UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

WILLIAN HENRIQUE DE BRITO

A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO E UMA PROPOSTA PARA A ABORDAGEM DE PROBLEMAS REAIS VIA AJUSTE DE CURVAS

CURITIBA

2019

WILLIAN HENRIQUE DE BRITO

A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO E UMA PROPOSTA PARA A ABORDAGEM DE PROBLEMAS REAIS VIA AJUSTE DE CURVAS

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná em Curitiba - PROFMAT-UTCT como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.
Orientadora: Profa. Dra. Patricia Hess

CURITIBA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Brito, Willian Henrique de
A modelagem matemática como estratégia de ensino e uma proposta para a abordagem de problemas reais via ajuste de curvas [recurso eletrônico] / Willian Henrique de Brito.-- 2019.
1 arquivo texto (82 f.): PDF; 2,31 MB.

Modo de acesso: World Wide Web
Título extraído da tela de título (visualizado em 25 mar. 2019)
Texto em português com resumo em inglês
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2019
Bibliografia: f. 79-81

1. Matemática - Dissertações. 2. Matemática - Estudo e ensino. 3. Matemática - Estudo e ensino - Séc. XXI. 4. Modelagem matemática. 5. Matemática - Estudo e ensino (Ensino médio). 6. Mínimos quadrados. I. Hess, Patricia. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD: Ed. 23 -- 510

Biblioteca Central da UTFPR, Câmpus Curitiba
Bibliotecário: Adriano Lopes CRB-9/1429

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação

TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº 61

A Dissertação de Mestrado intitulada “A Modelagem Matemática como Estratégia de Ensino e uma Proposta para a Abordagem de Problemas Reais via Ajuste de Curvas”, defendida em sessão pública pelo(a) candidato(a) **Willian Henrique de Brito**, no dia 15 de março de 2019, foi julgada para a obtenção do título de Mestre, área de concentração: Matemática, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

BANCA EXAMINADORA:

Profa. Dra. Patricia Hess - Presidente - UTFPR
Profa. Dra. Olga Harumi Saito - UTFPR
Prof. Dr. David Pires Dias - USP

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Curitiba, 15 de março de 2019.

Carimbo e Assinatura do(a) Coordenador(a) do Programa

AGRADECIMENTOS

A Deus e aos pequenos milagres cotidianos que me fizeram seguir em frente.

À minha orientadora Profª Dra. Patricia Hess, pela confiança e dedicação.

Aos professores e amigos do PROFMAT da UTFPR - câmpus Curitiba, sem os quais eu certamente não alcançaria este objetivo.

Em especial, ao meu querido filho James que embora muito jovem soube compreender a importância deste percurso e me apoiou amorosamente.

À minha maravilhosa companheira Kauany cujas palavras, atitudes, apoio e compreensão, trouxeram alento, força e coragem para sempre seguir em frente.

Aos meus amados pais, Cicero e Suzana, por estarem sempre ao meu lado e me ensinarem que um mundo melhor se constrói a partir da educação.

Aos meus amigos e familiares, por estarem sempre ao meu lado.

À profª Dra. Olga Harumi Saito e ao prof. Dr. David Pires Dias pelas valiosas contribuições.

À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior.

À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática da Educação Básica viabilizou a implantação do PROFMAT.

"As crianças não são o futuro, elas são o presente, e se ainda não aprendemos com isso, somos nós, os adultos, é que tiramos zero na escola" (Sergio Vaz).

RESUMO

BRITO, Willian Henrique de. **A modelagem matemática como estratégia de ensino e uma proposta para a abordagem de problemas reais via ajuste de curvas**. 83 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2019.

Neste trabalho, fazemos um breve resgate dos principais fatos que influenciaram o ensino da Matemática nas escolas brasileiras no decorrer do século XX e início do século XXI. Destacamos o potencial das atividades de modelagem para proporcionar uma aprendizagem mais reflexiva e contextualizada e apresentamos diferentes formas de se conceber e praticar a modelagem matemática. Introduzimos o tema ajuste de curvas usando o método de aproximação Mínimos Quadrados para o caso particular de funções polinomiais e propomos um encaminhamento para a abordagem deste recurso em turmas do Ensino Médio. Apresentamos ainda um exemplo de atividade de modelagem numa perspectiva interdisciplinar em que o ajuste de curvas é naturalmente contemplado e favorece o reconhecimento da Matemática como um importante instrumento de raciocínio, representação, comunicação e argumentação.

Palavras-chave: Educação Matemática. Ajuste de Curvas. Método dos Mínimos Quadrados.

ABSTRACT

BRITO, Willian Henrique de. **Mathematical modeling as a teaching strategy and a proposal for a real problem approach through curve fitting**. 83 pg. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2019.

In this work, we make a brief rescue of the main facts that influenced the teaching of Mathematics in Brazilian schools during the twentieth century and the beginning of the twenty-first century. We highlight the potential of modeling activities to provide more reflective and contextualized learning and present different ways of conceiving and practicing mathematical modeling. We introduce the theme of curve fitting using the approximation method Least Squares for the particular case of polynomial functions and we propose a methodological approach of this resource in high school classes. We present an example of modeling activity in an interdisciplinary perspective in which curves fitting is naturally contemplated and foments the recognition of Mathematics as an important instrument of reasoning, representation, communication and argumentation.

Keywords: Mathematics Education. Curve Fitting. Least Squares Method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O baixo rendimento dos estudantes brasileiros na área de Matemática tem sido objeto de diversas reflexões e evidenciam uma situação contraditória vivenciada diariamente nas salas de aula. Isto é, se por um lado as mais recentes propostas de reformulações curriculares apontam para a necessidade de um ensino de Matemática contextualizado, interdisciplinar e que fomente o protagonismo dos estudantes. Por outro, a maior parte dos educandos tem dificuldade de perceber a utilidade e/ou aplicabilidade da Matemática que aprendem na escola. Mais do que isso, muitos apresentam certa aversão a essa disciplina, conforme apontam Perez (2012) e Soistak (2010). Logo, tornar a aprendizagem da Matemática mais atraente e significativa é um dos principais desafios da educação matemática.

Desta forma, buscamos inicialmente compreender qual o papel da Matemática na formação global dos estudantes e, por conseguinte, com que intencionalidade deve ser levada às salas de aula. Assim, no primeiro capítulo deste trabalho, procuramos identificar os fatos que influenciaram o ensino da Matemática nas escolas brasileiras, no decorrer do século XX e início do século XXI, ressaltando os diversos entendimentos acerca do que é uma educação eficiente em função dos diferentes momentos histórico do país.

No Capítulo 2, apresentamos alguns fatos históricos que ilustram como a prática de utilizar diferentes linguagens e representações matemáticas para resolver problemas estiveram presentes na humanidade deste tempos remotos. E ainda, evidenciam que historicamente a busca de soluções para problemas cotidianos precedeu a estruturação lógica e abstrata. Nesse sentido, entendemos que a aprendizagem da Matemática deve partir de uma situação concreta e desdobrar-se em hipóteses que posteriormente podem ser verificadas e generalizadas.

Nesse contexto e considerando que a matemática escolar não deve se restringir a um amontoado de regras e procedimentos sem qualquer conexão com a realidade mas, pelo contrário, contribuir para o desenvolvimento da autonomia e do pensamento crítico dos estudantes, conjecturamos que as atividades de modelagem podem ser um meio para elevar da qualidade do ensino (não só da Matemática) nas escolas brasileiras. Visto que, nas atividades de modelagem, a aprendizagem se desenvolve de maneira contextualizada e interdisciplinar, além de promover o desenvolvimento da autonomia do educando (BURAK, 2010).

Não obstante, reconhecendo a insegurança de muitos professores diante da modelagem matemática, em especial os que atuam na Educação Básica, apresentamos e discutimos diferentes formas de se conceber e praticar a modelagem. O objetivo desta discussão não é categorizar perspectivas, mas sim evidenciar a possibilidade de ajustar a modelagem a diversos contextos e objetivos educacionais.

No Capítulo 3, introduzimos o tema ajuste de curvas usando o método dos Mínimos

Quadrados para o caso particular de funções polinomiais e propomos um encaminhamento para a abordagem deste recurso em turmas do Ensino Médio com o intuito de fomentar a utilização de representações e procedimentos cada vez mais sofisticados que "permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos" (BRASIL, 2018, p.529).

No Capítulo 4, apresentamos um exemplo de atividade de modelagem numa perspectiva interdisciplinar em que a mobilização de diferentes registros e linguagens é condição necessária para responder às questões oriundas da problematização da situação estudada: segurança do pedestre no trânsito. A escolha deste tema justifica-se por possibilitar que os alunos não apenas vivenciem a construção de modelos matemáticos, mas que sejam convidados a analisar o trabalho que realizaram e, assim, possam desenvolver sua capacidade de reflexão crítica em relação a formulação e aplicabilidade de tais modelos na sociedade.

Por fim, no quinto capítulo, apresentamos algumas reflexões acerca do trabalho realizado e do potencial da modelagem matemática para criar ambientes de aprendizagem dinâmicos e significativos que possibilitam aos estudantes atingir níveis satisfatórios de estruturação lógica e abstração.

1 UM OLHAR PARA A MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Uma das tarefas que tem acompanhado educadores e pesquisadores interessados na aprendizagem de Matemática é refletir sobre “por que e como ensinar Matemática”. Obviamente não há, fora do senso comum, uma resposta imediata para tal questionamento já que “por trás de cada modo de ensinar, esconde-se uma particular concepção de aprendizagem, de ensino, de Matemática e de Educação” (FIORENTINI, 1995, p.4). Ou seja, o modo como o professor concebe a Matemática e a aprendizagem influência sua prática pedagógica. Daí, segue que

> O professor que acredita que o aluno aprende matemática através da memorização de fatos, regras ou princípios transmitidos pelo professor ou pela repetição de exercícios, também terá uma prática diferenciada daquele que entende que o aluno aprende construindo os conceitos a partir de ações reflexivas sobre materiais e atividades, ou a partir de situações-problema e problematizações do saber matemático (FIORENTINI, 1995, p.5).

Logo, é importante pensar sobre os diferentes papéis assumidos pela matemática escolar com o passar do tempo, a fim de melhor compreender qual o atual papel da Matemática na Educação Básica. Para Brito (BRITO, 2007), tais reflexões podem contribuir na busca por uma resposta crítica acerca de com que intencionalidade se ensina Matemática.

Assim sendo, neste capítulo serão discutidos os principais fatos que influenciaram o ensino da Matemática nas escolas brasileiras no decorrer do século XX, quando houve diversos esforços no sentido de tornar o ensino dessa disciplina mais eficaz, especialmente nas escolas secundárias (na nomenclatura atual, Ensino Médio). Entretanto, é importante salientar que o entendimento sobre tal eficácia passou por diversas transformações, estando diretamente relacionado ao momento histórico em que foi concebido. Ou seja, nas décadas de 1960 e 1970, por exemplo, a visão de que a sociedade era um sistema organizado e funcional, motivou um ensino de Matemática reduzido a repetição de um conjunto de técnicas, regras e algoritmos sem grande preocupação em fundamentá-los e justificá-los (FIORENTINI, 1995).

Nesse sentido, ao se refletir sobre as diferentes tendências pedagógicas que influenciaram o ensino da Matemática, é necessário considerar o contexto em que elas foram discutidas e praticadas. Portanto, no breve histórico da trajetória da educação matemática no Brasil que será apresentado na seção (1.1), também será abordado, ainda que de maneira simplificada, o contexto em que ocorreram as mudanças mais significativas em relação ao entendimento de “porque e como se ensina e aprende Matemática”. Também é objetivo deste capítulo, refletir sobre as concepções atuais acerca dos processos de ensino e aprendizagem, com foco na área de Matemática.

As discussões que serão apresentadas justificam-se pela necessidade de compreender qual o atual papel da matemática escolar na formação global dos estudantes e, por conseguinte, no enfrentamento dos desafios da sociedade contemporânea.

1.1 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO BRASIL: UM POUCO DE HISTÓRIA

Na primeira metade do século XX, “o ensino da matemática no Brasil, salvo raras exceções, caracterizava-se pela ênfase às ideias e formas da Matemática clássica” (FIORENTINI, 1995, p.5). Sendo assim, a tendência predominante nesse período foi a *Formalista Clássica*. Nessa tendência, a Matemática é vista a partir da concepção platônica, ou seja, entedia-se que o conhecimento matemático não é uma construção humana, mas algo estático e preexistente em um mundo ideal, cabendo aos seres humanos a sua descoberta. Nesse sentido, os esforços para a melhoria do ensino da Matemática concentravam-se no estudo da lógica do próprio conhecimento matemático. Nesse contexto, o professor era o responsável por conhecer, e “passar” para os alunos, os conhecimentos já “descobertos” e aos alunos cabia “reproduzir” os conteúdos “recebidos” do professor.

No final da década de 1950, desenvolvia-se o ideário de um movimento internacional que ficou conhecido como Movimento da Matemática Moderna (MMM), cujo objetivo era aproximar a matemática escolar da matemática científica, principalmente aquela desenvolvida a partir do século XVIII. Para Fiorentini (1995), esse movimento era,

> uma resposta à constatação, após a Segunda Guerra Mundial, de uma considerável defasagem entre o progresso científico-tecnológico da nova sociedade industrial e o currículo escolar vigente, sobretudo nas áreas de ciências e matemática (FIORENTINI, 1995, p.13).

O autor destaca ainda, que o lançamento do “Sputnik” (primeiro satélite artificial da Terra) pelos soviéticos foi determinante para que o MMM adquirisse força política, visto que esse fato impulsionou um grande investimento do governo norte-americano em pesquisas e projetos voltados para a “modernização” dos currículos escolares.

Os europeus também estavam se mobilizando em torno da “modernização” do ensino da Matemática e no ano de 1959, em uma conferência realizada pela Organização Europeia de Cooperação Econômica (OECE), na cidade de Royaumont, na França, que contou com a participação de mais de vinte países (GOMES, 2012), foram desenvolvidas as bases do movimento modernista cujos principais objetivos eram

> integrar os campos da aritmética, da álgebra e da geometria no ensino, mediante a inserção de alguns elementos unificadores, tais como a linguagem dos conjuntos, as estruturas algébricas e o estudo das relações e funções. Enfatizava-se, ainda, a necessidade de conferir mais importância aos aspectos lógicos e estruturais da Matemática, em oposição às características pragmáticas que, naquele momento, predominavam no ensino, refletindo-se na apresentação de regras sem justificativa e na mecanização dos procedimentos (GOMES, 2012, p.24).

Convém destacar que a Matemática Moderna nasceu como um movimento educacional inscrito numa política de modernização econômica e, juntamente com a área de Ciências Naturais, passou a ocupar lugar de destaque no Ensino Básico, visto que era considerada via de acesso privilegiada para o pensamento científico e tecnológico (BRASIL, 1998).

No Brasil, no ano de 1966, durante o 5º Congresso Brasileiro de Ensino de Matemática, realizado em São José dos Campos/SP, a implantação da Matemática Moderna no Brasil foi o foco das discussões acerca da reformulação do ensino da Matemática. Embora, as ideias modernistas, bem como algumas experiências dentro dessa perspectiva, já tivessem sido apresentadas e discutidas em outros dois congressos, nos anos de 1959 e 1962.

A partir daí a Matemática Moderna passa a ser disseminada em todo o país sendo veiculada principalmente pelos livros didáticos cuja importância, segundo Gomes (2012), foi potencializada pela necessidade de um recrutamento mais amplo e menos seletivo de professores em decorrência do crescimento da necessidade desses profissionais, já que o país passava por um processo de democratização da escola, que passou a receber, também, um público proveniente da classe trabalhadora. Nesse sentido, o livro didático passa a ser visto como uma forma de "amenizar" as dificuldades desses professores e lhe é transferido o papel de preparação e organização das aulas. Para a autora, o modo como ocorreu esse recrutamento também colaborou para intensificação do processo de depreciação da função docente, que se manifestou no rebaixamento salarial e na maior precariedade das condições de trabalho.

Em relação ao entendimento sobre como se dá o processo de aprendizagem da Matemática, não foi possível observar grandes avanços, já que esta continuava centralizada na figura do professor que procurava "passar" para os estudantes, os conteúdos sistematizados nos livros didáticos. Um ponto que se destacava nas aulas de Matemática, nesse período, era a preocupação exagerada "com a linguagem, com o uso correto dos símbolos, com a precisão, com o rigor, sem dar atenção aos processos que os produzem" (FIORENTINI, 1995, p.16), sendo esse, o principal alvo das críticas que o MMM receberia em diversos países, durante a década de 1970 e início da década de 1980, e contribuiria para seu declínio.

Ainda no período que abrange o final da década de 1960 até o final da década de 1970, houve uma tendência pedagógica, de origem norte-americana, que teve presença marcante nas escolas brasileiras, trata-se da Tendência Tecnicista que

> pretendendo otimizar os resultados da escola e torná-la "eficiente" e "funcional", aponta como solução para os problemas do ensino e da aprendizagem o emprego de técnicas especiais de ensino e de administração escolar. Esta seria a pedagogia "oficial" do regime militar pós-64 que pretendia *inserir a escola nos modelos de racionalização do sistema de produção capitalista* (FIORENTINI, 1995, p.15).

Nesse contexto, professor e aluno ocupavam uma posição secundária nos processos de ensino e de aprendizagem, sendo meros executores de um processo planejado e coordenado por outros profissionais. Ou seja, “os conteúdos eram organizados por especialistas, muitas vezes em kits de ensino e ficavam disponíveis em livros didáticos, manuais, jogos pedagógicos e recursos audiovisuais” (PARANÁ, 2008, p.44). Assim, as aulas de Matemática ocorriam por meio de uma instrução programada, em que os alunos deveriam realizar uma série de exercícios do tipo “resolva o exercício abaixo, seguindo o seguinte modelo” (FIORENTINI, 1995, p.16). De maneira mais abrangente, é possível notar que a finalidade da escola seria a preparação do indivíduo para que, ao ser “integrado” na sociedade, pudesse ser útil a um sistema organizado e funcional, como era entendida a organização social da época.

Durante a década de 1970 e início da década de 1980, as críticas ao ideário modernista abriram possibilidades para o surgimento de novas alternativas pedagógicas no cenário educacional brasileiro. Nas quais é possível observar um destaque para uma abordagem histórica dos temas e a ênfase na compreensão dos conceitos, levando-se em conta o desenvolvimento dos alunos (GOMES, 2012). É importante destacar que as discussões e reformas ligadas ao ensino da Matemática no Brasil, nas duas últimas décadas do século XX, acompanhavam reflexões internacionais sobre o tema. Essas influenciadas pelo documento “Agenda para Ação” apresentado, em 1980, pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), dos Estados Unidos, que destacava resolução de problemas como foco do ensino da Matemática (BRASIL, 1998).

Foi nesse cenário que a Tendência Construtivista começou a se destacar sendo que, a partir dos anos 80 do século XX, já era possível encontrar “em quase todas as regiões do país, grupos de pesquisa/estudo que se denominavam construtivistas” (FIORENTINI, 1995, p.20). Nessa tendência, a Matemática é vista como uma construção humana resultante de uma interação dinâmica do indivíduo com o meio em que esta inserido. Nesse sentido, professores e alunos são vistos como produtores históricos do conhecimento que esta sendo construído e a aprendizagem é fruto da interação entre eles e, também, com outros objetos e/ou situações que favoreçam ações reflexivas.

Vale ressaltar que

> o construtivismo, frente às críticas, às novas pesquisas, e às contribuições de outras áreas do conhecimento como a Sociologia, a Antropologia e a Linguística, foi se transformando, ampliando seus pressupostos [...] . Em relação às tendências pedagógicas de ensino da matemática fundamentadas no construtivismo, o que podemos observar, hoje, é uma mudança de um construtivismo pedagógico preocupado com o desenvolvimento de estruturas mentais para um mais ligado à construção ou à formação de conceitos ou outras formas menos radicais, o qual chega, inclusive, a considerar outras dimensões como, por exemplo, a sociocultural e a política (FIORENTINI, 1995, p.21-22).

As críticas ao Movimento Modernista também contribuíram para o desenvolvimento de pesquisas que, além de considerar os aspectos cognitivos, procuravam entender o quanto questões de origem sociocultural ou antropológicas poderiam contribuir, ou não, para a aprendizagem. A partir desse novo enfoque, a Tendência Sócioetnocultural passa a encontrar mais espaço nas pesquisas em Educação Matemática com vistas a melhorar a qualidade do ensino da Matemática. "No âmbito das ideias pedagógica, esta tendência apoia-se em Paulo Freire. No âmbito da Educação Matemática, tem-se apoiado nas ideias da Etnomatemática" (FIORENTINI, 1995, p.25) que, segundo Ubiratan D'Ambrósio, seu principal idealizador e representante, trata-se de

> maneiras, de modos, de técnicas ou mesmo de artes (*techné* ou *tica*) de explicar, de conhecer, de entender, de lidar com, de conviver (*matema*) com a realidade natural e sociocultural (*etno*) na qual ele, homem, está inserido. Ao utilizar, num verdadeiro abuso etimológico, as raízes *tica*, *matema* e *etno*, dei origem à minha conceituação de *etnomatemática* (D'AMBRÓSIO, 2012, p.24).

Nessa perspectiva, há o entendimento de que a Matemática é produzida pelos seres humanos, num contexto temporal, em suas diferentes práticas sociais, "sendo efetivamente a resposta às necessidades de sobreviver no ambiente e transcendê-lo, espacial e temporalmente" (D'AMBRÓSIO, 2012, p.8). Logo, nessa tendência, entendia-se que aprendizagem deveria ocorrer de maneira dialógica, isto é, a partir da toca de experiências entre professores e alunos, com vistas a atender à iniciativa dos estudantes e promover discussões/estudos de problemas significativos no contexto cultural dos mesmos (PARANÁ, 2008).

Já na última década do século XX, Fiorentini (1995) aponta que há duas tendências emergentes a *histórico crítica* e a *sociointeracionista-semântica*. A primeira toma a Matemática como um saber dinâmico construído nas relações sociais e com vistas ao atendimento de demandas ligadas a diversos grupos sociais em diferentes períodos históricos. Logo,

> A Matemática, sob uma visão histórico-crítica, não pode ser concebida como um saber pronto e acabado mas, ao contrário, como um saber vivo, dinâmico e que historicamente, vem sendo construído, atendendo a estímulos externos (necessidades sociais) e internos (necessidades teóricas de ampliações dos conceitos). Esse processo de construção foi longo e tortuoso. É obra de várias culturas e de milhares de homens que, movidos pelas necessidades concretas, construíram coletivamente a Matemática que conhecemos hoje (FIORENTINI, 1995, p.31).

Nessa perspectiva, a educação matemática deve ter compromisso com a formação cidadã dos estudantes, não limitando-se ao desenvolvimento de habilidades específicas ou fixação de conceitos matemáticos. Isto é, a aprendizagem deve ser significativa, levando o aluno a atribuir sentido ao conhecimento matemático e sobre ele, e/ou a partir dele, ser capaz de refletir, estabelecer relações, inferir, argumentar e criar.

A segunda, entende que a aprendizagem está diretamente ligada a significação, isto é, ao estabelecimento de relações possíveis entre representações (signos) e os fatos e/ou ideias associados a elas. Assim, a sala de aula é vista como uma comunidade emergente em que ocorre a produção de significados e a apropriação de significados produzidos histórico-socialmente. Nesse contexto, cabe ao professor o papel de mediador do processo cuja principal tarefa é planejar atividades suficientemente significativas para que se possa produzir, em sala de aula, significações historicamente construídas (FIORENTINI, 1995).

Por fim, no ano de 1997, através dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), o governo federal aponta os princípios que devem ser considerados nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Tais princípios ressaltam o papel da Matemática na construção da cidadania, bem como sua importância para uma melhor compreensão, e atuação, na realidade que nos cerca. Assim, entende-se que o conhecimento matemático deve ser construído de maneira significativa relacionando-se com outras áreas do conhecimento. Também é enfatizado, nesses princípios, a importância de que o saber matemático seja tratado como algo dinâmico e historicamente construído. E, ainda, que

> No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a "falar" e a "escrever" sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados (BRASIL, 1998, p.19).

Observa-se, portanto, na transição do século XX para o século XXI, um entendimento de que o conhecimento matemático é historicamente construído, de forma dinâmica e integrado aos desafios e necessidades vivenciadas por diferentes grupos sociais. Assim sendo, o ensino da Matemática não deveria ter como finalidade apenas a internalização de conhecimentos próprios dessa área do conhecimento. Mais do que isso, deve contribuir "para que o aluno transcenda um modo de vida restrito a um determinado espaço social e se torne ativo na transformação de seu ambiente" (BRASIL, 1998, p.25).

1.2 DESAFIOS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO INÍCIO DO SÉCULO XXI

No final do século XX, e início do século XXI, é possível observar diversos esforços no sentido de (re)significar os objetivos da Matemática escolar no contexto educacional brasileiro, visando torná-la mais significativa e atraente. Além disso, houve significativas mudanças no entendimento de como se aprende Matemática e de quais os papeis assumidos por professores e alunos nesse processo. Ou seja, se antes tinha-se no professor o principal sujeito nos processos de ensino e aprendizagem, hoje há um consentimento cada vez maior de que é o aluno que - na interação com o professor, colegas, objetos e/ou situações que favoreçam o pensar crítico e reflexivo - constrói seu próprio conhecimento. Isto, porém, não diminuí a importância do professor. Pelo contrário, nessa perspectiva, podemos dizer que

> os professores são o recurso mais importante dos estudantes. São eles que podem criar ambientes matemáticos estimulantes, passar aos estudantes as

> mensagens positivas de que eles precisam e fazer qualquer tarefa matemática despertar a curiosidade e o interesse dos alunos (BOALER, 2018, p.51).

Neste contexto, é natural pensar que a matemática escolar não deve se restringir a um amontoado de regras e procedimentos sem qualquer conexão com as situações vivenciadas pelo indivíduo nas suas atividades diárias. Sendo assim, espera-se que os estudantes reconheçam que

> [...] a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho (BRASIL, 2018, p.267).

Desta forma, o conhecimento matemático deve contribuir para para o desenvolvimento global de todos os estudantes, visto que possui grande aplicação na sociedade contemporânea e potencializa a formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais (BRASIL, 2018, p.265). Contraditoriamente, conforme apontam (PEREZ, 2012) e (SOISTAK, 2010), uma parcela significativa dos estudantes tem dificuldades de perceber a utilidade ou aplicabilidade da Matemática que aprendem na escola. Mais do que isso, muitos são os relatos de estudantes que apresentam certa aversão a essa disciplina. Sendo assim, tornar a aprendizagem da Matemática mais atraente e significativa tem sido um dos principais objetivos das pesquisas voltadas à Educação Matemática. Logo, é razoável pensar que um dos desafios postos diante dos educadores e pesquisadores dessa área, nesse início de século, é:

Como criar condições para que, ao estudar os conceitos matemáticos, os alunos possam perceber sua relevância e aplicabilidade na sociedade?

Obviamente, não há consenso sobre quais são as estratégias mais adequadas para responder tal desafio, tão pouco há um único caminho para solucioná-lo. Porém, as propostas de reformulações curriculares tem apontado para a necessidade de um ensino de Matemática contextualizado e interdisciplinar (SETTI, 2017, p.16). Tal afirmação pode ser verificada a partir de documentos oficiais como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), cujo texto defende que os estudantes devem mobilizar os conhecimentos desenvolvidos durante a Educação Básica no sentido de

> Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade [...] e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (BRASIL, 2018, p.9).

As Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná, por sua vez, afirmam que

> Os conteúdos disciplinares devem ser tratados, na escola, de modo contextualizado, estabelecendo-se, entre eles, relações interdisciplinares e colocando sob suspeita tanto a rigidez com que tradicionalmente se apresentam quanto o estatuto de verdade atemporal dado a eles. Desta perspectiva, propõe-se que tais conhecimentos contribuam para a crítica às contradições sociais, políticas e econômicas presentes nas estruturas da sociedade contemporânea e propiciem compreender a produção científica, a reflexão filosófica, a criação artística, nos contextos em que elas se constituem (PARANÁ, 2008, p.14).

Já os Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio), afirmam que

> A tendência atual, em todos os níveis de ensino, é analisar a realidade segmentada, sem desenvolver a compreensão dos múltiplos conhecimentos que se interpenetram e conformam determinados fenômenos. Para essa visão segmentada contribui o enfoque meramente disciplinar que, na nova proposta de reforma curricular, pretendemos superado pela perspectiva interdisciplinar e pela contextualização dos conhecimentos (BRASIL, 2000, p.21).

Nesse contexto, é razoável pensar na modelagem matemática como uma importante estratégia para atender aos objetivos da Educação Básica do Brasil, visto que no desenvolvimento de uma atividade de modelagem os estudantes têm a oportunidade de investigar criticamente problemas da realidade e utilizar o conhecimento matemático para resolvê-los (SETTI; VERTUAN, 2016a). Ressalta-se ainda, que nas atividades de modelagem a aprendizagem se desenvolve de maneira contextualizada e interdisciplinar já que "os conhecimentos acabam sendo utilizados e reinventados, ressignificados à medida que eles são trabalhados de modo não isolado, mas integrado" (SETTI; VERTUAN, 2016b).

Assim sendo, pela ampla visão que proporciona em relação a um assunto, por envolver de forma natural e indissociável o ensino e a pesquisa e pela possibilidade de, por meio dela, desenvolver a autonomia do educando (BURAK, 2010), as atividades de modelagem podem ser vistas, de fato, como uma alternativa metodológica com grande potencial para elevar a qualidade do ensino (não só da Matemática) nas escolas brasileiras.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

2.1 MODELOS MATEMÁTICOS E O DESENVOLVIMENTO DA HUMANIDADE

A interpretação de fatos cotidianos ainda que, por vezes, carente de rigor científico, tem acompanhado a evolução da humanidade. Os primeiros registros que podem ser concebidos como um tipo de escrita, por exemplo, são provenientes da Baixa Mesopotâmia e estariam ligados a necessidade de se registrar quantidades relacionadas a sobrevivência e à organização social (ROQUE, 2012). Ou seja, observa-se nos grupos humanos uma necessidade intrínseca de organizar e significar os fatos com os quais interage continuamente. Nesse contexto, pode-se dizer que o conjunto de saberes que hoje chamamos de Matemática, configuram-se como um importante instrumento de organização social.

Embora a profunda relação entre o desenvolvimento da humanidade e o da Matemática possa ser observado em diferentes períodos históricos, destacamos inicialmente a origem da geometria que estaria intimamente ligada a necessidade de resolver um problema prático da civilização egípcia, ou seja, os

> [...] egípcios teriam revelado que seu rei partilhava a terra igualmente entre todos, contanto que lhe fosse atribuído um imposto na base dessa repartição. Como o Nilo, às vezes, cobria parte de um lote, era preciso medir que pedaço de terra o proprietário tinha perdido, com o fim de recalcular o pagamento devido. Conforme Heródoto, essa prática teria dado origem à invenção da geometria[..] (ROQUE, 2012, p.93).

Avançando para o século XVII, no período que ficou conhecido como Revolução Científica, observa-se a expansão da ciência experimental e da matematização da natureza. Isto é, a Matemática tornou-se parte integrante da física e de outras ciências naturais (SKOVSMOSE, 2014). Em outras palavras, toda teoria física deveria recorrer a Matemática. Antes, porém, é importante ressaltar que do início do século XIV até o final do século XVI, os componentes do método científico estavam separados por uma barreira social, ou seja,

> [...] professores e humanistas tinham um certo desprezo pelas artes mecânicas e pelos trabalhos manuais. Por outro lado, os artesãos qualificados, que incluíam artistas-engenheiros, agrimensores, construtores de instrumentos musicais, náuticos e de guerra, eram mestres na prática da experimentação. Tratava-se de dois mundos separados: os últimos tidos, como plebeus, não tinham treinamento intelectual teórico, e aos primeiros, integrantes das classes mais altas, faltava um contato com a experiência prática e com as possibilidades dos instrumentos (ROQUE, 2012, p.240).

A nova concepção de ciência, impulsionada pela Revolução Científica, tratou de unir esses dois importantes elementos e colaborou para que houvesse, nesse período, um grande progresso na Matemática que, por sua vez, motivou, e foi motivada, pelo ideal mecanicista[1]. Isto é, ambos faziam parte de um mesmo movimento de compreender como se davam os processos naturais.

Tal movimento impulsionou a elaboração de modelos[2] cujo principal objetivo era a interpretação de fenômenos naturais. Ressaltam-se os trabalhos de Galileu Galilei (1564-1642) que, segundo Eves (2011), teria construído diversos artefatos como, por exemplo, o plano inclinado e o que mais tarde veio a ser chamado de telescópio, que lhe serviam tanto para testar quanto para formular suas teorias e, além disso, motivar outras. E assim, com seu moderno espírito cientifico, que aliava harmonicamente a experiência e a prática, realizou importantes contribuições para a mecânica dos corpos em queda livre e os fundamentos da dinâmica em geral.

Esse período ficou marcado pela busca de compreensão dos processos naturais e para interpretação desses fenômenos buscava-se escrever, em linguagem matemática, as leis da natureza, utilizando-se de modelos que motivavam a elaboração de conjecturas bem como a verificação experimental das mesmas. Ao direcionar o olhar para o processo de elaboração desses modelos, podemos enunciar um primeiro entendimento em relação a ideia de modelagem, que para Biembengut e Hein (2013) remete a imagem de um escultor que munido de material, técnica, intuição e criatividade faz seu modelo, que na certa representa alguma coisa, seja real ou imaginária.

No século XVIII, à luz da Revolução Francesa, o papel da ciência é ressignificado e esta passa a exercer maior influência na organização social visto que era cada vez mais aceita a ideia de que a formação científica podia ser útil à nação, seja para o aperfeiçoamento da força militar ou para a expansão da indústria (ROQUE, 2012, p.382). Assim, a Matemática ganha posição de destaque na sociedade e aos poucos percebe-se que vários fenômenos físicos podiam ser descritos por equações matemáticas. Dessa forma,

> o critério para considerar uma explicação aceitável de um fenômeno físico deixava de ser mecânico e passava a ser matemático. Se fosse possível obter uma formulação matemática de um fenômeno, ainda que não soubesse sua causa física, deveria se prosseguir na investigação por meio da equação (ROQUE, 2012, p.402).

Essa prática de estudar um fenômeno por intermédio da linguagem matemática nos remete a ideia de *modelo matemático* que para Biembengut e Hein (2013) é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir um fenômeno em questão ou problema de

[1] Segundo Eves (2011), o termo *mecanicista* remete a ideia de que a natureza e a civilização atuam como máquinas formadas de componentes sobre os quais a espécie humana exerce controle.

[2] O termo *modelo* está sendo utilizado no sentido de “representação de alguma coisa” (ALMEIDA, et al.,2013).

situação real. Seguindo esse entendimento, a *modelagem matemática* pode ser descrita como “a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” (BASSANEZI, 2013, p.16). Assim, a realização de um processo de modelagem matemática visa propor soluções para problemas por meio de modelos matemáticos. Sendo que o modelo matemático “dará forma” à solução do problema enquanto a modelagem matemática será a “atividade” de busca por tal solução (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013).

No início do século XIX, a Matemática mostrava-se teórica e prática ao mesmo tempo, uma vez que buscava representar a natureza por equações. Isto é, modelar matematicamente os fenômenos naturais. Como exemplo, podemos citar as linhas de *Rei Lear*[3], adotadas como lema pelo grande matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855): “Sê minha deusa agora, natureza! A tuas leis empenho meus serviços”. Em outras palavras, Gauss acreditava que “a matemática, por inspiração, deveria atingir o mundo real” (EVES, 2011, p.522).

Por outro lado, no decorrer deste século, houve uma preocupação em se refletir as estruturas internas da Matemática como, por exemplo, à concepção de número como *quantidades* que precisava migrar para um conceito abstrato, culminando

> na transformação da, então, matemática em “pura”. Porém, “pura” não se opõe a “aplicada”. Ao contrário, a matemática pode ser “aplicada” a partir do momento que é vista como saber puro (ROQUE, 2012, p.407).

Logo, os problemas físicos, que motivavam fortemente o desenvolvimento da Matemática, deixam de ocupar uma posição central na comunidade de matemáticos do início do século XX.

Embora o desenvolvimento da Matemática pura tenha sido notável no decorrer do século XX, direcionaremos o olhar para suas aplicações que para Shirley (2000) são, provavelmente, as realizações mais visíveis da Matemática nesse período. Logo, ressalta-se o papel da Matemática como instrumento de organização social visto que suas contribuições às ciências bem como suas diversas aplicações tecnológicas, alteraram significativamente as relações humanas.

Nesse contexto, convém destacar o estudo das probabilidades e da estatística. A primeira, que parecia limitar-se a uma ferramenta útil para jogadores, passa a atuar significativamente na sociedade, como pode ser exemplificado pela influencia da Teoria dos Jogos, de John von Neumann[4], na análise estratégica de negócios, na economia, na política e na guerra (SHIRLEY, 2000). Já a segunda, contribui em diversas áreas de atuação, como medicina, engenharia, mercado financeiro, indústria, dentre outros. Além disso, o fato de a maior parte dos governos do mundo possuírem organismos oficiais de estudos estatísticos, indica a relevância da área no planejamento e aplicação de recursos públicos (IGNÁCIO, 2010).

[3] Trecho da fala da personagem Edmundo na segunda cena, do primeiro ato, da obra “Rei Lear” de William Shakespeare.

[4] J. von Neumann e O. Morgenstern. Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press, 1944.

Segundo (LOPES, 2010), a partir do final século XX, estamos vivendo uma grande ruptura histórica, com a passagem da Era Industrial para a Era da Informação,em que uma nova sociedade esta surgindo, “gerada em rede” pela internet. Nesse sentido, convém refletir sobre o papel da Matemática na sociedade contemporânea já que, hoje, uma parcela significativa das tomadas decisão baseiam-se em algoritmos computacionais apoiados em dados probabilísticos e estatísticos. Ou seja, pode-se dizer que

> a matemática tem a função de "formatar a sociedade". A matemática constitui uma parte integrada e única da sociedade. Ela não pode ser substituída por nenhuma outra ferramenta que sirva a funções similares. É impossível imaginar o desenvolvimento de uma sociedade do tipo que conhecemos sem que a tecnologia tenha um papel destacado, e com a matemática tendo um papel dominante na formação da tecnologia. (SKOVSMOSE, 2001, p.40)

Os exemplos e reflexões apresentados nessa seção nos fornecem uma noção sobre a íntima relação entre a construção do conhecimento matemático e o desenvolvimento e organização da sociedade. Cientes dessa conexão, nos cabe vislumbrar uma educação matemática que fomente a leitura crítica das aplicações da Matemática. Em especial, devemos ser capazes de entender como os modelos matemáticos influenciam decisões econômicas e políticas (SKOVSMOSE, 2001). Seguindo esse entendimento, é razoável pensar que experienciar processos de modelagem matemática possa contribuir significativamente para a formação cidadã de nossos estudantes e, por conseguinte, para a efetivação de processos democráticos.

2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: ALGUMAS CONCEPÇÕES

A utilização da modelagem matemática como recurso pedagógico já vem sendo discutida a mais de quatro décadas. Segundo Burak (2010), em 1976 a modelagem era um dos temas tratados no III Congresso Internacional de Educação Matemática que contou com a participação de dois mil educadores de diversos países. No Brasil, foi durante a década de 1980 que a modelagem passou a ser vista como uma alternativa para tornar a aprendizagem da Matemática mais reflexiva. Assim, buscava-se romper com a metodologia mais praticada na época que, focada na memorização e nos algoritmos, tinha pouca preocupação com a contextualização dos conceitos trabalhados.

Segundo (BIEMBENGUT; HEIN, 2013) e (BURAK, 2010), as primeiras iniciativas de difundir essa nova perspectiva foram desenvolvidas por um grupo de professores, especialmente Ubiratan D’Ambrósio e Rodney Bassanezi que, através de palestras e cursos voltados para professores que atuavam desde a Educação Básica até o Ensino Superior, buscavam viabilizar novas alternativas para abordar os conteúdos matemáticos. Na dissertação de mestrado defendida por Dionísio Burak em 1987 (BURAK, 2010), com uma proposta de modelagem para a 5ª série do Ensino Fundamental, temos uma das primeiras iniciativas de utilização da modelagem matemática enquanto alternativa pedagógica na Educação Básica.

Atualmente, diante de um contexto educacional que procura aproximar o ensino da Matemática de outras áreas do conhecimento e colaborar para formação de indivíduos críticos em relação a realidade que os cerca, a modelagem matemática tem, cada vez mais, despertado a curiosidade de professores e/ou pesquisadores interessados em elevar a qualidade do ensino dessa disciplina. Naturalmente, o aumento no interesse por essa tendência possibilitou avanços nas pesquisas envolvendo a modelagem matemática na educação matemática. Essas, por sua vez, aliadas às práticas docentes diárias, resultaram em diferentes maneiras de se conceber e praticar a modelagem na Educação Básica já que cada professor (e/ou pesquisador) trás consigo uma concepção de modelagem baseada em suas vivências, experiências e estudos. Sendo que as discussões resultantes da divulgação desses diferentes entendimentos contribuí para gerar diferentes tendências (BIEMBENGUT, 2012).

Nesse sentido, com o intuito de contribuir para que os professores, interessados em utilizar a modelagem nas suas aulas, possam vislumbrar perspectivas distintas, serão apresentadas e discutidas diferentes concepções de modelagem e como ela se relaciona com o ensino e a aprendizagem da Matemática. Para tanto, analisaremos a modelagem matemática sob a ótica de três autores com amplo reconhecimento na literatura: Dionísio Burak, Jonei Cerqueira Barbosa e Maria Salett Biembengut.

No entendimento de Biembengut, a modelagem é vista como um método de pesquisa que provém da Matemática Aplicada (KLÜBER, 2010). Assim, entende-se que durante o processo de modelagem matemática deverá emergir um modelo cuja sofisticação e capacidade de representar a situação, e/ou fenômeno, estudado, depende do conhecimento matemático de quem elabora tal modelo (BIEMBENGUT; HEIN, 2013). Logo, segundo a autora, a modelagem matemática é

> uma arte, ao formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mas que também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias. Genericamente, pode-se dizer que a matemática e a realidade são dois conjuntos disjuntos e a modelagem é um meio de fazê-los interagir (BIEMBENGUT; HEIN, 2013, p.13).

Ou seja, Biembengut entende que a Matemática é externa à realidade mas que o processo de modelagem é um caminho para que ambas possam interagir. Sendo que o conhecimento matemático será utilizado como instrumento para representar tal realidade, possibilitando, assim, "uma melhor compreensão, simulação e previsão do fenômeno estudado" (BIEMBENGUT; HEIN, 2013, p.12).

Dessa forma, a autora entende que, para que tal interação seja viabilizada, o processo de modelagem deve contemplar uma série de procedimentos que podem ser agrupados em três etapas fundamentais, denominadas: *interação*, *matematização* e *modelo*. Além disso, afirma que quando as atividades de modelagem ocorrem em

> [...] cursos regulares, nos quais há um programa a ser cumprido - currículo - e uma estrutura espacial e organizacional nos moldes "tradicionai" (como é a maioria das instituições de ensino), o processo da modelagem precisa sofrer algumas alterações, levando em consideração principalmente o grau de escolaridade dos alunos, o tempo disponível que terão para trabalho extraclasse, o programa a ser cumprido e o estágio em que o professor se encontra, seja em relação ao conhecimento da modelagem, seja no apoio por parte da comunidade escolar para implementar mudanças. (BIEMBENGUT; HEIN, 2013, p.18).

Embora a autora utilize uma nomenclatura própria para esses casos (modelação matemática), neste trabalho utilizaremos apenas o termo modelagem matemática.

Nesse contexto, segundo Biembengut e Hein (2013), na primeira etapa (*interação*), um tema será apresentado aos alunos a partir de uma breve explicação do professor. Na sequência os alunos serão instigados a, juntamente com o professor, elaborar questões relacionadas ao tema proposto. Em outras palavras, nessa etapa ocorre a problematização da situação proposta. Na etapa seguinte (*matematização*), haverá a formulação de uma das questões discutidas com os estudantes. Isto é, ocorrerá a tentativa de generalizar o problema a partir da exploração dos conceitos matemáticos suscitados por uma questão "norteadora". É nessa etapa que ocorre a construção dos conceitos matemáticos envolvidos na questão investigada.

Assim sendo, se faz necessária uma mediação atenta do professor que, caso julgue necessário, poderá interromper momentaneamente a investigação para que os conhecimentos matemáticos, necessários à resolução da questão em discussão, sejam suficientemente desenvolvidos. Sendo possível, nesse momento, propor problemas análogos e até mesmo exercícios (convencionais, aplicados ou demonstrações) objetivando uma visão mais clara da questão que esta sendo formulada. Após essa etapa, no momento oportuno, deve-se retornar a busca por uma solução para a questão "norteadora" (BIEMBENGUT; HEIN, 2013). Por fim, é proposta uma solução formulada que também poderá ser utilizada para resolver questões análogas, trata-se do modelo matemático. A análise da validade e relevância dos resultados obtidos conclui a terceira etapa (*modelo*) do processo de modelagem proposto por (BIEMBENGUT; HEIN, 2013).

A partir do exposto, é possível observar que Biembengut concebe a modelagem matemática na perspectiva da Matemática Aplicada e, ainda que proponha adaptações para sua implementação em diferentes níveis de ensino, enfatiza a necessidade de uma solução formulada, que emerge da matematização da questão estudada.

De acordo com (KLÜBER, 2010) e (BURAK, 2010), a visão de modelagem apresentada por Burak, na fase inicial do mestrado e do doutorado, também pautava-se na perspectiva da Matemática Aplicada e, sendo assim, o autor entendia que as atividades de modelagem constituíam-se em cinco etapas: escolha do tema, ação exploratória, formulação do problema, construção do modelo (equacionamento do problema) e validação do modelo. Entretanto, no decorrer do tempo, Burak desenvolveu uma outra perspectiva de seus encaminhamentos, passando a entender que a modelagem, no âmbito da Educação Básica, não deve seguir os mesmos parâmetros da modelagem experimental visto que os problemas que emergem nas escolas diferem daqueles oriundos das Ciências Exatas e da Natureza e, portanto, nem sempre é possível uma solução formulada para o problema (BURAK; KLÜBER, 2008), evidencia-se assim, sua mudança de perspectiva. Logo, o autor defende que a modelagem não deve ser vista como um conjunto de procedimentos técnicos, mas sim como um processo aberto e contextualizado, de modo que possa dar significado aos conceitos matemáticos. Diante desse novo olhar, Burak afirma que

> A Modelagem Matemática constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões (BURAK, 1992 apud BURAK, 2010, p.35)

Assim, nessa concepção, Burak defende que as atividades de modelagem devem objetivar, principalmente, a construção do conhecimento[5] dos estudantes (em especial o matemático) tornando a aprendizagem mais dinâmica e significativa. Cabe destacar que os encaminhamentos propostos pelo autor, nessa fase, frisam a **importância do interesse dos estudantes** (no tema a ser investigado) e da **coleta de dados do ambiente** (visando o desenvolvimento da autonomia), sendo esses os princípios básicos da sua concepção de modelagem (BURAK; KLÜBER, 2008). Baseado nesses princípios e nas necessidades postas pelo nível de ensino em que foca o desenvolvimento seus trabalhos, a Educação Básica, segundo (KLÜBER, 2010), (BURAK, 2010), (KAVIATKOVSKI, 2010) e (BURAK; KLÜBER, 2008), Burak propõe cinco etapas para a modelagem, a saber: escolha do tema, pesquisa exploratória, levantamento dos problemas, resolução dos problemas e o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema e análise crítica das soluções.

De acordo com (BURAK; KLÜBER, 2008), a atividade terá início com a ***escolha do tema*** que não precisa ter ligação imediata com a Matemática mas precisa despertar o interesse dos estudantes. Assim, o professor pode propor alguns temas para que os alunos escolham ou, ainda, deixar que os próprios alunos indiquem seus pontos de interesse. Ressalta-se aqui que o professor deve mediar a escolha de modo a garantir que a escolha da classe seja respeitada. Escolhido o tema, os alunos serão instigados a enriquecer seus conhecimentos prévios em relação o que se pretende pesquisar. Isso pode ser feito através de pesquisas teóricas e/ou de campo. Essa fase é chamada de ***pesquisa exploratória***. De posse dos materiais e conhecimentos adquiridos, passa-se para a terceira etapa (***levantamento dos problemas***) em que os estudantes, sob a mediação do professor, farão conjecturas em relação aos possíveis conteúdos matemáticos que podem estar relacionados ao tema investigado para que, ao mesmo tempo que sejam apreendidos, possam contribuir para compreensão e solução das questões levantadas pelo grupo.

Em seguida, parte-se para a ***resolução dos problemas*** que se dará com o auxílio dos conhecimentos matemáticos. É nessa etapa que são desenvolvidos os conteúdos matemáticos

[5] Burak baseia-se numa concepção de ensino orientada por pressupostos construtivistas, sociointeracionistas e de aprendizagem significativa, conforme apontam (BURAK; KLÜBER, 2008) e (KAVIATKOVSKI, 2010).

que devem ser abordados da maneira abrangente possível, mas sempre considerando o contexto em que foram levantados os problemas. Por fim, ocorre a ***análise crítica das soluções*** na qual pressupõe-se que as soluções apresentadas não devem fazer sentido apenas do ponto de vista lógico-matemático, mas também devem ser coerentes e aplicáveis no contexto dos problemas.

Para (BARBOSA, 2011) a modelagem matemática, numa perspectiva sócio-crítica, deve enfatizar a atuação do aluno na sociedade e se preocupar com a análise da natureza e do papel dos modelos matemáticos no contexto social. No entendimento do autor, a modelagem matemática deve potencializar a reflexão sobre a Matemática, a própria modelagem e seu significado social (BARBOSA, 2001). Ou seja, é importante que os alunos não apenas possam vivenciar a construção de modelos matemáticos, mas que eles sejam convidados a analisar o trabalho que realizaram e, assim, possam desenvolver sua capacidade de reflexão crítica em relação a formulação e aplicabilidade de tais modelos na sociedade. Portanto, Barbosa concebe a modelagem como um ambiente de aprendizagem[6] (KLÜBER, 2010), em que

> [...] os alunos, por meio da matemática, são convidados a indagar e investigar situações originadas de outras áreas da realidade. Seguindo esse entendimento, este ambiente de aprendizagem é constituído de relações interpessoais, possibilitando aos participantes a produção de diversos tipos de ações, como: esquematizar, desenvolver operações aritméticas, gerar equações, fazer desenhos, traçar gráficos, e, principalmente, produzir discurso (BARBOSA, 2011, p.198).

Em relação aos conceitos matemáticos que serão desenvolvidos durante o processo de modelagem, Barbosa (2001) destaca que é o encaminhamento das atividades que determinarão os conteúdos que serão trabalhados. Isto é, os conhecimentos matemáticos necessários para investigar a situação de interesse dos alunos devem emergir da própria investigação. Logo, a construção de um modelo, propriamente dito, não pode ser garantido e, aliás, esse não é o objetivo da modelagem, na perspectiva adotada por Barbosa. Nesse sentido, o autor afirma que

> As atividades de Modelagem são consideradas como oportunidades para explorar os papéis que a matemática desenvolve na sociedade contemporânea. Nem matemática nem Modelagem são "fins", mas sim "meios" para questionar a realidade vivida (BARBOSA, 2001, p.4).

A natureza aberta das atividades de modelagem propostas por Barbosa certamente contribui tanto para o desenvolvimento do pensar crítico dos estudantes quanto para uma aprendizagem contextualizada e significativa. Entretanto, reconhecendo a dificuldade de integrar a modelagem nos currículos escolares, defende que é preciso considerar a utilização de diferentes maneiras de organização curricular para a modelagem que o autor classifica em três casos:

[6] O termo ambiente aprendizagem é utilizado no sentido apresentado por (SKOVSMOSE, 2001) e (SKOVSMOSE, 2014).

> Caso 1. O professor apresenta a descrição de uma situação-problema, com as informações necessárias à sua resolução e o problema formulado, cabendo aos alunos o processo de resolução.[...]
>
> Caso 2. O professor traz para a sala um problema de outra área da realidade, cabendo aos alunos a coleta das informações necessárias à sua resolução.[...]
>
> Caso 3. A partir de temas não-matemáticos, os alunos formulam e resolvem problemas. Eles também são responsáveis pela coleta de informações e simplificação das situações-problema. É via do trabalho de projetos[...] (BARBOSA, 2001, p.9).

Ressaltamos aqui, que nos três casos descritos deve haver uma cooperação entre professor e alunos na busca pela solução do problema proposto (BARBOSA, 2001).

Em síntese, Barbosa defende que a modelagem não deve objetivar, necessariamente, a construção de modelos matemáticos. Mas sim, ser um meio para que os estudantes possam utilizar os conhecimentos matemáticos para investigar *situações oriundas de outras áreas da realidade*[7] e considera, portanto, pouco interessantes as situações fictícias elaboradas artificialmente com o intuito de promover o ensino de Matemática (BARBOSA, 2001). Essa perspectiva, aproxima-se da concepção de modelagem que Burak tem defendido, uma vez que em ambas os conceitos e ideias matemáticas são direcionados de acordo com o desenvolvimento das atividades e, além disso, a elaboração de um modelo matemático (no sentido literal) não é o objetivo principal e tão pouco uma exigência (BURAK; KLÜBER, 2008).

Diante dos diferentes contextos em que se é possível conceber a modelagem matemática na educação matemática, pode-se vislumbrar uma diversidade de possibilidades de integrar essa tendência às práticas docentes dos professores que atuam na Educação Básica. Porém, essa não é uma tarefa fácil, especialmente quando a modelagem é concebida nas perspectivas de Barbosa e Burak, já que além de romper com os moldes do ensino mais usual da Matemática, tira o professor de sua zona de conforto uma vez que, ao conduzir as atividades a partir dos interesses dos alunos, não tem o domínio completo da situação.

(BURAK, 2010), por exemplo, apresenta algumas angústias relatadas por professores da Educação Básica ao trabalharem com modelagem matemática em suas aulas. Das quais destacamos: dificuldades em conciliar os conteúdos programáticos e a insegurança do professor ao adequar os dados levantados pelos alunos. Nesse sentido, o viés adotado por Biembengut, que demonstra maior preocupação com o currículo a ser cumprido nas escolas, embora possa ser considerado um limitador para o desenvolvimento de atividades de modelagem, parece ser uma boa alternativa para que mais professores possam viabilizar a incorporação dessa tendência nas suas práticas em sala de aula. Haja vista que a maior parte das escolas brasileiras possuem uma organização curricular linear e com pouco espaço para flexibilização. Por outro lado, Burak e

[7] (BARBOSA, 2011) entende que a Matemática não deve ser concebida como algo externo a realidade. Ou seja, considera que a Matemática também é um dos domínios da realidade e sobre ela atua. Por isso, prefere adotar o termo *situações oriundas de outras áreas da realidade*, ao invés de situações do mundo real (ou da vida real).

Klüber (2008), consideram que o fato dos professores já "saberem" de antemão os conteúdos que serão explorados torna o processo investigativo menos desafiante.

De qualquer forma, as várias formas de se conceber e praticar a modelagem nas salas de aula, possibilitam ajustá-la a diversos contextos (onde a modelagem será utilizada) e objetivos educacionais (com qual objetivo será utilizada), sendo estes determinantes para o planejamento e o desenvolvimento das atividades de modelagem no contexto escolar (CHAVE; SANTO, 2011).

2.3 MODELAGEM E INTERDISCIPLINARIDADE

Conforme exposto no Capítulo 1, as mais recentes reformas curriculares voltadas para a educação brasileira, têm apontado para a necessidade de um ensino mais contextualizado e significativo em que o tratamento interdisciplinar dos conhecimentos específicos de cada área do conhecimento possa contribuir para a formação cidadã dos estudantes. Assim sendo, a aprendizagem da Matemática deverá ocorrer em um ambiente no qual os estudantes tenham a oportunidade de utilizar os conhecimentos matemáticos para raciocinar, representar, comunicar e argumentar sobre situações vivenciadas em diferentes domínios da realidade e, a partir dela, construir novos saberes.

Entretanto, em grande parte das escolas brasileiras ainda é predominante a presença de um ensino enciclopédico, fragmentado e "conteudista" que é próprio da "relação de ensino do tipo 'transmissão – recepção', limitada à reprodução restrita do 'saber' de posse do professor, que 'repassa' os conteúdos enciclopédicos ao aluno" (BRASIL, 2006, p.105). Logo, visando superar essa situação contraditória propõe-se, nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM), que as aulas sejam planejadas de modo a favorecer o reconhecimento das relações existentes entre o conhecimento científico sistematizado na educação formal e as situações vivenciadas no dia-a-dia da população. Para tanto, as atividades experimentais devem partir da problematização de situações do cotidiano e possibilitar que

> os alunos elaborem hipóteses, testem-nas, organizem os resultados obtidos, reflitam sobre o significado de resultados esperados e, sobretudo, o dos inesperados e usem as conclusões para a construção do conceito pretendido (BRASIL, 2002, p.55).

Evidencia-se assim, uma proposta de ensino em concordância com os princípios da contextualização e da interdisciplinaridade. Sendo que a contextualização, tomada como "recurso didático para problematizar a realidade vivida pelo aluno, extraí-la do seu contexto e projetá-la para a análise" (BRASIL, 2006, p.51), é potencializada pela interdisciplinaridade. Esta, entendida "como abordagem teórico-metodológica com ênfase no trabalho de integração das diferentes áreas do conhecimento" (BRASIL, 2013, p.184). Logo, para que a aprendizagem ocorra de forma verdadeiramente interdisciplinar as disciplinas devem contribuir cada qual com seus conhecimentos (SETTI; VERTUAN, 2016a). Portanto, as relações estabelecidas entre os conhecimentos específicos de cada disciplina, devem ser mobilizadas no sentido de possibilitar diferentes maneiras de investigar, interpretar, representar, prever e comunicar os fatos relacionados aos fenômenos estudados e, assim, "transpor para o cotidiano os conteúdos apropriados em sala de aula" (BRASIL, 2006, p.18).

Nesse contexto, considerando que embora a Matemática seja,

> [...] por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados, é de fundamental importância também considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática (BRASIL, 2018, p.265)

e que "um trabalho interdisciplinar parece ser empreendido sempre que se desenvolve uma atividade de Modelagem" (SETTI; VERTUAN, 2016a, p.4), é possível vislumbrar a modelagem matemática como alternativa pedagógica capaz de integrar (e potencializar) a aprendizagem dos estudantes. Ou seja, entendemos que as atividades de modelagem podem contribuir para a significação da linguagem, dos instrumentos de investigação científica e dos conceitos relacionado às diversas áreas do conhecimento. Ao mesmo tempo que, ao proporcionar a investigação de fenômenos e/ou situações em uma variedade de contextos, favorece o desenvolvimento das "competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente [...] utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas" (BRASIL, 2018, p.266).

3 AJUSTE DE CURVAS E MODELAGEM NO ENSINO MÉDIO

Um dos grandes desafios para se trabalhar com modelagem na Educação Básica é aventurar-se na complexidade dos problemas reais cujas variáveis numéricas podem assumir valores de difícil interpretação e manipulação. Os dados obtidos a partir de um experimento físico, por exemplo, podem exigir um conhecimento matemático mais refinado para que possam ser relacionados entre si e com o fenômeno investigado. Neste contexto, e considerando a importância do desenvolvimento do espirito de investigação dos estudantes com vistas a resolverem problemas de diferentes áreas da vida cotidiana (BRASIL, 2018, p.475), propomos a abordagem do tema *ajuste de curvas* desde o primeiro ano do Ensino Médio.

Tal proposta justifica-se por explicitar aos estudantes a possibilidade de estabelecer uma relação funcional entre dados numéricos obtidos a partir de pesquisas ou experimentos e, por conseguinte, ampliar sua capacidade de identificar padrões, tendências e inferir sobre um determinado assunto. Além disso, o emprego de diversas estratégias para realizar o *ajuste de curvas* (manipulação algébrica, softwares de matemática dinâmica, dentre outros) fomenta a utilização, e significação, das diferentes representações matemáticas bem como a possibilidade de se fazer conversões entre elas, contribuindo substancialmente para o desenvolvimento da capacidade de resolver e elaborar problemas (BRASIL, 2018, p.538).

Ressalta-se ainda que, ao experienciar diferentes formas de abordar e representar uma situação (ou fenômeno), cria-se condições para que os estudantes percebam como a utilização de métodos matemáticos mais, ou menos, formais podem interferir significativamente na compreensão e tomada de decisão diante de uma situação real e, portanto, reconheçam "a atividade matemática como atividade humana, sujeita a acertos e erros, como um processo de buscas, questionamentos, conjecturas, contraexemplos, refutações, aplicações e comunicação" (BRASIL, 2018, p. 540).

3.1 AJUSTE DE CURVAS

Segundo Bassanezi (2013), quando estamos diante de uma situação ou fenômeno cujas variáveis envolvidas podem ser expressas numericamente, espera-se obter uma relação funcional $y = f(x)$ (onde x é a variável independente e y a variável dependente) que evidencie tendências de comportamento de uma variável num determinado intervalo e que seja adequada para fazer previsões de y quando x escapa do intervalo pesquisado. Para tanto, pode-se recorrer ao *ajuste de curvas* que trata-se de "um recurso formal para expressar alguma tendência da variável dependente y quando relacionada com a variável independente x. Em outras palavras, regressão é um mecanismo ou artifício que fornece uma relação funcional quando se tem uma relação estatística" (BASSANEZI, 2013, p.54).

Assim sendo, dado um conjunto de pontos (x_i, y_i) $(i = 1, 2, ..., n)$, estamos interessados em obter uma relação funcional $y = f(x)$ de modo que a diferença entre os valores ajustados $(x_i, f(x_i))$ e os valores observados (x_i, y_i) seja a menor possível. Isto é, queremos que a curva escolhida para o *ajuste* dos dados numéricos observados resulte no menor ***erro*** possível.

3.1.1 DEFINIÇÃO DO ERRO COMETIDO NO AJUSTE DE CURVAS

Poderíamos definir o *erro* E cometido na escolha da curva $y = f(x)$ que *ajusta* os pontos (x_i, y_i) $(i = 1, 2, ..., n)$ como a soma das diferenças $(f(x_i) - y_i)$, entretanto essa definição poderia gerar resultados indesejados como ilustra o exemplo 3.1.

Exemplo 3.1. *Suponha que a curva de ajuste*

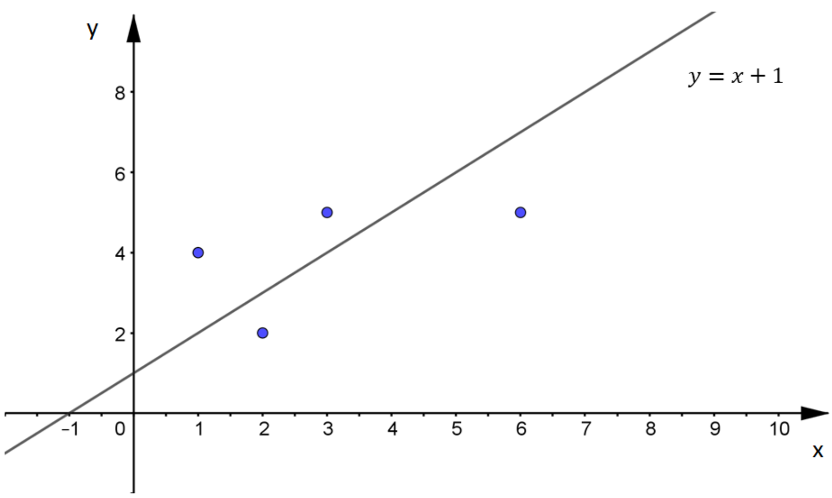
$$y = f(x) = x + 1$$

foi obtida a partir dos pontos observados $(1, 4),\ (2, 2),\ (3, 5),\ (6, 5)$, *e que o erro* ***E*** *cometido na escolha de* $f(x)$ *é dado por*

$$E = (f(1) - 4) + (f(2) - 2) + (f(3) - 5) + (f(6) - 5) = 0.$$

Note que o erro cometido seria igual a zero, levando a crer que a curva ajustada contém todos os pontos observados, fato que não condiz com a realidade e mascara o erro cometido, como mostra a Figura 1.

Figura 1 – Gráfico dos pontos observados e curva de ajuste $y = f(x) = x + 1$



Fonte: Autoria própria.

Conforme observamos no exemplo 3.1, a simples soma das diferenças entre os valores ajustados $f(x_i)$ e os valores observados y_i gera resultados inadequados visto que a soma de termos tanto positivos quanto negativos pode ser direcionada de forma a neutralizar ou distorcer o erro cometido.

Portanto, uma solução para corrigir tal incongruência na definição do *erro* cometido ao se determinar uma *curva de ajuste* é defini-lo como:

Definição 3.2. *O erro **E** cometido na escolha da curva* $y = f(x)$*, que ajusta os pontos* (x_i, y_i) $(i = 1, 2, ..., n)$*, é dado pela soma dos quadrados das diferenças entre os valores ajustados* $f(x_i)$ *e os valores observados* y_i*, ou seja*

$$E = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - y_i)^2.$$

3.1.2 AJUSTE DE CURVAS E MODELAGEM

Num processo de ajuste de curvas escolhe-se, a priori, o tipo de curva que será utilizado para expressar a relação funcional entre as variáveis numéricas de uma determinada situação ou fenômeno e, em seguida, são determinados os parâmetros dessa curva de modo que ela possa ser utilizada para observar tendências e fazer previsões (BASSANEZI, 2013). Entretanto, nem sempre a curva ajustada escolhida poderá ser considerada um modelo para o fenômeno em questão, visto que é necessário que seus parâmetros comportem qualidades ou significados inerentes a tal fenômeno. Ou seja, como exemplifica Bassanezi (2013), os dados referentes ao comprimento y e a idade x da tilápia do Nilo podem ser relacionados pela função

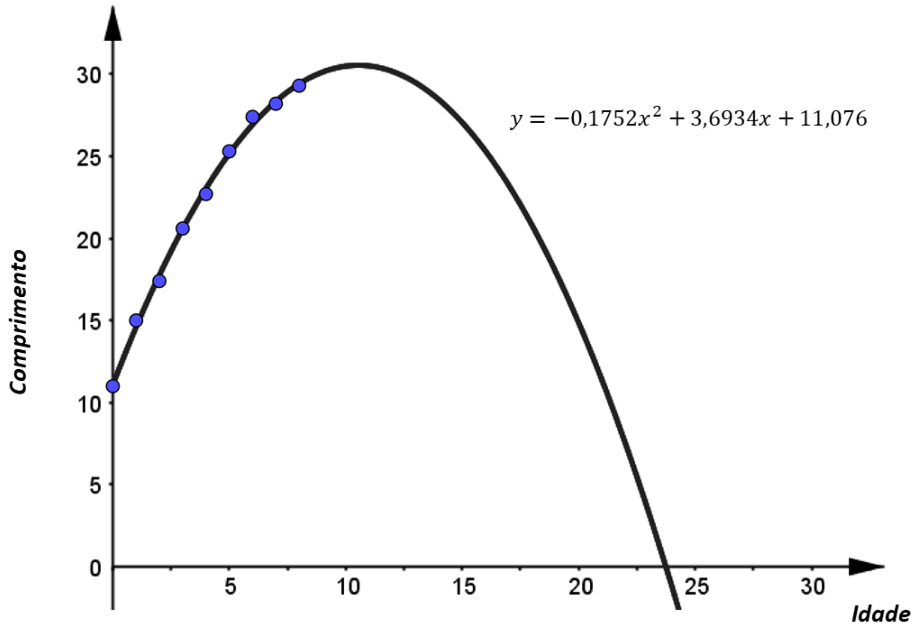
$$y = -0,1752x^2 + 3,6934x + 11,076$$

que embora forneça "boas" aproximações [1] quando $x \in [0, 10]$, sugere que o comprimento da tilápia reduz com o passar do tempo (Figura 2), fato este que não condiz com a realidade. Logo, essa curva não pode ser considerada um modelo desse fenômeno.

É claro que uma análise, de fato, do quanto uma curva ajustada é capaz de modelar um fenômeno demanda um conjunto de conhecimentos (estatísticos e de outras áreas do conhecimento) que extrapolam os objetivos e conteúdos tratados no Ensino Médio e, portanto, não serão tratados nesse trabalho. Sendo assim, não estamos interessados na elaboração de modelos extremamente sofisticados, mas sim na vocação das relações funcionais, obtidas a partir de um *ajuste* de dados, em promover situações de aprendizagem propícias à elaboração e validação de hipóteses, características próprias de uma atividade de modelagem. Em outras palavras, estamos interessados em utilizar essa ferramenta nas salas de aula do Ensino Médio para ampliar a capacidade dos estudantes de formular e testar conjecturas, com as devidas representações e justificativas, no sentido de mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar e argumentar, fazendo uso de representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (BRASIL, 2018, p.529).

[1] Quanto menor for o erro cometido na escolha da curva de ajuste de um conjunto de dados numéricos, melhor será considerada a aproximação.

Figura 2 – Tilápia do Nilo: Idade (em anos) x Comprimento (cm)



Fonte: Adaptado de (BASSANEZI, 2013).

Portanto, ao propor atividades de modelagem matemática, contemplando o ajuste de curvas, nessa etapa da Educação Básica objetivamos, principalmente, por um lado, proporcionar aos estudantes a possibilidade de experienciar uma matemática viva cuja linguagem, conceitos e procedimentos são acessíveis e podem "materializar-se" na resolução de problemas reais. E, por outro lado, especialmente nas etapas validação dos modelos no contexto estudado, explicitar a importância de refletir sobre como são elaborados os modelos matemáticos que influenciam nossas decisões no dia a dia, bem como o potencial e limitações desses modelos como instrumento compreensão e transformação da realidade.

3.2 AJUSTE DE CURVAS E AS TECNOLOGIAS DIGITAIS

Os avanços tecnológicos ocorridos, especialmente nas últimas décadas, além de impactarem significativamente nossos hábitos cotidianos também transformaram os modos de produção e disseminação do conhecimento. Nesse contexto, as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) vem ganhando cada vez mais espaço nas salas de aula figurando, em muitos casos, como um importante recurso pedagógico. Reconhecendo o potencial das TDIC's para o desenvolvimento de atividades em diversas áreas do conhecimento, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece competências e habilidades relacionadas com as tecnologias digitais que devem ser desenvolvidas no decorrer do Ensino Médio, das quais destacamos:

> • usar diversas ferramentas de software e aplicativos para compreender e produzir conteúdos em diversas mídias, simular fenômenos e processos das diferentes

> áreas do conhecimento, e elaborar e explorar diversos registros de representação matemática; e
>
> • utilizar, propor e/ou implementar soluções (processos e produtos) envolvendo diferentes tecnologias, para identificar, analisar, modelar e solucionar problemas complexos em diversas áreas da vida cotidiana, explorando de forma efetiva o raciocínio lógico, o pensamento computacional, o espírito de investigação e a criatividade (BRASIL, 2018, p.475).

Alinhados com essa perspectiva e considerando que as atividades de modelagem na Educação Básica devem fomentar não só a aplicação, mas também construção dos conhecimentos matemáticos, recomendamos a utilização de tecnologias digitais, em especial softwares de matemática dinâmica, na abordagem do tema ajuste de curvas. Tal recomendação apoia-se no fato de que a utilização desses softwares, dos quais destacamos o ***Geogebra***[2] que cria um ambiente mais favorável para que os alunos elaborem e verifiquem hipóteses referentes às propriedades das curvas, principalmente no que diz respeito a influência de seus parâmetros no comportamento das mesmas. Logo, potencializa-se o desenvolvimento de

> um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo (BRASIL, 2018, p.540).

Desta forma, ao expressar graficamente os dados numéricos que dispõem, os estudantes poderão construir diferentes curvas e, atentos a suas propriedades, estimar com maior clareza aquela que poderá modelar a situação estudada. Posteriormente, com o apoio visual fornecido pelo software, poderão buscar os parâmetros da curva que os levem a cometer o menor *erro* possível no ajuste dos dados. Vale destacar que as TDIC também são um importante instrumento para pesquisa e/ou produção dos dados que serão relevantes para construção dos modelos, portanto seu uso não deve ficar restiro aos softwares matemáticos.

3.2.1 AJUSTE DE CURVAS NO GEOGEBRA

Nesta seção, ilustraremos como o *Geogebra Classic 5* pode ser utilizado para realizar o *ajuste* de um conjunto de dados numéricos. Para tanto utilizaremos os dados da Tabela 1 referentes a evolução do salário mínimo nacional no período de 2000 a 2005.

---

[2] Com uma comunidade de milhões de usuários em diversos países, o *Geogebra* tornou-se líder na área softwares de matemática dinâmica. Seu maior mérito consiste em reunir em um único pacote, de fácil utilização, Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos para diferentes níveis de ensino. E, principalmente, ser um Software de Código Aberto disponível gratuitamente para usuários não comerciais. Para obter mais informações e utilizar o *Geogebra* basta acessar o site https://www.geogebra.org.

Tabela 1 – Salário mínimo nacional entre 2000 e 2005

Ano	Tempo (t), em anos	Salário mínimo nacional $S(t)$, em reais
2000	0	151
2001	1	180
2002	2	200
2003	3	240
2004	4	260
2005	5	300

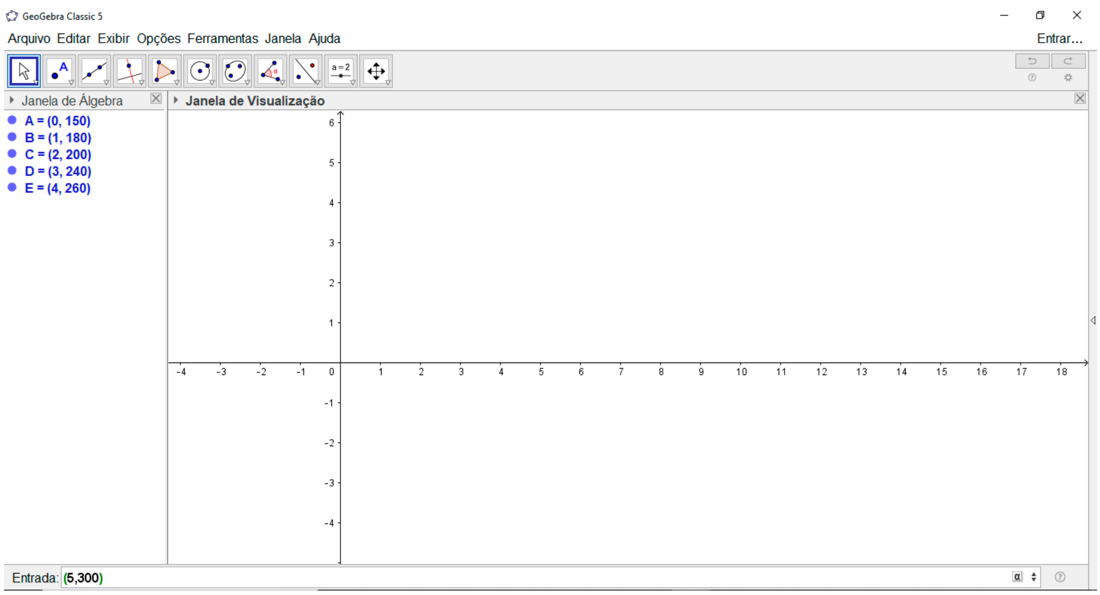
Fonte: Adaptado de (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013, p.98)

1º passo: Representando graficamente os dados da Tabela 1

Após inicializar o *Geogebra Classic 5*[3], insira os dados (t) e $S(t)$ da Tabela 1 no campo "Entrada" (Figura 3).

Note que os pontos digitados apareceram na "Janela de Álgebra" mas não na "Janela de Visualização". Ocorre que os valores associados ao eixo $y = S(t)$ são muito altos em relação aos valores de (t), por isso é necessário formatar a área do gráfico. Então, pressione o botão direito do *mouse* e selecione a opção "Janela de Visualização", em seguida, na *janela* "Preferências - Janela de Visualização", selecione a *aba* "Básico" e altere o campo "EixoX : EixoY". Neste caso optamos pela escala 1:50 (Figura 4). Após essa formatação, será possível observar os pontos inseridos.

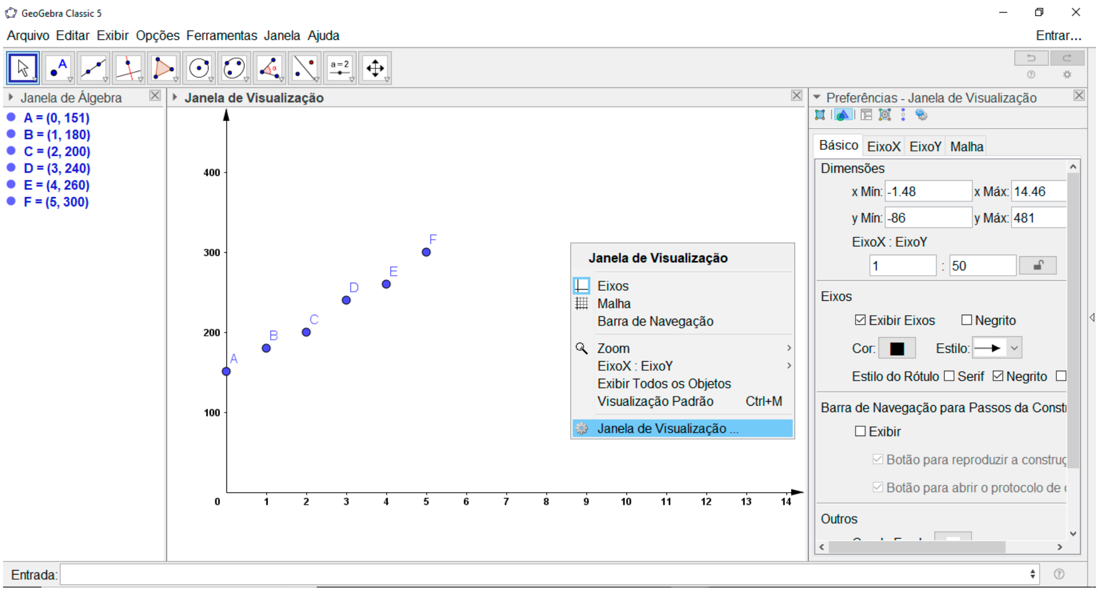
Figura 3 – Inserindo pontos - $S(t) \times t$



Fonte: Autoria própria.

3 Disponível em https://www.geogebra.org/download.

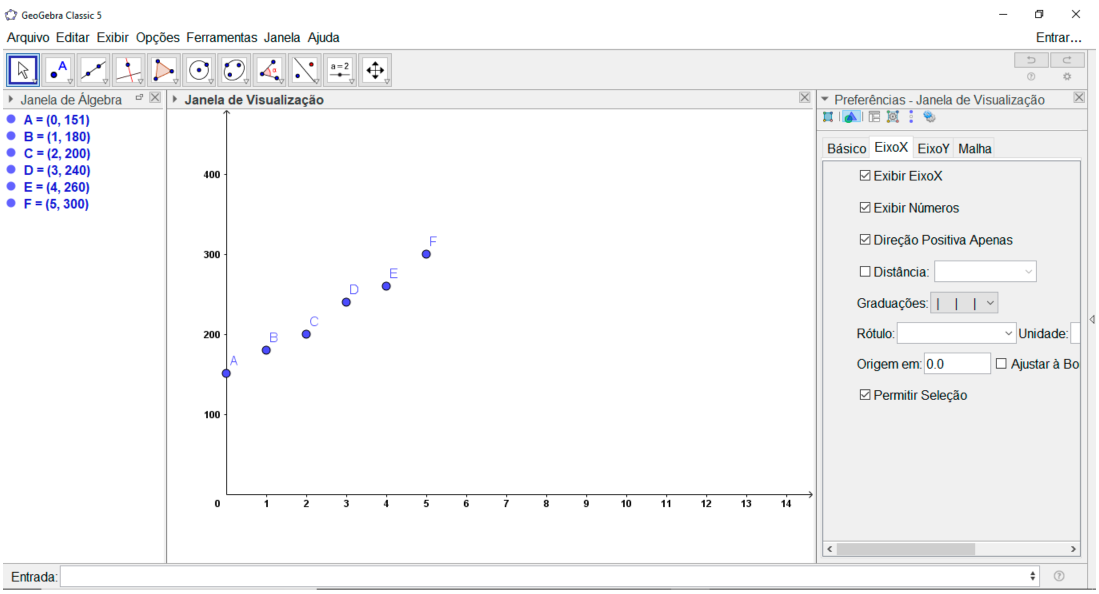
Figura 4 – Formatando a área do gráfico $S(t) \times t$ - janela de visualização



Fonte: Autoria própria

Mas para que o gráfico fique com a mesma aparência apresentada na Figura 4, também é necessário selecionar a *aba* “EixoX”, na *janela* “Preferências - Janela de Visualização”, e assinalar a opção “Direção Positiva Apenas” (Figura 5). O mesmo procedimento deve ser feito na *aba* “EixoX”.

Figura 5 – Área do gráfico $S(t) \times t$ formatado

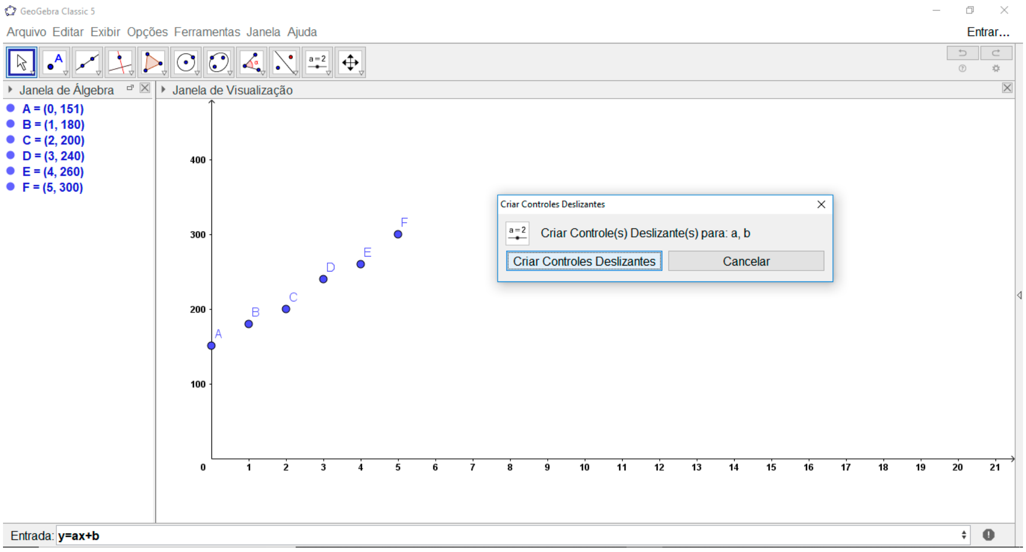


Fonte: Autoria própria.

2º passo: Inserindo uma curva com controles deslizantes

Agora precisamos inserir a curva escolhida para *ajustar* os dados da Tabela 1 que, neste caso, será uma reta. Logo, no campo "Entrada", insira a função $y = ax + b$ e pressione a tecla "enter". Então, aparecerá uma *janela* para criação dos "Controles Deslizantes" (Figura 6).

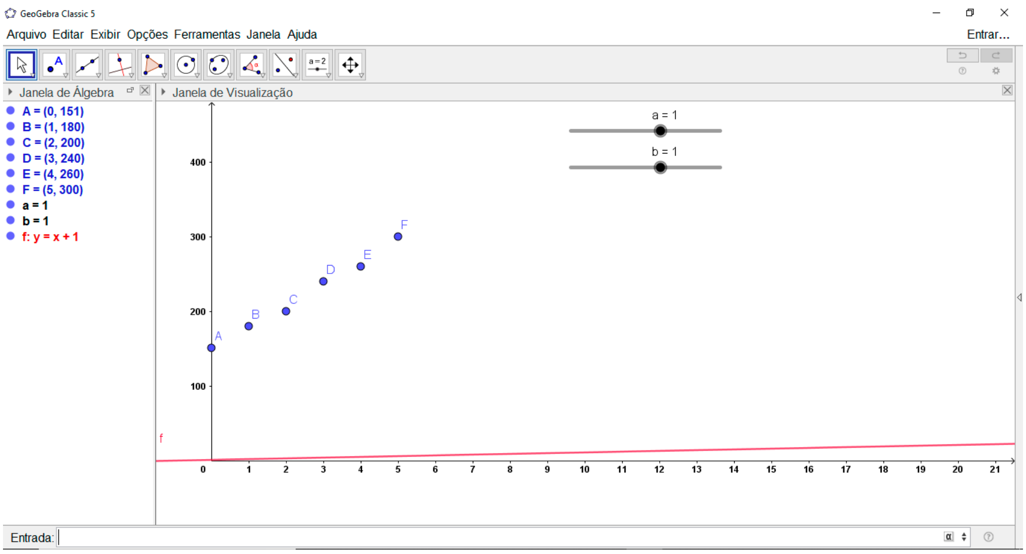
Figura 6 – Inserindo a curva $y = ax + b$: criando os controles deslizantes



Fonte: Autoria própria

Basta selecionar o botão "Criar Controles Deslizantes" e estes serão criados automaticamente (Figura 7). Movendo esses "controles" é possível variar os parâmetros a e b da reta inserida e, por conseguinte, sua inclinação e posicionamento.

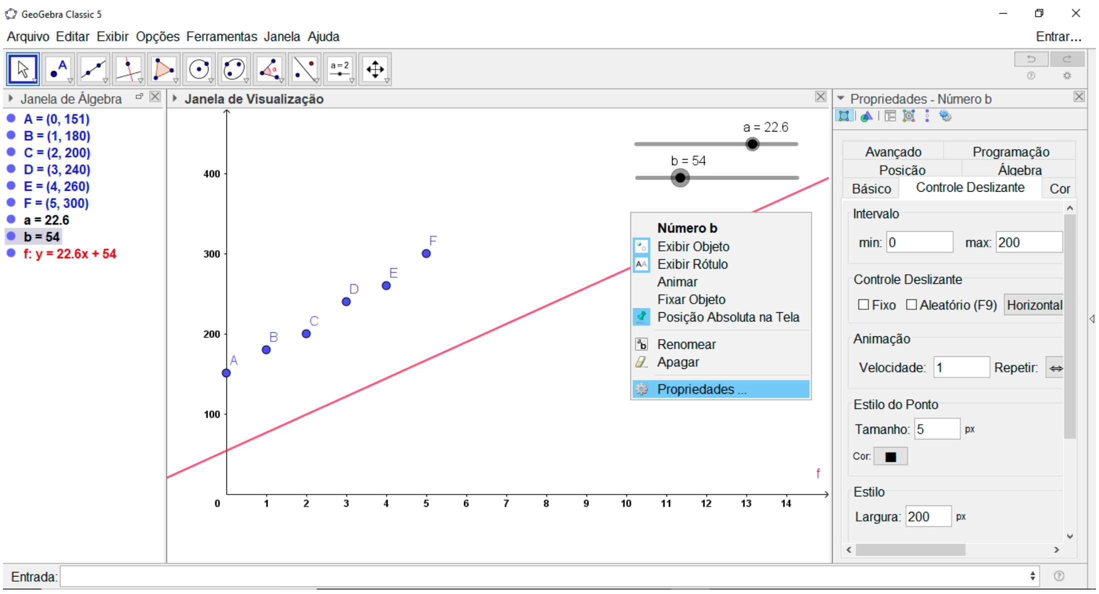
Figura 7 – Inserindo a curva $y = ax + b$: controles deslizantes a e b



Fonte: Autoria própria.

Entretanto, é preciso estar atento ao intervalo de variação de cada "controle". Isto é, como os valores relativos ao eixo das ordenadas são todos maiores que 100, é importante ampliar o intervalo dos "Controles Deslizantes" para que possamos aproximar esta reta dos pontos obtidos da Tabela 1.

Figura 8 – Ampliando o intervalo dos controles deslizantes



Fonte: Autoria própria.

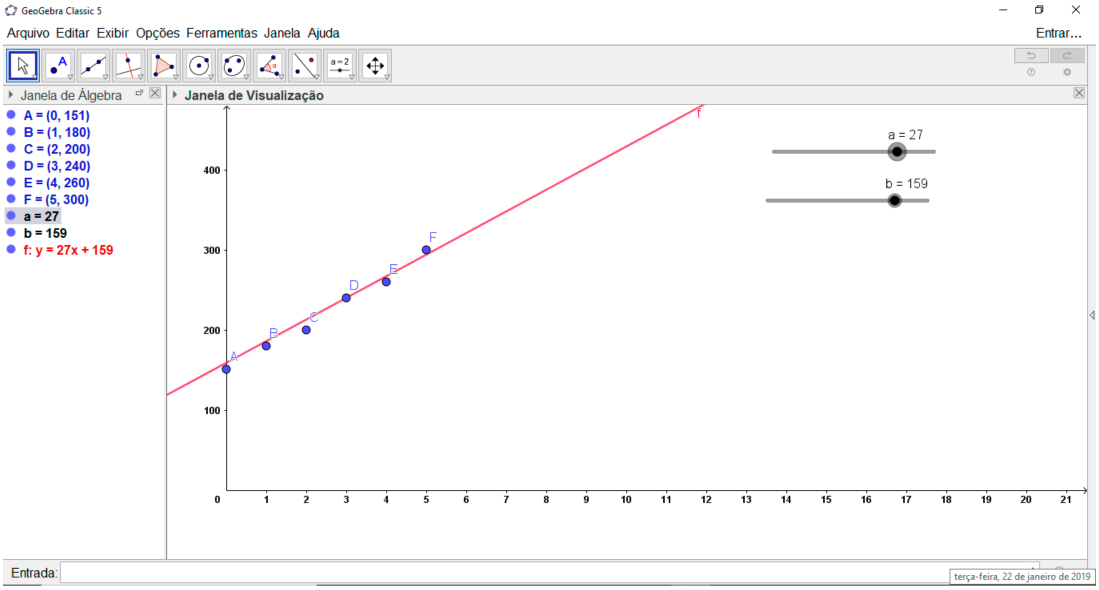
Logo, posicione o *cursor* do *mouse* sobre cada um dos controles (como exemplo, posicionamos sobre o controle **b**), pressione o botão direito do *mouse* e selecione a opção "Propriedades" . Em seguida, na *janela* "Propriedades - Número b", basta alterar o campo "Intervalo" da *aba* "Controle Deslizante" (Figura 8). Neste caso, o intervalo do "controle **b**" foi alterado para [0, 200]. De maneira análoga, é possível alterar o intervalo do outro controle.

3º passo: Ajustando os dados

Agora, basta movimentar os controles, para posicionar a reta de modo que o erro cometido seja o menor possível. Na Figura 9 e na Figura 10 podemos observar duas tentativas diferentes de ajuste.

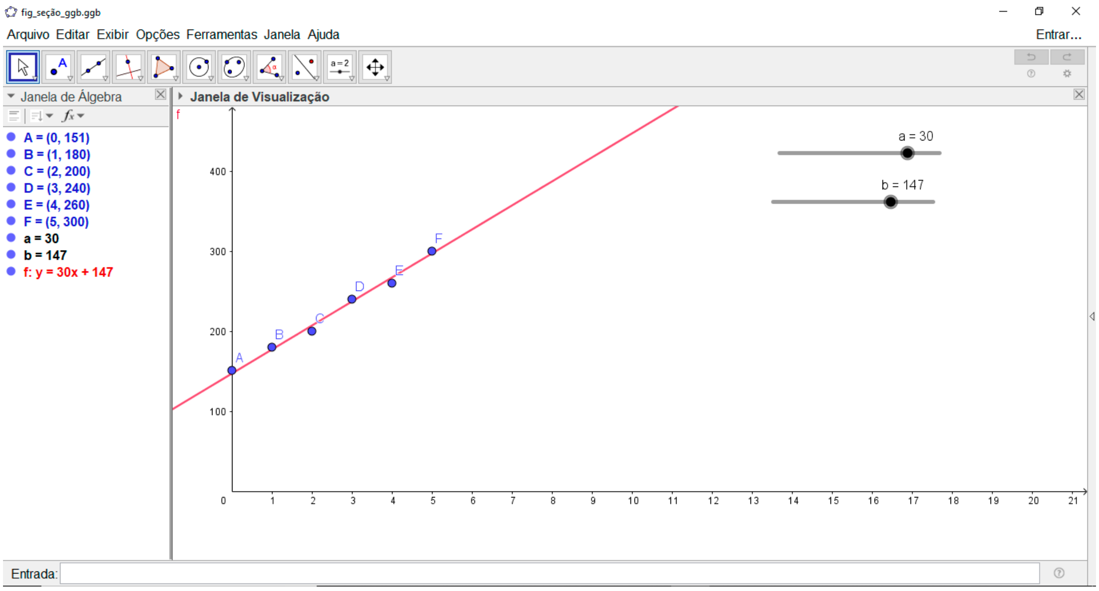
Note que, visualmente, é difícil definir qual é a reta que fornece o melhor *ajuste*. Logo, poderíamos calcular o *erro* correspondente a cada uma delas e definir qual a melhor. Entretanto, há uma infinidade de retas que poderiam ser utilizadas na tentativa de *ajustar* esses pontos. Assim, para verificar qual a reta que melhor *ajusta* esses dados, será preciso recorrer a outras ferramentas como, por exemplo, o *Método dos Mínimos Quadrados*.

Figura 9 – Tentativa de *ajuste* pela curva $y = 27x + 159$



Fonte: Autoria própria

Figura 10 – Tentativa de *ajuste* pela curva $y = 30x + 147$

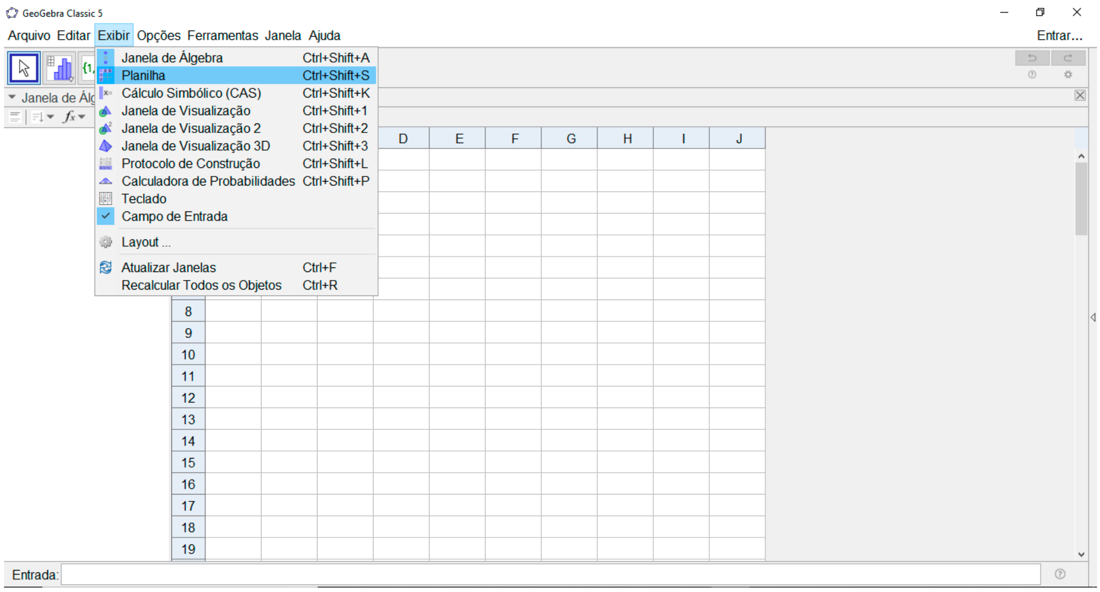


Fonte: Autoria própria.

É importante destacar que para inserir objetos no *Geogebra* é preciso utilizar uma linguagem própria da Matemática. Logo, é uma boa oportunidade para refinar a escrita matemática dos alunos. Além disso, ao manipular os "Controles Deslizantes", os estudantes poderão levantar, e verificar, hipóteses relacionadas a influência que cada parâmetro exerce no comportamento da curva, desenvolvendo seu pensamento reflexivo e sua "intuição matemática". Vale observar, também, que o *Geogebra* dispõe de uma ferramenta que permite ajustar um conjunto de dados observados.

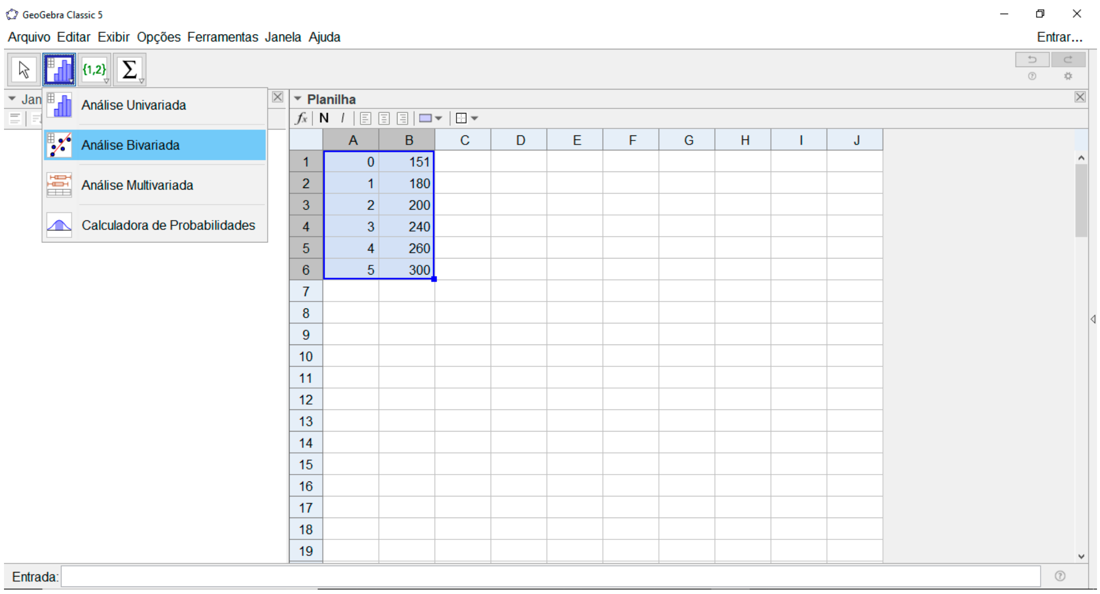
Para tanto, após inicializar o *Geogebra Classic 5*, selecione a *aba* “Exibir” e, nesta, a opção “Planilha” (Figura 11). Em seguida, digite na planilha os dados observados, neste caso os valores (t) e $S(t)$ da Tabela 1. Então, selecione os dados da planilha e depois a opção “Análise Bivariada” no canto superior esquerdo da tela (Figura 12).

Figura 11 – Análise Bivariada: criar tabela



Fonte: Autoria própria

Figura 12 – Análise Bivariada: inserindo dados na planilha

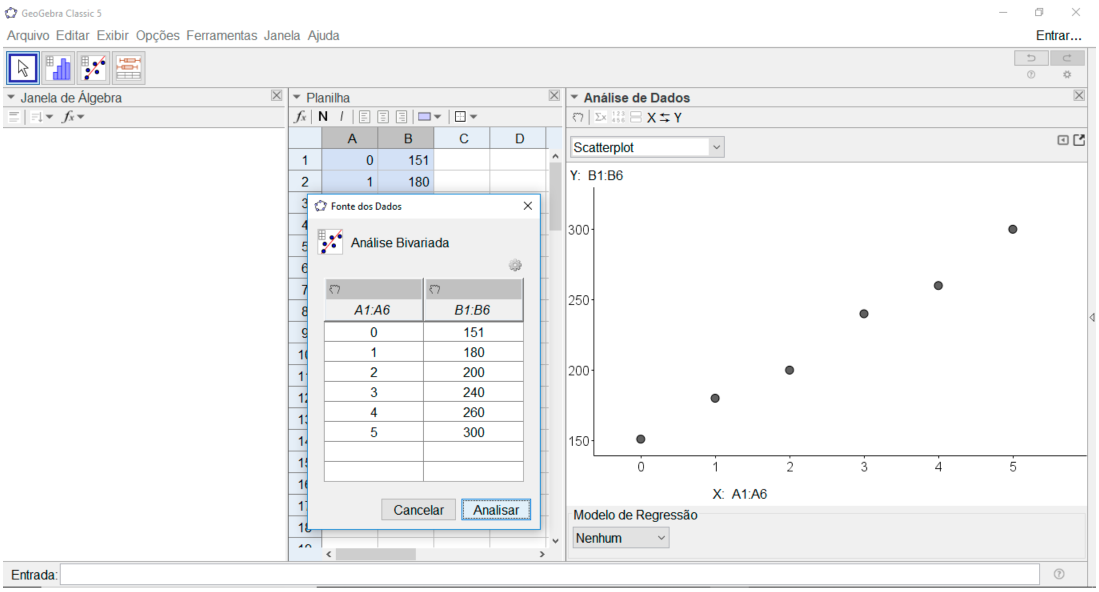


Fonte: Autoria própria.

Depois, selecione a opção “Analisar” da *janela* “Análise Bivariada” e, então, aparecerá a *janela* “Análise de Dados” contendo a representação gráfica dos dados inseridos na planilha

(Figura 13).

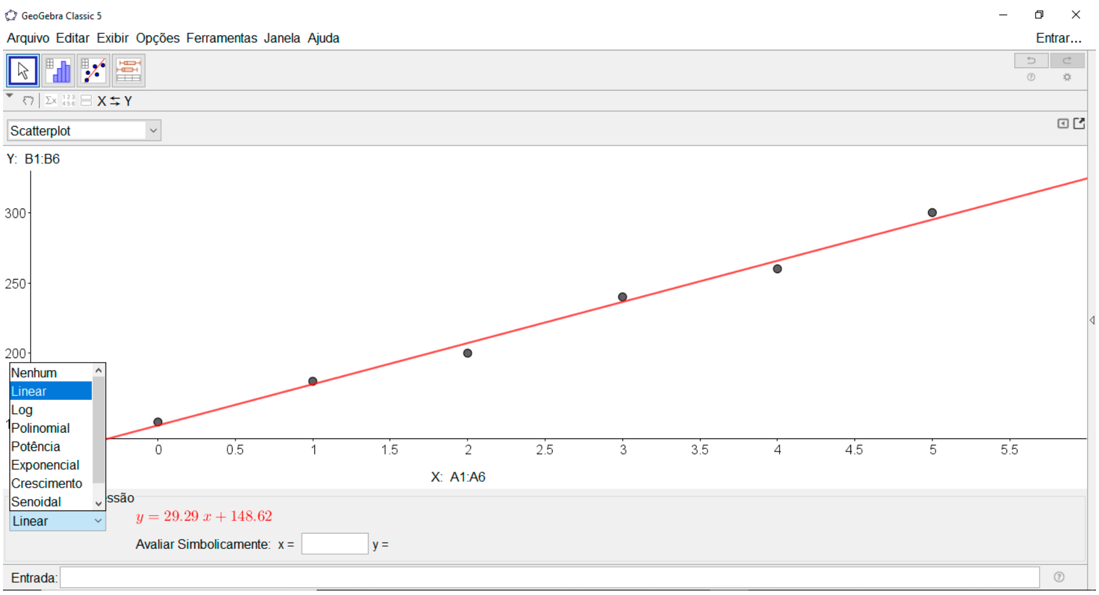
Figura 13 – Análise Bivariada: representação gráfica dos dados



Fonte: Autoria própria.

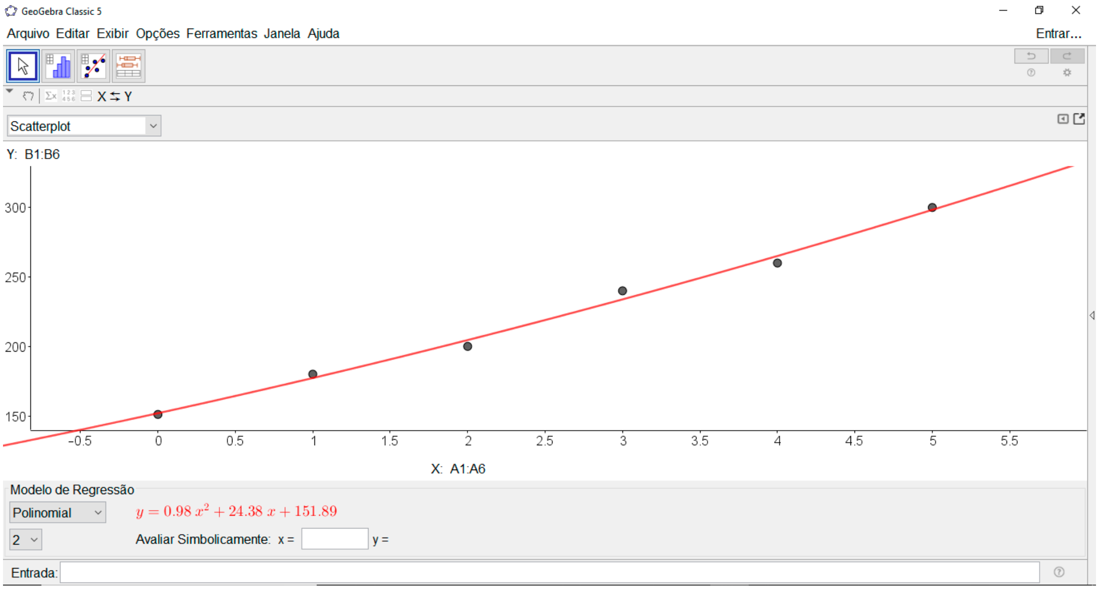
Agora, na *janela* “Análise de Dados”, é possível escolher a curva de ajuste desejada que será representada algebricamente e graficamente. Na Figura 14 e na Figura 15 observam-se ajustes: linear e polinomial (de grau 2), respectivamente.

Figura 14 – Curva de ajuste: ajuste linear



Fonte: Autoria própria.

Figura 15 – Curva de ajuste: ajuste polinomial



Fonte: Autoria própria.

Note que esta ferramente permite a exploração de diversos modelos de regressão, fato que certamente contribui para ampliação da capacidade de representar fatos, ideias, conceitos e, consequentemente, eleva a qualidade da comunicação de conclusões e justificativas apresentadas pelos estudantes. Assim sendo, embora o foco deste trabalho esteja nos modelos linear e polinomial, sugerimos a utilização dessa ferramenta como mais um recurso de análise e validação das hipóteses levantadas durante as atividades de modelagem. No entanto, recomendamos que este recurso seja apresentado aos alunos do Ensino Médio após a abordagem do *Método dos Mínimos Quadrados* proposta nas seções (3.3) e (3.4), uma vez que a ferramenta “Análise Bivariada” fornece justamente a solução pelo Método dos Mínimos Quadrados para a curva escolhida.

3.3 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Conforme vimos na seção anterior, a partir da utilização de recursos visuais, é possível encontrar curvas que fornecem uma “boa aproximação” para um conjunto de dados numéricos, sendo que a ideia de “boa aproximação” esta diretamente relacionada ao *erro* cometido quando comparamos os valores observados e os valores ajustados. Entretanto,

> Ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais “formais”, incluindo a demonstração de algumas proposições (BRASIL, 2018, p.540).

É nessa perspectiva que propomos, também para as turmas do Ensino Médio, a abordagem de um dos método mais utilizados para ajuste de curvas, o *Método dos Mínimos Quadrados*

(BASSANEZI, 2013), que com as devidas adaptações figurará como um recurso importante para que os alunos possam se utilizar de argumentos mais consistentes na construção e comunicação de seus argumentos. Tal ferramenta nos permite determinar os parâmetros (coeficientes) a_j $(j = 0, 1, ..., k)$ de uma função $y(x) = f(x; a_0, a_1, a_2, ..., a_k)$ de modo que a soma dos quadrados dos desvios entre os valores observados e os valores ajustados (aqueles obtidos a partir de $y(x)$), seja a menor possível. Em outras palavras, estamos interessados em minimizar o *erro*

$$E = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2.$$

Para melhor compreensão do método vamos, inicialmente, minimizar o *erro* cometido ao ajustar um conjunto de pontos (x_i, y_i) $(i = 1, 2, ..., n)$ por uma curva do tipo

$$f(x) = ax + b \; ; \; a, b \in \mathbb{R}$$

(ajuste linear) e, posteriormente, generalizar o Método dos Mínimos Quadrados para funções do tipo

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{k-1} x^{k-1} + a_k x^k$$

em que, se $k \neq 0$, dizemos que $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial de *grau* k (ajuste polinomial).

3.3.1 AJUSTE LINEAR

O ajuste de curvas será dito linear se for da forma

$$y(x) = f(x; a, b) = ax + b,$$

representado por uma reta cujos parâmetros a e b deverão ser determinados de modo que o *erro* cometido seja minimizado. Ou seja, dado um conjunto de n dados observados (x_i, y_i) queremos que a soma dos quadrados das diferenças $(f(x_i) - y_i)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ esteja o mais próximo possível do zero.

Para tanto, vamos definir uma função E de duas variáveis, a e b:

$$E(b, a) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2 \;\; = \sum_{i=1}^{n} (b + a x_i - y_i)^2.$$

Assim, segundo (GUIDORIZZI, 2015, p.311), os parâmetros a e b que minimizarão a função $E(b, a)$ deverão, necessariamente, satisfazer as seguintes condições:

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial E}{\partial a} = 0$$

Daí segue que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial b} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2(b + ax_i - y_i) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial E}{\partial a} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2(b + ax_i - y_i)(x_i) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (b + ax_i - y_i) = 0 \\ \\ 2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (b + ax_i - y_i)(x_i) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (b + ax_i - y_i) = 0 \\ \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (bx_i + ax_i^2 - x_i y_i) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b + \sum_{i=1}^{n} ax_i - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \\ \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} bx_i + \sum_{i=1}^{n} ax_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b + \sum_{i=1}^{n} ax_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} bx_i + \sum_{i=1}^{n} ax_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} bn + a\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \\ b\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i + a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

Logo, na notação matricial, chegamos ao sistema

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{pmatrix} , \tag{3.1}$$

que é um sistema possível e determinado (admite uma única solução) visto que

$$\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix} = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \neq 0 . \tag{3.2}$$

De fato, para $n = 2$ temos

$$\begin{aligned} 2(x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + x_2)^2 &= 2x_1^2 + 2x_2^2 - (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) \\ &= x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 > 0 \text{ , pois } x_1 \neq x_2. \end{aligned}$$

Agora, suponha que o resultado seja verdadeiro para n (hipótese de indução - h.i.), vamos mostrar que é válido para $n + 1$.

$$(n+1)(x_1^2 + \cdots + x_n^2 + x_{n+1}^2) - (x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1})^2 =$$

$$n(x_1^2+\cdots+x_n^2+x_{n+1}^2)+(x_1^2+\cdots+x_n^2+x_{n+1}^2)-[(x_1+\cdots+x_n)^2+2(x_1+\cdots+x_n)x_{n+1}+x_{n+1}^2] =$$

$$n(x_1^2+\cdots+x_n^2)+nx_{n+1}^2+x_1^2+\cdots+x_n^2+x_{n+1}^2-(x_1+\cdots+x_n)^2-2(x_1+\cdots+x_n)x_{n+1}-x_{n+1}^2 \overset{h.i.}{=}$$

$$\underbrace{n(x_1^2 + \cdots + x_n^2) - (x_1 + \cdots + x_n)^2}_{=\,A\,>\,0} + x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 2(x_1 + \cdots + x_n)x_{n+1} + nx_{n+1}^2 =$$

$$A + (x_1^2 - 2x_1x_{n+1} + x_{n+1}^2) + \cdots + (x_n^2 - 2x_nx_{n+1} + x_{n+1}^2) =$$

$$A + (x_1 - x_{n+1})^2 + \cdots + (x_n - x_{n+1})^2 > 0$$

Assim, o determinante (3.2) é positivo para todo n e portanto diferente de zero.

Para determinar os parâmetros a e b que minimizam a função $E(b,a)$, devemos resolver o sistema (3.1). Portanto, utilizando a Regra de Cramer, chegamos ao resultado

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \; - \; \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \; - \; \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \quad ; \quad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \; - \; \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \; - \; \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{3.3}$$

que é chamado de solução do sistema (3.1).

Embora tenhamos utilizado critérios do *Cálculo* para chegar ao resultado (3.3), também é possível fazê-lo a partir de operações elementares envolvendo matrizes. Neste caso, há uma abordagem algébrica (e geométrica)[4] do Método dos Mínimos Quadrados que nos fornece a solução $\hat{\mathbf{x}}$ para um determinado sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, tal que

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} \; ,$$

em que

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \quad ; \quad \hat{\mathbf{x}} \;=\; \begin{pmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{b} \;=\; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad .$$

Logo, chegamos a equivalência:

$$\hat{\mathbf{x}} \;=\; \begin{pmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{pmatrix} \;=\; (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i \; - \; \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \; - \; \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \\ \\ \dfrac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \; - \; \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \; - \; \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

4 Tal abordagem pode ser encontrada em (LEON, 2011, p.174-181).

que, no exemplo (3.3), será ilustrada a partir de uma caso particular de ajuste linear para um conjunto de dados (x_i, y_i) $(i = 1, 2, ..., n)$, quando $n = 3$.

Exemplo 3.3. *Obtenha a solução pelo Método dos Mínimos Quadrados ($\hat{\mathbf{x}}$) para o sistema*

$$\left\{\begin{array}{lllll} b & + & ax_1 & = & y_1 \\ b & + & ax_2 & = & y_2 \\ b & + & ax_3 & = & y_3 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

e mostre que

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sum_{i=1}^{3} x_i^2 \sum_{i=1}^{3} y_i - \sum_{i=1}^{3} x_i \sum_{i=1}^{3} x_i y_i}{3\sum_{i=1}^{3} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)^2} \\ \\ \dfrac{3\sum_{i=1}^{3} x_i y_i - \sum_{i=1}^{3} x_i \sum_{i=1}^{3} y_i}{3\sum_{i=1}^{3} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)^2} \end{pmatrix}.$$

Solução:

Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix} \; ; \; \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Daí, segue que

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

logo,

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{pmatrix}$$

$$A^T\boldsymbol{b} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} y_1 + y_2 + y_3 \\ x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \end{pmatrix}.$$

Agora vamos determinar a matriz inversa de A^TA. Ou seja, queremos a matriz

$$(A^TA)^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix},$$

tal que

$$\begin{pmatrix} 3 & x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Efetuando o produto e igualando os membros da igualdade, chegamos aos seguintes resultados:

$$\begin{cases} 3p + (x_1 + x_2 + x_3)q = 1 \\ (x_1 + x_2 + x_3)p + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)q = 0 \end{cases}$$

$$\iff p = \frac{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3)^2} \quad ; \quad q = \frac{-(x_1 + x_2 + x_3)}{3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3)^2} \;;$$

$$\begin{cases} 3r + (x_1 + x_2 + x_3)s = 0 \\ (x_1 + x_2 + x_3)r + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)s = 1 \end{cases}$$

$$\iff r = \frac{-(x_1 + x_2 + x_3)}{3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3)^2} \quad ; \quad s = \frac{3}{3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3)^2} \;.$$

Assim,

$$(A^TA)^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-(x_1+x_2+x_3)^2} & \dfrac{-(x_1+x_2+x_3)}{3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-(x_1+x_2+x_3)^2} \\ \\ \dfrac{-(x_1+x_2+x_3)}{3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-(x_1+x_2+x_3)^2} & \dfrac{3}{3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-(x_1+x_2+x_3)^2} \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$(A^TA)^{-1}A^T\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \frac{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-(x_1+x_2+x_3)^2} & \frac{-(x_1+x_2+x_3)}{3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-(x_1+x_2+x_3)^2} \\ \\ \frac{-(x_1+x_2+x_3)}{3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-(x_1+x_2+x_3)^2} & \frac{3}{3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-(x_1+x_2+x_3)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1+y_2+y_3 \\ x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1+y_2+y_3) \;-\; (x_1+x_2+x_3)(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)}{3(x_1^2+x_2^2+x_3^2) \;-\; (x_1+x_2+x_3)^2} \\ \\ \dfrac{-(x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3)+3(x_1y_1 \;+\; x_2y_2 \;+\; x_3y_3)}{3(x_1^2+x_2^2+x_3^2) \;-\; (x_1+x_2+x_3)^2} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Agora, podemos reescrever a matriz (3.6) conforme segue:

$$(A^TA)^{-1}A^T\boldsymbol{b} \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{3} x_i^2 \sum_{i=1}^{3} y_i \;-\; \sum_{i=1}^{3} x_i \sum_{i=1}^{3} x_iy_i}{\displaystyle 3\sum_{i=1}^{3} x_i^2 \;-\; \left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)^2} \\ \\ \dfrac{\displaystyle 3\sum_{i=1}^{3} x_iy_i \;-\; \sum_{i=1}^{3} x_i \sum_{i=1}^{3} y_i}{\displaystyle 3\sum_{i=1}^{3} x_i^2 \;-\; \left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)^2} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{pmatrix} \;=\; \hat{\boldsymbol{x}},$$

chegando ao resultado pretendido.

3.3.2 AJUSTE POLINOMIAL

É possível ampliar o ajuste de curvas para o caso geral de uma função polinomial do tipo

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{k-1}x^{k-1} + a_k x^k \ ,$$

em que, se $k \neq 0$, dizemos que $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial de *grau* k e, neste caso, diremos que trata-se de um ajuste polinomial. Assim, dado um conjunto de n dados observados (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$, estamos interessados em minimizar a função:

$$E(a_0, a_1, ..., a_{k-1}, a_k) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2 \implies \sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_{k-1} x_i^{k-1} + a_k x_i^k - y_i)^2$$

logo, deveremos ter, necessariamente,

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = \frac{\partial E}{\partial a_1} = \cdots = \frac{\partial E}{\partial a_{k-1}} = \frac{\partial E}{\partial a_k} = 0.$$

Portanto, de maneira análoga ao processo de obtenção do resultado (3.1), chega-se ao sistema

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \ldots & \sum_{i=1}^{n} x_i^k \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \ldots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^k & \sum_{i=1}^{n} x_i^{k+1} & \ldots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^k y_i \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

cuja solução nos fornece os valores dos parâmetros $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ que minimizam a função $E(a_0, a_1, ..., a_k)$. Em outras palavras, nos permite encontrar os parâmetros da curva escolhida para ajustar os dados observados (x_i, y_i) de modo que o *erro* cometido será o menor possível.

Vale destacar que, conforme ilustrado no exemplo (3.3), a solução do sistema (3.7) pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \widehat{a_0} \\ \widehat{a_1} \\ \vdots \\ \widehat{a_k} \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}, \tag{3.8}$$

em que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^k \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^k \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

3.4 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS NO ENSINO MÉDIO

A abordagem do *ajuste de curvas*, a partir da ferramenta conhecida como *Método dos Mínimos Quadrados*, em atividades de modelagem certamente potencializará o desenvolvimento de competências e habilidades relacionadas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Porém, os argumentos utilizados na seção (3.3), embora corretos e acessíveis para professores e/ou graduandos em Matemática, abarca conceitos que extrapolam os conteúdos curriculares e objetivos da etapa de ensino (Ensino Médio) em que se pretende utilizar tal ferramenta, sendo necessárias algumas adaptações.

Propomos, portanto, que a aprendizagem dessa ferramenta ocorra de maneira integrada a conteúdos tradicionalmente trabalhados no Ensino Médio e que, por vezes, carecem de uma abordagem mais contextualizada. Mais especificamente, propomos que o Método dos Mínimos Quadrados seja abordado, em atividades de modelagem matemática, a partir da articulação dos conteúdos: sistemas lineares, funções polinomiais, matrizes e determinantes. Para tanto, podemos recorrer a Leon (2011) que, ainda que utilize argumentos da *Álgebra Linear* cujo nível de aprofundamento não corresponde a etapa de ensino em questão, nos possibilita apresentar uma alternativa para "solucionar" sistemas lineares inconsistentes (sistemas impossíveis), a partir da resolução de uma equação envolvendo matrizes.

Inicialmente, reforçamos que no processo de ajuste de curvas os estudantes deverão escolher, a *priori*, o tipo de curva que acreditam ser a melhor opção de aproximação para o conjunto de dados observados. Assim sendo, reforçamos a importância da utilização de recursos visuais (softwares de matemática, por exemplo) que lhes permitam experienciar diversas possibilidades de curvas, para ajustar os dados disponíveis, ao mesmo tempo que descobrem suas propriedades e possibilidades de aplicações, conforme exemplificado na seção (3.2).

Entretanto, diante da grande diversidade de aproximações possíveis e da dificuldade em definir visualmente qual delas leva a cometer o menor *erro*, naturalmente surge a necessidade de um instrumento que possa definir, de fato, qual é o melhor ajuste. Cria-se assim, um ambiente favorável para que os alunos possam vislumbrar um novo conhecimento matemático, mais formal, que colocará a prova suas conjecturas e contribuirá para que possam reavaliar seus pontos de vista, levantar e testar novas hipóteses, além de melhorar significativamente a capacidade de raciocinar, argumentar e comunicar suas conclusões.

Assim sendo, após a escolha da curva de ajuste, com apoio dos recursos visuais, os estudantes devem ser instigados a expressar as variáveis do problema estudado utilizando a linguagem algébrica. Isto é, relacionar os dados observados (x_i, y_i) a partir de uma função $y = f(x_i)$, cuja representação gráfica é a curva escolhida para realizar o ajuste. Ocorre que, como ilustra o exemplo (3.4), ao trabalharem com dados reais, os alunos provavelmente vão se deparar com um sistema impossível cuja inconsistência, em geral, podemos inferir que ocorrem por erros de medida.

Logo, diante dessa situação, os estudantes serão levados a ressignificar a ideia de solução, reconhecendo que a Matemática também é uma ciência historicamente construída e sujeita a erros, refutações e validações. Nesse sentido, poderão conceber que a melhor solução pode ser aquela que minimize o erro cometido e que tal solução, ainda que regida pela incerteza, mostra-se capaz de contribuir significativamente para a análise e resolução de problemas em diversos campos da vida cotidiana. É nesse contexto que o Método dos Mínimos Quadrados poderá figurar como um importante recurso "para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados" (BRASIL, 2018, p.267).

Exemplo 3.4. *Com o intuito de auxiliar seus clientes na escolha do tamanho de calçados adquiridos pela loja virtual, uma empresa disponibilizou a Tabela (2) que relaciona a numeração do calçado e o comprimento do pé (em cm).*

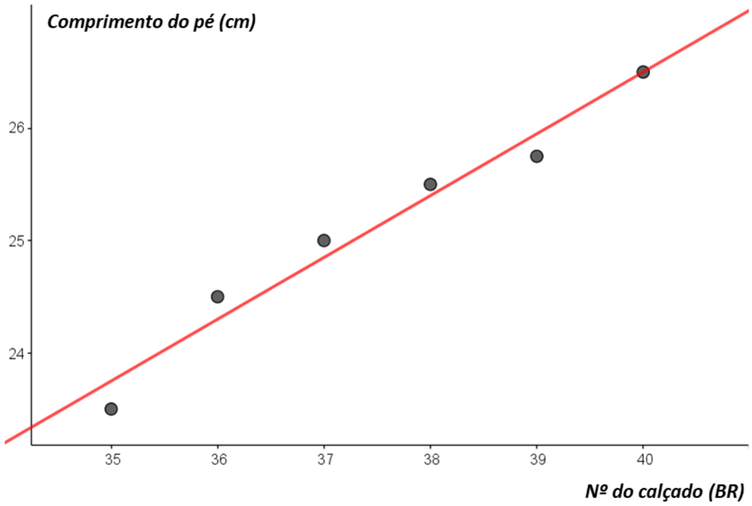
Tabela 2 – Relação entre o número do calçado e o comprimento do pé

Nº do calçado (BR)	Comprimento de pé (cm)
35	23,5
36	24,5
37	25
38	25,5
39	25,75
40	26,5

Fonte: Autoria própria.

Suponha que, interessados em estimar o comprimento do pé para numerações maiores, um grupo de alunos construiu um gráfico com os dados observados na Tabela 2 e estimou que os dados poderiam ser ajustados por uma reta (ajuste linear) (Figura 16). Porém, a utilização desse recurso visual não foi suficiente para que houvesse um consenso sobre qual era a "melhor" reta para ajustar os dados. Sendo assim, a alternativa escolhida foi determinar, algebricamente, os parâmetros a e b de uma reta $y = f(x) = b + ax$ que melhor ajustasse os dados.

Figura 16 – Relação entre o número do calçado e o comprimento do pé



Fonte: Autoria própria.

Isto é, tentaram determinar os parâmetros a e b, tal que

$$\begin{array}{rcl} f(35) & = & 23,5 \\ f(36) & = & 24,5 \\ f(37) & = & 25 \\ f(38) & = & 25,5 \\ f(39) & = & 25,75 \\ f(40) & = & 26,5 \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} b + a\ .\ 35 = & 23,5 \\ b + a\ .\ 36 = & 24,5 \\ b + a\ .\ 37 = & 25 \\ b + a\ .\ 38 = & 25,5 \\ b + a\ .\ 39 = & 25,75 \\ b + a\ .\ 40 = & 26,5 \end{array} \right. \tag{3.9}$$

Entretanto, após realizar a discussão[5] *do sistema obtido (3.9) verificou-se que tratava-se de um sistema impossível (SI). Então, o grupo concluiu que não seria possível determinar os parâmetros de tal reta e, portanto, deveriam obrigatoriamente escolher uma outra curva para o ajuste.*

Evidentemente, a conclusão apresentada no Exemplo 3.4 está equivocada visto que a curva de ajuste não precisa necessariamente conter todos os dados (pontos) observados. Na verdade, estamos interessados naquela que leve a cometer o menor *erro* possível. Logo, esse é um momento oportuno para que o Método dos Mínimos Quadrados seja apresentado como uma alternativa para solucionar o problema proposto, ainda que a abordagem algébrica tenha recaído em um sistema impossível.

Na prática, utilizando a notação de matrizes, pode-se dizer aos estudantes do Ensino Médio que, dado um sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, com m equações e n incógnitas $(m > n)$, como

[5] Os livros didáticos do Ensino Médio geralmente trazem o tema *discussão de sistemas lineares* que se trata de verificar se o sistema é possível e determinado (SPD) sistema possível e indeterminado (SPI) ou impossível (SI). De modo geral, o recurso utilizado para classificar o sistema é o escalonamento de sua matriz estendida.

aquele (3.9) obtido no Exemplo 3.4, em geral, não conseguiremos encontrar uma matriz coluna $\mathbf{x}$ de modo que o produto $A\mathbf{x}$ seja igual à matriz coluna $\mathbf{b}$. Em outras palavras, estaremos diante de um sistema inconsistente (ou sistema impossível).

Mas que, utilizando algumas propriedades e operações elementares envolvendo matrizes, é possível determinar uma matriz coluna $\hat{\mathbf{x}}$ de modo que o valor de $A\hat{\mathbf{x}}$ esteja o mais próximo possível de $\mathbf{b}$ e, neste caso, diremos que $\widehat{\mathbf{x}}$ é a *solução de mínimos quadráticos* para o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Amplia-se, portanto, o olhar dos estudantes em relação a Matemática com a possibilidade de que vislumbrem o conhecimento matemático como um importante, ou até mesmo indispensável, recurso para o enfrentamento de situações e fenômenos cujas informações disponíveis são imprecisas e/ou imprevisíveis.

Após essa abordagem inicial recomendamos que seja proposta a tarefa apresentada no Exemplo 3.5 para que, apoiados nas proposições apresentadas, os estudantes possam encontrar a solução pelo Método dos Mínimos Quadrados para um sistema inconsistente $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, a fim de aplicá-la em atividades de modelagem e/ou em outras situações que julgarem necessário.

Exemplo 3.5. *Considere a seguinte proposição:*

Proposição 3.6. *Se A é uma matriz $m \times n$ de posto n, então*

i) *$\hat{\boldsymbol{x}}$ é uma solução pelo Método dos Mínimos Quadrados para o sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ se, e somente se, $A^T(\boldsymbol{b} - A\hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}$.*

ii) *A^TA é invertível e existe uma matriz coluna $\hat{\boldsymbol{x}}$ que é a única solução da equação $A^TA\boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{b}$.*

Considerando uma matriz A $(m \times n)$, de posto n, mostre que a solução pelo Método dos Mínimos Quadrados para o sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ é da forma

$$\hat{\boldsymbol{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\boldsymbol{b}$$

***Solução**:*

*O item **i)** da Proposição **3.6** nos diz que para que $\hat{\boldsymbol{x}}$ seja a solução pelo Método dos Mínimos Quadrados para o sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ é necessário, e suficiente, que tenhamos*

$$A^T(\boldsymbol{b} - A\hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0} \Longrightarrow A^T\boldsymbol{b} - A^TA\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0} \Longrightarrow A^TA\hat{\boldsymbol{x}} = A^T\boldsymbol{b}.$$

Sendo assim, para determinarmos $\hat{\boldsymbol{x}}$ basta resolver a equação:

$$A^TA\hat{\boldsymbol{x}} = A^T\boldsymbol{b}.$$

*Logo, como A é uma matriz de posto n, o item **ii)** da Proposição **3.6** garante que A^TA é invertível, portanto*

$$
\begin{aligned}
A^T A\hat{\boldsymbol{x}} &= A^T\boldsymbol{b}, \\
(A^T A)^{-1}A^T A\hat{\boldsymbol{x}} &= (A^T A)^{-1}A^T\boldsymbol{b}, \\
I_{(m)}\hat{\boldsymbol{x}} &= (A^T A)^{-1}A^T\boldsymbol{b}, \\
\hat{\boldsymbol{x}} &= (A^T A)^{-1}A^T\boldsymbol{b},
\end{aligned}
$$

como queríamos mostrar.

Note que estamos propondo uma simplificação, utilizando conceitos tradicionalmente trabalhados no Ensino Médio, para apresentar o Método dos Mínimos Quadrados na perspectiva da Álgebra Linear visto que os argumentos formais que justificam a Proposição 3.6 não correspondem a esta etapa de ensino. Não obstante, a sequência apresentada possibilita que os alunos apliquem o conjunto de habilidades desenvolvidas no estudo de matrizes para chegar ao resultado esperado e, posteriormente, aplicá-lo em diferentes contextos. Além disso, permite-lhes reconhecer as condições necessárias e suficientes de uma proposição matemática e "aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético-dedutivo" (BRASIL, 2018, p.272).

Na sequência, recomendamos que seja proposto a realização do Exemplo 3.3 para que sejam apresentados diferentes caminhos para solucionar problemas cujo processo de modelagem leva a formulação de sistemas inconsistentes, pois entendemos que dependendo do número de equações e incógnitas envolvidos, a notação que utiliza os somatórios pode ser mais eficaz. Reforçamos aqui a importância de que os alunos experienciem as diferentes representações matemáticas bem como as possibilidades de conversões entre elas para melhor compreender e atuar em diferentes domínios da realidade. Por fim, sugerimos que seja proposto o problema apresentado no Exemplo 3.4 para que os alunos, observando as condições necessárias, apliquem as duas "soluções gerais" apresentadas, a saber

$$
\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1}A^T\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\displaystyle n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \\[4ex] \dfrac{\displaystyle n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\displaystyle n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \end{pmatrix},
$$

para determinar a solução pelo Método dos Mínimos Quadrados para o sistema (3.9).

As reflexões e recomendações realizadas nesta seção, objetivam a criação de situações favoráveis para que os alunos compreendam as ideias associadas ao Método dos Mínimos Quadrados, ao mesmo tempo que desenvolvem sua autonomia e pensamento reflexivo. Nesse sentido, entendemos que essa ferramenta não deve ser apresentada como uma “fórmula mágica” que lhes exigirá apenas algumas habilidades operatórias. Pelo contrário, queremos fomentar a utilização processos mais elaborados de reflexão e abstração, “que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos” (BRASIL, 2018, p.529), valendo-se de representações e procedimentos cada vez mais sofisticados.

4 PROPOSTA DE ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo apresentaremos um exemplo de atividade de modelagem numa perspectiva interdisciplinar em que o *ajuste de curvas* será naturalmente contemplado durante o estudo da situação investigada, objetivando o desenvolvimento da capacidade de interpretar e analisar informações a partir de diferentes linguagens, bem como utilizá-las para fazer representações e simulações na vida cotidiana (D'AMBROSIO, 2002) e, portanto, favorecer o reconhecimento da Matemática como um importante instrumento de raciocínio, representação, comunicação e argumentação. Nesse sentido, a atividade de modelagem emerge da problematização de situações reais cuja busca por soluções não deverá ser o fim, mas um meio favorável para que se possa vislumbrar a aplicabilidade dos conhecimentos adquiridos antes e durante o desenvolvimento das atividades de modelagem.

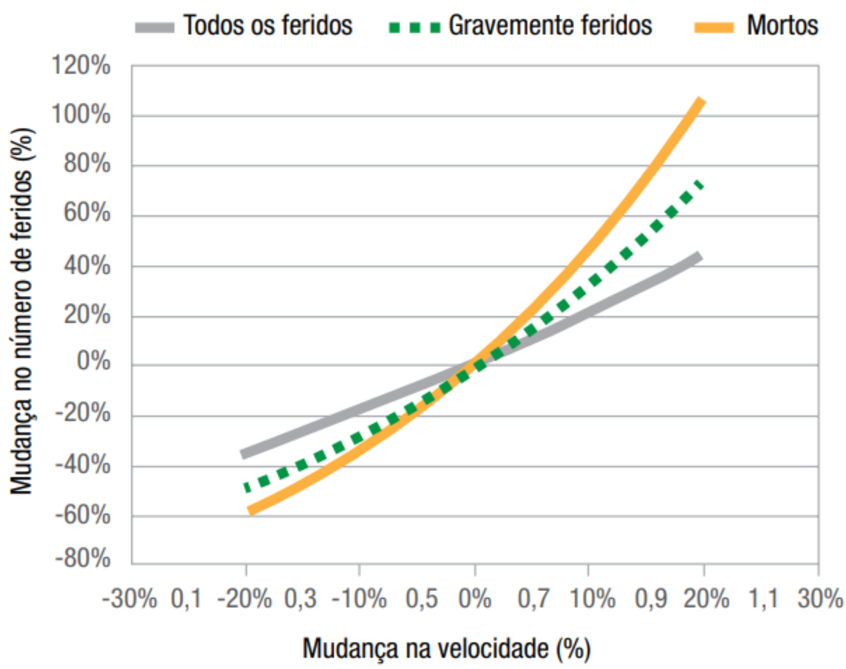
Em relação às características dos problemas propostos, entende-se que devem permitir abordagens diferenciadas para alunos de uma mesma turma, visando favorecer a discussão e a troca de ideias entre os alunos que, por sua vez, serão incentivados a formular conjecturas, testar hipóteses, explicitar decisões e desenvolver seu senso crítico (CARREIRA, 2017). Assim, espera-se que os estudantes possam identificar e discutir as variáveis envolvidas nos problemas, estabelecer estratégias para a resolução dos mesmos, desenvolver e/ou analisar modelos matemáticos que sejam relevantes para elucidar os questionamentos que serão levantados, verificar a validade desses modelos no contexto do problema, apresentar uma solução (que não será a única) e, finalmente, estabelecer uma leitura crítica da utilização de modelos matemáticos na tomada de decisões.

Ressalta-se aqui que, com vistas à aplicabilidade dos exemplos propostos, serão formuladas questões norteadoras que suscitarão a análise de dados numéricos pesquisados ou produzidos experimentalmente. Mais especificamente, serão utilizados dados estatísticos elaborados por organizações ligadas ao estudo do trânsito. Além disso, como forma de exemplificar os assuntos discutidos no Capítulo 3, no desenvolvimento da atividade serão aplicadas diferentes estratégias, aqui denominadas: ***"recursos visuais"***, ***"abordagem algébrica"*** e ***Método dos Mínimos Quadrados***.

4.1 GESTÃO DA VELOCIDADE E POSSÍVEIS IMPLICAÇÕES NA SEGURANÇA DO PEDESTRE

Os acidentes de trânsito representam um grave problema de saúde pública no Brasil além de ter um impacto significativo na economia do país. Estima-se que, a cada ano, o número de mortos e feridos graves ultrapassa 150 mil pessoas e, além disso, geram gastos públicos de aproximadamente R$ 28 bilhões. Ressalta-se aqui que 38% das vítimas fatais de acidentes de trânsito são pedestres (na maioria dos casos vítimas de atropelamento) (BARROS; BACCHIERI, 2011). Diante desse cenário é importante buscar meios eficazes para tornar as relações entre os diferentes sujeitos do trânsito (ciclista, motorista, pedestre,...) mais saudáveis e seguras. Evidentemente não há uma única causa para as elevadas taxas de mortalidade no transito, mas certamente, a gestão dos limites de velocidade das vias é uma importante variável desse complexo contexto, como ilustra o gráfico da Figura 17.

Figura 17 – Relação Mudança na Velocidade × Mudança no Número de Feridos



Fonte: (OPAS, 2014b).

Mas até que ponto a velocidade interfere na ocorrência de vítimas fatais em casos de atropelamento?

Pensemos inicialmente na prevenção de uma colisão no trânsito, mais especificamente, entre um carro e um pedestre. Ou seja, na não ocorrência das lesões. Para tanto, consideremos a hipótese de que a probabilidade de se evitar uma colisão no trânsito está diretamente ligada a chamada distância de frenagem, ou seja, a menor distância que um veículo percorre para conseguir parar completamente antes de atingir um obstáculo, sendo que esta é composta de dois momentos distintos: identificar o obstáculo e reagir (no caso, acionando os freios) e parar totalmente o veículo. Logo, devemos levantar dados acerca desses dois momentos.

A Tabela 3 relaciona a velocidade do veículo no instante anterior à percepção do obstáculo (*velocidade inicial*), e a distância percorrida até que ele pare totalmente (distância de parada).

Tabela 3 – Velocidade inicial $\times$ Distância de parada

Velocidade (km/h)	Comprimento (m)
32	6
48	14
64	25
80	37
96	55
112	75

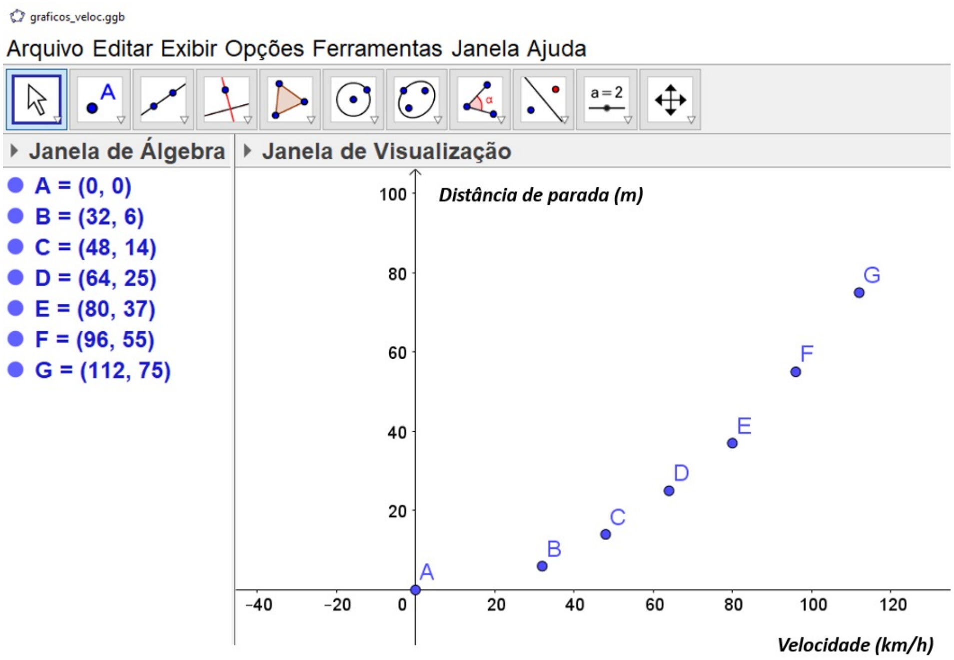
Fonte: Autoria própria.

Logo, podemos *ajustar* os dados observados na Tabela 3 a fim de estabelecer uma relação funcional entre as variáveis *velocidade inicial* e *distância de parada* que nos permitirá estimar a distância mínima necessária para que ocorra a parada total do veículo em função de sua velocidade no momento do acionamento dos freios. Para tanto, utilizaremos três estratégias diferentes: ***recursos visuais***, ***abordagem algébrica*** e **Método dos Mínimos Quadrados**.

4.1.1 ESTRATÉGIA 1: RECURSOS VISUAIS

A estratégia que aqui chamaremos de *recursos visuais* consiste em buscar visualmente uma curva que *ajuste* um conjunto de dados observados. Assim, inicialmente, vamos representar graficamente (Figura 18) os dados expressos na Tabela 3 para que, em seguida, seja possível conjecturar qual será o "tipo" de curva escolhida para ajustar os dados.

Figura 18 – Velocidade (km/h) $\times$ Distância de parada (m)



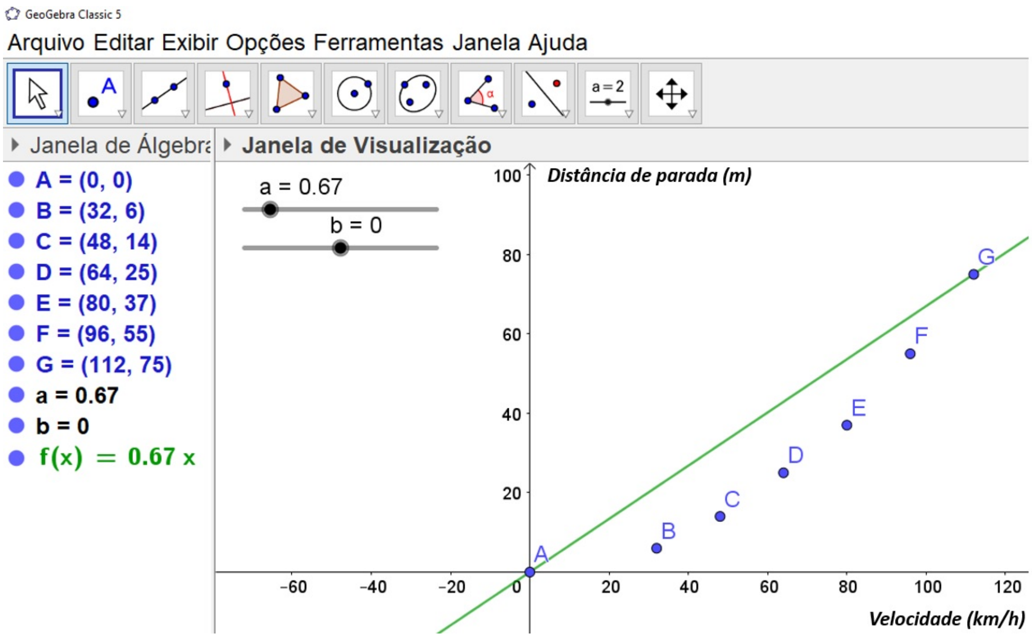
Fonte: Autoria própria.

Conforme visto no Capítulo 3, podemos utilizar o software de matemática dinâmica *Geogebra* para inserir diferentes curvas na área do gráfico e com a ferramenta "Controles Deslizantes" variar seus parâmetros de modo que a curva seja aproximada dos pontos plotados. Antes, porém, cabe observar que embora a Tabela 3 não indique a *distância de parada* do veículo para a velocidade $0\ km/h$, evidentemente, para essa velocidade devemos ter a distância de parada igual a $0\ m$ visto que o veículo já estará totalmente parado. Essa observação, ainda que óbvia, é muito importante e deve ser discutida, pois esperamos que a relação entre essas variáveis possa representar uma situação do mundo físico e, portanto, deve atender as suas condições.

Não obstante, a curva que melhor *ajusta* este conjunto de dados observados não passará, necessariamente, pelo ponto $(0, 0)$, daí a importância de se discutir o conceito de *erro*. Porém, buscaremos, a princípio, uma curva que passe pelo ponto $(0, 0)$ e mais se aproxime dos demais pontos.

Inicialmente, faremos tentativas de *ajuste* a partir de uma reta (Figura 19 e Figura 20) e, na sequência, utilizaremos uma parábola (Figura 21 e Figura 22).

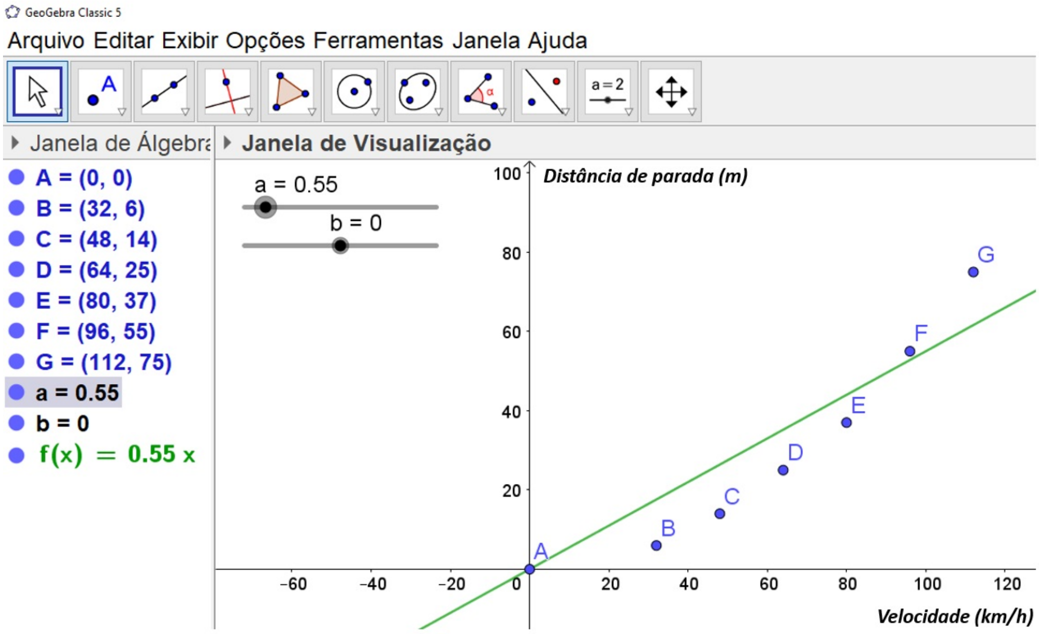
Figura 19 – Tentativa de *ajuste* pela função $f(x) = 0,67x$



Fonte: Autoria própria.

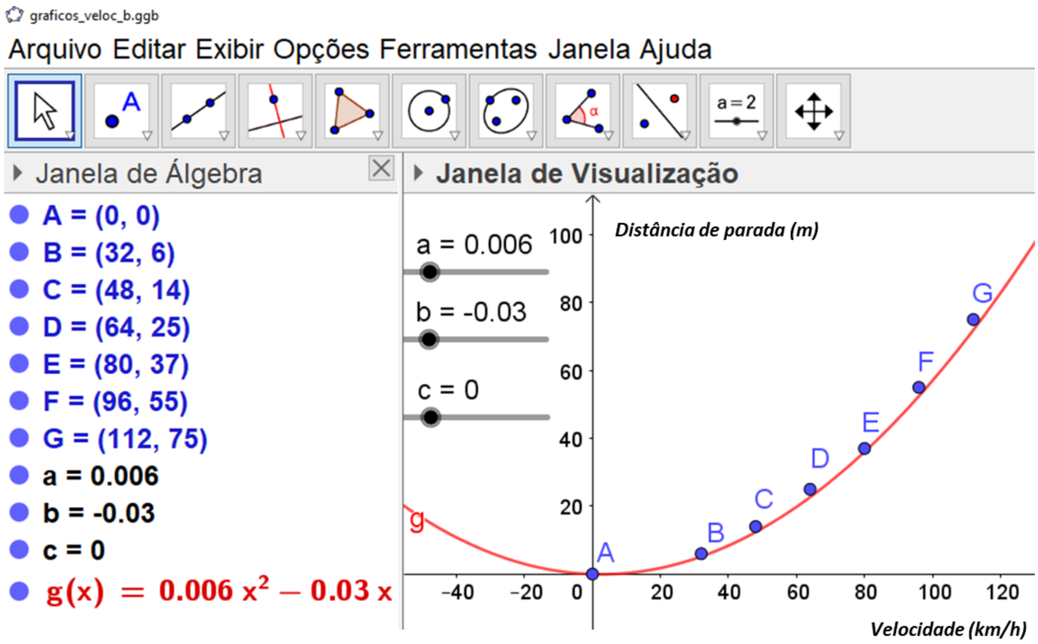
Comparando visualmente as tentativas de *ajuste* realizadas, é possível verificar que a parábola é uma curva mais adequada do que a reta para ajustar os dados observados. Entretanto, é difícil dizer qual parábola fornece a melhor aproximação. Assim, para que tenhamos maior certeza na escolha, se faz necessário a utilização de outras formas de representação e manipulação dos dados disponíveis que serão abordadas nas próximas estratégias. Vale lembrar que dentre os objetivos da área de Matemática para o Ensino Médio, estão o desenvolvimento das capacidades de investigação e formulação de justificativas consistentes que não se restrinjam ao apoio de experiências empíricas mas também utilize-se de conceitos e modelos abstratos, próprios da Matemática.

Figura 20 – Tentativa de *ajuste* pela função $f(x) = 0,55x$



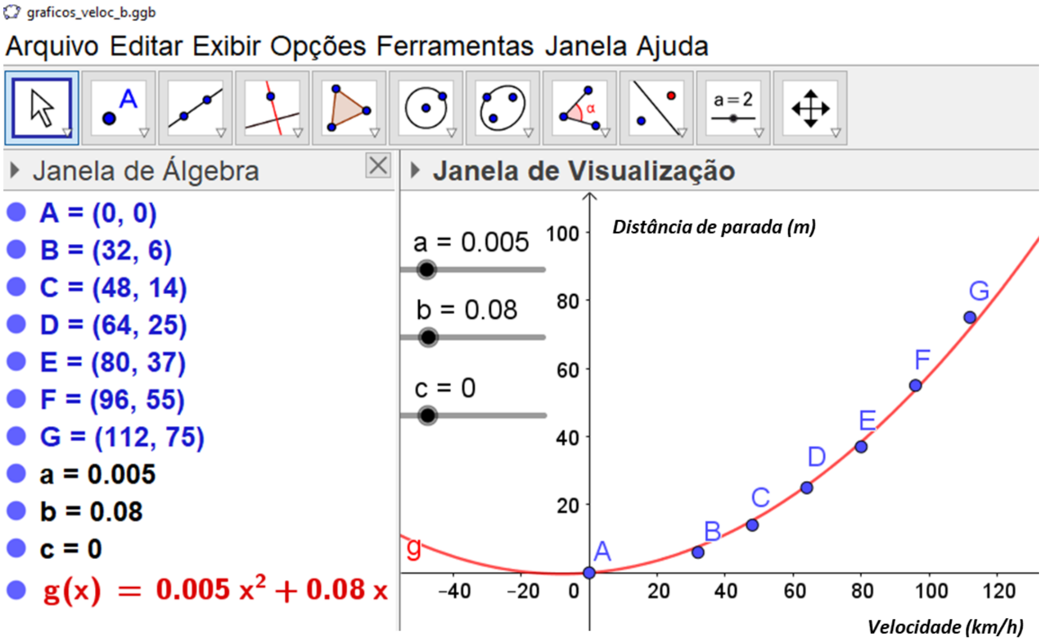
Fonte: Autoria própria.

Figura 21 – Tentativa de *ajuste* pela função $g(x) = 0,006x^2 - 0,03x$



Fonte: Autoria própria.

Figura 22 – Tentativa de *ajuste* pela função $g(x) = 0,005x^2 + 0,008x$



Fonte: Autoria própria.

4.1.2 ESTRATÉGIA 2: ABORDAGEM ALGÉBRICA

A segunda estratégia, aqui denominada *abordagem algébrica*, consiste em determinar os coeficientes de funções polinomiais, tradicionalmente estudadas no Ensino Médio, a partir da formulação e resolução de sistemas lineares. Entretanto, como estamos interessados em buscar meios para reforçar, ou refutar, as hipóteses levantadas com apoio dos recursos visuais, focaremos na função polinomial do segundo grau, já que a primeira estratégia (*recursos visuais*) nos indicou que esta curva nos possibilita uma "boa aproximação". Logo, queremos determinar os parâmetros a, b e c de uma função do tipo

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

em que x é a *velocidade inicial* do veículo (em km/h) e $g(x)$ a *distância de parada* (em metros).

Cabe, inicialmente, retomar a observação relacionada ao ponto $(0, 0)$, isto é, que embora a Tabela 3 não indique a *distância de parada* do veículo para a velocidade $0\ km/h$, para essa velocidade podemos considerar que a distância de parada igual a $0\ m$ visto que o veículo já estará totalmente parado. Então, $g(0) = 0$ e, portanto,

$$g(0) \quad = \quad a\ .\ 0^2 \ + \ b\ .\ 0^2 \ + \ c \quad = \quad 0 \quad \Longrightarrow \quad c = 0$$

logo, é possível reescrever a função $g(x)$ como

$$g(x) \quad = \quad ax^2 + bx \quad = \quad x(ax+b).$$

Recorrendo a Tabela 3, vamos considerar que a curva procurada passa pelos pontos $(0,0)$, $(32,6)$, $(48,14)$. Assim, temos que

$$\begin{array}{rcl} g(32) & = & 6 \\ g(48) & = & 14 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 32(32a+b) & = & 6 \\ 48(48a+b) & = & 14 \end{cases} .$$

Resolvendo o sistema, chegamos aos coeficientes

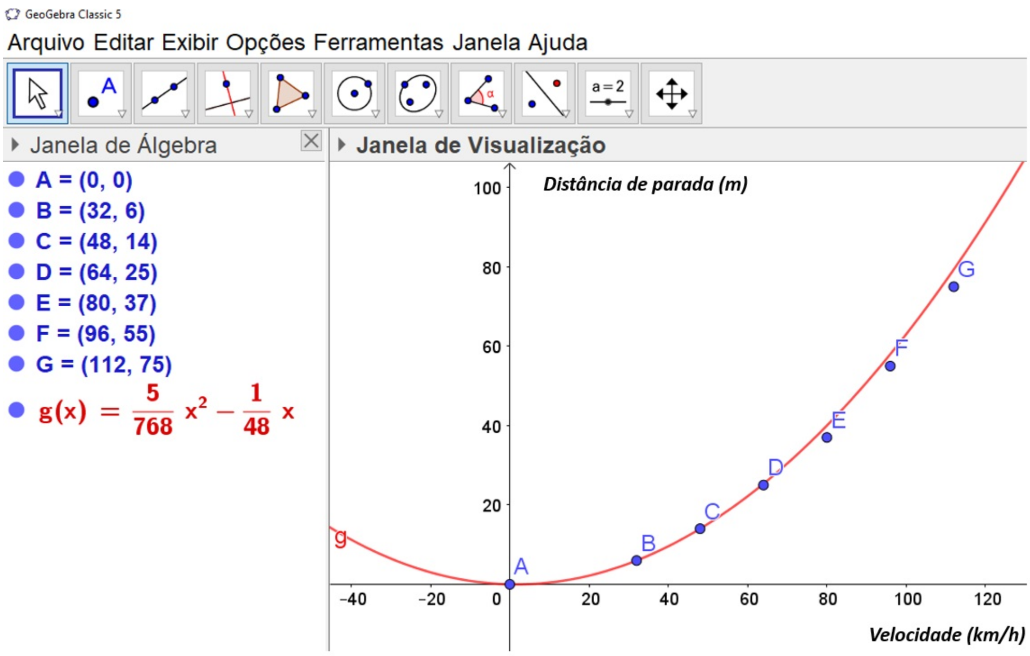
$$a = \frac{5}{768} \quad ; \quad b = -\frac{1}{48}$$

e, por conseguinte, na função

$$g(x) = \frac{5}{768}x^2 \; - \; \frac{1}{48}x$$

cujo gráfico (Figura 23), aparentemente, nos indica que esta função nos fornece uma "boa aproximação" para os dados observados na Tabela 3.

Figura 23 – Tentativa de *ajuste* pela função $g(x) = \frac{5}{768}x^2 - \frac{1}{48}x$



Fonte: Autoria própria.

Estando a validação do modelo sujeita a verificação deste com a realidade, ou seja, se "os dados experimentais não estão 'muito longe' daqueles oferecidos pelo modelo" (BASSANEZI, 2013, p.56), propomos a construção de uma tabela em que seja possível comparar esses valores e verificar o *desvio* [1] dos dados ajustados em relação aos observados.

Tabela 4 – Desvio: diferença entre dados ajustados e dados observados $|g(x) - y|$

Velocidade (km/h)	Distância de parada ajustada (m)	Distância de parada observada (m)	Desvio **|g(x) - y|**
0	0	0	0
32	6	6	0
48	14	14	0
64	25,33	25	0,33
80	40	37	3
96	58	55	3
112	79,33	75	4,33

Fonte: Autoria própria.

Analisando a Tabela 4, notamos que quanto maior a velocidade considerada, maior é o *desvio*. Logo, podemos dizer que, embora o modelo nos forneça "boas aproximações" no intervalo de 0 km/h a 64 km/h, possivelmente teríamos problemas para estimar as distâncias de parada para velocidades superiores a 120 km/h, por exemplo. Ressalta-se ainda, que para determinar $g(x)$ escolhemos três dos dados observados (Tabela 3): $g(0) = 0$, $g(32) = 6$ e $g(48) = 14$, implicando num desvio nulo para esses dados. Além disso, note que somente com esta estratégia poderíamos determinar 15 parábolas[2] distintas visto que, considerando $g(0) = 0$, seria suficiente uma combinação de outros dois pontos, dentre os seis disponíveis, para determinar cada uma delas.

Logo, seria necessário comparar os *desvios* e, por conseguinte, o *erro* cometido na escolha de cada uma das parábolas para definir aquela que fornece a melhor aproximação. Mas esta não seria, necessariamente, aquela que melhor *ajusta* os pontos. Portanto, precisamos de uma ferramenta mais adequada para *ajustar* os dados observados e, assim sendo, podemos recorrer a um dos métodos mais utilizados para o *ajuste de curvas*, o Método dos Mínimos Quadrados (BASSANEZI, 2013).

4.1.3 ESTRATÉGIA 3: MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Nas estratégias 1 e 2, apresentadas anteriormente, foi possível conjecturar que uma parábola possibilitaria uma "boa aproximação" para os dados observados na Tabela 3. Entretanto,

[1] Chamaremos de desvio a diferença entre os valores aproximados pelo modelo e os valores observados que foram utilizados na elaboração do mesmo.

[2] O gráfico de uma função polinomial do segundo grau é uma parábola.

não houve argumentos consistentes para determinar quais valores deveriam ser atribuídos aos coeficientes a, b e c da função $g(x)$ de modo que fosse possível minimizar o *erro* cometido.

Portanto, queremos encontrar a curva que nos permita cometer o menor erro possível ao *ajustar* os dados observados. Considerando porém, que o objetivo dessa sequência de estratégias é possibilitar que o estudante experiencie diferentes recursos (mais, ou menos, formais) na tentativa de verificar suas hipóteses em relação ao problema estudado, estamos interessados em determinar a função polinomial do segundo grau que melhor "ajusta" o conjunto de dados da Tabela 3. Assim sendo, recorreremos ao Método dos Mínimos Quadrados que consiste em determinar os parâmetros (coeficientes) a_j $(j = 0, 1, ..., k)$ para $k = 2$, de uma função polinomial $y(x) = f(x; a_0, a_1, a_2, ..., a_k)$ de modo que a soma dos quadrados dos desvios entre os valores observados (no caso desse problema, os valores contidos na Tabela 3) e os valores ajustados (aqueles obtidos a partir de $y = f(x)$, seja a menor possível.

Logo, buscamos, a princípio, os valores dos parâmetros a_0, a_1, e a_2 de uma função

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

tal que

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & 0 \\ f(32) & = & 6 \\ f(48) & = & 14 \\ f(64) & = & 25 \\ f(80) & = & 37 \\ f(96) & = & 55 \\ f(112) & = & 75 \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rr} a_0 + a_1 \,.\, 0 + a_2 \,.\, 0^2 = & 0 \\ a_0 + a_1 \,.\, 32 + a_2 \,.\, 32^2 = & 6 \\ a_0 + a_1 \,.\, 48 + a_2 \,.\, 48^2 = & 14 \\ a_0 + a_1 \,.\, 64 + a_2 \,.\, 64^2 = & 25 \\ a_0 + a_1 \,.\, 80 + a_2 \,.\, 80^2 = & 37 \\ a_0 + a_1 \,.\, 96 + a_2 \,.\, 96^2 = & 55 \\ a_0 + a_1 \,.\, 112 + a_2 \,.\, 112^2 = & 75 \end{array} \right. .$$

Ou seja, na notação de matrizes, queremos encontrar uma matriz coluna $\mathbf{x}$, tal que

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 32 & 1024 \\ 1 & 48 & 2304 \\ 1 & 64 & 4096 \\ 1 & 80 & 6400 \\ 1 & 96 & 9216 \\ 1 & 112 & 12544 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 14 \\ 25 \\ 37 \\ 55 \\ 75 \end{pmatrix} . \tag{4.1}$$

Escrevendo a matriz ampliada desse sistema, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 32 & 1024 & 6 \\ 1 & 48 & 2304 & 14 \\ 1 & 64 & 4096 & 25 \\ 1 & 80 & 6400 & 37 \\ 1 & 96 & 9216 & 55 \\ 1 & 112 & 12544 & 75 \end{pmatrix}$$

cuja forma escalonada, segundo o Método de Gauss-Jordan, é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que a matriz formada pelas 3 primeiras colunas equivale ao escalonamento da matriz A. Observe também, que a matriz A tem posto 3 e que a partir da matriz ampliada, chegamos ao sistema equivalente

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_0\,.\,1 + a_1\,.\,0 + a_2\,.\,0^2 & = & 0 \\ a_0\,.\,0 + a_1\,.\,1 + a_2\,.\,0^2 & = & 0 \\ a_0\,.\,0 + a_1\,.\,0 + a_2\,.\,1^2 & = & 0 \\ a_0\,.\,0 + a_1\,.\,0 + a_2\,.\,0^2 & = & 1 \\ a_0\,.\,0 + a_1\,.\,0 + a_2\,.\,0^2 & = & 0 \\ a_0\,.\,0 + a_1\,.\,0 + a_2\,.\,0^2 & = & 0 \\ a_0\,.\,0 + a_1\,.\,0 + a_2\,.\,0^2 & = & 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a_0 & = & 0 \\ a_1 & = & 0 \\ a_2 & = & 0 \\ 0 & = & 1 \\ 0 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

que é um sistema impossível, pois não existem números reais a_0, a_1, a_2, tais que

$$a_0\,.\,0 + a_1\,.\,0 + a_2\,.\,0^2 \;=\; 1.$$

Nesse caso, embora não possamos encontrar uma parábola que contenha todos os dados observados na Tabela 3, conforme vimos na Seção 3.3, é possível determinar uma matriz coluna $\hat{\mathbf{x}}$ cujos valores de $a_0,\ a_1,\ a_2$, minimizarão o *erro*

$$E = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$$

cometido na escolha desse tipo de curva para obter os dados ajustados $(x_i, f(x_i))$ a partir dos dados observados (x_i, y_i). Trata-se, portanto, de determinar a solução pelo Método dos Mínimos Quadrados

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$$

para o sistema (4.1). Logo, sejam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 32 & 1024 \\ 1 & 48 & 2304 \\ 1 & 64 & 4096 \\ 1 & 80 & 6400 \\ 1 & 96 & 9216 \\ 1 & 112 & 12544 \end{pmatrix} \ ; \ \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \ ; \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 14 \\ 25 \\ 37 \\ 55 \\ 75 \end{pmatrix}$$

então,

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 32 & 48 & 64 & 80 & 96 & 112 \\ 0 & 1024 & 2304 & 4096 & 6400 & 9216 & 12544 \end{pmatrix}.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 32 & 48 & 64 & 80 & 96 & 112 \\ 0 & 1024 & 2304 & 4096 & 6400 & 9216 & 12544 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 32 & 1024 \\ 1 & 48 & 2304 \\ 1 & 64 & 4096 \\ 1 & 80 & 6400 \\ 1 & 96 & 9216 \\ 1 & 112 & 12544 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 432 & 35584 \\ 432 & 35584 & 3207168 \\ 35584 & 3207168 & 306380800 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$A^T\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 32 & 48 & 64 & 80 & 96 & 112 \\ 0 & 1024 & 2304 & 4096 & 6400 & 9216 & 12544 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 14 \\ 25 \\ 37 \\ 55 \\ 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 212 \\ 19104 \\ 1825280 \end{pmatrix};$$

$$(A^TA)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{328}{363} & \frac{-207}{7744} & \frac{65}{371712} \\ \frac{-207}{7744} & \frac{1117}{867328} & \frac{-9}{867328} \\ \frac{65}{371712} & \frac{-9}{867328} & \frac{61}{666107904} \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{328}{363} & \frac{-207}{7744} & \frac{65}{371712} \\ \frac{-207}{7744} & \frac{1117}{867328} & \frac{-9}{867328} \\ \frac{65}{371712} & \frac{-9}{867328} & \frac{61}{666107904} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 212 \\ 19104 \\ 1825280 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{10}{121} \\ -\frac{15}{3872} \\ \frac{371}{61952} \end{pmatrix}.$$

Assim, chegamos a função polinomial do segundo grau

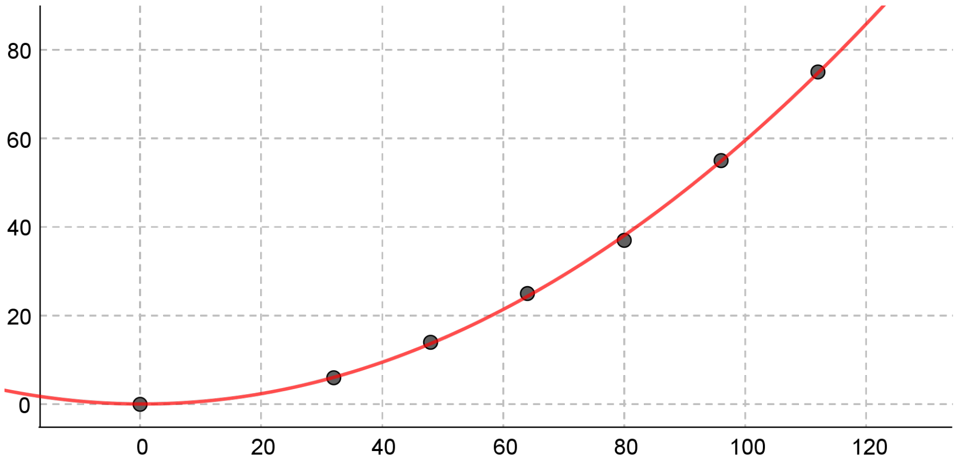
$$f(x) = \frac{10}{121} - \frac{15}{3872}x + \frac{371}{61952}x^2 \tag{4.2}$$

que ajusta os dados da Tabela 3 minimizando o *erro*

$$E = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$$

cometido na escolha da *curva de ajuste*. A Figura 24 mostra o gráfico de $f(x)$.

Figura 24 – Gráfico de $f(x) = \frac{10}{121} - \frac{15}{3872}x + \frac{371}{61952}x^2$



Fonte: Autoria própria.

Note que os cálculos que foram necessários para chegar ao resultado (4.2) podem ser bem trabalhosos, especialmente o cálculo da matriz $(A^T A)^{-1}$. Assim, alternativamente, podemos utilizar o resultado (3.7) para encontrar a solução pelo Método dos Mínimos Quadrados.

De fato, para $k = 2$ e $n = 7$, temos o sistema

$$\begin{pmatrix} 7 & \sum_{i=1}^{7} x_i & \sum_{i=1}^{7} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{7} x_i & \sum_{i=1}^{7} x_i^2 & \sum_{i=1}^{7} x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{7} x_i^2 & \sum_{i=1}^{7} x_i^3 & \sum_{i=1}^{7} x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{7} y_i \\ \sum_{i=1}^{7} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{7} x_i^2 y_i \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Para facilitar a substituição dos valores (x_i, y_i) da Tabela 3 no sistema (4.3), sugerimos que eles sejam organizados conforme a Tabela 5 que pode ser construída em uma planilha eletrônica, tornando-se automatizada. Isto é, os valores das somas podem ser obtidos, automaticamente, a partir do lançamento dos dados observados (x_i, y_i).

Tabela 5 – Somatórios dos dados observados

	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
	0	0	0	0	0	0	0
	32	6	1024	32768	1048576	192	6144
	48	14	2304	110592	5308416	672	32256
	64	25	4096	262144	16777216	1600	102400
	80	37	6400	512000	40960000	2960	236800
	96	55	9216	884736	84934656	5280	506880
	112	75	12544	1404928	157351936	8400	940800
$\sum$	432	212	35584	3207168	306380800	19104	1825280

Fonte: Autoria própria.

Substituindo os resultados da Tabela 5 em (4.3), temos

$$\begin{pmatrix} 7 & 432 & 35584 \\ 432 & 35584 & 3207168 \\ 35584 & 3207168 & 306380800 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 212 \\ 19104 \\ 1825280 \end{pmatrix} . \tag{4.4}$$

Utilizando a Regra de Cramer para resolver o sistema (4.4), chegamos aos resultados:

$$a_0 = \frac{10}{121} \quad , \quad a_1 = -\frac{15}{3872} \quad , \quad a_2 = \frac{371}{61952}$$

que implicam em

$$f(x) = \frac{10}{121} - \frac{15}{3872}x + \frac{371}{61952}x^2 .$$

Note que a função (4.2) nos permite estimar a *distância de parada* de um veículo em função de sua velocidade média no instante anterior ao acionamento dos freios. Entretanto, estamos interessados em realizar previsões acerca da *distância de frenagem* e, assim sendo, também precisamos considerar a *distância de reação*.

4.1.4 OBTENDO A FUNÇÃO $D(x)$: DISTÂNCIA DE FRENAGEM

Nas etapas anteriores, obtivemos a função

$$f(x) = \frac{10}{121} - \frac{15}{3872}x + \frac{371}{61952}x^2$$

que nos fornece a *distância de parada* do veículo em função de sua *velocidade inicial*. Entretanto, para determinar a *distância de frenagem*, também precisamos determinar a *distância de reação* em função da *velocidade inicial*. Ou seja, a distância percorrida pelo veículo no intervalo de tempo em que o condutor percebe o obstáculo, decide frear e, de fato, aciona os freios.

Embora haja diversos fatores que podem afetar o *tempo de percepção e reação* do condutor como, por exemplo, questões fisiológicas e psicológicas relacionadas ao condutor, segundo (OPAS, 2012; SOUSA, 2011) pode-se considerar um intervalo com duração de aproximadamente 1,5 segundos. Isto significa que o veículo permanecerá trafegando com a mesma velocidade média durante cerca de 1,5 segundos, até que ocorra o acionamento dos freios.

Para determinar a *distância de reação* é conveniente utilizar a medida da velocidade média em m/s, visto que para obter esta distância basta multiplicar o *tempo de percepção e reação* pela velocidade média do veículo e, neste caso, pretende-se obter a *distância de reação* em metros. Não obstante, os dados da Tabela 3 nos fornecem as velocidades em (km/h) e, além disso, os dados $(x, f(x))$ também estão expressos em km/h. Assim, considerando que o tempo que o condutor leva para acionar os freios é de 1,5 segundos e que $1\ m/s = 3,6\ km/h$, a *distância de reação* pode ser obtida por

$$d(x) = \frac{5}{12}x\ ,$$

sendo que x é a velocidade média do veículo (em km/h) no instante anterior a percepção do obstáculo.

Portanto, como a *distância de frenagem* $D(x)$ é dada pela soma da *distância de parada* $f(x)$ e da *distância de reação* $d(x)$, temos que

$$D(x) = f(x) + d(x) \quad = \quad \frac{10}{121} + \frac{4795}{11616}x + \frac{371}{61952}x^2. \tag{4.5}$$

4.1.5 ANÁLISE DA SITUAÇÃO A PARTIR DOS DADOS AJUSTADOS

Nesta etapa, utilizaremos os dados *ajustados* pela função $D(x)$ para analisar a influência exercida pela velocidade média do veículo na prevenção e/ou gravidade de uma lesão causada em uma vítima de atropelamento.

Inicialmente, recorrendo à função $D(x)$, obtemos a *distância de frenagem* de um veículo em função de sua *velocidade inicial* (Tabela 6). Logo, é possível estimar, por um lado, a menor distância que o veículo deveria estar do pedestre para evitar a colisão e, por outro lado, sendo conhecida a distância em que o veículo encontra-se do pedestre no instante em que ele percebido pelo condutor, qual deveria ser a velocidade máxima que o veículo deveria estar trafegando a fim de evitar o atropelamento.

Tabela 6 – Velocidade inicial (km/h) $\times$ Distância de frenagem (m)

Velocidade (km/h)	Distância de frenagem (m)
20	11
30	18
35	22
40	26
45	31
50	36
60	46
70	58
80	71
90	86
100	101
110	118
120	136

Fonte: Autoria própria.

Assim, se a distância entre o veículo e o pedestre for inferior àquela necessária para que ocorra a frenagem total, conclui-se que ocorrerá a colisão, mas

qual será a velocidade do veículo no momento do impacto?

Para responder essa pergunta, podemos recorrer a conhecida *Equação de Torricelli* que nos permite determinar a velocidade do veículo em função do seu deslocamento a partir da seguinte relação

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s$$

em que:

- v_0 = velocidade inicial, em m/s;
- Δs = deslocamento, em m;
- v = velocidade final (após o deslocamento), em m/s;
- a = aceleração, em m/s^2.

Note que podemos utilizar os valores $(x; f(x))$ para encontrar a desaceleração[3] do veículo durante a frenagem, pois para $v = 0$ temos $\Delta s = f(x)$. Assim, para uma velocidade inicial de, por exemplo, $90\ km/h$ ($25\ m/s$), temos

$$\Delta s = f(90) = \frac{10}{121} \;-\; \frac{15}{3872}\,90 \;+\; \frac{371}{61952}\,90^2 \;\;\approx\;\; 48.$$

Considerando que após a frenagem total, a velocidade do veículo será $v = 0\ km/h$, podemos utilizar a *Equação de Torricelli* para determinar a *taxa de desaceleração*. Vale destacar que devemos utilizar a velocidade em m/s. Logo,

$$\begin{aligned} & v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s \\ \Longrightarrow\;\; & 0^2 = 25^2 + 2\ .\ 48\ a \\ \Longrightarrow\;\; & a = \frac{-625}{96} \\ \Longrightarrow\;\; & a \approx -6,5\ m/s^2. \end{aligned}$$

Portanto, a velocidade desse veículo (em m/s) durante a frenagem pode ser obtida pela através da relação:

$$\begin{aligned} & v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s \\ \Longrightarrow\;\; & v = \sqrt{625 - 13\Delta s}. \end{aligned}$$

Entretanto, este resultado ainda não é suficiente para estimar a velocidade do veículo no momento da colisão, visto que também devemos considerar a distância de reação $d(x)$ em que o veículo permanecerá se deslocando com a mesma velocidade média.

Então, sendo D_0 a distância entre o veículo e o obstáculo no instante em que este é percebido pelo condutor, temos

$$\Delta s = D_0 - d(x)$$

e, considerando o caso particular de um veículo que trafega a uma velocidade média de $90\ km/h$,

$$\begin{aligned} & \Delta s = D_0 \;-\; 90\,\frac{5}{12} \\ \Longrightarrow\;\; & \Delta s = D_0 \;-\; \frac{75}{2}. \end{aligned}$$

[3] Utilizaremos o termo desaceleração para a variável a porque no contexto que estamos analisando a aceleração fará com que a velocidade decresça.

Logo, a velocidade observada no momento da colisão, no caso de um veículo que trafega a uma velocidade média de $90\ km/h$, poderá ser estimada pela relação:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s$$

$$\Longrightarrow \quad v = \sqrt{625 - 13\ \left(D_0\ -\ \frac{75}{2}\right)}.$$

Dessa forma, caso o condutor de um veículo que trafega a $90\ km/h$ identifique um obstáculo a $50\ m$ de distância e acione os freios ele atingirá este obstáculo a uma velocidade

$$v = \sqrt{625 - 13\ \left(50\ -\ \frac{75}{2}\right)} \ = \ \sqrt{\frac{925}{2}} \ \approx \ 21,5\ m/s.$$

Ou seja, no caso de um atropelamento, a vitima teria sido atingida a uma velocidade de aproximadamente $77\ km/h$. De maneira mais geral, considerando o tempo de reação de $1,5$ segundos, poderemos estimar a velocidade do veículo no momento do impacto a partir da relação:

$$\begin{aligned} v \ &= \ \sqrt{\left(\frac{x}{3,6}\right)^2 + 2\ a\ (D_0\ -\ d(x))} \\ &= \ \sqrt{\left(\frac{x}{3,6}\right)^2 - 2\ |a|\left[D_0\ -\ \frac{5}{12}x\right]} \end{aligned} \tag{4.6}$$

em que:

- $x \ = \$ velocidade média (em km/h) no instante anterior ao acionamento dos freios;
- $D_0 \ = \$ distância (em m) entre o veículo e o obstáculo no instante em que este é percebido pelo condutor;
- $|a| = \dfrac{\left(\frac{x}{3,6}\right)^2}{2\ f(x)} \ = \$ taxa de desaceleração, em m/s^2;
- $v \ =$ velocidade no momento do impacto, em m/s.

Note que devemos ter $D_0\ -\ \frac{5}{12}x > 0$, caso contrário a velocidade seria maior após a desaceleração e isto não condiz com a realidade.

Agora, a fim de avaliar como a velocidade pode afetar as colisões e as lesões no trânsito, vamos analisar um caso particular em que o condutor do veículo identifica o pedestre a uma distância de 30 metros e os prováveis desfechos em função da *velocidade inicial* do veículo. Ressalta-se aqui que estamos considerando que a reação do motorista consiste apenas em acionar os freios mantendo-se, portanto, na rota de colisão.

Os dados observados na Tabela 6, mostram que caso o veículo esteja trafegando a uma velocidade de até $40\ km/h$, seria possível evitar a colisão e, portanto, gerar a menor lesão possível. Mas, para valores maiores ou iguais a $45\ km/h$, ocorreria o atropelamento e, neste caso, estamos interessados em saber

qual será a velocidade no momento do impacto e como ela interfere na gravidade das lesões sofridas pelo pedestre.

Utilizando o resultado (4.6), a velocidade (v) do veículo, no instante da colisão, será:

$$v = \sqrt{\left(\frac{x}{3,6}\right)^2 - 2\,|a|\left[30 - \frac{5}{12}x\right]}\,.$$

Assim, a partir da relação entre as velocidades médias do veículo no instante em que o condutor percebe o pedestre e no instante da colisão (Tabela 7), pretende-se verificar a que velocidade a vitima seria atingida.

Tabela 7 – Velocidade inicial (km/h) x Velocidade no instante da colisão (km/h)

Velocidade inicial	Velocidade no instante da colisão
0	-
⋮	⋮
40	-
45	11
50	31
55	43
60	53
70	69
72	72
75	75
⋮	⋮

Fonte: Autoria própria.

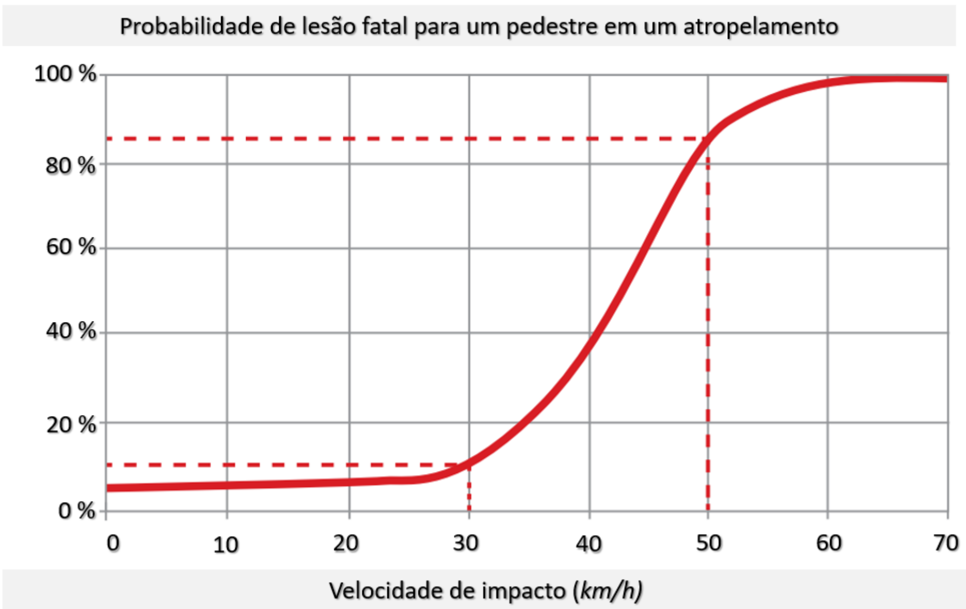
Observe que a velocidade no instante do impacto tem o mesmo valor que a velocidade inicial (v_0) quando $v_0 \geq 72\ km/h$, isso deve-se ao fato de que, nesses casos, não haveria tempo hábil para que o condutor pudesse reagir e acionar os freios.

Por fim, resta avaliar

como a velocidade inicial do veículo interfere na gravidade das lesões sofridas pelo pedestre.

Para tanto, podemos recorrer ao manual *Gestão da Velocidade: um manual de segurança viária para gestores e profissionais da área* (OPAS, 2012), elaborado pelas instituições: Parceria Global para Segurança no Trânsito (GRSP), Organização Mundial da Saúde (OMS), Fundação FIA para o Automóvel e a Sociedade (FIA-F) e o Banco Mundial; com o intuito de implementar a Resolução 58/289 sobre "A melhoria da segurança no trânsito global", aprovada pela Assembleia Geral da ONU (Organização das Nações Unidas) em 2004. Segundo este manual, a probabilidade de um pedestre sobreviver a um atropelamento é de cerca de 90% para velocidades de impacto de até 30 km/h, mas reduz para 15% se o veículo estiver a 50 km/h no instante da colisão e é praticamente nula para velocidades de impacto superiores a 60 km/h. Na Figura 25 é possível observar a evolução da probabilidade de lesão fatal, no caso do atropelamento de um pedestre, em função da velocidade do veículo no momento do impacto.

Figura 25 – Velocidade de impacto (km/h) $\times$ Probabilidade de lesão fatal em um atropelamento



Fonte: (OPAS, 2012).

Relacionando os dados da Tabela 7 com o gráfico da Figura 25, é possível concluir que um pedestre que dista 30 m de um veículo trafegando com velocidade média de 45 km/h, quando é percebido pelo condutor, provavelmente sobreviveria no caso de um atropelamento, já que sua probabilidade de sobreviver seria maior que 90%. Mas, se o veículo estivesse a 55 km/h, suas chances reduziriam para cerca de 60%. Já para uma velocidade média de 60 km/h, sua probabilidade de sobrevivência seria inferior a 10% e tenderia a zero para velocidades de impacto de 70 km/h ou mais.

Note que pequenos aumentos na velocidade de 5 a 10 km/h, por exemplo, podem reduzir significativamente a probabilidade de sobrevivência de uma vítima de atropelamento. Logo, é razoável afirmar que a velocidade influencia significativamente na ocorrência de lesões fatais em vitimas de atropelamento. Além disso, considerando que os acidentes de trânsito representaram $22,8\%$ dos óbitos decorrentes de lesão no mundo, dos quais 22% (cerca de 270 000) são pedestres (OPAS, 2014a), pode-se dizer que velocidade também impacta diretamente no setor de saúde pública, além de gerar grandes custos sociais e econômicos aos países.

Por fim, vale destacar que a gestão da velocidade é um problema de grande relevância social e pode levar a outras reflexões como, por exemplo, o disposto no Código de Trânsito Brasileiro (CTB) que, em seu artigo 218, estabelece que é *infração gravíssima* - sujeita a multa, suspensão do direito de dirigir e apreensão da Carteira Nacional de Habilitação (CNH) - trafegar em velocidade superior a máxima permitida em mais de 50%,

seria esta punição, muito severa?

Considerando o exemplo analisado, em que $D_0 = 30\ m$, se a velocidade máxima permitida na via fosse de 50 km/h, seria enquadrado no artigo 218 do CTB, o motorista do veículo que estivesse trafegando a velocidade igual ou superior a 75 km/h. Aparentemente, pode parecer um acréscimo "moderado" que não justificaria as penalidades previstas, mas ao considerar a probabilidade de sobrevivência de um pedestre que, caso seja atingido por tal veículo, reduzirá de cerca de 90% para quase 0%, é possível inferir que as penalidades são justificáveis.

Além disso, outras discussões que podem ser mobilizadas a partir desta temática, tais como: a interferência do álcool no tempo de percepção e reação do motorista e, consequentemente, na distância de frenagem e probabilidade de sobrevivência do pedestre. A mecânica das colisões, o funcionamento de sistemas de segurança e aspectos biológicos dos condutores, certamente favorecerão o desenvolvimento do pensamento crítico dos estudantes e uma aprendizagem mais significativa.

Evidencia-se portanto, que as atividades de modelagem, além de serem muito fecundas do ponto de vista da aprendizagem dos fatos, conceitos e procedimentos matemáticos, certamente contribui para que os jovens possam atuar de forma criativa, crítica e responsável em diferentes âmbitos da vida.

5 CONCLUSÃO

O conhecimento matemático, historicamente construído a partir das preocupações e necessidades de diferentes culturas, é indispensável para a representação e compreensão de fenômenos naturais e socioculturais. Logo, é indispensável para o desenvolvimento do pensamento crítico e da formação cidadã dos estudantes. Mas, para que a Matemática possa de fato contribuir para a formação de cidadãos críticos e cientes de suas responsabilidades sociais, seu ensino deve ocorrer de forma integrada, contextualizada e interdisciplinar.

Nesse sentido, entendemos que a modelagem matemática pode contribuir efetivamente para a elevação da qualidade da educação brasileira visto que, além de ser naturalmente interdisciplinar, possibilita ao aluno partir de uma situação concreta e alcançar níveis mais elaborados de reflexão e abstração. Entretanto, no planejamento e aplicação de atividades de modelagem os professores podem enfrentar diversas dificuldades como, por exemplo, a limitação do tempo, cultura da escola e a rigidez de algumas estruturas curriculares. Todavia, as várias maneiras de se conceber e praticar a modelagem nas salas de aula são um meio para ajustá-la a diferentes contextos e objetivos educacionais.

Ressaltamos porém, que a abordagem de problemas reais e que possuam relevância social potencializam as atividades de modelagem e, portanto, merecem receber maior destaque. Não obstante, em muitos casos, tais problemas suscitam a utilização de recursos matemáticos mais sofisticados que deverão ser apresentados e discutidos com os alunos. Nesse contexto, propomos a abordagem dos temas *ajuste de curvas* e *Método dos Mínimos Quadrados* no Ensino Médio, a partir da utilização de diferentes recursos, linguagens e representações matemáticas para que os educandos possam resolver problemas oriundos de diferentes domínios da realidade com mais autonomia e recursos matemáticos.

Diante do exposto, esperamos que esse trabalho contribua para as reflexões acerca da modelagem matemática na Educação Básica e auxilie os professores interessados em utilizar essa alternativa pedagógica nas suas aulas. Além disso, almejamos colaborar para que a Matemática seja reconhecida como um saber indispensável no enfrentamento das demandas complexas da sociedade contemporânea.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. W. de; SILVA, K. P. da; VERTUAN, R. E. **Modelagem matemática na educação básica**. 1. ed. São Paulo, SP: Contexto, 2013. 157 p.

BARBOSA, J. C. **Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico**. 2001.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática: as discussões técnicas e as experiências prévias de um grupo de alunos. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, SP, v. 24, n. 38, p. Pagina inicial–Pagina final, 2011.

BARROS, A. J. D.; BACCHIERI, G. Acidentes de trânsito no brasil de 1998 a 2010: muitas mudanças e poucos resultados. **Revista de Saúde Pública**, São Paulo, SP, v. 5, n. 45, p. 949–963, 2011.

BASSANEZI, R. C. **ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 3. ed. São Paulo, SP: Contexto, 2013. 390 p.

BIEMBENGUT, M. S. Concepções e tendências de modelagem matemática na educação básica. **Revista Tópicos Educacionais**, Recife, PE, v. 18, n. 1-2, jun./dez, p. 118–138, 2012.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 5. ed. São Paulo, SP: Contexto, 2013. 127 p.

BOALER, J. **Mentalidades matemáticas: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador**. Porto Alegre, RS: Penso, 2018. 256 p.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental - introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Brasília : MEC / SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 20 ago. 2018.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília : MEC, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 11 set. 2018.

BRASIL. **PCN + Ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/ Semtec, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pd>. Acesso em: 26 set. de 2018.

BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio, V.2**. Brasília : MEC / SEB, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 25 set. de 2018.

BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília: MEC/ SEB, 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13448-diretrizes-curiculares-nacionais-2013-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 25 set. de 2018.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília : MEC / SEB, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/12/BNCC_19dez2018_site.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2018.

BRITO, A. de J. A história da matemática e da educação matemática na formação de professores. **Educação Matemática em Revista**, Ano 13, n. 22, p. 11–15, 2007.

BURAK, D. **Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem**. 329 p. Tese (Doutorado em Educação) — Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas, SP, 1992.

BURAK, D. Uma perspectiva de modelagem para o ensino e aprendizagem de matemática. In: BRANDT, C. F.; BURAK, D.; KLÜBER, T. E. (Org.). **Modelagem Matemática: uma perspectiva para a Educação Básica**. 1. ed. Ponta Grossa, PR: Editora UEPG, 2010. cap. 1, p. 15–38.

BURAK, D.; KLÜBER, T. E. Concepções de modelagem matemática: contribuições teóricas. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo, SP, v. 10, n. 1, p. 17–34, 2008.

CARREIRA, S. Sublinhando resultados da investigação em modelação matemática e aplicações na aprendizagem. **Educação e Matemática**, Lisboa, Portugal, Outubro/Novembro/Dezembro, n. 144-145, p. 44–50, 2017.

CHAVE, M. I. de A.; SANTO, A. O. do E. Possibilidades para modelagem matemática da sala de aula. In: ALMEIDA, L. M. W. de; BISOGNIN, J. de Loiola Araújo e E. (Org.). **Práticas de modelagem matemática na educação matemática: relatos de experiências e propostas pedagógicas**. 1. ed. Londrina, PR: Eduel, 2011. cap. 8, p. 161–180.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade**. 2. ed. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2002. 110 p.

D'AMBRÓSIO, U. Um enfoque transdisciplinar à educação e à história da matemática. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. de C. (Org.). **Educação matemática: pesquisa em movimento**. 4. ed. São Paulo, SP: Cortez, 2012. cap. 1, p. 13–31.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011. 848 p.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no brasil. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 3, n. 4, p. 1–38, 1995.

GOMES, M. L. M. **História do ensino da matemática: uma introdução**. 1. ed. Belo Horizonte, MG: CAED-UFMG, 2012. 70 p.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo, volume 2**. 5. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2015. 496 p.

IGNÁCIO, S. A. **Importância da Estatística para o Processo de Conhecimento e Tomada de Decisão**. Curitiba - PR, 2010. Disponível em: <http://www.ipardes.gov.br/biblioteca/docs/NT_06_importancia_estatistica_tomada_decisao.pdf>. Acesso em: 24 abr. 2018.

KAVIATKOVSKI, M. A. de C. Modelagem matemática no ensino fundamental: relatos de experiências. In: BRANDT, C. F.; BURAK, D.; KLÜBER, T. E. (Org.). **Modelagem matemática no Ensino Fundamental: uma perspectiva para a Educação Básia**. 1. ed. Ponta Grossa, PR: Editora UEPG, 2010. cap. 2.

KLÜBER, T. E. Modelagem matemática: revisitando aspectos que justificam a sua utilização no ensino. In: BRANDT, C. F.; BURAK, D.; KLÜBER, T. E. (Org.). **Modelagem Matemática: uma perspectiva para a Educação Básica**. 1. ed. Ponta Grossa, PR: Editora UEPG, 2010. cap. 2.

LEON, S. J. **Álgebra linear com aplicações**. 8. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2011. 390 p.

LOPES, M. L. M. L. A matemática do século xxi e suas repercussões na matemática escolar. In: ANAIS ELETRôNICOS, X ENEM, 10., 2010, Salvador - BA. **X ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática**. Salvador, BA: SBEM - Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2010.

OPAS. **Gestão da velocidade: um manual de segurança viária para gestores e profissionais da área**. Brasília, DF, 2012. Disponível em: <https://www.paho.org/bra/index.php?option=com_docman&view=list&Itemid=965&slug=acidentes-e-violencias-086>. Acesso em: 20 jan. 2019.

OPAS. **Caminhar com segurança: breve panorama sobre a segurança dos pedestres no mundo**. 2014. Disponível em: <https://www.paho.org/bra/index.php?option=com_docman&view=download&alias=1496-caminhar-com-seguranca-6&category_slug=acidentes-e-violencias-086&Itemid=965>. Acesso em: 24 jan. 2019.

OPAS. **Velocidade e acidentesde trânsito**. Brasília, DF, 2014. Disponível em: <https://www.paho.org/bra/index.php?option=com_docman&view=list&Itemid=965&slug=acidentes-e-violencias-086>. Acesso em: 20 jan. 2019.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática**. Curitiba:SEED/CEB, 2008. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf>. Acesso em: 20 ago. 2018.

PEREZ, G. Pática reflexiva do professor de matemática. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. de C. (Org.). **Educação matemática: pesquisa em movimento**. 4. ed. São Paulo, SP: Cortez, 2012. cap. 13, p. 272–286.

ROQUE, T. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. 1. ed. São Paulo, SP: Zahar, 2012. 511 p.

SETTI, E. J. K. **Modelagem matemática no curso técnico de informática integrado ao Ensino Médio - um trabalho interdisciplinar**. 264 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, PR, 2017.

SETTI, E. J. K.; VERTUAN, R. E. Um olhar para a interdisciplinaridade presentes nos trabalhos de modelagem matemática apresentados nas últimas seis edições da conferência nacional sobre modelagem na educação matemática (cnmem). In: ANAIS ELETRôNICOS, III SEA, 3., 2016, Londrina, PR. **Simpósio Nacional de Ensino e Aprendizagem: Atualidades, Prospectivas e Desafios**. Londrina, PR: UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2016a.

SETTI, E. J. K.; VERTUAN, R. E. Que interdisciplinaridade se verifica nos trabalhos de modelagem matemática? In: ANAIS ELETRôNICOS, VII EPMEM, 7., 2016, Londrina, PR. **EPMEM - Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática**. Londrina, PR: UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2016b.

SHIRLEY, L. Matemática do século xx: o século em breve revista. **Educação e Matemática**, Lisboa, Portugal, Novembro/Dezembro, n. 60, p. 73–78, 2000.

SKOVSMOSE, O. **Educação matemática Crítica: A questão da democracia**. 6. ed. Campinas, SP: PAPIRUS, 2001. 160 p.

SKOVSMOSE, O. **Um convite a Educação Matemática Crítica**. 1. ed. Campinas, SP: PAPIRUS, 2014. 144 p.

SOISTAK, A. V. Uma experiência com a modelagem matemática no ensino médio profissionalizante. In: BRANDT, C. F.; BURAK, D.; KLÜBER, T. E. (Org.). **Modelagem Matemática: uma perspectiva para a Educação Básica**. 1. ed. Ponta Grossa, PR: Editora UEPG, 2010. cap. 3, p. 39–62.

SOUSA, L. A. P. de. 82 p. Dissertação (Mestrado) — Taxas de desaceleração e tempos de percepção e reação dos motoristas em interseções semaforizadas, Rio de Janeiro, RJ, 2011.