

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA E DE
MATERIAIS**

WALDIR MARIANO MACHADO JUNIOR

**PROPAGAÇÃO DE TRINCAS NOS MODELOS DE HUDSON E DE FORMAN-
NEWMAN-DE KONING, VIA MÉTODO “*FAST CRACK BOUNDS*”**

TESE

CURITIBA

2019

WALDIR MARIANO MACHADO JUNIOR

**PROPAGAÇÃO DE TRINCAS NOS MODELOS DE HUDSON E DE FORMAN-
NEWMAN-DE KONING, VIA MÉTODO “*FAST CRACK BOUNDS*”**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia – Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos.

Orientador: Prof. Dr. Claudio R. Ávila da S. Jr.

CURITIBA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Machado Junior, Waldir Mariano

Propagação de trincas nos modelos de Hudson e de Forman-Newman-De Koning, via método "Fast crack bounds" [recurso eletrônico] / Waldir Mariano Machado Junior.-- 2019.

1 arquivo texto (119 f.) : PDF ; 4,24 MB

Modo de acesso: World Wide Web.

Título extraído da tela de título (visualizado em 14 out. 2019).

Texto em português, com resumo em inglês

Tese (Doutorado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Curitiba, 2019

Bibliografia: f. 114-119

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Metais - Fadiga. 3. Resistência de materiais - Testes. 4. Materiais - Testes dinâmicos. 5. Métodos numéricos em engenharia. 6. Compostos metálicos. I. Silva Júnior, Cláudio Roberto Ávila da. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais. III. Título.

CDD: Ed. 23 – 620.1

Biblioteca Central da UTFPR, Câmpus Curitiba

Bibliotecário: Adriano Lopes CRB-9/1429

TERMO DE APROVAÇÃO DE TESE Nº 21

A Tese de Doutorado intitulada **Propagação de Trincas nos Modelos de Hudson e de Forman-Newman-De Koning, via Método “FAST CRACK BOUNDS”**, defendida em sessão pública pelo candidato **Waldir Mariano Machado Junior**, no dia 27 de agosto de 2019, foi julgada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia, área de concentração Mecânica dos Sólidos, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais – PPGEM.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Cláudio Roberto Ávila da Silva Junior - Presidente - UTFPR

Prof. Dr. Hilbeth Parente Azikri de Deus – UTFPR

Prof. Dr. Marcio Henrique de Avelar Gomes – UTFPR

Prof. Dr. João Morais da Silva Neto – UFPR

Prof. Dr. Key Fonseca de Lima – PUC – PR

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

1 CURITIBA, ____ DE _____ DE 20__.

Carimbo e Assinatura do(a) Coordenador(a) do Programa

Dedico este trabalho à minha esposa
Daniele e ao meu filho Benjamin, pelos
momentos de ausência e por todo
incentivo, amor e carinho que me deram
nesses últimos anos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus causa primaria de todas as coisas.

Agradeço a minha mãe, Maria Dolores de Marchi Machado, pela existência e apoio que proporcionou em toda a minha vida.

Agradeço a minha esposa e filho, Daniele Cristina das Neves e Benjamin das Neves Machado, por todo amor, carinho, apoio e paciência durante esses 4 anos de estudo e trabalho.

Agradeço especialmente ao meu orientador Prof. Dr. Claudio R. Ávila da Silva Jr pelo suporte, orientação, ajuda e, principalmente, paciência, essenciais para o desenvolvimento desse trabalho. E por ter me apontado o caminho durante seis anos.

Agradeço a minha sogra, Terezinha Trevisan das Neves, por toda ajuda fornecida durante as minhas incontáveis viagens até Curitiba.

Agradeço aos meus colegas e professores da UTFPR com quem vivenciei esse período prazeroso.

Agradeço aos meus amigos que me deram grande apoio.

Agradeço ao SENAI-PR pelo apoio e suporte fornecidos durante a realização desse trabalho.

Deus nos concede, a cada dia, uma
página de vida nova no livro do tempo.
Aquilo que colocarmos nela, corre por
nossa conta.

(XAVIER, Chico, 2000)

RESUMO

MACHADO JR, Waldir Mariano. **Propagação de trincas nos modelos de Hudson e de Forman-Newman-De Koning, via método “Fast Crack Bounds”**. 2019. 119 páginas. Tese - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba.

Em geral, uma parte significativa da vida de um componente mecânico ocorre com a propagação de trincas em fadiga. A Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) apresenta vários modelos de evolução que tentam prever a vida sob fadiga. Esses modelos são classificados em: carregamento de amplitude de tensão constante (CATC) e carregamento de amplitude de tensão variável (CATV). Em geral, alguns desses modelos de propagação de trinca podem ser formulados como um problema de valor inicial (PVI). Este trabalho apresentou a extensão e adequação do método “Fast Crack Bounds” (FCB) para o estabelecimento das funções cotas, superior e inferior, para modelos de evolução do comprimento da trinca a carregamento variável. Os modelos estudados foram o de Hudson e o de Forman-Newman-De Koning (FNK). Esses modelos foram delimitados segundo os seguintes critérios: região de abrangência do modelo, ou seja, região I a III, simplicidade e difusão. Realizou-se, ainda, uma aplicação para a obtenção de uma solução numérica aproximada, a partir da média aritmética das cotas superior e inferior obtidas no método aplicado neste trabalho, quando não se conhece a lei de evolução. O desempenho do método FCB foi medido pelas funções do desvio relativo, dos erros relativos das médias das funções cotas e da razão dos tempos computacionais em relação a solução numérica pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4), comparadas aos resultados experimentais encontrados nos trabalhos de Chang (1981), de Gróza e Váradi (2017) e de Dirik e Yalçinkaya (2016). Observou-se, para os modelos estudados que o método FCB apresenta uma aproximação satisfatória do comportamento da evolução da trinca.

Palavra-chave: Mecânica da fratura linear elástica. Modelos CATV. Método FCB. Método de RK4. Medidas de desempenho.

ABSTRACT

MACHADO JR, Waldir Mariano. **Propagation of cracks of the Hudson and Forman-Newman-De Koning models, by way of Fast Crack Bounds method.** 2019. 119 pages. Tese - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba.

In general, a significant part of the life of a mechanical component occurs, the crack propagation stage in fatigue. The Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM) presents several evolutionary models that try to predict life under fatigue. These models are classified into: under constant amplitude loading (CAL) and under variable amplitude loading (VAL). In general, some of these crack propagation models can be formulated as an initial value problem (IVP). This work presented the extension and adequacy of the "Fast Crack Bounds" (FCB) method for the establishment of the upper and lower bounds functions for models of evolution from crack size to variable loading. The models studied were those of Hudson and Forman-Newman-De Koning (FNK). These models were delimited according to the following criteria: region of coverage of the model, that is, region I to III; simplicity and diffusion. An application was also made to obtain an approximate numerical solution, from the arithmetic mean of the upper and lower bounds obtained in the method applied in this work, when the law of evolution is not known. The performance of the FCB method was measured by the functions of the relative deviation, the relative errors of the means of the bounds functions and the ratio of the computational times in relation to the numerical solution by the fourth order Runge-Kutta (RK4) method, compared to the experimental results found in the works of Chang (1981), Gróza and Váradi (2017) and Dirik and Yalçinkaya (2016). It was observed, for the models studied, that the FCB method presents a satisfactory approximation of the behavior of the evolution of the crack.

Keywords: Linear Elastic Fracture Mechanics. VAL models. FCB method. RK4 method. Performance measures.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diferentes etapas na vida por fadiga e fatores relevantes.....	26
Figura 2 – Uma trinca de espessura contínua em uma placa infinita submetida a um esforço de tração.....	28
Figura 3 – (a) Placa infinita no modo I de abertura de trinca. (b) Estado plano de tensões de um elemento de área, na vizinhança da trinca.....	29
Figura 4 – Três modos de abertura de trinca.....	30
Figura 5 – Ciclo de Tensão.....	31
Figura 6 – Diagrama $\log(da/dN) \times \log(\Delta K)$	32
Figura 7 – Ocorrências características do histórico do carregamento no tempo.....	35
Figura 8 – Método <i>Rainflow</i> utilizando curva de histerese.....	36
Figura 9 – Desaceleração da taxa de crescimento da trinca.....	37
Figura 10 – Classificação dos modelos para a predição do crescimento da trinca por fadiga do tipo CATV.....	38
Figura 11 – Conceito do FIT equivalente.....	39
Figura 12 – Tamanho relativo da zona plástica.....	42
Figura 13 – Distribuição de tensão considerando o modelo Unigrow: (a) Tração e (b) Compressão.....	44
Figura 14 – Variação do fator de intensidade de tensão efetivo.....	46
Figura 15 – Abertura da trinca conforme modelo de CORPUS.....	47
Figura 16 – Esquema discretizado da faixa plástica em modelos de faixa de escoamento.....	49
Figura 17 – Placa com largura finita e trinca central.....	76
Figura 18 – Gráfico de $a_{CS}(N)$, $a_{RK4}(N)$, $a_{CI}(N) \times N$ para o experimento M-81.....	78
Figura 19 – Gráfico de $a_{CS}(N)$, $a_{RK4}(N)$, $a_{CI}(N) \times N$ para o experimento M-84.....	79
Figura 20 – Gráfico de $a_{CS}(N)$, $a_{RK4}(N)$, $a_{CI}(N) \times N$ para o experimento M-88.....	79
Figura 21 – Gráfico de $a_{CS}(N)$, $a_{RK4}(N)$, $a_{CI}(N) \times N$ para o experimento M-91.....	79
Figura 22 – Gráfico de $a_{CS}(N)$, $a_{RK4}(N)$, $a_{CI}(N) \times N$ para o experimento M-93.....	80
Figura 23 – Gráfico de $\log(da_{CS}/dN)$, $\log(da_{RK4}/dN)$, $\log(da_{CI}/dN) \times \log(\Delta K)$ para experimento M-81.....	81
Figura 24 – Gráfico de $\log(da_{CS}/dN)$, $\log(da_{RK4}/dN)$, $\log(da_{CI}/dN) \times \log(\Delta K)$ para o experimento M-93.....	82

Figura 25 – Gráfico de $\log(da_{CS}/dN, da_{RK4}/dN, da_{CI}/dN) \times \log(\Delta K)$ crítico para o experimento M-81.....	82
Figura 26 – Gráfico de $\log(da_{CS}/dN, da_{RK4}/dN, da_{CI}/dN) \times \log(\Delta K)$ crítico para o experimento M-88.....	83
Figura 27 – Gráfico dos desvios relativos $\delta_{CS}(N), \delta_{CI}(N) \times N$ para o experimento M-81.	83
Figura 28 – Gráfico dos desvios relativos $\delta_{CS}(N), \delta_{CI}(N) \times N$ para o experimento M-84.	84
Figura 29 – Gráfico dos desvios relativos $\delta_{CS}(N), \delta_{CI}(N) \times N$ para o experimento M-88.	84
Figura 30 – Gráfico dos desvios relativos $\delta_{CS}(N), \delta_{CI}(N) \times N$ para o experimento M-91.	84
Figura 31 – Gráfico dos desvios relativos $\delta_{CS}(N), \delta_{CI}(N) \times N$ para o experimento M-93.	85
Figura 32 – Gráfico de $a_{ar}(N), a_{geo}(N), a_{RK4}(N) \times N$ para o experimento M-81.....	86
Figura 33 – Gráfico de $a_{ar}(N), a_{geo}(N), a_{RK4}(N) \times N$ para o experimento M-84.....	86
Figura 34 – Gráfico de $a_{ar}(N), a_{geo}(N), a_{RK4}(N) \times N$ para o experimento M-88.....	86
Figura 35 – Gráfico de $a_{ar}(N), a_{geo}(N), a_{RK4}(N) \times N$ para o experimento M-91.....	87
Figura 36 – Gráfico de $a_{ar}(N), a_{geo}(N), a_{RK4}(N) \times N$ para o experimento M-93.....	87
Figura 37 – Gráfico das funções erros relativos $\varepsilon_{aar}(N), \varepsilon_{ageo}(N) \times N$ para o experimento M-81.....	88
Figura 38 – Gráfico das funções erros relativos $\varepsilon_{aar}(N), \varepsilon_{ageo}(N) \times N$ para o experimento M-84.....	88
Figura 39 – Gráfico das funções erros relativos $\varepsilon_{aar}(N), \varepsilon_{ageo}(N) \times N$ para o experimento M-88.....	89
Figura 40 – Gráfico das funções erros relativos $\varepsilon_{aar}(N), \varepsilon_{ageo}(N) \times N$ para o experimento M-91.....	89
Figura 41 – Gráfico das funções erros relativos $\varepsilon_{aar}(N), \varepsilon_{ageo}(N) \times N$ para o experimento M-93.....	90
Figura 42 – Gráfico de $a_{CS}(N), a_{RK4}(N), a_{CI}(N) \times N$ para o ferro fundido nodular.....	92
Figura 43 – Gráfico dos desvios relativos $\delta_{CS}(N), \delta_{CI}(N) \times N$ para o ferro fundido nodular.....	93
Figura 44 – Gráfico de $a_{ar}(N), a_{geo}(N), a_{RK4}(N) \times N$ para o ferro fundido nodular.....	93
Figura 45 – Gráfico das funções erros relativos $\varepsilon_{aar}(N), \varepsilon_{ageo}(N) \times N$ para o ferro fundido nodular.....	94
Figura 46 – Representação esquemática de um bloco do espectro do carregamento utilizado na análise. a) espectro com <i>overload</i> , b) espectro com <i>overload</i> e <i>underload</i>	96
Figura 47 – Gráfico de $a_{CS}(N), a_{RK4}(N), a_{CI}(N) \times N$ para o caso 1.....	97

Figura 48 – Gráfico de $a_{CS}(N)$, $a_{RK4}(N)$, $a_{CI}(N) \times N$ para o caso 2.....	97
Figura 49 – Gráfico de $a_{CS}(N)$, $a_{RK4}(N)$, $a_{CI}(N) \times N$ para o caso 3.....	97
Figura 50 – Gráfico de $a_{CS}(N)$, $a_{RK4}(N)$, $a_{CI}(N) \times N$ para o caso 4.....	98
Figura 51 – Gráfico de $a_{CS}(N)$, $a_{RK4}(N)$, $a_{CI}(N) \times N$ para o caso 5.....	98
Figura 52 – Gráfico de $a_{CS}(N)$, $a_{RK4}(N)$, $a_{CI}(N) \times N$ para o caso 6.....	98
Figura 53 – Gráfico dos desvios relativos $\delta_{CS}(N)$, $\delta_{CI}(N) \times N$ para o caso 1.....	100
Figura 54 – Gráfico dos desvios relativos $\delta_{CS}(N)$, $\delta_{CI}(N) \times N$ para o caso 2.....	100
Figura 55 – Gráfico dos desvios relativos $\delta_{CS}(N)$, $\delta_{CI}(N) \times N$ para o caso 3.....	100
Figura 56 – Gráfico dos desvios relativos $\delta_{CS}(N)$, $\delta_{CI}(N) \times N$ para o caso 4.....	101
Figura 57 – Gráfico dos desvios relativos $\delta_{CS}(N)$, $\delta_{CI}(N) \times N$ para o caso 5.....	101
Figura 58 – Gráfico dos desvios relativos $\delta_{CS}(N)$, $\delta_{CI}(N) \times N$ para o caso 6.....	101
Figura 59 – Gráfico de $a_{ar}(N)$, $a_{geo}(N)$, $a_{RK4}(N) \times N$ para o caso 1.....	102
Figura 60 – Gráfico de $a_{ar}(N)$, $a_{geo}(N)$, $a_{RK4}(N) \times N$ para o caso 2.....	102
Figura 61 – Gráfico de $a_{ar}(N)$, $a_{geo}(N)$, $a_{RK4}(N) \times N$ para o caso 3.....	103
Figura 62 – Gráfico de $a_{ar}(N)$, $a_{geo}(N)$, $a_{RK4}(N) \times N$ para o caso 4.....	103
Figura 63 – Gráfico de $a_{ar}(N)$, $a_{geo}(N)$, $a_{RK4}(N) \times N$ para o caso 5.....	103
Figura 64 – Gráfico de $a_{ar}(N)$, $a_{geo}(N)$, $a_{RK4}(N) \times N$ para o caso 6.....	104
Figura 65 – Gráfico das funções erros relativos $\varepsilon_{aar}(N)$, $\varepsilon_{ageo}(N) \times N$ para o caso 1.....	104
Figura 66 – Gráfico das funções erros relativos $\varepsilon_{aar}(N)$, $\varepsilon_{ageo}(N) \times N$ para o caso 2.....	105
Figura 67 – Gráfico das funções erros relativos $\varepsilon_{aar}(N)$, $\varepsilon_{ageo}(N) \times N$ para o caso 3.....	105
Figura 68 – Gráfico das funções erros relativos $\varepsilon_{aar}(N)$, $\varepsilon_{ageo}(N) \times N$ para o caso 4.....	105
Figura 69 – Gráfico das funções erros relativos $\varepsilon_{aar}(N)$, $\varepsilon_{ageo}(N) \times N$ para o caso 5.....	106
Figura 70 – Gráfico das funções erros relativos $\varepsilon_{aar}(N)$, $\varepsilon_{ageo}(N) \times N$ para o caso 6.....	106

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Relações entre as tensões.....	31
Quadro 2 – Modelos de propagação de trincas do tipo CATC.....	34
Quadro 3 – Modelos de propagação de trincas de faixa de escoamento.....	49

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Dados aplicados ao modelo de Hudson.....	78
Tabela 2 – Valores numéricos de N_f, N_{FCB} e μ_N	80
Tabela 3 – Valores numéricos de N_f, N_p e μ_N para os experimentos de Hudson e Kim.....	81
Tabela 4 – Medidas de desempenho do método FCB para o modelo de Hudson.....	90
Tabela 5 – Dados e propriedades dos materiais aplicados ao modelo de FNK.....	91
Tabela 6 – Medidas de desempenho do método FCB para o modelo de FNK a carregamento constante.....	95
Tabela 7 – Carregamentos e número de ciclos aplicados a liga de alumínio 7075-T6.....	95
Tabela 8 – Valores numéricos do $a_{CS}, N_B, N_{FCB}, N_f$ e μ_N do modelo FNK a carregamento variável.....	99
Tabela 9 – Medidas de desempenho do método FCB para do modelo FNK a carregamento variável.....	107
Tabela 10 – Valores numéricos do a_0, a_f, N_{FCB}, N_f e μ_N	108
Tabela 11 – Função desvio relativo.....	108
Tabela 12 – Medidas de desempenho do método FCB.....	109

LISTA DE SIGLAS

ASTM	<i>American Society for Testing and Materials</i>
CATC	Carregamento de Amplitude de Tensão Constante
CATV	Carregamento de Amplitude de Tensão Variável
ED	Equação Diferencial
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EF	Elementos Finitos
FCB	<i>Fast Crack Bounds</i>
FNK	Forman, Newman e De Koning
FIT	Fator de Intensidade de Tensão
MEF	Métodos dos elementos finitos
MF	Mecânica da Fratura
MFEP	Mecânica da Fratura Elásto Plástica
MFLE	Mecânica da Fratura Linear Elástica
PVI	Problema de Valor Inicial
RF	<i>Rainflow</i>
RMS	Root Mean Square
RK4	Método de Runge-Kutta de 4 ^o ordem
X-FEM	<i>Extended Finite Element Method</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

$\frac{da}{dN}$	Taxa de crescimento da trinca
N	Número de ciclos
h	Lei de evolução
ΔK	Varição do fator intensidade de tensão
a	Comprimento da trinca
a_0	Comprimento inicial da trinca
σ_{crit}	Tensão crítica necessária para a propagação da trinca
E	Módulo de elasticidade
γ_s	Densidade de energia da superfície
(r, θ)	Coordenadas polares
K	Fator intensidade de tensão, FIT
τ	Tensão de cisalhamento
ν	Coefficiente de Poisson
$f(.)$	Função de correção do FIT
$\Delta\sigma$	Intervalo de tensões
$\sigma_{m\acute{a}x}$	Tensão máxima
$\sigma_{m\acute{i}n}$	Tensão mínima
σ_a	Tensão alternada
σ_m	Tensão média
R	Razão entre as tensões
ΔK_{th}	Limite inicial FIT <i>threshold</i>
K_c	Tenacidade à fratura
C_p, m_p	Parâmetros da Lei de Paris
C_F, m_F	Parâmetros da Lei de Forman
C, m	Parâmetros da Lei de Collipriest
ΔK_{rms}	Varição do FIT médio quadrático
ΔK_i	FIT no <i>i-ésimo</i> ciclo
A_B, m_B	Parâmetros do modelo de Barsom
C, m	Constantes do material da lei de Hudson

r_i	Tamanho da zona plástica no i -ésimo ciclo
C_p	Parâmetro de retardo
r_p	Tamanho da zona plástica previamente criada
r_{OL}	Tamanho da zona plástica com sobrecarga
a_{OL}	Comprimento da trinca com sobrecarga
Δa	Varição do crescimento da trinca
K_r	FIT máximo requerido
σ_r	Tensão compressiva residual
$K_{m\acute{a}x\ OL}$	FIT máximo no ciclo de sobrecarga
$K_{m\acute{a}x}$	FIT máximo no ciclo
α	Fator de restrição do estado plano de tensão ou deformação
σ_y	Tensão de escoamento
ΔK_{eff}	Varição do FIT efetivo
$K_{m\acute{a}x,eff}$	FIT máximo efetivo
$K_{m\acute{i}n,eff}$	FIT mínimo efetivo
R_{eff}	Razão entre as tensões efetivas
C_F, m	Constantes do modelo de Willenborg
ΔK_T	Valor intrínseco <i>threshold</i>
K_{PR}	Valor do FIT para a propagação da trinca
K_{OP}	FIT de abertura da trinca
$K_{m\acute{a}x,eq}$	FIT máximo equivalente
$K_{m\acute{i}n,eq}$	FIT mínimo equivalente
R_{eq}	Razão equivalente
α_{ONR}	Parâmetro de carregamento
f_1, f_2	Funções empíricas dependentes do material
C_o, m	Constantes do material
σ_{OP}	Tensão de abertura da trinca
g	Função do material dependente da razão entre as tensões
h	Função de correção
C, n, p, q	Parâmetros do modelo FNK
f	Função de abertura da trinca
$a_{CI}(\cdot)$	Função cota inferior
$a_{CS}(\cdot)$	Função cota superior

a (.)	Função comprimento da trinca
a_{ar}	Aproximação numérica via média aritmética
a_{geo}	Aproximação numérica via média geométrica
$\delta_{CS,CI}$	Funções desvio relativo superior e inferior
ϵ_{aar}	Função erro relativo média aritmética
ϵ_{ageo}	Função erro relativo média geométrica
μ_t	Razão entre os tempos computacionais
t_{RK4}	Tempo pelo método RK4
$t_{CS,CI}$	Tempo pelo método FCB
μ_N	Razão entre os números de ciclos
N_{FCB}	Número de ciclos do método FCB
N_f	Número de ciclos do experimento
$\sigma_{m\acute{a}x,rms}$	Tensão máxima (RMS)
$\sigma_{m\acute{i}n,rms}$	Tensão mínima (RMS)
R_{rms}	Razão entre as tensões (RMS)
A_0, A_1, A_2, A_3	Parâmetros que definem f
$\sigma_{m\acute{a}x}/\sigma_o$	Relação entre a tensão máxima aplicada e a tensão de fluxo
K_{IC}	Tenacidade à fratura do modo I
B_K, A_K	Constantes do material do modelo FNK
t	Espessura do material
t_0	Espessura na condição de plano de deformação
ΔK_0	Faixa limite do FIT
C_{th}	Constante de ajuste empírica
C	Pequeno parâmetro da trinca
k_{n1}, k_{n4}, k_{n2}	Coefficientes angulares nos, nós esquerdo e direito e no ponto médio, respectivamente, do método de RK4
k_{n3}	Aproximação da derivada no ponto médio. Runge-Kutta
a^*	Comprimento estrela da trinca
b	Largura do corpo de prova
a_f	Comprimento final da trinca

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	20
1.1 OBJETIVOS	22
1.1.1 Objetivo Geral	22
1.1.2 Objetivos Específicos	22
1.2 JUSTIFICATIVA	22
1.3 ESTRUTURA DESTE TRABALHO	23
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	25
2.1 FADIGA	25
2.2 MECÂNICA DA FRATURA.....	27
2.2.1 Mecânica da Fratura Linear Elástica	27
2.3 MODELOS DE PROPAGAÇÃO DE TRINCAS	33
2.3.1 Modelos de Carregamento com Amplitude de Tensão Constante	33
2.3.2 Modelos com Carregamento com Amplitude de Tensão Variável.....	34
2.3.2.1 Análise global.....	38
2.3.2.2 Análise ciclo a ciclo.....	40
2.3.2.3 Dano linear acumulado.....	40
2.3.2.4 Considerando os efeitos de interação.....	40
2.3.2.4.1 Modelos de zona plástica	41
2.3.2.4.2 Modelos de tensão residual.....	44
2.3.2.4.3 Modelos semiempíricos.....	45
2.3.2.4.4 Modelos de faixa de escoamento.....	48
2.4 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.....	50
3 MÉTODO FAST CRACK BOUNDS.....	51
4 METODOLOGIA DA PESQUISA.....	53
4.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.....	53
5 FORMULAÇÃO DAS HIPÓTESES.....	56
5.1 MODELO DE HUDSON	56
5.1.1 Inconsistência entre os Modelos de Barsom e Hudson.....	57
5.2 MODELO FORMAN-NEWMAN-DE KONING.....	58
5.3 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DAS SOLUÇÕES DO MÉTODO DE HUDSON E FORMAN-NEWMAN- DE KONING	61
5.3.1 Existência e Unicidade de Soluções – Caso (i).....	62
5.3.2 Existência e Unicidade de Soluções – Caso (ii).....	63
5.4 MÉTODOS NUMÉRICOS	64
5.4.1 Método de Runge-Kutta Explícito.....	65
6 MÉTODO FAST CRACK BOUNDS APLICADO AOS MODELOS DE HUDSON E FORMAN-NEWMAN-DE KONING.....	68
6.1 MÉTODO FCB APLICADO AO MODELO DE HUDSON	68
6.2 MÉTODO FCB APLICADO AO MODELO DE FORMAN-NEWMAN-DE KONING.....	72

7 AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DO MÉTODO FCB APLICADO AOS MODELOS DE HUDSON E FORMAN-NEWMAN-DE KONING.....	76
7.1 RESULTADOS PARA O MODELO DE HUDSON.....	77
7.2 RESULTADOS PARA O MODELO DE FORMAN-NEWMAN-DE KONING.....	91
7.3 SÍNTESE DOS RESULTADOS	107
8 CONCLUSÕES.....	111
8.1 TRABALHOS FUTUROS.....	113
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	114

1 INTRODUÇÃO

O fenômeno da fadiga é observado quando um componente mecânico é submetido a tensões repetidas e flutuantes. Se o componente vier a romper-se em uma tensão inferior àquela necessária para ocasionar a fratura de forma abrupta devido à aplicação de uma carga estática (DIETER, 1981).

Na análise do componente utilizam-se modelos: i) contínuo; ii) microestrutura; iii) interação entre o contínuo e a microestrutura (SHORT e HOEPFNER, 1989). Em linhas gerais, o contínuo é utilizado para situações com "trincas longas" (tamanho ≥ 1 mm); microestrutura é utilizada para "pequenas trincas" (tamanho entre 100 μm a 1 mm) (ANDERSON, 2005). Estudos mais recentes, como dos autores Wang et al. (2014) e Bang et al. (2019), descreveram modelos modificados para trincas "longas" e "curtas".

A mecânica da fratura (MF) pode prover importantes informações à ocorrência de falhas nos materiais, permitindo a quantificação das relações entre as propriedades mecânicas dos materiais, o nível de tensão aplicada, a presença de trincas no material, assim como mecanismos geradores da propagação das trincas. A trinca pode estar presente no material desde o seu processo de fabricação, ou surgir em decorrência de carregamentos cíclicos dinâmicos. A falha, decorrente da propagação da trinca, apresenta-se como uma fratura frágil, que é rápida e muitas vezes imperceptível. A MF divide-se em: mecânica da fratura elasto plástica (MFEP) e mecânica da fratura linear elástica (MFLE). A MFLE baseia-se na aplicação da teoria da elasticidade em corpos com trincas e, apresenta vários modelos de evolução que tentam prever a vida sob fadiga (BANNANTINE et al., 1989).

Esses modelos de propagação de trincas são classificados em: Modelos de Carregamento de Amplitude de Tensão Constante (CATC) e Modelos de Carregamento de Amplitude de Tensão Variável (CATV). Pode-se citar, como exemplos de CATC, os modelos de Paris-Erdogan (1963), de Forman et al. (1967), de Collipriest (1972), entre outros. No entanto, são os modelos CATV que representam de uma forma mais realística as tensões aplicadas em componentes mecânicos em serviço. Os modelos do tipo CATV são divididos em **análise global** e **análise ciclo a ciclo**. O modelo de análise global ou modelo de Hudson (1981), baseia-se no método da **raiz quadrática média** (*root mean square* – RMS) que foi originalmente proposto

por Barsom (1976). Por outro lado, há os modelos de análise ciclo a ciclo. Entre eles, podem-se citar os modelos de Zona Plástica, de Tensão Residual e de Fechamento de Trincas (MACHNIEWICZ, 2012a).

O modelo de faixa de escoamento, desenvolvido por Forman-Newman-De Koning (NEWMAN, 1984; FORMAN e METTU, 1992), também denominado FNK, é um dos mais utilizados para a predição da vida de um componente mecânico em fadiga. Esse modelo é utilizado também no software denominado NASGRO, da NASA.

Alguns modelos de propagação do tipo CATC podem ser formulados como problemas de valor inicial (PVI), e são apropriados para os casos em que se conhece explicitamente o fator de intensidade de tensão (FIT). Todavia, para poucas aplicações práticas, consegue-se obter a solução exata do PVI. Em geral, na maioria das aplicações utilizam-se métodos numéricos para a obtenção das soluções numéricas aproximadas. Contudo, nos trabalhos de Santos e Ávila (2015) e Ávila et al. (2016) foi proposto um método, pela qual são obtidas funções cotas, inferior e superior, para descrever o comportamento de crescimento da trinca. Essas funções cotas foram obtidas através de aproximações a partir da expansão em série de Taylor, retendo os termos de segunda ordem por meio do resíduo de Lagrange da função comprimento da trinca. A partir disso, esse método passou a ser denominado de “*Fast Crack Bounds*” (FCB) (MACHADO, 2015). Mas, o método FCB foi aplicado somente a modelos do tipo CATC, como o modelo de Paris, Forman, Collipriest, dentre outros (SANTOS e ÁVILA, 2015; e ÁVILA et al., 2016; SANTOS et al., 2018).

A contribuição deste trabalho é estender e adequar o método “*Fast Crack Bounds*” para a representação do comportamento para os modelos CATV de Hudson (1981) e Forman-Newman-De Koning (1984). Esta representação é feita a partir do estabelecimento de cotas e aproximações numéricas para a função comprimento de trinca destes modelos. Para avaliar o desempenho da proposta comparam-se os resultados obtidos com os resultados constantes nos trabalhos de Chang (1981), de Gróza e Váradi (2017) e de Dirik e Yalçinkaya (2016). Além disso, apresenta-se resultados inéditos sobre existência e unicidade das soluções clássicas destes modelos.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é a previsão do comportamento da função comprimento da trinca para os modelos de Hudson (Análise Global) e de Forman-Newman-De Koning (Análise Ciclo a Ciclo) através da extensão e adequação do método FCB.

1.1.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são:

1. Formulação, a luz do método FCB, dos modelos de Hudson e de Forman-Newman-De Koning;
2. Elaboração de algoritmos para os modelos mencionados no objetivo 1;
3. Implementação computacional e obtenção das cotas superior e inferior da função do comprimento da trinca para os modelos mencionados no objetivo 1;
4. Avaliar numericamente os problemas experimentais encontrados na literatura;
5. Analisar os dados e resultados, para avaliar o desempenho do método FCB.

1.2 JUSTIFICATIVA

Uma parte significativa da vida de um componente mecânico ocorre na etapa de propagação de trincas, (BANNANTINE et al., 1989). Isso suscitou numa

necessidade de estudo e compreensão do processo de propagação de trincas. Vários modelos matemáticos foram desenvolvidos para descrever esse comportamento de crescimento da trinca sob a condição de carregamento de amplitude de tensão variável (CATV). Esta é a condição mais frequente de utilização de componentes mecânicos. Em geral, os modelos matemáticos para evolução de trinca, do tipo CATV, são definidos por um PVI, da seguinte forma,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } a \in C^1([N_0, N_1]; \mathbb{R}^+) \text{ tal que :} \\ \frac{da}{dN}(N) = h(\alpha, \Delta K(a)), \forall N \in (N_0, N_1), \\ a(N_0) = a_0, \end{array} \right. \quad (1)$$

sendo:

- $\frac{da}{dN}$ – taxa de crescimento da trinca;
- N – número de ciclos;
- h – lei de evolução;
- α – um vetor de parâmetros (específicos para cada modelo);
- ΔK – variação do fator intensidade de tensão;
- a – comprimento da trinca.

1.3 ESTRUTURA DESTE TRABALHO

Este projeto de pesquisa está estruturado em oito capítulos. No primeiro capítulo, apresenta-se a contextualização do tema de estudo, os objetivos e a justificativa. O segundo capítulo apresenta-se a revisão bibliográfica sobre Fadiga, Mecânica da Fratura e Modelos de Propagação de Trincas CATV. O terceiro capítulo apresenta a formulação do método FCB. O quarto capítulo expõe a metodologia utilizada no desenvolvimento deste trabalho. O quinto capítulo apresenta a descrição dos modelos de Hudson e Forman-Newman-De Koning, as hipóteses de existência/unicidade dos modelos de Hudson e Forman-Newman-De Koning e o método numérico utilizado como solução exata. O sexto capítulo aplica o método FCB aos modelos de Hudson e Forman-Newman-De Koning, obtendo as funções cotas

inferior e superior da função comprimento da trinca para estes modelos. O sétimo capítulo, para problemas escolhidos na revisão bibliográfica, envolvendo os modelos de Hudson e Forman-Newman-De Koning, aplica-se o método FCB e comparam-se os resultados numéricos obtidos com os constantes na literatura selecionada. O oitavo capítulo apresenta as conclusões e propostas para trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O capítulo apresenta definições fundamentais sobre fadiga em metais, mecânica da fratura linear elástica e os modelos de propagação de trinca.

2.1 FADIGA

A maioria dos componentes estruturais está sujeito a cargas variáveis no tempo e repetidas por um determinado número de ciclos. Essa repetição de ciclos pode conduzir o componente a uma falha por ruptura, mesmo quando as tensões atuantes estão abaixo das tensões de escoamento ou última de tração. Esse fenômeno de fragilização e falha por ruptura do material é denominado fadiga (BANNANTINE et al., 1989).

A definição de fadiga segundo a ASTM (E1823) é:

Processo progressivo e localizado de modificações estruturais permanentes ocorridas em um material submetido a condições que produzem tensões e deformações cíclicas em um ponto ou em vários pontos e que pode culminar em trincas ou fratura após um número suficiente de ciclos (ASTM, 2000, p. 1034).

As falhas estruturais, em componentes mecânicos, têm como causas principais:

- 1) Negligência durante o projeto, construção ou operação;
- 2) Aplicação de carregamentos variáveis com o tempo.

Na primeira causa é mais fácil prevenir a falha, porém, na segunda causa podem não existir dados suficientes sobre os tipos de carregamentos.

Outros aspectos importantes na seleção de materiais e projeto estrutural são baseados na resposta do material quando solicitado, sendo eles (HOEPPNER e KRUPP, 1974):

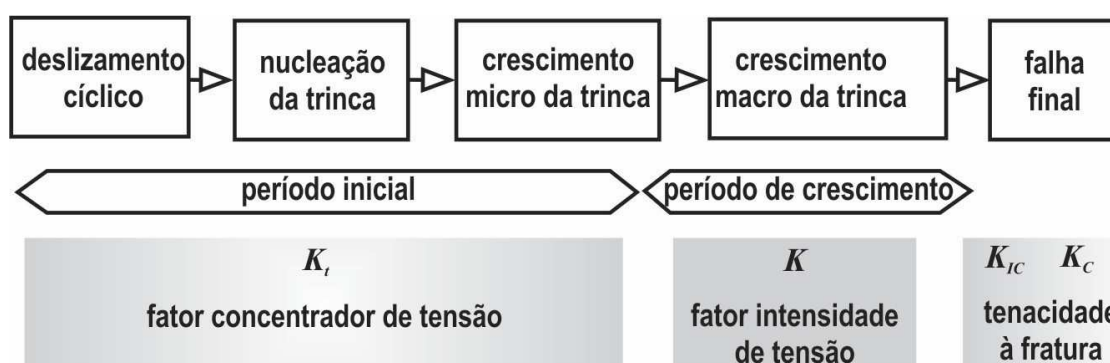
1. Força estática máxima e rigidez sem falha;
2. Comportamento mecânico do material através do tempo;

3. Resistência estática residual e rigidez com falha;
4. Fadiga do material não danificado e sem falhas;
5. Vida do material danificado e com falhas.

Os dois últimos aspectos são importantíssimos pois, a trinca cresce devido ao carregamento cíclico. Portanto, o projeto estrutural analisa o projeto sob fadiga através de duas metodologias: *safe-life* e *fail-safe design*. (HOEPPNER e KRUPP, 1974; BANNANTINE et al., 1989). Para a metodologia *safe-life* não ocorrerá nenhuma falha catastrófica no material, pois assume-se que não há trinca no componente, independentemente do tipo de tensão, modo, material ou ambiente em que o mesmo esteja submetido. Testes e análises rigorosos são realizados para provarem que a probabilidade de falha é pequena. Entretanto, a metodologia *fail-safe* baseia-se no fato que há uma trinca no componente, mas, o mesmo continuará em serviço, para valores pré-determinados para comprimento de trincas.

Contudo, devido aos carregamentos cíclicos aos quais os componentes estão sujeitos no decorrer de suas vidas, ocorre uma perda gradativa da resistência mecânica, até a falha do componente. Isso se deve a nucleação de trincas, que inicialmente, manifestam-se como micro trincas geradas nas bandas de deslizamento (SCHIJVE, 2001). A vida de um componente submetido à fadiga desenvolve-se em três etapas: nucleação de trincas; propagação de trincas; e falha por fadiga. A figura 1 apresenta, esquematicamente, essas etapas.

Figura 1 – Diferentes etapas na vida por fadiga e fatores relevantes



Fonte: Adaptado de Schijve (2001).

O entendimento das etapas e dos fatores que influenciam o crescimento e a propagação das trincas por fadiga é de fundamental importância. Alguns desses

fatores são: natureza cristalográfica do material; efeitos da superfície; tipo e dinâmica do carregamento; tensão cisalhante; temperatura; entre outros (SCHIJVE, 2001).

2.2 MECÂNICA DA FRATURA

Os estudos referentes a Mecânica da Fratura (MF) iniciaram-se devido à impossibilidade do cálculo estrutural explicar o motivo de um componente mecânico falhar quando solicitado, com um nível de tensão abaixo da admissível (ROSA, 2002). A partir disso, a MF assume que o material de um componente em análise possui uma trinca. Essa descontinuidade pode ser um defeito intrínseco ao material, ou ser resultado de um tratamento térmico, processo de soldagem, carregamentos cíclicos, processos de usinagem, entre outros. A partir dessa consideração, alguns objetivos importantes da MF são: (i) determinar se este defeito no material vai levá-lo ao colapso; (ii) avaliar o nível de segurança do componente. A MF divide-se em: Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) e Mecânica da Fratura Elasto-Plástica (MFEP). Neste trabalho, os modelos de propagação estudados estão no âmbito da MFLE.

2.2.1 Mecânica da Fratura Linear Elástica

A MFLE desenvolve-se a partir das seguintes hipóteses:

- (i) Material elástico linear, isotrópico e homogêneo;
- (ii) Pequenas deformações;
- (iii) Estado plano de tensão ou plano de deformação;
- (iv) Geometrias de abertura de trincas;
- (v) Modos de carregamento.

Griffith (1920) assumindo que um material frágil apresenta uma população de pequenas trincas que causam concentração de tensões, postulou, (DIETER, 1981): “...uma trinca se propagará quando a variação da energia elástica de deformação for pelo menos igual à energia necessária para criar a nova superfície da trinca...”. Griffith

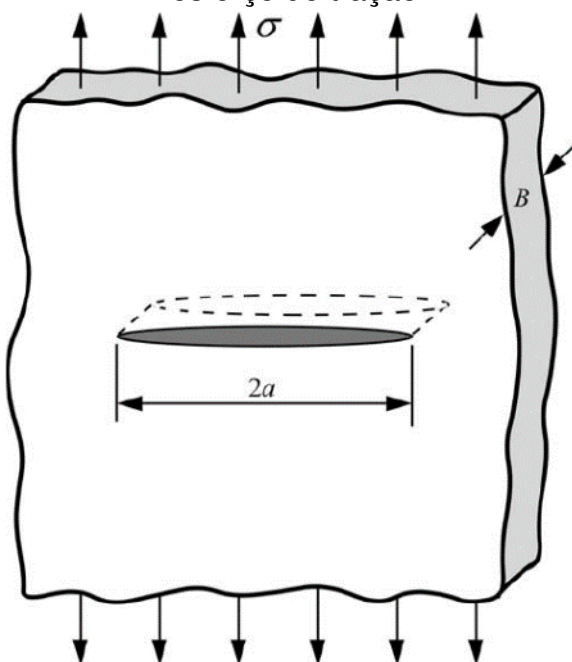
desconsiderou a espessura da placa, passando a tratar o problema como um estado plano de tensão e, considerou a geometria da trinca elíptica. Na figura 2, mostra-se, esquematicamente, a geometria da trinca, podendo-se ter trincas no interior ou na superfície do componente.

A eq. (2), proposta por Griffith, determina a tensão necessária para que a trinca se propague.

$$\sigma_{crít} = \sqrt{\frac{2 E \gamma_s}{\pi a}}, \quad (2)$$

sendo $\sigma_{crít}$ a tensão crítica necessária para a propagação da trinca, E o módulo de elasticidade do material, γ_s a densidade de energia da superfície e “ a ” o comprimento da trinca.

Figura 2 – Uma trinca de espessura contínua em uma placa infinita submetida a um esforço de tração



Fonte: Anderson (2005).

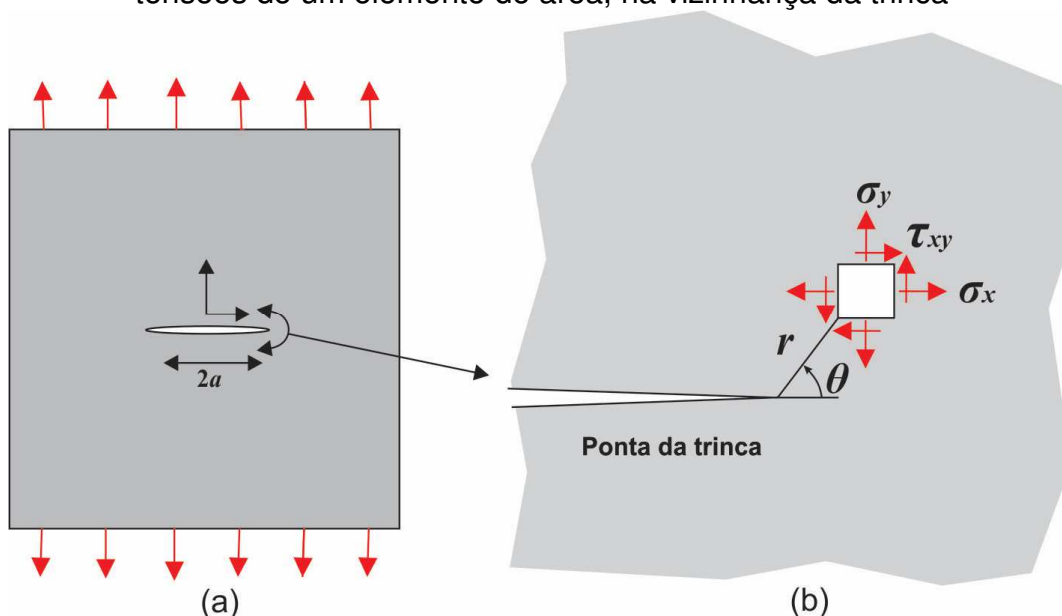
Irwin, em 1940, estendeu os trabalhos de Griffith para materiais dúcteis (SCHIVJE, 2001). Em meados de 1950, mostrou que as tensões próximas à frente de trinca são, de forma geral, representadas pela eq. (3) (BANNANTINE et al., 1989),

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta), \quad (3)$$

onde $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ coordenadas polares da localização do ponto de interesse em relação à frente de trinca e K o fator intensidade de tensão (FIT), (BANNANTINE et al., 1989).

A figura 3 mostra a distribuição de tensões para uma chapa fina de um sólido elástico na frente de trinca, em função das coordenadas $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$.

Figura 3 – (a) Placa infinita no modo I de abertura de trinca. (b) Estado plano de tensões de um elemento de área, na vizinhança da trinca



Fonte: Adaptado de Schivje (2001).

As componentes de tensão para uma placa fina, figura 3a, na frente da trinca, em termos das coordenadas, indicadas na figura 3b, são dadas pelas seguintes equações (DIETER, 1981).

$$\begin{cases} \sigma_{xx}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi a}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right); \\ \sigma_{yy}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi a}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right); \\ \tau_{xy}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi a}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right); \\ \sigma_{zz} = 0; & \text{(tensão plana)} \\ \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}); & \text{(deformação plana)} \\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Irwin demonstrou que o FIT é adequado para estabelecer o nível de tensões próximo à frente da trinca. Se duas falhas de geometrias diferentes têm o mesmo valor numérico para o FIT, então o campo de tensões em torno de cada uma das falhas é idêntico. Evidencia-se ainda, que nele se constituem, em um único parâmetro, o carregamento aplicado, o comprimento e a forma da trinca e pela geometria do componente. A forma geral do FIT é dada pela eq. (5).

$$K(a) = f(a)\sigma\sqrt{\pi a}, \quad (5)$$

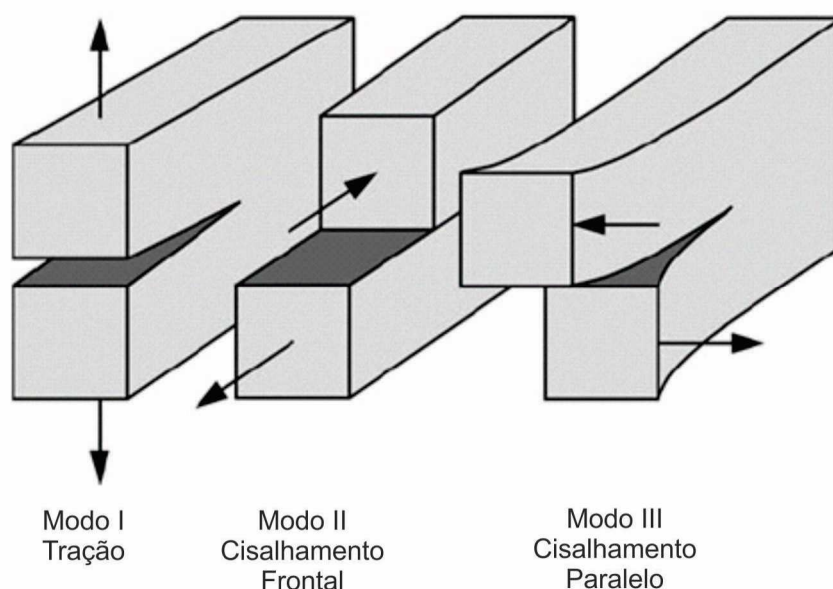
sendo σ corresponde à tensão nominal aplicada, “ a ” é o comprimento da trinca e “ $f(.)$ ” é a função de correção do FIT.

A função de correção que define o fator de intensidade de tensão pode ser obtida pela literatura. Para situações nas quais a função de correção do FIT não pode ser obtida diretamente por meio de tabelas, podendo-se utilizar o método da superposição. A sua determinação também pode ser feita por métodos analíticos, numéricos e experimentais (BANNANTINE et al., 1989).

Como mencionado anteriormente, o FIT é adequado para descrever a distribuição de tensões a frente da trinca. Entretanto, a tenacidade à fratura é definida como a capacidade do material resistir à propagação da trinca, sendo representado por K_c . A tenacidade à fratura depende do modo de abertura da trinca, do processo de fabricação do material, do tipo de carregamento aplicado e do estado de tensão a frente da trinca (ANDERSON, 2005).

São apresentadas, na figura 4, as três geometrias de abertura das trincas.

Figura 4 – Três modos de abertura de trinca



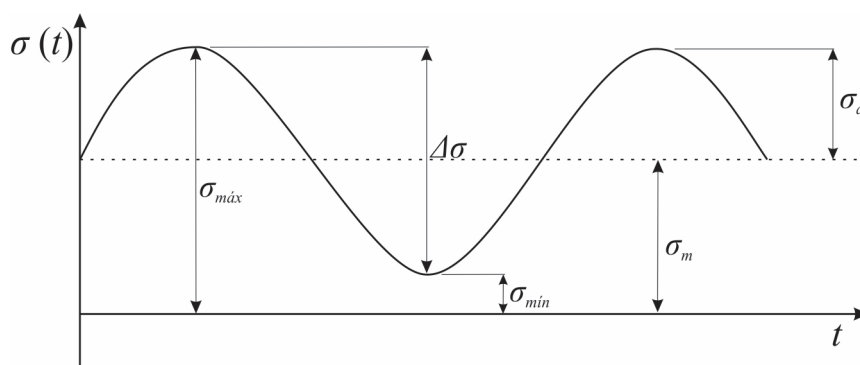
Fonte: Adaptado de Anderson (2005).

O modo I refere-se à tensão de tração. Esse é o modo usual para o teste de tenacidade à fratura. O modo II (cisalhamento frontal) refere-se a uma tensão de cisalhamento aplicada no plano da trinca normal à aresta frontal da trinca. O modo III (cisalhamento paralelo) é para tensões cisalhantes aplicadas paralelamente à aresta

frontal da trinca. O carregamento associado ao modo I é a situação mais agressiva e, corresponde ao modo de fratura na maioria dos componentes mecânicos. Para este modo, a falha no componente é caracterizada pelo mecanismo de clivagem, levando o material a uma ruptura frágil, com pouca absorção de energia no processo de fratura (ANDERSON, 2005).

As tensões mencionadas anteriormente são ocasionadas por um carregamento variável no tempo. Os sinais de onda que compõem esse carregamento podem ter várias formas, tais como, onda senoidal, quadrada, triangular, entre outras. A Figura 5 apresenta um ciclo de tensões do tipo senoidal (DIETER, 1981).

Figura 5 – Ciclo de Tensão



Fonte: O autor (2019).

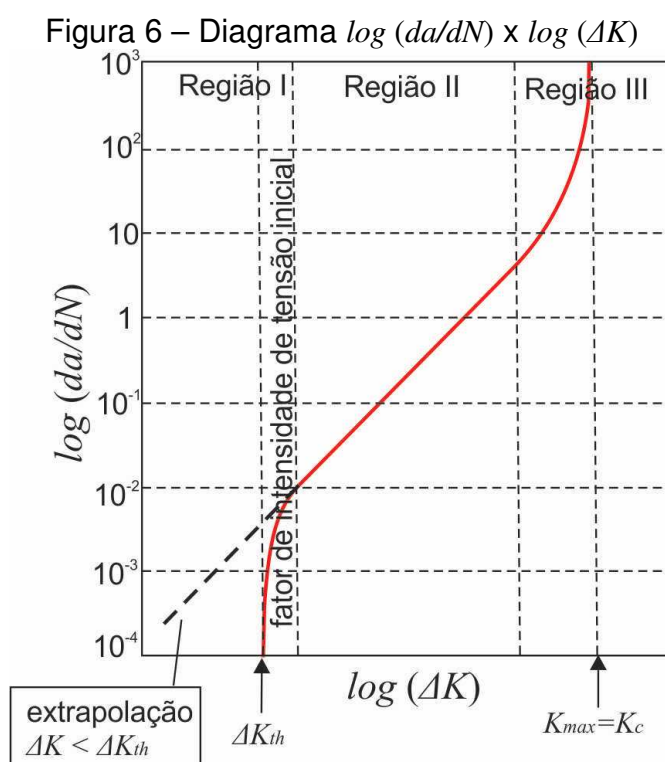
Conforme observado na figura 5 é possível determinar as relações entre as tensões dadas no quadro 1.

Quadro 1 – Relações entre as tensões

Relações	Designações
$\Delta\sigma = \sigma_{máx} - \sigma_{mín}$	Intervalo de tensões
$\sigma_a = \frac{\Delta\sigma}{2}$	Tensão alternada
$\sigma_m = \frac{\sigma_{máx} + \sigma_{mín}}{2}$	Tensão média
$R = \frac{\sigma_{mín}}{\sigma_{máx}}$	Razão entre as tensões

Fonte: O autor (2019).

Apresenta-se, na figura 6, o diagrama $\log (da/dN) \times \log (\Delta K)$. A partir deste diagrama é que são definidos os modelos de evolução de trinca e as três regiões da taxa de crescimento das trincas em função da variação do FIT. A região I tem como principal característica um valor limite para o FIT, abaixo do qual os carregamentos não causam danos ao componente trincado e as trincas não se propagam. Este é denominado FIT *threshold* (ΔK_{th}) ou FIT limite, sendo determinado experimentalmente (BEDEN et al., 2009). Nesta região, o comprimento da trinca é influenciado diretamente pelo tamanho do grão, pela tensão média gerada pela carga aplicada e a temperatura ambiente. Na região II, a zona plástica na frente de trinca é grande quando comparada com o tamanho do grão e, ativa micro mecanismos poli granulares. Nesta região o comportamento da relação $\log (da/dN) \times \log (\Delta K)$ é, aproximadamente, linear, sendo que a taxa de crescimento da trinca varia de 10^{-6} a 10^{-3} mm/ciclo e o crescimento da trinca é estável (BEDEN et al., 2009). Na região III, observam-se taxas bastante elevadas de crescimento da trinca, ou seja, o crescimento ocorre de forma instável. A curva $\log (da/dN) \times \log (\Delta K)$ torna-se íngreme aproximando-se da sua assíntota que é definida pela tenacidade à fratura (K_c), que, na figura 6, ocorre quando $K_{máx}=K_c$. Os mecanismos de fratura podem ter comportamento dúctil ou frágil (BEDEN et al., 2009).



Fonte: Adaptado de Schivje (2001).

Podem ser encontradas várias leis de evolução que permitem prever a propagação de trinca nas suas diferentes etapas na literatura especializada. Nas próximas seções, serão apresentados os modelos de propagação de trincas.

2.3 MODELOS DE PROPAGAÇÃO DE TRINCAS

Há diversos modelos, na literatura, para a descrição da propagação de uma trinca, como os de Paris-Erdogan (1963), de Forman et al. (1967), de Collipriest (1972), de Hudson (1981) e de Forman-Newman-De Koning (1984). Cada um deles apresenta uma abordagem específica, e consideram, por exemplo, a estrutura do material (micro ou macro), o carregamento aplicado (amplitude de tensão constante ou variável), a utilização de parâmetros dependentes dos materiais (fator intensidade de tensão, espessura, tensões residuais, etc.), dentre outras. Mas, nem todos os modelos representam as três regiões apresentadas na figura 6 e, sua principal classificação é feita devido a: amplitude de tensão constante ou variável.

2.3.1 Modelos de Carregamento com Amplitude de Tensão Constante

A análise do crescimento de uma trinca em um componente sujeito a um carregamento de amplitude de tensão constante (CATC) é a mais simples. No CATC, o histórico do carregamento é desconsiderado e, na prática, dificilmente esse tipo de situação é encontrada. Há vários modelos capazes de representar a evolução do crescimento de uma trinca de um CATC. Contudo, eles variam nos parâmetros que influenciam a propagação de trincas e no número de parâmetros para o ajuste dos dados experimentais da curva, propostos pela lei de evolução. Os modelos de Paris-Erdogan (1963), de Forman et al. (1967) e de Collipriest (1972) são alguns exemplos de modelos do tipo CATC. No quadro 2 é possível observar as suas equações e características.

Quadro 2 – Modelos de propagação de trinca para CATC

Modelos de propagação de trincas a CATC	Características
<p>Modelo de Paris</p> $\frac{da}{dN} = C_p (\Delta K)^{m_p}$	<ul style="list-style-type: none"> • Não considera a razão entre as tensões (R); • Abrange somente a região II
<p>Modelo de Forman</p> $\frac{da}{dN} = \frac{C_F (\Delta K)^{m_F}}{(1-R)K_c - \Delta K}$	<ul style="list-style-type: none"> • Considera a razão entre as tensões (R); • Abrange as regiões II e III; • Utiliza a tenacidade à fratura, K_c.
<p>Modelo de Collipriest</p> $\frac{da}{dN} = C (K_c \Delta K_{th})^m \exp \left[\ln \left(\frac{K_c}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}} \tanh^{-1} \left\{ \frac{\ln \left(\frac{\Delta K^2}{(1-R)K_c \Delta K_{th}} \right)}{\ln \left(\frac{(1-R)K_c}{\Delta K_{th}} \right)} \right\} \right]$	<ul style="list-style-type: none"> • Considera a razão entre as tensões (R); • Abrange as regiões I, II e III; • Utiliza a tenacidade à fratura, K_c; • Utiliza o limiar inicial de tensão, ΔK_{th}.

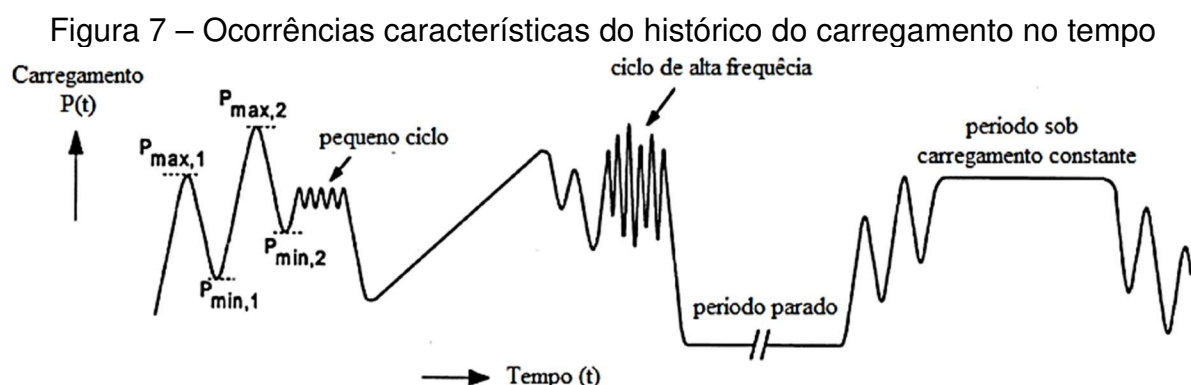
Fonte: O autor (2019).

onde C_p , m_p são as constantes do material da Lei de Paris, C_F e m_F são as constantes do material da Lei de Forman, C e m são as constantes do material da Lei de Collipriest, N o número de ciclos, “ a ” o comprimento da trinca, ΔK a variação do FIT, K_c a tenacidade à fratura do material, R a razão entre as tensões, ΔK_{th} é o limite do FIT. Porém, há muitos outros modelos, cada um com suas especificidades e limitações, encontrados na literatura para descrever os modelos de crescimento de trinca para um CATC, (BEDEN et al., 2009).

2.3.2 Modelos com Carregamento com Amplitude de Tensão Variável

Os modelos com carregamento de amplitude de tensão variável (CATV), abordam os problemas do meio contínuo de uma forma mais realística. Pode-se citar como exemplo desse tipo de carregamento diversos equipamentos quando em serviço, tais como, automóveis, vasos de pressão, aeronaves entre outros.

Observar-se na figura 7 um CATV, sendo que esse tipo de carregamento é muito influenciado pelas diferentes solicitações que o equipamento em análise está sendo submetido. Entretanto, alguns parâmetros possuem uma influência maior nesse tipo de carregamento, tais como: a amplitude do carregamento, a razão de tensão, a frequência da carga e a sequência do carregamento. Como esses parâmetros são dispendiosos de serem obtidos, o estudo de um sistema de CATV torna-se demasiadamente complexo quando comparado com um CATC (BEDEN et al., 2009).



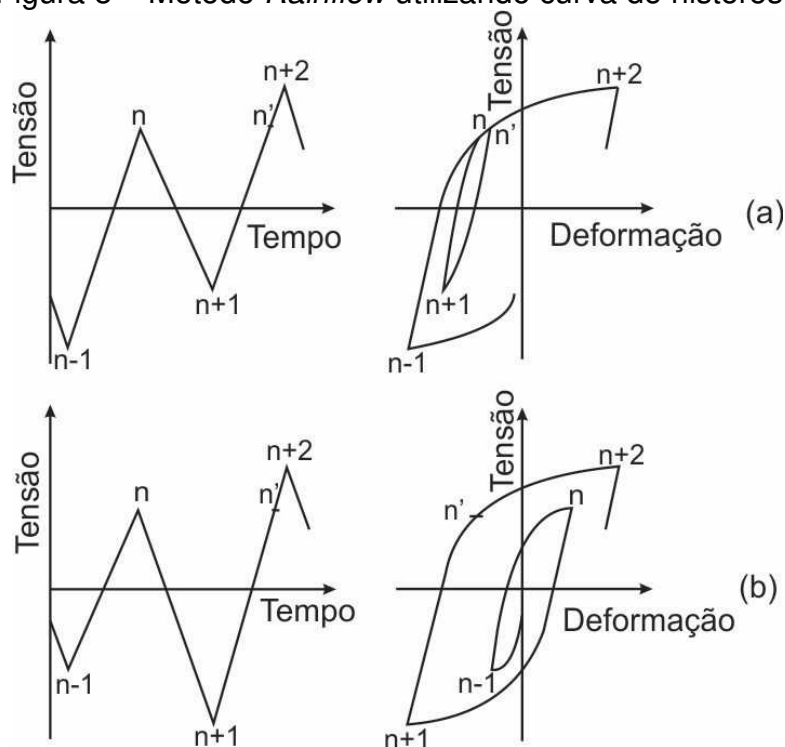
Fonte: Adaptado de Schivje (2001).

Existem várias metodologias para converter esse espectro de carregamento aleatório em ciclos mais simples e, uma das abordagens mais utilizadas é a contagem de ciclos. Há vários métodos para a contagem de ciclos, entre eles podem-se citar os seguintes métodos de contagem de: pico, faixa simples, ciclo completo, contagem de par de intervalos e *Rainflow* (LIGAJ, 2011; MARSH et al., 2016).

O método *Rainflow* (RF) é o mais amplamente utilizado e foi desenvolvido por Matsuishi e Endo (1968). No método a identificação dos ciclos foi comparada ao caminho percorrido pela chuva num telhado de uma casa típica japonesa. Os autores definiram um ciclo RF completo como um intervalo de tensão formado por dois pontos, que são delimitados por pontos adjacentes de maior e menor magnitude; como o caminho retorna ao ponto inicial, isso acarreta na formação de uma curva de histerese de tensão-tensão fechada, formando um *loop*, conforme descrito esquematicamente, na figura 8a. Para o caso em que pontos de tensão sucessivos convergem ou divergem, as curvas de histerese não formam um *loop*, figura 8b. Para este caso, os autores assumiram que o *dano a fadiga* poderia ser atribuído a cada intervalo sucessivo de tensões como meio ciclo. Com isso, pode-se contabilizar como um ciclo inteiro quando se forma um *loop* completo ou fechado e, meio ciclo, quando não há a

formação de um *loop* fechado. A norma ASTM E-1049-85 (2011) apresenta as regras para a contabilização de ciclos no método *Rainflow*. Com a quantidade numérica de ciclos e a amplitude de carregamento determinados pelo método *Rainflow*, é possível determinar o dano causado por fadiga através da lei de Palmgren e Miner (LIN et al., 2019).

Figura 8 – Método *Rainflow* utilizando curva de histerese



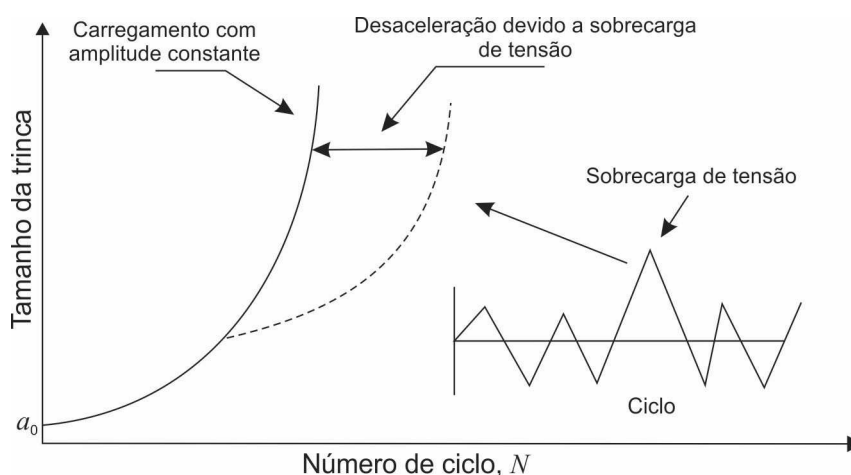
Fonte: Adaptado de Ligaj (2011).

Outra característica importante no CATV é que a magnitude das tensões as quais os equipamentos estão submetidos são aleatórias em função do tempo. Por exemplo, a sequência de três diferentes tipos de carregamentos tem influência significativa na taxa de crescimento do comprimento da trinca por fadiga sendo elas: sobrecarga de tração, subcarga de compressão e sobrecarga de tração seguida de uma subcarga de compressão. Essas sequências de carregamentos influenciam na taxa de crescimento da trinca da seguinte maneira: retarda, acelera e minimiza os efeitos do retardo, respectivamente. É devido a essa interação de carregamentos que o CATV se torna complexo. Outro aspecto que influencia o crescimento da trinca é a sequência de aplicação desses carregamentos (BEDEN et al., 2009).

Ilustra-se na figura 9 o efeito de uma sobrecarga de tensão e o seu efeito na desaceleração da taxa de crescimento da trinca por fadiga. A desaceleração ocorre, pois, a região deformada plasticamente a frente da trinca é maior que a zona plástica

causada pela sobrecarga. Com isso, para que a trinca consiga voltar a se propagar na taxa de crescimento anterior, deve-se desenvolver na vizinhança da frente de trinca um regime de tensões trativas superior às compressivas na região de deformação plástica originada pela sobrecarga.

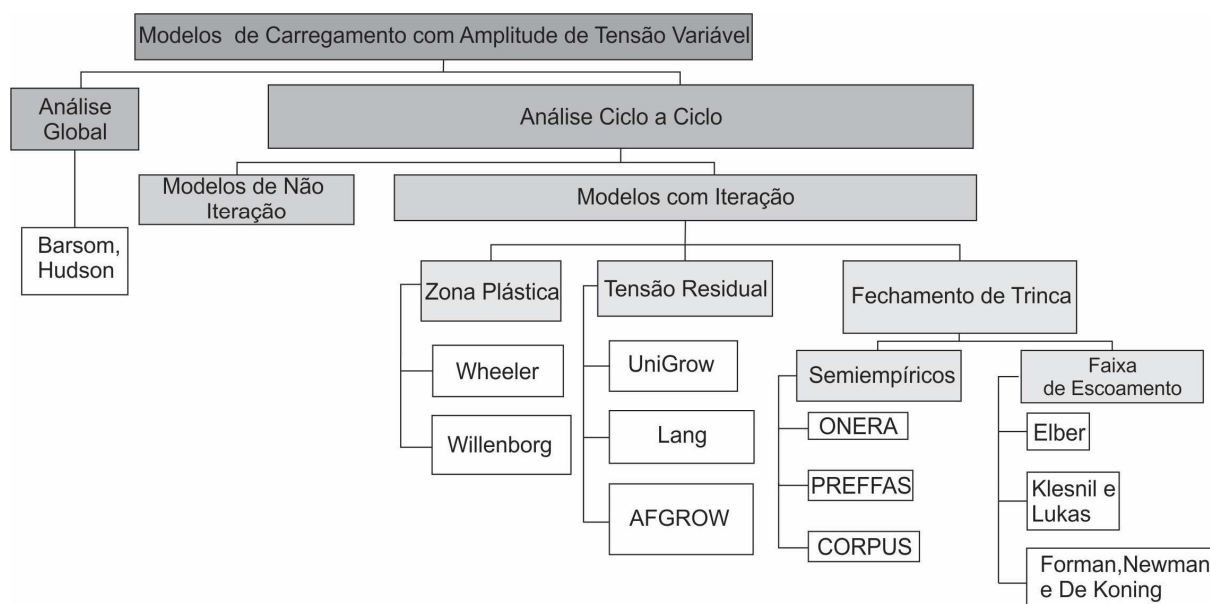
Figura 9 – Desaceleração da taxa de crescimento da trinca



Fonte: Adaptado de Beden et al. (2009).

Os modelos de predição da propagação de trincas do tipo CATV podem ser divididos em análise global e análise ciclo a ciclo. A análise global prevê o crescimento da trinca por fadiga considerando a média dos ciclos de carregamentos aplicados. Já, para a análise ciclo-a-ciclo, avalia-se o crescimento da trinca por fadiga para cada ciclo de carregamento e, determina-se a vida em fadiga pelo dano acumulado. Neste tipo de análise pode ser considerado também a interação entre os ciclos, ou seja, o histórico de aplicação das cargas posteriores é considerado. Na figura 10 é possível visualizar a classificação dos modelos para a predição do crescimento da trinca do tipo CATV (MACHNIEWICZ, 2012a).

Figura 10 – Classificação dos modelos para a predição do crescimento da trinca por fadiga do tipo CATV



Fonte: Adaptado de Machniewicz (2012a).

2.3.2.1 Análise global

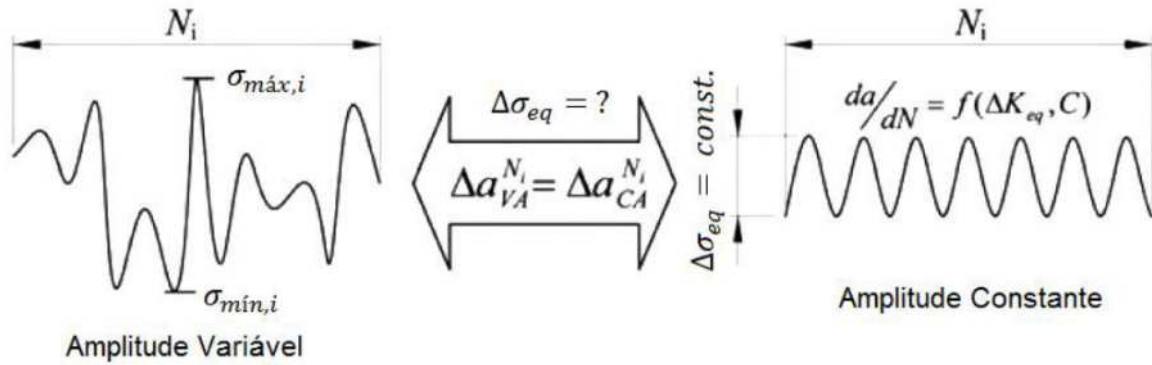
O modelo da raiz quadrática média (*root mean square* – RMS) é uma ferramenta geral utilizada pela análise global, proposto por Barsom em 1976. O objetivo de Barsom (1976) foi obter um fator de intensidade de tensão equivalente dos modelos CATV para os CATC, conforme ilustrado na figura 11. Este modelo mede as faixas para o fator de intensidade de tensão representando o espectro de carregamento pelo método da raiz quadrática média. Esse modelo é definido pela eq. (6).

$$\Delta K_{rms} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta K_i^2}, \quad (6)$$

sendo ΔK_{rms} o fator de intensidade de tensão médio quadrático (RMS), ΔK_i o fator de intensidade de tensão no i -ésimo ciclo (N_i) e N o número total de ciclos.

O ΔK_{rms} obtido por Barsom é a variação do FIT equivalente (ΔK_{eq}) da figura 11.

Figura 11 – Conceito do FIT equivalente



Fonte: Adaptado de Machniewicz (2012a).

Esta abordagem é indicada para espectros de carga de amplitude variável, que sejam representados por uma função de distribuição uni modal contínua (como exemplo tem-se: curvas de densidade de probabilidade de Rayleigh ou funções log-normal). A condição de carregamento deve resultar em um comprimento de trinca contínuo, relativamente suave quando comparado com a curva do número de ciclos. Se os requisitos da eq. (6) estiverem satisfeitos, Barsom propôs a seguinte relação:

$$\frac{da}{dN} = A_B (\Delta K_{rms})^{m_B}, \quad (7)$$

onde A_B e m_B são parâmetros do modelo dependentes do material. O método proposto por Barsom utiliza o modelo de Paris-Erdogan, com o ΔK_{rms} . Previsões mais precisas podem ser feitas para um grande número de ciclos de carregamento variável.

O modelo de Hudson (1981) utiliza o método proposto por Barsom juntamente com o modelo de Forman et al. (1967), com isso a equação do seu modelo é dada por:

$$\frac{da}{dN}(N) = \frac{C \Delta K_{rms}^m}{(1-R_{rms}) K_c - \Delta K_{rms}}, \quad (8)$$

sendo C e m constantes do material, R_{rms} razão RMS, K_c tenacidade à fratura e ΔK_{rms} a variação do fator de intensidade de tensão RMS.

2.3.2.2 Análise ciclo a ciclo

São modelos para a predição do crescimento de trincas que analisam o histórico do carregamento ciclo a ciclo, acarretando um crescimento da trinca por fadiga em incrementos (Δa_i) associado a ciclos de carregamentos consecutivos. (MACHNIEWICZ, 2012a).

Os modelos que utilizam esse método são classificados conforme a consideração do histórico do carregamento, ou seja: os que não consideram o histórico do carregamento (Dano Linear Acumulado), e os que consideram o histórico (BEDEN et al., 2009). Esses modelos serão descritos abaixo.

2.3.2.3 Dano linear acumulado

O modelo de dano linear acumulado é simplesmente uma soma dos incrementos de crescimento da trinca calculados, não levando em consideração os efeitos de interação do histórico de carregamento. Como resultado, é o modelo mais simples para prever a taxa de crescimento da trinca em CATV. (KHAN et al., 2007). Esta regra pode ser apresentada matematicamente como:

$$a = a_0 + \sum_{i=1}^N \frac{da}{dN} = a_0 + \sum_{i=1}^N f(\Delta K_i, r_i, \dots), \quad (9)$$

onde “ a ” o comprimento final da trinca no ciclo, “ a_0 ” o comprimento inicial da trinca no ciclo, “ ΔK_i ” o fator de intensidade de tensão no i -ésimo ciclo e r_i o tamanho da zona plástica no i -ésimo ciclo.

2.3.2.4 Considerando os efeitos de interação

A presença de interações fica evidente quando se realizam os experimentos. Para uma predição mais acurada do crescimento de trincas é necessária uma

abordagem dessas interações. O histórico do carregamento deve ser considerado, quando aplicado ao componente mecânico. Os modelos são apresentados na seguinte forma: Zona de Plástica, Tensão Residual e Fechamento de Trincas, sendo este subdividido em semiempíricos e de faixa de escoamento.

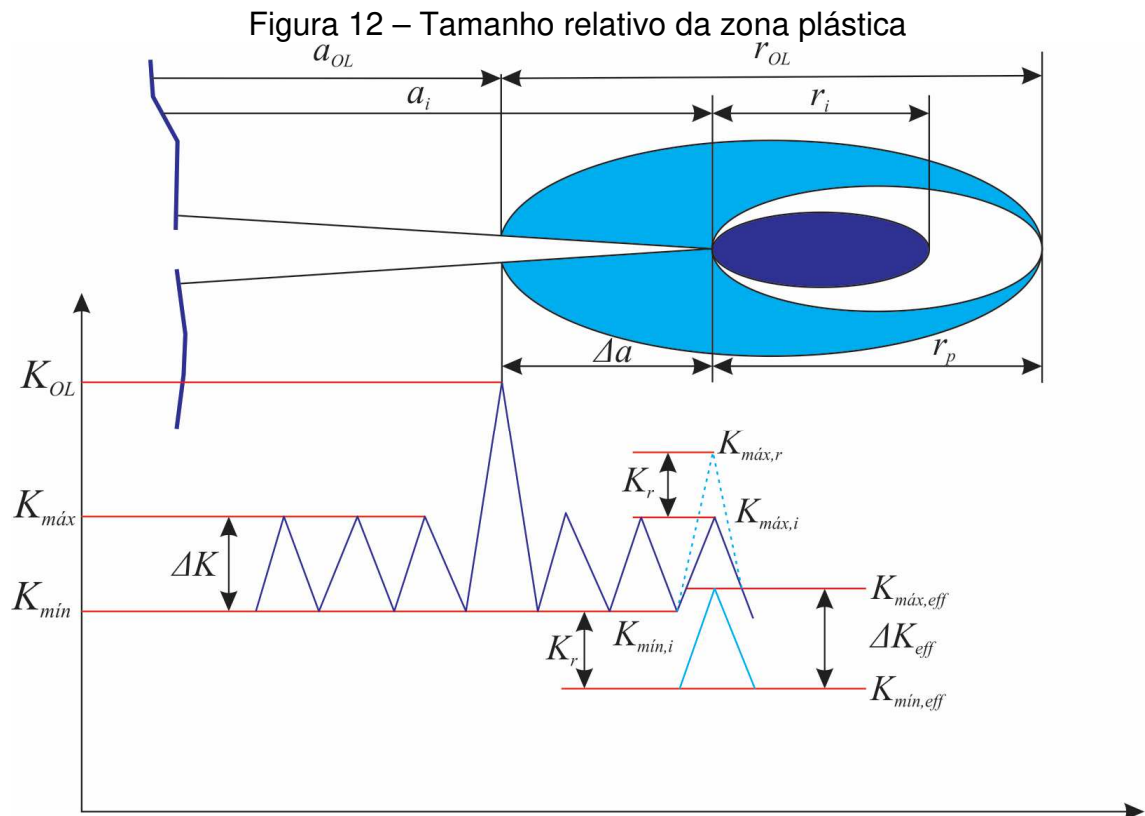
2.3.2.4.1 Modelos de zona plástica

Segundo Gallagher (1974) e Schijve (2001), os modelos que tentam explicar o efeito da interação na frente da ponta da trinca são denominados modelos de zona plástica. Wheeler (1972) e Willenborg et al. (1971) iniciaram os estudos destes modelos com interação, baseados no mecanismo de retardo na propagação de trincas devido a tensão residual na frente da trinca (ANDERSON, 2005)

O modelo de predição de Wheeler (1972) possui base na relação de acumulação do dano, mas modificado com um parâmetro de retardo (C_p).

$$\left(\frac{da}{dN}\right) = C_p \left(\frac{da}{dN}\right) = C_p f(\Delta K). \quad (10)$$

O valor de C_p varia de 0 a 1 dependendo da localização da ponta da trinca em relação a zona plástica previamente criada (r_p) e do tamanho da zona plástica no ciclo de carga atual (r_i), conforme figura 12. Pela mesma figura é possível observar a criação de uma zona plástica pela aplicação de uma sobrecarga simples denominada tamanho da zona plástica com sobrecarga (r_{OL}), o comprimento da trinca devido à sobrecarga (a_{OL}), o comprimento da trinca no ciclo atual (a_i) e o incremento no comprimento de trinca (Δa).



Fonte: Adaptado de Khan et al. (2007).

A zona plástica previamente criada é definida pela eq. (11):

$$r_p = (a_{OL} + r_{OL}) - a_i, \quad (11)$$

sendo ΔK_{eff} a variação do fator de intensidade de tensão efetivo, $K_{máx,eff}$ e $K_{mín,eff}$ os fatores de intensidade de tensão máximo e mínimo efetivos, K_{OL} o fator de intensidade com sobrecarga.

O valor de C_P é obtido pela equação:

$$\begin{cases} C_P = \left[\frac{r_i}{r_p} \right]^m & \text{quando } r_i < r_p, \\ C_P = 1 & \text{quando } r_i \geq r_p, \end{cases} \quad (12)$$

onde m o coeficiente calculado experimentalmente, dependente do nível de tensão, da forma da trinca, do material e do espectro de carregamento. O modelo do Wheeler (1972) é incapaz de prever o fenômeno de parada da propagação da trinca após uma sobrecarga e não reconhece o atraso no retardo de propagação.

O modelo de Willenborg et al. (1971), assumiu que o retardo na propagação da trinca é função do fator de intensidade de tensão, necessário para cancelar o efeito da zona plástica gerada por uma sobrecarga. Willenborg utilizou uma variável no

estado de tensão semelhante a utilizada por Newman, designada por α_g . Neste modelo, um fator de intensidade de tensão máximo requerido (K_r) é definido para produzir uma zona plástica suficiente para tocar a zona plástica gerada pela sobrecarga. Assume também, que há uma tensão compressiva residual (σ_r), devido à sobrecarga que reduz a tensão efetiva na ponta da trinca. A relação do fator de intensidade de tensão máximo requerido é dado pela eq. (13).

$$K_r = (K_{m\acute{a}x})_{OL} \left\{ 1 - \frac{\Delta a}{r_{OL}} \right\}^{1/2} - K_{m\acute{a}x}, \quad (13)$$

sendo $(K_{m\acute{a}x})_{OL}$ o fator de intensidade máximo no ciclo de sobrecarga, Δa a variação do crescimento da trinca desde o ciclo de sobrecarga e, $K_{m\acute{a}x}$ é o fator de intensidade máximo no ciclo i .

O valor de r_{OL} pode ser determinado pela seguinte equação:

$$r_{OL} = \frac{1}{\alpha\pi} \left(\frac{K_{m\acute{a}x,OL}}{\sigma_y} \right)^2, \quad (14)$$

onde α o fator de restrição do estado plano de tensão ou de deformação e σ_y a tensão de escoamento.

Uma vez que a zona de escoamento se estendeu através da zona de sobrecarga o valor de K_r é igual a zero, com isso, o fator de intensidade efetivo é definido como:

$$\begin{cases} \Delta K_{eff} = K_{m\acute{a}x,eff} - K_{m\acute{i}n,eff}, \\ K_{m\acute{a}x,eff} = K_{m\acute{a}x} - K_r, \\ K_{m\acute{i}n,eff} = K_{m\acute{i}n} - K_r, \\ R_{eff} = \frac{K_{m\acute{i}n,eff}}{K_{m\acute{a}x,eff}}, \end{cases} \quad (15)$$

sendo ΔK_{eff} o FIT efetivo, $K_{m\acute{a}x,eff}$ o FIT máximo efetivo, $K_{m\acute{i}n,eff}$ o FIT mínimo efetivo e R_{eff} a razão entre as tensões efetivas.

Portanto, a equação de Willenborg em conjunto com a de Forman resultará em:

$$\frac{da}{dN} = C_F \frac{(\Delta K_{eff})^m}{(1 - R_{eff}) K_c - \Delta K_{eff}}, \quad (16)$$

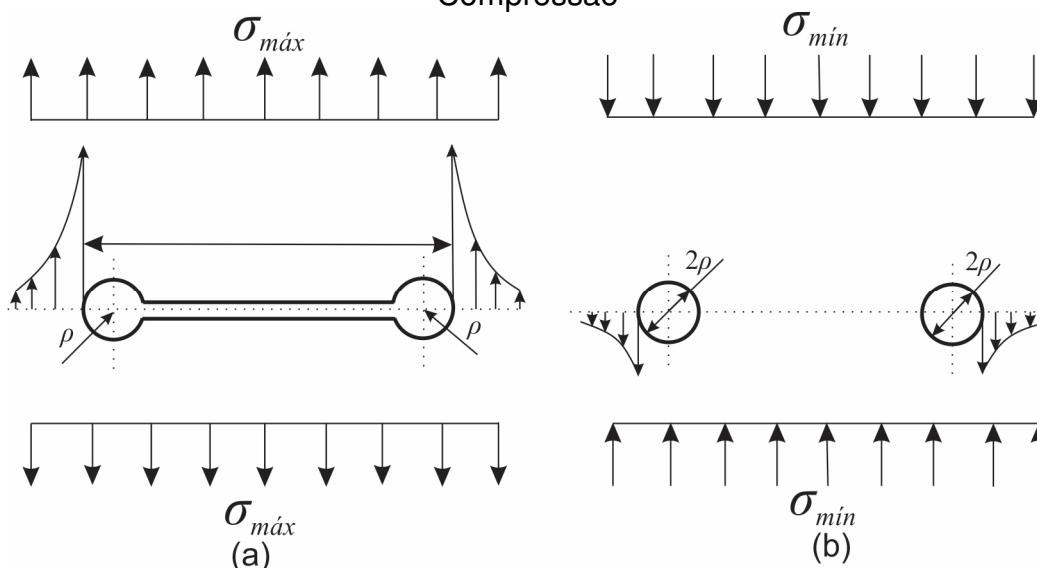
onde C_F e m são constantes do modelo de Willenborg dependentes do material.

2.3.2.4.2 Modelos de tensão residual

Muitos trabalhos realizados levam em consideração a tensão residual a frente da trinca, para o crescimento da mesma. Os modelos denominados de tensão residual aplicam esse método e, dentre eles podem-se citar: de Unigrow, de Lang e de AFGROW (MACHNIEWICZ, 2012a).

O modelo Unigrow foi proposto por Noroozi et al. em 2005. Os autores atribuíram, o retardamento ou a aceleração do crescimento na ponta da trinca, às tensões residuais. Eles assumiram que a distribuição da tensão residual nesta região depende do comprimento da trinca e do histórico de carregamento. Para este modelo, a função da/dN está relacionada com um decréscimo do FIT de $\Delta K - K_r$, decorrente da distribuição da tensão residual. Um parâmetro importante no modelo é o raio da ponta da trinca, ρ^* , o qual é dependente do material e possui um valor finito, fazendo com que a predição de crescimento da trinca utilize a metodologia semelhante à de corpos com entalhe. O incremento no raio é calculado segundo a abordagem da tensão local pela equação de Manson-Coffin, conforme figura 13.

Figura 13 – Distribuição de tensão considerando o modelo Unigrow: (a) Tração e (b) Compressão



Fonte: Adaptado de Noroozi et al. (2005).

Uma vez que o fenômeno de fechamento da trinca não é modelado, a distribuição das tensões residuais na ponta da trinca $\sigma_{m\acute{i}n}$, é arbitrariamente

considerada como uma imagem espelhada da distribuição de tensão compressiva antes da ponta da trinca, de acordo com a solução de Creager e Paris (MACHNIEWICZ, 2012a).

O modelo proposto por Lang (2000), foi desenvolvido para históricos irregulares de carregamento. O parâmetro direção de força da trinca é dado por:

$$\Delta K_{eff,L} = K_{máx} - K_{PR} - \Delta K_T, \quad (17)$$

sendo $\Delta K_{eff,L}$ o parâmetro direção de força da trinca, ΔK_T o valor intrínseco *threshold* e K_{PR} o valor do FIT para a propagação da trinca. Os valores acima do K_{PR} implicam que a taxa de crescimento da trinca ocorrida num determinado ciclo é dependente da tensão residual de compressão, durante o procedimento de descarregamento. Lang não desconsidera a ocorrência de fechamento de trinca, porém, considera insignificante a sua contribuição.

O modelo de fechamento via software AFGROW (2006), desenvolve-se a partir dos conceitos de fechamento de trincas. A taxa decrescimento de trinca está associado a eq. (18).

$$\Delta K_{eff} = K_{máx} - K_{op}, \quad (18)$$

onde K_{op} o FIT de abertura.

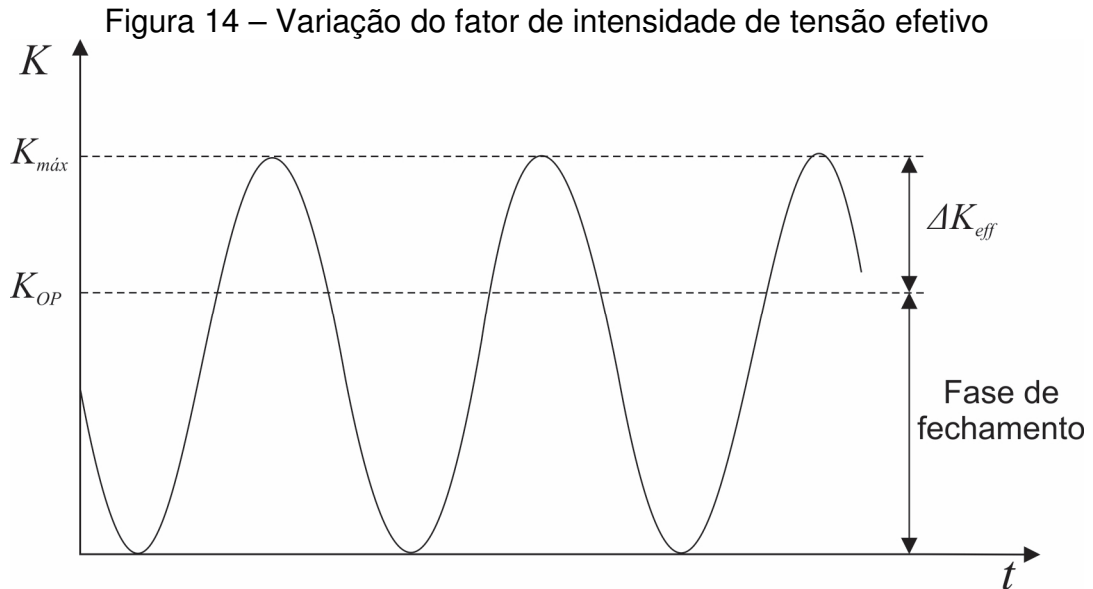
Contudo, a determinação do valor da tensão σ_{OP} é diferente a utilizada pelos modelos de fechamento de trinca. O fenômeno de fechamento é atribuído as tensões residuais compressivas. Esse software utiliza vários modelos de propagação de trincas, do tipo CATC e CATV.

2.3.2.4.3 Modelos semiempíricos

A ocorrência do fechamento da trinca por fadiga, após a remoção de uma tensão de tração é uma realidade física, esse fenômeno foi descoberto por Elber (1970). Qualquer modelo que trabalhe com a predição do crescimento de trincas deve levar em consideração esse fenômeno, pois o torna mais realístico.

Elber introduziu o conceito do fator de intensidade efetivo, dado pela eq. (18). Esses modelos consideram que a trinca começa a se propagar acima do valor de K_{OP} , conforme representa a figura 14. Também, destaca-se que um dos mecanismos que

induzem o fechamento de trinca é a plasticidade na região próxima à frente de trinca, ocasionada por tensões residuais.



Fonte: Adaptado de Anderson (2005).

Tem-se alguns modelos que utilizam esse mecanismo, tais como modelos de ONERA, de CORPUS e de PREFFAS.

O modelo de ONERA é baseado no mecanismo de Elber e, foi proposto por Baudin e Robert em 1981. O fator de intensidade de abertura da trinca, K_{OP} , no i -ésimo ciclo depende do valor equivalente de K , que é $K_{máx,eq}$ e $K_{mín,eq}$ o máximo e mínimo FIT equivalente, que são o histórico do carregamento ajustados a cada ciclo. O resultado do fechamento de trinca no i -ésimo ciclo é dado por:

$$K_{OP,i} = K_{máx,eq,i} \left(\alpha_{ONR} f_1(R_{eq,i}) + (1 - \alpha_{ONR}) f_2(R_{eq,i}) \right), \quad (19)$$

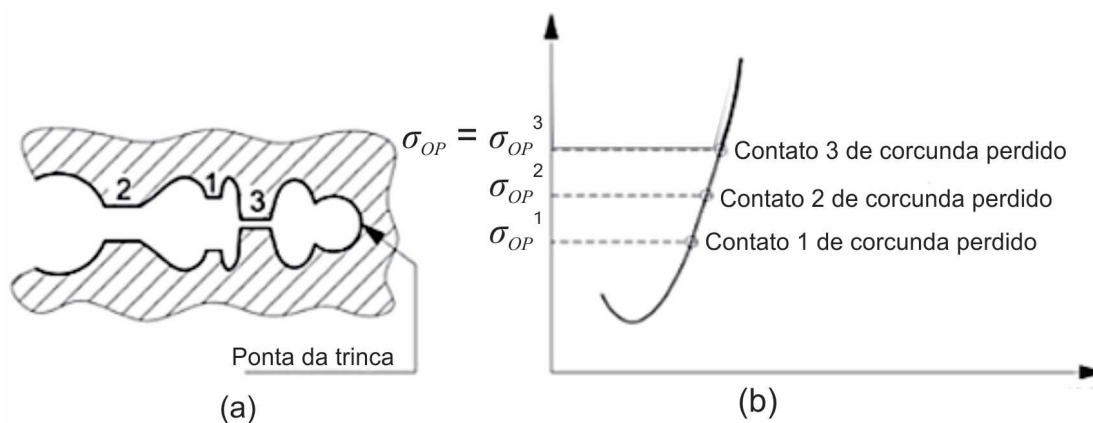
sendo R_{eq} a razão equivalente do fator de intensidade de tensão, $\alpha_{ONR} \in [0,1]$ o parâmetro de carregamento que depende da amplitude de carregamento e, f_1 e f_2 são funções empíricas dependentes do material. A relação de crescimento de trinca utilizada pelo modelo de ONERA utiliza a equação do modelo de Paris modificado, proposto por Ellyin e Li (1984):

$$\frac{da}{dN} = C_o K_{máx}^m \left[\frac{1 - f_2(R)}{1 - f_2(0)} \right]^m, \quad (20)$$

onde C_o e m são constantes do material.

O modelo CORPUS (*Computation of retarded propagation under spectrum loading*) foi proposto por De Koning em 1981. Este modelo foi desenvolvido para prever o crescimento de trinca em sequências de sub carregamento em simulações de voo. O modelo tem base no mecanismo da “saliência”, ou seja, o fechamento da trinca pode ser observado com a formação de saliências. A formação da saliência ocorre devido a aplicação de uma sobrecarga, porém, se logo após for aplicada uma sub carga ocorre o achatamento da saliência, conforme figura 15, reduzindo o valor da tensão de abertura da trinca (σ_{OP}).

Figura 15 – Abertura da trinca conforme modelo de CORPUS



Fonte: Adaptado de Machniewicz (2012a).

O valor da σ_{OP} é definido como o nível de tensão aplicado quando os contatos com as saliências são perdidos.

$$\sigma_{OP} = \text{máx}(\sigma_{OP,n}), \quad (21)$$

onde $\sigma_{OP,n}$ a tensão para criar a saliência no n -ésimo ciclo, com um comprimento de trinca a_n e, associada a um tamanho da zona plástica de $r_{p,n}$. A tensão $\sigma_{OP,n}$ depende da tensão máxima no ciclo, ($\sigma_{máx,n}$) e da tensão mínima que ocorre após o histórico subsequente de carregamento, ($\sigma_{mín,n}$):

$$\sigma_{OP} = \begin{cases} 0 & \text{para } a > a_n + r_{p,n}, \\ g(\sigma_{máx,n} - \sigma_{mín,n})h & \text{para } a_n \leq a \leq a_n + r_{p,n}, \end{cases} \quad (22)$$

sendo g a função do material dependente da razão entre as tensões e, h a função de correção dada pela razão $\sigma_{máx,n}/\sigma_Y$ e, σ_Y é a tensão de escoamento do material.

O modelo de PREFFAS foi proposto por Aliaga (1985), o valor de K_{OP} é definido como o máximo valor do fator de intensidade de tensão para a abertura da

trinca, $K_{OP,i,j}$, calculado para o ciclo corrente considerando os ciclos anteriores j ($1 \leq j \leq x$).

$$K_{OP,i} = \max(K_{OP,i,j}) = \max(K_{máx,j} - U(K_{máx,j} - K_{mín,baixo})), \quad (23)$$

onde $K_{mín,baixo}$ o menor valor de $K_{mín}$ para os ciclos considerados e U é dado pela seguinte equação.

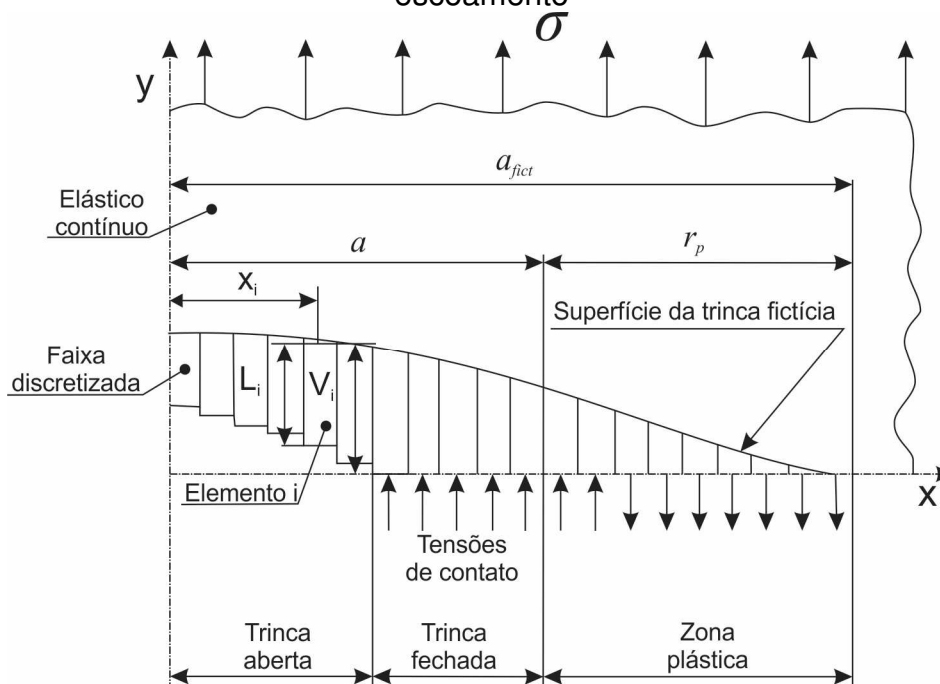
$$U = A + B.R, \quad (24)$$

sendo R a relação $K_{mín,baixo}/K_{máx,j}$ enquanto A e B são as constantes, obtidas de forma empírica, dependentes do material e da espessura do componente.

2.3.2.4.4 Modelos de faixa de escoamento

São modelos baseados no modelo de Dugdale (1960), o qual foi utilizado para determinar o tamanho da zona plástica (r_p) na frente da ponta da trinca. A teoria de Dugdale afirma que a zona plástica a frente da ponta da trinca pode ser modelada como uma tira, infinitamente estreita e, o comprimento dessa tira pode ser igual a distância entre a ponta da trinca real e a fictícia. (MACHNIEWICZ, 2012b), conforme figura 16.

Figura 16 – Esquema discretizado da faixa plástica em modelos de faixa de escoamento



Fonte: Adaptado de Machniewicz (2012b).

Há vários modelos que utilizam essa teoria para a análise do crescimento da trinca sob fadiga, apesar disso, os três mais utilizados são mostrados no quadro 3 (MACHNIEWICZ, 2012b):

Quadro 3 – Modelos de propagação de trinca de faixa de escoamento

Modelos	Equações	Constantes
Elber	$\frac{da}{dN} = C \Delta K_{eff}^m$	C e m são constantes do material
Klesnil e Lukas	$\frac{da}{dN} = C \left(\Delta K_{eff}^m - \Delta K_{th}^m \right)$	C e m são constantes do material ΔK_{th} é o limiar do fator de intensidade threshold
Forman, Newman e de Koning (NASGRO)	$\frac{da}{dN} = C \left(\left(\frac{1-f}{1-R} \right) \Delta K \right)^n \frac{\left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K} \right)^p}{\left(1 - \frac{K_{máx}}{K_c} \right)^q}$	C , n , p e q são constantes do material; K_c tenacidade à fratura; f representa a função de abertura da trinca.

Fonte: Machniewicz (2012b).

Dos três modelos citados na tabela, o modelo de Forman, Newman e de Koning (NEWMAN, 1984; FORMAN e METTU, 1992), também conhecido como FNK, é o mais utilizado e difundido entre eles e, descreve as três regiões da figura 6. Esse modelo é utilizado também no software denominado NASGRO, desenvolvido para a predição do crescimento da trinca. O modelo de FNK pode ser utilizado para carregamentos constantes ou variáveis. Em particular, as aplicações mais usuais deste modelo são para carregamentos aleatórios.

2.4 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Outra abordagem para problemas do tipo CATV é análise via método de elementos finitos (MEF). O MEF tem por finalidade fornecer os tensores de tensão, o tensor de deformação e o vetor de deslocamento em qualquer ponto da malha (MACHNIEWICZ, 2012a). Contudo, a modelagem convencional do crescimento de trincas, utilizando o MEF, é dispendioso computacionalmente devido ao fato da malha gerada ter que corresponder a geometria da trinca. A cada procedimento, devido a propagação de trinca, a malha deve ser atualizada, (YAZID et al., 2009).

Entretanto, dentro da grande família de soluções existentes via MEF, um dos métodos mais recentes para a modelagem de trincas é o método do elemento finito estendido (*extended finite element method - X-FEM*). Esse método subdivide o problema em duas partes distintas: geração de malha para o domínio geométrico (sem a inclusão das trincas) e *enriquecimento da aproximação* por elementos finitos pela adição de funções adicionais na vizinhança da trinca. Essas funções modelam de forma apropriada as tensões na frente de trinca para o estado plano de deformação e tensão. (SUKUMAR et al., 2000).

Esse método reduz o tempo computacional associado a geração de malhas, não exigindo que a malha se adapte as trincas. Além disso, fornece um meio contínuo para a utilização de elementos de ordem superior e elementos especiais sem alteração significativa da formulação.

3 MÉTODO *FAST CRACK BOUNDS*

O método “*Fast Crack Bounds*” (FCB) tem como objetivo a determinação de funções cotas, inferior ($a_{CI}(\cdot)$) e superior ($a_{CS}(\cdot)$), para a função comprimento da trinca ($a(\cdot)$) para os modelos de propagação. Este método foi proposto por Santos e Ávila (2015) e Ávila et al. (2016). As funções cotas se avizinham de forma precisa da solução numérica aproximada obtida pelo método numérico de RK4 e, satisfazem a seguinte desigualdade:

$$a_{CI}(N) \leq a(N) \leq a_{CS}(N); \forall N \in [N_0, N_1], \quad (25)$$

onde N o número de ciclos. Para a obtenção das funções cotas, realizaram-se aproximações, a partir da expansão em série de Taylor, da função comprimento da trinca, retendo os termos de segunda ordem com resíduo Lagrange, representado na eq. (26):

$$a(N) = a_0(N_0) + \frac{da}{dN}(N_0)(N - N_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2a}{dN^2}(\eta)(N - N_0)^2, \text{ com } \eta \in [N_0, N], \quad (26)$$

sendo $a(N)$ o comprimento da trinca no N -ésimo ciclo, a_0 o comprimento inicial da trinca e, o último termo da eq.(26) é o resíduo de Lagrange. A partir de hipótese adequadas, obtêm-se:

$$\frac{d^2a}{dN^2}(a_0) \leq \frac{d^2a}{dN^2}(\eta) \leq \frac{d^2a}{dN^2}(a^*), \text{ com } a_0 \leq \eta \leq a^*. \quad (27)$$

A partir disso, e da representação da função comprimento da trinca são obtidas as seguintes aproximações,

$$\begin{aligned} a_{CI}(N) &= a_0 + \frac{da}{dN}(a_0)(N - N_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2a}{dN^2}(a_0)(N - N_0)^2 \\ &\leq a_0 + \frac{da}{dN}(a_0)(N - N_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2a}{dN^2}(\eta)(N - N_0)^2 = a(N) \\ &\leq a_0 + \frac{da}{dN}(a_0)(N - N_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2a}{dN^2}(a^*)(N - N_0)^2 = a_{CS}(N). \end{aligned} \quad (28)$$

Uma aplicação prática e importante do método FCB foi apresentada no trabalho de Machado (2015). Pela qual, através das funções cotas, superior e inferior, obtidas pelo método FCB propôs-se uma aproximação numérica para a função comprimento da trinca. Nesse caso, não seria necessário o conhecimento da solução da lei de evolução. Essa aproximação numérica fez-se através de soluções numéricas

aproximadas, determinadas via médias, aritmética e geométrica, das cotas inferior e superior comparadas com o método RK4, pelas equações:

$$a_{ar}(N) = \left(\frac{a_{CS} + a_{CI}}{2} \right) (N), \quad (29)$$

$$a_{geo}(N) = \left(\sqrt{a_{CS} \cdot a_{CI}} \right) (N), \quad (30)$$

onde “ a_{ar} ” e “ a_{geo} ” as aproximações numéricas para a função comprimento da trinca via medias aritmética e geométrica, respectivamente.

4 METODOLOGIA DA PESQUISA

Este capítulo apresenta a metodologia utilizada para o desenvolvimento do trabalho proposto. Na formulação do problema são definidos os modelos de propagação de trinca e as medidas de desempenho do método FCB.

4.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A pesquisa proposta neste trabalho adequa e estende o método FCB aos modelos de Hudson e FNK. Estes modelos pertencem a classe de carregamento com amplitude de tensão variável. Neste contexto, é a primeira utilização do método FCB a esta classe de modelos. A partir disso, oportunizam-se várias questões em aberto, algumas delas são mencionadas a seguir:

- 1) Para modelos da classe CATV, o método FCB será utilizado na sua forma original?
- 2) As funções propostas pelo método FCB definem cotas?
- 3) Para o estabelecimento das cotas são observadas as mesmas dificuldades do que as encontradas nos modelos CATC?
- 4) As cotas obtidas conseguem representar o comportamento da evolução de trinca para os exemplos resolvidos?
- 5) Para quais dessas modelos o método apresentou melhor desempenho?

Posteriormente, após o levantamento das oportunidades do método FCB, foram delimitados os modelos de propagação de trinca utilizados nesse trabalho. Para essa delimitação, serão empregados modelos para predição do crescimento de trinca do tipo CATV, que possuam uma maior abrangência na sua aplicação. Como há uma grande variedade de modelos de propagação de trinca sobre CATV, os critérios de escolha serão os seguintes: região de abrangência do modelo segundo a figura 6, ou seja, região I, II ou III e simplicidade e difusão. Os modelos definidos são: modelo de Hudson (análise global) e modelo de FNK (análise ciclo a ciclo, com interação).

O modelo de Hudson é o modelo inicial quando se estuda sobre CATV. Hudson utilizou a abordagem da raiz quadrática média (RMS), semelhante à de

Barsom, para prever o crescimento de trincas por fadiga sob carga de espectro aleatório aplicado em aeronaves. Este método negligencia a interação dos carregamentos e, determina as tensões máximas e mínimas através do método RMS. Fornece bons resultados se a influência de interação do carregamento for pequena. As características do modelo de Hudson são: levar em consideração o efeito das tensões médias, utilizar uma variação do FIT (RMS) e a tenacidade à fratura (K_c), abranger as regiões II e III do gráfico $\log (da/dN) \times \log (\Delta K)$ (BEDEN et al., 2009; KIM et al., 2006)

O modelo de Forman-Newman-De Koning, como mencionado anteriormente, é um dos mais difundidos e utilizados pela comunidade científica para a predição da vida em fadiga. Ele aborda tanto carregamento constante quanto aleatório, sendo neste último a sua maior aplicação. As características do modelo de FNK são: levar em consideração o efeito das tensões médias, utilizar o FIT limite (ΔK_{th}) e a tenacidade à fratura (K_c), abranger as regiões I, II e III do gráfico $\log (da/dN) \times \log (\Delta K)$.

Definido os modelos a serem utilizados, realizou-se a coleta de dados através da implementação computacional, utilizando-se o software MATLAB. Avaliou-se o desempenho do método FCB, por meio de comparação dos resultados obtidos com os resultados experimentais encontrados na literatura especializada. Implementaram-se esses códigos computacionais num computador com Intel Core i7-4510U de 2,60 GHz e memória RAM de 8,00 GB. A versão do software utilizado foi o MATLAB R2015.

O conhecimento dos parâmetros utilizados por cada modelo de propagação de trinca é necessário para aplicação do método FCB. Durante a pesquisa realizada em periódicos especializados, verificou-se que muitos deles não fornecem esses parâmetros, dentre os quais podem-se citar: carregamento aplicado; constantes do material; função de correção do FIT.

Uma das virtudes do método FCB é produzir, eficientemente, cotas “justas” para a função comprimento da trinca. A partir disso, torna-se necessário definir parâmetros que possuem base nestas características que servem como medidas de desempenho. Como medidas de desempenho do método aplicado foram utilizados: o desvio relativo, os erros relativos das médias das funções cotas em relação à solução numérica pelo método RK4 e à razão dos tempos computacionais (μ_t).

Desta forma, conhecendo-se $a_{CI}, a_{CS}, a : [N_0, N_1] \rightarrow \mathbb{R}$, as funções cota inferior, superior e comprimento da trinca, respectivamente. Em vista disso, definem-se as funções desvios relativos inferior e superior, $\delta_{CI}, \delta_{CS} : [N_0, N_1] \rightarrow \mathbb{R}$, como sendo,

$$\delta_{CS,CI}(N_K) = \left(\frac{a_{CS,CI} - a_{RK4}}{a_{RK4}} \right) (N_K) 100 [\%], \forall N_K \in \{0, 1, \dots, N_K\}. \quad (31)$$

Outra medida de desempenho é necessária quando o método FCB é utilizado para obter, a partir das cotas, uma aproximação numérica para a função comprimento da trinca. Desta forma, define-se $\varepsilon : [N_0, N_1] \rightarrow \mathbb{R}$, a função erro relativo como,

$$\begin{cases} \varepsilon_{a_{geo}}(N) = \left(\frac{a_{geo} - a_{RK4}}{a_{RK4}} \right) (N) 100 [\%], \\ \varepsilon_{a_{ar}}(N) = \left(\frac{a_{ar} - a_{RK4}}{a_{RK4}} \right) (N) 100 [\%], \forall N \in [N_0, N_1], \end{cases} \quad (32)$$

sendo $\varepsilon_{a_{geo}}$ e $\varepsilon_{a_{ar}}$ as funções erro relativo em média geométrica e aritmética, respectivamente.

As funções desvio e erro relativo proporcionam medidas relacionadas ao comportamento das cotas e aproximações numéricas, produzidas pelo método FCB, e a função comprimento da trinca.

Uma medida de desempenho, relacionada a razão computacional (μ_t), é definida por,

$$\mu_t = \frac{t_{RK4} - t_{CS,CI}}{t_{CS,CI}} 100 [\%], \quad (33)$$

onde μ_t a razão entre os tempos computacionais, t_{RK4} o tempo pelo método do RK4 e $t_{CS,CI}$ o tempo do método FCB.

Verificando se o método FCB é mais ou menos conservativo em relação ao experimento, aplicou-se uma razão dos ciclos (μ_N) entre o número de ciclos obtidos no método FCB (N_{FCB}) e o número de ciclos do experimento (N_f). A razão dos ciclos foi utilizada no trabalho de Hudson (1981) e Kim et al. (2006), entretanto, estendeu-se a sua aplicação ao modelo de FNK e, é definida pela seguinte equação:

$$\mu_N = \frac{N_{FCB}}{N_f}. \quad (34)$$

5 FORMULAÇÃO DAS HIPÓTESES

Este capítulo apresenta os modelos de Hudson e Forman-Newman-De Koning, o teorema de existência/unicidade clássico, a demonstração de existência/unicidade para os modelos de Hudson e Forman-Newam-De Koning e o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem.

5.1 MODELO DE HUDSON

O modelo de Hudson (1981), utiliza o método desenvolvido por Barsom, para prever o crescimento de trinca em fadiga sobre espectro de carregamento randômico, via modelo de Forman (1967). Hudson estendeu o método RMS para a determinação das tensões mínima e máxima representadas abaixo.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta K_{rms} = \Delta \sigma_{rms} f(a) \sqrt{\pi a}, \\ \sigma_{mín,rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\sigma_{mín,i})^2}, \\ \sigma_{máx,rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\sigma_{máx,i})^2}, \\ R_{rms} = \frac{\sigma_{mín,rms}}{\sigma_{máx,rms}}, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (35a) \\ (35b) \\ (35c) \\ (35d) \end{array}$$

sendo $\sigma_{máx,rms}$ a tensão máxima (RMS), $\sigma_{mín,rms}$ a tensão mínima (RMS), $f(\cdot)$ a função correção do fator intensidade de tensão, R_{rms} a razão entre as tensões (RMS) e “a” o comprimento da trinca.

Hudson (1981) representa o seu modelo de evolução do comprimento da trinca, juntamente com o ΔK equivalente obtido pelo método RMS, via modelo de Forman (1967). A equação do modelo de Hudson é descrita no seguinte PVI:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } a \in C^1([N_0, N_1]; \mathbb{R}^+), \text{ tal que :} \\ \frac{da}{dN}(N) = \frac{C \Delta K_{rms}^m}{(1-R_{rms}) K_c - \Delta K_{rms}}, \forall N \in (N_0, N_1), \\ a(N_0) = a_0, \end{array} \right. \quad (36)$$

onde C e m constantes do material.

5.1.1 Inconsistência entre os Modelos de Barsom e Hudson

Comparando-se as eqs. (6) e (35) observam-se *severas* inconsistências na proposta do modelo de Hudson em relação ao método de Barsom, para as grandezas em média quadrática, $(\cdot)_{rms}$. Durante a pesquisa, não foi encontrado algum trabalho que tenha explicitado tais inconsistências. Com efeito, substituindo-se a definição de “ ΔK_i ” na eq. (6) obtém-se,

$$\begin{aligned} \Delta K_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (K_{máx,i} - K_{mín,i})^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\sigma_{máx,i} \cdot f(a_i) \cdot \sqrt{\pi a_i} - \sigma_{mín,i} \cdot f(a_i) \cdot \sqrt{\pi a_i}]^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ (\sigma_{máx,i}^2 - 2 \cdot \sigma_{máx,i} \cdot \sigma_{mín,i} + \sigma_{mín,i}^2) \cdot [f(a_i) \cdot \sqrt{\pi a_i}]^2 \right\}}; \end{aligned} \quad (37)$$

enquanto que, pelo modelo de Hudson, eq. (35.a), o “ ΔK_{rms} ” é dado por

$$\begin{aligned} \Delta K_{rms} &= (\sigma_{máx,rms} - \sigma_{mín,rms}) f(a) \sqrt{\pi a} = \left[\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_{máx,i}^2} - \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_{mín,i}^2} \right] f(a) \sqrt{\pi a} \\ &= \sqrt{\frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N \sigma_{máx,i}^2 - 2 \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{máx,i}^2 \cdot \sigma_{mín,j}^2} + \sum_{i=1}^N \sigma_{mín,i}^2 \right]} \cdot [f(a) \sqrt{\pi a}]^2. \end{aligned} \quad (38)$$

Obviamente, ao comparar-se as eqs. (37) e (38) constata-se a *inconsistência* entre definição de uma grandeza RMS, proposta por Barsom eq. (6), e a utilizada no método de Hudson, eq. (35). Por exemplo, outra grave inconsistência é para *razão de tensão*. Conforme a definição proposta por Barsom, para uma quantidade RMS, eq. (6), a razão de tensões RMS é dada por.

$$R_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_i^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\sigma_{mín,i}}{\sigma_{máx,i}} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{N \prod_{j=1}^N \sigma_{máx,j}^2} \sum_{i=1}^N \sigma_{mín,i}^2 \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sigma_{máx,j}^2}}; \quad (39)$$

enquanto que a grandeza R_{rms} definida por Hudson, eq. (35.d), é dada por,

$$R_{rms} = \frac{\sigma_{mín,rms}}{\sigma_{máx,rms}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_{mín,i}^2}}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_{máx,i}^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \sigma_{mín,i}^2}{\sum_{j=1}^N \sigma_{máx,j}^2}}. \quad (40)$$

Comparando-se as eqs. (39) e (40) pode-se constatar a evidente diferença entre a definição R_{rms} , eq. (6), e aquela proposta por Hudson, eq. (35). Para evitar o conflito entre a definição de uma grandeza RMS e aquela proposta por Hudson propõe-se, neste trabalho, denotar as grandezas definidas nas eqs. (35.a) e (35.d) da seguinte forma,

$$\begin{cases} \Delta K_H = \Delta \sigma_{rms} f(a) \sqrt{\pi a}; \\ R_H = \frac{\sigma_{mín,rms}}{\sigma_{máx,rms}}. \end{cases} \quad (41)$$

É importante notar que o conflito nas definições torna-se mais acentuado no momento em que Hudson utiliza a definição para uma quantidade RMS, eq. (6), para estabelecer “ $\sigma_{mín,rms}$ ” e “ $\sigma_{máx,rms}$ ” mas a abandona para a definição das quantidades “ ΔK_{rms} ” e “ R_{rms} ”, porém, as *denomina* como quantidades RMS. Mais surpreendente que o erro cometido pelo conflito entre as definições de grandezas RMS, eq. (6), e a utilizada na proposta de Hudson, eqs. (35.a) e (35.d), encontra-se na ausência do apontamento de tal equívoco pela comunidade de engenharia em periódicos qualificados. É importante mencionar que o método de Hudson foi apresentado a comunidade em 1981, e não se possui registro que tais equívocos tenham sido observados da forma como foram apresentados nas eqs. (37) a (40).

5.2 MODELO FORMAN-NEWMAN-DE KONING

O modelo de Forman-Newman-De Koning é definido por:

$$\frac{da}{dN} = C \left(\left(\frac{1-f}{1-R} \right) \Delta K \right)^n \frac{\left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K} \right)^p}{\left(1 - \frac{K_{máx}}{K_c} \right)^q}. \quad (42)$$

A função abertura da trinca $f = K_{op}/K_{máx}$, é utilizada para modelar a influência de vários mecanismos para o fechamento de trincas (MAIERHOFER et al., 2014). Newman (1984), determinou através de simulações com elementos finitos de

fechamento de trincas, induzido pela plasticidade para trincas longas, a seguinte equação (POURSAEIDI e BAKHTIARI, 2014):

$$f = \begin{cases} \text{máx}(R, A_0 + A_1 R + A_2 R^2 + A_3 R^3) & R \geq 0, \\ A_0 + A_1 R & -2 \leq R < 0, \\ A_0 - 2A_1 & R < -2, \end{cases} \quad (43)$$

sendo R a razão entre as tensões, A_0 , A_1 , A_2 e A_3 dados pela eq. (44):

$$\begin{aligned} A_0 &= \left(0,825 - 0,34\alpha + 0,05\alpha^2\right) \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{\text{máx}}}{\sigma_o}\right)\right]^{\frac{1}{\alpha}}, \\ A_1 &= \left(0,415 - 0,071\alpha\right) \frac{\sigma_{\text{máx}}}{\sigma_o}, \\ A_2 &= 1 - A_0 - A_1 - A_3, \\ A_3 &= 2A_0 + A_1 - 1, \end{aligned} \quad (44)$$

onde α o fator de restrição do plano de tensão ou deformação, $\sigma_{\text{máx}}/\sigma_o$ é a relação entre a tensão máxima aplicada e a tensão de fluxo. A tensão de fluxo é a média aritmética entre a tensão de escoamento uniaxial e a tensão de tração última uniaxial do material (NEWMAN, 1984).

O valor de α pode variar de 1 para o estado plano de tensão e 3 para o estado plano de deformação (NEWMAN, 1984). Valores de α de 2,5 ou maiores, são atribuídos a materiais com baixa razão na seguinte relação K_{IC}/σ_y (baixo valor de tenacidade à fratura) e, já para valores com razão alta, o valor de α varia de $1,5 \leq \alpha \leq 2$ (FARAHMAND et al., 1997).

A tenacidade à fratura ou tenacidade crítica do material é dado por:

$$\begin{cases} K_{\text{crit}} = K_{IC} \left(1 + B_K e^{-\left(\frac{A_K t}{t_0}\right)^2}\right), \\ t_0 = 2,5 \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_y}\right), \end{cases} \quad (45)$$

sendo K_{IC} a tenacidade à fratura do modo I, B_K e A_K constantes do material, t a espessura do material, t_0 é referente a espessura na condição de plano de deformação.

A variação do FIT é definida como,

$$\Delta K_{IC} = (1 - R) K_{IC}. \quad (46)$$

O FIT *threshold* ΔK_{th} é dado pela eq. (47):

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta K_{th} = \frac{\Delta K_1 \left[\frac{1-R}{1-f} \right]^{(1+RC_{th}^p)}}{(1-A_0)^{(1-R)C_{th}^p}} \quad R \geq 0, \\ \Delta K_{th} = \frac{\Delta K_1 \left[\frac{1-R}{1-f} \right]^{(1+RC_{th}^m)}}{(1-A_0)^{(C_{th}^p - RC_{th}^m)}} \quad R < 0, \\ \Delta K_1 = \Delta K_0 \left[\frac{a}{a-c} \right]^{\frac{1}{2}}, \end{array} \right. \quad (47)$$

onde ΔK_0 a faixa limite do FIT, C_{th} a constate de ajuste empírica com diferentes valores para positivo (índice p) e negativo (índice m), c um pequeno parâmetro da trinca.

Basicamente, o modelo FNK, para carregamento variável, consiste em obter uma solução contínua, com derivada contínua por partes, em termos da função “comprimento da trinca”. O carregamento é aplicado em blocos com a variação da razão de tensões. A partir disso, para valores numéricos de “ $\Delta\sigma$ ”, “ R ” e “ a_0 ” do bloco de carregamento, atualiza-se os valores de “ f ”, “ ΔK ”, “ ΔK_{th} ”, respectivamente. A consequência deste procedimento é uma Lei de Propagação contínua por partes. Desta forma, não se pode estabelecer uma solução C^1 para o PVI definido pelo modelo. Neste sentido, propõe-se justificar a existência e unicidade de soluções para o método FNK. Em vista disso, se estabelece os procedimentos do método FNK:

- (i) Para um carregamento com N_i – ciclos, divide-se em blocos de carregamento, com “ $\Delta\sigma_i$ ” e “ R_i ” aplicados em N_i – ciclos.
- (ii) Para cada bloco de carregamento obtém-se a solução do modelo de FNK conforme algoritmo abaixo:

Enquanto $j \leq N_i - 1$ faça:

Calcule:

f_j , eq (43);

ΔK_j , eq (46);

ΔK_{thj} , eq (47).

5.3 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DAS SOLUÇÕES DO MÉTODO DE HUDSON E FORMAN-NEWMAN- DE KONING

Apresentaram-se, para os modelos de Hudson e de Forman-Newman-De Koning, resultados sobre a existência e unicidade das soluções. Não foi encontrado, na literatura especializada, um estudo realizado sobre a existência e a unicidade das soluções para os modelos mencionados. Neste trabalho demonstra-se a existência e unicidade de soluções obtidas pelo método de Hudson e de FNK. Serão utilizados resultados clássicos de existência e unicidade para obter a existência/unicidade das soluções exatas dos modelos de Hudson e FNK, para os casos:

- (i) CATC;
- (ii) CATV.

Considere o intervalo $I \subset \mathbb{R}$ com $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, então um problema de valor inicial é definido como,

$$\begin{cases} \text{Determinar } y : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que,} \\ \frac{dy}{dx}(x) = f(x, y(x)), \forall x \in I, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (48)$$

sendo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função e x_0 a condição inicial.

A eq. (48) define, formalmente, um PVI ou problema abstrato de Cauchy. O teorema da existência e unicidade de soluções clássico é definido por,

Teorema (*existência e unicidade de soluções.*) Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida num aberto Ω do plano (x, y) . Suponha-se que a derivada parcial em relação a segunda variável, $f_y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, seja contínua também. Então, para $\forall (x_0, y_0) \in \Omega$, existe um intervalo aberto I , contendo “ x_0 ” e uma única função diferenciável $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ com $(x, \phi(x)) \in \Omega, \forall x \in I$, que é solução do PVI, eq. (48) (FIGUEIREDO e NEVES, 1997).

A partir desses resultados clássicos estuda-se a existência e unicidade de soluções para os modelos de Hudson e Forman-Newman-De Koning para os casos (i) e (ii). Com isso, os modelos de Hudson e de FNK são formulados através de um problema de valor inicial, para o caso (i),

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } a \in C^1([N_0, N_1]; \mathbb{R}^+), \text{ tal que :} \\ \frac{da}{dN}(N) = h(\alpha, a), \forall N \in (N_0, N_1), \\ a(N_0) = a_0, \end{array} \right. \quad (49)$$

sendo $h(\cdot)$ a lei de evolução e α um vetor de parâmetros.

5.3.1 Existência e Unicidade de Soluções – Caso (i)

Estuda-se nesta seção a existência e unicidade de soluções para o modelo de Hudson, inicialmente, e de FNK, posteriormente.

Teorema (*Existência e Unicidade para o modelo de Hudson.*) Considere $R_{RMS} \neq 1$, $a_0 \in \mathbb{R}^+$ e $f \in C^1(a_0, a_1, \mathbb{R}^+)$ então o PVI, definido na eq. (49) possui solução única.

Demonstração: Seja dh/da contínua em (N_0, N_1) contém \mathbb{R} e, sendo definida pela seguinte equação:

$$\frac{dh}{da} = \frac{dh}{d\Delta K_{rms}} \frac{d\Delta K_{rms}}{da}. \quad (50)$$

Calculam-se, separadamente, os fatores da eq. (50), com efeito,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dh}{d\Delta K_{rms}} = \frac{d}{d\Delta K_{rms}} \left(\frac{C\Delta K_{rms}^m}{\Delta K_{IC} - \Delta K_{rms}} \right) = C \left(\frac{d}{d\Delta K_{rms}} \Delta K_{rms}^m \frac{1}{\Delta K_{IC} - \Delta K_{rms}} + \Delta K_{rms}^m \frac{d}{d\Delta K_{rms}} \left(\frac{1}{\Delta K_{IC} - \Delta K_{rms}} \right) \right); \\ \frac{d\Delta K_{rms}}{da} = \frac{d}{da} \left(\Delta \sigma_{rms} \sqrt{\pi a} f(a) \right). \end{array} \right. \quad (51)$$

Com as identidades expressas na eq. (51), reescreve-se a eq. (50), como sendo,

$$\frac{dh}{da} = h(a) \left(\frac{m(\Delta K_{IC} - \Delta K_{rms}) + \Delta K_{rms}}{\Delta K_{rms}(\Delta K_{IC} - \Delta K_{rms})} \right) \Delta \sigma_{rms} \sqrt{\pi a} f(a) \left(\frac{1}{2a} + \frac{f'(a)}{f(a)} \right). \quad (52)$$

Como pode ser observado na eq. (52), a função dh/da é uma função contínua.

O próximo resultado refere-se à existência e unicidade de soluções para o modelo FNK do caso (i).

Teorema (*Existência e Unicidade para o modelo FNK.*) Considere $R \neq 1$, $a_0 \in \mathbb{R}^+$ e $f \in C^1(a_0, a_1, \mathbb{R}^+)$ então o PVI, definido na eq. (49) possui solução única.

Demonstração: Seja dh/da contínua em (N_0, N_1) contém \mathbb{R} e, sendo definida pela seguinte equação.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dh}{d\Delta K} = \frac{d}{d\Delta K} \left(C K_{IC}^q (1-f)^n (1-R)^{q-n} \Delta K^{n-p} \frac{(\Delta K - \Delta K_{th})^p}{(\Delta K_{IC} - \Delta K)^q} \right) \\ = C K_{IC}^q (1-f)^n (1-R)^{q-n} \left[\frac{d}{da} \Delta K^{n-p} \frac{(\Delta K - \Delta K_{th})^p}{(\Delta K_{IC} - \Delta K)^q} + \right. \\ \left. \frac{\Delta K^{n-p}}{(\Delta K_{IC} - \Delta K)^q} \frac{d}{da} (\Delta K - \Delta K_{th})^p + \Delta K^{n-p} (\Delta K - \Delta K_{th})^p \frac{d}{da} (\Delta K_{IC} - \Delta K)^{-q} \right]; \\ \frac{d\Delta K}{da} = \frac{d}{da} (\Delta \sigma \sqrt{\pi a} f(a)). \end{array} \right. \quad (53)$$

Resolvendo as derivadas da eq. (53) têm-se,

$$\frac{dh}{da} = h(a) \left[\frac{(q-n)\Delta K^2 + [(n-p+q)\Delta K_{th} + n\Delta K_{IC}]\Delta K + (p-n)(\Delta K_{IC}\Delta K_{th})}{\Delta K(\Delta K - \Delta K_{th})(\Delta K_{IC} - \Delta K)} \right] \Delta \sigma \sqrt{\pi a} f(a) \left(\frac{1}{2a} + \frac{f'(a)}{f(a)} \right). \quad (54)$$

O mesmo pode ser observado na eq. (54), ou seja, a função dh/da é continua.

5.3.2 Existência e Unicidade de Soluções – Caso (ii)

Apresenta-se nesta seção a existência e unicidade de soluções do modelo FNK, para o caso (ii). Da seção, na qual o modelo FNK é apresentado, observa-se que a lei de propagação é contínua por partes. A partir disso, estuda-se a existência e unicidade de soluções para estas condições. Como definido na apresentação do modelo, ele trabalha com carregamento aleatório, sendo este carregamento aplicado em blocos com a variação da razão de tensões. Além do que, para valores numéricos de " $\Delta \sigma$ ", " R " e " a_0 " do bloco de carregamento, atualiza-se os valores de " f ", " ΔK ", " ΔK_{th} ", respectivamente. Assim sendo, o PVI que define o modelo de FNK pode escrito da seguinte forma,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } a \in C^1 \left([N_j, N_{j+1}]; \mathbb{R}^+ \right), \text{ tal que :} \\ \frac{da_j}{dN} (N) = C \left(\left(\frac{1-f_j}{1-R_j} \right) \Delta K_j \right)^n \frac{\left(1 - \frac{\Delta K_{thj}}{\Delta K_j} \right)^p}{\left(1 - \frac{K_{m\acute{a}x}}{K_{IC}} \right)^q}, \forall N \in (N_j, N_{j+1}), \\ a(N_j) = a_{j0}. \end{array} \right. \quad (55)$$

Teorema (*Existência e Unicidade de soluções para o modelo FNK.*) Considere $a_0 \in \mathbb{R}^+$ e $f \in C^1(a_0, a_1, \mathbb{R}^+)$ então o PVI, eq. (55), que define o modelo FNK possui solução única.

Com isso, as soluções obtidas para cada bloco de carregamento satisfazem as hipóteses do corolário de existência e unicidade de soluções. Portanto, $a_j \in C_1((N_j, N_{j+1}); \mathbb{R}^+)$ e $a \in C((N_0, N_T); \mathbb{R})$.

5.4 MÉTODOS NUMÉRICOS

Há vários problemas na engenharia que são formulados por equações diferenciais (ED), como por exemplo: trajetórias balísticas, estudo de redes elétricas, entre outros. Em geral, são poucas aplicações práticas nas quais é possível se obter uma solução exata. Portanto, utilizam-se métodos numéricos para a obtenção de soluções numéricas aproximadas.

Uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma equação diferencial cuja solução depende de uma variável. A ordem da EDO é definida pela ordem da maior derivada na equação. Se a equação for de primeira ordem ela é representada pela eq. (56).

$$y' = f(x, y). \quad (56)$$

Uma EDO de primeira ordem, mais uma condição inicial, definem um problema de valor inicial (PVI), que é representado pela eq. (57).

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (57)$$

Existem vários métodos numéricos para a solução do PVI, o utilizado neste trabalho será o de Runge Kutta explícito de 4ª ordem de precisão.

5.4.1 Método de Runge-Kutta Explícito

O método numérico aproximado de Runge-Kutta é simples e de fácil aplicação para se obter soluções de PVI. Ele engloba os métodos de Euler. Neste trabalho, será utilizado o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem explícito (RK4). A grande vantagem desse método está na sua precisão, que é da ordem de 4 (BOYCE e DIPRIMA, 2006). O método faz a partição do intervalo em subintervalos. Os pontos extremos dos subintervalos são denominados de nós. Esta partição pode ser regular ou não. O cálculo dos valores numéricos da função incógnita, (y_n) , dada pela seguinte equação de recorrência,

$$\begin{cases} k_{n1} = hf(x_n, y_n), \\ k_{n2} = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n1}\right), \\ k_{n3} = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n2}\right), \\ k_{n4} = hf(x_n + h, y_n + hk_{n3}), \\ y_{n+1} = y_n + \left(\frac{1}{6}\right)(k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}), \end{cases} \quad (58)$$

sendo, para o n -ésimo intervalo, k_{n1} , k_{n4} , k_{n2} os coeficientes angulares nos, nós esquerdo e direito e no ponto médio, respectivamente, enquanto que k_{n3} é uma aproximação da derivada no ponto médio.

A avaliação da eficiência das funções cotas obtidas para cada modelo utilizado no exemplo, foi através do método de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4) como solução numérica aproximada dos PVI's. Contudo, cabe ressaltar que a solução obtida pelo método do RK4 para os modelos utilizados foi considerada como exata. Assim, o método RK4 empregado aos modelos de Hudson e FNK está representado pelas eqs. (59) e (60), respectivamente,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } a_{k+1} \in \mathbb{R}^+, \text{ tal que,} \\ a_{k+1} = a_k + \left(\frac{\Delta N}{6}\right)(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \\ K_1 = \frac{C \Delta K_{rms}^m}{(1-R_{rms})K_c - \Delta K_{rms}}, \quad (\text{modelo de Hudson}) \\ K_2 = a_k + \left(\frac{\Delta N}{2}\right)K_1, \\ K_3 = a_k + \left(\frac{\Delta N}{2}\right)K_2, \\ K_4 = a_k + \Delta N K_3, \\ a_0 = a(N_0), \end{array} \right. \quad (59)$$

onde $a_k = a(N_k)$, $f_k = f(a_k)$ e $\Delta N = N_{k+1} - N_k$, $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } a_{k+1} \in \mathbb{R}^+, \text{ tal que,} \\ a_{k+1} = a_k + \left(\frac{\Delta N}{6}\right)(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \\ K_1 = c \left(\left(\frac{1-f_j}{1-R_j} \right) \Delta K_j \right)^n \frac{\left(1 - \frac{\Delta K_{thj}}{\Delta K_j} \right)^p}{\left(1 - \frac{K_{m\acute{a}x}}{K_{IC}} \right)^q}, \quad (\text{modelo de FNK}) \\ K_2 = a_k + \left(\frac{\Delta N}{2}\right)K_1, \\ K_3 = a_k + \left(\frac{\Delta N}{2}\right)K_2, \\ K_4 = a_k + \Delta N K_3, \\ a_0 = a(N_0). \end{array} \right. \quad (60)$$

O algoritmo para o modelo de Hudson utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem está representado abaixo.

1. Entre com os valores numéricos dos parâmetros do modelo de Hudson: C , m , $\Delta\sigma_{rms}$, R_{rms} , K_c , a_0 e b .
2. Entre com o número de ciclos inicial (N_0), com o número de ciclos final (N), com o tamanho do passo (ΔN) e o número de passos ($n_passos = (N - N_0) / \Delta N$).
3. Entre com a condição inicial $a(1) = a_0$ e $i = 1$.
4. Para $i = n_passos$ faça:

$$x = a(i);$$

$$f(x) = \sqrt{\sec \frac{\pi x}{2b}};$$

$$\frac{da}{dN}(x) = \frac{C \left(\Delta\sigma_{rms} f(x) \sqrt{\pi x} \right)^m}{(1-R_{rms})K_c - \Delta\sigma_{rms} f(x) \sqrt{\pi x}};$$

$$K_1 = \Delta N \frac{da}{dN}(x);$$

$$x = a(i) + \frac{K_1}{2};$$

Calcula-se novamente $f(x)$ e $\frac{da}{dN}(x)$ com o novo valor de x ;

$$K_2 = \Delta N \frac{da}{dN}(x);$$

$$x = a(i) + \frac{K_2}{2};$$

Calcula-se novamente $f(x)$ e $\frac{da}{dN}(x)$ com o novo valor de x ;

$$K_3 = \Delta N \frac{da}{dN}(x);$$

$$x = a(i) + K_3;$$

Calcula-se novamente $f(x)$ e $\frac{da}{dN}(x)$ com o novo valor de x ;

$$K_4 = \Delta N \frac{da}{dN}(x);$$

$$a(i+1) = a(i) + \frac{1}{6}(K_1 + 2(K_2 + K_3) + K_4);$$

Fim.

5. Plote o gráfico com os pontos (N, a) .

6 MÉTODO *FAST CRACK BOUNDS* APLICADO AOS MODELOS DE HUDSON E FORMAN-NEWMAN-DE KONING

Este capítulo apresenta a aplicação do método FCB aos modelos de propagação de trincas de Hudson e de FNK. Inicialmente, foram obtidas as funções cota inferior e superior para os modelos de propagação de trincas de Hudson e FNK.

6.1 MÉTODO FCB APLICADO AO MODELO DE HUDSON

Antes da apresentação das funções cotas, superior e inferior, faz-se necessário uma análise sobre a condição dessas funções. A partir disso, pode-se definir o seguinte lema,

Lema (*Cotas Inferior e Superior*). Seja $\{a(N_0), a(N_1), \dots, a(N)\}$ o conjunto de um dado modelo de propagação de trinca com amplitude de tensão variável. $\{a_{CI}(N_i)\}_{i=0}^N$ e $\{a_{CS}(N_i)\}_{i=0}^N$, a função cota inferior e superior, respectivamente. Com isso, reescrevendo a eq. (25) tem-se

$$a_{CI}(N) \leq a(N) \leq a_{CS}(N), \forall N \in [N_0, N].$$

Demonstração: Seja $\{a_{CI}(N_i)\}_{i=0}^N$, $\{a_{CS}(N_i)\}_{i=0}^N$ e $\{a(N_i)\}_{i=0}^N$ com $N \in [N_0, N_1]$ os comprimentos da trinca em cada ciclo para a cota inferior, pela cota superior e pelo método do RK4, respectivamente. Da definição de cota inferior tem-se,

$$a_{CI}(N) \leq a(N), \forall N \in [N_0, N]. \quad (61)$$

Pode-se afirmar que,

$$\sum_{i=0}^N a_{CI}(N_i) \leq \sum_{i=0}^N a(N_i). \quad (62)$$

Utilizando o mesmo princípio para a cota superior, tem-se,

$$\sum_{i=0}^N a(N_i) \leq \sum_{i=0}^N a_{CS}(N_i). \quad (63)$$

Pode-se verificar que, independentemente do número de ciclos aplicados para a lei de evolução da trinca, as funções cotas, inferior e superior, se manterão cotas da função comprimento da trinca.

O modelo de propagação de Hudson, pelo PVI na eq. (36):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } a \in C^1([N_0, N_1]; \mathbb{R}^+), \text{ tal que :} \\ \frac{da}{dN}(N) = \frac{C \Delta K_{rms}^m}{(1-R_{rms})K_c - \Delta K_{rms}}, \forall N \in (N_0, N_1), \\ a(N_0) = a_0. \end{array} \right.$$

Aplicando o método FCB ao modelo de Hudson (1981) e, utilizando a expansão da série de Taylor até segunda ordem com resíduo de Lagrange em conjunto com as hipóteses adotadas pelo método FCB. Estando as hipóteses representadas,

$$\begin{array}{l} H1: \left\{ \begin{array}{l} f \in C^1(\mathbb{R}^+); \\ 0 < f(a_0) \leq f(x) \leq f(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_0, a_1]; \\ f'(a_0) \leq f'(x) \leq f'(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_0, a_1]; \end{array} \right. \\ H2: m \geq 1. \end{array}$$

A hipótese (H1) considera que a função de correção do FIT deve ser uma função monótona não crescente e, que a sua derivada também deve ser uma função monótona não crescente. Essas condições são atendidas para a função mais comum de correção do FIT, uma vez que representam uma característica intrínseca do problema de propagação de trinca. E a hipótese (H2) define o valor para o modelo constante do material. As hipóteses (H1) e (H2) formam a base para o desenvolvimento das cotas superiores e inferiores para a função do comprimento da trinca.

Teorema (*método FCB aplicado ao modelo de Hudson.*) Para função do comprimento da trinca do modelo de Hudson, eq. (36), $f: (a_0, a_1) \rightarrow \mathbb{R}^+$, que satisfaça as hipóteses (H1) e (H2) e $a^* \in [a_0, a_1]$, as funções cotas, inferior e superior,

$$\left\{ \begin{array}{l} a(N) - a_0 \geq \left\{ \begin{array}{l} \frac{C(\Delta K_{rms}(a_0))^m}{(1-R_{rms})K_c - \Delta K_{rms}(a_0)} + \frac{1}{2} \left[\frac{C(\Delta K_{rms}(a_0))^m}{(1-R_{rms})K_c - \Delta K_{rms}(a_0)} \right]^2 \\ \left[m + \frac{1}{(1-R_{rms})\frac{K_c}{\Delta K_{rms}(a_0)} - 1} \right] \left[\frac{1}{2a_0} + \left(\frac{f'}{f} \right)(a_0) \right] (N - N_0) \end{array} \right\} (N - N_0); \\ a(N) - a_0 \leq \left\{ \begin{array}{l} \frac{C(\Delta K_{rms}(a_0))^m}{(1-R_{rms})K_c - \Delta K_{rms}(a_0)} + \frac{1}{2} \left[\frac{C(\Delta K_{rms}(a^*))^m}{(1-R_{rms})K_c - \Delta K_{rms}(a^*)} \right]^2 \\ \left[m + \frac{1}{(1-R_{rms})\frac{K_c}{\Delta K_{rms}(a^*)} - 1} \right] \left[\frac{1}{2a^*} + \left(\frac{f'}{f} \right)(a^*) \right] (N - N_0) \end{array} \right\} (N - N_0); \\ \forall N \in [N_0, N_1]. \end{array} \right. \quad (64)$$

Demonstração: Considerando a hipótese (H1) pela eq. (26),

$$a(N) = a_0(N_0) + \frac{da}{dN}(N_0)(N - N_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2a}{dN^2}(\eta)(N - N_0)^2, \text{ com } \eta \in [N_0, N].$$

Por intermédio da hipótese (H1), as seguintes desigualdades podem ser escritas:

$$a(s) \leq a(t), s \leq t \text{ com } s, t \in [N_0, N] \Rightarrow (a(s))^m \leq (a(t))^m. \quad (65)$$

Da hipótese (H1) obtém-se,

$$(f(s))^m \leq (f(t))^m \Rightarrow \left(a^{\frac{1}{2}} \cdot f \right)^m(s) \leq \left(a^{\frac{1}{2}} \cdot f \right)^m(t), s \leq t \text{ com } s, t \in [N_0, N]. \quad (66)$$

Dessa forma, conclui-se que:

$$(\Delta K)^m(a(s)) \leq (\Delta K)^m(a(t)). \quad (67)$$

Agora, desde que $C > 0$, obtém-se:

$$\frac{da}{dN}(s) \leq \frac{da}{dN}(t), s \leq t \text{ com } s, t \in [N_0, N]. \quad (68)$$

Com isso, aplicando-se a segunda derivada da função comprimento da trinca no modelo de Hudson eq. (36), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d^2a}{dN^2}(a(N)) &= \frac{d}{dN} \left(\frac{da}{dN}(a(N)) \right) = \frac{d}{da} \left(\frac{da}{dN}(a(N)) \right) \frac{da}{dN}(a(N)) \\ &= \left[\frac{C \Delta K_{rms}}{(1-R_{rms})K_c - \Delta K_{rms}} \right]^2 \left[m + \frac{1}{(1-R_{rms})\frac{K}{\Delta K_{rms}} - 1} \right] \left[\frac{1}{2a} + \frac{f'(a)}{f(a)} \right]. \end{aligned} \quad (69)$$

Substituindo a eq. (69) na eq. (26), a expansão de Taylor para a função comprimento da trinca, torna-se:

$$a(N) - a_0 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{C(\Delta K_{rms}(a_0))^m}{(1-R_{rms})K_c - \Delta K_{rms}(a_0)} + \frac{1}{2} \left[\frac{C(\Delta K_{rms}(a(\eta)))^m}{(1-R_{rms})K_c - \Delta K_{rms}(a^*)} \right]^2 \\ \left[m + \frac{1}{(1-R_{rms})\frac{K_c}{\Delta K_{rms}(a(\eta))} - 1} \right] \left[\frac{1}{2a(\eta)} + \left(\frac{f'}{f}\right)(a(\eta)) \right] (N - N_0) \end{array} \right\} (N - N_0), \quad (70)$$

com $\eta \in [N_0, N_1]$.

Conforme o comportamento da função de correção geométrica da hipótese (H1), a seguinte desigualdade é proposta:

$$\left(\sqrt{\pi a} f(a)\right) \left[\frac{1}{2a} + \frac{f'}{f}(a)\right] \leq \left(\sqrt{\pi a^*} f(a^*)\right) \left[\frac{1}{2a^*} + \frac{f'}{f}(a^*)\right], \forall a \in [a_0, a_1]. \quad (71)$$

Igualmente,

$$\left(\sqrt{\pi a_0} f(a_0)\right) \left[\frac{1}{2a_0} + \frac{f'}{f}(a_0)\right] \leq \left(\sqrt{\pi a} f(a)\right) \left[\frac{1}{2a} + \frac{f'}{f}(a)\right], \forall a \in [a_0, a_1]. \quad (72)$$

Substituindo a eq. (71) na eq. (69), tem-se a função que leva ao limite superior,

$$\frac{d^2 a}{dN^2}(\eta) \leq \left[\frac{C \Delta K_{rms}(a^*)}{(1-R_{rms})K_c - \Delta K_{rms}(a^*)} \right]^2 \left[m + \frac{1}{\frac{(1-R_{rms})K_c}{\Delta K_{rms}(a^*)} - 1} \right] \left[\frac{1}{2a^*} + \frac{f'}{f}(a^*) \right], \quad (73)$$

$\forall a \in [a_0, a_1]$.

Substituindo a eq. (72) na eq. (69), tem-se a função que leva ao limite inferior,

$$\frac{d^2 a}{dN^2}(\eta) \geq \left[\frac{C \Delta K_{rms}(a_0)}{(1-R_{rms})K_c - \Delta K_{rms}(a_0)} \right]^2 \left[m + \frac{1}{\frac{(1-R_{rms})K_c}{\Delta K_{rms}(a_0)} - 1} \right] \left[\frac{1}{2a_0} + \frac{f'}{f}(a_0) \right], \quad (74)$$

$\forall a \in [a_0, a_1]$.

Reescrevendo as funções cotas, superior e inferior, obtém-se as seguintes equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{CI}(N) = a_0 + \left\{ \begin{array}{l} \frac{C(\Delta K_{rms}(a_0))^m}{(1-R_{rms})K_c - \Delta K_{rms}(a_0)} + \frac{1}{2} \left[\frac{C(\Delta K_{rms}(a_0))^m}{(1-R_{rms})K_c - \Delta K_{rms}(a_0)} \right]^2 \\ m + \frac{1}{(1-R_{rms})\frac{K_c}{\Delta K_{rms}(a_0)} - 1} \left[\frac{1}{2a_0} + \left(\frac{f'}{f}\right)(a_0) \right] (N - N_0) \end{array} \right\} (N - N_0); \\ a_{CS}(N) = a_0 + \left\{ \begin{array}{l} \frac{C(\Delta K_{rms}(a_0))^m}{(1-R_{rms})K_c - \Delta K_{rms}(a_0)} + \frac{1}{2} \left[\frac{C(\Delta K_{rms}(a^*))^m}{(1-R_{rms})K_c - \Delta K_{rms}(a^*)} \right]^2 \\ m + \frac{1}{(1-R_{rms})\frac{K_c}{\Delta K_{rms}(a^*)} - 1} \left[\frac{1}{2a^*} + \left(\frac{f'}{f}\right)(a^*) \right] (N - N_0) \end{array} \right\} (N - N_0); \end{array} \right. \quad (75)$$

$$\forall N \in [N_0, N_1].$$

Pode ser observado na eq. (75) da cota superior, que o ajuste do valor da cota depende do valor inicial de “ a^* ”, o qual deve ser maior que o comprimento inicial da trinca, ou seja $a^* > a_0$, com isso, valores são atribuídos na forma da seguinte equação,

$$a^* = \beta a_0. \quad (76)$$

Os valores de β devem ser maiores que 1, $\beta > 1$, e, são escolhidos por inspeção de tal forma que a solução pelo RK4 (a_{RK4}) não viole a cota superior

6.2 MÉTODO FCB APLICADO AO MODELO DE FORMAN-NEWMAN-DE KONING

O PVI, que define o modelo de propagação de trinca de FNK, na eq. (55) é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } a \in C^1([N_j, N_{j+1}]; \mathbb{R}^+), \text{ tal que :} \\ \frac{da_j}{dN}(N) = C \left(\left(\frac{1-f_j}{1-R_j} \right) \Delta K_j \right)^n \frac{\left(1 - \frac{\Delta K_{thj}}{\Delta K_j} \right)^p}{\left(1 - \frac{K_{máx}}{K_{IC}} \right)^q}, \forall N \in (N_j, N_{j+1}), \\ a(N_j) = a_{j0}. \end{array} \right.$$

Assim, utilizando expansão de série de Taylor até segunda ordem com resíduo de Lagrange em conjunto com as hipóteses adotadas pelo método FCB,

obtém-se as cotas inferior e superior para o modelo de FNK. Pela expansão da série de Taylor com resíduo de Lagrange, tem-se a eq. (26),

$$a(N) = a_0(N_0) + \frac{da}{dN}(N_0)(N - N_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2a}{dN^2}(\eta)(N - N_0)^2, \text{ com } \eta \in [N_0, N].$$

Fazendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \therefore \sigma_{\min} = R\sigma_{\max}, \\ \Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} \therefore \Delta\sigma = \sigma_{\max}(1 - R) \therefore \sigma_{\max} = \frac{\Delta\sigma}{(1-R)}, \\ K_{\max} = \sigma_{\max} \sqrt{\pi a} f(a) \therefore K_{\max} = \frac{\Delta\sigma}{(1-R)} \sqrt{\pi a} f(a), \\ 1 - \frac{K_{\max}}{K_c} = 1 - \frac{\Delta K}{(1-R)K_c}. \end{array} \right. \quad (77)$$

Pode-se escrever a lei de propagação da seguinte forma:

$$\frac{da}{dN} = h(a) = C \left(\left(\frac{1-f}{1-R} \right) \Delta K \right)^n \frac{\left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K} \right)^p}{\left(1 - \frac{\Delta K}{(1-R)K_c} \right)^q} \quad (78)$$

Fazendo a segunda derivada da equação tem-se:

$$\frac{d^2a}{dN^2} = \frac{d}{dN} \left(\frac{da}{dN} \right) = \frac{dh}{dN} = \frac{dh}{da} \frac{da}{dN} = \frac{dh}{d\Delta K} \frac{d\Delta K}{da} \frac{da}{dN} = h(a) \frac{dh}{d\Delta K} \frac{d\Delta K}{da}, \quad (79)$$

sendo h a lei de evolução.

Pode-se escrever a dedução das cotas da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{d\Delta K} (h(a)) = \frac{d}{d\Delta K} \left\{ C \left[\frac{(1-f)}{(1-R)} \right]^n \Delta K^n \left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K} \right)^p \left(1 - \frac{\Delta K}{(1-R)K_c} \right)^{-q} \right\} = \\ C \left[\frac{(1-f)}{(1-R)} \right]^n \frac{d}{d\Delta K} \left[\Delta K^n \left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K} \right)^p \left(1 - \frac{\Delta K}{(1-R)K_c} \right)^{-q} \right] = \\ C \left[\frac{(1-f)}{(1-R)} \right]^n \left\{ n\Delta K^{n-1} \left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K} \right)^p \left(1 - \frac{\Delta K}{(1-R)K_c} \right)^{-q} + \Delta K^n \frac{d}{d\Delta K} \left[\left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K} \right)^p \left(1 - \frac{\Delta K}{(1-R)K_c} \right)^{-q} \right] \right\}. \end{array} \right. \quad (80)$$

Fazendo a derivada em função da variação do FIT da eq. (79) tem-se:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{d\Delta K} \left[\left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K} \right)^p \right] &= p \left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K} \right)^{p-1} \frac{d}{d\Delta K} \left(-\frac{\Delta K_{th}}{\Delta K} \right) = p \left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K} \right)^{p-1} \left(\frac{\Delta K_{th}}{\Delta K^2} \right); \\ \frac{d}{d\Delta K} \left[\left(1 - \frac{\Delta K}{(1-R)K_c} \right)^{-q} \right] &= (-q) \left(1 - \frac{\Delta K}{(1-R)K_c} \right)^{-q-1} \frac{d}{d\Delta K} \left(-\frac{\Delta K}{(1-R)K_c} \right) = \frac{q}{(1-R)K} \left(1 - \frac{\Delta K}{(1-R)K_c} \right)^{-(q+1)}. \end{aligned} \right. \quad (81)$$

Substituindo as eqs. (79) e (80) tem-se:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dh(a)}{d\Delta K} &= \frac{d}{d\Delta K} \left\{ C \left[\frac{(1-f)}{(1-R)} \right]^n \Delta K^n \left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K} \right)^p \left(1 - \frac{\Delta K}{(1-R)K_c} \right)^{-q} \right\} = \\ &C \left[\frac{(1-f)}{(1-R)} \right]^n \frac{d}{d\Delta K} \left[\Delta K^n \left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K} \right)^p \left(1 - \frac{\Delta K}{(1-R)K_c} \right)^{-q} \right] = \\ &C \left[\frac{(1-f)}{(1-R)} \right]^n \left\{ n\Delta K^{n-1} \left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K} \right)^p \left(1 - \frac{\Delta K}{(1-R)K_c} \right)^{-q} + \Delta K^n \frac{d}{d\Delta K} \left[\left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K} \right)^p \left(1 - \frac{\Delta K}{(1-R)K_c} \right)^{-q} \right] \right\} = \\ &C \left[\frac{(1-f)}{(1-R)} \right]^n \left\{ n\Delta K^{n-1} \left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K} \right)^p \left(1 - \frac{\Delta K}{(1-R)K_c} \right)^{-q} + \Delta K^n p \left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K} \right)^{p-1} \left(\frac{\Delta K_{th}}{\Delta K^2} \right) \left(1 - \frac{\Delta K}{(1-R)K_c} \right)^{-q} + \right. \\ &\left. \Delta K^n \frac{q}{(1-R)K} \left(1 - \frac{\Delta K}{(1-R)K_c} \right)^{-(q+1)} \left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K} \right)^p \right\} \quad (82) \\ \frac{dh(a)}{d\Delta K} &= h(a) \left(\frac{n}{\Delta K} + \frac{p}{\left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K} \right)} \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K^2} + \frac{q}{(1-R)K_c \left(1 - \frac{\Delta K}{(1-R)K_c} \right)} \right). \end{aligned} \right.$$

Pela eq. (83) mostra-se a derivada da variação do FIT em relação ao comprimento da trinca.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d(\Delta K)}{da} &= \frac{d}{da} \left(\Delta \sigma \sqrt{\pi a} f(a) \right) = \Delta \sigma \sqrt{\pi} \frac{d}{da} \left(a^{\frac{1}{2}} f(a) \right) = \\ &\Delta \sigma \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} f(a) + a^{\frac{1}{2}} f'(a) \right) = \Delta \sigma \sqrt{\pi a} f(a) \left(\frac{1}{2a} + \frac{f'(a)}{f(a)} \right). \end{aligned} \right. \quad (83)$$

Substituindo as eqs. (82) e (83) na eq. (26), obtém-se as cotas inferior e superior para o modelo de FNK.

$$\left. \begin{aligned}
a_{CI} &= a_0 + \left\{ C \left[\left(\frac{1-f}{1-R} \right) \Delta K(a_0) \right]^n \frac{\left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K(a_0)} \right)^p}{\left(1 - \frac{\Delta K(a_0)}{(1-R)K_c} \right)^q} + \frac{1}{2} \left[C \left[\left(\frac{1-f}{1-R} \right) \Delta K(a_0) \right]^n \frac{\left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K(a_0)} \right)^p}{\left(1 - \frac{\Delta K(a_0)}{(1-R)K_c} \right)^q} \right]^2 \right\} (N - N_0); \\
&\left[\frac{(q-n)\Delta K(a_0)^2 + [(n-p-q)\Delta K_{th} + n(1-R)K_c] \Delta K(a_0) + (p-n)\Delta K_{th}(1-R)K_c}{(\Delta K(a_0) - \Delta K_{th})[(1-R)K_c - \Delta K(a_0)]} \right] \left(\frac{1}{2a_0} + \frac{f'(a_0)}{f(a_0)} \right) (N - N_0) \\
a_{CS} &= a_0 + \left\{ C \left[\left(\frac{1-f}{1-R} \right) \Delta K(a_0) \right]^n \frac{\left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K(a_0)} \right)^p}{\left(1 - \frac{\Delta K(a_0)}{(1-R)K_c} \right)^q} + \frac{1}{2} \left[C \left[\left(\frac{1-f}{1-R} \right) \Delta K(a^*) \right]^n \frac{\left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K(a^*)} \right)^p}{\left(1 - \frac{\Delta K(a^*)}{(1-R)K_c} \right)^q} \right]^2 \right\} (N - N_0); \\
&\left[\frac{(q-n)\Delta K(a^*)^2 + [(n-p-q)\Delta K_{th} + n(1-R)K_c] \Delta K(a^*) + (p-n)\Delta K_{th}(1-R)K_c}{(\Delta K(a^*) - \Delta K_{th})[(1-R)K_c - \Delta K(a^*)]} \right] \left(\frac{1}{2a^*} + \frac{f'(a^*)}{f(a^*)} \right) (N - N_0) \\
\forall N &\in [N_0, N_1].
\end{aligned} \right\} \quad (84)$$

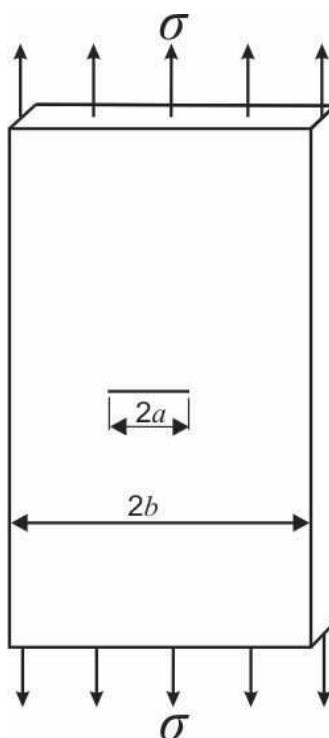
Pode ser observado na eq. (84) da cota superior, a mesma dependência do ajuste no valor da cota superior em relação ao valor inicial de “ a^* ”, segundo eq. (76).

7 AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DO MÉTODO FCB APLICADO AOS MODELOS DE HUDSON E FORMAM-NEWMAN-DE KONING

O desempenho do método FCB é avaliado, neste capítulo, na representação do comportamento de evolução da trinca para os modelos de Hudson e FNK.

O problema a ser analisado consiste de uma placa contendo uma trinca central submetida a carregamento com amplitude de tensão variável, conforme figura 17. O critério para escolha deste exemplo baseia-se nos aspectos de modelagem de propagação da trinca (modelos de Hudson e FNK), disponibilidade e acesso aos dados do experimento e seus resultados.

Figura 17 – Placa com largura finita e trinca central



Fonte: O autor (2019).

A trinca central, no caso do modelo de Hudson, foi fabricada empregando o processo de usinagem por descarga elétrica (EDM), também denominado eletro erosão. Para esse exemplo, serão utilizadas duas funções de correção do fator intensidade de tensão, sendo a primeira representada pela eq. (85) (BANNANTINE et al., 1989) e, a segunda pela eq. (86) (TADA et al., 2000).

$$f(a) = \sqrt{\sec\left(\frac{\pi a}{2b}\right)}. \quad (85)$$

$$f(a) = \left[1 - 0,025\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 0,065\left(\frac{a}{b}\right)^4\right] \sqrt{\sec\left(\frac{\pi a}{2b}\right)}. \quad (86)$$

A função de correção do FIT definida pela eq. (85) foi utilizada nos modelos de Hudson e FNK a carregamento variável enquanto, a da eq. (86) foi utilizada pelo modelo de FNK a carregamento constante.

Inicialmente, serão apresentados os resultados para os modelos de Hudson e FNK; a exposição e avaliação dos resultados será feita a partir de gráficos e tabelas de valores numéricos. A exposição terá a seguinte ordem:

1. Funções comprimento da trinca, obtida via método de RK4 e, funções cotas superior e inferior;
2. O desvio relativo das funções listadas no item 1;
3. As aproximações numéricas via médias aritméticas e geométricas das funções listadas no item 1;
4. O erro relativo das médias e a razão entre os tempos computacionais das funções listadas no item 1.

Todos os resultados obtidos pelo método FCB foram comparados com os resultados apresentados nos experimentos de Chang (1981), de Hudson (1981), de Gróza e Váradi (2017), e de Dirik e Yalçinkaya (2016), e, a solução numérica obtida pelo método do RK4 foi tomada como exata.

7.1 RESULTADOS PARA O MODELO DE HUDSON

O desempenho do método FCB foi avaliado através da aplicação do exemplo numérico constante nos trabalhos de Chang (1981) e Hudson (1981).

A tabela 1 contém as propriedades da liga de alumínio 2219 – T851 e os dados do experimento: comprimento inicial da trinca (a_0); comprimento o final da trinca (a_f); tensão máxima RMS ($\sigma_{máx,rms}$); tensão mínima RMS ($\sigma_{mín,rms}$); a razão entre as tensões RMS (R_{rms}) e o número de ciclos final do experimento (N_f). Esses dados são os mesmos utilizados nos trabalhos de Chang (1981), Hudson (1981) e Newman (1981). É possível observar, na tabela 1, que houve variação no comprimento inicial da trinca

de um corpo de prova para outro. Os corpos de prova foram classificados conforme o tipo de carregamento decorrente da missão de voo aplicado ao avião de caça e, as siglas de cada corpo de prova significam: A – A (*air-to-air*), A – G (*air-to-ground*), I – N (*instrumentation and navigation*), FC (*fighter composite*) e TC (*transport composite*).

Tabela 1 – Dados aplicados ao modelo de Hudson

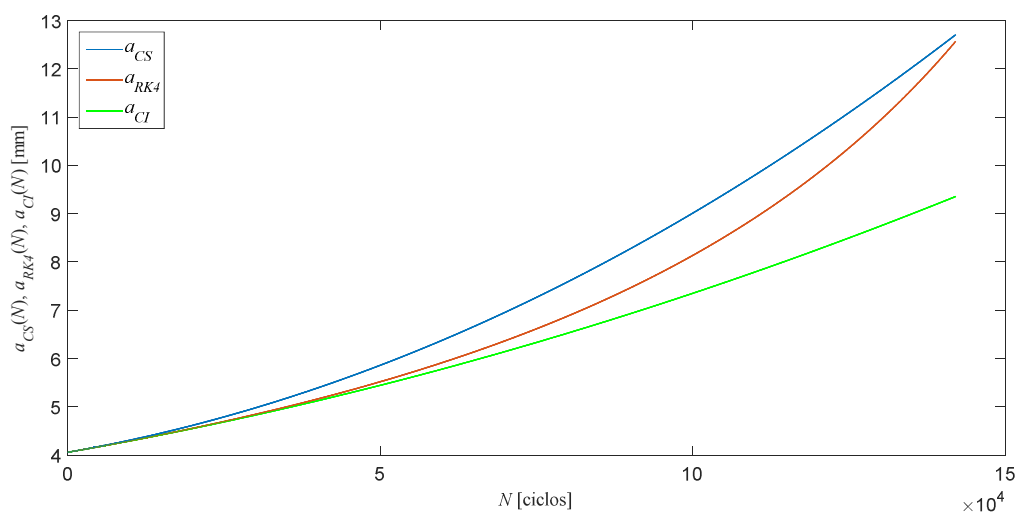
Propriedades da liga de alumínio 2219 – T851: $C = 5,397 \times 10^{-9}$ m/ciclo, $m = 3,18$, $K_c = 70,85$ MPa.m^{1/2}, $b = 152,4$ mm

Experimento	a_0 (mm)	a_f (mm)	$\sigma_{m\acute{a}x,rms}$ (MPa)	$\sigma_{m\acute{i}x,rms}$ (MPa)	R	N_f
M – 81 (A-A)	4,064	13	71,7	28,3	0,4	115.700
M – 84 (A-G)	4,013	55,9	56,5	15,2	0,27	268.908
M – 88 (I-N)	3,81	45,8	66,2	26,2	0,39	380.443
M – 91 (FC)	3,81	36,1	98,6	35,9	0,36	65.627
M – 93 (TC)	6,35	13,6	68,6	62,7	0,92	1.359.000

Fonte: Adaptado de Chang (1981).

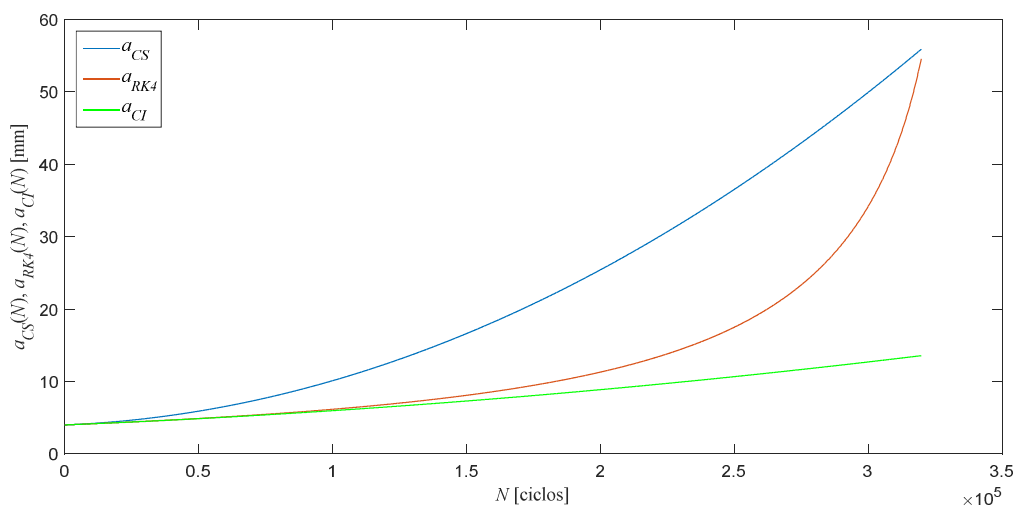
Apresentam-se, nas figuras 18 – 22, os gráficos das funções comprimento da trinca, e as suas respectivas cotas, superior (a_{CS}) e inferior (a_{CI}). De forma geral, as funções a_{CS} e a_{CI} mantiveram-se como cotas superior e inferior, respectivamente, a função a_{RK4} .

Figura 18 – Gráfico de $a_{CS}(N)$, $a_{RK4}(N)$, $a_{CI}(N) \times N$ para o experimento M-81



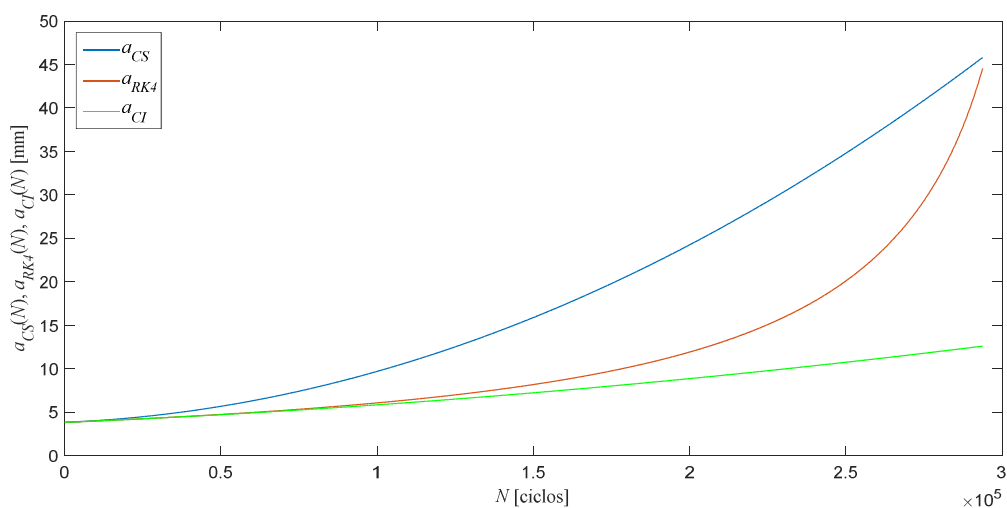
Fonte: O autor (2019).

Figura 19 – Gráfico de $a_{CS}(N)$, $a_{RK4}(N)$, $a_{CI}(N)$ x N para o experimento M-84



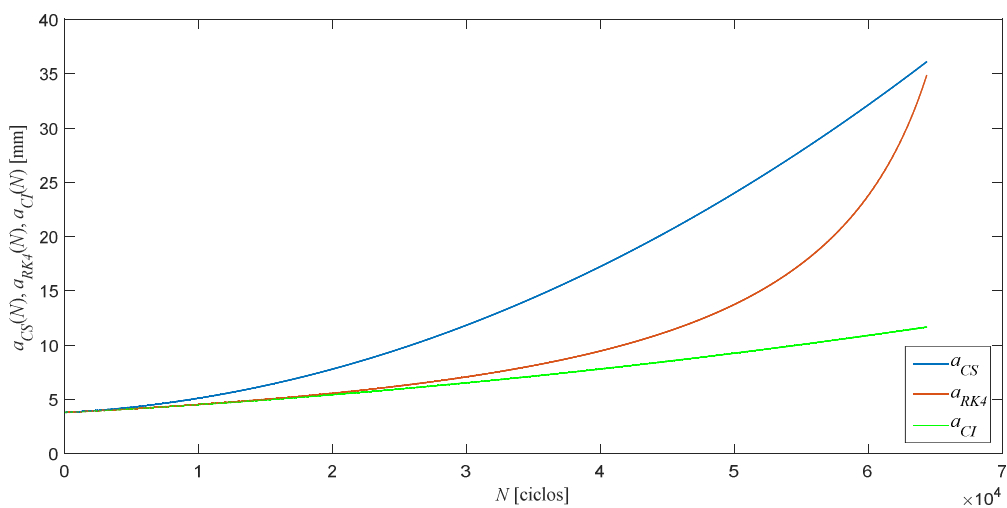
Fonte: O autor (2019).

Figura 20 – Gráfico de $a_{CS}(N)$, $a_{RK4}(N)$, $a_{CI}(N)$ x N para o experimento M-88

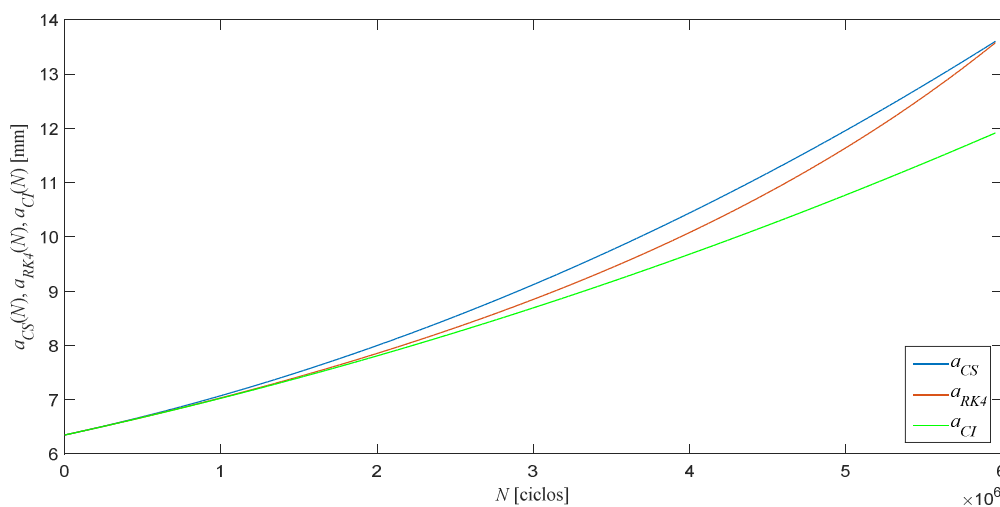


Fonte: O autor (2019).

Figura 21 – Gráfico de $a_{CS}(N)$, $a_{RK4}(N)$, $a_{CI}(N)$ x N para o experimento M-91



Fonte: O autor (2019).

Figura 22 – Gráfico de $a_{CS}(N)$, $a_{RK4}(N)$, $a_{CI}(N)$ x N para o experimento M-93

Fonte: O autor (2019).

São apresentados, na tabela 2, os valores numéricos dos números de ciclos do experimento (N_f) e FCB (N_{FCB}); respectivamente, e a razão destes números de ciclos (μ_N), eq. (34).

Tabela 2 – Valores numéricos do N_f , N_{FCB} e μ_N do modelo de Hudson

Experimento	N_f	N_{FCB}	μ_N
M – 81	115.700	142.043	1,23
M – 84	268.908	319.827	1,19
M – 88	380.443	293.776	0,77
M – 91	65.627	64.367	0,98
M – 93	1.359.000	5.957.648	4,38

Fonte: O autor (2019).

Observa-se na tabela 2, que houve uma predição adequada da vida em fadiga pela utilização do método FCB. Em alguns casos, o método foi conservativo em relação ao experimento. As predições dos experimentos M81 – M91 são adequadas, pois, para estes, a razão entre o FCB e a vida do experimento foi de $0,77 \leq \mu_N \leq 1,23$. Considerando que a dispersão usual nas taxas de crescimento da trinca por fadiga pode variar de um fator dois a quatro, (2 a 4), nas mesmas condições de carregamento. Hudson (1981), na sua pesquisa de predição do crescimento da trinca por fadiga sob CATV, obteve a razão dos ciclos de $0,82 \leq \mu_N \leq 2,13$. Kim et al. (2006), utilizando o mesmo método, obteve a razão dos ciclos de $1,52 \leq \mu_N \leq 3,22$. Os valores numéricos para a razão entre ciclos dos trabalhos de Hudson e Kim podem ser

observados na tabela 3, sendo N_P o número de ciclos obtidos para a predição teórica da vida em fadiga.

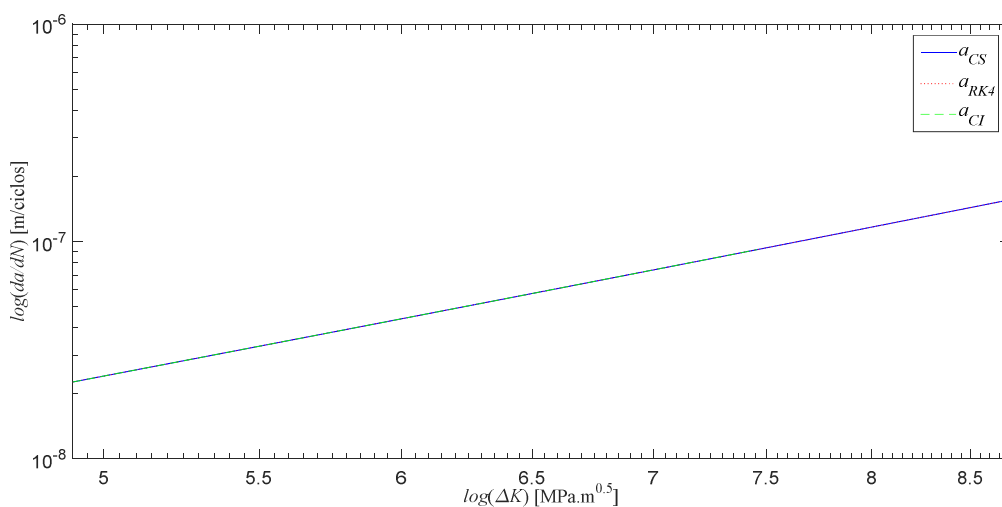
Tabela 3 – Valores numéricos do N_f , N_P e μ_N para os experimentos de Hudson e Kim

Experimento	N_f	N_P	μ_N
M – 81	115.700	246.000	2,13
M – 84	268.908	395.292	1,47
M – 88	380.443	475.292	1,25
M – 91	65.627	93.473	1,42
M – 93	1.359.000	-	-
A	4.570.000	6.970.000	1,52
C	1.600.000	4.720.000	2,95
D	1.860.000	5.990.000	3,22

Fonte: O autor (2019).

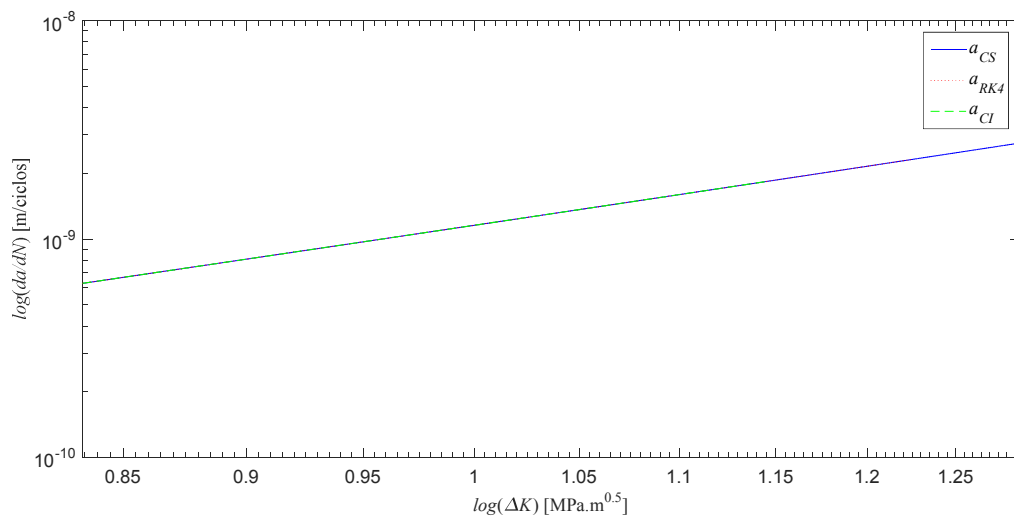
No caso do experimento M – 93 o valor ficou acima de 4 pois, $0 < \Delta K_{rms} \leq 1$, o que acarreta a superestimação da vida em fadiga, como pode ser observado nas figuras 23 e 24. Os valores do coeficiente $\beta \in \{1,5; 2,66; 2,5; 2,27; 1,31\}$ e foram obtidos por inspeção para que a função cota superior não violasse a solução do método RK4, conforme eq.(76).

Figura 23 – Gráfico de $\log (da_{CS}/dN, da_{RK4}/dN, da_{CI}/dN) \times \log (\Delta K)$ para o experimento M-81



Fonte: O autor (2019).

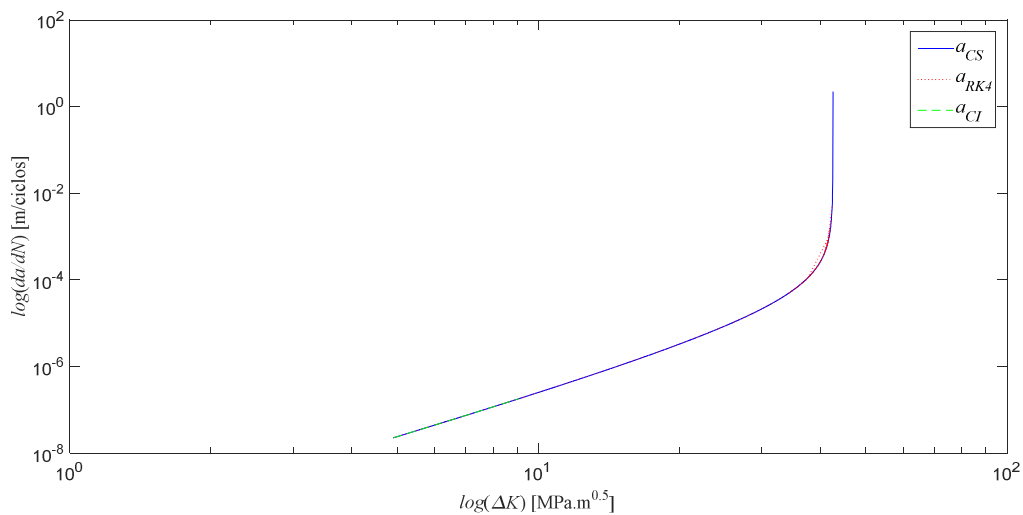
Figura 24 – Gráfico de $\log (da_{CS}/dN, da_{RK4}/dN, da_{CI}/dN) \times \log (\Delta K)$ para o experimento M-93



Fonte: O autor (2019).

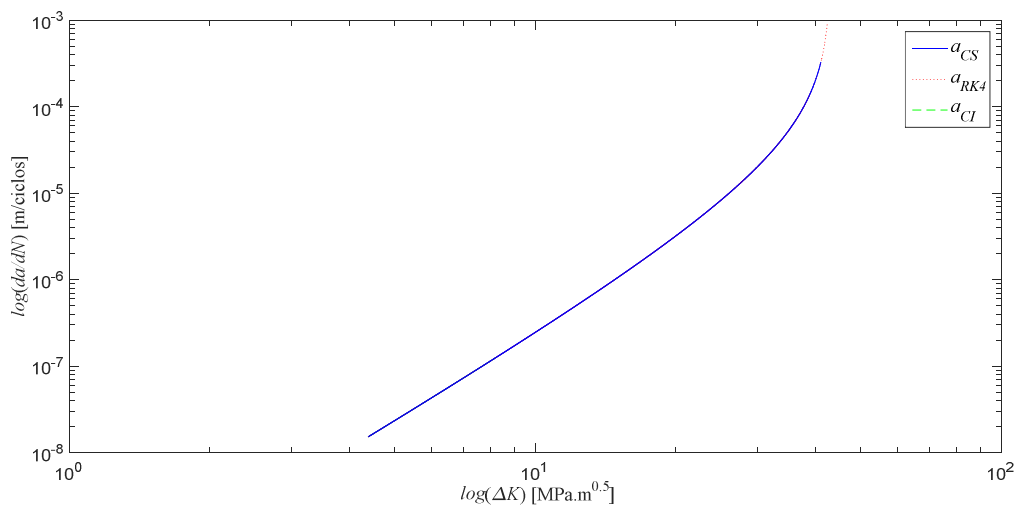
Apresentam-se, nas figuras 25 e 26, os gráficos $\log (da/dN) \times \log (\Delta K)$ dos experimentos M-81 e M-88.

Figura 25 – Gráfico de $\log (da_{CS}/dN, da_{RK4}/dN, da_{CI}/dN) \times \log (\Delta K)$ crítico para o experimento M-81



Fonte: O autor (2019).

Figura 26 – Gráfico de $\log (da_{CS}/dN, da_{RKA}/dN, da_{CI}/dN) \times \log (\Delta K)$ crítico para experimento M-88

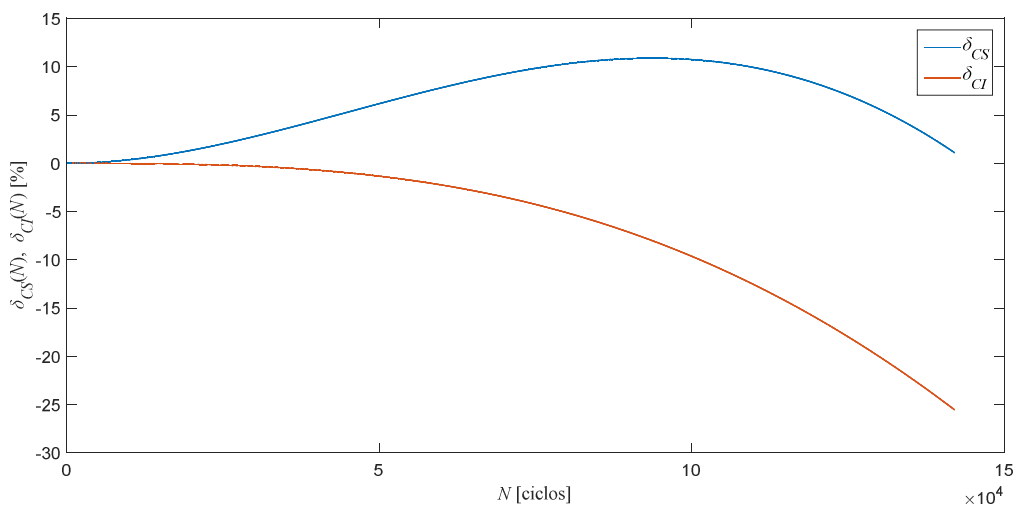


Fonte: O autor (2019).

É possível observar nas figuras 25 e 26, dos experimentos M-81 e M-88, que o método FCB abrange as regiões II e III do gráfico da figura 6.

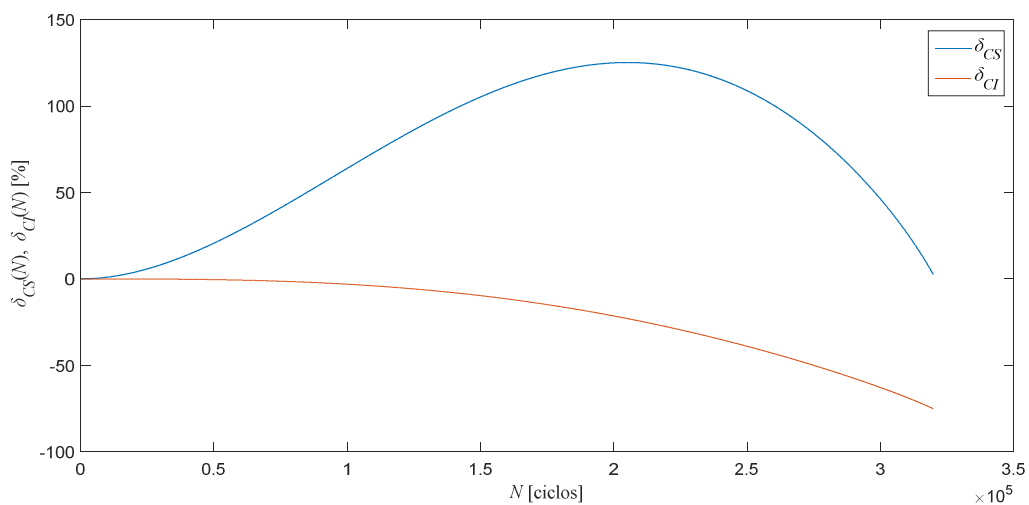
Apresentam-se, nas figuras 27 – 31, os gráficos dos desvios relativos da função cota, superior e inferior, ($\delta(N) \times N$).

Figura 27 – Gráfico dos desvios relativos $\delta_{CS}(N), \delta_{CI}(N) \times N$ para o experimento M-81



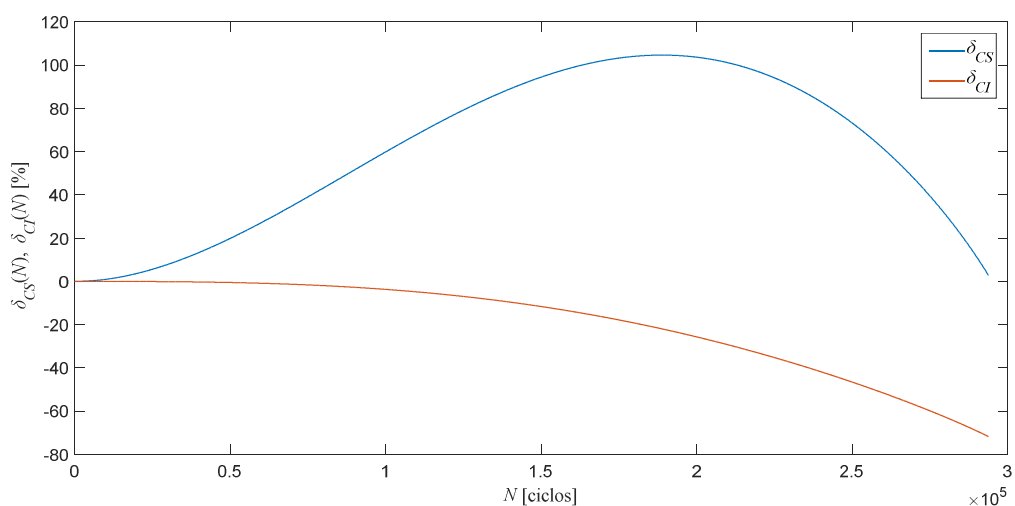
Fonte: O autor (2019).

Figura 28 – Gráfico dos desvios relativos $\delta_{CS}(N)$, $\delta_{CI}(N) \times N$ para o experimento M-84



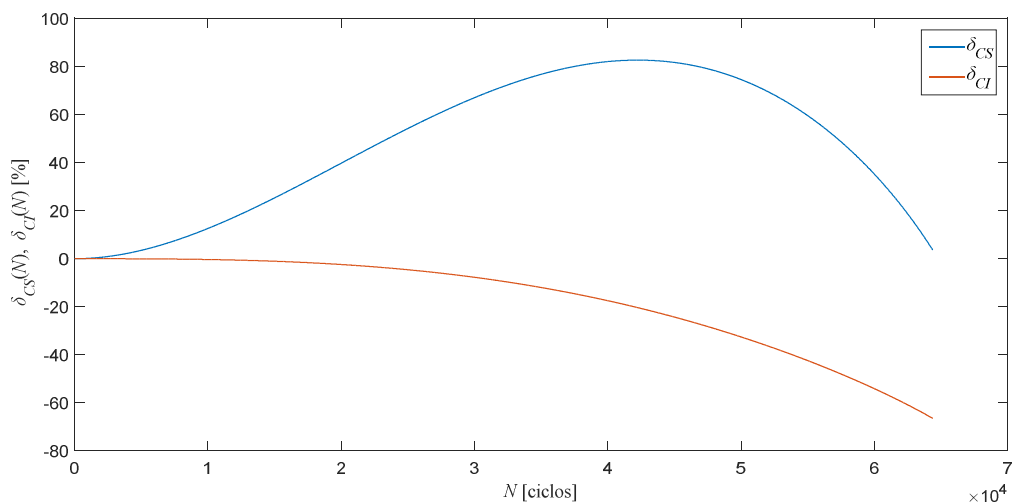
Fonte: O autor (2019).

Figura 29 – Gráfico dos desvios relativos $\delta_{CS}(N)$, $\delta_{CI}(N) \times N$ para o experimento M-88



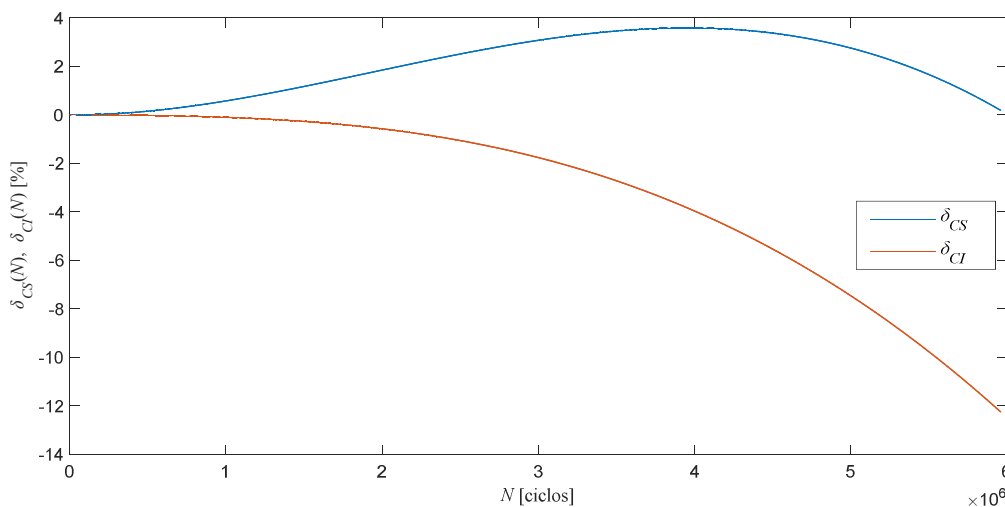
Fonte: O autor (2019).

Figura 30 – Gráfico dos desvios relativos $\delta_{CS}(N)$, $\delta_{CI}(N) \times N$ para o experimento M-91



Fonte: O autor (2019).

Figura 31 – Gráfico dos desvios relativos $\delta_{CS}(N)$, $\delta_{CI}(N) \times N$ para o experimento M-93

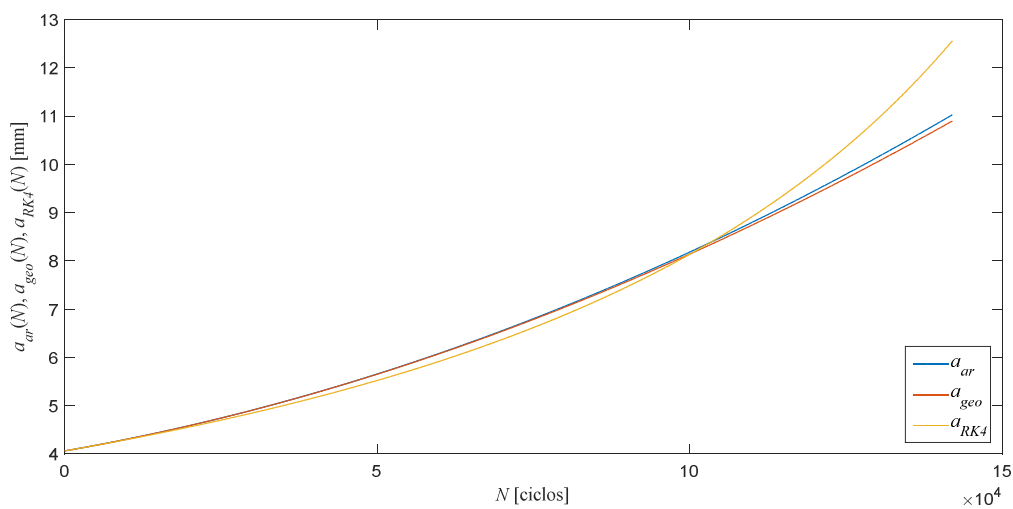


Fonte: O autor (2019).

O desvio relativo da cota superior, na figura 27 referente ao experimento M-81, corresponde aproximadamente à 10% e para a cota inferior corresponde a um valor de aproximadamente -25,52% neste exemplo, os menores resultados para a função desvio relativo. Aliás, nas figuras 28 e 29, os valores do desvio relativo das cotas superior correspondem a 125% e 104%, respectivamente e, para as cotas inferior de -75% e -71%. O mesmo acontece com o desvio relativo da figura 30. Já, para o experimento M-93, os valores encontrados foram de 3,58% para a cota superior e -12,23% para a cota inferior, contudo, para este caso, os valores foram superestimados devido à variação do FIT.

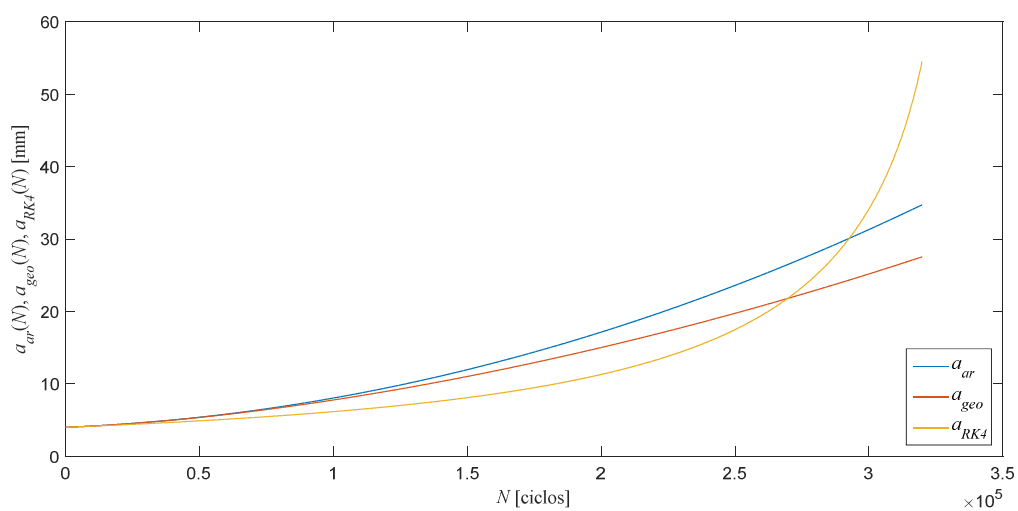
As figuras 32 – 36 apresentam os gráficos das aproximações numéricas para a função comprimento da trinca via funções médias aritmética (a_{ar}) e geométrica (a_{geo}), eqs. (29) e (30).

Figura 32 – Gráfico de $a_{ar}(N)$, $a_{geo}(N)$, $a_{RK4}(N)$ x N para o experimento M-81



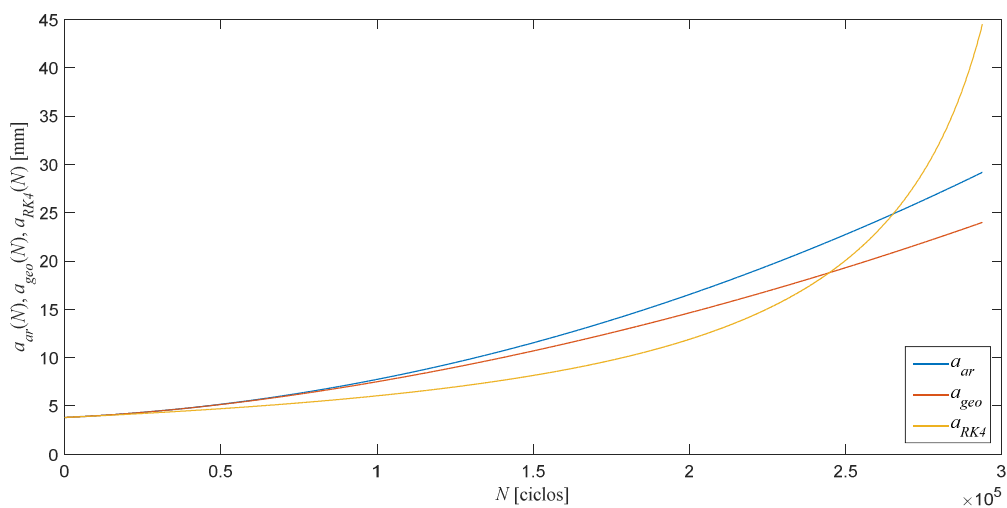
Fonte: O autor (2019).

Figura 33 – Gráfico de $a_{ar}(N)$, $a_{geo}(N)$, $a_{RK4}(N)$ x N para o experimento M-84



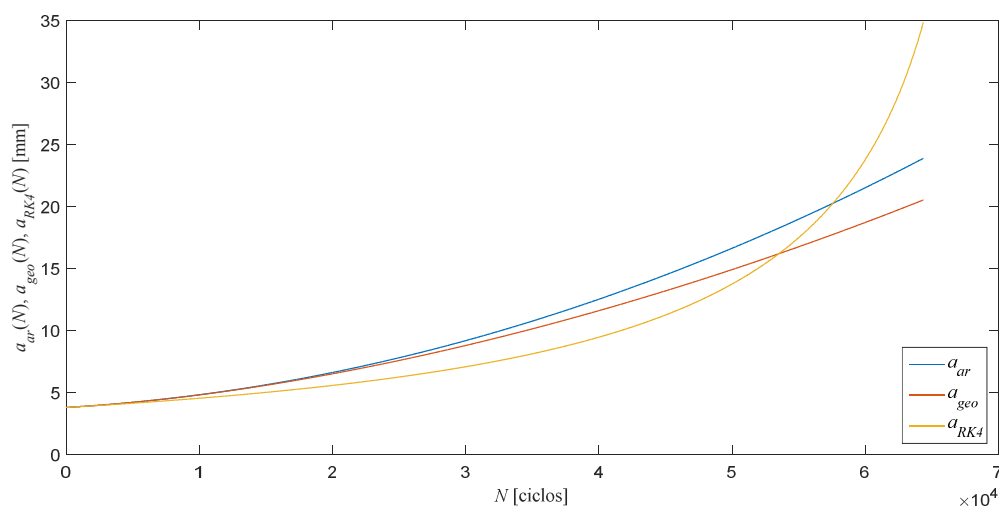
Fonte: O autor (2019).

Figura 34 – Gráfico de $a_{ar}(N)$, $a_{geo}(N)$, $a_{RK4}(N)$ x N para o experimento M-88



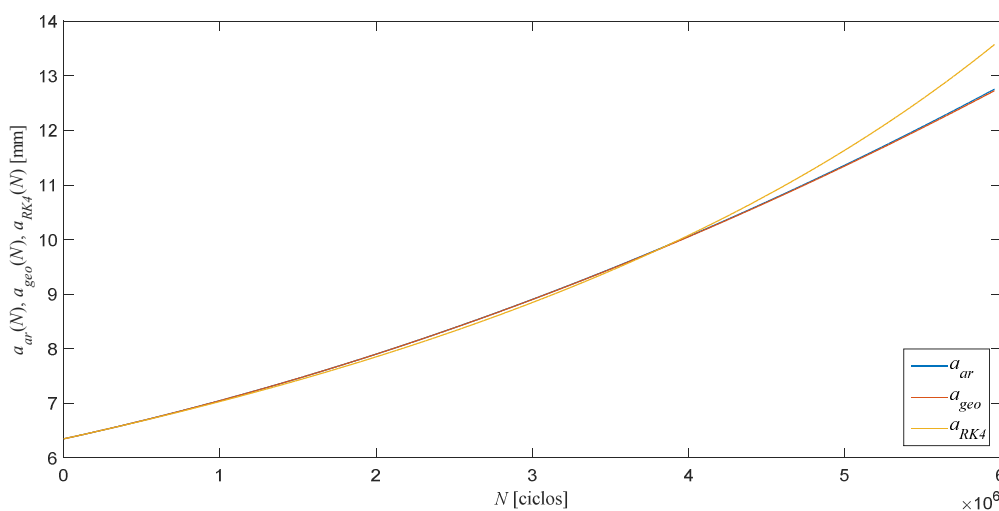
Fonte: O autor (2019).

Figura 35 – Gráfico de $a_{ar}(N)$, $a_{geo}(N)$, $a_{RK4}(N)$ x N para o experimento M-91



Fonte: O autor (2019).

Figura 36 – Gráfico de $a_{ar}(N)$, $a_{geo}(N)$, $a_{RK4}(N)$ x N para o experimento M-93

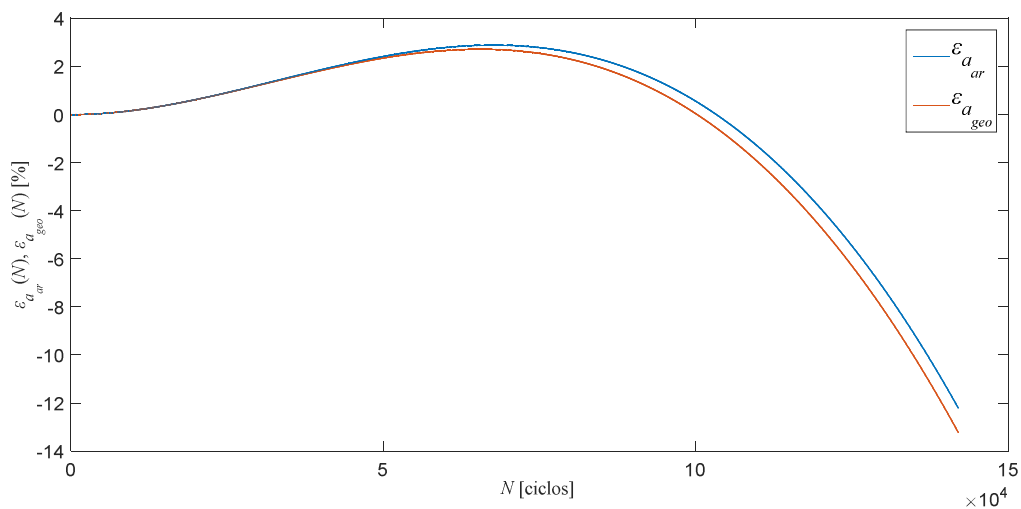


Fonte: O autor (2019).

Examinando-se as figuras 32 – 36, observa-se que, predominantemente, as funções médias aritmética e geométrica apresentam valores numéricos superiores em relação aos valores numéricos da função comprimento da trinca, (a_{RK4}). Apesar disso, quando o número de ciclos se aproxima do número final, N_f , estas aproximações numéricas, (a_{ar} , a_{geo}), apresentam valores numéricos inferiores. Neste sentido, o método FCB, além de apresentar grande eficiência mostra-se conservativo. No entanto, isso não afeta o desempenho do método em relação à solução numérica, demonstrando que as funções cotas envelopam a solução obtida pelo método de RK4.

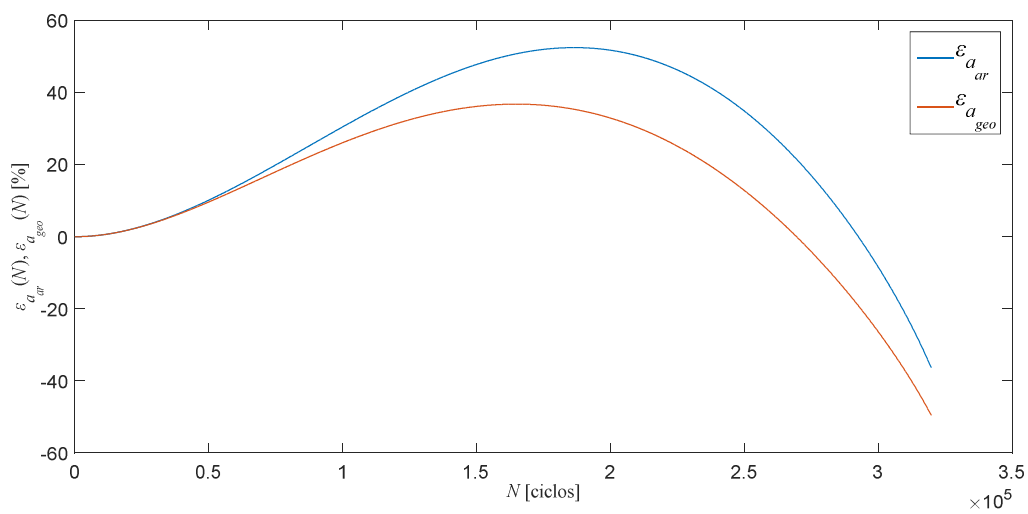
As figuras 37 - 41 apresentam os gráficos das funções erro relativo em médias aritmética (ε_{aar}) e geométrica (ε_{ageo}), eq. (32).

Figura 37 – Gráfico das funções erros relativos $\varepsilon_{aar}(N)$, $\varepsilon_{ageo}(N)$ x N para o experimento M-81



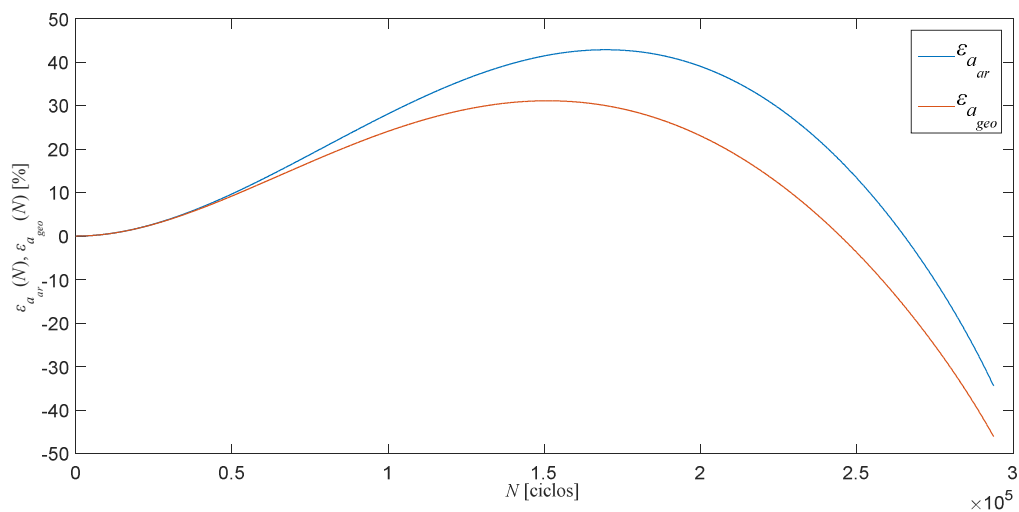
Fonte: O autor (2019).

Figura 38 – Gráfico das funções erros relativos $\varepsilon_{aar}(N)$, $\varepsilon_{ageo}(N)$ x N para o experimento M-84



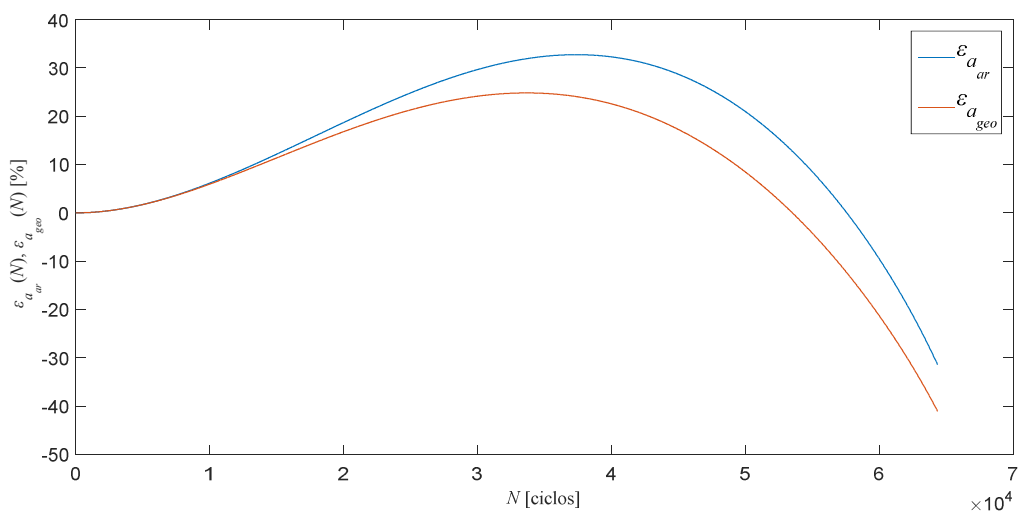
Fonte: O autor (2019).

Figura 39 – Gráfico das funções erros relativos $\varepsilon_{aar}(N)$, $\varepsilon_{ageo}(N)$ x N para o experimento M-88



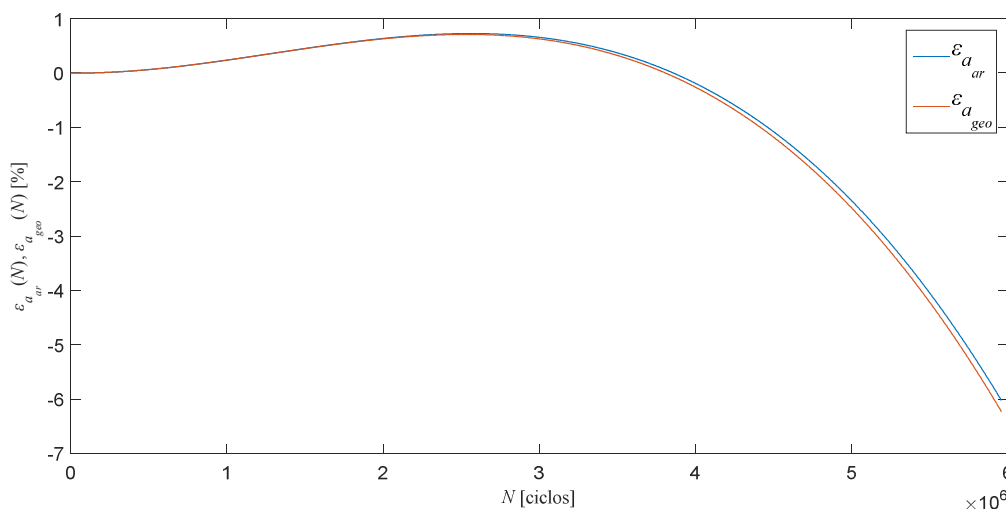
Fonte: O autor (2019).

Figura 40 – Gráfico das funções erros relativos $\varepsilon_{aar}(N)$, $\varepsilon_{ageo}(N)$ x N para o experimento M-91



Fonte: O autor (2019).

Figura 41 – Gráfico das funções erros relativos $\varepsilon_{aar}(N)$, $\varepsilon_{ageo}(N)$ x N para o experimento M-93



Fonte: O autor (2019).

São apresentados, na tabela 4, os valores numéricos, máximos e mínimos, da função erro relativo das médias aritmética ($\varepsilon_{a,ar}$) e geométrica ($\varepsilon_{a,geo}$); o tempo computacional do método RK4 (t_{RK4}); o tempo computacional do método FCB ($t_{CS,CI}$) e a razão entre os tempos computacionais (μ_t). A função erro relativo das soluções numérica aproximadas teve uma variação de 2,72% a 52,44%, como é possível constatar na tabela 3. Além disso, é possível observar que as funções cotas e as suas médias, figuras 18 – 22 e 32 – 36, representam adequadamente o crescimento da trinca, o que significa que o método tem uma aproximação adequada da solução real. Outro aspecto de grande importância do método FCB é a razão computacional em relação ao método do RK4, que está representado na tabela 3. À vista disso, a razão entre os tempos de computação de 1.362,7% a 21.160 % mais eficiente computacionalmente, quando comparada com a solução do método do RK4. O parâmetro (μ_t) mostra que o método FCB possui um desempenho satisfatório.

Tabela 4 – Medidas de desempenho do método FCB para o modelo de Hudson

Corpos de prova	Erro Médias [%]				Tempos Computacionais		
	$\varepsilon_{a,ar,min}$	$\varepsilon_{a,ar,max}$	$\varepsilon_{a,geo,min}$	$\varepsilon_{a,geo,max}$	t_{RK4} (s)	$t_{CS,CI}$ (s)	μ_t [%]
M-81	-12,20	2,88	-13,22	2,72	1,0412	0,0065	15.918,46
M-84	-36,33	52,44	-49,50	36,77	1,7646	0,0083	21.160
M-88	-34,46	42,84	-46,10	31,11	1,6347	0,0158	10.246
M-91	-31,43	32,73	-41,07	24,82	0,4553	0,0026	17.412
M-93	-6,02	0,73	-6,23	0,71	3,9391	0,2693	1.362,7

Fonte: O autor (2019).

7.2 RESULTADOS PARA O MODELO DE FORMAN-NEWMAN-DE KONING

O modelo FNK é um dos mais utilizados para a predição da vida por fadiga. Apresenta uma grande abrangência, quando comparado a outros modelos aplicados para carregamentos variáveis. O modelo leva em consideração os seguintes efeitos: o do fechamento de trinca; a dependência da tensão média através da razão entre as tensões; cobre todas as regiões do diagrama $\log (da/dN) \times \log (\Delta K)$ (LENER et al., 2013). Pode ser aplicado para carregamentos com amplitude de tensão constante. No trabalho de Gróza e Váradi (2017), aplicou-se carregamento constante de 200 MPa com $R=0$ para o ferro fundido nodular na predição da vida em fadiga. No entanto, no trabalho de Dirik e Yalçinkaya (2016), aplicou-se carregamentos variáveis na liga de alumínio 7075 – T6. Os dados e as propriedades dos materiais utilizados nesses experimentos estão descritos na tabela 5 (GRÓZA e VÁRADI, 2017; DIRIK e YALÇINKAYA, 2016; ŽIVOJINOVIĆ et al., 2011, e NASA, 2000). Inicialmente, aplicou-se o método FCB ao experimento de Gróza e Váradi (2017) e, posteriormente, o de Dirik e Yalçinkaya (2016).

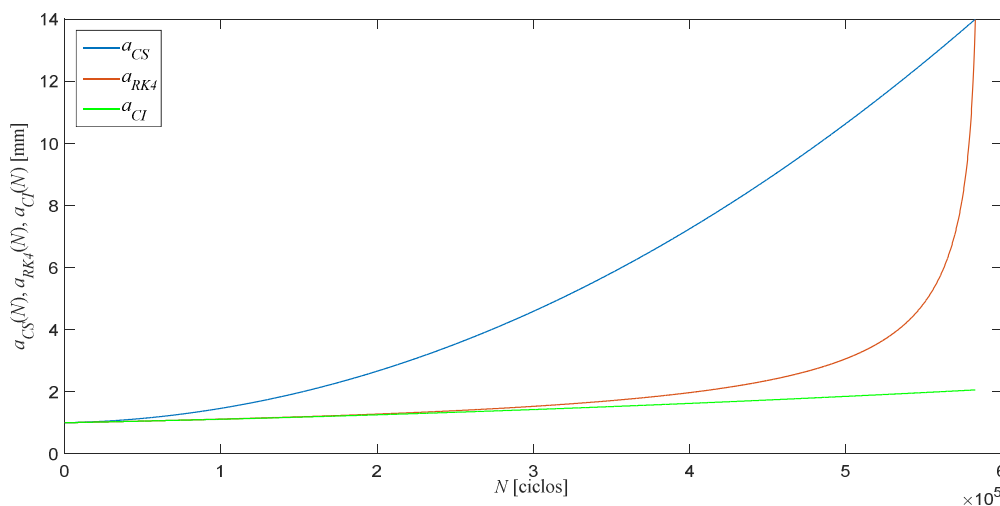
Tabela 5 – Dados e propriedades dos materiais aplicados ao modelo FNK

Material	Ferro fundido Nodular	7075-T6	Unidades
Dados			
a_0	1	6,35	mm
b	50	305	mm
t	4	4,1	mm
σ_e	422	520	MPa
ΔK_0	7,5	2,2	MPa.m ^{1/2}
C_{th}^+	1	2	-
p	0,5	0,5	-
q	0,75	1	-
Kc	55	57	MPa.m ^{1/2}
C	5×10^{-10}	$9,86 \times 10^{-12}$	mm/ciclo
n	4,5	2,947	-
α	1	1,9	-
$\sigma_{m\acute{a}x}/\sigma_o$	0,3	0,3	-

Fonte: O autor (2019).

A figura 42 apresenta os gráficos das funções comprimento da trinca e suas respectivas funções cota superior (a_{CS}) e inferior (a_{CI}). De forma geral, estas funções mantiveram-se como cotas superior e inferior, respectivamente a função comprimento da trinca, (a_{RK4}).

Figura 42 – Gráfico de $a_{CS}(N)$, $a_{RK4}(N)$, $a_{CI}(N) \times N$ para o ferro fundido nodular

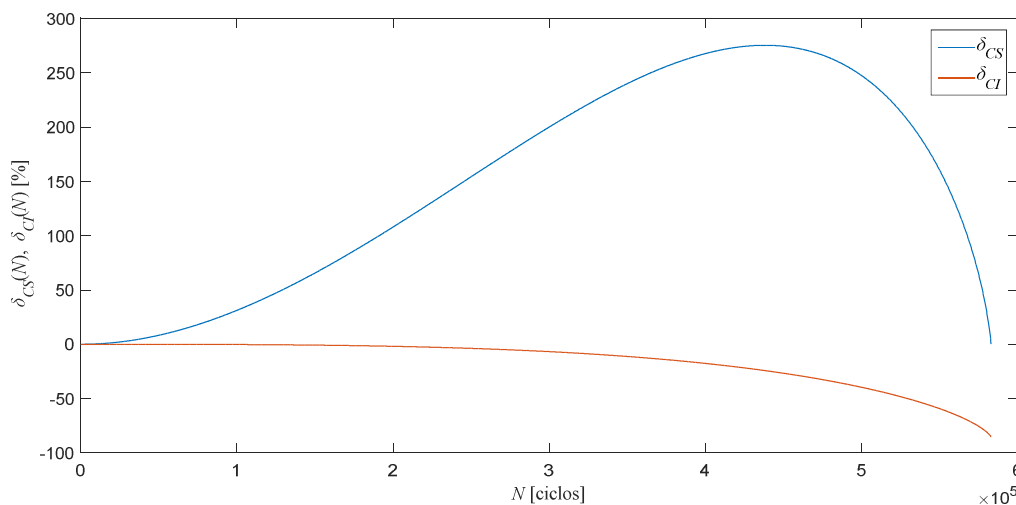


Fonte: O autor (2019).

Nesse caso, o número de ciclos pelo método FCB (N_{FCB}) foi de 582.800 ciclos e, o número de ciclos do experimento (N_f) é de 400.000, resultando numa razão igual a 1,46. Em relação ao comprimento da trinca, é possível observar na tabela 5, que o $a_0 = 1$ mm, chegando a $a_f(N_f) = 14$ mm, resultando num crescimento de trinca 14 vezes maior em relação ao comprimento inicial. Para este caso, tomou-se $a^* = 2,14a_0$, o mesmo foi obtido por inspeção para que a função cota superior não violasse a solução do método RK4 conforme eq. (76).

A figura 43 apresenta os gráficos dos desvios relativos da função cota, superior e inferior, ($\delta(N) \times N$).

Figura 43 – Gráfico dos desvios relativos $\delta_{CS}(N)$, $\delta_{CI}(N)$ x N para o ferro fundido nodular

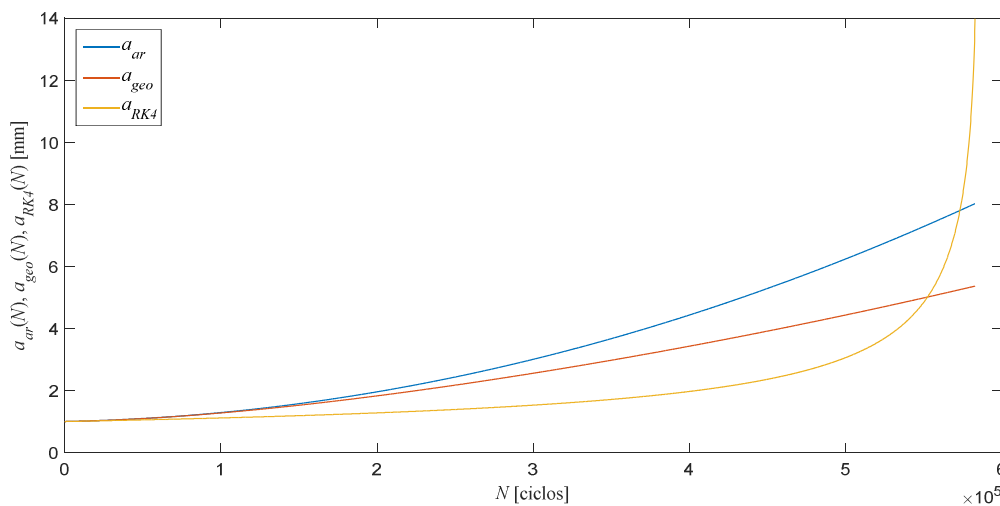


Fonte: O autor (2019).

Pode-se observar, na figura 43, para este caso, que as funções “ a_{CI} ” e “ a_{CS} ” mantiveram-se como cotas inferior e superior da função comprimento da trinca, respectivamente. Apesar disso, a função desvio relativo superior atinge um valor máximo de 275,25%, enquanto a função desvio relativo inferior atinge um valor mínimo de -85,28%. Em linhas gerais conclui-se, que para esse exemplo, a cota superior apresenta menor aproximação da solução numérica, (a_{RK4}).

A figura 44 apresenta os gráficos das aproximações numéricas para a função comprimento da trinca via funções médias aritmética (a_{ar}) e geométrica (a_{geo}), eqs. (29) e (30).

Figura 44 – Gráfico de $a_{ar}(N)$, $a_{geo}(N)$, $a_{RK4}(N)$ x N para o ferro fundido nodular

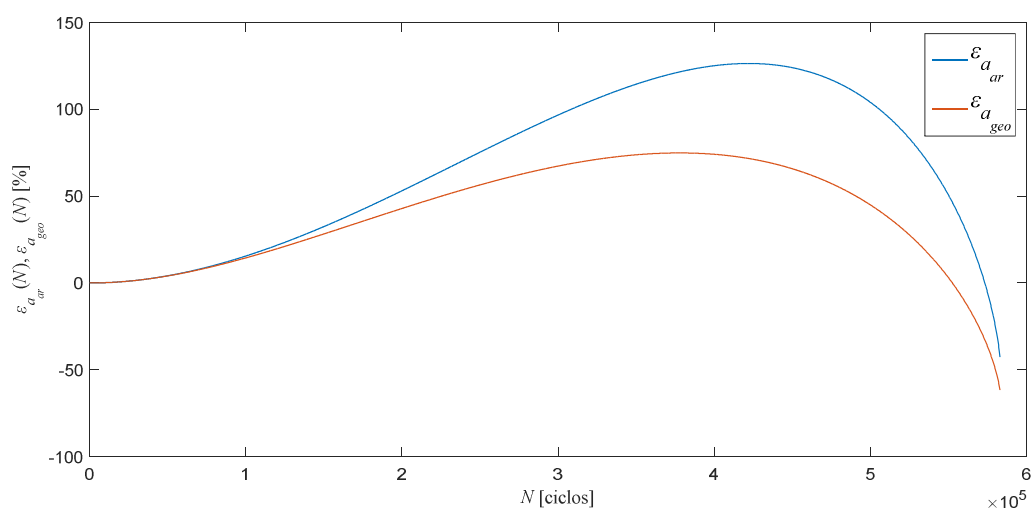


Fonte: O autor (2019).

Observa-se que as funções “ a_{ar} ” e “ a_{geo} ” estão próximas à função “ a_{RK4} ”, todavia, ao final do número de ciclos, ocorre um maior distanciamento entre as médias e o RK4. Isso ocorre pois, como o carregamento aplicado nesse exemplo é constante, não há interação das funções cota, superior e inferior, com o comprimento da trinca, o que não desabona o desempenho do método FCB em relação à solução numérica.

A figura 45 apresenta os gráficos das funções erro relativo em médias, aritmética (ε_{aar}) e geométrica (ε_{ageo}), do comprimento da trinca, eq. (32).

Figura 45 – Gráfico das funções erros relativos $\varepsilon_{aar}(N)$, $\varepsilon_{ageo}(N) \times N$ para o ferro fundido nodular



Fonte: O autor (2019).

São apresentados, na tabela 6, os valores numéricos, máximos e mínimos, da função erro relativo das médias aritmética ($\varepsilon_{a,ar}$) e geométrica ($\varepsilon_{a,geo}$); o tempo computacional do método RK4 (t_{RK4}); o tempo computacional do método FCB ($t_{CS,CI}$) e a razão entre os tempos computacionais (μ_i).

As funções erro relativo das soluções numéricas aproximadas tiveram valores numéricos entre -61,62% a 126,3%, o que pode ser observado na tabela 6. Outro aspecto importante nessa mesma tabela é a razão computacional entre a solução pelo método do RK4 e pelo método FCB. À vista disso, a razão entre o tempo computacional é de 69.981% mais eficiente computacionalmente.

Tabela 6 – Medidas de desempenho do método FCB para o modelo FNK a carregamento constante

Material	Erro Médias [%]				Tempos Computacionais		
	$\varepsilon_{a,ar,mín}$	$\varepsilon_{a,ar,máx}$	$\varepsilon_{a,geo,mín}$	$\varepsilon_{a,geo,máx}$	t_{RK4} (s)	$t_{CS,CI}$ (s)	μ_i [%]
Ferro fundido	-42,6	126,3	-61,62	74,82	6,918	0,01	69.981
Nodular							

Fonte: O autor (2019).

No experimento realizado por Dirik e Yalçinkaya (2016) o carregamento aplicado foi variável. A tabela 7 apresenta os dados do experimento da seguinte forma: tensão máxima ($\sigma_{máx}$); tensão mínima ($\sigma_{mín}$); tensão de *overload* (σ_{OL}); tensão de *underload* (σ_{UL}); o número de ciclos com a aplicação das tensões, máxima e mínima, (m) e o número de ciclos com aplicação das tensões, de *overload* e *underload*, (n).

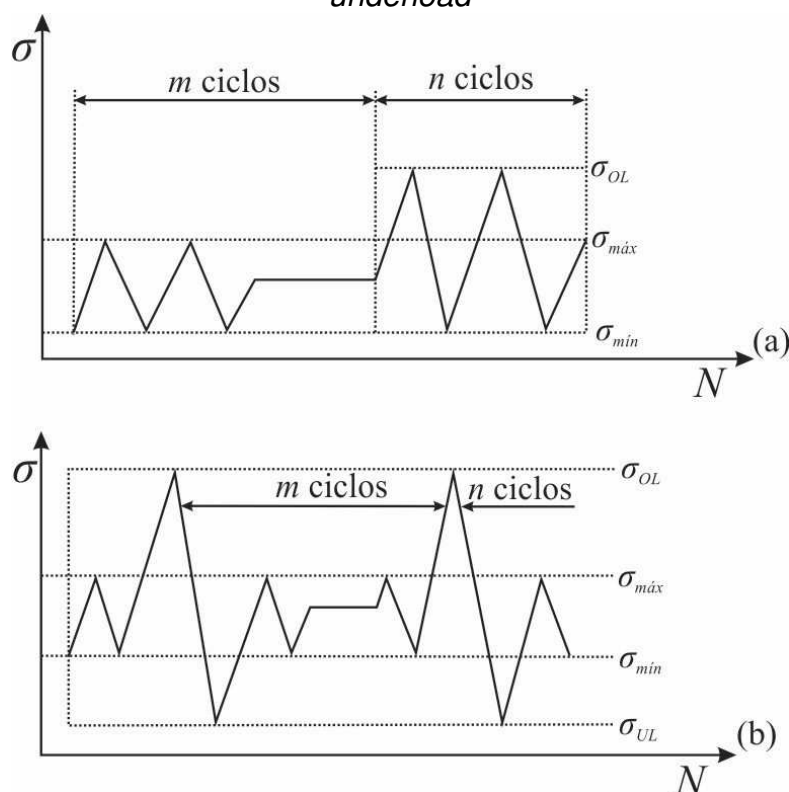
Tabela 7 – Carregamentos e número de ciclos aplicados a liga de alumínio 7075-T6

Material	Caso	$\sigma_{máx}$ (MPa)	$\sigma_{mín}$ (MPa)	σ_{OL} (MPa)	σ_{UL} (MPa)	m	n
7075-T6	1	68,95	3,45	76,54	-	29	1
	2	68,95	3,45	103,43	-	29	1
	3	68,95	3,45	103,43	-	50	1
	4	68,95	3,45	103,43	-	300	1
	5	103,43	51,72	155,14	31,03	50	1
	6	103,43	51,72	155,14	5,15	50	1

Fonte: O autor (2019).

Pode-se observar na figura 46 uma representação esquemática dos carregamentos aplicados e do número de ciclos.

Figura 46 – Representação esquemática de um bloco do espectro do carregamento utilizado na análise. (a) espectro com *overload*, (b) espectro com *overload* e *underload*

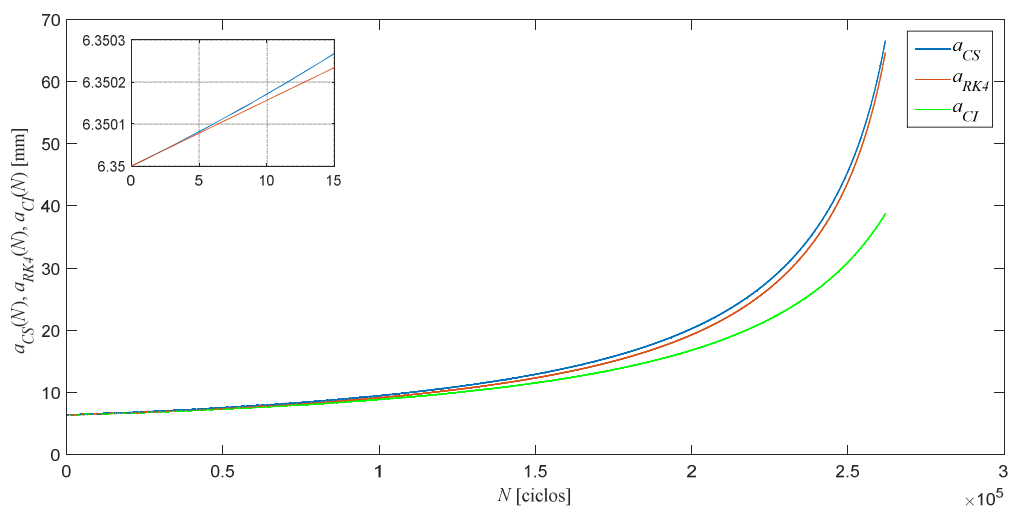


Fonte: Adaptado de Dirik e Yalçinkaya (2016).

Nesse caso, o número de ciclos é dividido em blocos, ou seja, cada bloco é obtido pela soma dos valores numéricos de “m” e de “n” ciclos, constantes na tabela 7. Durante o número “m” de ciclos, são aplicados somente as tensões $\sigma_{m\acute{a}x}$ e $\sigma_{m\acute{i}n}$. Entretanto, durante o número “n” de ciclos têm-se duas situações distintas de carregamento: (a) aplicação da σ_{OL} no lugar da $\sigma_{m\acute{a}x}$; (b) aplicação da σ_{OL} e da σ_{UL} . A tensão de *overload* representa a tensão de pico, ou seja, o maior valor numérico de tensão aplicada no ciclo. Já a tensão de *underload* representa o menor valor numérico de tensão aplicada no ciclo.

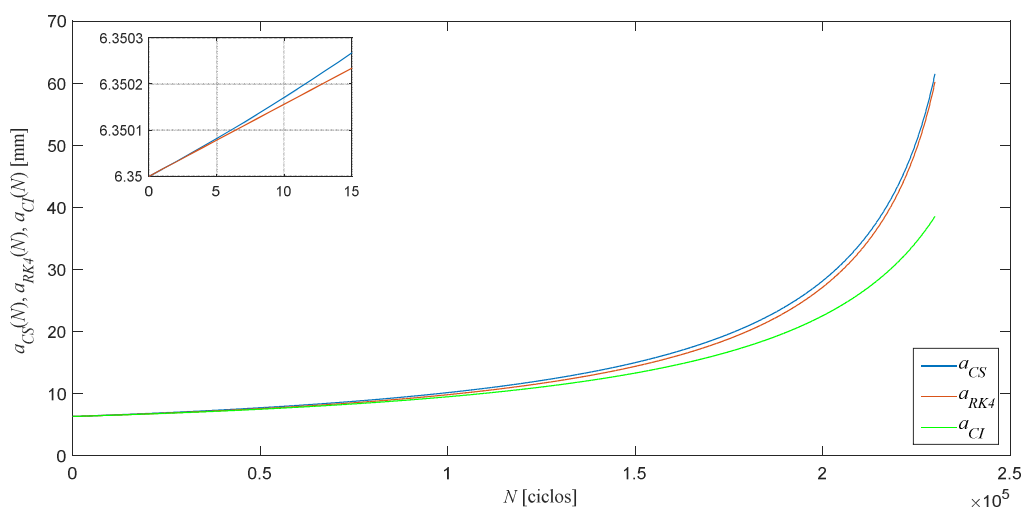
Apresentam-se, nas figuras 47 – 52, os gráficos das funções comprimento da trinca, e as suas respectivas cotas, superior (a_{CS}) e inferior (a_{CI}). De forma geral, as funções a_{CS} e a_{CI} mantiveram-se como cotas superior e inferior, respectivamente, a função “ a_{RK4} ”.

Figura 47 – Gráfico de $a_{CS}(N)$, $a_{RK4}(N)$, $a_{CI}(N)$ x N para o caso 1



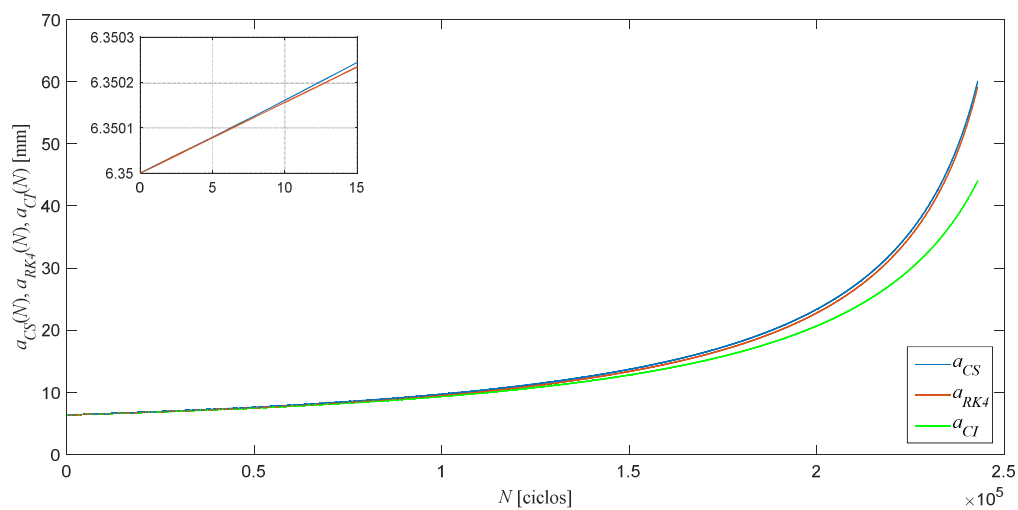
Fonte: O autor (2019).

Figura 48 – Gráfico de $a_{CS}(N)$, $a_{RK4}(N)$, $a_{CI}(N)$ x N para o caso 2

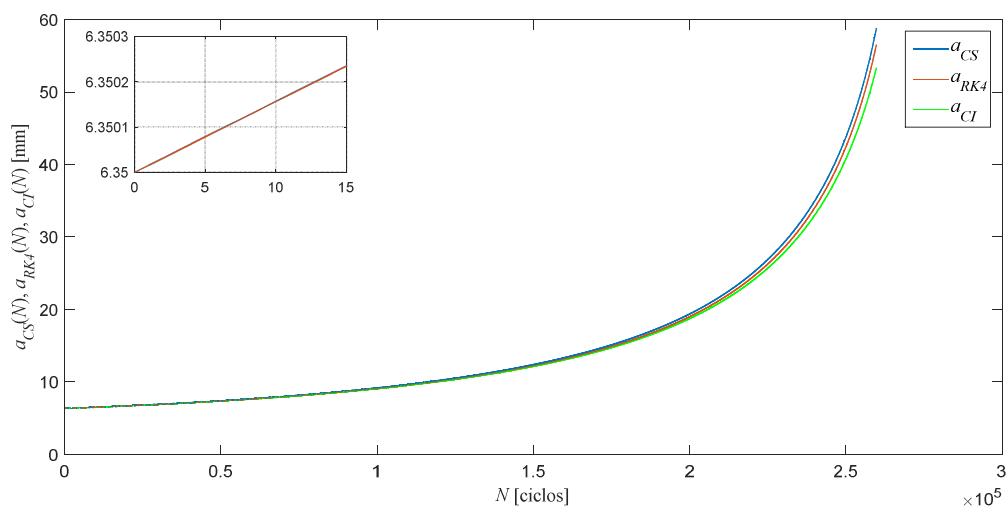


Fonte: O autor (2019).

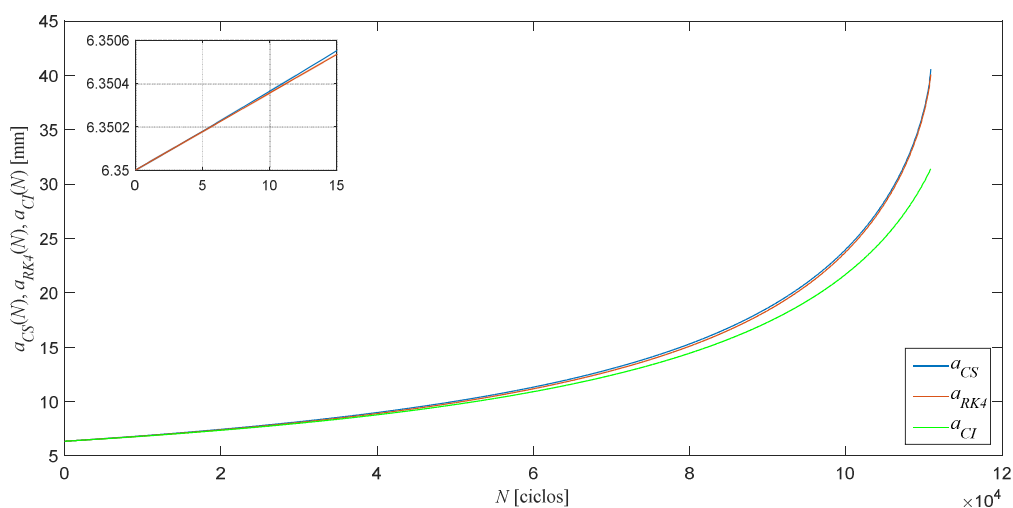
Figura 49 – Gráfico de $a_{CS}(N)$, $a_{RK4}(N)$, $a_{CI}(N)$ x N para o caso 3



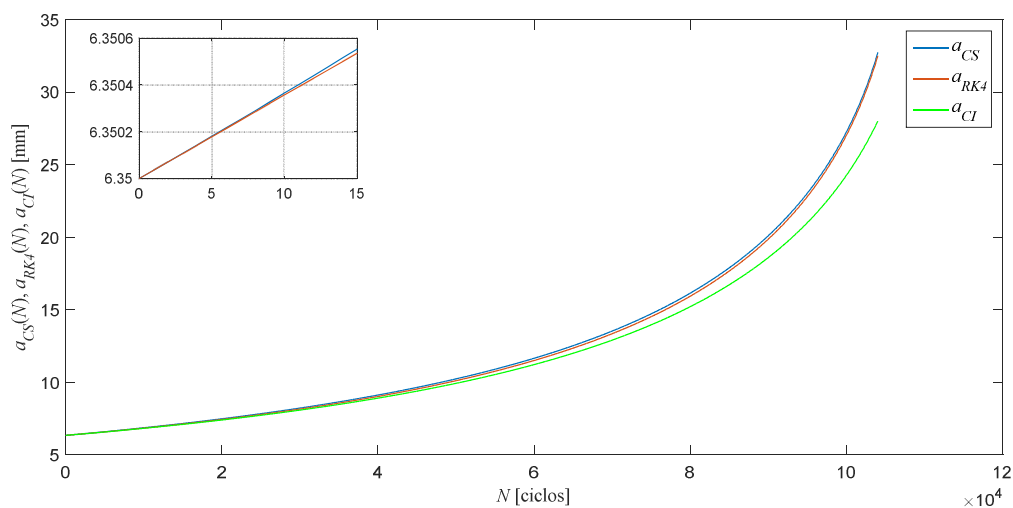
Fonte: O autor (2019).

Figura 50 – Gráfico de $a_{CS}(N)$, $a_{RK4}(N)$, $a_{CI}(N)$ x N para o caso 4

Fonte: O autor (2019).

Figura 51 – Gráfico de $a_{CS}(N)$, $a_{RK4}(N)$, $a_{CI}(N)$ x N para o caso 5

Fonte: O autor (2019).

Figura 52 – Gráfico de $a_{CS}(N)$, $a_{RK4}(N)$, $a_{CI}(N)$ x N para o caso 6

Fonte: O autor (2019).

De uma forma geral, observando-se as figuras 47 a 52, as funções a_{CS} e a_{CI} mantiveram-se como cotas superior e inferior da função a_{RK4} , respectivamente. É possível observar, também, que em todos os casos, a solução obtida pela função cota superior está próxima à solução obtida pelo método do RK4. A tabela 8, apresenta os valores do comprimento da trinca final obtido pela função da cota superior (a_{CS}); número de blocos aplicados ao método FCB (N_B); o número de ciclos obtidos pelo método FCB (N_{FCB}); o número de ciclos do experimento (N_f) e a razão entre o número de ciclos do FCB pelo número de ciclos do experimento (μ_N).

Tabela 8 – Valores numéricos do a_{CS} , N_B , N_{FCB} , N_f e μ_N do modelo FNK a carregamento variável

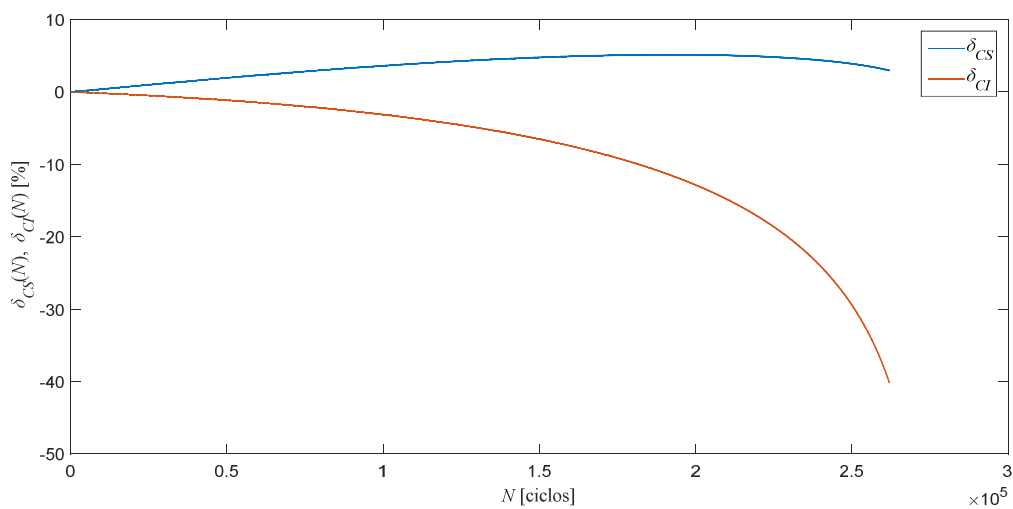
Caso	a_{CS} (mm)	N_B	N_{FCB}	N_f	μ_N
1	66,56	8.733	261.989	105.000	2,49
2	61,51	7.666	229.979	180.000	1,27
3	60,05	4.764	242.963	200.000	1,21
4	58,76	863	259.762	360.000	0,72
5	40,59	2.174	110.873	110.000	1
6	32,74	2.039	103.988	90.000	1,15

Fonte: O autor (2019).

Observa-se na tabela 8, que para os casos de 1 – 6, a trinca inicial que era de 6,35 mm, chegou a aumentar de 5 a 10 vezes em relação ao seu comprimento inicial. Outro ponto que pode ser observado é a predição da vida em fadiga pela utilização do método FCB. No caso 4, o método foi conservativo em relação ao experimento prático. Para a maioria dos casos, as predições foram adequadas pois, para estes, a razão entre o FCB e a vida do experimento foi de $0,72 \leq \mu_N \leq 2,49$. Os valores do coeficiente $\beta \in \{10,4; 10,4; 7,8; 3; 5,9; 5,9\}$ foram obtidos por inspeção para que a função cota superior não violasse a solução do método RK4, conforme eq. (76).

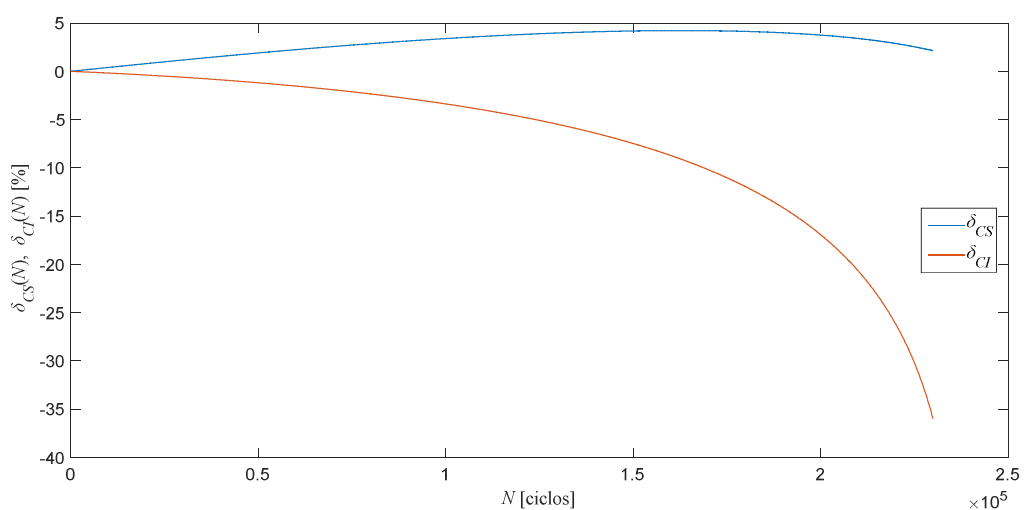
Apresentam-se, nas figuras 53 – 58, os gráficos dos desvios relativos da função cota, superior e inferior, $(\delta(N) \times N)$.

Figura 53 – Gráfico dos desvios relativos $\delta_{CS}(N)$, $\delta_{CI}(N)$ x N para o caso 1



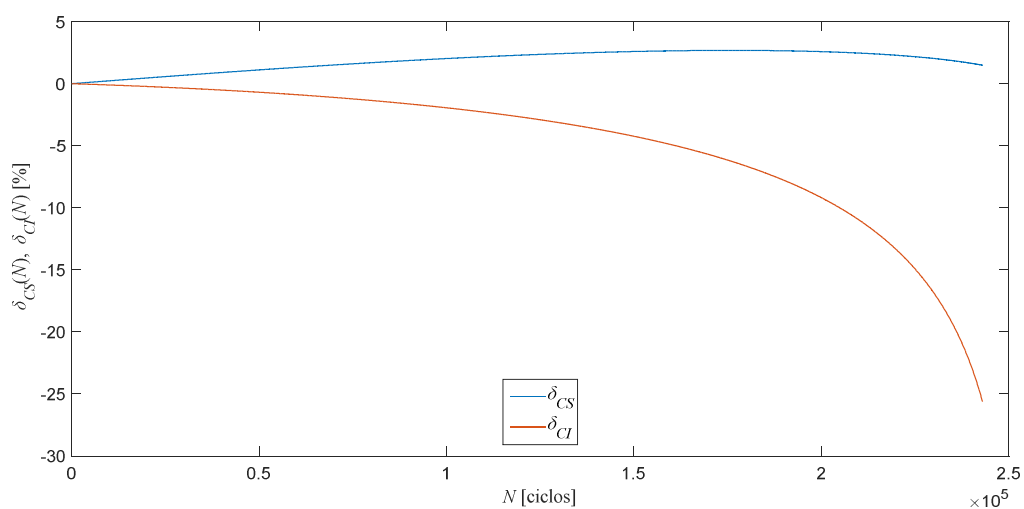
Fonte: O autor (2019).

Figura 54 – Gráfico dos desvios relativos $\delta_{CS}(N)$, $\delta_{CI}(N)$ x N para o caso 2



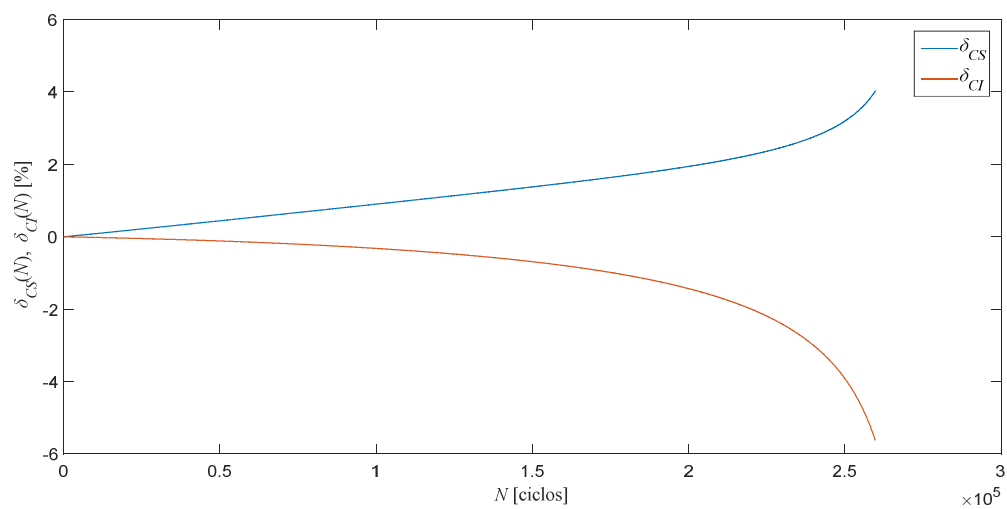
Fonte: O autor (2019).

Figura 55 – Gráfico dos desvios relativos $\delta_{CS}(N)$, $\delta_{CI}(N)$ x N para o caso 3



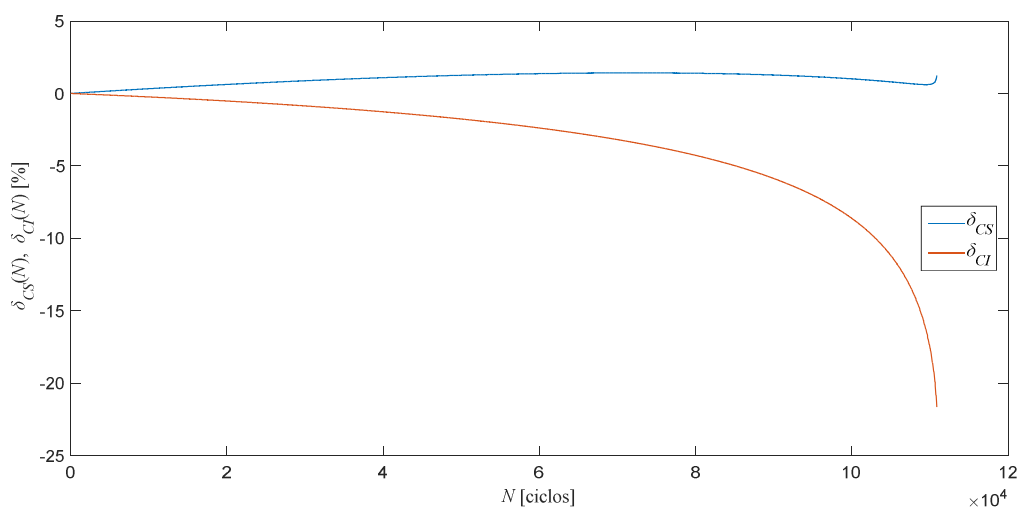
Fonte: O autor (2019).

Figura 56 – Gráfico dos desvios relativos $\delta_{CS}(N)$, $\delta_{CI}(N) \times N$ para o caso 4



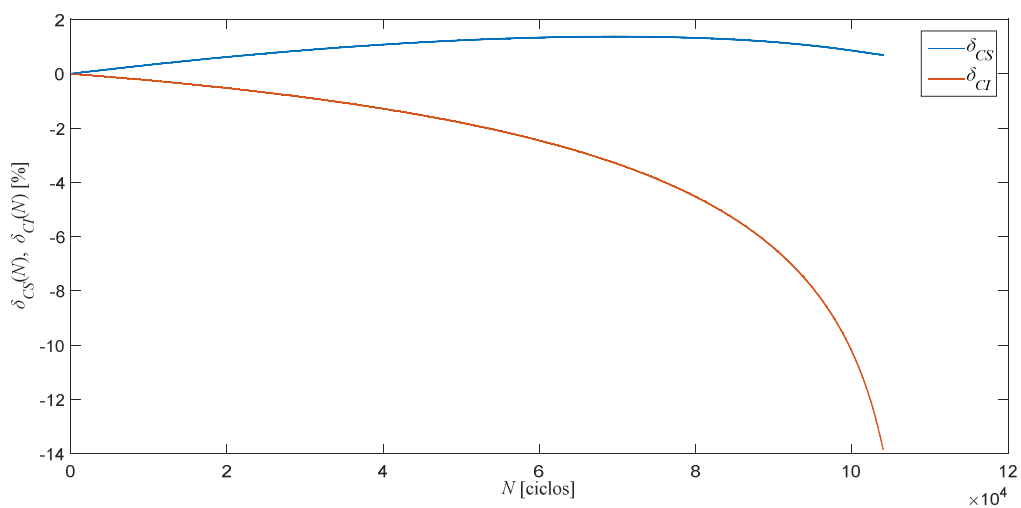
Fonte: O autor (2019).

Figura 57 – Gráfico dos desvios relativos $\delta_{CS}(N)$, $\delta_{CI}(N) \times N$ para o caso 5



Fonte: O autor (2019).

Figura 58 – Gráfico dos desvios relativos $\delta_{CS}(N)$, $\delta_{CI}(N) \times N$ para o caso 6

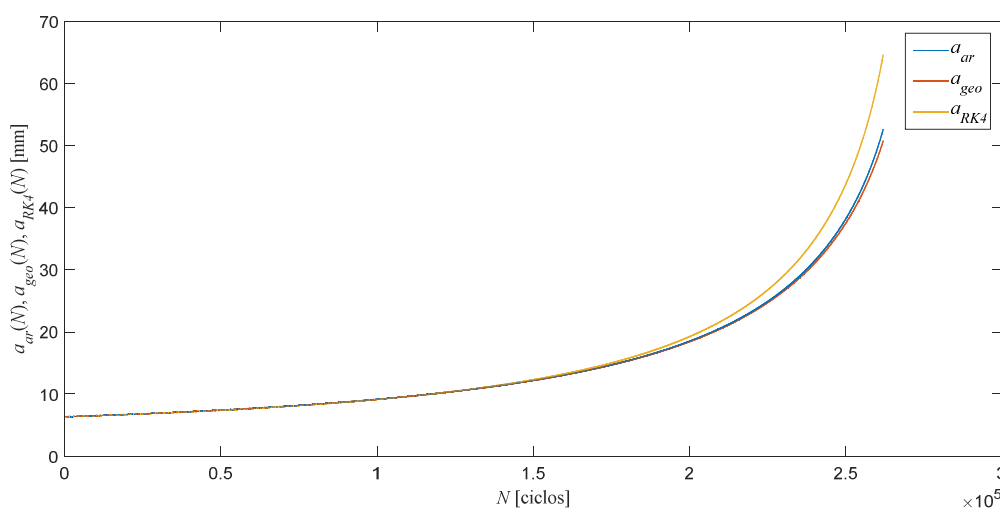


Fonte: O autor (2019).

A função desvio relativo superior variou seus valores numéricos de 1,37% a 5,17%. Por outro lado, a função desvio relativo inferior variou seus valores numéricos de -5,62% a -40,12%. Mas em linhas gerias, conclui-se que, para o exemplo aplicado, a cota superior apresenta um desempenho satisfatório tendo o desvio relativo o valor numérico superior máximo de 5,17%.

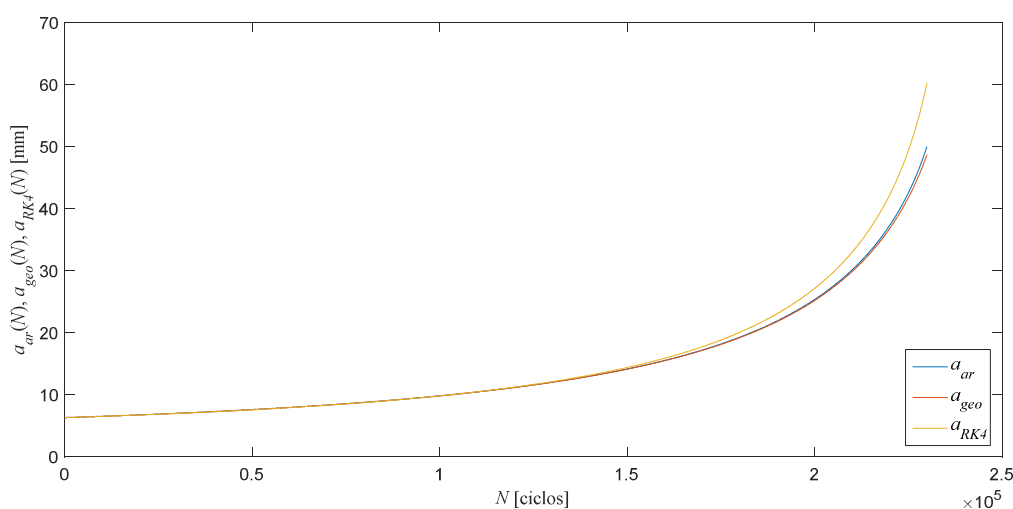
As figuras 59 – 64 apresentam os gráficos das aproximações numéricas para a função comprimento da trinca via funções médias aritmética (a_{ar}) e geométrica (a_{geo}), eqs. (29) e (30).

Figura 59 – Gráfico de $a_{ar}(N)$, $a_{geo}(N)$, $a_{RK4}(N) \times N$ para o caso 1

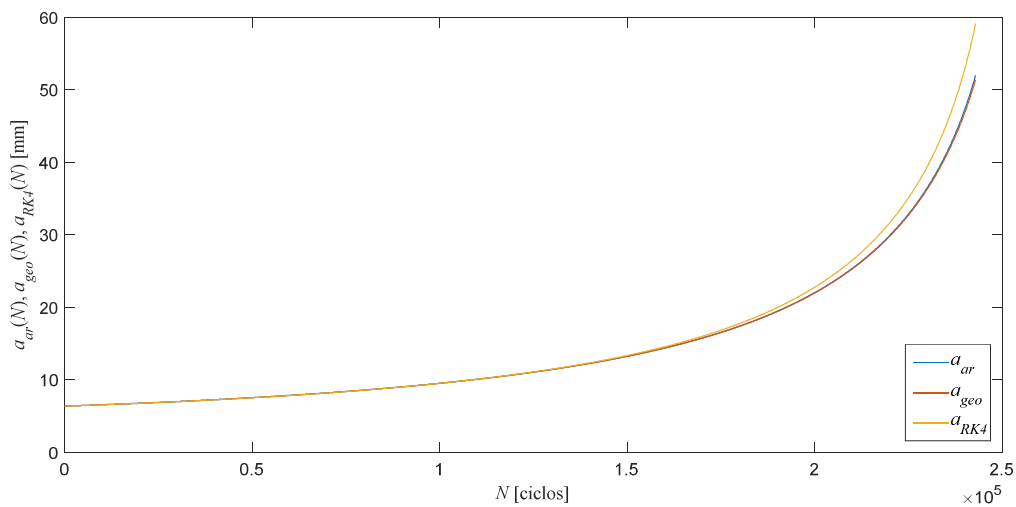


Fonte: O autor (2019).

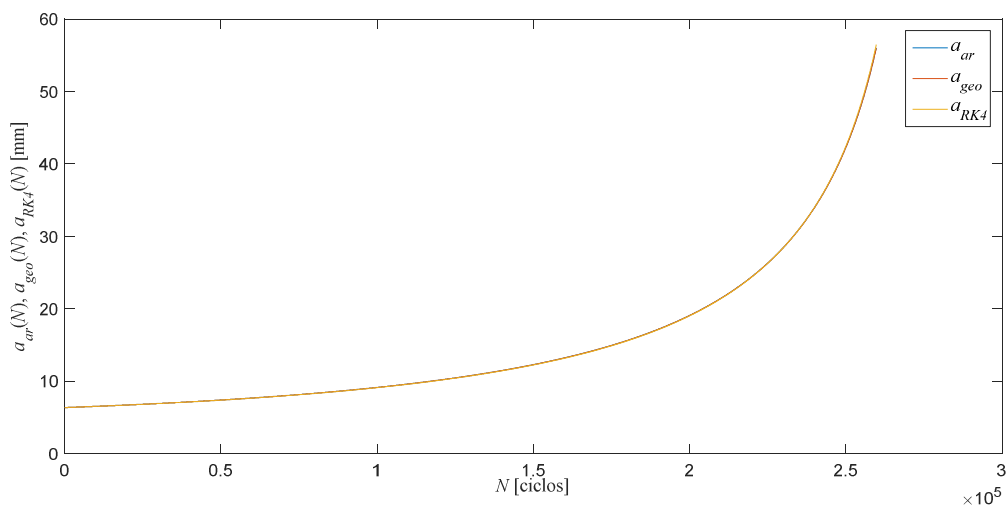
Figura 60 – Gráfico de $a_{ar}(N)$, $a_{geo}(N)$, $a_{RK4}(N) \times N$ para o caso 2



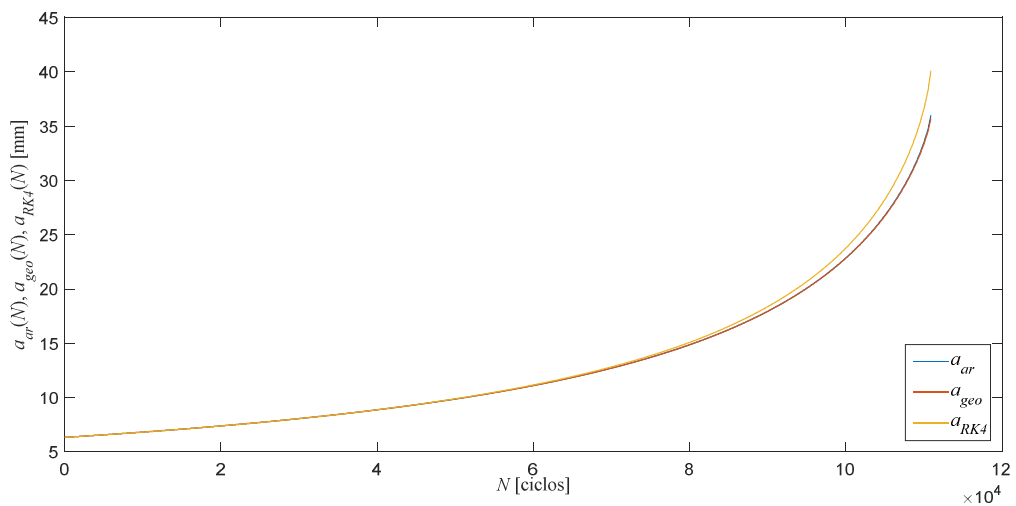
Fonte: O autor (2019).

Figura 61 – Gráfico de $a_{ar}(N)$, $a_{geo}(N)$, $a_{RK4}(N)$ x N para o caso 3

Fonte: O autor (2019).

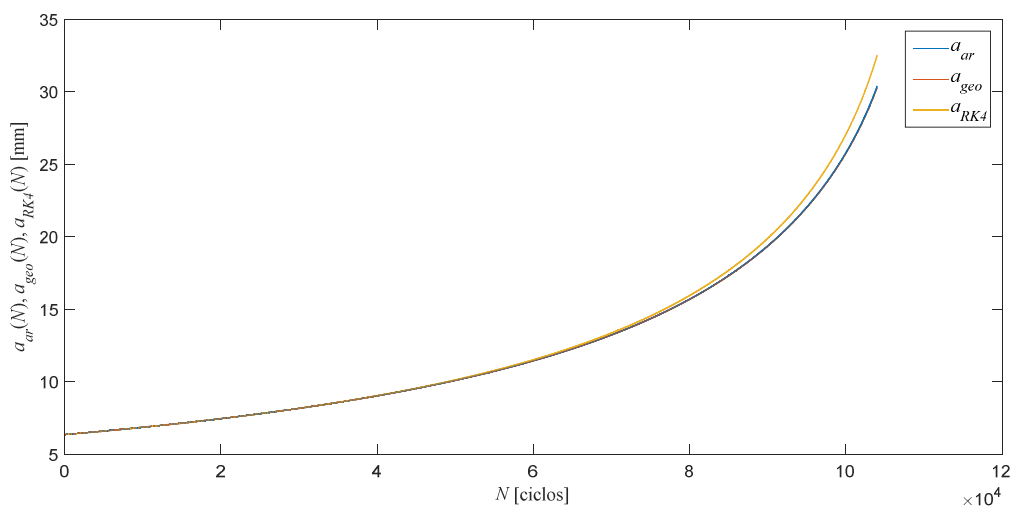
Figura 62 – Gráfico de $a_{ar}(N)$, $a_{geo}(N)$, $a_{RK4}(N)$ x N para o caso 4

Fonte: O autor (2019).

Figura 63 – Gráfico de $a_{ar}(N)$, $a_{geo}(N)$, $a_{RK4}(N)$ x N para o caso 5

Fonte: O autor (2019).

Figura 64 – Gráfico de $a_{ar}(N)$, $a_{geo}(N)$, $a_{RK4}(N)$ x N para o caso 6

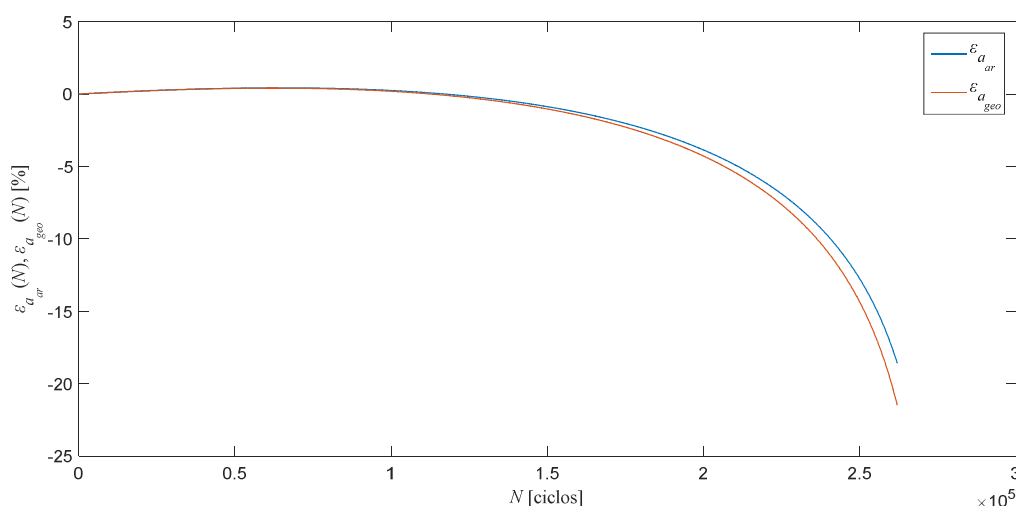


Fonte: O autor (2019).

Observa-se pelas figuras 59 a 64, que as soluções obtidas através das médias, aritmética e geométrica das funções cota, superior e inferior, para os casos de 1 a 6, estão próximas à solução obtida pelo método RK4, desta maneira, as funções cotas são estimadores satisfatórios para o crescimento da trinca.

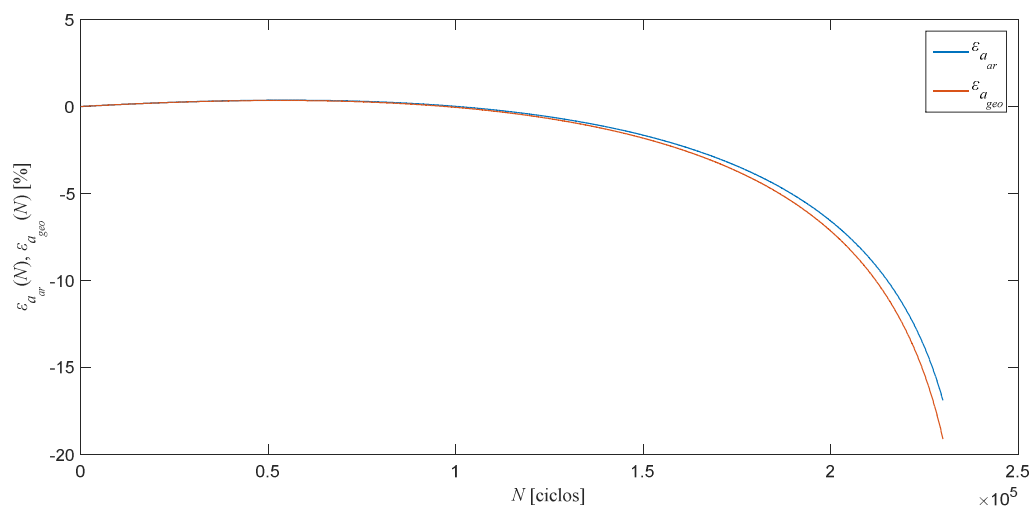
As figuras 65 - 70 apresentam os gráficos das funções erro relativo em médias aritmética (ε_{aar}) e geométrica (ε_{ageo}), eq. (32).

Figura 65 – Gráfico das funções erros relativos $\varepsilon_{aar}(N)$, $\varepsilon_{ageo}(N)$ x N para o caso 1



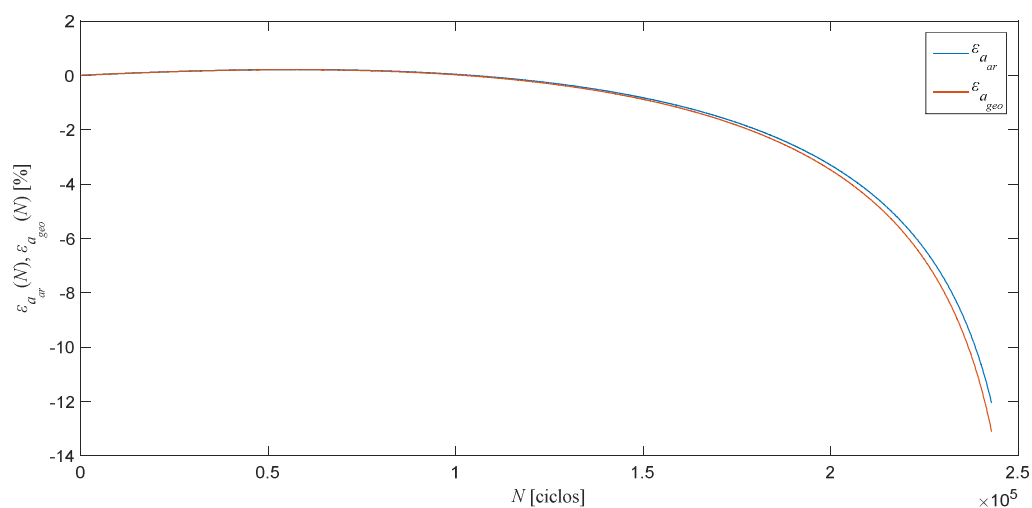
Fonte: O autor (2019).

Figura 66 – Gráfico das funções erros relativos $\varepsilon_{aar}(N)$, $\varepsilon_{ageo}(N)$ x N para o caso 2



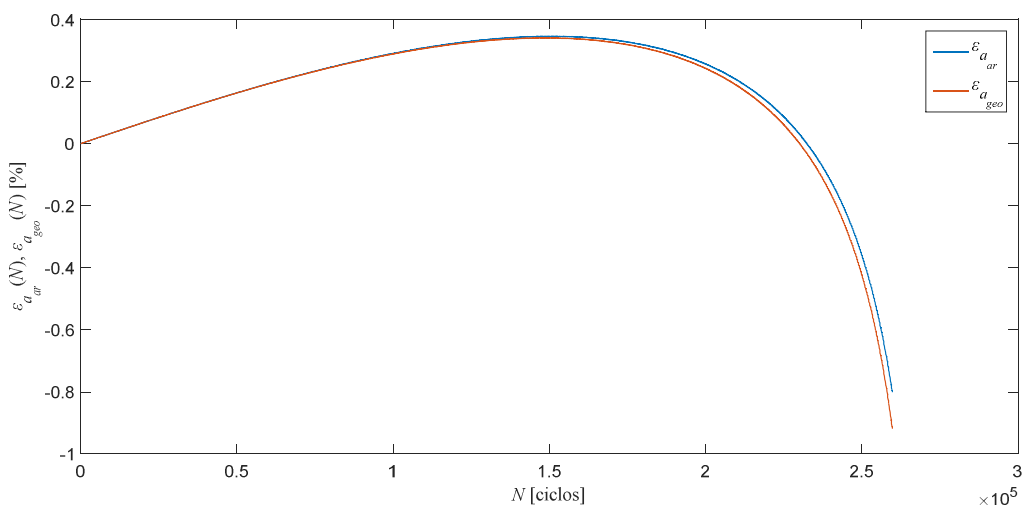
Fonte: O autor (2019).

Figura 67 – Gráfico das funções erros relativos $\varepsilon_{aar}(N)$, $\varepsilon_{ageo}(N)$ x N para o caso 3



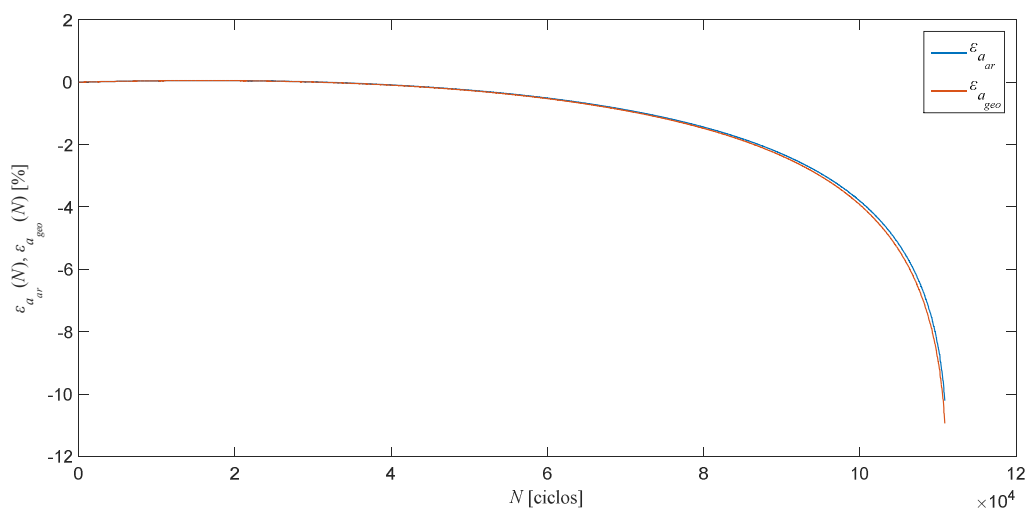
Fonte: O autor (2019).

Figura 68 – Gráfico das funções erros relativos $\varepsilon_{aar}(N)$, $\varepsilon_{ageo}(N)$ x N para o caso 4



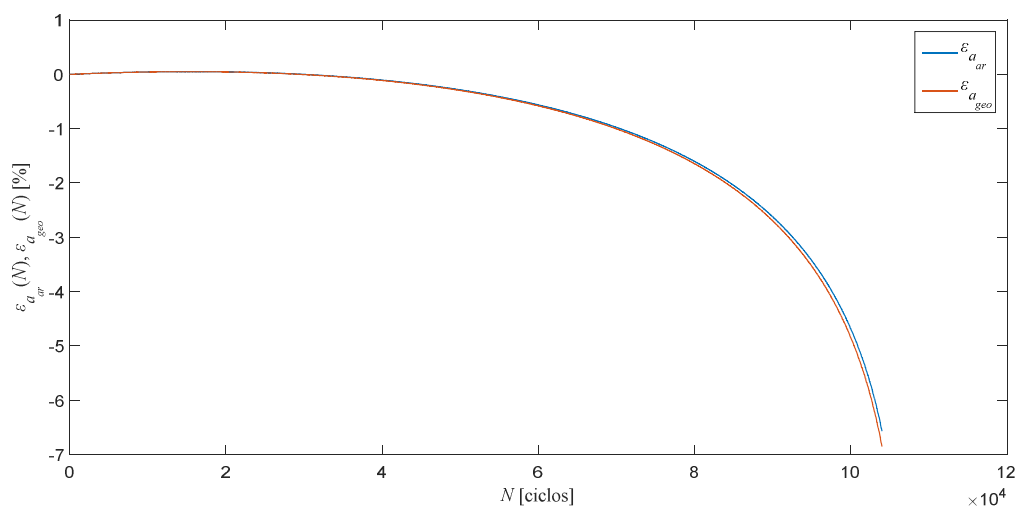
Fonte: O autor (2019).

Figura 69 – Gráfico das funções erros relativos $\varepsilon_{aar}(N)$, $\varepsilon_{ageo}(N)$ x N para o caso 5



Fonte: O autor (2019).

Figura 70 – Gráfico das funções erros relativos $\varepsilon_{aar}(N)$, $\varepsilon_{ageo}(N)$ x N para o caso 6



Fonte: O autor (2019).

Apresentam-se, na tabela 9, os valores numéricos, máximos e mínimos, da função erro relativo das médias aritmética ($\varepsilon_{a,ar}$) e geométrica ($\varepsilon_{a,geo}$); o tempo computacional do método RK4 (t_{RK4}); o tempo computacional do método FCB ($t_{CS,CI}$) e a razão entre os tempos computacionais (μ_t). Observa-se nas figuras 65 – 70 que a função erro relativo geométrico possui valores maiores quando comparados ao erro relativo da média aritmético, conforme tabela 9. No entanto, os valores obtidos demonstram que as funções cotas envelopam de forma acurada a solução numérica obtida pelo RK4.

Outro aspecto de grande relevância nessa tabela é a razão computacional. À vista disso, a razão entre os tempos de computação de 318,18% a 1.682,4% mais

eficientes computacionalmente, quando comparadas com a solução do método do RK4. Este parâmetro (μ_t) mostra que o método FCB proposta possui um desempenho satisfatório.

Tabela 9 – Medidas de desempenho do método FCB do modelo FNK a carregamento variável

Casos	Erro Médias [%]				Tempos Computacionais		
	$\varepsilon_{a ar, \min}$	$\varepsilon_{a ar, \max}$	$\varepsilon_{a geo, \min}$	$\varepsilon_{a geo, \max}$	t_{RK4} (s)	$t_{CS, CI}$ (s)	μ_t [%]
1	-18,47	0,43	-21,47	0,41	3,55	0,74	379,73
2	-16,91	0,36	-19,12	0,36	0,96	0,22	318,18
3	-12,06	0,21	-13,11	0,21	2,11	0,33	539,39
4	-0,81	0,35	-0,92	0,34	3,03	0,17	1.682,4
5	-10,21	0,055	-10,93	0,054	0,91	0,11	727,27
6	-6,57	0,053	-6,85	0,052	1,39	0,22	531,82

Fonte: O autor (2019).

7.3 SÍNTESE DOS RESULTADOS

Os valores utilizados para o coeficiente “ β ”, eq. (76), para definição da função cota superior, $\beta \in \{1,5; 2,66; 2,5; 2,27; 1,31; 2,14; 10,4; 10,4; 7,8; 3; 5,9; 5,9\}$ e, os mesmos, foram obtidos por inspeção para que a função cota superior não violasse a solução do método RK4. Na tabela 10 são apresentados os: comprimento da trinca inicial (a_0); o comprimento da trinca final (a_f); o número de ciclos do método FCB (N_{FCB}); o número de ciclos do experimento (N_f) e a razão entre o número de ciclos do método FCB e do experimento (μ_N). É possível observar o crescimento do comprimento inicial em relação ao comprimento final da trinca. A variação do comprimento final da trinca foi de 300% a 1.400% maior quando comparado ao comprimento inicial da trinca. Nos casos M-88, M-91 e 4, o método FCB foi conservativo em relação ao experimento, como pode ser observado na tabela 10. Para a maioria dos casos, aplicados ao exemplo numérico, as predições foram adequadas pois, a razão entre o número de ciclos do método FCB em relação ao do experimento foi de $0,72 \leq \mu_N \leq 2,49$. Somente para o caso M-93 houve uma superestimação da predição.

Tabela 10 – Valores numéricos do a_0 , a_f , N_{FCB} , N_f e μ_N

Material	Experimentos	a_0 (mm)	a_f (mm)	N_{FCB}	N_f	μ_N
2219-T851	M-81	4,064	13	142.043	115.700	1,23
	M-84	4,013	55,9	319.827	268.908	1,19
	M-88	3,81	45,8	293.776	380.443	0,77
	M-91	3,81	36,1	64.367	65.627	0,98
	M-93	6,35	13,6	5.957.648	1.359.000	4,38
Ferro Fundido Nodular		1	14	582.800	400.000	1,46
7075 – T6	1	6,35	66,58	261.989	105.000	2,49
	2		61,51	229.979	180.000	1,27
	3		60,05	242.963	200.000	1,21
	4		58,76	259.762	360.000	0,72
	5		40,59	110.873	110.000	1
	6		32,74	103.988	90.000	1,15

Fonte: O autor (2019).

Apresentam-se, na tabela 11, os valores numéricos da função desvio relativo da cota superior (δ_{cs}) e inferior (δ_{ci}). Pode-se verificar na tabela 11, que os valores numéricos do desvio relativo da cota superior são menores no modelo de FNK a carregamento variável, quando comparados aos modelos de Hudson e FNK, a carregamento constante. Isso se deve ao procedimento utilizado pelo modelo de FNK, a carregamento variável pois, ao término de cada bloco, o valor do comprimento da trinca é atualizado. Para esse mesmo modelo, os valores numéricos do desvio relativo da cota superior foram próximos ou abaixo de 5%, o que representa que o método FCB é um estimador adequado para a evolução do comprimento da trinca.

Tabela 11 – Função desvio relativo

Material	Experimentos	(continua)	
		δ_{ci} [%]	δ_{cs} [%]
2219-T851	M-81	-25,52	10,81
	M-84	-75	125
	M-88	-71	104
	M-91	-66,48	82,65
	M-93	-12,23	3,58

Tabela 11 – Função desvio relativo

Material	Experimentos	(conclusão)	
		δ_{CI} [%]	δ_{CS} [%]
Ferro fundido nodular		-85,28	275,25
	1	-40,12	5,17
7075-T6	2	-35,97	4,22
	3	-25,62	2,68
	4	-5,62	4,02
	5	-21,65	1,42
	6	-13,84	1,37

Fonte: O autor (2019).

Apresentam-se, na tabela 12, os valores numéricos, máximos e mínimos, da função erro relativo das médias aritmética ($\epsilon_{a,ar}$) e geométrica ($\epsilon_{a,geo}$); o tempo computacional do método RK4 (t_{RK4}); o tempo computacional do método FCB ($t_{CS,CI}$) e à razão entre os tempos computacionais (μ_t). Pode-se verificar na tabela 12, pela razão dos tempos computacionais, que o tempo de solução para as cotas superior e inferior é muito menor, quando comparado com o tempo da solução numérica aproximada pelo método do RK4, o que caracteriza um método eficiente. Observa-se que a razão computacional para os casos de 1 – 6 é menor quando comparada as demais. Isso se deve ao procedimento utilizado pelo modelo FNK, a carregamento variável, ser mais complexo ao utilizado pelos modelos de Hudson e FNK, a carregamento constante. Além disso, alguns valores numéricos da função erro relativo são significativos, pois, se obteve valor máximo de 0,052% e valor mínimo de -6,85% para o caso VI, o que demonstra como a solução obtida pela aplicação das funções cotas superior e inferior envelopa de modo satisfatório a solução via RK4.

Tabela 12 – Medidas de desempenho do método FCB

(continua)

Material	Casos	Erro Médias [%]				Tempos Computacionais		
		$\epsilon_{aar,min}$	$\epsilon_{a,ar,max}$	$\epsilon_{a,geo,min}$	$\epsilon_{a,geo,max}$	t_{RK4} (s)	$t_{CS,CI}$ (s)	μ_t [%]
2219-T851	M-81	-12,20	2,88	-13,22	2,72	1,0412	0,0065	15.918,46
	M-84	-36,33	52,44	-49,50	36,77	1,7646	0,0083	21.160
	M-88	-34,46	42,84	-46,10	31,11	1,6347	0,0158	10.246

Tabela 12 – Medidas de desempenho do método FCB

(conclusão)

Material	Casos	Erro Médias [%]				Tempos Computacionais		
		$\epsilon_{aar, \min}$	$\epsilon_{aar, \max}$	$\epsilon_{a, geo, \min}$	$\epsilon_{a, geo, \max}$	$t_{RK4} (s)$	$t_{CS, CI} (s)$	μ_t [%]
2219-T851	M-91	-31,43	32,73	-41,07	24,82	0,4553	0,0026	17,412
	M-93	-6,02	0,73	-6,23	0,71	3,9391	0,2693	1.362,7
Ferro fundido nodular		-42,6	126,3	-61,62	74,82	6,918	0,01	69,981
	1	-18,47	0,43	-21,47	0,41	3,55	0,74	379,73
7075-T6	2	-16,91	0,36	-19,12	0,36	0,96	0,22	318,18
	3	-12,06	0,21	-13,11	0,21	2,11	0,33	539,39
	4	-0,81	0,35	-0,92	0,34	3,03	0,17	1.682,4
	5	-10,21	0,055	-10,93	0,054	0,91	0,11	727,27
	6	-6,57	0,053	-6,85	0,052	1,39	0,22	531,82

Fonte: O autor (2019).

8 CONCLUSÕES

Antes de destacar a aplicação do método FCB aos modelos CATV faz-se necessário ressaltar que este método só havia sido aplicado, anteriormente, aos modelos do tipo CATC. As diferenças existentes entre os modelos tipo CATC e CATV são, principalmente, referentes ao tipo de carregamento aplicado e à interação desse carregamento durante os ciclos. Nos modelos do tipo CATC, o histórico do carregamento não é considerado; entretanto, nos modelos do tipo CATV, a cada bloco executado, leva-se em consideração o histórico do carregamento do bloco anterior. Assim, oportuno mencionar que foi imprescindível o estudo sobre a existência e unicidade das soluções para carregamentos aleatórios aplicados em cada bloco. Outro ponto de relevância é que, nem todos os parâmetros, seja o carregamento ou as constantes do material, aplicados aos modelos do tipo CATV, são fornecidos de forma clara nos periódicos especializados.

Foi apresentado neste trabalho a adequação e extensão do método FCB aos modelos de propagação de trinca do tipo CATV. O método FCB tem como objetivo o estabelecimento de funções que definam cotas inferior e superior para a função comprimento da trinca. As cotas são obtidas a partir de aproximações adequadas da representação da função comprimento da trinca, via série de Taylor retendo os termos de segunda ordem com resíduo de Lagrange. Os resultados obtidos pelas funções cota foram, posteriormente, comparados com os valores dos experimentos contidos nos trabalhos de Chang (1981), de Gróza e Váradi (2017) e de Dirik e Yalçinkaya (2016).

Aplicou-se o método FCB nos modelos de Hudson e de FNK. No caso do modelo de FNK, foi aplicado para carregamento constante e variável. As cotas para esses dois modelos foram avaliadas em um exemplo numérico, com duas equações distintas para o fator de correção do fator intensidade de tensão e; os valores obtidos foram comparados aos encontrados nos trabalhos acima citados.

O comportamento do método FCB no estabelecimento das cotas superior e inferior foi verificado através de gráficos da função comprimento da trinca para os modelos testados. Estas funções conseguiram representar satisfatoriamente o comportamento da função comprimento da trinca dos modelos de Hudson e FNK.

Foi possível observar, nos exemplos escolhidos, que ocorreu um crescimento considerável do comprimento final da trinca, quando comparado ao comprimento inicial da trinca. A variação do comprimento final da trinca foi de 300% a 1.400% maior quando comparado ao comprimento inicial da trinca. Com o intuito de comparar os resultados obtidos do método FCB (N_{FCB}) e o experimento (N_f), aplicou-se uma razão dos ciclos (μ_N). Para a maioria dos casos, aplicados ao exemplo numérico, as previsões foram adequadas pois, a razão entre o número de ciclos do método FCB em relação ao do experimento foi de $0,72 \leq \mu_N \leq 2,49$.

As medidas de desempenho aplicadas ao método FCB foram: o desvio relativo, os erros relativos das médias das funções cotas e a razão dos tempos computacionais (μ_i). Através dessas medidas de desempenho observou-se a eficiência do método FCB.

O desvio relativo máximo obtido para o modelo de Hudson foi de 125% para a cota superior e de -75% para a cota inferior. No caso do modelo de FNK para carregamento constante, o desvio relativo máximo foi de 273,67% para a cota superior e de -84,92% para a cota inferior. Porém, para o modelo de FNK a carregamento variável, o valor máximo foi de 5,17% para a cota superior e -40,12% para a cota inferior. Entretanto, pode-se afirmar que as funções cotas, superior e inferior, forneceram um “envelopamento” para a lei de evolução da propagação da trinca. E, devido ao procedimento que ocorre no modelo de FNK com carregamento variável, os valores obtidos para o desvio relativo são os menores ao modelo de Hudson.

Obtiveram-se valores de 52,44% e 49,44% para o modelo de Hudson e de 125,55% e 74,53% para o modelo FNK, a carregamento constante, para o erro relativo das médias, aritmética e geométrica. No entanto, os valores obtidos para o modelo de FNK a carregamento variável, foi valor máximo de 0,052% e valor mínimo de -6,85%. Isto mostra que as cotas obtidas pelo método FCB são muito próximas da função comprimento da trinca e, portanto, representam adequadamente o comportamento de evolução da trinca.

A razão computacional dispendida na aplicação do método FCB que, conforme demonstrado na tabela 12, é mais eficiente se comparado ao obtido pelo método numérico de Runge-Kutta. Para o exemplo resolvido, a razão computacional obtida pelo método FCB foi de 21.160 % menor ao obtido pelo RK4, o que comprova a eficiência computacional do método. Vale uma ressalva em relação a razão computacional encontrado no modelo de FNK, a carregamento variável, pois, como o

mesmo trabalha em blocos, era de se esperar a razão entre os tempos computacionais fosse menor, mas, mesmo nesse caso, o método FCB foi mais eficiente computacionalmente.

8.1 TRABALHOS FUTUROS

No desenvolvimento desta proposta de trabalho, foram reconhecidas algumas oportunidades de pesquisa, sendo enumeradas a seguir:

- 1) Aplicação do método FCB a outros modelos de propagação de trincas do tipo CATV, como por exemplo, o modelo de Wheeler, de Willenborg, dentre outros.
- 2) Quantificação da incerteza através da randomização paramétrica dos modelos de propagação de trincas de Hudson e FNK.
- 3) Incremento de um método para a determinação do resíduo de Lagrange.
- 4) Desenvolvimento de uma estratégia para a correção e atualização da função cota inferior, mantendo a eficiência do método FCB.
- 5) Proposição de novas aproximações numéricas para a função comprimento da trinca a partir das cotas obtidas via método FCB.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALIAGA, D.; DAVY, A.; SCHAFF, H. A simple crack closure model for predicting fatigue crack growth under flight simulation loading. **In: Proceedings of the 13th ICAF Symposium**, Pisa, p. 605–630, 1985.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **E1823**: standard terminology relating to fatigue and fracture. West Conshohocken, PA, 2000.

ANDERSON, T. L. **Fracture mechanics: fundamentals and applications**. 3 ed. CRC Press, 2005.

ASTM **E-1049-85**. Standard practices for cycle counting in fatigue analysis; Reapproved 2011

ÁVILA, C. R. S.; SANTOS, Rodrigo Villaca; BECK, A. T. Analytical Bounds for Efficient Crack Growth Computation. **Applied Mathematical Modelling**, v. 40, p. 2312-2321, 2016.

BANG, D. J.; INCE, A.; TANG, L. Q. A modification of UniGrow 2-parameters driving force model for short fatigue crack growth. **Fatigue Fract Eng Mater Struct.**, v. 42, p. 45-60, 2019.

BANNANTINE, J. A.; COMER, J.J.; HANDROCK, J. L. **Fundamentals of Metal Fatigue Analysis**. Prentice Hall: New Jersey, 1989.

BARSON, J. M. Fatigue crack growth under variable amplitude loading in various bridge steels. In *Fatigue Crack Growth under Spectrum Loads*. Philadelphia, ASTM, p. 217-235, 1976

BAUDIN, G.; ROBERT, M. Crack growth model for flight type loading. **Proceeding of the 11th ICAF Symposium in the Netherlands**, 1981.

BEDEN, S. M.; ABDULLAH, S.; ARIFFIN, A. K. Review of fatigue crack propagation models for metallic components. **Eur. J. Scientific**, v. 28, n. 3, p. 364–397, 2009.

BOYCE, Willian E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**, 8 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

CHANG, J. B., "Round-Robin Crack Growth Predictions on Center- Cracked Tension Specimens under Random Spectrum Loading," **Methods and Models for Predicting Fatigue Crack Growth under Random Loading, ASTM STP 748**, J. B. Chang and C. M. Hudson, Eds., American Society for Testing and Materials, 1981, pp. 3-40.

DE KONING, A. U. A simple crack closure model for prediction of fatigue crack growth rate under variable amplitude loading. **ASTM STP 743**, p. 63-85, 1981.

DIETER, George E. **Metalurgia Mecânica**, 2 ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981.

DIRIK, Haydar; YALÇINKAYA, Tuncay. Fatigue crack growth under variable amplitude loading through XFEM. **Procedia Structural Integrity**, v. 2, p. 3073-3080, 2016.

DUGDALE, K.D. Yielding of steel sheets containing slits. **Journal Mechanics Physics Solids**, v. 8, p. 100-104, 1960.

ELBER, W. Fatigue crack closure under cyclic tension. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 2, p. 37-45, 1970.

ELLYIN, F.; LI, H.P., Fatigue crack growth in large specimens with various stress ratios. **Journal of Pressure Vessels Technology**, v. 106, p. 255-260, 1984.

FARAHMAND, Bahram; BOCKRATH, George; GLASSCO, James. **Fatigue and fracture mechanics of high risk parts: application of LEFM & FMDM theory**. Springer US, 1997.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de; NEVES, Aloisio Freiria. **Equações diferenciais aplicadas**. Rio de Janeiro: IMPA, 1997.

FORMAN, R. G.; KEANEY, V. E.; ENGLE, R. N. Numerical analysis of crack propagation in cyclic-loaded structures. **Journal of Basic Engineering**, v.89, p. 549-463, 1967.

FORMAN, R. G.; METTU, S. R. Behavior of surface and corner cracks subjected to tensile and bending loads in Ti-6Al-4V alloy. In: **Fracture Mechanics: 22nd Symposium**, v. 1, **ASTM STP 1131**, p. 519-546, 1992.

GRÓZA, Márton; VÁRADI, Károly. Total fatigue life analysis of a nodular cast iron plate specimen with a center notch. **Advances in Mechanical Engineering**, v. 9, p. 1-11, 2017.

HOEPPNER, D. W.; KRUPP, W. F. Prediction of component life by application of fatigue crack growth knowledge. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 6, p. 47-70, 1974.

HUDSON, C. M. A root-mean-square approach for predicting fatigue crack growth under random loading. **Methods and Models for Predicting Fatigue Crack Growth under Random Loading**. American Society for Testing and Materials – **ASTM**, p. 41-52, 1981.

KHAN, S. U.; ALDERLIESTEN, R. C.; SCHIJVE, J.; BENEDICTUS, R. On the fatigue crack growth prediction under variable amplitude loading. **Computational & Experimental Analysis of Damage Materials** (Edited by D. G. Pavluo), Transworld Research Network, Kerala, 77–105, 2007.

KIM, Sang Tae; TADJIEV, Damir; YANG, Hyun Tae. Fatigue Life Prediction under Random Loading Conditions in 7475-T7351 Aluminum Alloy using the RMS Model. **International Journal of Damage Mechanics**, SAGE Publications, 2006, pp.89-102

LANG, M. A model of fatigue crack growth, part I: phenomenology. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, v. 23, p. 587-601, 2000.

LENER, Gerhard; REITERER, Daniel; HAUSER, Andreas. Numerical simulation of the total service life time of steel constructions including fracture mechanic concepts. **Procedia Engineering**, v. 66, p. 334-342, 2013.

LIGAJ, Bogdan. An analysis of the influence of cycle counting methods on fatigue life calculations of steel. **Scientific Problems of Machines Operation and Maintenance**, v. 4, p. 25-43, 2011.

LIN, J. X.; HUANG, P. Y.; GUO, X. Y.; ZHENG, X. H.; ZHAO, C. Fatigue performance of RC beams strengthened with CFRP under coupling action of temperatures and vehicle random loads. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, v. 42, p. 31-44, 2019.

MACHADO Jr., Waldir Mariano. **APLICAÇÃO DA METODOLOGIA “FAST BOUNDS CRACK” PARA A ESTIMATIVA EFICIENTE DA EVOLUÇÃO DO TAMANHO DE TRINCA**. 2015. 65 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2015.

MACHNIEWICZ, T. Fatigue crack growth prediction models for metallic materials. Part I: overview of prediction concepts. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, v. 36, p. 293-307, 2012a.

MACHNIEWICZ, T. Fatigue crack growth prediction models for metallic materials. Part II: Strip yield model – choices and decisions. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, v. 36, p. 361-373, 2012b.

MAIERHOFER, J.; PIPPAN, R.; GÄNSER, H. P. Modified NASGRO equation for physically short cracks. **International Journal of Fatigue**, v. 59, p. 200-207, 2014.

MARSH, Gabriel; WIGNALL, Colin; THIES, Philipp R.; BARLTROP, Nigel; INCECIK, Atilla; VENUGOPLA, Vengatesan; JOHANNING, Lars. Review and application of

Rainflow residue processing techniques for accurate fatigue damage estimation. **International Journal of Fatigue**, v. 82, p. 757-765, 2016.

NASA. **Fatigue crack growth computer program NASGRO**, Version 3.0—Reference manual. JSC-22267B, NASA, Lyndon B. Johnson Space Center, Texas, 2000.

NEWMAN, J. C. Jr. "A Crack-Closure Model for Predicting Fatigue Crack Growth under Aircraft Spectrum Loading," **Methods and Models for Predicting Fatigue Crack Growth under Random Loading, ASTM STP 748**. J. B. Chang and C. M. Hudson, Eds., American Society for Testing and Materials, 1981, pp. 53-84.

NEWMAN, J. C. Jr. A crack opening stress equation for fatigue crack growth. **International Journal of Fracture**, v. 24, p. R131-R135, 1984.

NOROOZI, A. H.; GLINKA, G.; LAMBERT, S. A two parameter driving force for fatigue crack growth analysis. **International Journal of Fatigue**, v. 27, p. 1277-1296, 2005.

PARIS, P.; ERDOGAN, F. A critical analysis of crack propagation laws. **Journal of Basic Engineering, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers**, p. 528-534, 1963.

POURSAEIDI, Esmail; BAKHTIARI, Hosein. Fatigue crack growth simulation in a first stage of compressor blade. **Engineering Failure Analysis**, v. 45, p. 314-345, 2014.

ROSA, Edison. **Análise de Resistência Mecânica de Peças e Componentes Estruturais: Mecânica da Fratura e Fadiga**. Florianópolis: GRANTE, 2002.

SANTOS, Rodrigo Villaca; ÁVILA, C. R. S. Bounds for the Propagation Model of Crack Forman. **International Journal of Sciences: Basic and Applied Research**, v. 22, p. 219-231, 2015.

SANTOS, Rodrigo Villaca; MACHADO Jr., Waldir Mariano; ÁVILA, C. R. S. Fast crack bounds method applied to crack propagation models under constant amplitude

loading. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 41, p. 20, 2018.

SCHIJVE, J. **Fatigue of Structures and Materials**. KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS, 2001.

SHORT, J. S.; HOEPPNER, D. W. A global/local theory of fatigue crack propagation. **Eng Fract Mech**, v. 33, p. 175–184, 1989.

SUKUMAR, N.; MOËS, N.; MORAN, B.; BELYTCHK, T. Extended finite element for three-dimensional crack modelling. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 48, p. 1549-1570, 2000.

TADA, H.; PARIS, P. C.; IRWIN, G. R. **The stress analysis of cracks handbook**. 3rd ed. New York: ASME Press, 2000.

WANG, K.; WANG, F.; CUI, W.; HAYAT, T.; AHMAD, B. Prediction of short fatigue crack growth of Ti-6Al-4V. **Fatigue Fract Eng Mater Struct**, v. 37, p. 1075–1086, 2014.

WHEELER, O. E. Spectrum loading and crack growth. **Journal of Basic Engineering**, v. 94, p. 181-186, 1972.

WILLENBORG, J.; ENGLE, R. M.; WOOD, H. A. **A Crack growth retardation model using an effective stress concept**. AFFDL-TM-71-1-FBR, 1971.

YAZID, Abdelaziz; ABDELKADER, Nabbou; ABDELMADJID, Hamouine. A state-of-the-art review of the X-FEM for computational fracture mechanics. **Applied Mathematical Modelling**, v. 33, p. 4269-4282, 2009.

ŽIVOJINOVIĆ, Danijela; ARSIĆ, Miodrag; SEDMAK, Aleksandar; KIRIN, Snežana; TOMIĆ, Radoljub. Practical aspects of fail-safe design – calculation of fatigue life of cracked thin-walled structures. **Tehnički vjesnik**, v. 4, p. 609-617.2011.