptatividade de malha elaborado. Primeiramente, descreve-se cada problema (geometria, parâmetros constitutivos, condições nas fronteiras...) e em seguida são apresentados os resultados e análises.

O capítulo 5 contém a conclusão, posteriormente se encontram os apêndices com alguns resultados e definições auxiliares.

2 INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

2.1 MODELOS E FUNDAMENTAÇÕES CORRELATAS A PROBLEMAS FSI

Os métodos numéricos para resolução de problemas FSI podem ser divididos em dois grupos: abordagem monolítica e abordagem particionada. Nota-se contudo que estas divisões são vistas de modos distintos em diferentes áreas, segue-se em geral as divisões empregadas por Hou, Wang e Layton (2012).

A abordagem particionada modela o fluido e o sólido separadamente. Cada parte é resolvida com seus algoritmos e malhas específicos. Os resultados na fronteira são comunicados entre os dois algoritmos. Esta abordagem permite a utilização de códigos já desenvolvidos para tratamento tanto do domínio sólido quanto do fluido. Os problemas surgem com o tratamento da interface. A localização desta no espaço pode ser complicada e levar a erros e instabilidades. A abordagem particionada é didaticamente dividida em dois subgrupos: acoplamento fraco (ou explícito) e acoplamento forte (ou implícito) (BODNÁR; GALDI; NEČASOVÁ, 2014).

O acoplamento fraco é um método de simples execução. Em cada passo temporal os problemas no fluido e no sólido são resolvidos uma única vez, a continuidade da velocidade e da tensão na interface não são garantidas com isso, o que torna o método sujeito a instabilidades. Este método tende a funcionar bem em certas circunstâncias, como na aeroelasticidade (FARHAT; ZEE; PHILIPPE, 2004), porém são instáveis quando a densidade do fluido é da mesma ordem de grandeza da densidade do sólido (CAUSIN; GERBEAU; NOBILE, 2005).

O acoplamento forte por sua vez requer várias resoluções do problema no sólido e no fluido para cada passo temporal, porém é mais estável. Vários esforços foram feitos no sentido de acelerar a convergência de métodos desta classe como *Fixed Point Procedure*, método de Newton exato, método de Newton inexato (BODNÁR; GALDI; NEČASOVÁ, 2014).

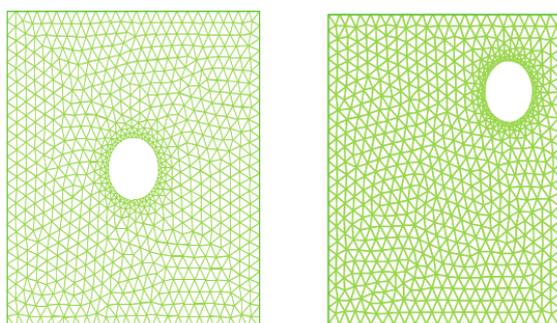
A abordagem monolítica modela o fluido e o sólido na mesma estrutura, um só sistema de equações é gerado e é solucionado por um algoritmo unificado. As interfaces são descritas implicitamente neste modelo. Com esta abordagem, resultados mais precisos são potencialmente alcançados, porém o custo computacional é maior e os algoritmos em si são de mais difícil elaboração. Dois desenvolvimentos importantes nesta área são o método IBM (do inglês *Immersed Boundary Method*), introduzido em Peskin (2002), e a abordagem ALE (BONITO; KYZA; NOCHETTO, 2013; GASTALDI,

2001).

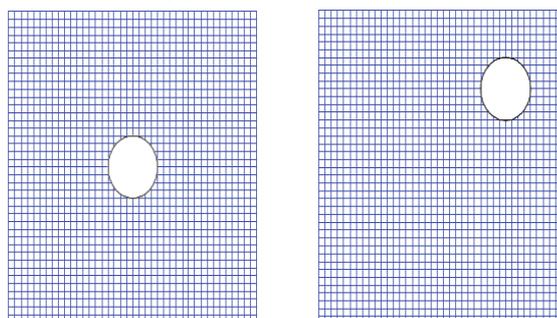
Pode-se dizer assim que, em geral, a abordagem particionada é vantajosa quando não há necessidade de resultados muito precisos e quando um método simples e computacionalmente rápido é desejado. Contudo, deve-se observar se o problema a ser estudado não apresenta instabilidades quando formulado nesta abordagem (como no caso de fluidos com densidades semelhantes as do sólido). A abordagem monolítica, por outro lado, deve ser empregada caso sejam necessários resultados bastante precisos ou caso o problema exija um tratamento implícito da fronteira sólido-fluido devido à questões de estabilidade.

Também pode-se distinguir os métodos numéricos de acordo com a malha: malha conforme, ilustrada na Figura 1a; malha não-conforme, ilustrada na Figura 1b. Os métodos conformes tratam a interface sólido-fluido como fronteiras físicas, a malha deve ser formada de maneira a delinear esta interface. Em problemas transientes, constantes adaptações da malha são necessárias ao longo da simulação. Em geral os métodos particionados se enquadram neste grupo.

Os métodos não-conformes consideram a interface sólido-fluido e as condições a ela relacionadas como restrições impostas à formulação, assim esta interface não precisa ser delimitada pelas faces da malha. Isto possibilita a utilização de uma malha cartesiana, e não há a necessidade de atualizar a malha em problemas transientes. O método *IBM* citado anteriormente se enquadra nesta classe.



(a) Malha conforme



(b) Malha não-conforme

Figura 1 – Conformidade da malha - Fonte: (HOU; WANG; LAYTON, 2012)

Um dos principais obstáculos para a análise FSI é a diferença no referencial natural para sólidos e fluidos. Análises estruturais são realizadas, em geral, através de uma descrição material (ou descrição lagrangiana). Isto é natural pois descreve-se o movimento de partículas individuais de um corpo, o que torna a descrição do deslocamento, que é usado nas equações constitutivas dos sólidos, direta. As propriedades são tomadas como funções de \underline{X} , coordenada na configuração de referência, e do tempo t . As análises de fluidos por sua vez são formuladas com base em uma descrição espacial (ou descrição euleriana). As propriedades são tomadas em função de \underline{x} , coordenada na configuração atual, e do tempo t . Em geral não há interesse em uma partícula específica no fluido, e sim deseja-se saber o valor de propriedades, como velocidade e pressão, em um determinado ponto no espaço. As equações constitutivas, como por exemplo as de Navier-Stokes, são expressas mais facilmente com esta descrição (DUNNE; RANNACHER; RICHTER, 2010).

Pode-se estabelecer um mapeamento, φ , entre a configuração de referência, β_0 , e a configuração atual, β_t , conforme esquematizado na Figura 2.

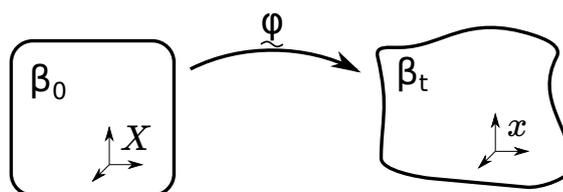


Figura 2 – Mapeamento entre configurações material e espacial

2.1.1 Métodos ALE

O método ALE é uma das abordagens mais amplamente difundidas para análises FSI. Muitas das etapas empregadas no algoritmo totalmente euleriano utilizado neste estudo são semelhantes às empregadas em métodos ALE, e o paralelo entre estes dois métodos é de interesse, por isso descreve-se de maneira sucinta as características desta abordagem e seus principais métodos e derivações. Aqui novamente observa-se que diferentes fontes classificam as mesmas ideias de modos distintos (ASKES; KUHL; STEINMANN, 2004). O método ALE apresenta uma terceira configuração, chamada de configuração ALE. A malha, que é definida nesta nova configuração, acompanha o movimento do sólido, porém não fica presa ao movimento do fluido, pois isso geraria em pouco tempo uma distorção excessiva o que degeneraria os elementos da malha.

A Figura 3 ilustra as três configurações envolvidas na formulação ALE, além dos mapeamentos entre elas. Observa-se que o mapeamento φ , normalmente utilizado em

uma descrição lagrangiana, pode ser agora descrito pela composição

$$\varphi(\underline{X}) = \Phi(\Psi^{-1}(\underline{X})), \quad (2.1)$$

e o gradiente de deformação \underline{F} por

$$\underline{F} = \underline{F}_\Phi \underline{F}_\Psi^{-1}. \quad (2.2)$$

A relação fundamental da configuração ALE, entre derivadas materiais e derivadas em coordenadas ALE, é descrita na equação (2.3), para uma função genérica $f(\underline{x}, t)$ (RODRÍGUEZ-FERRAN; PÉREZ-FOGUET; HUERTA, 2002).

$$\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_x = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_\chi + (\underline{v} - \underline{\omega}) \nabla f; \quad (2.3)$$

onde $\underline{\omega} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} \Big|_\chi$

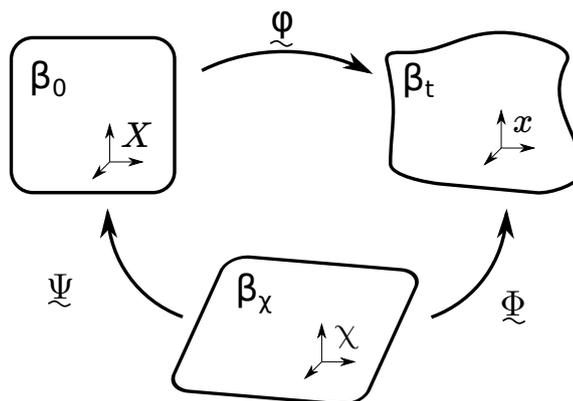


Figura 3 – Domínio de referência, ALE e espacial e mapeamentos

Os métodos ALE podem ser divididos em duas vertentes: ALE Total (T-ALE ou formulação divergente) e ALE atualizado (U-ALE ou formulação convectiva). No primeiro a configuração inicial é tomada como a configuração de referência. No segundo a configuração passada, configuração obtida no último passo temporal, é tomada como configuração de referência. Neste estudo, a não ser que seja explicitado o contrário, refere-se ao método T-ALE quando se menciona apenas ALE.

A qualidade dos mapeamentos mencionados é essencial para a eficácia e estabilidade do algoritmo. No método T-ALE os três domínios são mutualmente independentes, e grandes disparidades entre eles com a evolução do tempo. Isto pode tornar difícil a definição de mapeamentos efetivos devido a grandes deformações. Neste ponto o método U-ALE leva vantagem pois o mapeamento entre a configuração de referência é igual a configuração do material do passo temporal anterior, restando

apenas o mapeamento Φ como fonte de possíveis problemas neste sentido. Outro ponto que separa as duas abordagens é a forma do termo convectivo que aparece em função do mapeamento para a configuração de referência. Na formulação T-ALE em geral faz-se uso de formulação total para as equações constitutivas, o que pode resultar na ausência do termo convectivo adicional mencionado. Já a formulação U-ALE faz uso de uma forma incremental das equações constitutivas, o que resulta no termo convectivo e necessita que as informações de cada iteração sejam mapeadas na configuração seguinte.

Pode-se fazer uma segunda divisão nas abordagens ALE: métodos ALE monolíticos ou M-ALE e métodos ALE fracionados ou S-ALE (ASKES; KUHL; STEINMANN, 2004). No primeiro grupo, as equações a serem resolvidas são todas calculadas na mesma etapa, tanto as equações de equilíbrio referentes à balanço de massa e ao balanço de quantidade de movimento quanto as equações relacionadas ao movimento da malha. No segundo grupo estes dois conjuntos de equações são resolvidos separadamente. O método M-ALE gera um conjunto de equações maiores, o que leva a um maior custo computacional, por outro lado o método S-ALE tem etapas adicionais relacionadas ao acoplamento dos conjuntos de equações mencionados.

Apesar dos avanços no desenvolvimento do método ALE, a estabilidade é um problema persistente (FÖRSTER, 2007; PIRONNEAU, 2016).

2.1.2 Métodos Totalmente Eulerianos

As abordagens monolíticas totalmente eulerianas formam um grupo que têm sido bastante estudado atualmente. A maior parte dos estudos que aplicam esta formulação utilizam malhas não-conformes (RICHTER; WICK, 2010; RICHTER, 2013; RAZZAQ, 2011; DUNNE; RANNACHER, 2006). Contudo, o método FSI utilizado neste trabalho baseia-se em grande parte no esquema proposto por Pironneau (2016), que utiliza uma formulação totalmente euleriana com malhas conformes.

Esta abordagem, conforme o nome já indica, trata o domínio sólido também na descrição euleriana. Contudo há a necessidade de saber o deslocamento total dos pontos no sólido devido à sua equação constitutiva. Dunne (2006) introduz o conceito de conjunto de posições iniciais, *Initial Position set* ou *IP set*, assim as posições iniciais de cada ponto material são "guardadas e transportadas" na descrição espacial. Em Pironneau (2016), e também neste estudo, uma estratégia semelhante é utilizada, os valores dos deslocamentos são calculados para cada coordenada espacial e são atualizados e transportados a cada passo temporal.

Uma das grandes vantagens dos métodos totalmente eulerianos é que, ao con-

trário dos métodos ALE, estes não enfrentam problemas de estabilidade numérica em decorrência de deformações arbitrariamente grandes. Isto pois não há a preocupação com o mapeamento para a configuração de referência ou qualquer outra configuração (RICHTER; WICK, 2010).

2.2 LEIS DE BALANÇO

O problema a ser resolvido, tanto no domínio sólido quanto no fluido, é governado pelo balanço de massa e pelo balanço de quantidade de movimento. Em coordenadas eulerianas, a conservação da quantidade de movimento linear é descrita pela equação a seguir:

$$\rho D_t \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \mathbf{f}, \quad (2.4)$$

onde ρ é a densidade e $D_t(\cdot)$ é a derivada lagrangiana total no tempo. A equação da conservação de massa é dada por

$$D_t \rho - \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.5)$$

Um material incompressível pode ter seu balanço de massa (2.5) expresso de modo simplificado:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.6)$$

2.3 PROPRIEDADES CONSTITUTIVAS

A parte fluida do problema é descrita por dois campos, o campo de velocidades $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = D_t \mathbf{x}$, e pelo campo de pressões $p(\mathbf{x}, t)$. O fluido é caracterizado como um fluido newtoniano, cujo comportamento é descrito pela equação constitutiva

$$\mathbf{T} = -p(\rho) \mathbf{I} + \lambda(\rho) (\text{tr}(D(\mathbf{v}))/2) \mathbf{I} + \mu(\rho) D(\mathbf{v}), \quad (2.7)$$

onde λ e μ são coeficientes de viscosidade, e defini-se o operador $D(\cdot) := \nabla(\cdot) + \nabla(\cdot)^T$.

Observa-se que, com $\text{tr}(D(\mathbf{v})) = \nabla \cdot \mathbf{v}$ e (2.6), a equação constitutiva (2.7) assume a seguinte forma para um fluido incompressível:

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{I} + \mu(\rho) D(\mathbf{v}). \quad (2.8)$$

As equações constitutivas para o domínio sólido empregadas neste estudo podem ser obtidas a partir da energia livre de Helmholtz ψ , do gradiente de deformação \mathbf{F} , e do tensor de deformação Cauchy-Green a esquerda \mathbf{B} (LIU, 2013). Definem-se estes dois últimos por

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &:= \nabla_{\mathbf{X}} \varphi(\mathbf{X}, t); \\ \mathbf{B} &:= \mathbf{F} \mathbf{F}^T. \end{aligned} \quad (2.9)$$

A parte sólida é caracterizada como um sólido neo-hookeano incompressível. Um material hiperelástico pode ter seu tensor de tensões descrito das duas formas abaixo (LIU, 2013):

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}(\underline{\underline{\mathbf{F}}}) = \rho \frac{\partial \psi(\underline{\underline{\mathbf{F}}})}{\partial \underline{\underline{\mathbf{F}}}} \underline{\underline{\mathbf{F}}}^T; \quad (2.10)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}(\underline{\underline{\mathbf{B}}}) = 2\rho \frac{\partial \psi(\underline{\underline{\mathbf{B}}})}{\partial \underline{\underline{\mathbf{B}}}} \underline{\underline{\mathbf{B}}}. \quad (2.11)$$

Um material isotrópico tem o tensor de tensões e a energia livre descritos em função dos invariantes de $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$. Encontram-se então as seguintes representações:

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = -p\underline{\underline{\mathbf{I}}} + s_1 \underline{\underline{\mathbf{B}}} + s_{-1} \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1}; \quad (2.12)$$

$$s_1 = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial I_B}; \quad s_{-1} = -2\rho \frac{\partial \psi}{\partial II_B}, \quad (2.13)$$

onde s_1 e s_2 são parâmetros constitutivos, I_B e II_B são invariantes da matriz $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$.

Assume-se neste modelo uma forma linear para a energia livre de Helmholtz.

$$\psi = \alpha(I_B - 3) + \beta(II_B - 3). \quad (2.14)$$

Com isso pode-se obter os parâmetros s_1 e s_{-1} a partir das equações (2.13). Estas considerações levam ao modelo de Mooney-Rivlin, com $s_1 = 2\rho\alpha$ e $s_{-1} = -2\rho\beta$. Assume-se adicionalmente que $\beta = 0$, e logo $s_{-1} = 0$. Obtém-se assim a equação constitutiva de um material neo-hookeano incompressível:

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = -p\underline{\underline{\mathbf{I}}} + s_1 \underline{\underline{\mathbf{B}}}. \quad (2.15)$$

Deve-se obter contudo uma representação do tensor de tensões em função do deslocamento $\underline{\mathbf{u}}$. Nota-se também que o problema sólido é resolvido também no referencial euleriano, assim

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{I}}} - \nabla \underline{\mathbf{u}}; \quad (2.16)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1} = (\underline{\underline{\mathbf{F}}} \underline{\underline{\mathbf{F}}}^T)^{-1} = (\underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-T} \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-1}), \quad (2.17)$$

pelo Teorema de Cayley-Hamilton $\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1} = I_B \underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{B}}}$, assim

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = -p\underline{\underline{\mathbf{I}}} + s_1(I_B \underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1}); \quad (2.18)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = (I_B s_1 - s_1 - p) \underline{\underline{\mathbf{I}}} + s_1(D(\underline{\mathbf{u}}) - \nabla \underline{\mathbf{u}}^T \nabla \underline{\mathbf{u}}).$$

Redefine-se a pressão por conveniência, de maneira a se obter o tensor de tensões para um sólido neo-hookeano no referencial euleriano:

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = -p\underline{\underline{\mathbf{I}}} + s_1(D(\underline{\mathbf{u}}) - \nabla \underline{\mathbf{u}}^T \nabla \underline{\mathbf{u}}). \quad (2.19)$$

2.4 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA FSI

2.4.1 Formulação Forte

Propõe-se a seguir uma formulação forte para análise do problema FSI, sob a abordagem euleriana.

Sejam o intervalo $I = (0, T] \subset \mathbb{R}$ e o mapeamento $\phi : \bigcup_{t \in I} (\beta_t, t) \rightarrow \beta_0$, isto é, $\phi(\boldsymbol{x}, t) = \phi(\varphi(\boldsymbol{X}, t), t) = \boldsymbol{X} \in \beta_0$. Designa-se que $\boldsymbol{\mathfrak{N}} = \nabla \phi = \boldsymbol{F}^{-1}$ e $\mathfrak{J} = \det(\boldsymbol{\mathfrak{N}})$. Assume-se que o domínio $\Omega \subset \beta_t$ é subdividido nos subdomínios Ω_f , domínio fluido na configuração atual β_t , e Ω_s , domínio sólido na configuração atual β_t , tais que:

$$\begin{aligned}\Omega_f \cap \Omega_s &= \emptyset; \\ \Omega_f \cup \Omega_s &= \Omega.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Na sequência os subscritos $(\cdot)_s$ e $(\cdot)_f$ são usados para indicar elementos definidos nos domínios sólido e fluido, respectivamente.

As fronteiras dos domínios sólido e fluido são, respectivamente, $\partial\Omega_s$ e $\partial\Omega_f$. A interface sólido-fluido, Γ_i , é definida por

$$\partial\Omega_s \cap \partial\Omega_f = \Gamma_i.\tag{2.21}$$

A fronteira do domínio fluido $\partial\Omega_f$ é constituída pela união de três partes,

$$\partial\Omega_f = \Gamma_{D,f} \cup \Gamma_{N,f} \cup \Gamma_i,\tag{2.22}$$

onde $\Gamma_{D,f}$ e $\Gamma_{N,f}$ caracterizam, respectivamente, a condição de velocidade prescrita (ou condição de Dirichlet), e a condição de tensão prescrita (ou condição de Neumann), tais que:

$$\boldsymbol{v}_f = \boldsymbol{v}_f^D \text{ em } \Gamma_{D,f};\tag{2.23}$$

$$\boldsymbol{T}_f \boldsymbol{n} = \boldsymbol{g}_f^N \text{ em } \Gamma_{N,f}.\tag{2.24}$$

Como condição inicial tem-se:

$$\boldsymbol{v}_f = \boldsymbol{v}_{f,0} \text{ in } \Omega_f \text{ em } t = 0.\tag{2.25}$$

As mesmas consideração são feitas para a fronteira do sólido, $\partial\Omega_s$. Deste modo tem-se a sua divisão em três partes,

$$\partial\Omega_s = \Gamma_{D,s} \cup \Gamma_{N,s} \cup \Gamma_i,\tag{2.26}$$

a caracterização das fronteiras de velocidade e tensão prescritas,

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_s^D \text{ on } \Gamma_{D,s}; \quad (2.27)$$

$$\mathbf{T}_s \mathbf{n} = \mathbf{g}_s^N \text{ on } \Gamma_{N,s}, \quad (2.28)$$

e a condição inicial,

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_{s,0} \text{ in } \Omega_s \text{ em } t = 0. \quad (2.29)$$

O problema proposto apresenta uma fronteira sólido-fluido Γ_i móvel, ao contrário das demais fronteiras, cujas posições não variam no tempo. Considera-se que as velocidades são contínuas e que a quantidade de movimento se conserva nesta interface. Isto leva às seguintes condições:

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_s \text{ em } \Gamma_i; \quad (2.30)$$

$$\mathbf{T}_f \mathbf{n}_f + \mathbf{T}_s \mathbf{n}_s = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_i. \quad (2.31)$$

A fronteira Γ_i tem $\mathbf{n}_f = -\mathbf{n}_s = \mathbf{n}$, logo reescreve-se (2.31) como

$$\mathbf{T}_f \mathbf{n} = \mathbf{T}_s \mathbf{n} \text{ on } \Gamma_i. \quad (2.32)$$

Acrescenta-se uma equação para acoplar o deslocamento e a velocidade no domínio sólido,

$$\mathbf{v}_s = D_t \phi(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) = D_t \mathbf{u}_s(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) = \partial_t \mathbf{u}_s + \mathbf{v}_s \cdot \nabla \mathbf{u}_s. \quad (2.33)$$

Pode-se portanto destacar o seguinte conjunto de equações para os domínios sólido, fluido e para a interface:

$$\begin{aligned} \rho_f D_t \mathbf{v}_f - \nabla \cdot \mathbf{T}_f &= \rho_f \mathbf{f}_f \text{ em } \Omega_f; \\ \nabla \cdot \mathbf{v}_f &= 0 \text{ em } \Omega_f; \\ \mathbf{v}_f &= \mathbf{v}_f^D \text{ on } \Gamma_{D,f}; \\ \mathbf{T}_f \mathbf{n} &= \mathbf{g}_f^N \text{ em } \Gamma_{N,f}; \\ \mathbf{v}_f|_{t=0} &= \mathbf{v}_{f,0} \text{ em } \Omega_f; \\ \tilde{\rho}_{s,0} D_t \mathbf{v}_s - \nabla \cdot \mathbf{T}_s &= \tilde{\rho}_{s,0} \mathbf{f}_s \text{ em } \Omega_s; \\ \partial_t \mathbf{u}_s + \mathbf{v}_s \cdot \nabla \mathbf{u}_s - \mathbf{v}_s &= \mathbf{0} \text{ em } \Omega_s; \\ \mathbf{u}_s &= \mathbf{u}_s^D \text{ em } \Gamma_{D,s}; \\ \mathbf{T}_s \mathbf{n} &= \mathbf{g}_s^N \text{ em } \Gamma_{N,s}; \\ \mathbf{u}_s|_{t=0} &= \mathbf{0} \text{ em } \Omega_s; \\ \mathbf{v}_s|_{t=0} &= \mathbf{v}_{s,0} \text{ em } \Omega_s; \\ \mathbf{v}_f &= \mathbf{v}_s \text{ em } \Gamma_i; \\ \mathbf{T}_f \mathbf{n} &= \mathbf{T}_s \mathbf{n} \text{ em } \Gamma_i. \end{aligned} \quad (2.34)$$

O sistema de equações obtido deve ser unificado, para isto é necessário determinar se um ponto $\mathbf{x} \in \Omega$ pertence ao domínio fluido ou sólido. O método IPS (do inglês *Initial point set*), introduzido em Dunne e Rannacher (2006), propõe que se encontre a posição inicial de um ponto qualquer \mathbf{x} na malha original Ω_0 .

A ideia é estabelecer uma velocidade convectiva \mathbf{w} que conecte os pontos do domínio atual a pontos do domínio inicial. A equação (2.33) faz isto para pontos do domínio sólido, ou seja, pode-se adotar

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_s \text{ em } \Omega_s. \quad (2.35)$$

A mesma ideia, contudo, não pode ser aplicada ao domínio fluido. Isto levaria a um entrelaçamento devido ao movimento do fluido, além disto algumas das partículas fluidas poderiam não estar presentes no domínio inicial (caso o problema tenha fluxo de massa nas fronteiras). Por isto propõe-se que \mathbf{w} no domínio fluido seja uma extensão do campo de velocidades encontradas no domínio sólido, adicionalmente esta velocidade é nula em todas as fronteiras. A extensão é feita a partir do problema laplaciano,

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{w} &= 0 && \text{em } \Omega_f; \\ \mathbf{w} &= \mathbf{v}_s && \text{em } \Gamma_i; \\ \mathbf{w} &= \mathbf{0} && \text{em } \Gamma_D \cup \Gamma_N. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Pode-se com isto generalizar a equação (2.33), de modo que ela passe a atender todo o domínio,

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ em } \Omega, \quad (2.37)$$

observa-se que, devido as considerações acima, o deslocamento \mathbf{u} não corresponde fisicamente ao deslocamento das partículas do fluido.

Duas funções características são definidas, para identificação do domínio fluido e sólido,

$$\chi_f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbf{x} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \Omega_{f,0}; \\ 0, & \text{se } \mathbf{x} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \Omega_{s,0} \cup \Gamma_{i,0}, \end{cases} \quad \text{e} \quad \chi_s(\mathbf{x}) = 1 - \chi_f(\mathbf{x}). \quad (2.38)$$

Reformula-se a seguir o problema (2.36) de modo que \mathbf{w} é equacionado em todo domínio Ω e pode ser resolvido juntamente com as demais equações:

$$\chi_s (\mathbf{w} - \mathbf{v}) - \chi_f \alpha_w \Delta \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ em } \Omega, \quad (2.39)$$

onde α_w é uma constante de valor pequeno. Com auxílio das funções características

pode-se redefinir as variáveis do problema, unificando funções no sólido e no fluido:

$$\begin{aligned}\rho &= \chi_s \rho_s + \chi_f \rho_f = (\chi_f \rho_f + \chi_s \tilde{\rho}_{s0}); \\ \underline{\mathbf{T}} &= \chi_s \underline{\mathbf{T}}_s + \chi_f \underline{\mathbf{T}}_f; \\ \underline{\mathbf{v}} &= \chi_s \underline{\mathbf{v}}_s + \chi_f \underline{\mathbf{v}}_f; \\ \underline{\mathbf{u}} &= \chi_s \underline{\mathbf{u}}_s + \chi_f \underline{\mathbf{u}}_f; \\ \underline{\mathbf{f}} &= \chi_s \underline{\mathbf{f}}_s + \chi_f \underline{\mathbf{f}}_f; \\ \underline{\mathbf{g}}^N &= \chi_s \underline{\mathbf{g}}_s^N + \chi_f \underline{\mathbf{g}}_f^N; \\ &\vdots\end{aligned}$$

As considerações feitas permitem que se escreva a forma forte do problema FSI.

Problema 2.1 *Formulação Forte - Determine* $(\underline{\mathbf{v}}, p, \underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{w}})$, *tais que:*

$$\rho D_t \underline{\mathbf{v}} - \nabla \cdot \underline{\mathbf{T}} = \rho \underline{\mathbf{f}} \text{ em } \Omega; \quad (2.40a)$$

$$\chi_f \nabla \cdot \underline{\mathbf{v}} = 0 \text{ em } \Omega; \quad (2.40b)$$

$$\partial_t \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{w}} \cdot \nabla \underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{w}} = \underline{\mathbf{0}} \text{ em } \Omega; \quad (2.40c)$$

$$\chi_s (\underline{\mathbf{w}} - \underline{\mathbf{v}}) - \chi_f \alpha_w \Delta \underline{\mathbf{w}} = \underline{\mathbf{0}} \text{ em } \Omega; \quad (2.40d)$$

$$\underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{g}}^N \text{ em } \Gamma_N; \quad (2.40e)$$

$$\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{v}}^D \text{ em } \Gamma_D; \quad (2.40f)$$

$$\underline{\mathbf{w}} = \underline{\mathbf{0}} \text{ em } \Gamma_D \cup \Gamma_N; \quad (2.40g)$$

$$\underline{\mathbf{u}}|_{t=0} = \underline{\mathbf{0}} \text{ em } \Omega; \quad (2.40h)$$

$$\underline{\mathbf{v}}|_{t=0} = \underline{\mathbf{v}}_0 \text{ em } \Omega; \quad (2.40i)$$

$$\underline{\mathbf{v}}_f = \underline{\mathbf{v}}_s \text{ em } \Gamma_i; \quad (2.40j)$$

$$\underline{\mathbf{T}}_f \underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{T}}_s \underline{\mathbf{n}} \text{ em } \Gamma_i. \quad (2.40k)$$

Observação 2.1 *As funções* $\{\underline{\mathbf{v}}, p, \underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{w}}\}$ *são definidas em* $\{H^2, H^1, H^2, H^2\}$, *onde* H^n *é o espaço de Sobolev (ver apêndice A.1).*

2.4.2 Formulação Fraca

São inicialmente definidos os espaços de funções empregados na formulação na forma fraca do problema FSI.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}^* &=: H^1([\Omega; (0, T)]; \mathbb{R}^2); \\
 \mathcal{H}_0^* &=: \{\underline{\mathbf{f}} \in \mathcal{H}^* \mid \underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{0}} \text{ em } \Gamma_D\}; \\
 \mathcal{H}_D^* &=: \{\underline{\mathbf{f}} \in \mathcal{H}^* \mid \underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{f}}_D \neq \underline{\mathbf{0}} \text{ em } \Gamma_D\}; \\
 \mathcal{L}^* &=: L^2([\Omega; (0, T)]),
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

onde $L^2(X)$ é o espaço de funções quadrado integráveis (integral de Lesbegue) e $H^1(X)$ é o espaço de Sobolev (ver apêndice A.1). Definem-se adicionalmente os espaços referentes às funções teste.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} &=: H^1(\Omega; \mathbb{R}^2); \\
 \mathcal{H}_0 &=: \{\underline{\mathbf{f}} \in \mathcal{H} \mid \underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{0}} \text{ em } \Gamma_D\}; \\
 \mathcal{H}_D &=: \{\underline{\mathbf{f}} \in \mathcal{H} \mid \underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{f}}_D \neq \underline{\mathbf{0}} \text{ em } \Gamma_D\}; \\
 \mathcal{L} &=: L^2(\Omega).
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Destacam-se as equações (2.40a),(2.40b),(2.40c) e (2.40d) do conjunto (2.40), sendo as demais condições de fronteira e condições iniciais que são abordadas adiante. Estas quatro equações são multiplicadas, respectivamente, pelas funções teste $(\underline{\psi}^v, \underline{\psi}^u, \underline{\psi}^w \text{ e } \psi^p)$ e integradas no domínio Ω . Empregam-se na sequência as seguintes representações para a integral em determinado domínio X :

$$\begin{aligned}
 (a, b)_X &:= \int_X ab \, dx; \\
 (\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}})_X &:= \int_X \underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}} \, dx; \\
 (\underline{\underline{\mathbf{a}}}, \underline{\underline{\mathbf{b}}})_X &:= \int_X \underline{\underline{\mathbf{a}}} : \underline{\underline{\mathbf{b}}} \, dx.
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Portanto tem-se

$$\begin{aligned}
 (\rho D_t \underline{\mathbf{v}}, \underline{\psi}^v)_\Omega - (\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}, \underline{\psi}^v)_\Omega &= (\rho \underline{\mathbf{f}}, \underline{\psi}^v)_\Omega, \quad \forall \underline{\psi}^v \in \mathcal{H}_D; \\
 (\nabla \cdot \underline{\mathbf{v}}, \psi^p)_\Omega &= 0, \quad \forall \psi^p \in \mathcal{L}; \\
 (\partial_t \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{w}} \cdot \nabla \underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{w}}, \underline{\psi}^u)_\Omega &= 0, \quad \forall \underline{\psi}^u \in \mathcal{H}_0; \\
 (\chi_s (\underline{\mathbf{w}} - \underline{\mathbf{v}}), \underline{\psi}^w)_\Omega + (\chi_f \alpha_w \Delta \underline{\mathbf{w}}, \underline{\psi}^w)_\Omega &= 0, \quad \forall \underline{\psi}^w \in \mathcal{H}_0.
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Pode-se transformar estas equações com o teorema da divergência (ver os passos no

Apêndice B.1). Assim, obtém-se

$$\begin{aligned}
(\rho D_t \underline{\mathbf{v}}, \underline{\psi}^v)_\Omega - (\underline{\mathbf{T}}, \nabla \underline{\psi}^v)_\Omega &= (\rho \underline{\mathbf{f}}, \underline{\psi}^v)_\Omega + (\underline{\mathbf{g}}^N, \underline{\psi}^v)_{\Gamma_N}, \quad \forall \underline{\psi}^v \in \mathcal{H}_D; \\
(\nabla \cdot \underline{\mathbf{v}}, \psi^p)_\Omega &= 0, \quad \forall \psi^p \in \mathcal{L}; \\
(\partial_t \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{w}} \cdot \nabla \underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{w}}, \underline{\psi}^u)_\Omega &= 0, \quad \forall \underline{\psi}^u \in \mathcal{H}_0; \\
(\chi_s (\underline{\mathbf{w}} - \underline{\mathbf{v}}), \underline{\psi}^w)_\Omega + (\chi_f \alpha_w \nabla \underline{\mathbf{w}}, \nabla \underline{\psi}^w)_\Omega &= 0, \quad \forall \underline{\psi}^w \in \mathcal{H}_0.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

A condição de fronteira de tensão prescrita, (2.40e), está incluída no lado direito da primeira equação de (2.45). A condição de velocidade prescrita, (2.40f) e de velocidade convectiva nula, (2.40g), ficam delimitadas pelos espaços de funções nos quais as variáveis são definidas. A relação sobre a velocidade na fronteira, (2.40j), é garantida pois a velocidade $\underline{\mathbf{v}}$, que é contínua, é definida no domínio completo Ω . A relação de tensões entre o sólido e o fluido acrescentaria um termo adicional na formulação, porém a omissão de tal termo garante justamente a igualdade de tensões expressa em (2.40k) (DUNNE; RANNACHER, 2006).

Pode-se deste modo enunciar a forma fraca do problema FSI.

Problema 2.2 Forma Fraca Ia - Determine $(\underline{\mathbf{v}}, p, \underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{w}}) \in (\mathcal{H}_D^* \times \mathcal{L}^* \times \mathcal{H}_0^* \times \mathcal{H}_0^*)$, com $\underline{\mathbf{v}}|_{t=0} = \underline{\mathbf{v}}_0$ e $\underline{\mathbf{u}}|_{t=0} = \underline{\mathbf{0}}$ tais que:

$$\begin{aligned}
(\rho D_t \underline{\mathbf{v}}, \underline{\psi}^v)_\Omega - (\underline{\mathbf{T}}, \nabla \underline{\psi}^v)_\Omega &= (\rho \underline{\mathbf{f}}, \underline{\psi}^v)_\Omega + (\underline{\mathbf{g}}^N, \underline{\psi}^v)_{\Gamma_N}, \quad \forall \underline{\psi}^v \in \mathcal{H}_0; \\
(\nabla \cdot \underline{\mathbf{v}}, \psi^p)_\Omega &= 0, \quad \forall \psi^p \in \mathcal{L}; \\
(\partial_t \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{w}} \cdot \nabla \underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{w}}, \underline{\psi}^u)_\Omega &= 0, \quad \forall \underline{\psi}^u \in \mathcal{H}_0; \\
(\chi_s (\underline{\mathbf{w}} - \underline{\mathbf{v}}), \underline{\psi}^w)_\Omega + (\chi_f \alpha_w \nabla \underline{\mathbf{w}}, \nabla \underline{\psi}^w)_\Omega &= 0, \quad \forall \underline{\psi}^w \in \mathcal{H}_0.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Alternativamente, é possível enunciar o problema de uma forma mais compacta, para isto definem-se novos espaços de funções:

$$\mathcal{W}_0^* =: \mathcal{H}_0^* \times \mathcal{L}^* \times \mathcal{H}_0^* \times \mathcal{H}_0^*; \tag{2.47}$$

$$\mathcal{W}_D^* =: \mathcal{H}_D^* \times \mathcal{L}^* \times \mathcal{H}_0^* \times \mathcal{H}_0^*, \tag{2.48}$$

e os espaços das funções teste:

$$\mathcal{W}_0 =: \mathcal{H}_0 \times \mathcal{L} \times \mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0; \tag{2.49}$$

$$\mathcal{W}_D =: \mathcal{H}_D \times \mathcal{L} \times \mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0. \tag{2.50}$$

Define-se também uma forma semilinear, sendo $\underline{\mathcal{U}} = \{\underline{\mathbf{v}}, p, \underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{w}}\}$ e $\underline{\psi} = \{\underline{\psi}^v, \psi^p, \underline{\psi}^u, \underline{\psi}^w\}$.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}^I(\underline{\mathcal{U}}, \underline{\psi}) &:= (\rho D_t \underline{\mathbf{v}}, \underline{\psi}^v)_\Omega - (\underline{\mathbf{T}}, \nabla \underline{\psi}^v)_\Omega - (\rho \underline{\mathbf{f}}, \underline{\psi}^v)_\Omega \\
&\quad - (\underline{\mathbf{g}}^N, \underline{\psi}^v)_{\Gamma_N} + (\chi_f \nabla \cdot \underline{\mathbf{v}}, \psi^p)_\Omega + (\partial_t \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{w}} \cdot \nabla \underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{w}}, \underline{\psi}^u)_\Omega \\
&\quad + (\chi_s (\underline{\mathbf{w}} - \underline{\mathbf{v}}), \underline{\psi}^w)_\Omega + (\chi_f \alpha_w \nabla \underline{\mathbf{w}}, \nabla \underline{\psi}^w)_\Omega.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Problema 2.3 *Forma Fraca Ib* - Determine $\mathcal{U} \in \mathcal{W}_D^*$, com $\mathcal{U}|_{t=0} = \mathcal{U}_0\{\mathbf{u}_0, 0, \mathbf{u}_0, \mathbf{Q}\}$, tal que:

$$\mathfrak{A}^I(\mathcal{U}, \psi) = 0, \forall \psi \in \mathcal{W}_0. \quad (2.52)$$

2.4.3 Discretização Temporal

Problemas transientes abordados via FEM são geralmente discretizados no tempo pelo método de diferenças finitas. O intervalo analisado $[0, T]$ é particionado em \mathcal{N} intervalos, de modo que $0 = t^0 < t^1 < t^2 < \dots < T$, e $\delta t^n = t^{n+1} - t^n$. Propõe-se em (2.53) um sistema de equações algébrico-diferenciais qualquer a partir do qual pode-se exemplificar alguns dos métodos de discretização mais usuais:

$$\mathfrak{M} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathfrak{A}\mathbf{u} = \mathfrak{f}, \quad t \in [t^n, t^{n+1}]. \quad (2.53)$$

Os métodos θ resultam em uma discretização na forma abaixo (KUZMIN, 2010),

$$[\mathfrak{M} + \theta \delta t \mathfrak{A}]\mathbf{u}^{n+1} = [\mathfrak{M} - (1 - \theta)\delta t \mathfrak{A}]\mathbf{u}^n + \delta t \mathfrak{b}^{n+\theta}, \quad (2.54)$$

onde $\theta \in [0, 1]$ é uma constante.

De acordo com o valor de θ , têm-se os métodos:

- Euler Explícito para $\theta = 0$;
- Crank-Nicolson para $\theta = 1/2$;
- Euler Implícito para $\theta = 1$.

Supõe-se que o sistema (2.53) pode ser escrito como

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = \mathfrak{r}(t, \mathbf{u}(t)), \quad t \in (t^n, t^{n+1}). \quad (2.55)$$

Os métodos citados podem ser caracterizados por:

$$\begin{aligned} \text{Euler Explícito:} \quad & \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \mathfrak{r}(t^n, \mathbf{u}^n)\delta t + \mathcal{O}(\delta t)^2; \\ \text{Crank-Nicolson:} \quad & \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \frac{1}{2}[\mathfrak{r}(t^n, \mathbf{u}^n) + \mathfrak{r}(t^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1})]\delta t + \mathcal{O}(\delta t)^3; \\ \text{Euler Implícito:} \quad & \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \mathfrak{r}(t^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1})\delta t + \mathcal{O}(\delta t)^2, \end{aligned} \quad (2.56)$$

onde $\mathcal{O}(\delta)^k$ é o agrupamento dos termos de ordem igual ou superior a k .

O método θ de passo fracionado é bastante aplicado em simulações FSI. Apresenta as vantagens de ser um método A-estável (para $\alpha \in (1/2, 1]$) e ser um método de segunda ordem (DUNNE; RANNACHER, 2006; RANNACHER, 1999). Neste método o

intervalo δt é dividido em três subintervalos: $t^n \rightarrow t^{n+\theta} \rightarrow t^{n+1-\theta} \rightarrow t^{n+1}$. Tem-se assim dois passos intermediários no cálculo de $\underline{\mathbf{u}}^{n+1}$. Tomando o mesmo exemplo anterior,

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{u}}^{n+\theta} &= \underline{\mathbf{u}}^n + [(1 - \alpha)\underline{\mathbf{r}}(t^n, \underline{\mathbf{u}}^n) + \alpha\underline{\mathbf{r}}(t^{n+\theta}, \underline{\mathbf{u}}^{n+\theta})]\theta\delta t; \\ \underline{\mathbf{u}}^{n+1-\theta} &= \underline{\mathbf{u}}^{n+\theta} + [(1 - \alpha)\underline{\mathbf{r}}(t^{n+1-\theta}, \underline{\mathbf{u}}^{n+1-\theta}) + \alpha\underline{\mathbf{r}}(t^{n+\theta}, \underline{\mathbf{u}}^{n+\theta})](1 - 2\theta)\delta t; \\ \underline{\mathbf{u}}^{n+1} &= \underline{\mathbf{u}}^{n+1-\theta} + [(1 - \alpha)\underline{\mathbf{r}}(t^{n+1-\theta}, \underline{\mathbf{u}}^{n+1-\theta}) + \alpha\underline{\mathbf{r}}(t^{n+1}, \underline{\mathbf{u}}^{n+1})]\theta\delta t,\end{aligned}\quad (2.57)$$

onde $\theta \in (0, 1)$ e $\alpha \in [0, 1]$ são parâmetros constantes.

Emprega-se neste estudo o método de Euler Implícito. Este método é incondicionalmente A-estável, tem por desvantagem ser um método de primeira ordem (BARTELS, 2016). O bilinear (2.51) assume então a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}(\underline{\mathbf{U}}, \underline{\boldsymbol{\psi}}) &:= (\rho D_t \underline{\mathbf{v}}^{n+1}, \underline{\boldsymbol{\psi}}^v)_{\Omega^{n+1}} - (\underline{\mathbf{T}}^{n+1}, \nabla \underline{\boldsymbol{\psi}}^v)_{\Omega^{n+1}} - (\rho \underline{\mathbf{f}}^{n+1}, \underline{\boldsymbol{\psi}}^v)_{\Omega^{n+1}} \\ &\quad - (\underline{\mathbf{g}}^N, \underline{\boldsymbol{\psi}}^v)_{\Gamma_N^{n+1}} + (\chi_f \nabla \cdot \underline{\mathbf{v}}^{n+1}, \underline{\boldsymbol{\psi}}^p)_{\Omega^{n+1}} \\ &\quad + (\partial_t \underline{\mathbf{u}}^{n+1} + \underline{\mathbf{w}}^{n+1} \cdot \nabla \underline{\mathbf{u}}^{n+1} - \underline{\mathbf{w}}^{n+1}, \underline{\boldsymbol{\psi}}^u)_{\Omega^{n+1}} \\ &\quad + (\chi_s (\underline{\mathbf{w}}^{n+1} - \underline{\mathbf{v}}^{n+1}), \underline{\boldsymbol{\psi}}^w)_{\Omega^{n+1}} + (\chi_f \alpha_w \nabla \underline{\mathbf{w}}^{n+1}, \nabla \underline{\boldsymbol{\psi}}^w)_{\Omega^{n+1}}\end{aligned}\quad (2.58)$$

O sistema obtido é contudo não-linear, nestas situações uma opção é fazer uma discretização implícita dos termos lineares e semi-implícita dos termos não-lineares (BRENNER; SCOTT, 2008). Neste contexto descrevem-se as modificações feitas para que o sistema obtido seja linear, o que torna o método computacionalmente menos custoso.

As integrais são tomadas todas no domínio Ω^n , ao invés de tomá-las no domínio Ω^{n+1} . Com isto resta apenas um termo não-linear, $(\rho D_t \underline{\mathbf{v}}, \underline{\boldsymbol{\psi}}^v)_{\Omega^{n+1}}$. Considera-se então que

$$(\rho D_t \underline{\mathbf{v}}, \underline{\boldsymbol{\psi}}^v)_{\Omega^{n+1}} \approx (\rho [(\nabla \underline{\mathbf{v}}^{n+1}) \underline{\mathbf{v}}^{n+1}], \underline{\boldsymbol{\psi}}^v)_{\Omega^n} \approx (\rho [(\nabla \underline{\mathbf{v}}^{n+1}) \underline{\mathbf{v}}^n], \underline{\boldsymbol{\psi}}^v)_{\Omega^n}. \quad (2.59)$$

Resta ainda a discretização do termo da tensão, $(\underline{\mathbf{T}}^{n+1}, \nabla \underline{\boldsymbol{\psi}}^v)_{\Omega^{n+1}}$, duas expressões devem ser analisadas, $\underline{\mathbf{T}}_s$ e $\underline{\mathbf{T}}_f$. Este último apresenta forma linear após a discretização sem nenhuma modificação necessária,

$$\underline{\mathbf{T}}_f^{n+1} = -p^{n+1} \underline{\mathbf{I}} + \mu D(\underline{\mathbf{v}}^{n+1}). \quad (2.60)$$

Observa-se que $\underline{\mathbf{T}}_s$ é o único termo que acopla as duas primeiras equações da formulação fraca (2.46) com as duas últimas, ou seja, o cálculo dos campos de velocidades e pressões só depende das variáveis $\underline{\mathbf{u}}$ e $\underline{\mathbf{w}}$ por conta deste termo. Com isto em vista, considera-se que

$$\underline{\mathbf{u}}^{n+1} \approx \underline{\mathbf{u}}^n + \delta t \underline{\mathbf{v}}^{n+1}, \quad (2.61)$$

e assim,

$$\underline{\underline{T}}_s = -p\underline{\underline{I}} + s_1(D(\underline{\mathbf{u}}) - \nabla\underline{\mathbf{u}}^T \nabla\underline{\mathbf{u}}). \quad (2.62)$$

Considera-se também que:

$$\begin{aligned} D(\underline{\mathbf{v}}^{n+1}) - \nabla\underline{\mathbf{v}}^{n+1T} \nabla\underline{\mathbf{v}}^{n+1} &\approx D(\underline{\mathbf{v}}^n) + \delta t D(\underline{\mathbf{v}}^{n+1}) - \nabla\underline{\mathbf{v}}^{nT} \nabla\underline{\mathbf{v}}^n \\ &- \delta t \nabla\underline{\mathbf{v}}^{nT} \nabla\underline{\mathbf{v}}^{n+1} - \delta t \nabla\underline{\mathbf{v}}^{n+1T} \nabla\underline{\mathbf{v}}^n - \delta t^2 \nabla\underline{\mathbf{v}}^{n+1T} \nabla\underline{\mathbf{v}}^{n+1}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

logo, desprezando os termos de segunda ordem, conclui-se que $\underline{\underline{T}}_s^{n+1}$ pode ser expresso por

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}}_s^{n+1} &= -p^{n+1}\underline{\underline{I}} + s_1[D(\underline{\mathbf{v}}^n) + \delta t D(\underline{\mathbf{v}}^{n+1}) - \nabla\underline{\mathbf{v}}^{nT} \nabla\underline{\mathbf{v}}^n \\ &- \delta t \nabla\underline{\mathbf{v}}^{nT} \nabla\underline{\mathbf{v}}^{n+1} - \delta t \nabla\underline{\mathbf{v}}^{n+1T} \nabla\underline{\mathbf{v}}^n]. \end{aligned} \quad (2.64)$$

De modo análogo ao que foi feito anteriormente, o tensor $\underline{\underline{T}}^{n+1}$ é obtido a partir das funções características,

$$\underline{\underline{T}}^{n+1} = \chi_f \underline{\underline{T}}_f^{n+1} + \chi_s \underline{\underline{T}}_s^{n+1}. \quad (2.65)$$

Apresenta-se assim o problema dividido em duas etapas para melhor compreensão. As variáveis $\underline{\mathbf{w}}$ e $\underline{\mathbf{u}}$ são calculadas logo após o cálculo de $\underline{\mathbf{v}}$ e p , esta etapa é explicada mais adiante, na seção 2.4.5.

Como o problema foi discretizado no tempo as funções não têm mais como entrada o parâmetro tempo 't', assim estas são definidas nos espaços sem os sobrescritos 't'.

Obtém-se então o problema discretizado no tempo:

Problema 2.4 Forma Fraca IIa - Encontre $(\underline{\mathbf{v}}^{n+1}, p^{n+1}) \in (\mathcal{H}_D, \mathcal{L})$, para $n \in 0..(\mathcal{N} - 1)$, com $\underline{\mathbf{v}}^0 = \underline{\mathbf{v}}_0$ e $\underline{\mathbf{u}}^0 = \underline{\mathbf{0}}$, tais que:

$$\begin{aligned} (\rho(\underline{\mathbf{v}}^{n+1} - \underline{\mathbf{v}}^n)/\delta t + \rho(\nabla\underline{\mathbf{v}}^{n+1})\underline{\mathbf{v}}^n, \underline{\psi}^v)_{\Omega^n} - (\underline{\underline{T}}^{n+1}, \nabla\underline{\psi}^v)_{\Omega^n} \\ = (\rho\underline{\mathbf{f}}^{n+1}, \underline{\psi}^v)_{\Omega^n} + (\underline{\mathbf{g}}^N, \underline{\psi}^v)_{\Gamma_N}, \quad \forall \underline{\psi}^v \in \mathcal{H}_0; \\ (\nabla \cdot \underline{\mathbf{v}}^{n+1}, \psi^p)_{\Omega^n} = 0, \quad \forall \psi^p \in \mathcal{L}; \end{aligned} \quad (2.66)$$

Pode-se enunciar o problema de modo alternativo, como feito anteriormente, com o auxílio dos seguintes espaços de funções:

$$\mathfrak{W}_0 =: \mathcal{H}_0 \times \mathcal{L}; \quad (2.67)$$

$$\mathfrak{W}_D =: \mathcal{H}_D \times \mathcal{L}. \quad (2.68)$$

Considera-se que para $\underline{\mathbf{U}} = \{\underline{\mathbf{v}}, p\}$ e $\underline{\psi} = \{\underline{\psi}^v, \psi^p\}$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^{II}(\underline{\mathbf{U}}, \underline{\psi}) &:= (\rho(\underline{\mathbf{v}}^{n+1} - \underline{\mathbf{v}}^n)/\delta t + \rho(\nabla\underline{\mathbf{v}}^{n+1})\underline{\mathbf{v}}^n, \underline{\psi}^v)_{\Omega^n} \\ &- (\underline{\underline{T}}^{n+1}, \nabla\underline{\psi}^v)_{\Omega^n} - (\rho\underline{\mathbf{f}}^{n+1}, \underline{\psi}^v)_{\Omega^n} - (\underline{\mathbf{g}}^N, \underline{\psi}^v)_{\Gamma_N}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Problema 2.5 *Forma Fraca IIb* - Determine $\mathcal{U} \in \mathfrak{W}_D$, tal que $\mathcal{U}|_{t=0} = \mathcal{U}_0\{\mathbf{v}_0, 0\}$:

$$\mathfrak{A}^{II}(\mathcal{U}, \psi) = \mathbf{0}, \quad \forall \psi \in \mathfrak{W}_0. \quad (2.70)$$

2.4.4 Discretização Espacial

A resolução do problema proposto pelo Método de Elementos Finitos de Galerkin se faz através da aproximação dos espaços de velocidades \mathcal{H} e de pressões \mathcal{L} pelos espaços de funções, $\mathcal{H}_h \subset \mathcal{H}$ e $\mathcal{L}_h \subset \mathcal{L}$. O subscrito $(\)_h$ é empregado para entidades referentes ao espaço discretizado.

O domínio Ω é aproximado pelo domínio Ω_h , que é formado pela triangulação \mathcal{T}_h . Esta é gerada de maneira a garantir as seguintes restrições:

- $\Omega_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$.
- a intersecção de dois elementos distintos de \mathcal{T}_h é nula, é uma aresta ou então um vértice destes dois elementos.
- os vértices situados na fronteira Γ_D , Γ_N ou Γ_i para o tempo t^n continuam a pertencer a esta fronteira para t^{n+1} .
- as fronteiras Γ_D , Γ_N ou Γ_i são limitadas por vértices de elementos T pertencentes a \mathcal{T}_h .

Os espaços \mathcal{H}_h e \mathcal{L}_h , definidos em (2.71), são espaços de funções polinomiais por partes, ou seja, são definidos por polinômios distintos em cada elemento K da malha. O elemento finito P2 é utilizado para o espaço de velocidades e o elemento P1 é utilizado para o espaço de pressões, o que implica em funções quadráticas descrevendo as velocidades e lineares descrevendo as pressões.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_h &= \{\phi \in \mathcal{C}(\Omega_h; \mathbb{R}^2); \phi|_K \in \mathcal{P}_2(K) \text{ para cada } K \in \mathcal{T}_h\}; \\ \mathcal{L}_h &= \{\phi \in \mathcal{C}(\Omega_h); \phi|_K \in \mathcal{P}_1(K) \text{ para cada } K \in \mathcal{T}_h\}; \\ \mathcal{H}_{0h} &= \{\phi \in \mathcal{H}_h; \phi = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_D\}; \\ \mathcal{H}_{Dh} &= \{\phi \in \mathcal{H}_h; \phi = \phi_D \neq \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_D\}; \end{aligned} \quad (2.71)$$

Com o propósito de se obter um problema com solução única, é escolhido um par de espaços, \mathcal{H}_h e \mathcal{L}_h , que atendem os requisitos conhecidos como condições de Babuška-Brezzi, ou condição *inf-sup* (Apêndice A.1). Os elementos finitos P2, para o campo de velocidades, e P1, para o campo de pressão, atendem estas condições. Caso espaços que não atendessem a este critério fossem escolhidos, como em (DUNNE;

RANNACHER, 2006) onde se usam elementos P1 para ambos os campos, o problema pode ser alterado de modo a se tornar estável. Isto é feito com auxílio de um termo de estabilização, como o introduzido em Becker e Braack (2001) para um problema de Stokes.

Assim pode-se definir a formulação fraca do problema, discretizada no tempo e no espaço, na base de qual o código computacional é elaborado.

Problema 2.6 Forma Fraca IIIa - Encontre $(\underline{v}_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in (\mathcal{H}_{Dh}, \mathcal{L}_h)$, para $n \in 0..(\mathcal{N}-1)$, com $\underline{v}_h^0 = \underline{v}_0$, tais que:

$$\begin{aligned} & (\rho(\underline{v}_h^{n+1} - \underline{v}_h^n)/\delta t + \rho(\nabla \underline{v}_h^{n+1}) \underline{v}_h^n, \underline{\psi}^v)_{\Omega_h^n} - (\underline{\mathbf{T}}_h^{n+1}, \nabla \underline{\psi}^{vh})_{\Omega_h^n} \\ & = (\rho \underline{\mathbf{f}}_h^{n+1}, \underline{\psi}^v)_{\Omega_h^n} + (\underline{\mathbf{g}}^N, \underline{\psi}^v)_{\Gamma_{Nh}}, \quad \forall \underline{\psi}^v \in \mathcal{H}_{0h}; \\ & (\nabla \cdot \underline{v}_h^{n+1}, \psi^p)_{\Omega_h^n} = 0, \quad \forall \psi^p \in \mathcal{L}_h; \end{aligned} \quad (2.72)$$

Apresenta-se o problema também na forma compacta. Para isto definem-se:

$$\mathcal{W}_{0h} =: \mathcal{H}_{0h} \times \mathcal{L}_h; \quad (2.73)$$

$$\mathcal{W}_{Dh} =: \mathcal{H}_{Dh} \times \mathcal{L}_h. \quad (2.74)$$

Considera-se que para $\underline{U}_h = \{\underline{v}_h, p_h\}$ e $\underline{\psi} = \{\underline{\psi}^v, \psi^p\}$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_h^{III}(\underline{U}_h, \underline{\psi}) := & (\rho(\underline{v}_h^{n+1} - \underline{v}_h^n)/\delta t + \rho(\nabla \underline{v}_h^{n+1}) \underline{v}_h^n, \underline{\psi}^v)_{\Omega_h^n} \\ & - (\underline{\mathbf{T}}_h^{n+1}, \nabla \underline{\psi}^{vh})_{\Omega_h^n} - (\rho \underline{\mathbf{f}}_h^{n+1}, \underline{\psi}^v)_{\Omega_h^n} - (\underline{\mathbf{g}}^N, \underline{\psi}^v)_{\Gamma_{Nh}} \end{aligned} \quad (2.75)$$

Problema 2.7 Forma Fraca IIIb - Determine $\underline{U}_h \in \mathcal{W}_{Dh}^*$, tal que $\underline{U}_h|_{t=0} = \underline{U}_0\{\underline{v}_0, 0\}$:

$$\mathfrak{A}_h^{III}(\underline{U}_h, \underline{\psi}) = 0, \quad \forall \underline{\psi} \in \mathcal{W}_{0h}. \quad (2.76)$$

2.4.5 Atualização da Malha

Após a resolução do problema 'Forma Fraca III', estabelecido acima, deve-se calcular os deslocamentos \underline{u}_h^{n+1} , calcular a velocidade convectiva \underline{w}_h e por último atualizar a malha, $\mathcal{T}_h^n \rightarrow \mathcal{T}_h^{n+1}$.

Os deslocamentos dos vértices da malha a $\Omega_{s,h}$ são calculados primeiro, isto é, deve-se encontrar os deslocamentos \underline{u}_h^{n+1} dos vértices $q \in \Omega_{s,h}$. Nas passagens a seguir q^n e q^{n+1} são as posições de um vértice q da malha para t_n e t_{n+1} , respectivamente.

É feita a seguinte aproximação de $\mathbf{u}_h^{n+1}(q^{n+1})$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_h^{n+1}(q^{n+1}) &\approx \mathbf{u}_h^n(q^{n+1}) + D_t \mathbf{u}_h^{n+1}(q^{n+1}) \delta t \\
&\approx \mathbf{u}_h^n(q^{n+1}) + \mathbf{v}_h^{n+1}(q^n) \delta t + \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}(q^{n+1}) \mathbf{u}_h^{n+1}(q^{n+1}) \delta t \\
&= \mathbf{u}_h^n(q^n) - \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}(q^{n+1}) \delta \mathbf{x} + \mathbf{v}_h^{n+1}(q^n) \delta t + \\
&\quad \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}(q^{n+1}) \mathbf{u}_h^{n+1}(q^{n+1}) \delta t \\
&= \mathbf{u}_h^n(q^n) - \mathbf{v}_h^{n+1}(q^{n+1}) \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}(q^{n+1}) \delta t + \mathbf{v}_h^{n+1}(q^n) \delta t + \\
&\quad \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}(q^{n+1}) \mathbf{u}_h^{n+1}(q^{n+1}) \delta t,
\end{aligned} \tag{2.77}$$

logo,

$$\mathbf{u}_h^{n+1}(q^{n+1}) \approx \mathbf{u}_h^{n+1}(q^{n+1}) \approx \mathbf{u}_h^n(q^n) + \mathbf{v}_h^{n+1}(q^n) \delta t. \tag{2.78}$$

Esta aproximação é útil pois permite estabelecer diretamente as novas posições dos vértices pertencentes a $\Omega_{s,h}$. Basta deslocar os vértices de acordo com a expressão $\mathbf{v}_h^{n+1}(q^n) \delta t$. Os valores de $\mathbf{u}_h^{n+1}(q^{n+1})$ são atualizados, nota-se que o arranjo que armazena com os valores nodais para os deslocamentos em \mathcal{T}_h^n e $t = t^n$ é diretamente acrescido de $\mathbf{v}_h^{n+1}(q^n) \delta t$, o arranjo resultante é armazenado como os valores nodais de deslocamentos em \mathcal{T}_h^{n+1} e t^{n+1} .

Resta determinar os deslocamentos dos vértices que pertencem a $\Omega_{f,s}$. Como mencionado anteriormente, o deslocamento dos vértices no fluido não pode acompanhar o deslocamento das partículas do fluido. Isto ocasionaria um distorção muita rápida da malha. Neste contexto retoma-se aqui o cálculo de \mathbf{w} que, por simplificação, não foi calculado implicitamente na forma fraca (2.4). Assim um segundo problema é então proposto, com o objetivo de encontrar o campo de velocidades w , que é uma extensão do campo de velocidades encontrado no sólido. A forma forte deste problema é:

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{w} &= 0 \quad \text{em } \Omega_f, \\
\mathbf{w} &= \mathbf{v} \quad \text{em } \Gamma_i, \\
\mathbf{w} &= \mathbf{0} \quad \text{em } \Gamma_D \cup \Gamma_N.
\end{aligned} \tag{2.79}$$

A forma fraca é dada por:

Problema 2.8 *Forma Fraca - Velocidade de referência - Determine $\mathbf{w} \in \mathcal{H}_0$ tal que:*

$$(\chi_s (\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{v}_h^{n+1}), \boldsymbol{\psi}^w)_\Omega + (\chi_f \alpha_w \nabla \mathbf{w}_h^{n+1}, \nabla \boldsymbol{\psi}^w)_\Omega = 0, \quad \forall \boldsymbol{\psi}^w \in \mathcal{H}_0, \tag{2.80}$$

onde α_w é uma constante de valor pequeno.

Uma vez que este problema seja também resolvido podem-se determinar as posições dos vértices em t^{n+1} , deslocando-se os vértices no fluido em $\mathbf{w}_h^{n+1}(q^{n+1}) \delta t$. Com os vértices tanto no sólido quanto no fluido atualizados, fica definida a nova

triangulação \mathcal{T}_h^{n+1} . Os valores de \mathbf{v}_h^{n+1} e p_h^{n+1} são aproximados na nova malha para serem usados na próxima iteração. O processo é repetido até se atingir $t^n = T$, o fim da simulação.

O código computacional foi implementado em *FreeFem ++*, que é um programa computacional para resolução de equações diferenciais parciais com linguagem baseada em C++ (HECHT, 2012).

2.5 SUMÁRIO DO CAPÍTULO

- Introdução a FSI, apresentação dos principais métodos;
- Leis de balanço:
 - Balanço de quantidade de movimento;
 - Balanço de massa;
- Propriedades Constitutivas:
 - Domínio Sólido: neo-hookeano incompressível;
 - Domínio Fluido: newtoniano incompressível;
- Formulação totalmente euleriana;
- Malha Conforme;
- Discretização temporal: Euler implícito;
- Discretização espacial:
 - Velocidade: elemento P2;
 - Pressão: elemento P1.

3 ESTIMATIVA DE ERRO

Este capítulo apresenta primeiramente uma breve introdução a estimativa de erro, em seguida são mostrados os desenvolvimentos feitos referentes à estimativas de erro para o problema FSI.

3.1 CONCEITOS BÁSICOS DE ESTIMATIVA DE ERRO

As estimativas de erro podem ser divididas em dois grupos: *a priori* e *a posteriori*. A primeira tem como base as informações disponíveis antes de qualquer resolução numérica do problema. São utilizados somente dados referentes à postulação do problema (como equações diferenciais, domínio, condições iniciais e de contorno) e referentes ao método de resolução (como elemento finito, malha e discretização temporal). Uma estimativa *a posteriori* por sua vez não é dada em função da solução exata e sim da solução aproximada.

Propõe-se um problema geral na forma fraca para a análise das características de estimativas de erro. Encontre $\mathbf{u} \in W$ tal que:

$$a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) = f(\boldsymbol{\psi}), \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in V, \quad (3.1)$$

onde W e V são espaços de funções, $f \in V'$, e a é uma função bilinear.

Considera-se a aproximação descrita pela equação (3.2). Encontre $\mathbf{u}_h \in W_h$ tal que:

$$a_h(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\psi}_h) = f_h(\boldsymbol{\psi}_h), \quad \forall \boldsymbol{\psi}_h \in V_h, \quad (3.2)$$

onde W_h e V_h são espaços para aproximações tais que $W_h \subset W$ e $V_h \subset V$, a_h e f_h são, respectivamente, uma função bilinear aproximada de a e uma função linear aproximada de f .

3.1.1 Estimativa de Erro *a priori*

Uma estimativa de erro *a priori* nos permite verificar a eficiência de um método, mais especificamente, prevê quão rápida é a redução no erro em função de uma redução do tamanho de malha. Geralmente este tipo de estimativa tem forma semelhante à da equação (3.3). Ou seja, obtém-se uma relação entre o erro na variável \mathbf{u} , $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_X$, e o valor de $\|\mathbf{u}\|_X$. O parâmetro c é uma constante independente de \mathbf{u} , e h é um parâmetro referente ao tamanho dos elementos da malha. Quanto maior o valor

α , mais rápida é a convergência para a solução exata.

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_X \leq ch^\alpha \|\mathbf{u}\|_X \quad (3.3)$$

Existem poucos resultados de estimativa de erro *a priori* para problemas FSI, destacam-se a seguir dois resultados disponíveis obtidos em contextos semelhantes. Gastaldi (2001) deriva uma estimativa para um problema de advecção-difusão transiente bidimensional. Uma abordagem ALE é empregada pois o domínio varia no tempo. Faz-se uma discretização espacial por elementos finitos, e uma discretização no tempo pelo método do ponto médio. Em Bonito, Kyza e Nochetto (2013), deriva-se uma estimativa *a priori* para um problema de advecção-difusão transiente formulado com o método de Galerkin descontínuo. Novamente, a abordagem é ALE e o domínio variável no tempo. Uma variedade de abordagens para discretização temporal e espacial são discutidas, em geral, com métodos de ordem superior.

3.1.2 Estimativa de Erro *a posteriori*

Uma função da forma $\varepsilon(h, \mathbf{u}_h, f)$ pode ser classificada como uma estimativa de erro *a posteriori* quando se consegue estabelecer uma relação da forma:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_X \leq \varepsilon(h, \mathbf{u}_h, f). \quad (3.4)$$

É possível em alguns casos definir um estimador local $\varepsilon_K(u_h, f)$, chamado de indicador local de erro.

$$\varepsilon(h, \mathbf{u}_h, f) = \sqrt{\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \varepsilon_K(\mathbf{u}_h, f)^2}. \quad (3.5)$$

Observa-se que o limite superior, representado em (3.4), é global e, em geral, não é possível obtê-lo localmente (GUERMOND; ERN, 2004). O fato de ser um limite superior, permite que se possa afirmar que o erro é menor do que uma determinada tolerância, o que é bom no sentido de avaliação da precisão da solução aproximada \mathbf{u}_h e faz com que possa ser utilizado como critério de parada em um processo iterativo para geração de uma malha adaptativa. Contudo esta estimativa é global e com isso não é possível através dela identificar quais regiões do domínio necessitam de uma malha mais refinada.

Os indicadores de erro representados em (3.5), por outro lado, são locais e inferiores. Com isto pode-se garantir que uma malha grosseira em determinado ponto leva a um erro relativamente grande. Porém, não se pode garantir o contrário, isto é, que uma malha refinada em determinado ponto vai levar a um erro pequeno neste

mesmo local. Pode-se interpretar que erros de discretização em pontos distantes da malha "poluem" a resposta em certo local, mesmo que a malha ali seja bastante refinada. Este tipo de indicador é empregado na geração de malhas adaptativas para a identificação das regiões onde a malha está muito ou pouco refinada.

3.1.3 Normas para Estimativas de Erro

O erro representado nas equações anteriores foi tomado em função de um norma genérica $\|\cdot\|_X$. Muitas vezes a norma escolhida é a norma de energia:

$$\|u\|_E = \sqrt{a(u, u)}. \quad (3.6)$$

Devido a desigualdade de Schwarz, ver A.3.1, pode-se relacionar a norma de energia com o produto interno:

$$|a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi})| \leq \|\mathbf{u}\|_E \|\boldsymbol{\psi}\|_E \quad \forall \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi} \in W. \quad (3.7)$$

Para um $\mathbf{w} \in W_h$ qualquer, tem-se:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E^2 &= a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \\ &= a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{w}) + a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{w} - \mathbf{u}_h) \\ &= a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{w}); \\ \therefore \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E^2 &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|_E, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde utiliza-se a ortogonalidade de Galerkin, ver anexo A.4, para concluir que $a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{w} - \mathbf{u}_h) = 0$. Daqui em diante adota-se a notação $\boldsymbol{\varepsilon}_h = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ por simplicidade. Pode-se assumir um ínfimo do lado direito da desigualdade, obtendo-se

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}_h\|_E \leq \inf\{\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|_E : \mathbf{w} \in W_h\}. \quad (3.9)$$

Já que $\mathbf{u}_h \in W$, tem-se

$$\inf\{\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|_E : \mathbf{w} \in W_h\} \leq \|\boldsymbol{\varepsilon}_h\|_E, \quad (3.10)$$

só a igualdade atende ambas equações anteriores, logo,

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}_h\|_E = \inf\{\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|_E : \mathbf{w} \in W_h\}. \quad (3.11)$$

sabendo que existe um elemento \mathbf{u}_s para o qual o ínfimo é alcançado, assim escreve-se:

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}_h\|_E = \min\{\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|_E : \mathbf{w} \in W_h\}. \quad (3.12)$$

A relação (3.12) diz que a solução \mathbf{u}_h é ótima com relação a norma de energia, ou seja, não há outra solução no espaço W_h que resulte em valor menor de $\|\boldsymbol{\varepsilon}_h\|_E$.

Contudo esta norma geralmente está bastante atrelada à postulação do problema e também pode levar em conta o erro nominal (\mathbf{e}_h) assim como o erro na derivada $\nabla(\mathbf{e}_h)$. Também é usual calcular o erro através da norma $L^2(0, 1)$ (BRENNER; SCOTT, 2008), definida por,

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,1)} = \sqrt{\int_0^1 \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) dx}. \quad (3.13)$$

O erro sob esta norma apresenta um valor consideravelmente menor do que o obtido com a norma de energia (BRENNER; SCOTT, 2008).

3.1.4 Estimadores de Erro para Formas Lineares

Os métodos discutidos até aqui tem por objetivo minimizar uma norma $\|\cdot\|_X$ do erro, ou seja, minimizar $\|\mathbf{e}\|_X = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|$. Contudo, é mais interessante em muitos casos minimizar um funcional $J(\mathbf{e}_h)$. O processo de refinamento com base em um estimador deste tipo é conhecido na literatura como *goal oriented* (DUNNE, 2006).

Um problema dual é muitas vezes empregado como ferramenta para obtenção de um estimador relacionado a um funcional. Faz-se a seguir um breve introdução ao método, baseada nos conceitos apresentados em Bangerth e Rannacher (2003).

Considera-se, por simplicidade, uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ e um vetor $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$. Os vetores \mathbf{u} e \mathbf{u}_h são, respectivamente, a solução exata e a solução aproximada do problema em questão, descrito pelo sistema linear

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (3.14)$$

e o resíduo é caracterizado por

$$\mathbf{r} = \mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{u}_h = \mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{A}\mathbf{u}_h = \mathbf{A}\mathbf{e}_h \quad (3.15)$$

Deseja-se minimizar o erro do funcional linear $J(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)$, supondo que este admita uma função de densidade tal que

$$J(\mathbf{x}) = \langle \mathcal{J}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (3.16)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno. Faz-se então a seguinte decomposição

$$J(\mathbf{e}_h) = \langle \mathbf{r}, \mathbf{z} \rangle = \sum_{l=1}^n r_l z_l \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.17)$$

Manipulando as equações acima encontra-se

$$\langle \mathbf{e}_h, \mathcal{J}(\mathbf{e}_h) \rangle = J(\mathbf{e}_h) = \langle \mathbf{r}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{A}\mathbf{e}_h, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{e}_h, \mathbf{A}^T \mathbf{z} \rangle, \quad (3.18)$$

e obtém-se assim o problema dual a ser resolvido:

$$\mathcal{J}(\underline{e}_h) = \underline{\mathbf{A}}^T \underline{z}. \quad (3.19)$$

Nota-se que a decomposição (3.17) mostra a parcela de cada 'resíduo local' r_l na composição do erro total $J(\underline{e}_h)$, e os coeficientes z_l , obtidos pela resolução do problema dual, ponderam o efeito destes resíduos.

Uma abordagem de interesse que se enquadra nesta classe de estimadores é o Método dos Resíduos Duais Ponderados, ou DWR (do inglês *Dual Weighted Residual Method*), fornece uma base para a obtenção de uma estimativa de erro e demais critérios utilizados num processo de adaptatividade de malha (RICHTER; WICK, 2015). Mais especificamente, visa-se a obtenção de uma estimativa *a posteriori* baseada em um funcional linear de interesse, ou seja, deseja-se minimizar o erro em um funcional específico. Isto é colocado no contexto de resolução de um problema variacional linear ou não-linear via FEM.

3.2 ESTIMATIVA DE ERRO EM PROBLEMAS FSI

3.2.1 Derivadas Direcionais

Seja uma forma fraca

$$\mathfrak{A}(\underline{U}, \underline{\psi}) = 0, \quad \forall \underline{\psi} \in \mathcal{W}^0, \quad (3.20)$$

obtida a partir de (2.52) por uma discretização por diferenças finitas da variável temporal e uma discretização pelo método de Galerkin do domínio espacial. Inicialmente, trata-se o problema de forma geral, sem as aproximações feitas anteriormente durante a discretização temporal, assim obtém-se um sistema não-linear para cada passo temporal. A resolução deste sistema pode se fazer através do método de Newton, no qual sistemas lineares, obtidos pela linearização do problema original, são subsequentemente resolvidos até que se obtenha um resultado satisfatório para o passo temporal. Com este objetivo podem-se estabelecer as derivadas direcionais (derivada de Gâteaux) de $\mathfrak{A}(\underline{U}, \underline{\psi})$

$$\mathfrak{A}'(\underline{U}, \underline{\psi}; \underline{\Phi}) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \mathfrak{A}(\underline{U} + \epsilon \underline{\Phi})(\underline{\psi}) \right|_{\epsilon=0} \quad (3.21)$$

Sejam χ_f e χ_s as funções características definidas em (2.38). Definem-se tam-

bém as variáveis auxiliares:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_1 &= \mathbf{v}; & \mathcal{C}_2 &= \nabla \mathbf{v}; & \mathcal{C}_3 &= \mathbf{u}; & \mathcal{C}_4 &= \nabla \mathbf{u}; \\
 \mathcal{C}_5 &= \mathbf{w}; & \mathcal{C}_6 &= \mathbf{I} - \mathcal{C}_4; & \mathcal{C}_7 &= \mathcal{C}_6^{-1}; & C_8 &= \det(\mathcal{C}_6); \\
 \mathcal{C}_9 &= \mathcal{C}_7 \mathcal{C}_7^T; & \mathcal{C}_{10} &= -p \mathbf{I} + \rho_f \mu (\mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_2^T) = \mathbf{T}_f & \mathcal{C}_{11} &= \mathbf{T}_s; & & \\
 C_{12} &= \chi_f; & C_{13} &= \chi_s; & \mathcal{C}_{14} &= C_{12} \mathcal{C}_{10} + C_{13} \mathcal{C}_{11}; & & \\
 \mathcal{C}_{15} &= \mathcal{C}_2 \mathcal{C}_1; & C_{16} &= \nabla \cdot \mathcal{C}_1; & \mathcal{C}_{17} &= \nabla \mathbf{w}; & &
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Observação 3.1 No referencial euleriano tem-se que $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}$.

Assim, é possível expressar o operador \mathfrak{A} na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{A}(\underline{\mathcal{U}}, \underline{\psi}) &= ((\chi_f \rho_f + \chi_s \tilde{\mathcal{J}} \rho_{s0}) D_t \mathbf{v}, \underline{\psi}^v)_\Omega - (\mathbf{T}_f, \nabla \underline{\psi}^v)_\Omega \\
 &\quad - ((\chi_f \rho_f + \chi_s \tilde{\mathcal{J}} \rho_{s0}) \mathbf{f}, \underline{\psi}^v)_\Omega - (\mathbf{g}^N, \underline{\psi}^v)_{\Gamma_N} \\
 &\quad + (\chi_f \nabla \cdot \mathbf{v}, \psi^p)_\Omega (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{w}, \underline{\psi}^u)_\Omega \\
 &\quad + (\chi_s (\mathbf{w} - \mathbf{v}), \underline{\psi}^w)_\Omega + (\chi_f \alpha_w \nabla \mathbf{w}, \nabla \underline{\psi}^w)_\Omega.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{A}(\underline{\mathcal{U}}, \underline{\psi}) &= ((\rho_f C_{12} + \rho_{s,0} C_{13} C_8) \partial_t \mathcal{C}_1, \underline{\psi}^v)_\Omega - ((\rho_f C_{12} + \rho_{s,0} C_{13} C_8) \mathcal{C}_{15}, \underline{\psi}^v)_\Omega \\
 &\quad - (C_{12} \mathcal{C}_{10} + C_{13} \mathcal{C}_{11}, \nabla \underline{\psi}^v)_\Omega - ((\rho_f C_{12} + \rho_{s,0} C_{13} C_8) \mathbf{f}, \underline{\psi}^v)_\Omega \\
 &\quad - (\mathbf{g}^N, \underline{\psi}^v)_{\Gamma_N} + (C_{12} C_{16}, \psi^p)_\Omega + (\partial_t \mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4 \mathcal{C}_5, \underline{\psi}^u)_\Omega \\
 &\quad + (C_{13} (\mathcal{C}_5 - \mathcal{C}_1), \underline{\psi}^w)_\Omega + (C_{12} \alpha_w \mathcal{C}_{14}, \nabla \underline{\psi}^w)_\Omega.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Definição 3.1 A derivada direcional (derivada de Gâteaux) de C_i em $\underline{\mathcal{U}}$ na direção Φ^u é definida por

$$C'_i(\underline{\mathcal{U}}; \Phi^u) = \left. \frac{d}{d\epsilon} C_i(\underline{\mathcal{U}} + \epsilon \Phi^u) \right|_{\epsilon=0}, \quad \Phi^u \in \mathcal{H}^0. \tag{3.25}$$

Lema 3.1 A derivada direcional de C_8 em $\underline{\mathcal{U}}$ na direção Φ^u é dada por

$$\begin{aligned}
 C'_8(\underline{\mathcal{U}}, \Phi^u) &= (-\partial_1 \Phi_1^u)(1 - \partial_2 \Phi_2^u) - \partial_2 \Phi_1^u \partial_1 u_2 \\
 &\quad + (1 - \partial_1 u_1)(-\partial_2 \Phi_2^u) - \partial_2 u_1 \partial_1 \Phi_2^u.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Prova:

$$\begin{aligned}
 C_8(\underline{\mathcal{U}} + \epsilon \Phi^u) &= \det \begin{bmatrix} 1 - \partial_1(u_1 + \epsilon \Phi_1^u) & \partial_2(u_1 + \epsilon \Phi_1^u) \\ \partial_1(u_2 + \epsilon \Phi_2^u) & 1 - \partial_2(u_2 + \epsilon \Phi_2^u) \end{bmatrix} \\
 &= 1 - \partial_1(u_1 + \epsilon \Phi_1^u)(1 - \partial_2(u_2 + \epsilon \Phi_2^u)) \\
 &\quad - \partial_2(u_1 + \epsilon \Phi_1^u) \partial_1(u_2 + \epsilon \Phi_2^u); \\
 \therefore C'_8(\underline{\mathcal{U}} + \epsilon \Phi^u) &= (-\partial_1 \Phi_1^u)(1 - \partial_2 \Phi_2^u) + (1 - \partial_1 u_1)(-\partial_2 \Phi_2^u) \\
 &\quad - \partial_2 u_1 \partial_1 \Phi_2^u - \partial_2 \Phi_1^u \partial_1 u_2 \blacksquare
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Lema 3.2 A derivada direcional de C_7 em \mathcal{U} na direção Φ^u é dada por

$$C_7'(\mathbf{u}, \Phi^u) = -C_7 C_6'(\mathbf{u})(\Phi^u) C_7; \quad (3.28)$$

Prova: Observa-se que $C_7 C_6 = \mathbf{I}$, logo

$$\begin{aligned} C_7'(\mathbf{u}, \Phi^u) C_6 &= -C_7 C_6'(\mathbf{u}, \Phi^u); \\ C_7'(\mathbf{u}, \Phi^u) &= -C_7 C_6'(\mathbf{u}, \Phi^u) C_6^{-1} \blacksquare \end{aligned} \quad (3.29)$$

Definição 3.2 Seja $\hat{\mathbf{n}}_x$ o vetor unitário normal à fronteira de X , apontando para fora, e sejam g_f^- e g_s^- , os traços de g na interface Γ_i , dado por

$$\begin{aligned} g_f^- &= \lim_{\epsilon \nearrow 0} g_f(\mathbf{x} - \epsilon \hat{\mathbf{n}}_x); \\ g_f^+ &= \lim_{\epsilon \searrow 0} g_f(\mathbf{x} - \epsilon \hat{\mathbf{n}}_x), \end{aligned} \quad (3.30)$$

para o fluido e de modo análogo para o sólido. As distribuições de Dirac δ_f e δ_s , definidas em $g \in \mathcal{L}(\Omega) \cap \mathcal{H}(\Omega_f) \cap \mathcal{H}(\Omega_s)$, são tais que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta_f g dx &= \int_{\Gamma_i} g_f^- dx; \\ \int_{\Omega} \delta_s g dx &= \int_{\Gamma_i} g_s^- dx. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Se é verdade que $g \in H^1(\Omega)$ então ou $g|_{\Gamma_i} \in H_{1/2}$ ou $g|_{\Gamma_i} = g_f = g_s$.

Lema 3.3 A derivada direcional de C_{12} e C_{13} em \mathcal{U} na direção Φ^u , para $g \in \mathcal{L}(\Omega) \cap \mathcal{H}(\Omega_f) \cap \mathcal{H}(\Omega_s)$, são

$$\begin{aligned} C_{12}'(\mathbf{u}, \Phi^u) g &= -\hat{\mathbf{n}}_f \cdot \Phi^u \delta_f g; \\ C_{13}'(\mathbf{u}, \Phi^u) g &= -\hat{\mathbf{n}}_s \cdot \Phi^u \delta_s g. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Prova: Seja Ω_f o domínio fluido, logo

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\int_{\Omega} \chi_f(\mathbf{x} - \epsilon \Phi^u) g dx - \int_{\Omega} \chi_f(\mathbf{x}) g dx \right) &= \int_{\Gamma_i} (\delta_f g) (-\Phi^u \cdot \hat{\mathbf{n}}_f) dx \\ &= \int_{\Gamma_i} -\hat{\mathbf{n}}_f \cdot \Phi^u g^- dx, \end{aligned} \quad (3.33)$$

a partir do qual obtém-se a equação desejada para o fluido pela definição 3.2, um procedimento análogo para o domínio sólido completa a prova \blacksquare

Lema 3.4 *As derivadas direcionais de C_i , para $i = 1, 2, 3, \dots, 17$ em \mathcal{U} na direção Φ^u são*

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}'_1 &= \mathbf{0}; & \mathcal{C}'_2 &= \mathbf{0}; & \mathcal{C}'_3 &= \Phi^u; & \mathcal{C}'_4 &= \nabla \Phi^u; \\
 \mathcal{C}'_5 &= \mathbf{0}; & \mathcal{C}'_6 &= -\mathcal{C}'_4; & \mathcal{C}'_7 &= -\mathcal{C}'_7 \mathcal{C}'_6 \mathcal{C}'_6^{-1}; \\
 \mathcal{C}'_8 &= (-\partial_1 \Phi^u)(1 - \partial_2 u_2) - \partial_2 \Phi^u \partial_1 u_2 + (1 - \partial_1 u_1)(-\partial_2 \Phi^u) - \partial_2 u_1 \partial_2 \Phi^u; \\
 \mathcal{C}'_9 &= \mathcal{C}'_7 \mathcal{C}'_7^T + \mathcal{C}'_7 \mathcal{C}'_5^T; & \mathcal{C}'_{10} &= \mathbf{0}; & \mathcal{C}'_{11} &= \mathbf{T}'_s; \\
 \mathcal{C}'_{12} &= -\hat{\mathbf{n}}_f \cdot \Phi^u \delta_f; & \mathcal{C}'_{13} &= \hat{\mathbf{n}}_s \cdot \Phi^u \delta_s; & \mathcal{C}'_{14} &= C'_{12} \mathcal{C}'_{10} + C'_{13} \mathcal{C}'_{11} + C_{13} \mathcal{C}'_{11}; \\
 \mathcal{C}'_{15} &= \mathbf{0}; & \mathcal{C}'_{16} &= 0; & \mathcal{C}'_{17} &= \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Prova: A derivada de C_7 vem do Lema 3.2, C_8 vem do Lema 3.1 e ambas C_{12} e C_{13} vêm do Lema 3.3. As demais derivadas são obtidas diretamente pela definição de derivada direcional ■

Lema 3.5 *As derivadas direcionais de C_i , para $i = 1, 2, 3, \dots, 17$, em \mathcal{U} e na direção Φ^v são*

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}'_1 &= \Phi^v; & \mathcal{C}'_2 &= \nabla \Phi^v; & \mathcal{C}'_{14} &= C_{12} \mathcal{C}'_{10}; \\
 \mathcal{C}'_{15} &= \mathcal{C}'_2 \mathcal{C}'_1 + \mathcal{C}'_2 \mathcal{C}'_1; & \mathcal{C}'_{16} &= \nabla \cdot \mathcal{C}'_1,
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

as demais derivadas são nulas.

Prova: As derivadas são consequência da definição de derivada direcional ■

Lema 3.6 *As derivadas direcionais de C_i , para $i = 1, 2, 3, \dots, 17$, em \mathcal{U} e na direção Φ^p são*

$$\mathcal{C}'_{10} = -\Phi^p \mathbf{I}; \quad \mathcal{C}'_{11} = -\Phi^p \mathbf{I}; \quad \mathcal{C}'_{14} = C_{12} \mathcal{C}'_{10} + C_{12} \mathcal{C}'_{11}, \tag{3.36}$$

As demais derivadas direcionais são nulas.

Prova: As derivadas são consequência da definição de derivada direcional ■

Lema 3.7 *As derivadas direcionais de C_i , para $i = 1, 2, 3, \dots, 17$, em \mathcal{U} e na direção Φ^w são*

$$\mathcal{C}'_5 = -\Phi^w; \quad \mathcal{C}'_{17} = \nabla \Phi^w. \tag{3.37}$$

As demais derivadas direcionais são nulas.

Prova: As derivadas são consequência da definição de derivada direcional ■

Lema 3.8 *Supondo, por simplicidade, que $g^N = \mathbf{0}$, as derivadas direcionais de \mathfrak{A} em \mathcal{U} nas direções Φ^u, Φ^v, Φ^w e Φ^p são:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}'(\mathcal{U}, \psi; \Phi^v) &= (\rho_f C_{12} \partial_t \mathcal{C}'_1(\mathcal{U}; \Phi^v), \psi^v)_\Omega + (\rho_f C_{12} \mathcal{C}'_{15}(\mathcal{U}; \Phi^v), \psi^v)_\Omega \\ &\quad + (C_{12} C'_{10}(\mathcal{U}; \Phi^v), \nabla \psi^v)_\Omega + (C_{12} C'_{16}(\mathcal{U}; \Phi^v), \psi^p)_\Omega \\ &\quad + (C_{13} \mathcal{C}'_1(\mathcal{U}; \Phi^v), \psi^u)_\Omega + (C_{12} C'_{16}(\mathcal{U}; \Phi^v), \psi^p)_\Omega - (C_{13} \mathcal{C}_1, \psi^w)_\Omega; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}'(\mathcal{U}, \psi; \Phi^u) &= - (\rho_f \hat{\mathbf{n}}_f \cdot \Phi^u (\partial_t \mathcal{C}_1)_f^-, \psi^v)_\Omega - (\rho_{s,0} \hat{\mathbf{n}}_s \cdot \Phi^u (C_8)_s^-, \partial_t \mathcal{C}_1, \psi^v)_\Omega \\ &\quad + (\rho_{s,0} C_{13} C'_8(\mathcal{U}; \Phi^u) \partial_t \mathcal{C}_1, \psi^v)_\Omega - (\rho_f \hat{\mathbf{n}}_f \cdot \Phi^u (\mathcal{C}_{15})_f^-, \psi^v)_\Omega \\ &\quad - (\rho_{s,0} \hat{\mathbf{n}}_s \cdot \Phi^u C_8 \mathcal{C}_{15}, \psi^v)_\Omega + (\rho_f \hat{\mathbf{n}}_f \cdot \Phi^u (\mathbf{f})_f^-, \psi^v)_\Omega \\ &\quad + (\rho_{s,0} \hat{\mathbf{n}}_s \cdot \Phi^u C_8 \mathbf{f}, \psi^v)_\Omega - (\rho_{s,0} C_{13} C'_8(\mathcal{U}; \Phi^u) \mathbf{f}, \psi^v)_\Omega \\ &\quad - (\hat{\mathbf{n}}_f \cdot \Phi^u (C_{16})_f^-, \psi^p)_\Omega + (\mathcal{C}'_4(\mathcal{U}; \Phi^u) \mathcal{C}_5 - \mathcal{C}_5, \psi^u)_\Omega \\ &\quad - (\hat{\mathbf{n}}_s \cdot \Phi^u (\mathcal{C}_5 - \mathcal{C}_1)_s^-, \psi^w)_\Omega - (\alpha_w \hat{\mathbf{n}}_f \Phi^u (\mathcal{C}_4)_f^-, \nabla \psi^u)_\Omega \\ &\quad + (\alpha_w C_{12} \mathcal{C}'_4(\mathcal{U}; \Phi^u), \nabla \psi^w)_\Omega - (\hat{\mathbf{n}}_f \Phi^u \mathcal{C}_{10}, \nabla \psi^v)_\Omega \\ &\quad - (\hat{\mathbf{n}}_s \cdot \Phi^u \mathcal{C}_{11}, \nabla \psi^v)_\Omega + (C_{13} \mathcal{C}'_{11}(\mathcal{U}; \Phi^u), \nabla \psi^v)_\Omega; \end{aligned}$$

$$\mathfrak{A}'(\mathcal{U}, \psi; \Phi^p) = (C_{12} \mathcal{C}'_{10}(\mathcal{U}; \Phi^p), \nabla \psi^v)_\Omega + (C_{13} \mathcal{C}'_{11}(\mathcal{U}; \Phi^p), \nabla \psi^v)_\Omega;$$

$$\mathfrak{A}'(\mathcal{U}, \psi; \Phi^w) = (\mathcal{C}_4 \mathcal{C}'_1(\mathcal{U}; \Phi^w) - \mathcal{C}'_5(\mathcal{U}; \Phi^w), \psi^u)_\Omega + (C_{13} \mathcal{C}'_1(\mathcal{U}; \Phi^w), \psi^u)_\Omega. \quad (3.38)$$

Prova: As derivadas são consequência da definição de derivada de Gâteaux. ■

3.2.2 Estimativa de Erro DWR

A análise de erro é desenvolvida segundo o método DWR (RICHTER; WICK, 2015). Com este objetivo é estabelecido inicialmente um problema genérico, formulado a seguir.

Problema 3.1 - *Encontre $\mathcal{U} \in \{\mathcal{X} + \mathcal{U}^D\}$ tal que*

$$\mathfrak{A}(\mathcal{U}, \psi) = \mathbf{0}, \quad \forall \psi \in \mathcal{X}, \quad (3.39)$$

onde o espaço \mathcal{X} é, para o problema FSI apresentado, o espaço \mathcal{W}^0 .

Da mesma forma propõe-se a seguir o mesmo problema discretizado pelo método de Galerkin:

Problema 3.2 - Encontre $\underline{U}_h \in \{\mathcal{X}_h + \underline{U}_h^D\}$ tal que

$$\mathfrak{A}(\underline{U}_h, \underline{\psi}) = \mathfrak{Q}, \quad \forall \underline{\psi} \in \mathcal{X}_h, \quad (3.40)$$

onde o espaço \mathcal{X}_h é, para o problema FSI apresentado, o espaço \mathcal{W}_h^0 .

Considera-se, então, que o objetivo do Problema 3.2 é o cálculo do funcional linear $J(\underline{U}_h)$, aproximação de $J(\underline{U})$. Estima-se o erro na aproximação, $J(\underline{U}) - J(\underline{U}_h)$, através de Euler-Lagrange. Assim, introduz-se a variável dual $\underline{Z} \in \mathcal{X}$ e defini-se a função lagrangiana $\mathcal{L}(\underline{U}, \underline{Z})$,

$$\mathcal{L}(\underline{U}, \underline{Z}) = J(\underline{U}) - \mathfrak{A}(\underline{U}, \underline{Z}). \quad (3.41)$$

A derivada de (3.41) em \underline{Z} na direção $\underline{\psi}$ resulta no problema primal:

$$\mathcal{L}'(\underline{U}, \underline{Z}; \underline{\psi}) = -\mathfrak{A}(\underline{U}, \underline{\psi}) = 0, \quad \forall \underline{\psi} \in \mathcal{X}. \quad (3.42)$$

A derivada de (3.41) em \underline{U} na direção $\underline{\Phi}$, que resulta no problema dual:

$$\mathcal{L}'(\underline{U}, \underline{Z}; \underline{\Phi}) = J'(\underline{U}; \underline{\Phi}) - \mathfrak{A}'(\underline{U}, \underline{Z}; \underline{\Phi}) = 0, \quad \forall \underline{\Phi} \in \mathcal{X}. \quad (3.43)$$

Deste modo obtém-se o erro na aproximação de $J(\underline{U})$, que é usado na sequência para derivação de uma estimativa de erro *a posteriori*:

$$J(\underline{U}) - J(\underline{U}_h) = \mathcal{L}(\underline{U}, \underline{Z}) - \mathcal{L}(\underline{U}_h, \underline{Z}_h). \quad (3.44)$$

Proposição 3.1 *Seja um funcional $L(\cdot)$, definido em \mathcal{X} , três vezes Gâteaux diferenciável e com ponto estacionário $x \in \mathcal{X}$, então*

$$L'(x, \psi) = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{X}. \quad (3.45)$$

Seja \mathcal{X}_h um subespaço de dimensão finita contido em \mathcal{X} . A aproximação de Galerkin é dada por

$$L'(x_h, \psi_h) = 0, \quad \forall \psi_h \in \mathcal{X}_h, \quad (3.46)$$

sendo $x_h \in \mathcal{X}_h$ a sua solução discreta. Então, obtém-se a seguinte representação para o erro no funcional $L(x)$:

$$L(x) - L(x_h) = \frac{1}{2} L''(x_h, x - \psi_h) + \mathcal{R}_h, \quad \forall \psi_h \in \mathcal{X}_h, \quad (3.47)$$

onde o termo residual \mathcal{R}_h é cúbico no erro $e = x - x_h$ e é dado por:

$$\mathcal{R}_h = \frac{1}{2} \int_0^1 L'''(x_h - se; e, e, e) s(s-1) ds. \quad (3.48)$$

Prova: Observa-se inicialmente que

$$L(x) - L(x_h) = \int_0^1 L'(x_h - se; e) ds, \quad (3.49)$$

e pela aproximação polinomial de Lagrange tem-se

$$\int_0^1 f(s) ds = \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) + \frac{1}{2} \int_0^1 f''(s)s(s-1) ds, \quad (3.50)$$

assim obtém-se

$$L(x) - L(x_h) = \frac{1}{2}L'(x_h; e \pm \psi_h) + \frac{1}{2}L'(x_h + e; e) + \mathcal{R}_h, \quad (3.51)$$

nota-se que $L'(x, e) = 0$ e $L'(x_h; \psi_h) = 0$, logo

$$L(x) - L(x_h) = \frac{1}{2}L'(x_h; e - \psi_h) + \mathcal{R}_h, \quad \forall \psi_h \in \mathcal{X}_h \blacksquare \quad (3.52)$$

Lema 3.9 *Sejam $(\underline{U}, \underline{Z})$ e $(\underline{U}_h, \underline{Z}_h)$ soluções de (3.45) e (3.46), respectivamente. Então, vale a seguinte identidade*

$$J(\underline{U}) - J(\underline{U}_h) = \frac{1}{2}\varrho(\underline{U}, \underline{Z} - \underline{\psi}_h) + \frac{1}{2}\varrho^*(\underline{U}_h, \underline{U} - \underline{\Phi}_h, \underline{Z}_h) + \mathcal{R}_h''' \quad \forall (\underline{\Phi}_h, \underline{\psi}_h) \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{X}_h, \quad (3.53)$$

e com os seguintes resíduos, primal e dual:

$$\begin{aligned} \varrho(\underline{U}_h, \cdot) &= -\mathfrak{A}(\underline{U}_h, \cdot); \\ \varrho^*(\underline{U}_h, \underline{Z}_h, \cdot) &= J'(\underline{U}_h; \cdot) - \mathfrak{A}'(\underline{U}_h, \underline{Z}_h; \cdot). \end{aligned} \quad (3.54)$$

O termo residual \mathcal{R}_h''' , da equação (3.53), é cúbico no erro primal e dual $\underline{e} = \{\underline{E}, \underline{E}^*\} = \{\underline{U} - \underline{U}_h, \underline{Z} - \underline{Z}_h\}$:

$$\mathcal{R}_h''' = \frac{1}{2} \int_0^1 \tilde{\mathcal{R}}_h''' s(s-1) ds, \quad (3.55)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}_h''' &= J'''(\underline{U}_h + s\underline{E}; \underline{E}, \underline{E}, \underline{E}) - \mathfrak{A}'''(\underline{U}_h + s\underline{E}, \underline{Z}_h + s\underline{E}^*; \underline{E}, \underline{E}, \underline{E}) \\ &\quad - 3\mathfrak{A}''(\underline{U}_h + s\underline{E}, \underline{E}^*; \underline{E}, \underline{E}). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Prova: Sejam os espaços

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X} \times \mathcal{X}; \mathcal{Y}_h = \mathcal{X}_h \times \mathcal{X}_h \subset \mathcal{Y}, \quad (3.57)$$

e seja $x = \{\underline{U}, \underline{Z}\}$ a solução de (3.43) e (3.42). Nota-se que $L(x) = \mathcal{L}(\underline{U}, \underline{Z})$, assim tem-se

$$J(\underline{U}) - J(\underline{U}_h) = L(x) - L(x_h) = \frac{1}{2}L'(x_h; x - y_h) + R_h, \quad \forall y_h \in \mathcal{Y}_h, \quad (3.58)$$

onde se usou (3.45). Também obtém-se

$$\begin{aligned} L'(x_h; x - y_h) &= \mathcal{L}'(\underline{U}_h, \underline{Z}_h; \underline{Z} - \underline{\psi}) + \mathcal{L}'(\underline{U}_h, \underline{Z}_h; \underline{U} - \underline{\Phi}_h) \\ &= -\mathfrak{A}(\underline{U}_h, \underline{Z} - \underline{\psi}_h) + J'(\underline{U}_h; \underline{U} - \underline{\Phi}) - \mathfrak{A}'(\underline{U}_h, \underline{Z}_h; \underline{U}_h - \underline{\Phi}_h) \\ &= \varrho(\underline{U}_h, \underline{Z} - \underline{\psi}_h) + \varrho^*(\underline{U}_h, \underline{Z}_h, \underline{U} - \underline{\Phi}_h). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Observa-se que se $\mathcal{L}(\underline{U}, \underline{Z})$ é linear em relação a \underline{Z} , então

$$\begin{aligned} L'''(x_h + se; e, e, e) &= J'''(\underline{U}_h + s\underline{E}; \underline{E}, \underline{E}, \underline{E}) - \mathfrak{A}'''(\underline{U}_h + s\underline{E}, \underline{Z}_h + s\underline{E}^*; \underline{E}, \underline{E}, \underline{E}) - \\ &\quad - 3\mathfrak{A}''(\underline{U}_h + s\underline{E}, \underline{E}^*; \underline{E}, \underline{E}) = \mathcal{R}_h''' \blacksquare \end{aligned} \quad (3.60)$$

Algumas aproximações são necessárias para a obtenção de uma forma aplicável do erro proposto neste lema:

- \mathcal{R}_h''' é desprezado;
- Acrescenta-se o termo de estabilização aos problemas primal e dual quando este se faz necessário;
- O método de projeção local é "fracamente consistente", ou seja, quando a solução $\{\underline{U}, \underline{Z}\}$ é aplicada ao problema aproximado não se obtém a igualdade, existe um erro que é da mesma ordem de grandeza do erro de discretização;
- Os termos $\underline{U} - \underline{\Phi}_h$ e $\underline{Z} - \underline{\psi}_h$ são aproximados, respectivamente, por $I''_{Z_h}\underline{U}_h - \underline{U}_h$ e $I''_{Z_h}\underline{Z}_h - \underline{Z}_h$, de modo que

$$J(\underline{U}) - J(\underline{U}_h) \approx \check{E}(\underline{U}_h, \underline{Z}_h), \quad (3.61)$$

onde

$$\check{E}(\underline{U}_h, \underline{Z}_h) := \frac{1}{2}\varrho(\underline{U}_h, I''_{Z_h}\underline{Z}_h - \underline{Z}_h) + \frac{1}{2}\varrho^*(\underline{U}_h, \underline{Z}_h, I''_{Z_h}\underline{U}_h - \underline{U}_h), \quad (3.62)$$

e I''_{Z_h} é um interpolante de ordem 2.

Observa-se que a existência de soluções para os problemas primal e dual não são garantidas pelas argumentações apresentadas neste trabalho. Este é um objetivo diferente e não trivial, poucos estudos disponíveis na literatura mostram este tipo de resultado para problemas FSI.

A derivada de Gâteaux para o problema primal da formulação geral de um problema FSI não precisa ser exata, ela precisa ser somente "bem comportada" o suficiente para garantir a convergência da resolução pelo método de Newton, de modo que se obtém uma redução no resíduo do sistema de equações não-linear. Assim a qualidade da solução do problema primal é avaliada pelo resíduo resultante da aproximação do sistema não-linear.

Não há, contudo, um meio semelhante pelo qual se possa avaliar a solução discreta para o problema dual. Isto se deve ao comportamento do deslocamento \underline{u} na derivada de Gâteaux. No formalismo euleriano isto se manifesta pela presença de integrais de Dirac nas fronteiras, que surgem das derivadas de forma, sendo particularmente notáveis nesta descrição devido à dependência das variáveis em relação às fronteiras. Observa-se que, de modo geral, este problema está presente na abordagem de qualquer problema não-linear, já que as derivadas de Gâteaux dependem da solução primal e são usualmente aproximadas pela solução primal discreta.

Considera-se que a interface discretizada é semelhante à interface atual, ou seja, $\Gamma_{ih} \approx \Gamma_i$. Formula-se então o problema dual com Γ_{ih} como uma interface fixa. Considerações deste tipo foram feitas com êxito em problemas semelhantes, como problemas de elastoplasticidade.

Observação 3.2 *O problema FSI formulado em uma descrição euleriana emprega funções características, como em (2.38), que são definidas em função de \underline{u} . Estas funções são, em geral, Lipschitzianas porém não diferenciáveis. Esta questão pode contudo ser solucionada pelo emprego do teorema estrutural de Hadamard, assume-se que a interface sólido-fluido constitui uma variedade de dimensão inferior ao domínio Ω e a diferenciação é feita em um contexto integral. (SOKOLOWSKI; ZOLESIO, 1992)*

Retorna-se ao Lema 3.9, no qual \mathcal{R}_h''' é cúbico em relação aos erros \underline{E} e \underline{E}^* e pode ser assim desprezado. Formula-se então o indicador de erro

$$\eta(\underline{U}_h, \underline{Z}_h) = \frac{1}{2} \min_{\underline{\varphi} \in \mathcal{X}_h} \varrho(\underline{U}_h, \underline{Z} - \underline{\varphi}_h) + \frac{1}{2} \min_{\underline{\varphi} \in \mathcal{X}_h} \varrho^*(\underline{U}_h, \underline{Z}_h, \underline{U} - \underline{\varphi}_h). \quad (3.63)$$

A relação entre os resíduos primal e dual é dada pela seguinte proposição.

Proposição 3.2 *Seja $\Delta\varrho$ tal que*

$$\begin{aligned} \min_{\underline{\varphi} \in \mathcal{X}_h} \varrho^*(\underline{U}_h, \underline{Z}_h, \underline{U} - \underline{\varphi}_h) &= \min_{\underline{\varphi} \in \mathcal{X}_h} \varrho(\underline{U}_h, \underline{Z} - \underline{\varphi}_h) + \Delta\varrho; \\ \Delta\varrho &= \int_0^1 [\mathfrak{A}''(\underline{U}_h + s\underline{E}, \underline{Z}_h + s\underline{E}^*; \underline{E}, \underline{E}) - J''(\underline{U}_h + s\underline{E}; \underline{E}, \underline{E})] ds. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Obtém-se assim uma simplificação para a representação do erro:

$$J(\underline{U}) - J(\underline{U}_h) = \min_{\underline{\varphi} \in \mathcal{X}_h} \varrho(\underline{U}_h, \underline{Z} - \underline{\varphi}) + \mathcal{R}_h'', \quad (3.65)$$

onde o termo residual quadrático é dado por

$$\mathcal{R}'' = [\mathfrak{A}''(\underline{U}_h + s\underline{E}, \underline{Z}_h + s\underline{E}^*; \underline{E}, \underline{E}) - J''(\underline{U}_h + s\underline{E}; \underline{E}, \underline{E})] ds. \quad (3.66)$$

Prova: Seja

$$g(s) = J'(\underline{u} + s\mathbf{E})(\underline{U} - \varphi_h) - \mathfrak{A}'(\underline{U}_h + s\mathbf{E}^*, \underline{U} - \varphi_h; \underline{Z}_h - s\mathbf{E}^*), \quad (3.67)$$

assim tem-se

$$g(1) = J'(\underline{U}; \underline{U} - \varphi_h) - \mathfrak{A}'(\underline{U}, \underline{U} - \varphi_h; \underline{Z}), \quad (3.68)$$

obtida pela definição de \underline{Z} . Logo

$$\begin{aligned} g'(s) = & J''(\underline{U}_h + s\mathbf{E}; \mathbf{E}, \underline{u} - \varphi_h) - \mathfrak{A}''(\underline{U}_h + s\mathbf{E}, \underline{U} - \varphi_h; \mathbf{E}, \underline{Z}_h + s\mathbf{E}^*) \\ & - \mathfrak{A}'(\underline{U}_h + s\mathbf{E}, \underline{U} - \varphi_h; \mathbf{E}^*). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Portanto obtém-se

$$\begin{aligned} \int_0^1 g'(s) ds = & \varrho^*(\underline{U}_h, \underline{Z}_h, \underline{U} - \varphi_h) = \int_0^1 [\mathfrak{A}''(\underline{U}_h + s\mathbf{E}, \underline{U} - \varphi_h; \mathbf{E}, \underline{Z}_h + s\mathbf{E}^*) \\ & - J''(\underline{U}_h + s\mathbf{E}; \mathbf{E}, \underline{U} - \varphi_h)] ds + \int_0^1 \mathfrak{A}'(\underline{U}_h + s\mathbf{E}, \underline{U} - \varphi_h; \mathbf{E}^*) ds, \end{aligned} \quad (3.70)$$

então,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathfrak{A}'(\underline{U}_h + s\mathbf{E}, \underline{U} - \varphi_h; \mathbf{E}^*) ds = & \int_0^1 [\mathfrak{A}''(\underline{U}_h + s\mathbf{E}, \underline{U} - \varphi_h; \mathbf{E}, \underline{Z}_h + s\mathbf{E}^*) \\ & - J''(\underline{U}_h + s\mathbf{E}; \mathbf{E}, \underline{U} - \varphi_h)] ds + \varrho(\underline{U}, \mathbf{E}^*). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Observa-se que o último termo é o resíduo primal, no qual pode-se substituir \mathbf{E}^* por $\underline{Z} - \varphi_h$ com um valor qualquer $\underline{U}_h \in \mathcal{X}_h$. Integrando-se por partes

$$\begin{aligned} \mathcal{R}'' = & - \int_0^1 [\mathfrak{A}'(\underline{U}_h + s\mathbf{E}, \underline{Z}; \mathbf{E}) - J'(\underline{U}_h + s\mathbf{E}; \mathbf{E})] ds \\ & + \mathfrak{A}'(\underline{U}, \underline{Z}; \mathbf{E}) - J'(\underline{U}; \mathbf{E}). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Pela definição de \underline{Z} tem-se que $\mathfrak{A}'(\underline{U}, \underline{Z}; \mathbf{E}) - J'(\underline{U}; \mathbf{E}) = 0$. Então

$$\begin{aligned} J(\underline{U}) - J(\underline{U}_h) = & \frac{1}{2} \min_{\varphi_h \in \mathcal{X}_h} \varrho(\underline{U}_h, \underline{Z} - \varphi_h) + \frac{1}{2} \min_{\varphi_h \in \mathcal{X}_h} \varrho^*(\underline{U}_h, \underline{Z}_h, \underline{U} - \varphi_h) + \mathcal{R}'' \\ = & \min_{\varphi_h \in \mathcal{X}_h} \varrho(\underline{U}_h, \underline{Z} - \varphi_h) + \mathcal{R}'' \blacksquare \end{aligned} \quad (3.73)$$

Observação 3.3 *Caso o funcional $J(\cdot)$ e o problema variacional sejam ambos lineares, a última proposição mostra que os resíduos primal e dual coincidem. Em geral a diferença é quadrática em \mathbf{E} e assim pode-se supor que para muitas aplicações práticas seja pequena o suficiente para ser desprezada. O termo Δ_ϱ da uma indicação do grau de não-linearidade do erro.*

A próxima proposição estabelece uma representação alternativa para o erro, na qual não sobra nenhum resíduo.

Proposição 3.3 *Seja a aproximação de Galerkin $\mathfrak{A}(\underline{U}_h, \varphi_h) = F(\varphi_h) = 0, \forall \varphi_h \in \mathcal{X}_h$. Então tem-se a seguinte representação para o erro*

$$J(\underline{U}) - J(\underline{U}_h) = \min_{\varphi_h \in \mathcal{X}_h} \varrho(\underline{U}_h, \underline{Z} - \varphi_h), \quad (3.74)$$

onde \underline{Z} é definido pelo problema adjunto

$$\int_0^1 \mathfrak{A}'(\underline{U}_h + s\underline{E}, \underline{Z}; \varphi) ds = \int_0^1 J'(\underline{U}_h + s\underline{E}; \varphi) ds, \quad \forall \varphi \in \mathcal{X}. \quad (3.75)$$

Prova: Introdz-se a seguinte notação para um funcional qualquer $\mathcal{F}(\cdot)(\cdot, \cdot, \dots)$:

$$\mathcal{F}'(\overline{\underline{U}\underline{U}_h})(\cdot, \cdot, \dots) = \int_0^1 \mathcal{F}'(\underline{U}_h + s\underline{E})(\cdot, \cdot, \dots) ds, \quad \forall (\cdot, \cdot, \dots) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \dots \times \mathcal{X}. \quad (3.76)$$

Então pode-se afirmar que

$$\mathfrak{A}(\underline{U}, \varphi) - \mathfrak{A}(\underline{U}_h, \varphi) = \int_0^1 \mathfrak{A}'(\underline{U}_h + s\underline{E}, \varphi; \underline{E}) ds = \mathfrak{A}'(\overline{\underline{U}\underline{U}_h})(\underline{E}), \quad (3.77)$$

faz-se o mesmo para $J(\underline{U}) - J(\underline{U}_h)$. Assume-se que $\varphi = \underline{E}$ no problema adjunto e então

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathfrak{A}'(\underline{U}_h - s\underline{E}, \underline{Z}; \varphi) ds &= \int_0^1 J'(\underline{U}_h + s\underline{E}; \varphi) ds; \\ \therefore \mathfrak{A}'(\overline{\underline{U}\underline{U}_h}, \underline{Z}; \underline{E}) &= J'(\overline{\underline{U}\underline{U}_h}; \underline{E}), \end{aligned} \quad (3.78)$$

unindo-se as relações anteriores obtém-se

$$J(\underline{U}) - J(\underline{U}_h) = \mathfrak{A}'(\overline{\underline{U}\underline{U}_h}, \underline{Z}; \underline{E}) = \mathfrak{A}(\underline{U}, \underline{Z}) - \mathfrak{A}(\underline{U}_h, \underline{Z}). \quad (3.79)$$

Emprega-se então a ortogonalidade de Galerkin,

$$\begin{aligned} J(\underline{U}) - J(\underline{U}_h) &= \mathfrak{A}(\underline{U}, \underline{Z} - \varphi_h) - \mathfrak{A}(\underline{U}_h, \underline{Z} - \varphi_h) = \\ &= F(\underline{Z} - \varphi_h) - \mathfrak{A}(\underline{U}_h, \underline{Z} - \varphi_h), \quad \varphi_h \in \mathcal{X}_h \blacksquare \end{aligned} \quad (3.80)$$

Formula-se então um problema de otimização, semelhante ao proposto em (3.41).

Sejam $\check{\underline{U}}$ e $\check{\underline{U}}_h$ dois elementos fixos de \mathcal{X} e $\check{\underline{E}} = \check{\underline{U}} - \check{\underline{U}}_h$. Defini-se um lagrangiano linear

$$\tilde{\mathcal{L}}(\underline{U}, \underline{Z}) = \int_0^1 J'(\check{\underline{U}}_h + s\check{\underline{E}}; \check{\underline{U}} - \check{\underline{U}}_h) ds - \int_0^1 \mathfrak{A}'(\check{\underline{U}}_h + s\check{\underline{E}}, \underline{Z}; \check{\underline{U}} - \check{\underline{U}}_h) ds, \quad (3.81)$$

que tem um ponto estacionário $(\underline{U}^*, \underline{Z}^*)$ definido de modo que

$$\mathfrak{A}(\underline{U}^*, \varphi) = \mathfrak{A}(\check{\underline{U}}, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{X}, \quad (3.82)$$

e tem-se

$$\mathfrak{A}'(\overline{\check{U}\check{U}_h}, \check{Z}^*; \varphi) = J'(\overline{\check{U}\check{U}_h}, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{X}. \quad (3.83)$$

Seja $(\check{U}_h, \check{Z}_h) \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{X}_h$ a aproximação de Galerkin das equações acima. Caso escolha-se $\check{U} = \underline{U}$ e $\check{U}_h = \underline{U}_h$, pode-se notar que $\check{U}^* = \underline{U}$ e $\check{Z}^* = \underline{Z}$, disto segue que as equações anteriores são reduzidas as formas originais. Assim suas análogas discretas resultam em

$$\mathfrak{A}'(\overline{\underline{U}\underline{U}_h}, \underline{Z}_h; \varphi_h) = J'(\overline{\underline{U}\underline{U}_h}, \varphi), \quad \forall \varphi_h \in \mathcal{X}_h, \quad (3.84)$$

com $\underline{Z}_h \in \mathcal{X}_h$. A seguir emprega-se o lema 3.9 e obtém-se

$$J(\underline{U}) - J(\underline{U}_h) = \frac{1}{2} \tilde{\rho}(\underline{U}_h, \underline{Z} - \varphi) + \frac{1}{2} \tilde{\rho}^*(\underline{U}_h, \underline{U} - \varphi, \underline{Z}_h), \quad (3.85)$$

já que não há termos residuais devido à linearidade de $\tilde{\mathcal{L}}$. Devido às considerações acima tem-se $\tilde{\rho}(\underline{U}_h, \varphi) = \rho(\underline{U}_h, \varphi)$ e $\tilde{\rho}^*(\underline{U}_h, \underline{U}_h; \underline{Z}_h) = J(\underline{U}) - J(\underline{U}_h)$, e assim obtém-se o resultado desejado.

Esta última proposição não pode ser diretamente aplicada, isto pois é formulada com o problema adjunto que por sua vez depende da solução desconhecida \underline{u} . Contudo, com o objetivo de mensurar o efeito da não-linearidade pode-se resolver o problema adjunto (3.78) através de uma variável \check{U}_h , obtida através de $\check{\mathcal{X}}_h \subset \mathcal{X}$, que é um espaço enriquecido em relação a \mathcal{X}_h , ou seja

$$\mathfrak{A}'(\overline{\check{U}\check{U}_h}, \check{Z}; \varphi) = J'(\overline{\check{U}\check{U}_h}, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{X}. \quad (3.86)$$

Assume-se que $\check{U} = \underline{U}_h$, e então a última equação reduz-se a

$$\mathfrak{A}'(\underline{U}_h, \underline{Z}; \varphi) = J(\underline{U}_h, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{X}, \quad (3.87)$$

e à situação apresentada ao lema 3.9. Na sequência apresenta-se uma análise teórica da aplicação da aproximação sugerida no problema adjunto.

Proposição 3.4 *Seja $\check{U}_h \in \check{\mathcal{X}}_h$ um aproximação aprimorada da solução \underline{U} com um erro dado por $\check{\mathcal{E}} = \underline{U} - \check{U}_h$. Seja $\underline{Z} \in \mathcal{X}$ a solução do problema adjunto linearizado*

$$\mathfrak{A}'(\overline{\check{U}\check{U}_h}, \underline{Z}; \varphi) = J'(\overline{\check{U}\check{U}_h}, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{X}. \quad (3.88)$$

Pela aproximação de Galerkin tem-se

$$\mathfrak{A}(\underline{U}_h, \varphi_h) = F(\varphi_h), \quad \forall \varphi_h \in \mathcal{X}_h, \quad (3.89)$$

e obtém-se um erro expresso por

$$J(\underline{U}) - J(\underline{U}_h) = \min_{\varphi_h \in \mathcal{X}_h} \varrho(\underline{U}_h, \underline{Z} - \varphi_h) + \mathcal{R}, \quad (3.90)$$

onde o termo residual é limitado por

$$|\mathcal{R}| \leq \frac{1}{2} \max_{\xi \in \overline{\mathcal{U}\check{\mathcal{U}}_h\mathcal{U}_h}} \left| J''(\xi; \check{\mathcal{E}}, \mathcal{E}) - \mathfrak{A}''(\xi, \mathcal{Z}; \check{\mathcal{E}}, \mathcal{E}) \right|, \quad (3.91)$$

onde a notação $\overline{\mathcal{U}\check{\mathcal{U}}_h\mathcal{U}_h}$ faz referência a um "triângulo" no espaço \mathcal{X} determinado pelas combinações lineares de $\{\mathcal{U}, \check{\mathcal{U}}_h, \mathcal{U}_h\}$.

Observação 3.4 O termo residual \mathcal{R} é nulo já que $\mathfrak{A}(\cdot, \cdot)$ e $J(\cdot)$ são lineares.

Prova: Seja $\check{\mathcal{E}}_h = \check{\mathcal{U}}_h - \mathcal{U}_h$. Então tem-se

$$J(\mathcal{U}) - J(\mathcal{U}_h) = J'(\overline{\mathcal{U}\check{\mathcal{U}}_h\mathcal{U}_h}; \mathcal{E}) + \int_0^1 \left[J'(\mathcal{U}_h + s\mathcal{E}; \mathcal{E}) - J'(\mathcal{U}_h + s\check{\mathcal{E}}_h; \mathcal{E}) \right] ds, \quad (3.92)$$

e

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(\mathcal{U}, \mathcal{Z}) - \mathfrak{A}(\mathcal{U}_h, \mathcal{Z}) &= \mathfrak{A}'(\overline{\mathcal{U}\check{\mathcal{U}}_h\mathcal{U}_h}, \mathcal{Z}; \mathcal{E}) \\ &+ \int_0^1 \left[\mathfrak{A}'(\mathcal{U}_h + s\mathcal{E}, \mathcal{Z}; \mathcal{E}) - \mathfrak{A}'(\mathcal{U}_h + s\check{\mathcal{E}}_h, \mathcal{Z}; \mathcal{E}) \right] ds. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Toma-se $\varphi = \mathcal{E}$ no problema adjunto e juntamente com as equações anteriores obtém-se

$$J(\mathcal{U}) - J(\mathcal{U}_h) = \mathfrak{A}(\mathcal{U}, \mathcal{Z}) - \mathfrak{A}(\mathcal{U}_h, \mathcal{Z}) + \mathcal{R}(\overline{\mathcal{U}\check{\mathcal{U}}_h\mathcal{U}_h}; \check{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \mathcal{Z}), \quad (3.94)$$

com \mathcal{R} dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &:= \int_0^1 \left[J'(\mathcal{U}_h + s\mathcal{E}, \mathcal{Z}; \mathcal{E}) - J'(\mathcal{U}_h + s\check{\mathcal{E}}_h; \mathcal{E}) \right] ds \\ &- \int_0^1 \left[\mathfrak{A}'(\mathcal{U}_h + s\mathcal{E}, \mathcal{Z}; \mathcal{E}) - \mathfrak{A}'(\mathcal{U}_h + s\check{\mathcal{E}}_h, \mathcal{Z}; \mathcal{E}) \right] ds. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Retoma-se aqui a primeira equação de (3.92), e observa-se que $\mathcal{U}_h + s\mathcal{E} - \mathcal{U}_h + s\check{\mathcal{E}}_h = s\check{\mathcal{E}}$. Reescreve-se integral do lado direito de (3.92) como

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left[J'(\mathcal{U}_h + s\mathcal{E}; \mathcal{E}) - J'(\mathcal{U}_h + s\check{\mathcal{E}}_h; \mathcal{E}) \right] ds \\ &= - \int_0^1 \left\{ \int_0^1 J''(\mathcal{U}_h + s\check{\mathcal{E}} + t\mathcal{E}; \mathcal{E}, s\check{\mathcal{E}}) dt \right\} ds, \end{aligned} \quad (3.96)$$

faz-se procedimento análogo para a (3.93). Nota-se a seguir que

$$\mathcal{U}_h + s\check{\mathcal{E}}_h + st\mathcal{E} = (1-s)\mathcal{U}_h + ts\mathcal{U} + s(1-t)\check{\mathcal{U}}_h \quad (3.97)$$

é uma combinação linear convexa dos pontos \mathcal{U}_h , \mathcal{U} e $\check{\mathcal{U}}_h$. Assim garante-se que

$$|\mathcal{R}| \leq \frac{1}{2} \max_{\xi \in \overline{\mathcal{U}\check{\mathcal{U}}_h\mathcal{U}_h}} \left| J''(\xi; \check{\mathcal{E}}, \mathcal{E}) - \mathfrak{A}''(\xi, \mathcal{Z}; \check{\mathcal{E}}, \mathcal{E}) \right|. \quad (3.98)$$

Emprega-se novamente a ortogonalidade de Galerkin, $\mathfrak{A}(\underline{U}, \varphi_h) - \mathfrak{A}(\underline{U}_h, \varphi_h) = 0$, $\forall \varphi_h \in \mathcal{X}_h$ e obtém-se

$$J(\underline{U}) - J(\underline{U}_h) = \varrho(\underline{U}_h, \underline{Z} - \varphi_h) + \mathcal{R}, \quad (3.99)$$

para um $\varphi_h \in \mathcal{X}_h$ qualquer. Conclui-se então que o termo do resto \mathcal{R} é nulo quando $\mathfrak{A}(\cdot, \cdot)$ e $J(\cdot)$ são lineares ■

Obtém-se, das proposições (3.2) e (3.4),

$$J(\underline{U}) - J(\underline{U}_h) \approx \varrho(\underline{U}_h, \underline{Z} - \varphi_h) = \mathfrak{A}(\underline{U}_h, \underline{Z} - \varphi_h). \quad (3.100)$$

Aplica-se a ortogonalidade de Galerkin e obtém-se

$$\mathfrak{A}(\underline{U}, \varphi_h) - \mathfrak{A}(\underline{U}_h, \varphi_h) = 0, \quad \forall \varphi_h \in \mathcal{X}_h, \quad (3.101)$$

e, com a condição que o operador $\mathfrak{A}(\cdot, \cdot)$ seja linear, a sua coercividade (ver definição no Apêndice A.5) garante que

$$\|\underline{a} - \underline{b}\|_E \leq c_m \sup_{\underline{Z} \in \mathcal{X}, \|\underline{Z}\|=1} |\mathfrak{A}(\underline{a}, \underline{Z}) - \mathfrak{A}(\underline{b}, \underline{Z})|, \quad \forall \underline{a}, \underline{b} \in \mathcal{X}, \quad (3.102)$$

onde $\|\cdot\|_E$ é a norma da energia em \mathcal{X} . Novamente, pela ortogonalidade de Galerkin, tem-se

$$\|\underline{e}_h\|_E \leq c_m \sup_{\underline{Z} \in \mathcal{X}, \|\underline{Z}\|=1} |\mathfrak{A}(\underline{U}, \underline{Z}) - \mathfrak{A}(\underline{U}_h, \underline{Z})| = c_m \sup_{\underline{Z} \in \mathcal{X}, \|\underline{Z}\|=1} |J(\underline{U}) - J(\underline{U}_h)|. \quad (3.103)$$

Logo, pela equação (3.73),

$$\|\underline{e}_h\|_E \leq c_m \sup_{\underline{Z} \in \mathcal{X}, \|\underline{Z}\|=1} \left| \min_{\varphi_h \in \mathcal{X}_h} \varrho(\underline{U}_h, \underline{Z} - \varphi_h) \right| \leq c_m \sup_{\underline{Z} \in \mathcal{X}, \|\underline{Z}\|=1} |\varrho(\underline{U}_h, \underline{Z} - \varphi_h)|. \quad (3.104)$$

3.2.3 Domínio Fluido

Definem-se os seguintes espaços de funções

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &:= \{ \underline{f} \in (\mathcal{D}(\Omega))^2 \mid \nabla \cdot \underline{f} = 0 \}; \\ \mathfrak{V} &:= \overline{\mathcal{V}}|_{H_0^1(\Omega)}; \\ \mathfrak{H} &:= \overline{\mathcal{V}}|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (3.105)$$

onde $\mathcal{D}(\Omega)$ é o espaço de funções $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto.

Observação 3.5 O diagrama comutativo na Figura 4 seguir apresenta a relação entre os espaços de funções, o espaço de Raviart-Thomas está definido no Apêndice A.5.

$$\begin{array}{ccc}
 (H^1(K))^2 & \xrightarrow{\nabla \cdot (\cdot)} & L^2(K) \\
 \Pi_x \downarrow & & \downarrow \mathfrak{P}_x \\
 \mathcal{RT}_x(K) & \xrightarrow{\nabla \cdot (\cdot)} & \mathcal{P}_x(K) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Figura 4 – Diagrama comutativo - Espaços de funções

Formalizam-se a velocidade e a pressão pelos mapeamentos:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2; \\
 p &: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}.
 \end{aligned} \tag{3.106}$$

Assim tem-se pela propriedade constitutiva do fluido que:

$$(\nabla p, \underline{\psi}^v)_{\Omega_f} + \rho_f (\partial \mathbf{v} / \partial t, \underline{\psi}^v)_{\Omega_f} + \mu (\Delta \mathbf{v}, \underline{\psi}^v)_{\Omega_f} + \rho_f ((\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v}, \underline{\psi}^v)_{\Omega_f} = 0, \tag{3.107}$$

assim,

$$\begin{aligned}
 & (p \underline{\psi}^v, \hat{\mathbf{n}})_{\partial \Omega_f} - (p, \nabla \cdot \underline{\psi}^v)_{\Omega_f} + \rho_f (\partial \mathbf{v} / \partial t, \underline{\psi}^v)_{\Omega_f} \\
 & + \mu ((\nabla \mathbf{v}) \underline{\psi}^v, \hat{\mathbf{n}})_{\partial \Omega_f} + \mu (\nabla \mathbf{v}, \nabla \underline{\psi}^v)_{\Omega_f} + \rho_f ((\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v}, \underline{\psi}^v)_{\Omega_f} = 0,
 \end{aligned} \tag{3.108}$$

logo,

$$\begin{aligned}
 \rho_f (\partial \mathbf{v} / \partial t, \underline{\psi}^v)_{\Omega_f} + \rho_f ((\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v}, \underline{\psi}^v)_{\Omega_f} + \mu (\nabla \mathbf{v}, \nabla \underline{\psi}^v)_{\Omega_f} &= 0, \quad \forall \underline{\psi}^v \in \mathfrak{V}; \\
 \therefore \rho_f (D_t \mathbf{v} / \partial t, \underline{\psi}^v)_{\Omega_f} + \mu (\nabla \mathbf{v}, \nabla \underline{\psi}^v)_{\Omega_f} &= 0, \quad \forall \underline{\psi}^v \in \mathfrak{V},
 \end{aligned} \tag{3.109}$$

onde $\mathbf{v} \in \mathfrak{V}$ e $p \in \mathfrak{S}$.

Considera-se, então, uma aproximação \mathbf{v}_h para um determinado tempo t^{n+1} , para um elemento K da malha tem-se:

$$\begin{aligned}
 \varrho_f^K &= \rho_f (\partial \mathbf{v}_h / \partial t, \underline{\psi}^v)_K + \rho_f ((\nabla \mathbf{v}_h) \mathbf{v}_h, \underline{\psi}^v)_K + \mu (\nabla \mathbf{v}_h, \nabla \underline{\psi}^v)_K \\
 &= \rho_f (D_t \mathbf{v}_h, \underline{\psi}^v)_K + \mu (\nabla \mathbf{v}_h, \nabla \underline{\psi}^v)_K;
 \end{aligned} \tag{3.110}$$

Com isso a bilinearidade do operador \mathfrak{A} é mantida. Pela formulação de Navier-Stokes tem-se que:

$$\rho_f (D_t \mathbf{v} / \partial t, \underline{\psi}^v)_K = -\mu (\nabla \mathbf{v}, \nabla \underline{\psi}^v)_K. \tag{3.111}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \rho_f (\partial \mathbf{v}_h / \partial t, \underline{\psi}^v)_K &\leq -\mu (\nabla \mathbf{v}, \nabla \underline{\psi}^v)_K + |\mu (\nabla \mathbf{v}, \nabla \underline{\psi}^v)_K|; \\
 \therefore \rho_f (\partial \mathbf{v}_h / \partial t, \underline{\psi}^v)_K &\leq 2|\mu (\nabla \mathbf{v}, \nabla \underline{\psi}^v)_K|.
 \end{aligned} \tag{3.112}$$

Pode-se limitar então o termo ϱ_1^K com as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned} |\varrho_1^K| &\leq \rho_f |(D_t \mathbf{v}, \underline{\psi}^v)_K| + \mu |(\nabla \mathbf{v}_h, \nabla \underline{\psi}^w)_K| \\ &\leq 3\mu |(\nabla \mathbf{v}_h, \nabla \underline{\psi}^w)_K| \\ &\leq 3\mu \|\nabla \mathbf{v}_h\|_{L^2(K)} \|\nabla \underline{\psi}^w\|_{L^2(K)}. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Agora, como $\exists C' > 0$ tal que $\|\nabla \underline{\psi}^w\|_{L^2(K)} < 0$,

$$|\varrho_1^K| \leq 3\mu C' \|\nabla \mathbf{v}_h\|_{L^2(K)} \leq 3\mu C' \|\mathbf{v}_h\|_{H^2(K)}. \quad (3.114)$$

Do Teorema do Traço (DOBROWOLSKI, 2006) sabe-se que $\exists C'' > 0$ tal que

$$\|\mathbf{v}_h\|_{H^2(K)} \leq C'' \|(\nabla \mathbf{v}_h) \hat{\mathbf{n}}\|_{H^{1/2}(\Gamma_f^K)}, \quad (3.115)$$

então,

$$\begin{aligned} |\varrho_1^K| &\leq 2\mu C' C'' \|(\nabla \mathbf{v}_h) \hat{\mathbf{n}}\|_{H^{1/2}(\Gamma_f^K)}; \\ \sum_K |\varrho_1^K| &\leq 2\mu C' C'' \sum_K \|(\nabla \mathbf{v}_h) \hat{\mathbf{n}}\|_{H^{1/2}(\Gamma_f^K)}; \\ \therefore \|\varrho_1\| &\leq C_1 \sum_K \|(\nabla \mathbf{v}_h) \hat{\mathbf{n}}\|_{H^{1/2}(\Gamma_f^K)}, \end{aligned} \quad (3.116)$$

onde $\|\varrho_1\| = \sum_K |\varrho_1^K|$.

3.2.4 Domínio Sólido

Pode-se concluir, com argumentos semelhantes aos empregados para o domínio fluido, que $\exists C_2 > 0$ tal que

$$\sum_K |\varrho_2^K| = \|\varrho_2\| \leq C_2 \sum_K \|\mathbf{T}_h \hat{\mathbf{n}}\|_{H^{1/2}(\Gamma_s^K)}. \quad (3.117)$$

Observação 3.6 *É possível mostrar que $\exists C''' > 0$ tal que*

$$\|\cdot\|_{H_s(\Gamma)} \leq C''' \|\cdot\|_{L^2(\Gamma)}, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad (3.118)$$

a partir de Teoremas do Traço e da definição de $H_s(\Gamma)$, através do operador $-\Delta_\Gamma$ (DAUTRAY; LIONS, 2012).

3.2.5 Estimativa de Erro para Problemas FSI

Retorna-se ao problema primal, para o qual pode-se mostrar que $\exists \tilde{C}_1, \tilde{C}_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |\varrho_3^K| &= |(\partial_t \mathbf{u}_h / \partial t + (\nabla \mathbf{u}_h) \mathbf{u}_h - \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}^w)_K + (\chi_s(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h), \boldsymbol{\psi}^w)_K \\ &\quad + (\chi_f \alpha_w \nabla \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\psi}^w)_K| \leq \tilde{C}_1 |\varrho_1^K| + \tilde{C}_2 |\varrho_2^K|; \\ \therefore |\varrho_3^K| &\leq \tilde{C}_1 C_1 \|(\nabla \mathbf{u}_h) \hat{\mathbf{n}}\|_{H^{1/2}(\Gamma_f^K)} + \tilde{C}_2 C_2 \|\mathbf{T} \hat{\mathbf{n}}\|_{H^{1/2}(\Gamma_s^K)}; \\ \therefore |\varrho_3^K| &\leq C_3 \|(\nabla \mathbf{u}_h) \hat{\mathbf{n}}\|_{H^{1/2}(\Gamma_f^K)} + C_4 \|\mathbf{T} \hat{\mathbf{n}}\|_{H^{1/2}(\Gamma_s^K)}, \end{aligned} \quad (3.119)$$

onde $C_3 = \tilde{C}_1 C_1$ e $C_4 = \tilde{C}_2 C_2$. Juntamente com a equação (3.104) obtém-se:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_h\|_E &\leq C_d \sup_{\mathbf{Z} \in \mathcal{X}, \|\mathbf{Z}\|=1} |J(\mathbf{U}) - J(\mathbf{U}_h)| \\ &\leq C_d \sup_{\mathbf{Z} \in \mathcal{X}, \|\mathbf{Z}\|=1} |\varrho(\mathbf{U}_h)(\mathbf{Z} - \boldsymbol{\varphi}_h)|. \end{aligned} \quad (3.120)$$

Pode-se mostrar que $\exists \tilde{C} > 0$ tal que $\sup_{\mathbf{Z} \in \mathcal{X}, \|\mathbf{Z}\|=1} \|\mathbf{Z} - \boldsymbol{\varphi}_h\| < \tilde{C}$. Assim,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_h\|_E &\leq C_d \tilde{C} |\varrho(\mathbf{U}_h)| \leq C_d \tilde{C} \left[C_1 \sum_K \|(\nabla \mathbf{u}_h) \hat{\mathbf{n}}\|_{H^{1/2}(\Gamma_f^K)} + C_2 \sum_K \|\mathbf{T} \hat{\mathbf{n}}\|_{H^{1/2}(\Gamma_s^K)} \right. \\ &\quad \left. + C_3 \sum_K \|(\nabla \mathbf{u}_h) \hat{\mathbf{n}}\|_{H^{1/2}(\Gamma_f^K)} + C_4 \sum_K \|\mathbf{T} \hat{\mathbf{n}}\|_{H^{1/2}(\Gamma_s^K)} \right] \\ &\leq 2C_d \tilde{C} \left(C_5 \sum_K \|(\nabla \mathbf{u}_h) \hat{\mathbf{n}}\|_{H^{1/2}(\Gamma_f^K)} + C_6 \sum_K \|\mathbf{T} \hat{\mathbf{n}}\|_{H^{1/2}(\Gamma_s^K)} \right), \end{aligned} \quad (3.121)$$

onde $C_5 = \max\{C_1 C_3\}$ e $C_6 = \max\{C_2 C_4\}$. Obtém-se a estimativa de erro adequada para o problema FSI:

$$\|\mathbf{e}_h\|_E \leq C_7 \sum_K \|(\nabla \mathbf{u}_h) \hat{\mathbf{n}}\|_{H^{1/2}(\Gamma_f^K)} + C_8 \sum_K \|\mathbf{T} \hat{\mathbf{n}}\|_{H^{1/2}(\Gamma_s^K)}, \quad (3.122)$$

onde $C_7 = 2C_d \tilde{C} C_5$ e $C_8 = 2C_d \tilde{C} C_6$.

3.3 ADAPTATIVIDADE DE MALHA

A geração de uma malha adaptativa pode ser descrita pelo algoritmo (GUERMOND; ERN, 2004).

1. Gera-se uma primeira malha grosseira \mathcal{T}_h^0 , atribui-se $i=0$.
2. Resolve-se o problema para \mathcal{T}_h^i , de modo a obter a solução \mathbf{U}^i .

3. Calcula-se um indicador de erro local $e_K^i(\mathcal{U}^i, \mathbf{f})$ para cada elemento de $K^i \in \mathcal{T}_h^i$.
4. Calcula-se o estimador de erro global. Se o resultado atender a precisão desejada, considera-se \mathcal{U}^i a solução final.
5. Caso contrário, gera-se uma nova malha. Atribui-se $i=i+1$ e volta-se ao passo 2.

A etapa 1, a geração de uma malha inicial, pode ser feita por diversos métodos, sendo que os mais utilizados seguem o critério de Delaunay. Este critério estabelece uma lógica para a interligação de uma série de pontos no domínio de modo a se formar uma malha triangular. Para isso deve-se primeiramente gerar uma nuvem de pontos. Os pontos nas fronteiras são normalmente determinados primeiro, em seguida um método, como o de Voronoi, é empregado para a determinação da posição dos pontos interiores (OWEN, 2000).

A etapa 5, a geração de uma nova malha, pode ser executada por diversos métodos. Estes podem ser divididos primariamente em três grupos: h-adaptativo, p-adaptativo, hp-adaptativo. O refino h-adaptativo ajusta o tamanho dos elementos da malha; o refino p-adaptativo ajusta o grau dos polinômios de interpolação; o hp-adaptativo usa as duas estratégias no mesmo algoritmo (BABUŠKA; GUO, 1992).

No refinamento h-adaptativo, executam-se dois passos: o primeiro é a seleção dos elementos a serem alterados, o segundo compreende a alteração da malha com base nos elementos selecionados. Pode-se destacar três estratégias para o ajuste da malha: o refino propriamente dito ou divisão de elementos da malha (*mesh-refinement*), a mesclagem de dois ou mais elementos (*mesh coarsening*), e a suavização da malha (*smoothing*) (VERFÜRTH, 2013). A divisão dos elementos pode ser executada por algoritmos como refinamento Vermelho-Verde-Azul, ou VVA, (do inglês *Red-Green-Blue refinement*) e biseção de arestas (*edge bisection*) (BARTELS, 2016).

Neste estudo, a malha inicial ou é cartesiana (e a geração da malha é elementar), como no Problema 1 apresentado no capítulo 4, ou então a malha é gerada por um algoritmo de Delaunay-Voronoi, disponível diretamente no *software* FreeFem++. A etapa número 2, a simulação, é realizada pelo método FSI proposto no capítulo 2. A etapa 3 e 4 são melhor detalhadas no capítulo 3, apresenta-se a seguir os estimadores empregados na implementação computacional.

O estimador de erro local, para um triângulo K , é dado por

$$\varepsilon_{local}(K) = \frac{\|(\nabla \mathbf{u}) \hat{\mathbf{n}}\|_{H_{1/2}(\Gamma_f^K)}}{L_{fluido}} + \frac{\|\mathbf{T} \hat{\mathbf{n}}\|_{H_{1/2}(\Gamma_s^K)}}{L_{solido}}. \quad (3.123)$$

O parâmetro L_{fluido} estabelece um limite para $\|(\nabla \mathbf{u}) \hat{\mathbf{n}}\|_{H_{1/2}(\Gamma_f^K)}$ no domínio fluido. Caso o valor deste último termo seja superior a L_{fluido} , $\varepsilon_{local}(K)$ será maior do que 1 e o

triângulo será selecionado para ser refinado. O mesmo se aplica ao parâmetro $L_{sólido}$, que estabelece um limite análogo para o domínio sólido.

A estimativa de erro global é dada por:

$$\varepsilon_{global} = \sqrt{\frac{\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\varepsilon_{local})^2}{NT}}, \quad (3.124)$$

onde NT é o número de elementos da malha.

A geração da nova malha, etapa 5, é feita por um refinamento h-adaptativo. O método utilizado é o refinamento VVA, que é descrito a seguir.

3.3.1 Refinamento Vermelho-Verde-Azul

Têm-se como dados de entrada a malha a ser refinada, \mathcal{T}_h^i , e um conjunto de elementos a serem inicialmente refinados, M_{ref} , selecionados por terem indicadores de erro locais ε_{local} maiores que 1. O algoritmo para o refinamento VVA consiste das seguintes etapas:

- A) Marcam-se todas as arestas que pertencem a cada elemento $T \in M_{ref}$.
- B) Marcam-se adicionalmente demais arestas de modo que todo triângulo $T \in \mathcal{T}_h^i$ que tenha alguma aresta marcada tenha também sua maior aresta marcada.
- C) Divide-se cada elemento $T \in \mathcal{T}_h^i$ com arestas marcadas pelo refinamento vermelho, azul ou verde se ele tiver, respectivamente, três, duas ou uma arestas marcadas. As divisões possíveis são ilustrados na Figura 5.

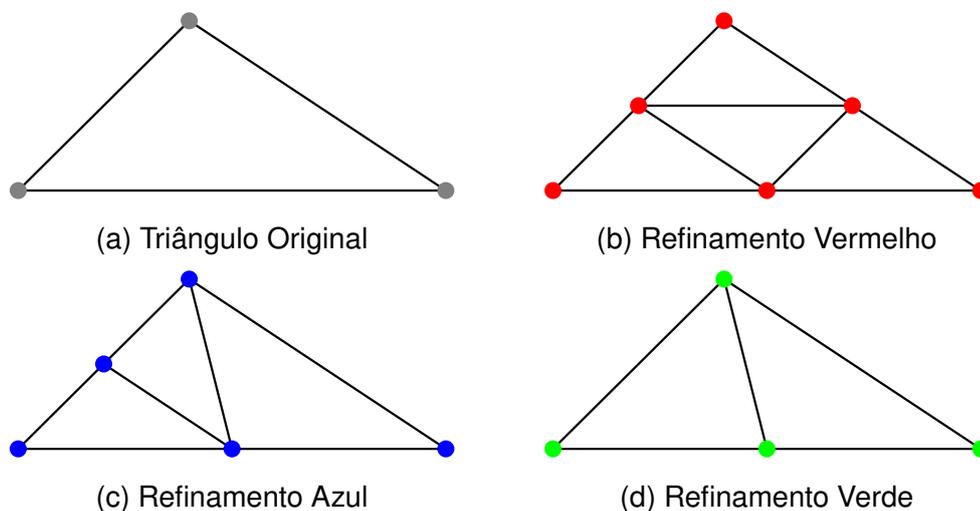


Figura 5 – Refinamento VVA

Um exemplo de aplicação do algoritmo de refinamento VVA é feito a seguir.

A Figura 6 mostra a malha original proposta para este exemplo. Supõe-se que apenas um elemento (ilustrado em cinza) tem ε_{local} maior do que 1, ou seja, há apenas 1 triângulo pertencente a M_{ref} .

A etapa A do algoritmo VVA marca as três arestas do triângulo a ser refinado, como mostrado na Figura 7.

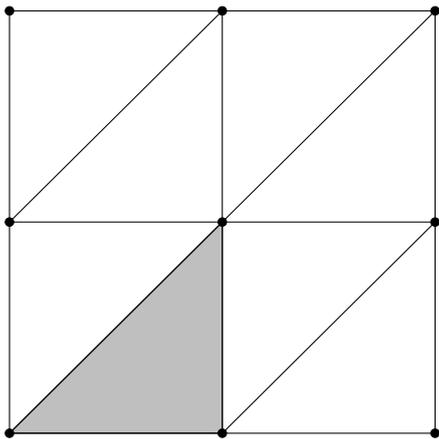


Figura 6 – Malha original com um elemento em M_{ref} (triângulo em cinza)

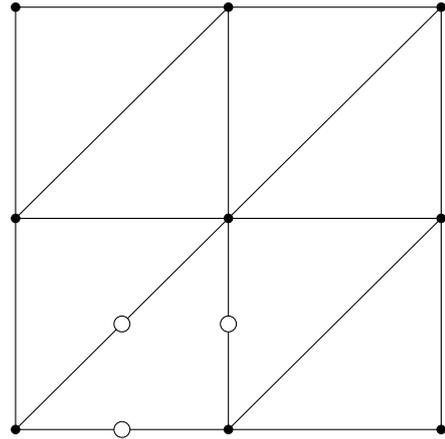


Figura 7 – Vértices adicionados na etapa A (círculos brancos)

A etapa B marca mais uma aresta, como mostrado na Figura 8. Observe-se que se está última aresta não fosse marcada um triângulo teria uma de suas arestas menores marcadas sem ter sua maior aresta marcada. Isto geraria triângulos distorcidos (com um dos ângulos internos muito grande).

A etapa C faz os refinamentos de acordo com o número de arestas marcadas para cada triângulo, como mostrado na Figura 9.

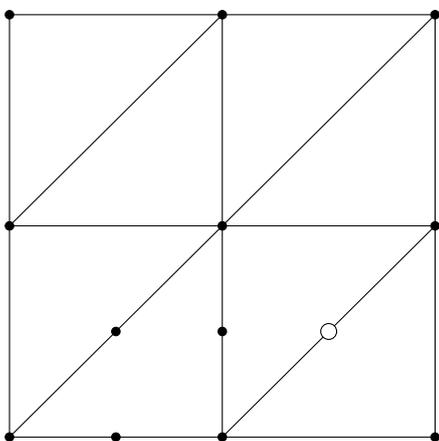


Figura 8 – Vértice adicionado na etapa B (círculo branco)

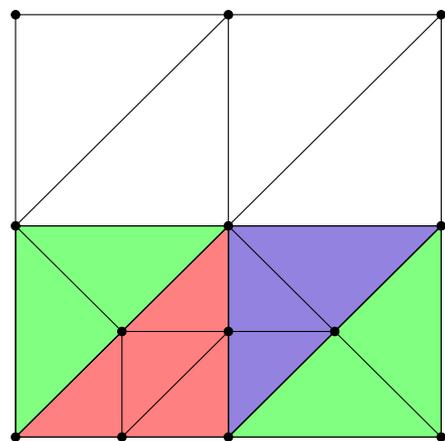


Figura 9 – Malha refinada

As etapas A e C do refinamento VVA não apresentam grandes dificuldades, a etapa B contudo não é trivial de ser implementada. Nesta marca-se a maior aresta de um triângulo caso esta não esteja ainda marcada porém pelo menos uma das demais arestas esteja. Contudo quando se marca uma aresta deste modo deve-se garantir que esta bipartição não vai ocasionar o mesmo problema no triângulo adjacente. Elaborou-se um código computacional para execução do refinamento VVA, no Apêndice C há um fluxograma do algoritmo com base no qual se implementou este código.

3.4 SUMÁRIO DO CAPÍTULO

- Introdução a estimativa de erro, apresentação dos principais conceitos;
- Derivadas direcionais do operador bilinear \mathfrak{A} ;
- Aplicação do método DWR:
 - Definição da função lagrangiana;
 - Derivação dos problemas dual e primal;
- Caracterização do erro no domínio sólido;
- Caracterização do erro no domínio fluido;
- Definição da estimativa de erro adequada;
- Introdução a adaptatividade de malha;
- Apresentação do algoritmo de adaptatividade empregado.

4 RESULTADOS

Apresentam-se aqui as simulações realizadas e os resultados obtidos. Os métodos empregados referentes às análises FSI, estimativa de erro e adaptatividade de malha são descritos nos capítulos 2 e 3. Dois problemas são analisados: o problema da cavidade com fundo elástico e o problema do escoamento em torno de cilindro com placa.

4.1 PROBLEMA 1 - CAVIDADE COM FUNDO ELÁSTICO

A geometria é mostrada na Figura 10, as dimensões e os parâmetros das propriedades constitutivas estão na Tabela 1. O sólido constitui a parte inferior do domínio e o fluido a parte superior. Nas fronteiras inferior, esquerda e direita tem-se a condição de contorno de velocidade nula. A fronteira superior tem condição de velocidade prescrita descrita pela função (4.1).

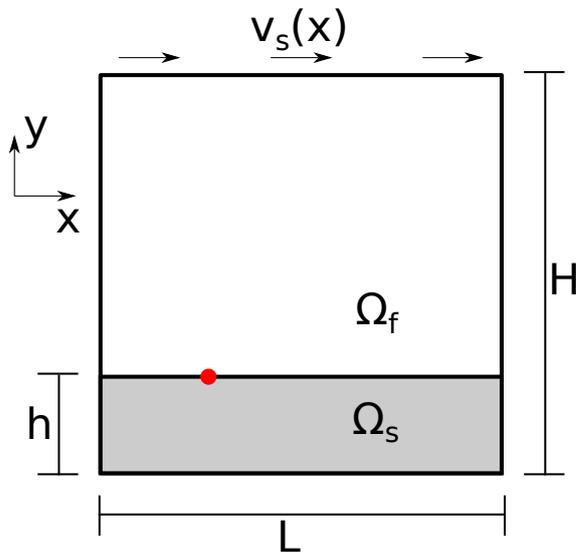


Figura 10 – Geometria do problema 1

Tabela 1 – Problema 1 - Dimensões e parâmetros constitutivos

Dimensões da cavidade	
L	1
H	1
h	0.25
Parâmetros constitutivos	
ρ_f	1
μ	0.01
ρ_s	1
s_1	0.05
Parâmetros adaptatividade	
$L_{sólido}$	1e-6
L_{fluido}	1e-3
L_{global}	1.2

$$\mathbf{v}_s(x) = \begin{bmatrix} 4x(1-x) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

O problema proposto é em regime permanente, porém são empregados pseudo-passos temporais para a obtenção da configuração final. Os termos dependentes do tempo são excluídos da formulação geral e iterações feitas até que os valores de

deslocamento no sólido e de velocidade no fluido não sejam mais significativamente alterados.

Inicialmente é utilizada uma malha grosseira, mostrada na Figura 11. A partir desta malha inicial são realizados refinamentos subsequentes até que a estimativa de erro global seja menor que L_{global} . O refinamento é feito de modo uniforme e adaptativo, os parâmetros para refinamento estão na Tabela 1.

A Figura 12 apresenta, para a primeira iteração do processo de refinamento, os indicadores de erro locais. Mostra-se o logaritmo de ε_{local} para se obter uma melhor visualização de sua distribuição. Assim, os triângulos a serem refinados são os que apresentam um valor de ε_{local} maior do que 1, ou seja, $\log(\varepsilon_{local})$ maior do que 0.

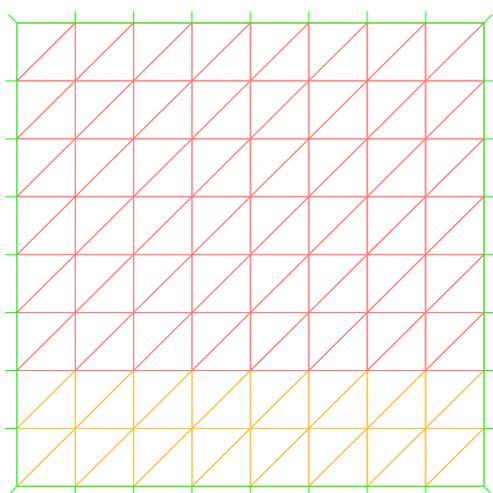


Figura 11 – Malha inicial do problema 1

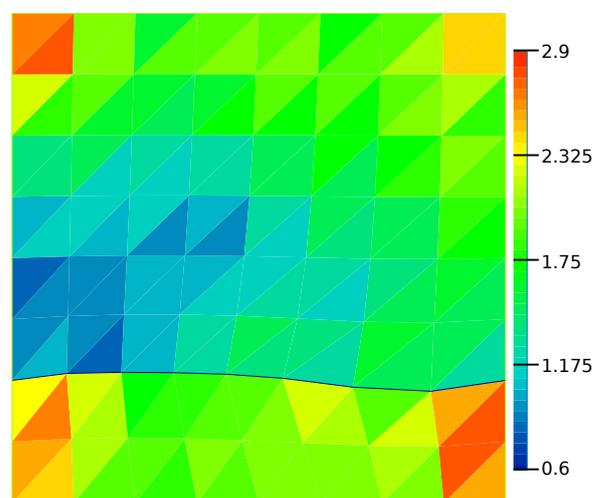


Figura 12 – Problema 1 - $\log(\varepsilon_{local})$

A Figura 14 mostra a magnitude da velocidade para a malha adaptativa mais refinada simulada, que está na Figura 13.

Observa-se que a velocidade no domínio sólido é nula, o que faz sentido já que a simulação é em regime permanente. Há uma recirculação do fluido dentro da cavidade provocada pela velocidade na fronteira superior. Pode-se observar também a posição da interface sólido-fluido, destacada em laranja.

Os erros globais em função do número de triângulos da malha estão na Figura 15. Pode-se notar que as duas estratégias tem desempenho idêntico nas primeiras iterações do processo de refinamento. Isto pois o refinamento adaptativo dividiu todos os elementos da malha inicial bastante grosseira, resultando na mesma malha obtida pelo refinamento uniforme. Nas iterações posteriores nota-se que o refinamento adaptativo obtém resultados melhores para um mesmo número de elementos, como esperado.

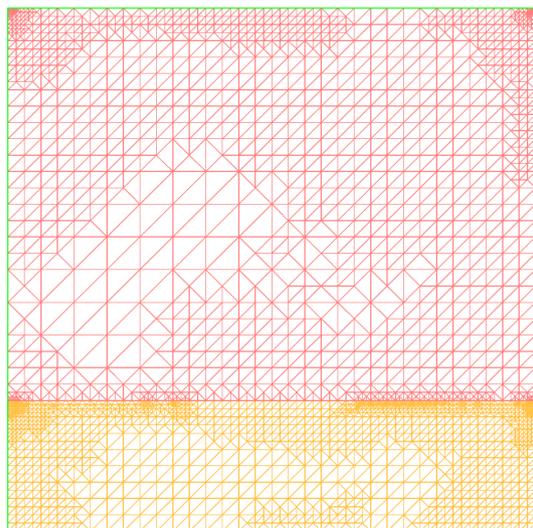


Figura 13 – Problema 1 - Malha adaptativa final

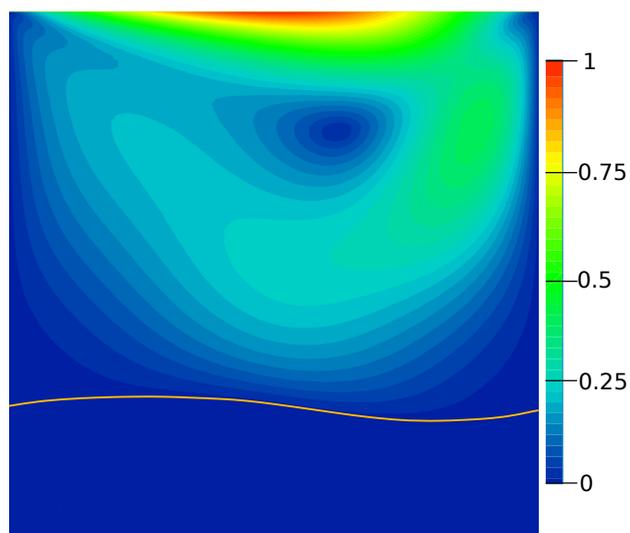


Figura 14 – Problema 1 - Campo de velocidades

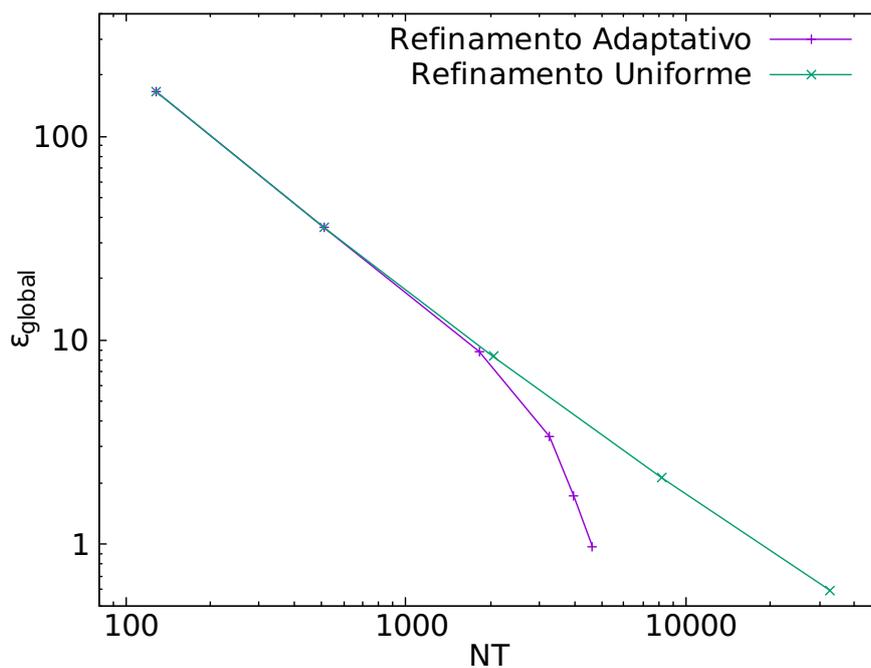


Figura 15 – Problema 2.1 - Erro global

A Figura 16 mostra o resíduo obtido em cada iteração. Os resíduos são calculados com base na quantidade de movimento, para este problema e também para os demais. O comportamento é semelhante ao do erro global, para um mesmo número de elementos o resíduo é menor para o refinamento adaptativo. Os tempos de simulação por iteração são mostrados na Figura 17.

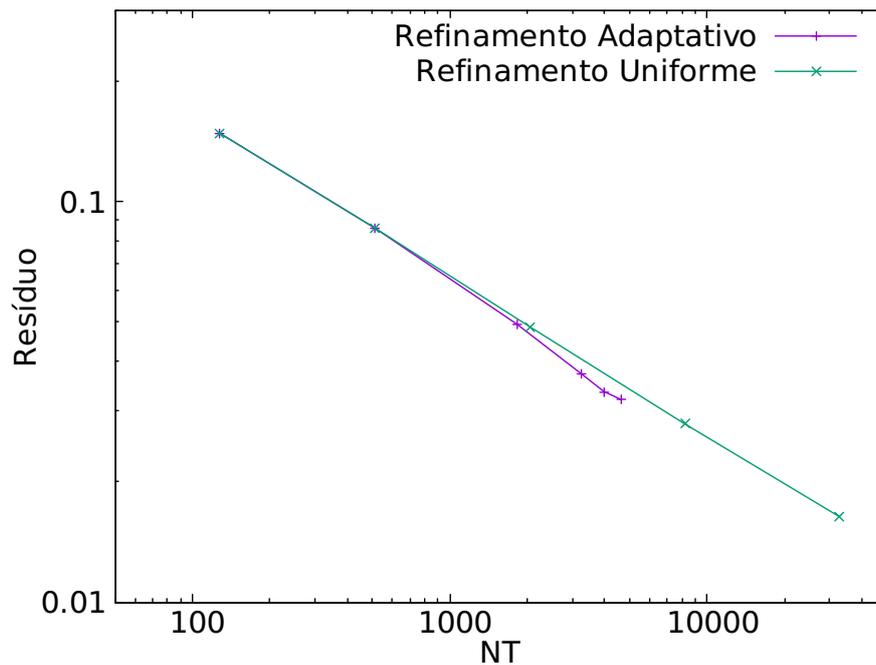


Figura 16 – Problema 2.1 - Resíduo

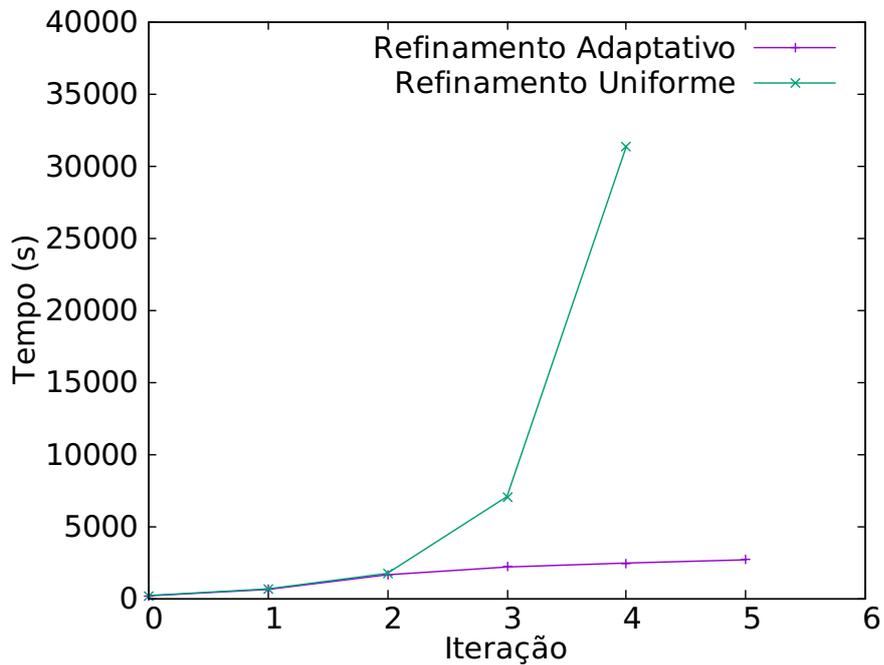


Figura 17 – Problema 2.1 - Tempo de simulação por iteração

Neste problema observa-se adicionalmente o deslocamento de um ponto material no sólido, de acordo com a equação (4.2). Este mesmo ponto foi marcado em vermelho na Figura 10 para melhor visualização. Os resultados obtidos estão na Tabela 2. Na última linha da tabela encontra-se o resultado obtido por Richter (2013), artigo

do qual a descrição deste problema foi retirada.

$$\tilde{u}(1/4; 1/4) = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Tabela 2 – Problema 1 - Deslocamentos ponto de observação

Adaptativo			Uniforme		
NT	U_x	U_y	NT	U_x	U_y
128	-2.8598	1.6628	128	-2.8598	1.6628
512	-2.8236	1.817	512	-2.8236	1.817
1826	-2.8261	1.9258	2048	-2.8263	1.9255
3255	-2.8221	1.9846	8192	-2.8265	1.9802
3977	-2.8185	2.0085	32768	-2.8262	2.0073
4639	-2.8371	2.0101			
Resultado literatura, (RICHTER, 2013)					
$\approx 1e6$	-2.8244	2.0510			

4.2 PROBLEMA 2 - ESCOAMENTO EM TORNO DE CILINDRO COM PLACA

A geometria do problema é representada nas Figuras 18 e 19, as dimensões estão na Tabela 3. As condições de contorno são: velocidade nula na parte superior e inferior da cavidade e no cilindro, de velocidade prescrita na fronteira esquerda da cavidade, e tensão nula na fronteira direita da cavidade. Deste modo, o fluido entra no domínio pela fronteira esquerda até sair pela fronteira direita e a placa ao centro interage com o escoamento.

A velocidade prescrita na fronteira esquerda da cavidade é descrita por:

$$\mathbf{v}_e(y) = \begin{bmatrix} 6 \bar{v}_e y(H - y)/H^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

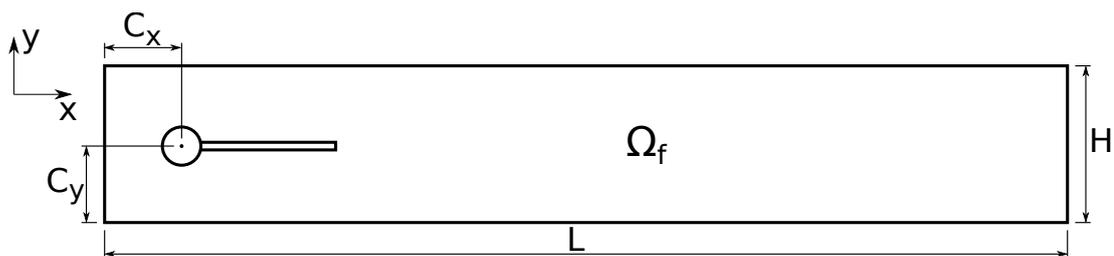


Figura 18 – Problema 2 - Geometria da cavidade

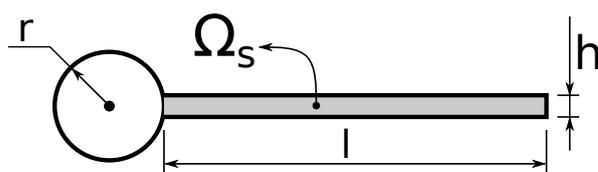


Figura 19 – Problema 2 - Geometria da placa

Tabela 3 – Problema 2 - Dimensões

L	2.5
H	0.41
h	0.02
Cx	0.2
Cy	0.2
l	0.35
r	0.05

Este Problema é dividido em três partes. Os parâmetros de simulação, incluindo propriedades constitutivas, estão na Tabela 4. As simulações, como no problema 1, são feitas com refinamento adaptativo e uniforme de malha.

Problema 2.1 - Simulação CFD, Dinâmica de Fluidos Computacional (do inglês *Computational Fluid Dynamics*): o domínio sólido é mantido rígido, avalia-se somente o comportamento do fluido. A simulação é em regime permanente e pseudo-passos temporais são utilizados para a obtenção da configuração final.

Problema 2.2 - Simulação CSM, Mecânica dos Sólidos Computacional (do inglês *Computational Solid Mechanics*): somente o sólido é simulado. A placa, presa ao cilindro fixo, cai sob ação da gravidade em cavidade vazia (sem nenhum fluido). Esta é uma simulação em regime transiente, observa-se a oscilação da placa.

Problema 2.3 - Simulação FSI: simulação final com o algoritmo completo para análise FSI. A placa oscila devido à interação com o escoamento, trata-se de um simulação em regime transiente.

Tabela 4 – Problema 2 - Parâmetros de simulação

	Problema 2.1	Problema 2.2	Problema 2.3
s_1	-	500.000	350.000
ρ_s	-	1.000	4.000
ν	1	-	1
ρ_f	1.000	-	2.000
\bar{v}_e	0.2	-	1
g	0	-2	0
Parâmetros adaptatividade			
L_{solido}	-	5e-2	2e-2
L_{fluido}	1e-5	-	1e-1
L_{global}	1	1	1.5

4.2.1 Problema 2.1 - Simulação CFD

A Figura 20 mostra a primeira malha utilizada, e a Figura 21 mostra os indicadores de erro locais (normalizados e em escala logarítmica, como explicado no problema

1).

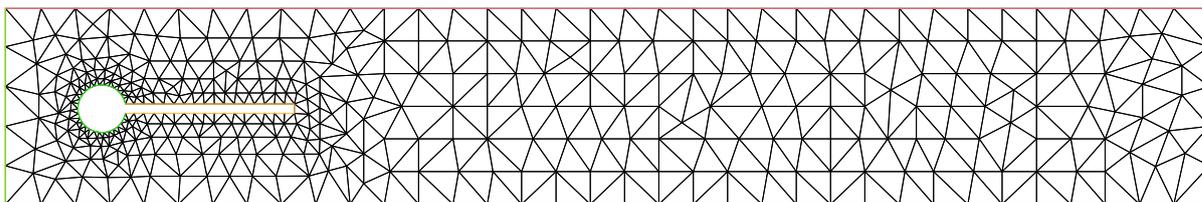


Figura 20 – Problema 2.1 - Malha inicial

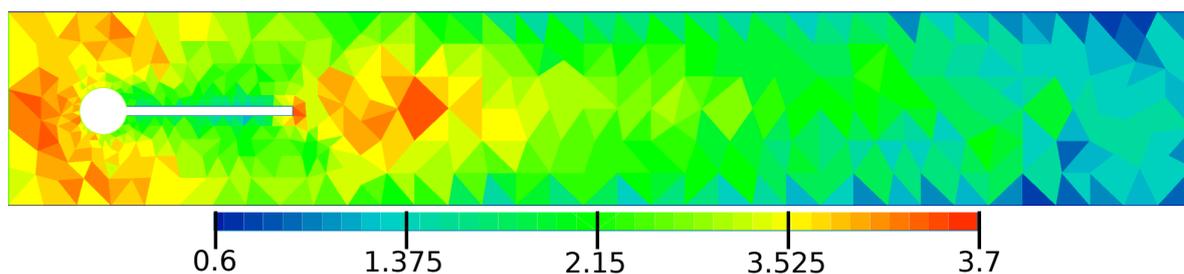


Figura 21 – Problema 2.1 - $\log(\varepsilon_{local})$

A Figura 23 mostra o campo de velocidades obtido com a malha adaptativa mais refinada simulada, que está na Figura 22. A Figura 24 mostra os erros globais obtidos com o refinamento adaptativo e com o refinamento uniforme.

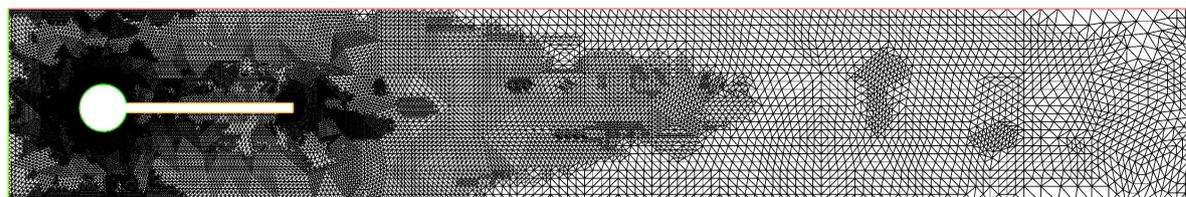


Figura 22 – Problema 2.1 - Malha adaptativa final

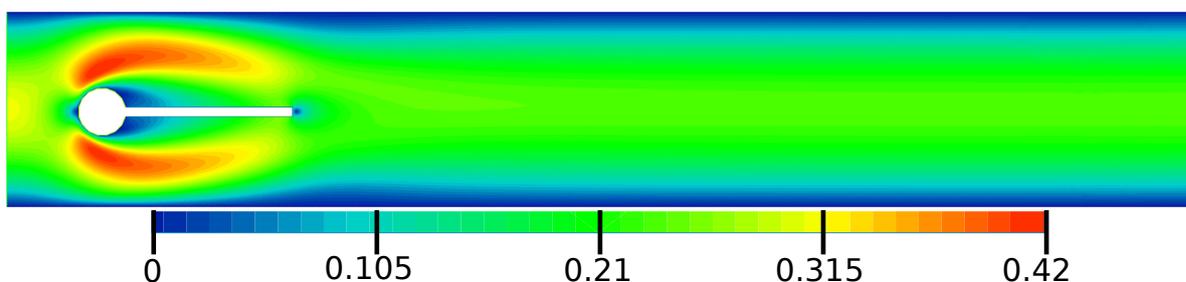


Figura 23 – Problema 2.1 - Campo de velocidades

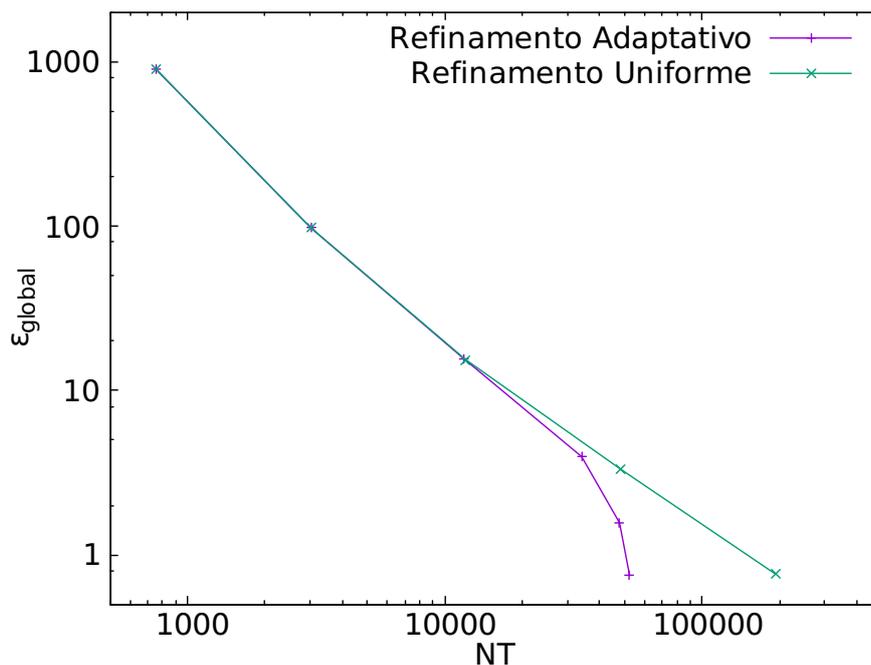


Figura 24 – Problema 2.1 - Erro global

A Figura 25 mostra o resíduo obtido em cada iteração. Os tempos de simulação por iteração estão na Figura 26.

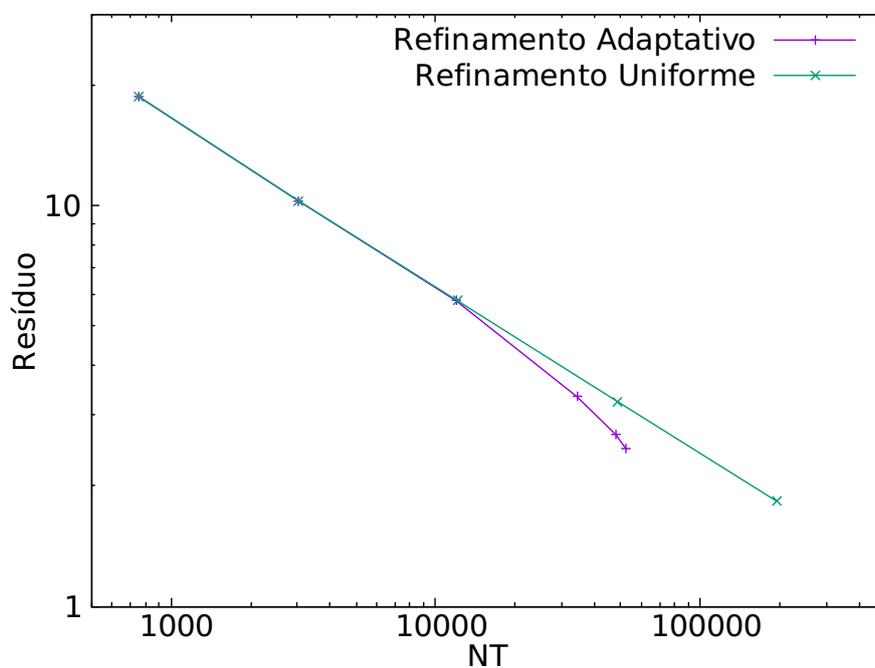


Figura 25 – Problema 2.1 - Resíduo

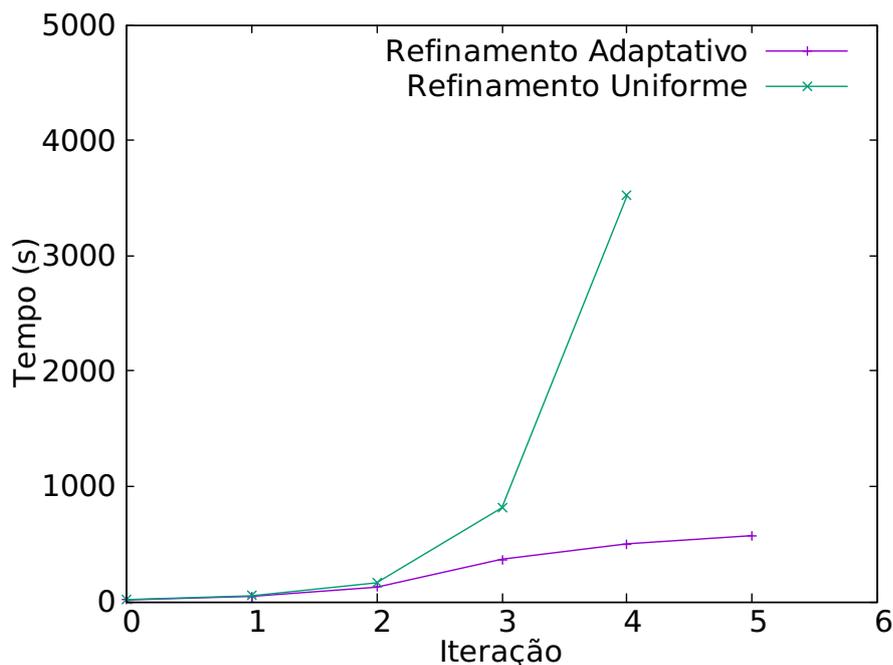


Figura 26 – Problema 2.1 - Tempo de simulação por iteração

A Tabela 5 contém as forças de arrasto e sustentação obtidas com o refino uniforme e o refino adaptativo. Os resultados encontrados são bastante próximos aos disponíveis na literatura.

Tabela 5 – Problema 2.1 - Forças de arrasto e de sustentação

Refinamento adaptativo			Refinamento Uniforme		
NT	Farrasto	Fsustentação	NT	Farrasto	Fsustentação
755	13.8229	1.23363	755	13.8229	1.23363
3020	14.0907	1.15336	3020	14.0907	1.15336
11915	14.1739	1.13787	12080	14.1739	1.13787
34082	14.2109	1.12745	48320	14.2109	1.12748
47837	14.2303	1.12208	193280	14.2298	1.12215
52396	14.2436	1.11937			
Resultado literatura, (TUREK; HRON, 2006)					
589824	14.2929	1.11905			

4.2.2 Problema 2.2 - Simulação CSM

Salienta-se que nesta simulação a placa está engastada pela lateral esquerda, pois está presa ao cilindro que é um fronteira fixa. Não há fluido na cavidade, simula-se somente o sólido.

A Figura 27 mostra a primeira malha utilizada, e a Figura 28 mostra os indicadores de erro locais.

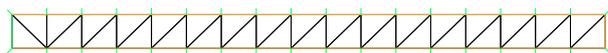


Figura 27 – Problema 2.2 - Malha inicial

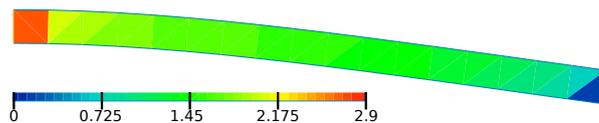


Figura 28 – Problema 2.2 - $\log(\epsilon_{local})$

A Figura 29 mostra a malha adaptativa final. A Figura 30 mostra os deslocamentos da placa para $t=6.2$.



Figura 29 – Problema 2.2 - Malha Final

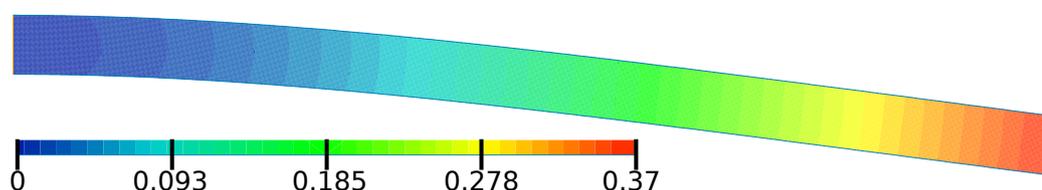


Figura 30 – Problema 2.2 - Deslocamento em $t=6.2$

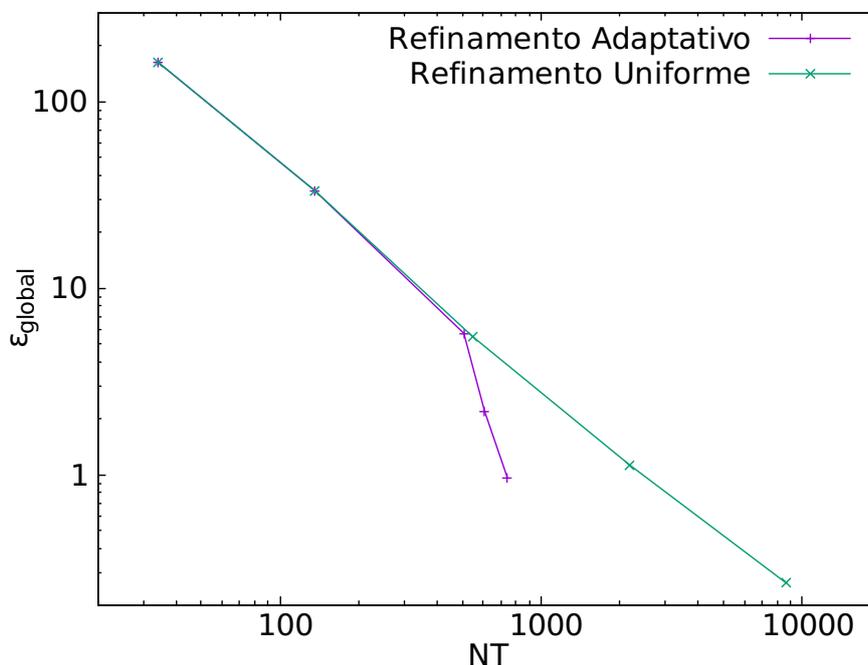


Figura 31 – Problema 2.2 - Erro global

A Figura 32 mostra o resíduo obtido em cada iteração. Os tempos de simulação por iteração estão na Figura 33.

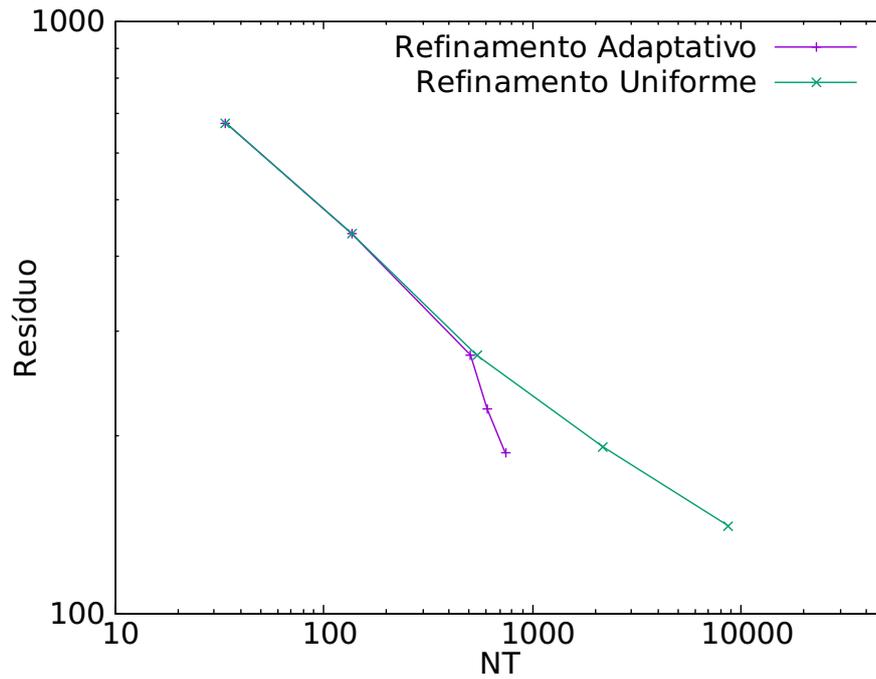


Figura 32 – Problema 2.1 - Resíduo

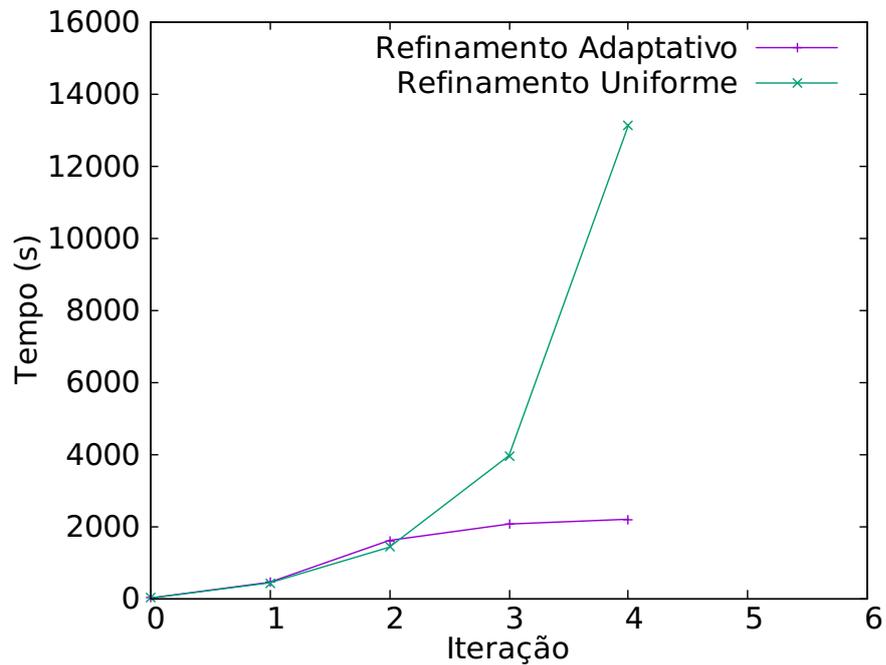


Figura 33 – Problema 2.1 - Tempo de simulação por iteração

Observa-se também o deslocamento da extremidade direita da placa em função do tempo, conforme a equação (4.4). O resultado obtido é mostrado no gráfico 34. A Figura 31 mostra a evolução dos erros globais com o refinamento adaptativo e com o

refinamento uniforme.

$$\tilde{u}((0.6; 0.2), t) = \begin{bmatrix} U_x(t) \\ U_y(t) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

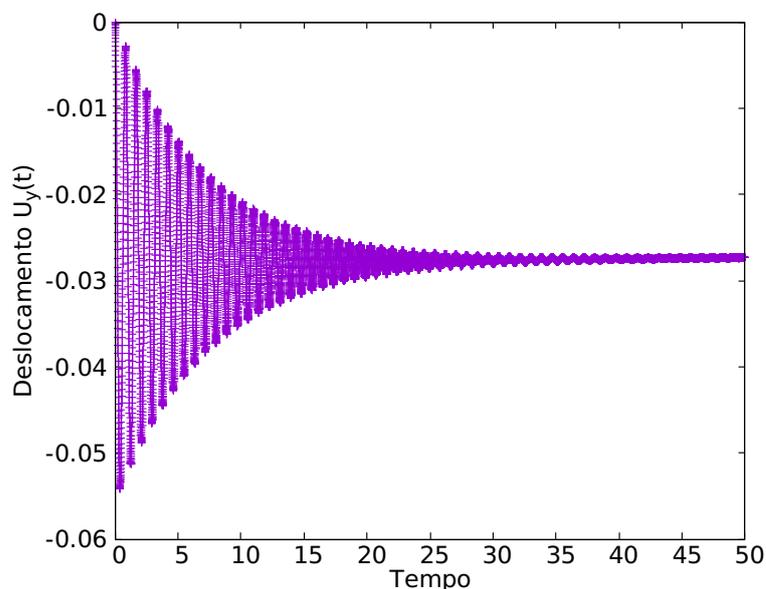


Figura 34 – Problema 2.2 - Deslocamento na extremidade da placa

4.2.3 Problema 2.3 - Simulação FSI

A malha inicial e os indicadores de erro locais estão nas Figuras 35 e 36, respectivamente. Estas simulações são feitas com refinamento uniforme e com refinamento adaptativo, com tempo total de simulação $T = 5$. Neste exemplo foi necessário calcular os estimadores de erro a cada 20 passos temporais para se ter um resultado adequado, a média obtida é utilizada para o refinamento adaptativo.

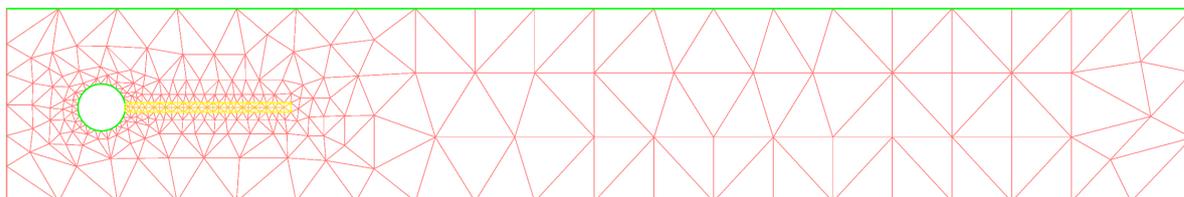
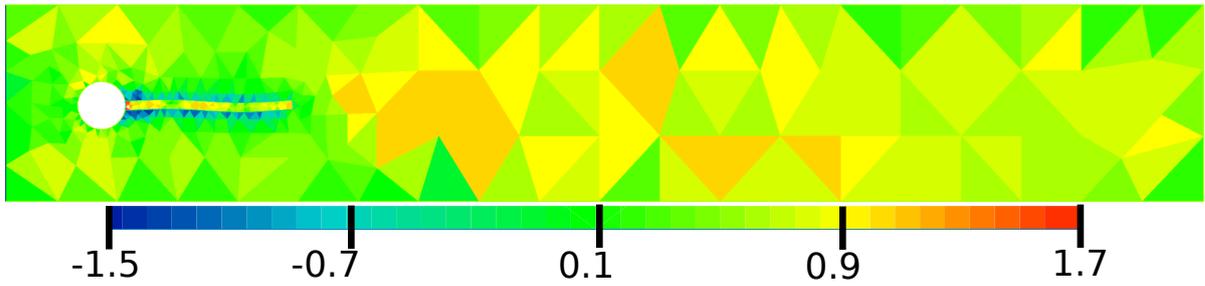


Figura 35 – Problema 2.1 - Malha inicial

Figura 36 – Problema 2.1 - $\log(\varepsilon_{local})$

A Figura 38 mostra o campo de velocidades final para a malha mais refinada simulada com refinamento adaptativo, que está na Figura 37.

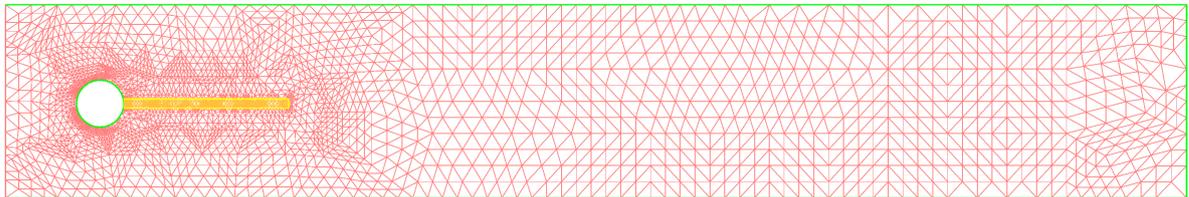


Figura 37 – Problema 2.3 - Malha adaptativa final

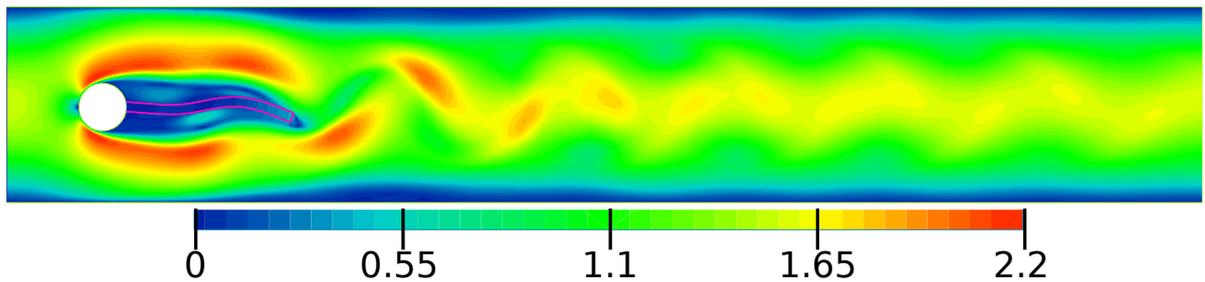


Figura 38 – Problema 2.3 - Campo de velocidades em t=5

Os erros globais obtidos com o refinamento adaptativo e uniforme estão na Figura 39. Idealmente mais iterações poderiam ser realizadas, o que seria alcançado ajustado-se os limites de erro L_{solido} , L_{fluido} e L_{global} . Isto não foi realizado devido a limites computacionais, o resultado é suficiente para se verificar o bom funcionamento do método.

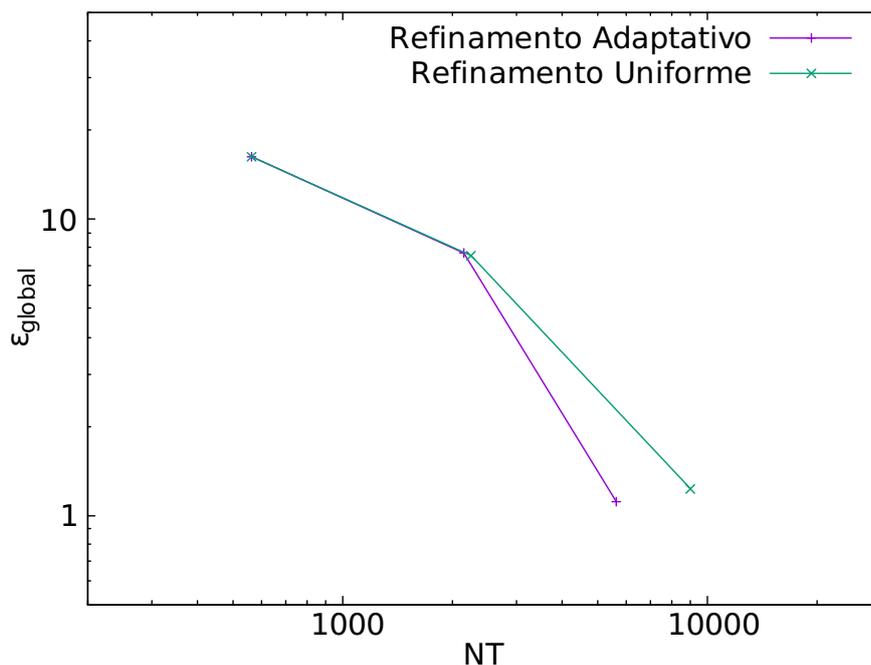


Figura 39 – Problema 2.3 - Erro global

A Figura 40 mostra o resíduo obtido em cada iteração. Os tempos de simulação por iteração estão na Figura 41.

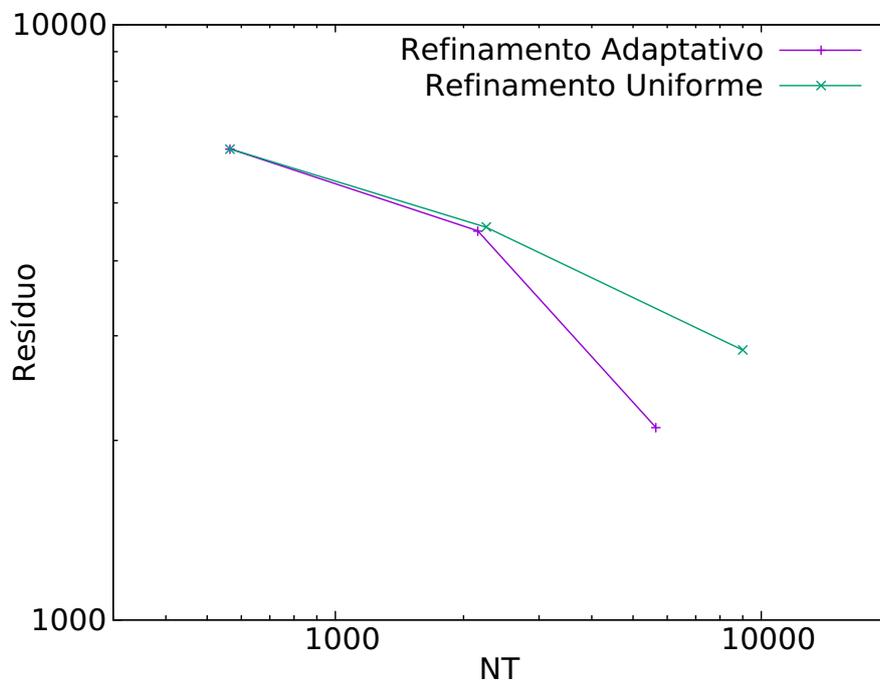


Figura 40 – Problema 2.1 - Resíduo

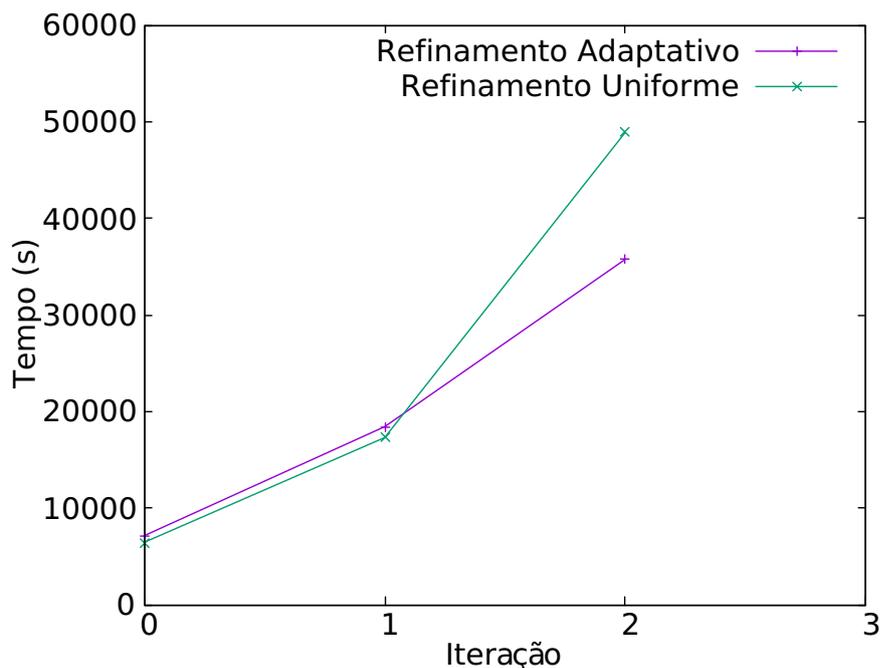


Figura 41 – Problema 2.1 - Tempo de simulação por iteração

Os resultados apresentados até aqui para o Problema 2.3 são para $T = 5$. O resultado a seguir é para uma simulação feita com $T = 50$, que foi executada apenas com a malha inicial devido ao tempo de simulação muito longo. Este intervalo permite que o sistema atinja "regime permanente" (a amplitude máxima da oscilação da placa estabiliza no tempo). Assim como foi feito no Problema 2.1, observa-se o deslocamento da extremidade da placa, segundo (4.4). A Figura 42 mostra $U_y(t)$ da placa para $t \in [42, 44]$.

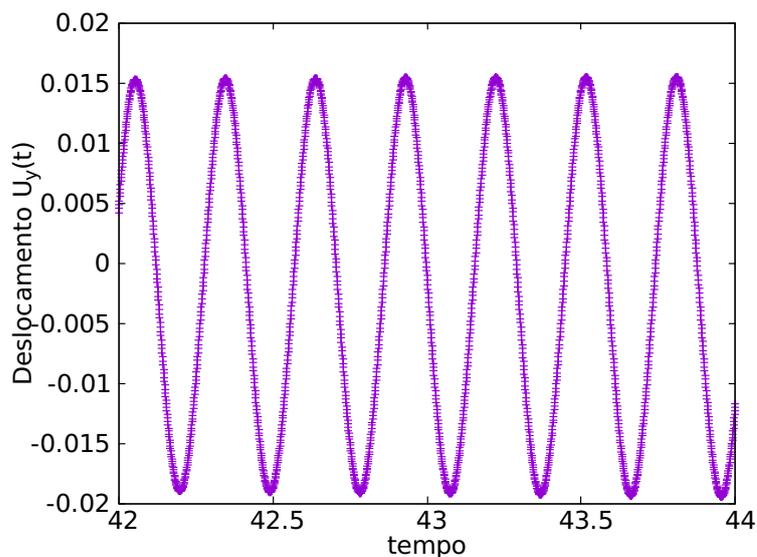


Figura 42 – Problema 2.3 - Deslocamento da extremidade da placa

5 CONCLUSÃO

Um modelo para análise de problemas FSI via FEM, com formulação totalmente euleriana e malha conforme, foi proposto. As etapas para elaboração deste modelo foram apresentadas e discutidas. O modelo foi implementado no programa computacional FreeFem++.

Quatro problemas foram propostos e resolvidos com o código FSI elaborado. Dois destes (problemas 1 e 2.1) tiveram seus resultados comparados com os disponíveis na literatura. Observou-se apenas pequenas diferenças, mostrando a eficácia do código proposto.

Os dois problemas restantes (problemas 2.2 e 2.3) também mostram resultados coerentes. Contudo, não foram encontrados resultados semelhantes disponíveis na literatura para comparação dos resultados. Pôde-se estudar o comportamento do código em regimes transientes nestes dois problemas.

Uma análise de erro de problemas FSI foi realizada. Iniciou-se por definir as derivadas direcionais do operador que caracteriza o problema FSI. Foi proposta uma análise via DWR, definiu-se uma função Lagrangiana da qual são derivados os problemas primal e dual, característicos do método. A metodologia e considerações necessárias são apresentadas e, por fim, obtêm-se os estimadores de erro finais, que foram então aplicados no processo de adaptatividade de malha.

Implementou-se um algoritmo de adaptatividade de malha. Empregou-se um refinamento do tipo h-adaptativo e os elementos a serem refinados foram selecionados pelos estimadores de erro *a posteriori* propostos. A geração na nova malha foi feita pelo método VVA. O algoritmo para execução deste método foi desenvolvido e apresentado no capítulo 3.

Os problemas utilizados para verificar a eficácia do código FSI foram resolvidos com refinamentos adaptativo e uniforme de malha, este último usado como referência. Em todos os exemplos foi verificado que, para um mesmo número de elementos, o refinamento adaptativo resulta em um erro menor que o uniforme.

Este estudo abordou vários assuntos bastante complexos, como consequência alguns deles podem ser analisados com maior profundidade. Neste sentido são destacados a seguir alguns tópicos que poderiam ser estudados mais detalhadamente em trabalhos posteriores:

- Demais técnicas de análise FSI: como abordado no início do capítulo 2, existem diversas técnicas para análise FSI. Os métodos com malha não-conforme, por exemplo, oferecem vantagens interessantes em relação ao método aqui empre-

gado.

- Estimativa de erro para discretização temporal: a análise de erro feita neste trabalho avalia apenas os erros relativos à discretização espacial. Contudo, há também um erro referente à discretização temporal em casos de problemas transientes. Seria possível analisar os erros da discretização temporal e, então, avaliar então os erros da simulação FSI como um todo.
- Adaptatividade de malha: o objetivo central deste estudo foi a análise de erro em simulações FSI. A adaptatividade de malha foi feita principalmente por ser uma das aplicações dos estimadores propostos, validando assim os resultados obtidos. Contudo, em contextos um pouco diferentes dos expostos nos problemas apresentados o método de adaptatividade implementado seria insuficiente ou pouco eficiente. Métodos envolvendo "reinicialização da malha", a "mescla de elementos" ao invés de somente divisão de elementos, refinamento p-adaptativo, entre outros podem ser de interesse.
- Modelos constitutivos: os modelos constitutivos escolhidos para este estudo são relativamente simples, o foco foi mantido no desenvolvimento do algoritmo FSI. Outros modelos poderiam ser implementados, principalmente para o sólido, já que não há muitos resultados disponíveis na literatura referentes ao sólido neo-hookeano em análises FSI.

REFERÊNCIAS

- ASKES, H.; KUHL, E.; STEINMANN, P. An ALE formulation based on spatial and material settings of continuum mechanics. part 2: Classification and applications. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, New York, v. 193, n. 39-41, p. 4223–4245, 2004.
- BABUŠKA, I.; GUO, B. The h, p and hp version of the finite element method; basis theory and applications. *Advances in Engineering Software*, Elsevier, New York, v. 15, n. 3-4, p. 159–174, 1992.
- BANGERTH, W.; RANNACHER, R. *Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations*. Basel: Birkhäuser, 2003.
- BARTELS, S. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. 1. ed. New York: Springer International Publishing, 2016.
- BAZILEVS, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, E. T. *Computational Fluid-Structure Interaction*. New York: Wiley, 2013.
- BECKER, R.; BRAACK, M. A finite element pressure gradient stabilization for the stokes equations based on local projections. *Calcolo*, Springer-Verlag, Pisa, v. 38, n. 4, p. 173–199, 2001.
- BLAIR, S. R. *Lattice Boltzmann Methods for Fluid Structure Interaction*. Tese (Doutorado) — Naval Postgraduate School, Monterey, California, 2012.
- BODNÁR, T.; GALDI, G. P.; NEČASOVÁ, Š. *Fluid-Structure Interaction and Biomedical Applications*. Basel: Birkhäuser, 2014.
- BONITO, A.; KYZA, I.; NOCHETTO, R. H. Time-discrete higher order ALE formulations: A priori error analysis. *Numerische Mathematik*, Springer, Berlin, Heidelberg, v. 125, n. 2, p. 225–257, 2013.
- BRENNER, S. C.; SCOTT, L. R. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. New York: Springer-Verlag, 2008.
- CAUSIN, P.; GERBEAU, J.-F.; NOBILE, F. Added-mass effect in the design of partitioned algorithms for fluid-structure problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, New York, v. 194, n. 42-44, p. 4506–4527, 2005.
- CHAKRABARTI, S. K. *Numerical Models in Fluid-Structure Interaction*. Southampton: WIT, 2005.
- CIARLET, P. G. *Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications*. Philadelphia: SIAM, 2013.
- DAUTRAY, R.; LIONS, J.-L. *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology: volume 1 physical origins and classical methods*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2012.

- DEGROOTE, J.; BATHE, K.-J.; VIERENDEELS, J. Performance of a new partitioned procedure versus a monolithic procedure in fluid-structure interaction. *Computers & Structures*, Elsevier, New York, v. 87, n. 11-12, p. 793–801, 2009.
- DOBROWOLSKI, M. *Angewandte Funktionalanalysis: Funktionalanalysis, Sobolev-Räume und elliptische Differentialgleichungen*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.
- DUNNE, T. An eulerian approach to fluid-structure interaction and goal-oriented mesh adaptation. *International journal for numerical methods in fluids*, Wiley, New York, v. 51, n. 9-10, p. 1017–1039, 2006.
- DUNNE, T.; RANNACHER, R. Adaptive finite element approximation of fluid-structure interaction based on an eulerian variational formulation. In: BUNGARTZ, H.-J.; SCHÄFER, M. (Ed.). *Fluid-Structure Interaction*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006. p. 110–145.
- DUNNE, T.; RANNACHER, R.; RICHTER, T. Numerical simulation of fluid-structure interaction based on monolithic variational formulations. In: _____. *Fundamental trends in fluid-structure interaction*. Singapore: World Scientific, 2010. p. 1–75.
- FARHAT, C.; ZEE, K. G. van der; PHILIPPE, G. Provably second-order time-accurate loosely-coupled solution algorithms for transient nonlinear computational aeroelasticity. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, New York, v. 195, p. 1973–2001, 2004.
- FÖRSTER, C. *Robust methods for Fluid-Structure Interaction with stabilised finite elements*. Stuttgart: Universität Stuttgart Institut für Baustatik und Baudynamik, 2007.
- GASTALDI, L. A priori error estimates for the arbitrary lagrangian eulerian formulation with finite elements. *Journal of Numerical Mathematics*, de Gruyter, Berlin, v. 9, n. 2, p. 123–156, 2001.
- GUERMOND, J.; ERN, A. *Theory and practice of finite elements*. New York: Springer-Verlag, 2004.
- HECHT, F. New development in FreeFem++. *Journal of Numerical Mathematics*, de Gruyter, Berlin, v. 20, n. 3-4, p. 251–265, 2012.
- HOU, G.; WANG, J.; LAYTON, A. Numerical methods for fluid-structure interaction — a review. *Communications in Computational Physics*, Cambridge University, Cambridge, v. 12, p. 337–377, 2012.
- KUZMIN, D. *A Guide to Numerical Methods for Transport Equations*. Nürnberg: Friedrich-Alexander-Universität, 2010.
- LIMAYE, B. V. *Linear Functional Analysis for Scientists and Engineers*. Singapore: Springer, 2016.
- LIU, I.-S. *Continuum mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.
- OWEN, S. J. A survey of unstructured mesh generation technology. *7th International Meshing Roundtable*, New Orleans, v. 3, p. 239–267, 2000.

- PESKIN, C. The immersed boundary method. *Acta Numerica*, Cambridge University, Cambridge, v. 11, p. 479 – 517, 2002.
- PIRONNEAU, O. Numerical study of a monolithic fluid-structure formulation. In: FREDIANI, A. et al. (Ed.). *Variational Analysis and Aerospace Engineering: Mathematical Challenges for the Aerospace of the Future*. Cham: Springer, 2016. v. 116, p. 401–120.
- RANNACHER, R. Error control in finite element computations. In: BULGAK, H.; ZENGER, C. (Ed.). *Error Control and Adaptivity in Scientific Computing*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1999. p. 247–278.
- RAVIART, P. A.; THOMAS, J. M. A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems. In: GALLIGANI, I.; MAGENES, E. (Ed.). *Mathematical Aspects of Finite Element Methods*. Berlin Heidelberg: Springer, 1977. p. 292–315.
- RAZZAQ, M. *Finite element simulation techniques for incompressible fluid-structure interaction with applications to bio-engineering and optimization*. Tese (Doutorado) — Technischen Universität Dortmund, Dortmund, 2011.
- RICHTER, T. A fully eulerian formulation for fluid–structure-interaction problems. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, Heidelberg, v. 233, p. 227–240, 2013.
- RICHTER, T.; WICK, T. Finite elements for fluid–structure interaction in ALE and fully eulerian coordinates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, Heidelberg, v. 199, p. 2633–2642, 2010.
- RICHTER, T.; WICK, T. Variational localizations of the dual weighted residual estimator. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, New York, v. 279, p. 192–208, 2015.
- RODRÍGUEZ-FERRAN, A.; PÉREZ-FOGUET, A.; HUERTA, A. Arbitrary lagrangian-eulerian (ALE) formulation for hyperelastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley, New York, v. 53, n. 8, p. 1831–1851, 2002.
- SOKOLOWSKI, J.; ZOLESIO, J.-P. Introduction to shape optimization. In: *Introduction to Shape Optimization: Shape Sensitivity Analysis*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1992. p. 5–12.
- TUREK, S.; HRON, J. Proposal for numerical benchmarking of fluid-structure interaction between an elastic object and laminar incompressible flow. In: BUNGARTZ, H.-J.; SCHÄFER, M. (Ed.). *Fluid-Structure Interaction*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006. p. 371–385.
- VERFÜRTH, R. *A posteriori error estimation techniques for finite element methods*. Oxford: Oxford University, 2013.

[REFERÊNCIAS]

APÊNDICE A – TEOREMAS E PROPRIEDADES

A.1 ESPAÇOS DAS FUNÇÕES

Definição A.1 *Espaços de funções contínuas* - Seja \mathbb{N} o conjunto dos números inteiros positivos. Uma n -úpla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ em \mathbb{N}^n é chamado um multi-índice, e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ é o comprimento de α . Assim define-se $\partial^\alpha = \partial^{\alpha_1} \partial^{\alpha_2} \dots \partial^{\alpha_n}$ em que $\partial_j = \partial / \partial x_j$ para $j = 1, \dots, n$.

Seja Ω um conjunto aberto em \mathbb{R}^n e $k \in \mathbb{N}$ então denota-se:

1. $C^k(\Omega)$ o conjunto de todas as funções u definidas em Ω com valores reais, tal que $\partial^\alpha u$ é contínua para todo α com $|\alpha| \leq k$;
2. $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega)$;
3. $C^k(\overline{\Omega})$ o conjunto de todas as funções $u \in C^k(\Omega)$, tal que $\partial^\alpha u$ pode ser estendida continuamente de Ω para $\overline{\Omega}$;
4. $C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\overline{\Omega})$.

Definição A.2 *Espaço de Banach* - Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável e $1 \leq p < \infty$, define-se o espaço $L_p(\Omega)$ como o conjunto das classes de equivalência de todas as funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|u|^p$ é integrável segundo Lebesgue sobre Ω . O espaço $L_p(\Omega)$ munido com a norma

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (\text{A.1.1})$$

é um espaço de Banach.

Definição A.3 *Espaço de Hilbert* - Em particular quando $p = 2$, o espaço $L_p(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por

$$\langle u, v \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})dx, \forall u, v \in L_2(\Omega), \quad (\text{A.1.2})$$

Definição A.4 *Espaço de Sobolev* - Seja um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, então para $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Sobolev $W_p^k(\Omega)$ é definido como

$$W_p^k(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega) | \partial^\alpha u \in L_p(\Omega), |\alpha| \leq k\}. \quad (\text{A.1.3})$$

O espaço $W_p^k(\Omega)$, com a norma

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (\text{A.1.4})$$

para $1 \leq p < \infty$, e com a norma

$$\|u\|_{W_\infty^k(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad (\text{A.1.5})$$

para $p = \infty$ é um espaço de Banach. Quando $p = 2$, este espaço também é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por

$$\langle u, v \rangle_{W_2^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \forall u, v \in W_2^k(\Omega). \quad (\text{A.1.6})$$

Neste caso designa-se $W_2^k(\Omega)$ por $H^k(\Omega)$.

Fonte: (CIARLET, 2013)

Definição A.5 Espaço de Raviart-Thomas - Seja os campo vetorial $\mathbf{u} \in H(\nabla \cdot, \Omega)$, para o qual

$$H(\nabla \cdot, \Omega) = \{ \mathbf{u} \in (L_2(\Omega))^2 \mid \nabla \cdot \mathbf{u} \in L_2(\Omega) \}. \quad (\text{A.1.7})$$

Para qualquer $h \in \mathbb{N}_+^*$, o espaço de \mathcal{RT}_M no triângulo K é definido como

$$\mathcal{RT}_M(K) = \mathcal{P}_M^2(K) \oplus (x, y)\mathcal{P}_M(K). \quad (\text{A.1.8})$$

Fonte: (RAVIART; THOMAS, 1977)

Teorema A.1 Condições de Babuška-Brezzi

Refere-se ao seguinte enunciado de problema de sela para estabelecer as condições de Babuška-Brezzi. Determine $(\mathbf{u}, \mathbf{p}) \in V \times Q$

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{p}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{p}) &= l_1(\mathbf{v}), \\ b(\mathbf{u}, \mathbf{q}) &= l_2(\mathbf{q}), \end{aligned}$$

onde $(\mathbf{v}, \mathbf{q}) \in V \times Q$, e $l_1 \in V'$ e $l_2 \in Q'$ são funcionais conhecidos. a e b são, respectivamente, uma forma bilinear e uma forma linear. Os espaços V e Q são espaços de Hilbert.

Assume-se que as condições do teorema de partição de Brezzi são atendidas. $(V_h)_{h>0}$ e $(Q_h)_{h>0}$ são, respectivamente, famílias de subespaços de V e Q tais que $\forall h > 0$:

1. Existe $\alpha_h > 0$ tal que

$$\forall \mathbf{v}_h \in K_h = \{\mathbf{v}_h \in V_h : b(\mathbf{b}_h, \mathbf{q}_h) = 0 \forall \mathbf{q}_h \in Q_h\},$$

temos

$$a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq \alpha_h \|\mathbf{v}_h\|_V^2$$

2. Existe $\beta_h > 0$ tal que

$$\inf_{\mathbf{q}_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, \mathbf{q}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_V \|\mathbf{q}_h\|_Q} \geq \beta_h$$

Supõe-se que existe um par $\underline{\alpha}, \underline{\beta} > 0$, tal que $\alpha_h \geq \underline{\alpha}$ e $\beta_h \geq \underline{\beta} \forall h > 0$. Então existe, $\forall h > 0$, um par $(\mathbf{u}_h, \mathbf{p}_h) \in V_h \times Q_h$ tais que

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{p}_h) + b(\mathbf{v}_h, \mathbf{p}_h) &= l_1(\mathbf{v}_h), \\ b(\mathbf{u}_h, \mathbf{q}_h) &= l_2(\mathbf{q}_h), \\ \forall (\mathbf{v}_h, \mathbf{q}_h) &\in V_h \times Q_h. \end{aligned}$$

Prova: (BARTELS, 2016)

A.2 TEOREMA DA DIVERGÊNCIA

Teorema A.2 Seja \mathcal{R} uma região regular limitada em ε , e sejam $\phi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{h} : \mathcal{R} \rightarrow V$, $\mathbf{S} : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{L}(V)$ campos suaves. Então:

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \phi \mathbf{n} \, da = \int_{\mathcal{R}} \nabla \phi \, dv \quad (\text{A.2.1})$$

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot \mathbf{v} \, dv \quad (\text{A.2.2})$$

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{S} \mathbf{n} \, da = \int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot \mathbf{S} \, dv \quad (\text{A.2.3})$$

Prova: (LIU, 2013)

A.3 DESIGUALDADE DE SCHWARZ

Teorema A.3 Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno em um espaço linear X , e sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$. Então,

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2} \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle^{1/2} \quad (\text{A.3.1})$$

Prova: (LIMAYE, 2016)

A.4 ORTOGONALIDADE DE GALERKIN

Teorema A.4 *Ortogonalidade de Galerkin é obtida a partir do Lema de Céa, postulado a seguir:*

Teorema A.5 *Lema Sejam V um espaço de Hilbert, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear limitada e coerciva, $b : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma linear e limitada e V_h um subespaço de dimensão finita tal que $V_h \subset V$. Então existe uma aproximação única $\underline{u}_h \in V_h$ que satisfaz*

$$a(\underline{u}_h, \underline{\psi}_h^u) = b(\underline{\psi}_h^u) \quad \forall \underline{\psi}_h^u \in V_h.$$

Sendo a solução fraca definida por

$$a(\underline{u}, \underline{\psi}^u) = b(\underline{\psi}^u) \quad \forall \underline{\psi}^u \in V,$$

tem-se a Ortogonalidade de Galerkin

$$a(\underline{u} - \underline{u}_h, \underline{\psi}_h^u) = 0 \quad \forall \underline{\psi}_h^u \in V_h,$$

Prova: (BARTELS, 2016)

A.5 COERCIVIDADE

Teorema A.6 *Seja \mathfrak{A} um operador bilinear e H é um espaço de Hilbert. Então \mathfrak{A} é coerciva se:*

$$\exists \alpha > 0 \text{ tal que } \mathcal{A}(\underline{u}, \underline{u}) \geq \alpha \|\underline{u}\|^2, \forall \underline{u} \in \mathcal{H}.$$

Fonte: (BARTELS, 2016).

APÊNDICE B – DETALHAMENTO DE CÁLCULOS

B.1 FORMULAÇÃO FRACA - EQUAÇÃO 2.45

Reescreve-se primeiramente o conjunto de equações (2.44) que se tem inicialmente.

$$\begin{aligned} (\rho D_t \underline{\boldsymbol{v}}, \underline{\boldsymbol{\psi}}^v)_\Omega - (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{T}}, \underline{\boldsymbol{\psi}}^v)_\Omega &= (\rho \underline{\boldsymbol{f}}, \underline{\boldsymbol{\psi}}^v)_\Omega, \quad \forall \underline{\boldsymbol{\psi}}^v \in \mathcal{H}_D^*; \\ (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{v}}, \underline{\boldsymbol{\psi}}^p)_\Omega &= 0, \quad \forall \underline{\boldsymbol{\psi}}^p \in \mathcal{L}^*; \\ (\partial_t \underline{\boldsymbol{u}} + \underline{\boldsymbol{w}} \cdot \nabla \underline{\boldsymbol{u}} - \underline{\boldsymbol{w}}, \underline{\boldsymbol{\psi}}^u)_\Omega &= 0, \quad \forall \underline{\boldsymbol{\psi}}^u \in \mathcal{H}_0^*; \\ (\chi_s (\underline{\boldsymbol{w}} - \underline{\boldsymbol{v}}), \underline{\boldsymbol{\psi}}^w)_\Omega + (\chi_f \Delta \underline{\boldsymbol{w}}, \underline{\boldsymbol{\psi}}^w)_\Omega &= 0, \quad \forall \underline{\boldsymbol{\psi}}^w \in \mathcal{H}_0^*. \end{aligned}$$

Inicia-se pela primeira equação. O segundo termo é o único que não fica na sua forma original, faz-se uso da equação de Gauss, ver apêndice A.2, e obtém-se

$$\int_\Omega (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{T}}) \underline{\boldsymbol{\psi}}^v dx = \int_\Omega \nabla \cdot (\underline{\boldsymbol{T}} \underline{\boldsymbol{\psi}}^v) dx - \int_\Omega \underline{\boldsymbol{T}} : \nabla \underline{\boldsymbol{\psi}}^v dx = \int_{\Gamma_\Omega} \underline{\boldsymbol{T}} \underline{\boldsymbol{\psi}}^v \cdot \underline{\boldsymbol{n}} ds - \int_\Omega \underline{\boldsymbol{T}} : \nabla \underline{\boldsymbol{\psi}}^v dx.$$

O termo na fronteira Γ_Ω pode ser dividido nas fronteira Γ_D e Γ_N .

$$\int_{\Gamma_\Omega} \underline{\boldsymbol{T}} \underline{\boldsymbol{\psi}}^v \cdot \underline{\boldsymbol{n}} ds = \int_{\Gamma_D} \underline{\boldsymbol{T}} \underline{\boldsymbol{\psi}}^v \cdot \underline{\boldsymbol{n}} ds + \int_{\Gamma_N} \underline{\boldsymbol{T}} \underline{\boldsymbol{\psi}}^v \cdot \underline{\boldsymbol{n}} ds \quad (\text{B.1.1})$$

$$\int_{\Gamma_\Omega} \underline{\boldsymbol{T}} \underline{\boldsymbol{\psi}}^v \cdot \underline{\boldsymbol{n}} ds = \int_{\Gamma_D} \underline{\boldsymbol{T}} \underline{\boldsymbol{\psi}}^v \cdot \underline{\boldsymbol{n}} ds + \int_{\Gamma_N} \underline{\boldsymbol{T}} \underline{\boldsymbol{\psi}}^v \cdot \underline{\boldsymbol{n}} ds$$

O termo em Γ_D é nulo, já que $\underline{\boldsymbol{\psi}}^v = \underline{\mathbf{0}}$ em Γ_D . Na fronteira Γ_N , o tensor $\underline{\boldsymbol{T}}$ é simétrico, já que esta fronteira é exclusiva ao domínio fluido e $\underline{\boldsymbol{T}}_f$ é simétrico, logo tem-se

$$\int_{\Gamma_N} \underline{\boldsymbol{T}} \underline{\boldsymbol{\psi}}^v \cdot \underline{\boldsymbol{n}} ds = \int_{\Gamma_N} \underline{\boldsymbol{\psi}}^v \cdot \underline{\boldsymbol{T}}^T \underline{\boldsymbol{n}} ds = \int_{\Gamma_N} \underline{\boldsymbol{\psi}}^v \cdot \underline{\boldsymbol{T}} \underline{\boldsymbol{n}} ds$$

Com isto chega-se a

$$(\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{T}}, \underline{\boldsymbol{\psi}}^v)_\Omega = \int_{\Gamma_N} \underline{\boldsymbol{\psi}}^v \cdot \underline{\boldsymbol{T}} \underline{\boldsymbol{n}} ds - \int_\Omega \underline{\boldsymbol{T}} : \nabla \underline{\boldsymbol{\psi}}^v dx = (\underline{\boldsymbol{g}}^N, \underline{\boldsymbol{\psi}}^v)_{\Gamma_N} - (\underline{\boldsymbol{T}}, \nabla \underline{\boldsymbol{\psi}}^v)_\Omega.$$

Resta o segunda termo da quarta equação, os demais termos seguem sem alterações,

$$\begin{aligned} \chi_f \int_\Omega \Delta \underline{\boldsymbol{w}} \cdot \underline{\boldsymbol{\psi}}^w dx &= \chi_f \int_\Omega \nabla \cdot [(\nabla \underline{\boldsymbol{w}}) \underline{\boldsymbol{\psi}}^w] dx - \chi_f \int_\Omega \nabla \underline{\boldsymbol{w}} : \nabla \underline{\boldsymbol{\psi}}^w dx = \\ &= \int_{\Gamma_\Omega} \nabla [(\nabla \underline{\boldsymbol{w}}) \underline{\boldsymbol{\psi}}^w] \cdot \underline{\boldsymbol{n}} ds - \int_\Omega \nabla \underline{\boldsymbol{w}} : \nabla \underline{\boldsymbol{\psi}}^w dx, \end{aligned}$$

o termo na fronteira é nulo pois $\underline{\boldsymbol{w}} \in \mathcal{H}_0^*$. Assim

$$(\chi_f \Delta \underline{\boldsymbol{w}}, \underline{\boldsymbol{\psi}}^w)_\Omega = (\chi_f \nabla \underline{\boldsymbol{w}}, \nabla \underline{\boldsymbol{\psi}}^w)_\Omega.$$

Agrupando-se os termos chega-se na forma (2.45).

APÊNDICE C – ALGORITMO REFINAMENTO VVA

Descreve-se brevemente o arquivo de malha utilizado pelo FreeFem++:

1. A primeira linha com as seguintes informações sobre a malha: número de vértices, número de triângulos, número de arestas nas fronteiras.
2. As próximas linhas são referentes aos vértices da malha. Cada linha contém: coordenada horizontal do vértice, coordenada vertical e um número de identificação.
3. Na sequência o arquivo contém as linhas com as informações de cada triângulo. Cada linha contém: número do vértice 0 do triângulo, número do vértice 1, número do vértice 2, número de identificação.
4. O último grupo de linhas é referente às arestas pertencentes às fronteiras. Cada linha contém: número do vértice 0 da aresta, número do vértice 1, número de identificação.

A etapa referente à identificação dos novos vértices altera o grupo 2 da estrutura descrita acima. Novas linhas são inseridas para os vértices adicionados.

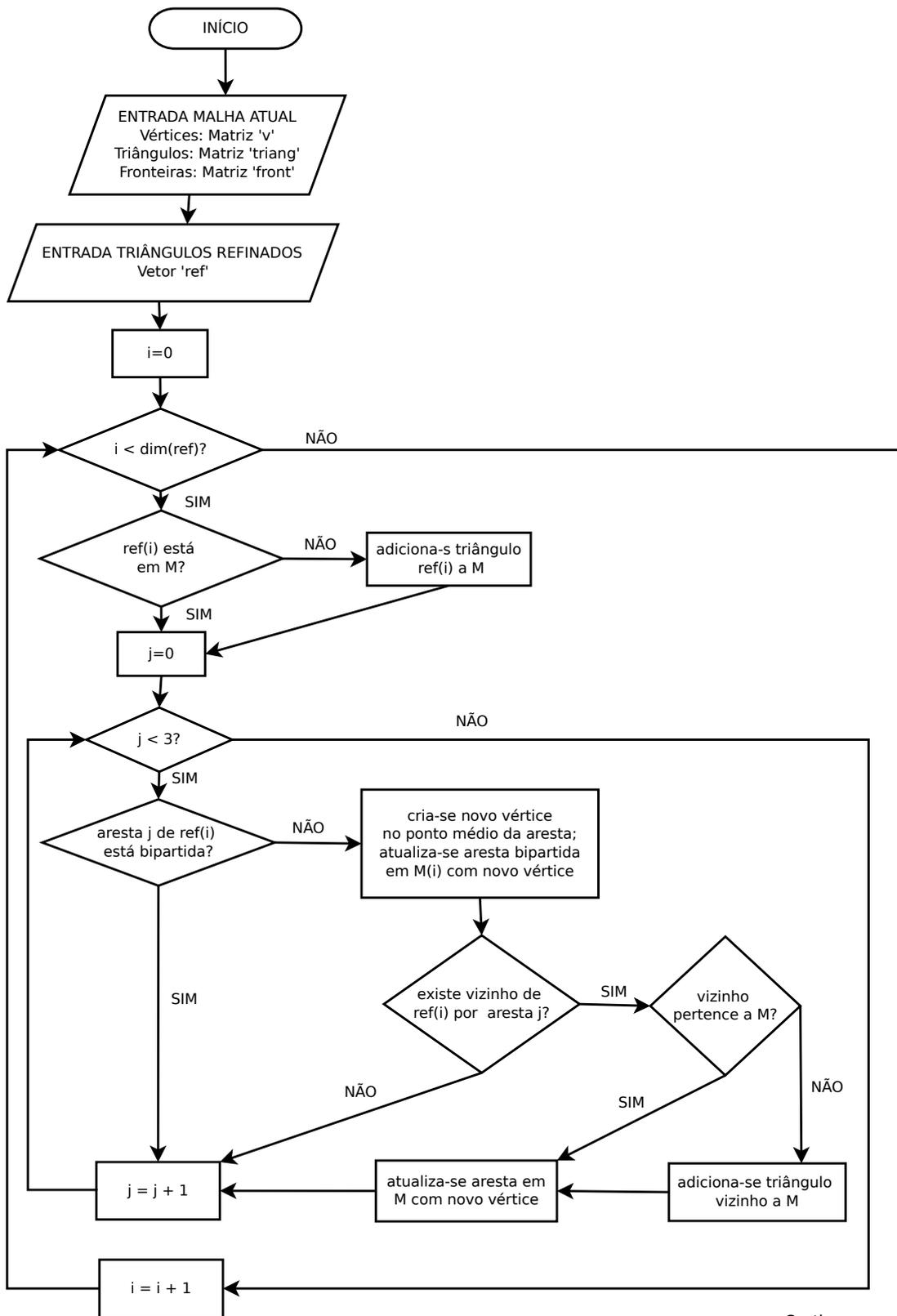
Após todos os novos vértices serem determinados os refinamentos vermelho, verde e azul alteram o grupo 3. Exclue-se a linha referente ao triângulo original e adicionam-se os novos triângulos.

Observação: omitiu-se no fluxograma apresentado na sequência, por simplicidade, a parte referente às arestas em fronteiras (grupo 4). Este processo é relativamente trivial: quando uma aresta é bipartida as arestas geradas (caso pertençam à alguma fronteira) pertencem à mesma fronteira da aresta original.

Por último, as informações do cabeçalho são atualizadas (grupo 1) e o arquivo da malha refinada é escrito.

Utiliza-se uma matriz intermediária para a execução algoritmo proposto, a matriz M. Ela é atualizada durante o processo de identificação dos novos vértices e é usada para a execução dos refinamentos vermelho, verde e azul.

Cada linha da matriz M é referente a um triângulo a ser refinado e contém as seguintes informações: número do triângulo, número do vértice bipartindo a aresta 0 do triângulo (valor -1 caso aresta não seja bipartida), número do vértice bipartindo a aresta 1, número do vértice bipartindo a aresta 2, número de arestas bipartidas no triângulo. Apresenta-se o fluxograma com os processos descritos acima:



Continua na próxima página

