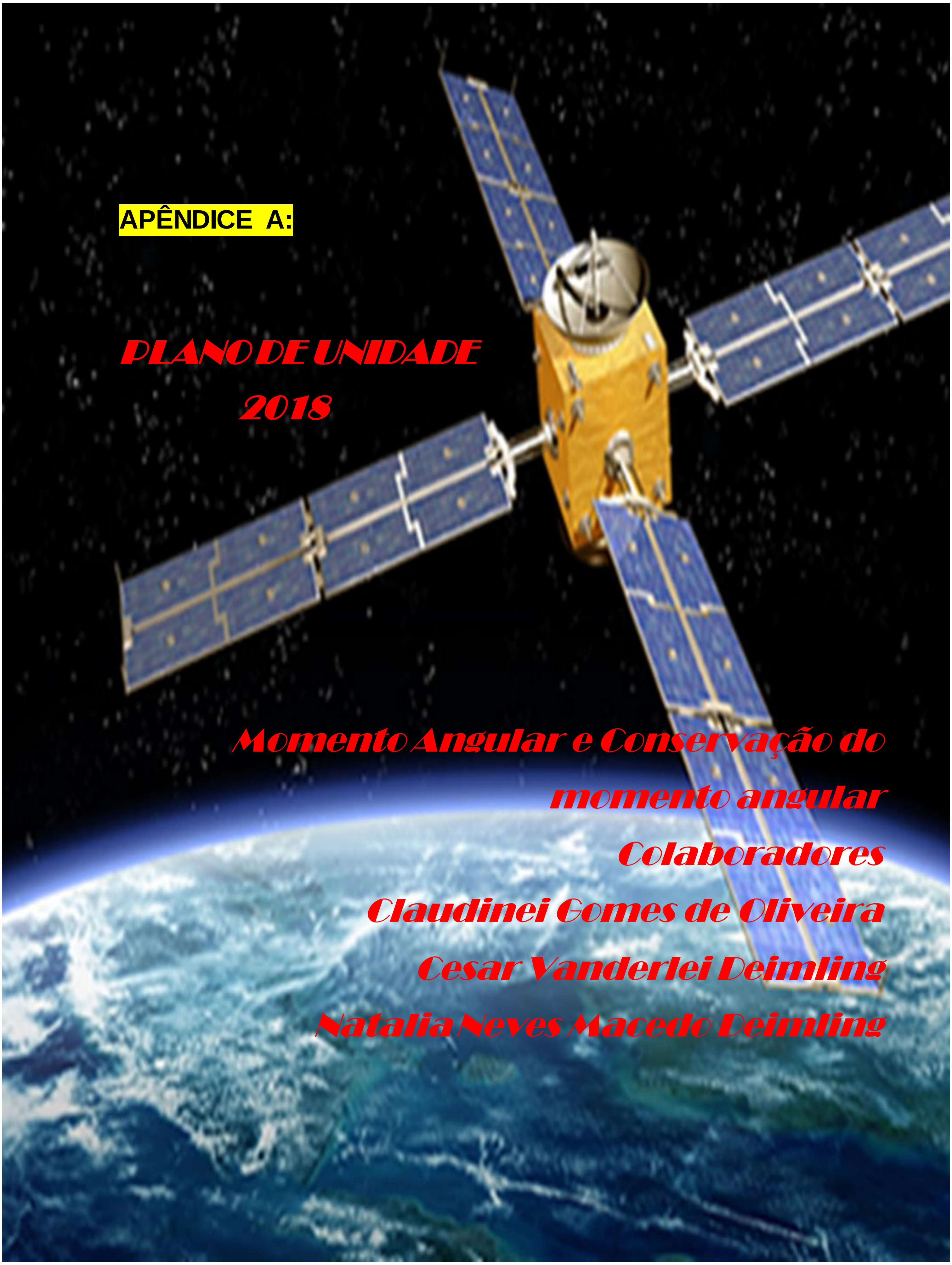


APÊNDICE A:

PLANO DE UNIDADE

2018

Momento Angular e Conservação do momento angular

Colaboradores

Claudinei Gomes de Oliveira
Cesar Vanderlei Deimling
Natalia Neves Macedo Deimling

APRESENTAÇÃO

Com o passar dos tempos o papel da escola vem se invertendo, embora o desenvolvimento da sociedade tenha trazido novas formas de relações sociais, enquanto educadores e gestores educacionais precisamos refletir sobre todos os elementos envolvidos na educação. Atualmente, estamos na corrente da pedagogia Histórico – Crítica, que apresenta uma corrente filosófica embasada no currículo básico para as escolas públicas do Paraná (1992), nos PCNs (1997) e nas DCEs(2008) que orientam as diferentes disciplinas escolares. Nesta concepção, há ênfase no conteúdo como forma de superação e liberdade histórico-social. Também é questionado o papel da escola enquanto influenciadora de comportamentos sociais, mas também sendo impactada pelas práticas da mesma sociedade. Segundo SAVIANI (1986 p.94), "a educação também interfere sobre a sociedade, podendo contribuir para a sua própria transformação".

Para tanto, a Pedagogia Histórico-Crítica veio trazer um novo olhar para a educação. Trouxe os conteúdos, que enquanto conhecimento real são possíveis a todos, devendo servir de ponte e ferramenta para a transformação social. Sendo assim a pesquisa desenvolvida teve uma abordagem qualitativa tendo como principal característica à flexibilidade e a criatividade. Através de uma minuciosa revisão teórica buscamos um contato com todas as variáveis do tema a ser estudado para que fosse possível fazer uma reflexão crítica sobre o mesmo. O conteúdo de conservação de momento angular na disciplina de Física do ensino médio foi abordado em uma turma do primeiro ano do ensino médio de um Colégio público pertencente ao Núcleo regional de Assis Chateaubriand-PR. Assim, elaboramos alguns materiais e recursos que fizeram parte do nosso produto educacional. Este produto, inicialmente composto por um Plano de Unidade, foi dividido em quatro tópicos, tomando com norde o nosso referencial teórico a Pedagogia Histórico-Crítica, obedecendo rigorosamente as etapas que dela fazem se presentes. Sendo assim, tivemos por finalidade oferecer uma alternativa diferenciada, acessível e aprofundada a professores e estudantes na abordagem do conteúdo de momento angular no ensino médio.

Mestrado Profissional em Ensino de Física

PLANO DE UNIDADE

2018

INSTITUIÇÃO: COLÉGIO ESTADUAL HUMBERTO DE ALENCAR CASTELO BRANCO- ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

PROFESSOR: CLAUDINEI GOMES DE OLIVEIRA

DISCIPLINA: FÍSICA

PLANO DE UNIDADE: ROTAÇÕES

ANO LETIVO: 2018 **TRIMESTRE:** 3º

SÉRIE: 1º ANO

TURMA: 1º A **H/A:** 9 h/a

CONTEÚDO: Conservação de momento angular

1. OBJETIVO GERAL

Desenvolver e avaliar os conceitos prévios dos alunos partindo de exemplos práticos do cotidiano, possibilitando que o estudante desenvolva a capacidade de organizar e sistematizar os dados e resultados referentes ao conteúdo de conservação de momento angular na disciplina de Física do ensino médio.

2. TÓPICOS DE CONTEÚDO E OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Tópico 1: Cinemática das Rotações.

Objetivos específicos: introduzir ao aluno uma discussão, a fim de diagnosticar conceitos básicos da cinemática das rotações, através de um questionário inicial escrito, como também uma discussão oral a fim de proporcionar um debate inicial sobre o tema, com o objetivo de explorar os conhecimentos prévios trazidos pelos alunos e, a partir desse levantamento, iniciar a problematização do conteúdo.

Tópico 2: Momento de Inércia e Torque.

Objetivos específicos: Explicar a origem do movimento de rotação; esclarecer o significado de cada variável no movimento de rotação e sua correlação para o movimento de translação; compreender e desenvolver os conceitos e pré-requisitos envolvendo cinemática e dinâmica do corpo rígido, relacionando com a inércia no movimento de rotação, dificuldade em colocar um corpo em movimento.

Tópico 3: Momento Angular e a Conservação do Momento Angular.

Objetivos específicos: introduzir a conservação do momento angular revisando os conceitos da dinâmica de corpos rígidos, relacionando a regra da mão direita com o vetor momento angular, além das condições para a conservação do momento angular e da energia cinética de rotação, de forma que o aluno compreenda esse importante princípio da Física e seja capaz de identificá-lo em diversas situações do cotidiano.

Tópico 4: Considerações finais a respeito do questionário inicial.

Objetivos específicos: discutir com os alunos, os principais conceitos envolvidos através de um questionário final, relacionado com o questionário inicial, com o intuito de avaliar apropriação dos conceitos científicos trabalhado durante os encontros e verificar a existência de possíveis lacunas que mereçam atenção.

3. PRÁTICA SOCIAL INICIAL

Pré-Requisitos: os conteúdos necessários para a compreensão de todas as atividades que serão desenvolvidas no decorrer do trabalho vem ao encontro do conhecimento de cinemática, conhecimento de dinâmica e diferentes tipos de energia, além de noções básicas sobre movimento circular uniforme.

O que os alunos podem saber: o movimento de rotação está ligada a Terra. Quanto maior for o momento de inércia de um corpo, mais difícil será girá-lo ou alterar sua rotação. O torque é considerado uma grandeza vetorial, pois possui um módulo, direção e sentido que está relacionado com a rotação de um sistema. Para que a rotação aconteça, é necessário à aplicação de um torque. O momento angular é uma grandeza vetorial interligada à velocidade angular do corpo em rotação.

Curiosidades que os alunos podem apresentar: o que existe de semelhante entre os movimentos de um CD e de uma roda gigante? Por que um equilibrista de corda bamba carrega uma vara longa e estreita? Por que a patinadora no gelo em determinado momento do seu giro fecha os braços e num outro momento abre seus braços? Podemos considerar a Terra como exemplo de movimento de rotação? Ao abrirmos tampas de alimentos em conserva, estamos exercendo rotação? E quando usamos chave de roda para trocar pneu de um veículo? Todo objeto que gira desenvolve rotação? E quando abrimos uma porta? E a roda da bicicleta?

4. PROBLEMATIZAÇÃO

Dimensões do conteúdo a serem trabalhados:

Conceitual/Científica: o que é movimento de rotação? Qual a definição de corpo rígido? Por que um corpo rígido podem rotacionar e transladar simultaneamente? Como descrever o movimento de rotação de um corpo rígido? Como descrever o deslocamento angular em termos das variáveis de rotação? Como é a relação entre as grandezas lineares, as grandezas angulares e o raio? Todas as partículas tem a mesma velocidade angular quando um corpo rígido gira em torno de um eixo fixo? Quando uma partícula descreve um movimento circular, como é definida a aceleração?

Histórica: qual é a ideia de cinemática? Qual a importância do Filósofo Aristóteles para o estudo da cinemática das rotações? De onde surgiu esse nome? Que conhecimentos prévios podemos ter envolvendo cinemática de rotações?

Social: qual a importância de se fazer o balanceamento das rodas de um automóvel? É possível se locomover com esse automóvel sem fazer esse balanceamento? Um carro desbalanceado consome mais combustível? Justifique. O que acontece com a velocidade aferida no painel do veículo quando usamos um pneu maior que o penu original no carro?

5. INSTRUMENTALIZAÇÃO

Tópico 1: Cinemática das Rotações.

Dimensões: Conceitual/Científica, Histórica, Social e econômico.

Iniciaremos o primeiro encontro com um questionário inicial, fazendo um levantamento do conhecimento prévio apresentado pelos alunos sobre o tema. Na sequência serão discutidas as respostas do questionário e em seguida dará-se início ao plano de unidade de conteúdo com uma revisão da Cinemática das Rotações, destacando o significado físico de cada uma das variáveis nas equações de movimento, tanto na rotação como translação, revisando o conteúdo através de textos relacionado ao tema trabalhando com imagens que esclareçam as dúvidas dos alunos. Em seguida será apresentado um vídeo sobre movimento circular uniforme disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=dDxoG_nXxpc e após exposição oral dialogada do professor onde será usado material impresso, data Show ou Tv multimídia e quadro de giz.

Tópico 2: Momento de Inércia e Torque.

Dimensões: Conceitual e Científica.

O Segundo encontro seguirá a partir do anterior, retomando os conceitos abordados no último encontro. Em seguida iniciará-se o conteúdo de Momento de Inércia e Torque, abordando e resgatando conceitos do cotidiano através de texto e imagens ilustrativas. Após todas as abordagens será desenvolvido junto com os alunos o experimento: o atrito do rolamento, onde através da exposição oral dialogada do professor, o aluno poderá compreender a velocidade angular de cada disco em pequenos intervalos de tempo, permitindo dessa forma avaliar sua dependência temporal. Para esse encontro será utilizado o laboratório de Física para o desenvolvimento do experimento no qual constará a Tv multimídia, bancada de apoio ao experimento além do quadro de giz.

Tópico 3: Momento Angular e a Conservação do Momento Angular.

Dimensões: Conceitual e Científica.

Neste tópico partiremos de exemplos e atividades práticas para apresentar e compreender o significado de momento angular e do seu princípio de conservação, relacionado com a energia cinética de rotação e em seguida será realizado uma experiência em laboratório, demostrando o cálculo do momento angular e permitindo a verificação de sua conservação durante o acoplamento de discos. Nesta mesma demostração também será verificada a influência das forças internas sobre a conservação de energia cinética de rotação durante o acoplamento dos discos. O conceito de conservação do momento ângular também será abordado em uma atividade na qual o aluno varia o seu momento de inércia enquanto gira em uma plataforma afim de verificar a variação da velocidade angular em função da conservação do momento angular, permitindo a relação do conteúdo aprendido com o seu cotidiano. Teremos como recurso neste encontro livros, material impresso, aparato experimental sobre momento angular e conservação de momento angular, celulares para gravação de voz, filmagem do experimento e quadro de giz.

Tópico 4: Considerações finais a respeito do questionário inicial.

Dimensões: Conceitual, Científica, Histórica e Social.

Como fechamento será apresentado aos estudantes um questionário final, sendo o mesmo do início do tópico 1, acrescido de algumas perguntas expressando a opinião dos alunos sobre as aulas juntamente com exposição oral dialogada do professor com os alunos a respeito dos resultados obtidos. Neste encontro será utilizado material impresso.

6. CATARSE:

Expressão da síntese: apontamentos e discussões sobre o questionário com os estudantes no decorrer das aulas, bem como a resolução oral e escrito de exercícios, que serão apresentados no decorrer dos tópicos.

Síntese do aluno: considerando que os conceitos abordados neste plano de unidade são pouco trabalhados com os alunos de ensino médio, esperamos que ao final de todas atividade desenvolvidas e de suas discussões os alunos compreendam os conteúdos descritos nos tópicos que seguem.

Tópico 1: Cinemática das Rotações.

Duração desse tópico: proposta de 2 horas/aula para trabalhar esse tópico. No entanto, caso haja necessidade, o professor poderá utilizar mais horas-aula.

Figura 1: Imagem de uma prova de atletismo feminino.

Fonte: Disponível em[9]:

Na Figura 1 podemos observar corredoras femininas numa pista de atletismo, onde os estudos sobre o campo da cinemática podem ser aplicados na análise dos movimentos, sem a necessidade de levar em consideração as causas do movimento. Assistindo a uma corrida, percebe-se que quando as atletas se movimentam, um conjunto de movimentos é realizado. Podemos notar que os braços e as pernas realizam movimentos oscilatórios (que podem ser analisados por equações utilizadas no tratamento da cinemática das rotações), ou seja, que se repetem ao longo do tempo, enquanto que a cabeça do atleta sofre um deslocamento - caracterizado por uma translação - aproximadamente paralelo à pista. Para facilitar a análise combinada desses movimentos – rotação e translação – utilizaremos como inspiração o movimento de um pneu de um carro em contato com o asfalto, como mostrado na Figura 2.

---

[9] Disponível em: < https://def.fe.up.pt/dinamica/cinematica.html> - acesso em 11/10/2018.

Figura 2: Imagem do pneu de um carro em contato com o asfalto

Fonte: Disponível em[10]:

Analisando a Figura 2, podemos obter as equações que descrevem o movimento de rotação, de um ponto situado na borda do pneu bem como do movimento de translação, associado ao eixo de sustentação do pneu. Para tanto, abaixo descreveremos brevemente as definições de algumas grandezas Físicas associadas ao movimento para este caso.

- **Deslocamento angular (Δθ)**

É definido pela variação do ângulo de um ponto fixo na extremidade do pneu em função da rotação. Exemplo: Uma pedrinha se prende a um pneu. No instante de tempo t = 0 s a pedrinha faz um ângulo de 15° com a horizontal e depois de 2 segundos, ela faz um ângulo de 80° com a horizontal. Neste caso o deslocamento angular vale 65° que correspondem a 1,134 radianos.

- **Velocidade angular (ω)**

Caracterizada pela razão entre o deslocamento angular e o intervalo de tempo necessário para realiza-lo. Retomando o exemplo anterior, considerando o deslocamento angular de 1,134 rad no intervalo de tempo de 2 s, teremos uma velocidade angular de 0,567 rad/s.

- **Aceleração angular (α)**

O termo aceleração angular indica a variação da velocidade angular num certo intervalo de tempo ($\Delta\omega/\Delta t$) e sua unidade de medida no Sistema Internacional de unidades, SI, é o rad/s^2. De maneira análoga às variáveis do movimento de translação, deslocamento, velocidade e aceleração, as variáveis angulares também são vetoriais,

[10] Disponível em:< https://w w w .google.com.br/search?q=imagem+de+um+pneu+constando+as+vari%C3%A1veis+de>-acesso em 11/10/2018.

no entanto, para os casos angulares o vetor sempre será paralelo ao eixo de rotação. Uma aplicação direta da aceleração angular pode ser obtida por meio do cálculo do torque, $\vec{\tau} = I.\vec{\alpha}$, que será mais bem estudado nos próximos tópicos.

- **Frequência (f) e período (T)**

São grandezas associadas aos movimentos periódicos, ou seja, aqueles que se repetem como é o caso das rotações e oscilações. A razão entre o número de ciclos completos em um tempo previamente estabelecido – que no SI é de 1 segundo - denominamos **frequência**. Por outro lado, o **período** é definido pelo tempo necessário para completar uma rotação ou uma oscilação completa.

Equações e suas relações:

Podemos definir a relação entre frequência e período através da seguinte equação:

$$f = \frac{1}{T}$$

Considerando a definição de frequência ou período e que a cada 2π radianos o movimento se repete, podemos definir a velocidade angular conforme as seguintes equações:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = 2\pi f$$

Para entender melhor a correlação entre as grandezas rotacionais e translacionais apresentamos abaixo a Tabela 1.

Tabela 1: correlação entre as grandezas rotacionais e translacionais.

TRANSLAÇÃO	ROTAÇÃO
Aceleração Linear (a)	Aceleração Angular (α)
Força($\vec{F}$)	Torque ($\vec{\tau}$)
Momento linear(q)	Momento angular (L)
Velocidade linear(v)	Velocidade angular (ω)
Massa(m)	Momento de Inércia (I)
Energia cinética (K_c)	Energia cinética rotacional (K_r)

Fonte: Autoria própria (2018).

Com o objetivo de melhorar a visualização da correlação entre as grandezas translacionais e rotacionais apresentadas na Tabela 1, preparamos a Tabela 2 que apresenta as equações para o movimento de translação e suas respectivas correlações para a rotação.

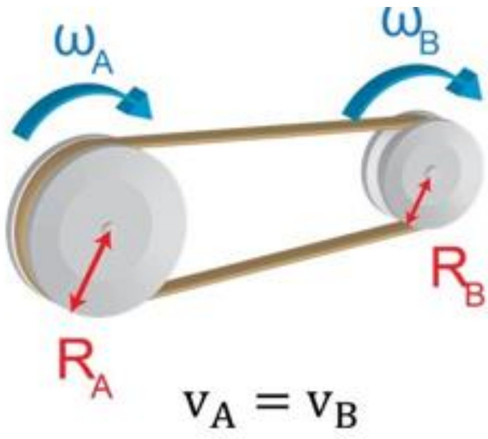
Tabela 2: correlação entre as equações do movimento translacional e rotacional

Grandezas lineares	**Grandezas angulares**
MRU e **MRUV**	**MCU** e **MCUV**
$\Delta s = vt$	$\Delta\theta = \omega t$
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$
$v^2 = {v_0}^2 + 2a\Delta s$	$\omega^2 = {\omega_0}^2 + 2\alpha\Delta\theta$
Dinâmica Translação	**Dinâmica rotação**
$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$
$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
$K_c = \frac{1}{2}mv^2$	$K_r = \frac{1}{2}I\omega^2$

Fonte: Autoria própria (2018).

Na sequência apresentamos alguns exemplos práticos do cotidiano onde é possível verificar a aplicação dos conceitos de velocidade escalar, bem como da velocidade angular. Dessa forma, apresentamos um sistema de transmissão de polias, no qual se utiliza uma correia comum conforme mostrado na Figura 3, observando que a velocidade tangencial (linear) é a mesma em qualquer ponto da correia.

Figura 3: Esquema mostrando a velocidade tangencial de polias associado à uma correia



Fonte: Disponível em[11]:

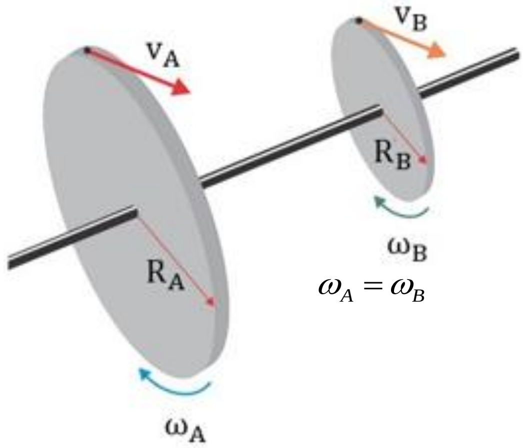
[11]Disponível em: <https://www.kuadro.com.br/posts/cinematica-do-movimento-circular/ >acesso em 24/09/2018.

Quando medimos as velocidades angulares dos eixos das respectivas polias A e B, verificamos diferenças. A equação (1) mostra a dependência da velocidade angular com o raio de cada eixo A e B.

$$\omega_A R_A = \omega_B R_B \quad (1)$$

Nessa linha de análise verificamos também velocidade angular em sistema de polia fixas em torno de um eixo comum, conforme Figura 4 onde ambas apresenta a mesma velocidade.

Figura 4: Esquema mostrando a velocidade angular de polias fixas em torno de um eixo comum



Fonte: Disponível em[12]:

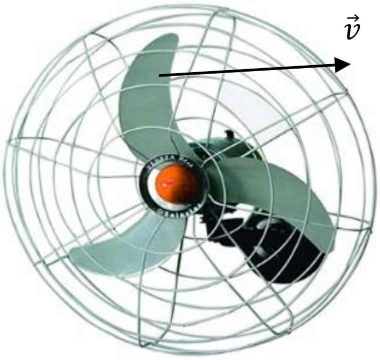
Verifica-se que para o sistema acima apresentado temos a seguinte relação:

$$\frac{V_A}{R_A} = \frac{V_B}{R_B}$$

Destaca-se a partir desse momento que a cinemática dos corpos rígidos compõem tanto os movimentos de translação como também rotação, lembrando que no movimento de translação pura, as partes envolvidas em relação ao corpo apresentam o mesmo deslocamento linear. Já com relação ao movimento de rotação pura, as partes de um corpo irão descrever trajetórias circulares, centradas em um eixo de rotação. Para ilustrar esse exemplo, podemos citar as hélices de um ventilador que executam um movimento circular (rotação), como mostrado na Figura 5.

[12] Disponível em:< https://www.kuadro.com.br/posts/cinematica-do-movimento-circular/ >acesso em 24/09/2018.

Figura 5: Esquema mostrando a velocidade das pás do ventilador associada ao movimento de rotação. Modificado pelo autor.



Fonte: Disponível em[13]:

Cabe destacar que neste caso todos elementos, seja pá ou eixo, terão a mesma velocidade angular (ω) e que a velocidade linear (translacional) do eixo do ventilador (sem a função de oscilação) será nula, porém quanto mais afastado do eixo uma partícula estiver maior será a velocidade linear, que é sempre tangente à trajetória realizada, como mostra a equação abaixo.

$$v = \omega R$$

Quando falamos de movimento **linear de translação**, analisamos objetos no qual todas as partículas que os compõe desenvolvem trajetórias paralelas e apresentando a mesma velocidade. Neste caso, podemos simplificar esse problema trocando a análise do movimento das muitas partículas que compõe o objeto, pela análise do comportamento de uma única partícula localizada no centro de massa do objeto. Considerando o caso onde a aceleração é constante e não nula, como é o caso do MRUV (movimento retilíneo uniformemente variado) ou o caso onde a aceleração é nula, MRU (movimento retilíneo uniforme), podemos determinar o comportamento das grandezas Física em um momento futuro por meio das equações da cinemática. Podemos tomar como exemplo de movimento de translação, o movimento de sobe e desce do elevador.

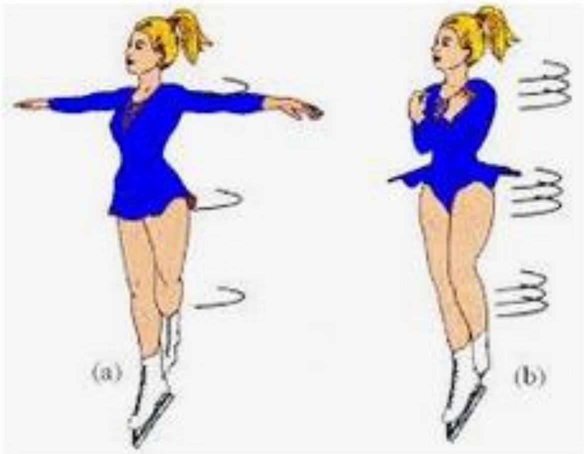
O movimento de rotação é bastante comum em nosso cotidiano. Hoje sabemos que o nosso planeta - a Terra - está em rotação em torno de um eixo imaginário que passa pelos polos geográficos. A consequência disso é uma sucessão de dias intercalados com noites. Outro movimento que a Terra executa é o de movimento chamado de translação – responsável pela sucessão dos anos – caracterizado pela

[13] Disponível em: <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/fisica/movimentos-translacao-rotacao.htm>-acesso em 24/09/2018.

rotação em torno do sol, realizando uma trajetória aproximadamente circular. Neste cenário podemos citar muitos exemplos de movimento de rotação, como é o caso das rodas do carro, de uma porta, da patinadora no gelo, dos ponteiro de um relógio, e alguns compostos por uma associação de movimentos como é o caso do movimento do peão que rotaciona e precessiona[14] em torno de um eixo. No caso do movimento das portas, as dobradiças são quem de permitem o movimento de rotação da porta em torno do batente da porta. Veremos mais à frente que para fazermos uma porta girar devemos aplicar uma força sobre ela, e que é mais fácil abrir a porta empurrando-a cada vez mais longe das dobradiças. Isso se deve ao comportamento do torque (τ), que aumenta com a distância R, entre o eixo de rotação e o ponto onde a força é aplicada.

Nesse contexto, podemos destacar também o movimento de rodopio de uma patinadora no gelo, que consegue aumentar sua velocidade de rotação com o simples fato de fechar os braços, conforme ilustra a Figura 6. Isso se deve ao comportamento de uma grandeza Física chamada de momento de inércia (I), caracterizado pela dificuldade de colocar um corpo em rotação, que diminui com o fechamento dos braços, fazendo com que a velocidade angular aumente, de modo a manter sempre o mesmo momento angular (L). A relação entre o momento angular, o momento de inércia e a velocidade angular pode ser observado na Tabela 2.

Figura 6: Imagem mostrando o rodopio da patinadora. Em (a) a patinadora apresenta velocidade angular baixa e em (b) velocidade angular alta.

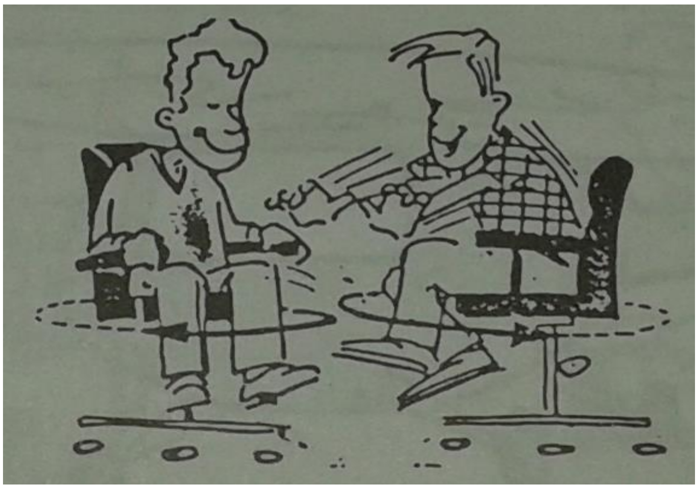


Fonte: Disponível em[15]:

[14] O Movimento de precessão é caracterizado pela oscilação que o peão realiza em torno do eixo, normalmente um pouco antes de parar de girar.
[15] Disponível em: <https://w w w .google.com.br/search?q=bailarina+no+gelo,+inércia&tbm>-acesso em 24/09/2018.

De acordo com GREF(2001), uma outra situação que merece atenção é dada pelo exemplo de duas pessoas sentadas em cadeiras giratórias. Quando as duas pessoas retiraram os pés do chão e uma empurra a outra, inicia-se o movimento de rotação, no qual as duas pessoas terão sentidos opostos de rotação, conforme mostra a Figura 7.

Figura7: Esquema mostrando as duas pessoas sentadas iniciando o movimento de rotação em cadeiras giratórias

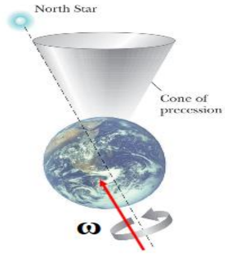


Fonte: GREF. **Física 1 mecânica.** São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2001. p. 69-69.

A partir das características do movimento descrito na Figura 6, podemos analisar o fenômeno da conservação do momento angular, que nunca tende a se alterar a menos que um torque externo for aplicado. Caso as duas pessoas de mesma massa e altura, estiverem sentadas da mesma maneira, em cadeira iguais, a implicação direta do princípio de conservação do momento angular indica que após iniciado o movimento, a mesma velocidade angular em módulo será verificada para as duas pessoas. Caso contrário, se existir diferença entre as massas das duas pessoas, a pessoa mais gordinha apresentará velocidade angular mais baixa em função do aumento do momento de inércia. A mesma ideia de conservação do momento angular também pode ser aplicada ao funcionamento do helicóptero, que sempre precisará de dois rotores para balancear o seu movimento.

A seguir apresentamos alguns exemplos relacionados ao conteúdo apresentado.

Exemplo 1: Cálculo da velocidade angular da Terra em torno do seu eixo[16]. A Terra completa uma revolução a cada 23h e 56 min. Qual é o módulo da sua velocidade angular em rad/s?



23 h x 3600 segundos/h = 82800 s

56 min x 60 segundos/min= 3360 s

T = 82800 + 3360 = 86160 s

$$\omega = \frac{2\pi rad}{T} = \frac{6{,}28 rad}{86160 s} = 7{,}29.10^{-5} rad/s$$

A sua direção aponta para o norte ao longo do eixo de rotação.

Exemplo 2 (modificado pelo autor)[17]: Um volante circular como raio 0,4 metros gira, partindo do repouso, com aceleração angular igual a 2 rad/s².

(a) Qual será a sua velocidade angular depois de 10 segundos?

(b) Qual será o ângulo descrito neste tempo?

(a) Pela função horária da velocidade angular:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t \qquad \begin{aligned} \omega &= 0 + 2 \cdot 10 \\ \omega &= 20 rad/s \end{aligned}$$

(b) Pela função horária do deslocamento angular:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 \qquad \begin{aligned} \varphi &= 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^2 \\ \varphi &= 100 rad \end{aligned}$$

Exercícios propostos:

1) Um disco gira em torno do seu eixo, partindo do repouso com aceleração constante de 15 rad/s². Nessas condições, qual será a velocidade angular apresentada pelo disco no instante t = 7 s? Resposta: 105 rad/s

[16] Disponível em: <http://midia.cmais.com.br/assets/file/original/2a15766f16c8b7e9c35732253c4e26296aa62628.pdf>-acesso em 11/10/2018.

[17] Disponível em: <https://w w w .sofisica.com.br/conteudos/Mecanica/Cinematica/mc2.php>-acesso em 11/10/2018.

2) Um disco, inicialmente girando com uma velocidade angular de 120 rad/s, é freado com uma aceleração angular constante de módulo igual a 4 rad/s^2. [18]

(a) Quanto tempo este disco leva para parar?

(b) Qual o deslocamento angular deste disco durante este tempo?

Resposta: a) 30s, b) 1,8.10^3 rad

3) Um tambor gira em torno do seu eixo central e bruscamente é freado sofrendo uma desaceleração angular de 4,2 rad/s^2.

a) Qual é a sua velocidade angular, sabendo que ele demorou 3s para parar?

b) Qual é o deslocamento angular do tambor até parar?

Resposta: a) 12,6 rad/s, b) 18,9 rad.

[18] Disponível em: <http://professor.pucgoias.edu.br/SiteDocente/admin/arquivosUpload/6741> - acesso em 11/10/2018.

Tópico 2: Momento de Inércia e Torque.

Duração desse tópico: proposta de 3 horas/aula para trabalhar esse tópico. No entanto, caso haja necessidade, o professor poderá utilizar mais tempo.

Expressaremos aqui duas grandezas fundamentais para o estudo e compreensão mais ampla do movimento circular. O momento de inércia e o torque que são importantes grandezas para o entendimento da dinâmica das rotações presente em nosso estudo.

De acordo com TIPLER, MOSCA(2006), o momento de inércia é uma medida de resistência inercial de um objeto que sofre movimento rotacional em torno de um eixo. Ele é uma medida rotacional análoga à massa. O momento de inércia em torno de um eixo depende da distribuição relativa da massa do objeto em relação ao eixo. Entende-se que quanto mais distante a massa estiver do eixo, maior será a contribuição ao momento de inércia em relação a esse eixo. Vale lembrar que o momento de inércia dependerá da localização do eixo de rotação e da massa do objeto.

Imaginemos agora um corpo, girando no espaço sem que o seu centro de massa se desloque. Dessa forma, se dividirmos o corpo em pequenas partes de massa m_i, cada uma dessas partes, exceto aquelas presente no eixo de rotação estarão em movimento, apresentando trajetórias circulares. Para movimentos translacionais, no qual o centro de massa possui velocidade não nula – não sendo este caso - podemos associar uma energia cinética ao corpo da seguinte maneira:

$$K = \tfrac{1}{2} mv^2 \qquad (1)$$

Entretanto, para o nosso caso, contribuição do centro de massa ao movimento é nula e a energia cinética assumira um valor zero, não acrescentando em nada no que se refere ao movimento. Neste caso, devemos somar a contribuição da energia cinética de cada uma das pequenas partes m_i que compõe o corpo rígido.

$$K = \tfrac{1}{2} m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2v_2^2 + \tfrac{1}{2} m_3v_3^2 \ldots + \tfrac{1}{2} m_4v_4^2 \qquad (2)$$

Como se observa, o corpo apresenta uma energia cinética diferente de zero associada ao movimento circular, mesmo que o seu centro de massa esteja em repouso. A princípio como a velocidade (v) não é igual para todas as partículas, e sendo assim, substituiremos este valor através da equação (3), já que todas as partículas apresentam a mesma velocidade angular.

$$v = \omega r \tag{3}$$

Portanto a energia cinética se configura como:

$$K = \sum ½ m_i\,(\omega r_i)^2 = \sum ½\,(m_i r_i^2)\,\omega^2 \tag{4}$$

Importante elencar que o momento de inércia obtido a partir da equação (4), apresenta como uma grandeza Física essencial para a compreensão do estudo do movimento. A equação (5) apresenta a dependência da massa com a distância do eixo de rotação do momento de inércia de um sistema de partículas que também pode ser usado no tratamento de um corpo rígido dividido em pequenas partes, cada uma com massa m_i.

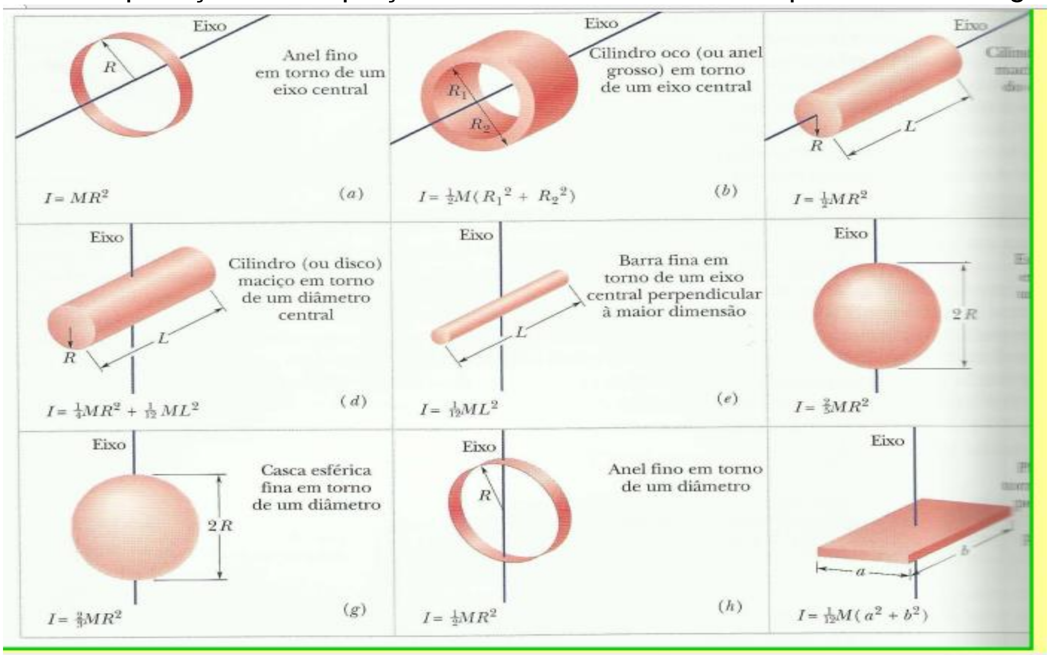
$$I = \sum m_i r_i^2 \text{ (definição momento de inércia)} \tag{5}$$

Neste caso a energia cinética de rotação pode ser rescrita como:

$$K = \frac{I\omega^2}{2} \tag{6}$$

Alguns momentos de inércia aparecem descritos no Quadro 1 que segue:

Quadro 1: Aplicação das equações do momento de inércia para diferentes geometrias



Fonte: TIPLER, P.A.; MOSCA.G, **Física**. 5. ed, v. 1, v. 2 e v.3, Rio de Janeiro: LTC, 2006.

Teorema dos eixos paralelos.

De acordo com o quadro acima, em alguns objetos o eixo de rotação passa pelo centro de massa (CM) e em outros casos, o eixo é apenas paralelo ao eixo que passa pelo CM. Um modo prático de encontrar o CM de um objeto consiste em pendurar o corpo com um cordel e traçar a continuidade da linha vertical através do objeto. Repetindo esse procedimento para diferentes pontos do objeto, encontraremos um ponto no qual as linhas irão se cruzar, o qual define a posição do cento de massa do objeto.

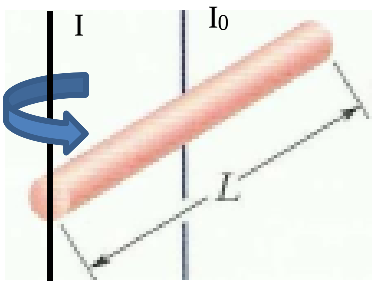
O teorema dos eixos paralelos permite calcular o momento de inércia de um corpo de massa M, quando o mesmo apresenta um eixo paralelo ao eixo que passa pelo CM, a partir do seu valor para o centro de massa. Para que isso ocorra basta sabermos a distância d entre os dois eixos.

Matematicamente, podemos equacionar o teorema dos eixo paralelos da seguinte forma:

$$I = I_0 + M\mathrm{d}^2, \tag{1}$$

em que d é a distância entre os eixos e I_0 é o momento de inércia em relação ao CM. Um exemplo da aplicação desse teorema decorre do cálculo do momento de inércia de uma barra delgada com massa M e comprimento L que gira em torno de sua extremidade, de acordo com a Figura 8.

Figura 8: Barra delgada girando pela extremidade.



Fonte: TIPLER, P.A.; MOSCA.G, **Física**. 5. ed, v. 1, v. 2 e v.3, Rio de Janeiro: LTC, 2006.

Através de dados descritos no Quadro 1 temos que o momento de inércia da referida barra com relação ao CM é:

$$I = \frac{1}{12} ML^2 \tag{2}$$

Sabendo que a distância entre os dois eixos é, $d = \frac{L}{2}$, usando a fórmula do teorema dos eixos paralelos temos:

$$I = I_0 + M\mathrm{d}^2$$

$$I = \frac{1}{12} ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$I = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{4}$$

$$I = \frac{ML^2}{3} \tag{3}$$

Pela análise da equação (3), podemos notar que a barra delgada que gira pelo eixo de rotação fixo na extremidade apresenta momento de inércia quatro vezes maior que no caso onde o eixo de rotação passa pelo CM. Isso se deve à distribuição de massa, que quanto mais longe do eixo de rotação, maior será o momento de inércia.

Torque ou momento de uma força

Sabemos que quando uma força resultante diferente de zero é aplicada no centro de massa de um corpo, ele começa a acelerar, ou seja, ganha ou perde velocidade. Podemos tomar como exemplo uma caixa, inicialmente em repouso (v=0), e nela aplica-se uma força de 10N. Essa começará a acelerar, desde que a força de atrito seja menor que 10 N, ganhando velocidade.

De uma maneira geral, se queremos que um corpo comece a rotacionar, basta aplicar uma força cuja linha de ação não passe pelo CM do corpo. No entanto, para o caso de uma porta que já possui um eixo de rotação determinado pelas posições das dobradiças, alguns cuidados com o formalismo vetorial devem ser tomados:

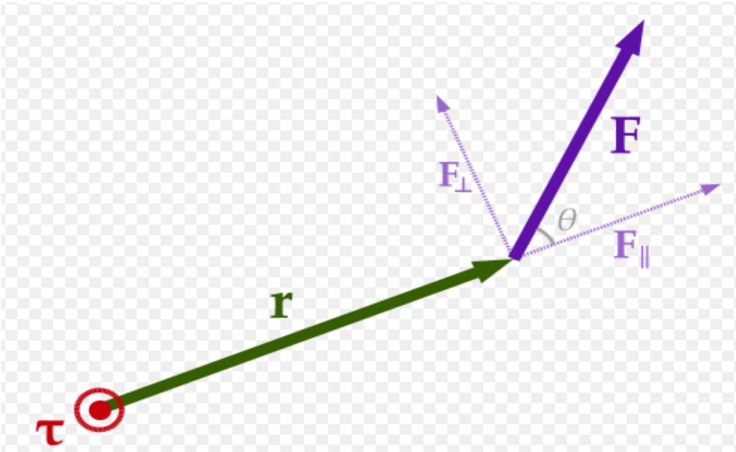
- Caso a força seja aplicada sobre o eixo de rotação (dobradiças), não haverá rotação da porta.
- Caso a força seja aplicada paralelamente ao eixo de rotação, não haverá rotação da porta.

- Para que o processo de abrir ou fechar a porta seja conduzido com o menor esforço possível, será necessário que a força seja aplicada perpendicularmente à porta, o mais distante possível do eixo de rotação.

Neste contexto, o torque (para os físicos) ou o momento de uma força (para os engenheiros), define a grandeza Física responsável pela determinação da capacidade de gerar movimento de rotação. O torque, aplicado ao movimento de rotação, apresenta significado físico análogo ao da força para o movimento de translação.

Para calcular o módulo desse torque, precisamos de dois fatores imprescindíveis que são: a força em Newtons (N) e o braço da alavanca, dado em metros no SI. O torque representado pela letra grega tau, τ, é medido em Newton x metro (Nm) no SI, que corresponde a mesma dimensão de energia, porém a unidade de energia é o joule e é simbolizada por J, no SI. O torque é obtido pelo produto vetorial entre a força, F, e o braço da alavanca, r, definido pela a distância do eixo de rotação até o ponto de aplicação da força conforme mostrado pela Figura 9.

Figura 9: Esquema mostrando a barra fixa.



Fonte: Disponível em[19]:

Matematicamente podemos equacionar o torque de modo a obter um vetor, por meio do produto vetorial equação (1), ou o seu módulo, por meio de uma multiplicação direta equação (2),

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1)$$

$$\tau = rFsen\theta = rF_{\perp} \quad (2)$$

[19] Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Torque,_position,_and_force.svg>-acesso em 12/10/2018.

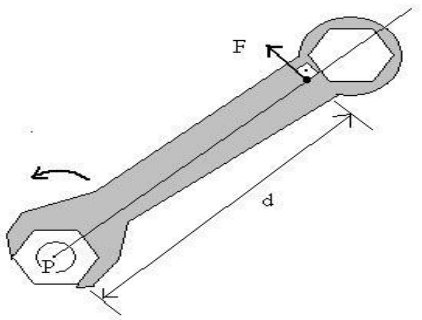
onde $F_{\perp}$ determina a componente perpendicular à r da força F e θ define o ângulo entre os vetores F e r.

Objetivando facilitar a obtenção do torque, reduzindo os pré-requisitos matemáticos sobre o tema, sugerimos que seja utilizado ao longo material a forma escalar para determinar o torque, sabendo que sua direção é sempre perpendicular ao plano de rotação (plano que contém os vetores r e F), e usando a seguinte convenção para obtenção do seu sentido: rotações anti-horárias para o torque positivo e rotações horárias para o torque negativo.

Analisando a equação (2) fica evidente o motivo da maçaneta da porta das casas estarem mais distantes da dobradiça (eixo de rotação), pois quanto maior for a distância r, menor será a força necessária para gerar o mesmo torque para abri-la ou fechá-la.

Outro exemplo bem comum de otimização do torque é dado pelo aperto de um parafuso com uma chave de boca, como mostrado na Figura 10. Neste caso a força é aplicada na direção perpendicular ao cabo de uma chave (sen90° = 1, maior valor possível para a função seno) na extremidade oposta ao parafuso (maior valor de d possível), fazendo com que ela passe a girar um parafuso em torno de um ponto fixo da maneira mais eficiente possível, ou sejam, necessitando da menor força do operador.

Figura 10: Representação de uma situação de aplicação de torque em uma chave de boca



Fonte: Disponível em[20]:

Neste caso a equação do torque podem ser reescrita da seguinte maneira:

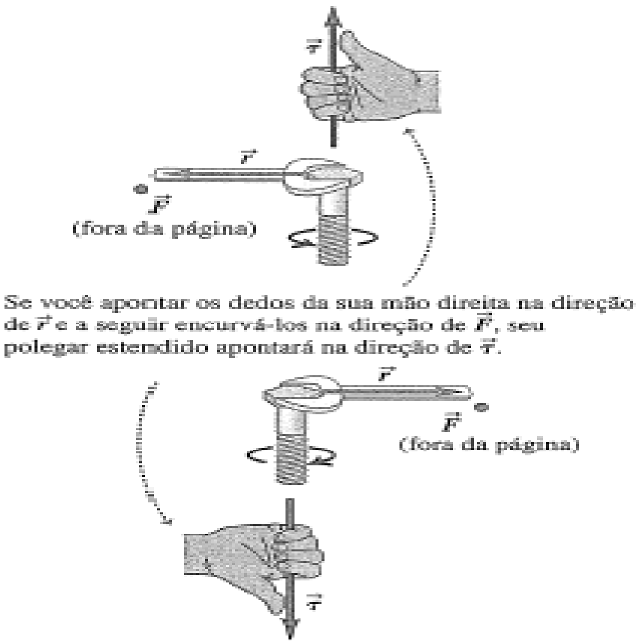
$$\tau = dFsen90° = dF$$

[20]Disponível em:< https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Torque,_position,_and_force.svg>-acesso em 12/10/2018.

Uma forma prática para verificar a direção e o sentido do vetor torque pode ser obtida por meio da regra da mão direita. Conforme essa regra a direção do torque sempre será perpendicular ao plano definido pelos vetores r e F, que costumeiramente compõe o plano de rotação, e o sentido do torque é obtido pelo polegar da mão direita, quando ajustamos os dedos dessa mão no sentido de rotação do objeto, conforme mostrado na Figura 11.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \rightarrow definição\ do\ vetor\ torque$$

Figura 11: Esquema mostrando a direção e o sentido do vetor torque através da regra da mão direita.

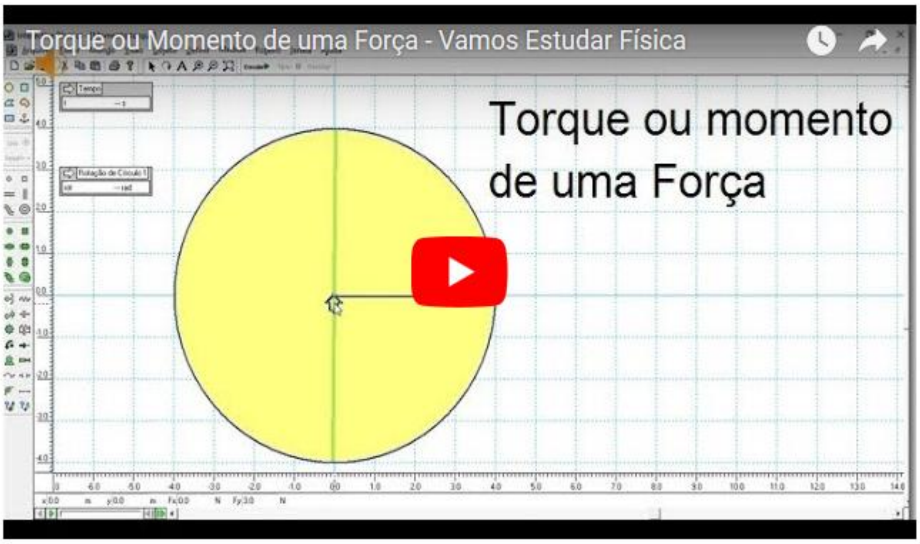


Fonte: Disponível em[21]:

Outro enfoque mais aprofundado, sobre momento de Inércia, torque ou momento de uma força, é obtido através do simulador torque ou momento de uma força, apresentado a seguir.

[21] Disponível em:< https// www.ufersa.edu.br/portal/view/uploads/setores/.../Dinamica%20de%20Rotação.ppt>-acesso em 13/10/2018.

Figura 12: simulador para analisar torque ou momento de uma força.



Fonte: Disponível em[22]:

Para finalizar, considerando as diferentes formas de cálculo do torque, apresentamos o experimento da determinação do atrito do rolamento. Para tanto será necessário os seguintes itens:

- 2 discos de aço com dimensões aproximadas de 150 mm de diâmetro e 15mm de espessura;
- 2 rolamentos com 25mm de raio externo, 12mm de raio interno e 4mm de espessura;
- 2 porcas e 2 arruelas;
- 1 eixo de aço com 150mm de largura e 11,5mm de diâmetro;
- 1 pedaço de MDF com 27cm de comprimento por 23cm de largura;
- 1 pedaço de MDF com 46cm de comprimento por 27cm de largura;
- 1 alavanca para travar os discos;
- 1 sensor;

O procedimento de montagem inicia-se parafusando ou colando o MDF menor de maneira perpendicular no MDF maior. Em seguida com auxílio de uma furadeira, faça uma abertura no centro da madeira menor para que seja fixado o eixo de aço para sustentar os discos. A ideia principal sobre o experimento é simples e consiste em fixar o horizontalmente o eixo de modo que os discos possam girar livremente. A posição entre os sensor e o disco deve ser ajustada de modo que as tarjas do disco

[22] Disponível em:< https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/fisica/momento-ou-torque-uma-forca.htm>-acesso em 13/10/2018.

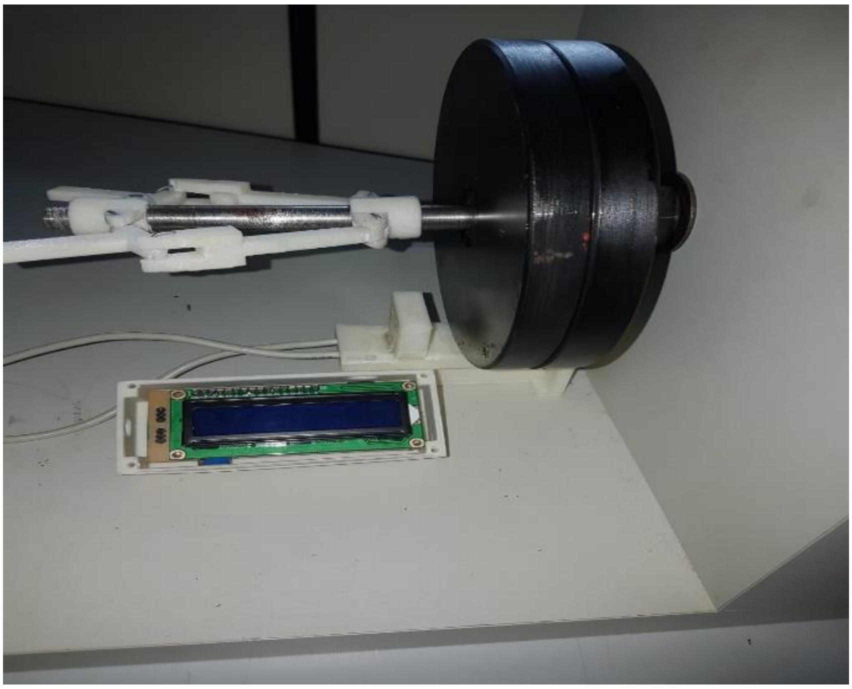
estejam alinhadas com o sensor, que estará preso no suporte de MDF. Abaixo as Figuras 13 e 14 mostram detalhes sobre a montagem do experimento.

Figura 13: (esquerda) Imagem das peças-fase inicial. (Direita) Imagem das peças. Início do processo de montagem

(a) (b)

Fonte: Autoria própria (2018).

Figura 14: visão frontal do experimento.



Fonte: Autoria própria (2018).

Por meio da Figura 14 podemos visualizar mais detalhes sobre o experimento, que será composto por um eixo fixado em uma estrutura de madeira. Dois discos poderão ser acoplados por um mecanismo que permite o deslizamento sobre o eixo. Um sensor conectado a uma interface fará a leitura da velocidade angular de cada disco em pequenos intervalos de tempo. Esse processo consiste em determinar o número de tarjas que passam pelo sensor em um intervalo de tempo conhecido. Sabendo o tamanho de cada tarja no disco, podemos facilmente determinar a velocidade angular. Segue abaixo um exemplo para ilustra este caso.

Considere que o disco foi dividido em 100 marcações, e que é verificada uma contagem de N = 8 tarjas a cada intervalo de tempo Δt = 2 segundos. Nesta situação, o tamanho de cada tarja seja (2π/100 rad) e a determinação da velocidade angular pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{N}(\frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{100}})}{\boldsymbol{\Delta t}} = \frac{\boldsymbol{8}(\frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{100}})}{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{0{,}251\ rad/s}$$

Assim como a força pode ser obtida considerando a variação temporal do momento linear, o torque pode ser calculado considerando a variação temporal do momento angular, conforme mostrado na equação abaixo:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\boldsymbol{d\vec{L}}}{\boldsymbol{dt}} \tag{1}$$

Considerando a medida de ΔL em pequenos intervalos de tempo Δt, podemos simplificar a equação (1), de modo a obter aproximação do resultado pela equação (2).

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{\Delta L}}{\boldsymbol{\Delta t}} \tag{2}$$

Com base nos conceitos apresentados no Tópico 1, podemos calcular o momento angular utilizando o momento de inercia de um disco, conforme segue abaixo,

$$L = I\omega = (\frac{1}{2}MR^2)\omega$$

onde M é a massa do disco, R é o raio do disco e ω é a velocidade angular.

Para calcular a força de atrito no rolamento precisamos retomar a equação (2) e utilizar a definição de torque relacionada a uma força. Neste caso temos:

$$\tau = rF = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{(\frac{1}{2}MR^2)\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$F_{at} = \frac{(\frac{1}{2}MR^2)\Delta\omega}{r\Delta t} \quad (3)$$

Na equação (3), F_{at} é a força de atrito no rolamento, r define o raio do rolamento, $\Delta\omega$ é a variação da velocidade angular em um intervalo de tempo Δt.

Dessa forma, podemos finalizar a determinação da força de atrito do rolamento, promovendo um impulso inicial no disco e obtendo o intervalo de tempo de atualização das medidas do display do sensor (Δt), de aproximadamente 1 segundo, e a variação da velocidade angular ($\Delta\omega$) nesse intervalo de tempo.

Alguns exemplos práticos para um melhor entendimento do conteúdo[23].

1) Dois garotos brincam em uma gangorra de 10 m de comprimento que possui seu eixo de rotação exatamente em seu centro. Adotando a barra que compõe a gangorra como homogênea e sabendo que um garoto de 30 kg sentou-se na extremidade da direita, qual deverá ser a distância entre o segundo garoto e o eixo de rotação para que a gangorra mantenha-se em equilíbrio. Dados: massa do segundo garoto = 40 kg; aceleração da gravidade = 10 m/s^2.

Resolução: Para que o equilíbrio seja possível, os torques gerados pelo peso de cada garoto deverão ser iguais. Sabendo que o peso é fruto do produto da massa pela aceleração da gravidade e que o torque é o produto da força pelo braço de alavanca (para o primeiro garoto d = 5m), podemos escrever que:

[23] Disponível em: <www.infoescola.com>-acesso em 14/10/2018.

40.10.X = 30.10.5

400.X = 1500

X = 3,75 m

2) Por exemplo, ao fechar a porta de um carro, de 0,9 m de comprimento, nota-se que esta gira no sentido horário. Sabendo que a força aplicada perpendicular à porta é de 4 N, qual será o valor da intensidade do torque em relação à dobradiça da porta?

Sabemos que o torque, quando o movimento é no sentido horário, é dado por:

τ = - F . d

assim:

τ = - 4 . 0,9

portanto:

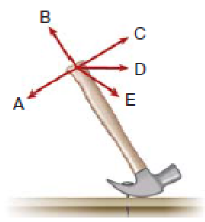
τ = - 3,6 N.m

Podemos concluir que o torque é inversamente proporcional à distância d em relação ao ponto de rotação. Devido a esse fato é que se coloca a maçaneta das portas na extremidade oposta ao ponto de rotação.

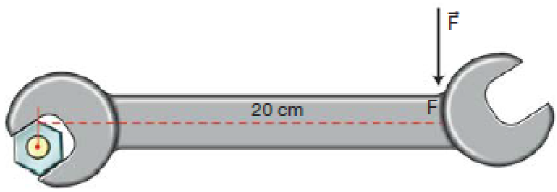
Exercícios propostos (1, 2, 3, 4)[24]

1) (MACK-SP) Querendo-se arrancar um prego com um martelo, conforme mostra a figura, qual das forças indicadas (todas elas de mesma intensidade) será mais eficiente?

a) A b) D c) B d) E e) C



2)(UFSM) Segundo o manual da moto Honda CG125, o valor aconselhado do torque, para apertar a porca do eixo dianteiro sem danificá-lo é 60 N.m.



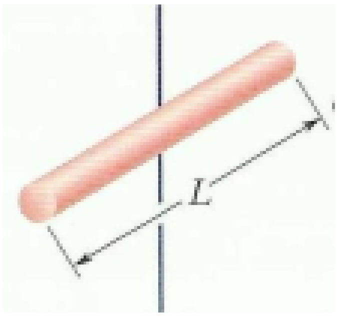
[24] Disponível em:< https://alexfisica.wordpress.com/lista-de-exercicios>-acesso em 14/10/2018.

Usando uma chave de boca semelhante à da figura, a força que produzirá esse torque é:

a) 3,0 N b) 12,0 N d) 60,0 N e) 300,0 N c) 30,0 N

3) Ricardo quer remover o parafuso sextavado da roda do automóvel aplicando uma força vertical F = 40 N no ponto *A* da chave. Verifique se Ricardo conseguirá realizar essa tarefa, sabendo-se que é necessário um torque inicial de 22 Nm em relação ao eixo para desapertar o parafuso. Dados: AC = 0,3 m e AD = 0,5 m.

4) Considerando o experimento anterior, usado para determinar a força de atrito em um rolamento, determine a equação da força de atrito quando o disco for substituído por uma barra delgada de comprimento L, centrada no eixo de rotação, conforme a figura abaixo.



Tópico 3: Momento Angular e a Conservação do Momento Angular.

Duração desse tópico: proposta de 3 horas/aula para trabalhar esse tópico. No entanto, caso haja necessidade, o professor poderá utilizar mais horas-aula.

De acordo com alguns estudos como aponta TIPLER, MOSCA(2006), o momento angular é uma grandeza Física de grande importância, tanto na Física clássica como na quântica, pois o momento angular é responsável pela quantidade de movimento associado a um corpo que executa um movimento de rotação em torno de um eixo fixo.

Assim como o torque, define-se o momento angular a partir do produto vetorial de duas grandezas físicas, r, que determina a distância do eixo de rotação ou da origem do sistema até o ponto no qual será aplicado o momento linear p, conforme mostrado na equação (1).

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{1}$$

No sistema cartesiano de coordenadas, o momento angular assim como o torque podem ser obtidos a partir do determinante da matriz que relaciona a dupla de vetores do produto vetorial, conforme descrito na equação (2),

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = Det \begin{matrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ p_x & p_y & p_z \end{matrix} \quad (2)$$

onde $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ são vetores unitários e servem para indicar as direções dos eixos x, y e z respectivamente. Dessa forma, podermos reescrever a equação (2) de modo a obter a equação (3),

$$\vec{L} = L_x\hat{\imath} + L_y\hat{\jmath} + L_z\hat{k} \quad (3)$$

onde:

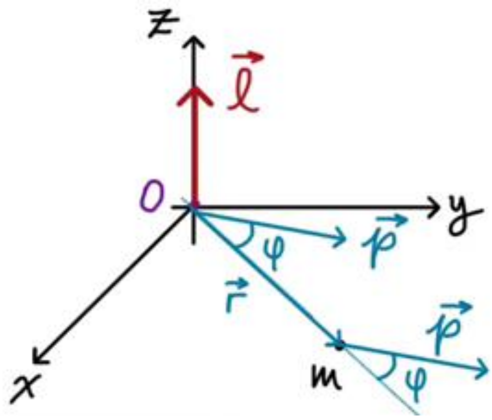
$$L_x = r_y p_z - p_y r_z$$

$$L_y = r_z p_x - p_z r_x$$

$$L_z = r_x p_y - p_x r_y$$

Na Figura 15 podemos notar como o vetor momento angular e suas projeções L_x, L_y e L_z são representadas no plano cartesiano.

Figura 15: Esquema do vetor momento angular com as suas projeções



Fonte: Disponível em[25]:

É importante lembrar que a partir da definição de momento linear podemos reescrever a equação (2) de modo a obter a equação (4).

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = m \left(Det \begin{matrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ v_x & v_y & v_z \end{matrix} \right) \quad (4)$$

Uma outra forma de tratar os problemas envolvendo o momento angular – com um formalismo matemático mais acessível - é dada pelo uso da notação escalar dessa grandeza Física, e posterior atribuição da direção e do sentido por meio da regra da

[25] Disponível em:< https://www.youtube.com/watch?v=iNunr4FyMvY>-acesso em 14/10/2018.

mão direita, que pode ser utilizada para orientar qualquer vetor obtido a partir de um produto vetorial. Dessa forma, o módulo do momento angular pode ser calculado por meio da equação (5),

$$L = rpsen(\theta) \quad (5)$$

onde r define a distância da origem ou do eixo de rotação até o ponto no qual o momento linear p está aplicado e θ descreve o ângulo entre os vetores r e p. Para um ângulo de 90°, que é obtido sempre que o movimento for circular, podemos simplificar a equação, de modo a obter a equação (6).

$$L = mrv \quad (6)$$

Considerando uma partícula que apresenta distância fixas em relação ao eixo de rotação, usando a relação entre velocidade angular e linear, podemos reescrever a equação (6) obtendo a equação (7).

$$L = mr^2\omega \quad (7)$$

É importante notar que o termo mr^2 é definido pelo momento angular de uma partícula de massa m que gira a uma distância r do eixo de rotação. Dessa forma o momento angular pode ser reescrito como:

$$L = I\omega \quad (8)$$

Conforme citado no tópico anterior, não podemos deixar de destacar a relação existente entre o torque e o momento angular. Partindo da definição do torque,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

usando a segunda Lei de Newton da forma mais geral possível, $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, temos:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Considerando a definição do momento angular e sua derivada, $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$, torna-se evidente a relação entre o torque e o momento angular conforme a equação (9).

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (9)$$

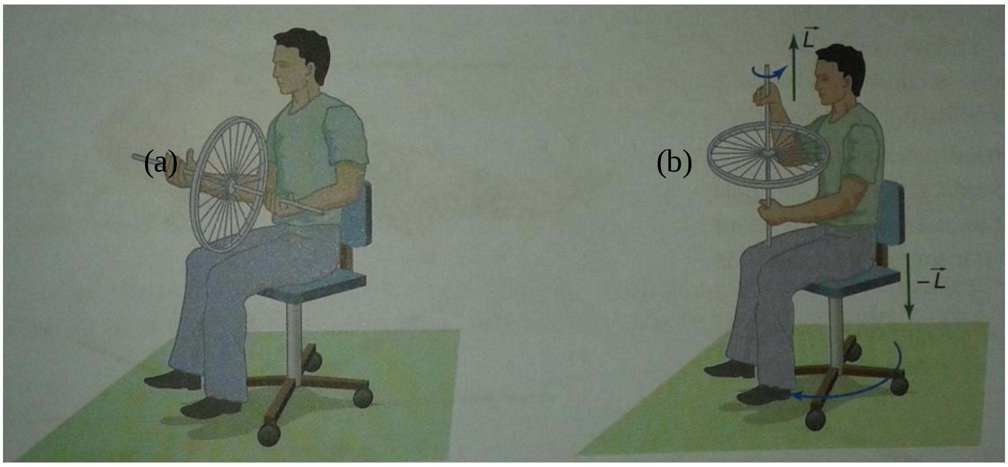
Considerando a variação do momento angular em pequenos intervalos de tempo – intervalos que tendem a zero - podemos simplificar o uso da derivada por uma simples razão conforme descrito a seguir.

$$\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} \quad (10)$$

A partir da equação (10) podemos verificar uma das mais importantes leis de conservação da Física, a conservação do momento angular, segundo a qual a ausência de torques externos, garante que o sistema sempre apresentará momento angular constante, ou seja, não variará o seu valor com o tempo.

Como exemplo dessa aplicação, podemos considerar uma cadeira que pode girar em torno do seu eixo vertical, praticamente sem atrito. Nessas condições, o torque externo é nulo, e sendo assim, seu momento angular não varia com o tempo. Complementando essa situação, imaginamos uma pessoa que está sentada à mesma cadeira, inicialmente sem girar e sem encostar os pés no chão, segurando uma roda de bicicleta que gira em torno do seu eixo na horizontal (Figura a). A pessoa pode iniciar o movimento alinhando o eixo para a vertical (Figura b), pois nessa configuração a pessoa e cadeira passam a girar em sentido oposto ao da roda para que o momento angular na vertical permaneça nulo, igual ao da situação anterior.

Figura 16: Esquema mostrando a conservação do momento angular.



Fonte: Disponível em[26]:

Outro exemplo de conservação de momento angular ocorre no movimento da patinadora no gelo, quando ela diminui o seu momento de inércia encolhendo os braços junto ao corpo (eixo de rotação) a velocidade angular aumenta. Imaginando que não haja torque nas pontas dos pés, fazendo com que aumente ou desacelere a rotação da patinadora, teremos que $L_1 = L_2$, ou seja, momento angular inicial quando

[26] Disponível em: <https/w w w .google.com.br/search? q=imagens+de+momento+angular>-acesso em 14/10/2018.

os braços estiverem abertos (L_1) será igual ao momento angular final com os braços fechados (L_2). Portanto:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \tag{11}$$

Considerando na igualdade a igualdade descrita pela equação (11) que I_1 é grande (braços abertos), e que I_2 é pequeno (braços fechados), isso implica que a velocidade angular 1 será pequena e que a velocidade angular 2 será grande, mantendo portanto o momento angular constante.

Por outro lado, a energia cinética de rotação, descrita pela equação (1) no Tópico 2, nem sempre será conservada. Para que a conservação da energia cinética ocorra, é necessário que durante o movimento não exista a ação de torques internos e externos ao sistema, o que ficará mais evidente ao tratarmos os próximos exemplos práticos.

Propostas de atividades:

Proposta 1: o acoplamento de discos.

Retomar o experimento de atrito do rolamento descrito no tópico anterior, porém neste caso, propondo o acoplamento de discos com velocidades angulares diferentes. Para tanto, os dois discos serão desacoplados e girados com velocidades angulares diferentes, e após o acoplamento, passarão a girar com a mesma velocidade. A velocidade angular será tomada imediatamente antes e após o acoplamento. Neste contexto a equação que descreve o momento angular antes (L_{1i} e L_{2i}) e depois (L_{1f} e L_{2f}) do acoplamento segue abaixo.

$$L_{1i} + L_{2i} = L_{1f} + L_{2f}$$

$$I_1\omega_{1i} + I_2\omega_{2i} = (I_1 + I_2)\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{I_1\,\omega_{1i} + I_2\omega_{2i}}{(I_1 + I_2)} \tag{12}$$

Podemos a partir da equação (12) comparar os valores experimentais com a previsão teórica obtendo boa aproximação, indicando dessa forma a validade da conservação do momento angular.

Por outro lado, avaliando o cenário da a energia cinética, podemos propor um equacionamento similar. Neste caso.

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f}$$

$$\frac{I_1\,\omega_{1i}{}^2}{2} + \frac{I_2\,\omega_{2i}{}^2}{2} = \frac{(I_1 + I_2)\,\omega_f{}^2}{2}$$

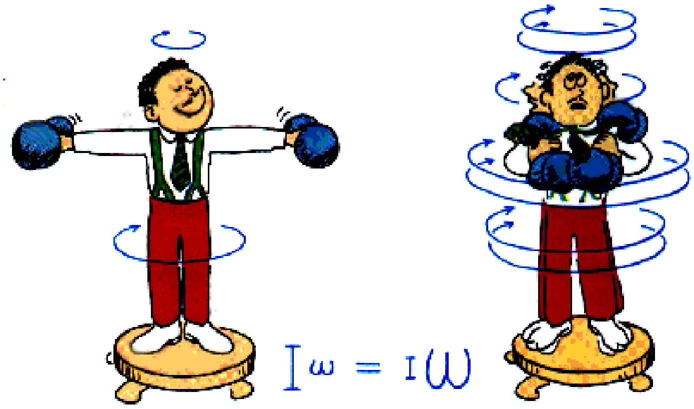
$$\omega_f = \sqrt{\frac{I_1 \omega_{1i}{}^2 + I_2 \omega_{2i}{}^2}{(I_1 + I_2)}} \tag{13}$$

Comparando o resultado da velocidade angular após o acoplamento da equação (13) com os valores experimentais obtidos, podemos facilmente notar que não haverá concordância entre os resultados, indicando que não haverá conservação da energia cinética de rotação neste caso. Isso ocorre em função da força de atrito (torque interno) que atua durante o acoplamento dissipando parte da energia cinética. Cabe destacar que a dissipação de energia durante o acoplamento não afeta a conservação do momento angular.

Proposta 2: a plataforma giratória.

A proposta desse experimento é avaliar qualitativamente a conservação do momento angular de maneira análoga ao da patinadora no gelo. Utilizando uma plataforma giratória conforme ilustrado na (Figura 17), dois pares de halteres com massas iguais, um aluno é posto a girar de pé em cima da plataforma segurando os alteres, ora com os braços abertos (I grande e ω pequeno), ora com os braços fechados (I pequeno e ω grande).

Figura 17: mostrando a idéia do experimento.

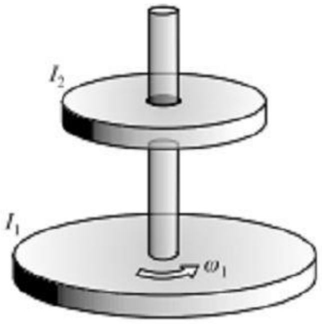


Fonte: Disponível em[27]:

Exercícios resolvidos(1;2)[28]

[27] Disponível em: <https: www.google.com.br/search?q=plataforma+giratória+momento+angular>-acesso em 14/10/2018.
[28] Disponível em:< http://pmoscon.com/Fisica1/lista-de-exercicios-3-Fisical_resolvidos.pdf>-acesso em 15/10/2018.

1) Um disco cujo momento de inércia vale I_1 = 1,27 kg.m^2 gira com velocidade angular de ω_1 = 824 rev/min em torno de um eixo vertical de momento de inércia desprezível.
2) Um segundo disco, de momento de inércia I_2 = 4,85 kg.m^2, inicialmente em repouso $\omega_2 = 0$, é acoplado bruscamente ao mesmo eixo. Qual será a velocidade angular ω da combinação dos dois discos girando juntos com a mesma velocidade angular?

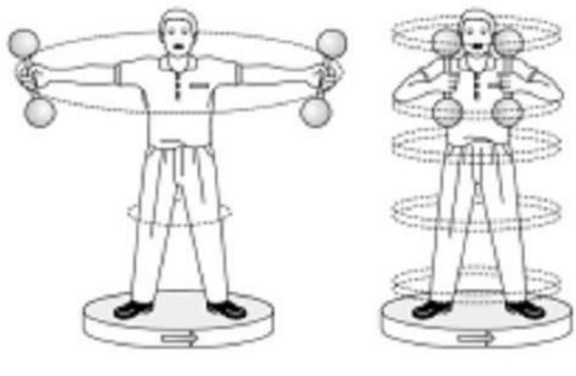


Solução: Como não existem torques externos sobre o sistema, o momento angular é conservado, e sendo assim obtemos que:

$$L_i = I_i\omega_1 + 0 = L_f = \omega(I_1 + I_2)$$

Portanto, a velocidade angular dos dois discos se movendo juntos corresponde a $\omega = 171\ rpm = 17{,}9\ rad/s$

2) Um homem está em pé sobre uma plataforma giratória, conforme a figura abaixo. Inicialmente, ele está com os seus braços abertos e gira com uma velocidade angular de 0,25 *rps*. Depois ele aproxima os braços do corpo e a velocidade angular passa a



ser de 0,80 *rps* . Encontre a razão entre os momentos de inércia do homem nas condições inicial e final.

Solução: Pela conservação do momento angular temos que:

$$L_i = L_f \rightarrow I_i \omega_i = I_f \omega_f$$
$$\frac{I_i}{I_f} = \frac{\omega_f}{\omega_i} = 3{,}2$$

3) É comum observarmos que em vários momentos, alguns caminhoneiros usam como apoio no momento da troca de um pneu uma barra de ferro acoplada à chave de rodas. Qual a finalidade dessa barra de ferro? **Esse exemplo retoma o conceito de torque estudado no tópico 2.**

Solução: *No acoplamento da barra de ferro junto a chave de rodas, ele estará aumentando o braço da força, fazendo com que haja uma diminuição da intensidade da força para que produza o mesmo momento ou torque o suficiente para soltar o parafuso.*

4) O que acontece com o momento angular quando não houver torque externo em um sistema?

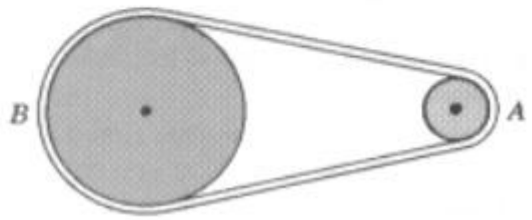
Solução: *Sempre que não houver torque externo em um sistema, o momento angular será constante*.

Atividades propostas(1;2;3)[29]

1) Duas partículas de massa m e velocidade v deslocam-se, em sentido contrário, ao longo de duas retas paralelas separadas por uma distância d. Determine a expressão para o momento angular do sistema em relação a qualquer ponto.

[29] Disponível em:< http://www.cce.ufes.br/anderson>-acesso em 15/10/2018.

2) A imagem a seguir mostra duas rodas, A e B, ligadas por uma correia. O raio de B é três vezes maior do que o de A. Qual seria a razão dos momentos de inércia I_A/I_B se (a) ambas tivessem o mesmo momento angular e (b) ambas tivessem a mesma energia cinética de rotação? Suponha que a correia não escorregue.



3) Por que ao adquirir movimento, a tendência é que a bicicleta não caia?

____

____

____

Tópico 4: Considerações finais a respeito do questionário inicial.

Duração desse tópico: proposta de 1 horas/aula para trabalhar esse tópico. No entanto, caso haja necessidade, o professor poderá utilizar mais horas-aula.

Esse tópico será destinado para a síntense de todos os conteúdos trabalhados. Um momento de trocas de conhecimentos, relatos de experiências adquirido ao longo das aulas, bem como aplicação de um questionário (que segue em anexo) trabalhado no início dos tópicos acrescido de algumas questões novas intrelassadas com o aprendizado

7. Prática Social Final

Considerando que os conceitos abordados neste plano de unidade são pouco trabalhados com os alunos de ensino médio, ao final de todas as atividade desenvolvidas e de suas discussões, esperamos que os alunos tenham compreendido que sistemas em rotação possuem uma quantidade de movimento angular que tende a se manter constante caso não existam forças externas realizando torque sobre o sistema e que os mesmos estão presentes em várias situações do cotidiano. Esperamos também que os mesmos sejam capazes de identificar que, devido ao atrito e a ação de outras forças externas, esses sistemas não giram para sempre, sendo necessário fazer o aporte de energia para mantê-los girando. No caso do conceito de momento de inércia, entendemos que os alunos possam realizar analogias entre o conceito de inércia, ou seja, a dificuldade de colocar um corpo em movimento. Assim sendo, acreditamos que de uma maneira geral, os alunos estejam familiarizados com fenômenos cotidianos que envolvem a conservação do momento angular, porém ainda não são capazes de correlacionar o conhecimento científico de maneira adequada nas explicações desses fenômenos.

8.CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com esse trabalho, tivemos o intuito de elencar atividades que viessem a colaborar no processo de aprendizagem. Porém sabemos que o caminho ainda é muito vasto e transformar o ensino da Física em um modelo a ser seguido, é algo ainda um pouco distante da nossa realidade. Enquanto professores, promover discussões, criar situações onde o aluno possa ser inserido, interagindo com situações cotidianas é o primeiro passo para conseguirmos formar cidadãos críticos a interagir perante a sociedade. Entendemos que o modelo tradicional também teve e em muitas situações ainda possui o seu mérito, porém sabemos que a transmissão de informações e resoluções de exercícios onde o aluno o se situa como mero ouvinte precisa ter um novo olhar. A nossa proposta de trabalho, levou em consideração essas diferentes vertentes, sem deixar escapar a busca pelo conhecimento, onde a aprendizagem não se encerra ao término da aula ou na abertura dos portões, mas que o aluno possa refletir que todos os dias, momento de sua vida é sempre um eterno aprendizado.

REFERÊNCIAS

ANJOS, A.T.dos, **Corpos Rígidos.** Brasil Escola. Disponível em <https://brasilescola.uol.com.br/fisica/corpos-rigidos.htm>. Acesso em 27 de maio de 2018.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988.** 18. ed. São Paulo, Brasil: Saraiva, p. 19, 1998.

BRASIL. **Lei Nº 9394, de 20 de dezembro de 1996.** estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Diário Oficial da União.Brasilia, seção 1, 1996.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais de Língua Portuguesa.** MEC. Brasília, 1997.

Currículo Básico para as escolas públicas do Paraná**. SEED**: Curitiba, 1992.

GASPAR, A. **Física Série Brasil**. Ensino Médio/Vol. Único, Ed. Ática,2000.

GREF. **Física 1 –Mecânica**. EDUSP, 7ª ed.2001.

HALLIDAY D.; RESNICK R. e WALKER J. **Fundamentos de Física: mecânica.** Volume 1. 8ª ed. EditoraLTC, 2009.

Hewitt, P.G, Física **Conceitual**, 9º ed.Bookman, 2002.

http://efisica.if.usp.br/mecanica/basico/rotacoes/ acesso em 24/09/2018.

http://midia.cmais.com.br/assets/file/original/pdf-acesso em 11/10/2018.

http://pmoscon.com/Fisica1/lista-de-exercicios-3-Fisical_resolvidos.pdf-acesso em 15/10/2018.

http://professor.pucgoias.edu.br/SiteDocente/admin/arquivosUpload/6741 - acesso em 11/10/2018.

http://www.cce.ufes.br/anderson-acesso em 15/10/2018.

https/www.google.com.br/search?q=imagens+de+momento+angular-acesso em 14/10/2018.

https: www.google.com.br/search?q=plataforma+giratória+momento+angular-acesso em 14/10/2018.

https://alexfisica.wordpress.com/lista-de-exercicios-acesso em 14/10/2018.

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Torque,_position,_and_force.svg-acesso em 12/10/2018.

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Torque,_position,_and_force.svg-acesso em 12/10/2018.

https://def.fe.up.pt/dinamica/cinematica.html - acesso em 11/10/2018.

https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/fisica/momento-ou-torque-uma-forca.htm-acesso em 13/10/2018.

https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/fisica/movimentos-translacao-rotacao.htm-acesso em 24/09/2018.

https://www.google.com.br/search?q=bailarina+no+gelo,+inércia&tbm-acesso em 24/09/2018.

https://www.google.com.br/search?q=imagem+de+um+pneu+constando+as+vari%C3%A1veis+de-acesso em 11/10/2018.

https://www.infoescola.com-acesso em 14/10/2018.

https://www.kuadro.com.br/posts/cinematica-do-movimento-circular/ acesso em 24/09/2018.

https://www.sofisica.com.br/conteudos/Mecanica/Cinematica/mc2.php-acesso em 11/10/2018.

https://www.ufersa.edu.br/portal/view/uploads/setores/.../Dinamica%20de%20Rotação.ppt-acesso em 13/10/2018.

https://www.youtube.com/watch?v=iNunr4FyMvY-acesso em 14/10/2018.

JÚNIOR, S, S.J.da, **Cálculo do torque de uma chave de roda e Composição dos movimentos.** Brasil Escola. Disponível em <https://brasilescola.uol.com.br/fisica/calculando-torque-uma-chave-roda.htm>. Acesso em 27 de maio de 2018.

MASSA, L. **Apoio do Curso de Física**. Disponível em < http://br.geocities.com/galileon/>, 2001.Acesso em 21 de maio de 2018.

SAVIANI, D. **Escola e Democracia**: teorias da educação, curvatura da vara, onze teses sobre educação e política. Campinas: 33. ed. revisada: Autores Associados,p. 05 – 94, 1986.

TIPLER, P.A.; MOSCA.G., **Física**. 5.ed, v. 1, v. 2 e v.3, Rio de Janeiro: LTC, 2006.

APÊNDICE B: TERMO DE CONSENTIMENTO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

MESTRADO NACIONAL PROFISSIONAL EM ENSINO DE FÍSICA (MNPEF)

Você está sendo convidado a participar da pesquisa "**UMA PROPOSTA PARA O TRABALHO COM O CONTEÚDO DE MOMENTO ANGULAR NO ENSINO MÉDIO**", sob responsabilidade do pesquisador Claudinei Gomes de Oliveira, de seu orientador, Prof. Dr. Cesar Vanderlei Deimling e de sua co-orientadora, prof. Dra. Natalia Neves Macedo Deimling.

O objetivo deste estudo consiste em elaborar, desenvolver e avaliar uma proposta didático- pedagógica para o ensino do conteúdo de momento angular na disciplina de Física do ensino médio, o qual, apesar de sua relevância, tem sido pouco discutido atualmente com os estudantes em sala de aula. Você foi selecionado porque atende a todos o critério de seleção dos participantes da pesquisa, ou seja, é estudante da disciplina de Física e está regularmente matriculado no primeiro ano do ensino médio.

Sua participação não é obrigatória e a qualquer momento você poderá desistir de participar e retirar seu consentimento. A sua recusa na participação não trará nenhum prejuízo à sua relação com o pesquisador ou com a Unidade Escolar na qual você estuda.

Sua participação consistirá no acompanhamento, assiduidade e envolvimento nas atividades que serão desenvolvidas pelo próprio pesquisador em sala de aula, com estudantes do primeiro ano do ensino médio, sobre o tema de sua Dissertação de Mestrado, segundo objetivo explicitado acima.

A pesquisa será desenvolvida no Colégio Estadual Humberto de Alencar Castelo Branco, pertencente ao Núcleo Regional de Ensino de Assis Chateaubriant, em uma turma do primeiro ano regular do ensino médio, no âmbito da disciplina de Física. Essas atividades serão desenvolvidas somente com a autorização do(a) diretor(a) da Unidade Escolar.

Seu consentimento em participar não acarretará desconfortos, gastos financeiros ou riscos de ordem psicológica, física, moral, acadêmica ou de outra natureza. Sua participação, ao contrário, poderá trazer benefícios, pois você estará participando de uma pesquisa que busca proporcionar aos estudantes da educação básica a compreensão da relação entre os conteúdos científicos estudados na escola e a realidade social mais ampla em que se encontram inseridos, bem como a problematização dessa realidade, em suas diferentes dimensões. Ademais, visamos com este trabalho favorecer a ampliação dos conhecimentos culturais dos estudantes, a fim de que, munidos desses conhecimentos, eles possam utilizá-los como elementos ativos de transformação social.

Os dados da pesquisa serão coletados a partir do desenvolvimento das atividades teórico- experimentais que serão realizadas em sala de aula pelo próprio pesquisador e poderão ser gravadas em um aparelho de gravação de áudio. Todas as informações obtidas por meio dessa pesquisa serão confidenciais e asseguramos o sigilo sobre sua participação.

Os resultados serão utilizados para a conclusão da pesquisa acima citada. Os dados coletados durante o estudo serão analisados e apresentados sob a forma de relatórios e serão divulgados por meio de trabalhos apresentados em reuniões científicas, periódicos e da própria Dissertação de Mestrado.

____

Assinatura do Pesquisador

Eu, ____ , declaro que entendi os objetivos e benefícios de minha participação na pesquisa e concordo em participar.

Jesuítas,______ de ________________ de 2018.

____

Assinatura do Participante da Pesquisa

APÊNDICE C: QUESTIONÁRIO INICIAL

Mestrado em ensino de Física

Questionário inicial para levantamento prévio dos alunos sobre o tema: Momento angular e conservação do momento angular.

Aluno (a):...

1) O que você entende por movimento de rotação? Justifique sua resposta.

2) Qual a diferença entre movimento de rotação e translação? Justifique sua resposta.

3) Qual o seu entendimento sobre energia cinética de rotação?

4) O que vocês entendem por momento de inércia. Cite alguma aplicação do cotidiano.

5) Por que uma patinadora no gelo quando está realizando seu giro, abre e fecha os braços em determinado momento?

APÊNDICE D: QUESTIONÁRIO FINAL

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CAMPUS CAMPO MOURÃO

Mestrado em ensino de Física

Questionário final após a intervenção do produto educacional sobre Momento angular e conservação do momento angular.

Aluno(a):...

1) O que você entende por movimento de rotação? Justifique sua resposta.

2) Qual a diferença entre movimento de rotação e translação? Justifique sua resposta.

3) Qual o seu entendimento sobre energia cinética de rotação?

4) O que vocês entendem por momento de inércia. Cite alguma aplicação do cotidiano.

5) Por que uma patinadora no gelo quando está realizando seu giro, abre e fecha os braços em determinado momento?

____

____

6) Qual o seu entendimento por torque e onde ele está presente no dia a dia?

____

____

____

7) Em que situações do cotidiano temos Momento Angular e Conservação do Momento Angular?

____

____

____